VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Problemas de geometría: Generalización del teorema de Ceva, iluminación de polígonos convexos, construcciones con regla y compás.

realizado por Raúl Marín Carrera

con número de cuenta 8918054-7 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	**M. en C. Alejandro Bravo Mojica**
Propietario	**M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez**
Propietario	**Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz**
Suplente	**Mat. Luis Alberto Briseño Aguirre**
Suplente	**Dr. Alejandro Illanes Mejía**

Consejo Departamental d[illegible]as

FACULTA[illegible] [illegible]IENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL

A mis padres,

A mis hermanas,

A mis familiares,

A mis amigos de DGSCA,

A mis maestros,
En especial a
Mi director de tesis:
Alejandro Bravo Mojica

A mis sinodales:
Julieta Verdugo Díaz
Luis Alberto Briseño Aguirre
Francisco de Jesús Struck Chávez
Alejandro Illanes Mejía

Y también a:
José Antonio Gómez Ortega
Víctor Pérez
Juan Gómez Aguilar

Índice

1. INTRODUCCIÓN **2**

2. GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE CEVA **4**
2.1. GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE CEVA PARA TRIÁNGULOS 4
2.2. GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE CEVA PARA CUADRILÁTEROS 19
2.3. EJEMPLOS DE PROBLEMAS EN LOS QUE SE UTILIZA LA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE CEVA PARA TRIÁNGULOS. 30
2.4. EJEMPLOS DE PROBLEMAS EN LOS QUE SE UTILIZA LA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE CEVA PARA CUADRILÁTEROS. . . 45

3. ILUMINACIÓN DE POLíGONOS CONVEXOS **56**
3.1. PENTÁGONO Y CUADRILÁTERO 56
3.2. CASO GENERAL 61
3.3. FORMALIZACIÓN DE CONCEPTOS. El ángulo de iluminación. 65

4. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS **70**
4.1. PRIMER PROBLEMA 70
4.2. SEGUNDO PROBLEMA 76

5. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS **78**

6. BIBLIOGRAFÍA **79**

7. APÉNDICE **80**

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de los problemas que se describen en esta tesis comenzó en el año de 1991, antes de entrar a la facultad de ciencias. En ese tiempo me encontraba en los entrenamientos de las olimpiadas de matemáticas, en las que pude participar gracias a las asesorías que daban los matemáticos Juan Gómez Aguilar y Víctor Pérez, en el club de matemáticas del CCH Oriente. Ya en la preparación para la olimpiada internacional, tuve la suerte de recibir entrenamiento de Alejandro Illanes Mejía y José Antonio Gómez Ortega, quienes se encargaron de enseñarnos principalmente (para mí) geometría. También durante ese tiempo estudie el libro de introducción a la geometría moderna de Shively, y fue cuando me di cuenta que lo que más me gustaba de las matemáticas es la geometría.

Uno de los teoremas que más me impresionó en ese momento fue el teorema de Ceva, por eso al leer el capítulo de razón cruzada se me ocurrió que podía generalizarlo de tal forma que el teorema tratara no sólo cevianas, sino rectas en general, entonces después de algunos días encontré las fórmulas que buscaba. Esto dio origen al primer problema de esta tesis, que nos muestra las condiciones necesarias y suficientes que cumplen las intersecciones de tres rectas con los lados de un triángulo, en el caso en que las tres rectas concurran, para lo cual se tienen que tomar en cuenta varios casos, ya que cada recta intersecta a cada lado del triángulo, y en el caso en que las rectas no pasan por los vértices, ni coinciden con los lados y además no concurren sobre ningún lado, obtenemos un total de nueve puntos distintos. Entonces las fórmulas pueden relacionar desde seis hasta los nueve puntos, ya que lo menos que podemos tomar son dos puntos de cada recta para que cada recta quede determinada.

Ya estando en la facultad seguí buscando ejemplos para aplicar esto y tratar de ver si podía generalizarlo a cuadriláteros, como es de esperarse, el caso de los cuadriláteros tiene más casos, pero se tienen que investigar todos los casos, ya que mi objetivo es que quede completamente determinado cuando existe la generalización y cuando no.

Los ejemplos que encontré los divido en dos partes, los de triángulos y los de cuadriláteros. Algunos son problemas originales y otros son de olimpiadas de matemáticas, también incluyo una demostración del teorema de Desargues, en donde se aplican los resultados encontrados.

El segundo tema de esta tesis es un problema que se propuso en un taller de geometría y convexidad que fue realizado en Guanajuato. Este problema lo propuso un matemático cuyo nombre desconozco. El problema consiste en demostrar que todo polígono convexo puede iluminarse colocando lámparas de sesenta grados en los vértices del polígono, por ejemplo, todo triángulo puede iluminarse con sólo una lámpara ya que, en un triángulo siempre tenemos que uno de sus ángulos es menor o igual a sesenta grados. Primeramente encontré las demostraciones para el cuadrilátero y el pentágono, y son incluidas en la tesis, y al dificultárseme encontrar la demostración para el hexágono, tuve que cambiar por completo la forma en que pensaba el problema y que me había dado las primeras soluciones. Hacer esto me llevó a encontrar no sólo la solución para el hexágono, sino la solución general que nos muestra que cualquier polígono convexo puede iluminarse con menos de cuatro lámparas de sesenta grados.

También en esta tesis trato de formalizar los conceptos que estoy manejando en este problema, como que significa exactamente el que un polígono sea iluminado por lámparas de un ángulo dado, además doy nuevas definiciones para seguir investigando propiedades con este tipo de iluminaciones. Así podemos hacernos otras preguntas como, ¿cual es el mínimo ángulo de las lámparas con las que podemos iluminar un n-ágono convexo?, aquí se da una solución para el triángulo en donde encontramos que el ángulo mínimo para el triángulo es el de treinta grados, y se demuestra usando el punto de Brocard del triángulo.

El tercer tema trata de dos problemas de construcciones con regla y compás, uno de ellos es un problema que presentó el Dr. Alejandro Illanes Mejía en la "IV Jornada de Enseñanza de la Geometría", el problema consiste en reconstruir un triángulo conociendo tres de los siguientes datos: el ángulo $\angle A$, el lado opuesto a A: BC, la bisectriz v, la mediana m, y la altura h. En total tenemos nueve casos, de los cuales fueron resueltos ocho, y un caso quedó abierto. El Dr. Illanes nos invitó a que siguiéramos pensándolo, aquí presento la demostración para ese caso.

El último problema es el único que hace uso de álgebra moderna para demostrar la imposibilidad de una construcción que trata de seguir la idea del punto de Brocard. Esta demostración es en esencia igual a la de la imposibilidad de la trisección del ángulo, pero muestra la forma de encontrar el polinomio de tercer grado necesario para la demostración.

Los conocimientos que deben tenerse para poder entender las demostraciones que presento, son los que se ven en los cursos de geometría moderna I y II, se hace uso frecuente de razón cruzada, líneas y puntos armónicos, y segmentos dirigidos. Únicamente se hace uso del álgebra moderna en el último problema de esta tesis.

2. GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE CEVA

Cuando se piensa en generalizar el teorema de Ceva se pueden tomar diversos caminos, como por ejemplo: extender el teorema a cuadriláteros, pentágonos o a polígonos en general, también se puede pensar en generalizar a más dimensiones, o se puede pensar en tomar líneas curvas que pasen por los vértices (véase [4]). La generalización que aquí veremos se enfoca en tomar no únicamente tres rectas cevianas sino tres rectas cualesquiera. Primero nos dedicaremos a la generalización para el triángulo y después para cuadriláteros.

2.1. GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE CEVA PARA TRIÁNGULOS

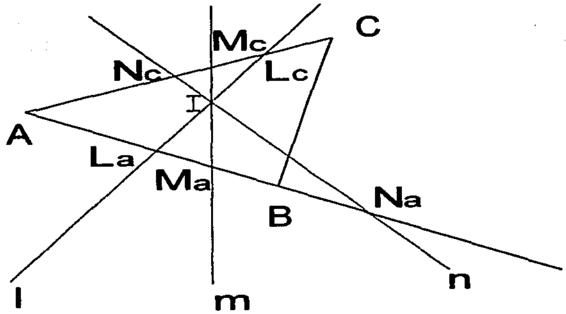
Entonces, tomemos un triángulo ABC y tres rectas l, m y n, nos interesa encontrar las condiciones que deben cumplir las intersecciones de estas rectas con los lados del triángulo para que l, m y n sean concurrentes. Para esto l, m y n deben ser distintas de los lados del ΔABC y distintas entre sí.

Llamemos a, b y c, a las rectas AB, BC, y CA, respectivamente (la razón por la que no los denominamos como comúnmente se hace al llamar a, b y c a los lados opuestos a los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, es por que si después queremos generalizar esto a polígonos, no siempre vamos a tener un lado opuesto como en el caso del triángulo). Sean L_a, L_b y L_c los puntos de intersección de la recta l y las rectas a, b y c respectivamente, y análogamente se definen M_a, M_b, M_c, N_a, N_b, y N_c.

Una relación sencilla es la que da la razón cruzada que nos dice que:

Lema 2.1. *Si l, m y n no pasan por A, entonces concurren en un punto que no está en a ni en c* $\Longleftrightarrow$

$$(AM_a, L_aN_a) = (AM_c, L_cN_c) \iff \frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aN_a}{N_aA} = \frac{AL_c}{L_cM_c}\cdot\frac{M_cN_c}{N_cA} \iff$$
$$\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aN_a}{N_aA}\cdot\frac{N_cA}{M_cN_c}\cdot\frac{L_cM_c}{AL_c} = 1 \iff$$
$$\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_cL_c}{L_cA} = 1 \ldots\ldots \boxed{R1}$$



Demostración:

Necesidad:

Sea I el punto de concurrencia de las tres rectas, como l, m y n son distintas y no pasan por A, tenemos que la recta IA también es distinta de l, m y n por lo tanto podemos tomar la razón cruzada de este haz de rectas y entonces:

$(AM_a, L_aN_a) = I\,(AM_a, L_aN_a) = I\,(AM_c, L_cN_c) = (AM_c, L_cN_c).$

Suficiencia:

Sea I el punto de concurrencia de l y m, y llamemos X al punto de intersección de c y la recta IN_a, entonces por el resultado anterior tenemos

$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aN_a}{N_aA} \cdot \frac{AX}{XM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} = 1$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{AX}{XM_c} = \frac{L_aM_a}{AL_a} \cdot \frac{N_aA}{M_aN_a} \cdot \frac{L_cA}{M_cL_c}$$

pero por hipótesis también tenemos que

$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aN_a}{N_aA} \cdot \frac{AN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} = 1$$

es decir

$$\frac{AN_c}{N_cM_c} = \frac{L_aM_a}{AL_a} \cdot \frac{N_aA}{M_aN_a} \cdot \frac{L_cA}{M_cL_c}$$

Como m no pasa por A, $M_c \neq A$ de manera que AM_c es un segmento no degenerado y como X divide a AM_c en la misma razón en que N_c lo hace, vemos que $N_c = X$ por tanto n también pasa por I. *Q.E.D.*

Esta relación es un ejemplo de lo que queremos, sólo que ésta no toma en cuenta todos los lados del $\triangle ABC$, pero nos servirá como base para las demás. Como lo que queremos es que se tomen en cuenta todos los lados del triángulo podemos usar el teorema de Menelao en $\boxed{R1}$ para integrar el lado b en la fórmula.

El teorema de Menelao nos dice que si n no pasa por los vértices del $\triangle ABC$, entonces $\frac{AN_a}{N_aB} \cdot \frac{BN_b}{N_bC} \cdot \frac{CN_c}{N_cA} = -1$ lo que es lo mismo que

$$-\frac{1}{N_aB} \cdot \frac{BN_b}{N_bC} \cdot \frac{CN_c}{1} = \frac{AN_c}{N_aA}$$

y al sustituir esto en $\boxed{R1}$ nos da

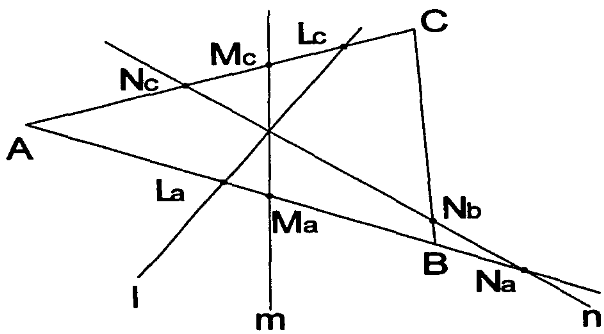
$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aN_a}{N_aB} \cdot \frac{BN_b}{N_bC} \cdot \frac{CN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \boxed{R2}$$

Entonces uniendo las condiciones de $\boxed{R1}$ y del teorema de Menelao tenemos las condiciones para $\boxed{R2}$:

1. Si n no pasa por los vértices del $\triangle ABC$,

2. l y m no pasan por A,

entonces l, m y n concurren si y sólo si sucede $\boxed{R2}$ (siempre suponemos que l, m y n son distintas entre sí).



Podemos aún hacer algo más, supongamos que tenemos todas las condiciones de $\boxed{R2}$, pero permitamos que n pase por A, entonces si l, m y n concurren, podemos tomar una recta n' y hacerla tender a n, y evidentemente tenemos:

$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aN_a}{N_aB} \cdot \frac{BN_b}{N_bC} \cdot \frac{CN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} = \lim_{n' \to n} \frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aN'_a}{N'_aB} \cdot \frac{BN'_b}{N'_bC} \cdot \frac{CN'_c}{N'_cM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} = -1$$

Ahora, sí lo que tenemos es $\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aN_a}{N_aB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_cL_c}{L_cA}=-1$ y queremos ver que l, m y n concurren, hacemos lo mismo que en la segunda parte de la demostración del lema, tomemos I como el punto de intersección de m y n, y L'_c la intersección de la rectas IL_a y c, entonces llegaremos igual, a que L'_c divide al segmento M_cA en la misma razón en que lo hace L_c y por lo tanto $L'_c=L_c$, con lo que l, m y n concurren, entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2. *Si n no pasa por B ni por C, y l y m no pasan por A entonces l, m y n concurren en un punto que no está en a ni en c si y sólo si*

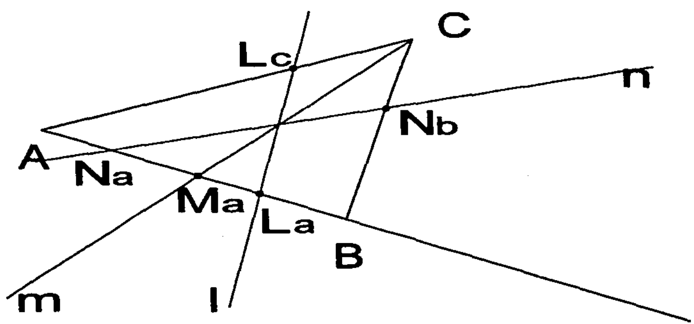
$$\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aN_a}{N_aB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_cL_c}{L_cA}=-1$$

Corolario 2.3. *Si en este teorema tenemos una ceviana, digamos m y suponiendo que pasa por C, entonces $N_cM_c=N_cC$ y la relación se reduce a*

$$\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aN_a}{N_aB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CL_c}{L_cA}=1$$

Corolario 2.4. *Si tenemos que además n pasa por A la relación se reduce a:*

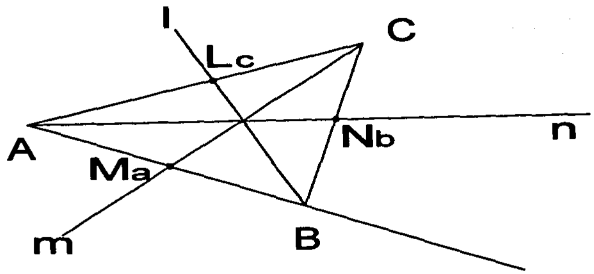
$$\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aA}{AB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CL_c}{L_cA}=1$$



Corolario 2.5. *Y si tenemos que l pasa por B tendremos:*

$$1=\frac{AB}{BM_a}\cdot\frac{M_aA}{AB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CL_c}{L_cA}=\frac{AM_a}{M_aB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CL_c}{L_cA}$$

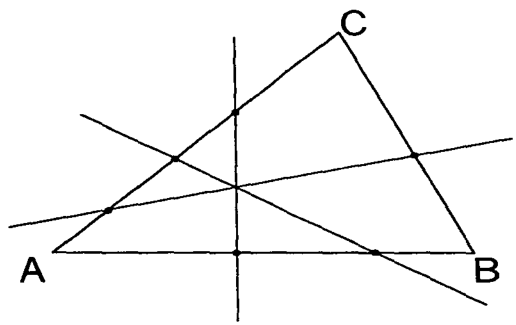
siendo este último el teorema de Ceva.



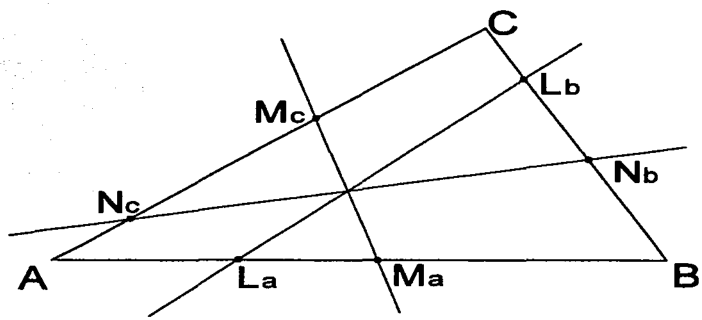
(El primer corolario puede demostrarse fácilmente también usando el teorema de Menelao en los triángulos AM_aC y M_aBC.)

Ya hemos avanzado un poco más con este teorema dado que ya toma en cuenta a todos los lados del $\triangle ABC$, pero toma en cuenta a L_a, L_c, M_a, M_c, N_a, N_b y N_c, con lo cual se necesitan tres puntos de la recta n. Como una recta queda determinada con dos de sus puntos, lo ideal sería que usáramos sólo dos puntos de cada recta, en total seis puntos de entre los nueve, entonces tenemos dos casos:

- Que tres de esos puntos estén en uno de los lados del $\triangle ABC$, dos en otro y el último en el último lado.



- Que cada lado del $\triangle ABC$ tenga dos de esos puntos.



Para el primer caso, tomemos $\boxed{R1}$ y tratemos de usar el teorema de Menelao ahí. Si n no pasa por los vértices del triángulo tenemos por el teorema de Menelao $\frac{AN_a}{N_aB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}=-1$, de aquí

$$\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}=\frac{N_aB}{N_aA}=\frac{N_aA+AB}{N_aA}=1+\frac{AB}{N_aA}$$

Por tanto

$$\frac{1}{N_aA}=\left(\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}-1\right)\frac{1}{AB}$$

de manera que

$$\frac{M_aN_a}{N_aA}=\frac{M_aA+AN_a}{N_aA}=\frac{M_aA}{N_aA}-1=\left(\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}-1\right)\frac{M_aA}{AB}-1$$

Por otra parte tenemos $\boxed{R1}$:$1=\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_cL_c}{L_cA}$ en donde podemos sustituir el valor de $\frac{M_aN_a}{N_aA}$ para así poder deshacernos del punto N_a, y obtener

$$1=\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\left(\left(\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}-1\right)\frac{M_aA}{AB}-1\right)\cdot\frac{AN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_cL_c}{L_cA}$$

así que

$$1=-\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aA}{AB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_cL_c}{L_cA}-\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aA}{AB}\cdot\frac{AN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_cL_c}{L_cA}-\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{AN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_cL_c}{L_cA}$$

multiplicando por -1 y simplificando

$$-1 = \frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aA}{AB} \cdot \frac{BN_b}{N_bC} \cdot \frac{CN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} + \frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{AN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} \cdot \left(\frac{M_aA}{AB} + 1\right) =$$

$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aA}{AB} \cdot \frac{BN_b}{N_bC} \cdot \frac{CN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} + \frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{AN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} \cdot \left(\frac{M_aA + AB}{AB}\right) =$$

$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aA}{AB} \cdot \frac{BN_b}{N_bC} \cdot \frac{CN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} + \frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{AN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} \cdot \left(\frac{M_aB}{AB}\right)$$

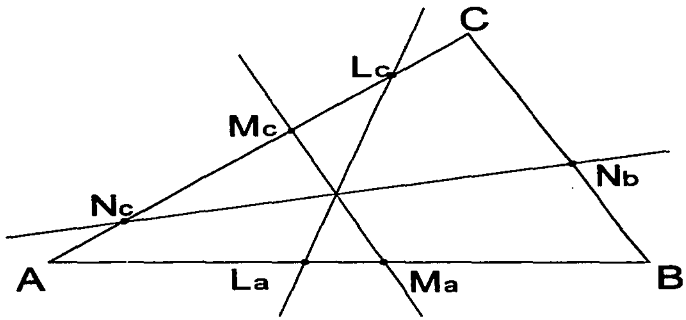
y factorizando obtenemos

$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} \left(\frac{M_aA}{AB} \cdot \frac{BN_b}{N_bC} \cdot \frac{CN_c}{N_cM_c} + \frac{AN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_aB}{AB}\right)$$

Al igual que con $\boxed{R2}$ se puede demostrar que si n pasa por A o B, lo anterior sigue siendo válido, entonces tenemos el siguiente teorema que resuelve el primer caso de tres puntos en un lado, dos en otro y uno en el último.

Teorema 2.6. *Si n no pasa por C, y l, m no pasan por A entonces l, m y n concurren en un punto que no está en a ni en c si y sólo si*

$$-1 = \frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_cL_c}{L_cA} \left(\frac{M_aA}{AB} \cdot \frac{BN_b}{N_bC} \cdot \frac{CN_c}{N_cM_c} + \frac{AN_c}{N_cM_c} \cdot \frac{M_aB}{AB}\right)$$



Para el segundo caso basta usar el teorema de Menelao y despejar $\frac{M_cL_c}{L_cA}$, y de la misma forma en que encontramos $\frac{M_aN_a}{N_aA}$, encontramos que si l no pasa por los vértices del ΔABC,

$$\frac{M_cL_c}{L_cA} = \left(-\frac{L_aB}{AL_a} \cdot \frac{L_bC}{BL_b} + 1\right) \frac{M_cA}{CA} - 1 = -\frac{L_aB}{AL_a} \cdot \frac{L_bC}{BL_b} \cdot \frac{M_cA}{CA} + \frac{M_cA}{CA} - 1$$

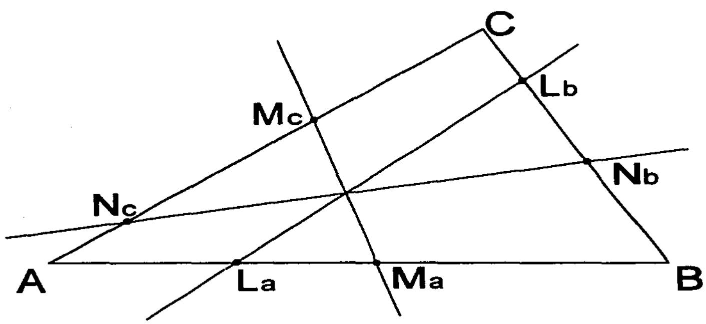
y sustituyendo en el teorema anterior obtenemos:

$$-1=\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\left(\frac{M_aA}{AB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cM_c}+\frac{AN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_aB}{AB}\right)\cdot\left(-\frac{L_aB}{AL_a}\cdot\frac{L_bC}{BL_b}\cdot\frac{M_cA}{CA}+\frac{M_cC}{CA}\right)$$

Y otra vez, se ve que si l pasa por A o por C se sigue dando esta relación, entonces tenemos el teorema para el caso en el que hay dos puntos en cada lado del triángulo:

Teorema 2.7. *Si n no pasa por C, y l no pasa por B, y m no pasa por A, entonces l, m y n concurren en un punto que no está en a ni en c si y sólo si*

$$-1=\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\left(\frac{M_aA}{AB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cM_c}+\frac{AN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_aB}{AB}\right)\cdot\left(-\frac{L_aB}{AL_a}\cdot\frac{L_bC}{BL_b}\cdot\frac{M_cA}{CA}+\frac{M_cC}{CA}\right)$$



Con esto hemos logrado nuestro objetivo, pero, si analizamos un poco el teorema de Ceva nos daremos cuenta que dicho teorema se puede pensar al menos de dos formas, una es pensarlo como una relación que sucede entre las longitudes de los segmentos que van de los vértices a las intersecciones de las rectas en cuestión, si y sólo si las rectas concurren, en otras palabras nos interesan las longitudes de dichos segmentos; la otra forma es pensarlo como una relación entre las razones en que esos puntos dividen a los lados sin importarnos para nada las longitudes. Los teoremas anteriores son de la primera forma, ya que para poder usarlo se deben conocer ciertas longitudes (como la de AB), entonces veamos qué resultados podemos obtener para tener un resultado únicamente con las razones en que las intersecciones de las rectas con los lados dividen a los lados.

Partiremos también del lema 1

Si l, m y n no pasan por A, entonces concurren en un punto que no está en a ni en c si y sólo si

$$\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_c}{N_cM_c}\cdot\frac{M_cL_c}{L_cA}=1 \iff \frac{M_aN_a}{N_aA}\cdot\frac{M_cL_c}{L_cA}=\frac{N_cM_c}{AN_c}\cdot\frac{L_aM_a}{AL_a} \iff$$
$$\left(\frac{M_aA+AN_a}{N_aA}\right)\left(\frac{M_cA+AL_c}{L_cA}\right)=\left(\frac{N_cA+AM_c}{AN_c}\right)\left(\frac{L_aA+AM_a}{AL_a}\right) \iff$$
$$\left(\frac{M_aA}{N_aA}-1\right)\left(\frac{M_cA}{L_cA}-1\right)=\left(\frac{AM_c}{AN_c}-1\right)\left(\frac{AM_a}{AL_a}-1\right) \iff$$

(multiplicando todo por $\frac{1}{M_aA}\frac{1}{M_cA}$)

$$\left(\frac{1}{N_aA}-\frac{1}{M_aA}\right)\left(\frac{1}{L_cA}-\frac{1}{M_cA}\right)=\left(-\frac{1}{AN_c}-\frac{1}{M_cA}\right)\left(-\frac{1}{AL_a}-\frac{1}{M_aA}\right) \iff$$

(multiplicando todo por $AB\cdot AC$)

$$\left(\frac{AB}{N_aA}-\frac{AB}{M_aA}\right)\left(\frac{AC}{L_cA}-\frac{AC}{M_cA}\right)=\left(-\frac{AC}{AN_c}-\frac{AC}{M_cA}\right)\left(-\frac{AB}{AL_a}-\frac{AB}{M_aA}\right) \iff$$

(descomponiendo AB y AC en sumandos que coincidan con los denominadores)

$$\left(\frac{AN_a+N_aB}{N_aA}-\frac{AM_a+M_aB}{M_aA}\right)\left(\frac{AL_c+L_cC}{L_cA}-\frac{AM_c+M_cC}{M_cA}\right) =$$
$$\left(-\frac{AN_c+N_cC}{AN_c}-\frac{AM_c+M_cC}{M_cA}\right)\left(-\frac{AL_a+L_aB}{AL_a}-\frac{AM_a+M_aB}{M_aA}\right) \iff$$

(simplificando)

$$\left(-1+\frac{N_aB}{N_aA}+1-\frac{M_aB}{M_aA}\right)\left(-1+\frac{L_cC}{L_cA}+1-\frac{M_cC}{M_cA}\right)=$$
$$\left(-1-\frac{N_cC}{AN_c}+1-\frac{M_cC}{M_cA}\right)\left(-1-\frac{L_aB}{AL_a}+1-\frac{M_aB}{M_aA}\right) \iff$$
$$\left(\frac{N_aB}{N_aA}-\frac{M_aB}{M_aA}\right)\left(\frac{L_cC}{L_cA}-\frac{M_cC}{M_cA}\right)=\left(-\frac{N_cC}{AN_c}-\frac{M_cC}{M_cA}\right)\left(-\frac{L_aB}{AL_a}-\frac{M_aB}{M_aA}\right) \iff$$

(haciendo las multiplicaciones)

$$\frac{N_aB}{N_aA}\cdot\frac{L_cC}{L_cA}-\frac{N_aB}{N_aA}\cdot\frac{M_cC}{M_cA}-\frac{M_aB}{M_aA}\cdot\frac{L_cC}{L_cA} =$$
$$\frac{N_cC}{AN_c}\cdot\frac{L_aB}{AL_a}+\frac{N_cC}{AN_c}\cdot\frac{M_aB}{M_aA}+\frac{M_cC}{M_cA}\cdot\frac{L_aB}{AL_a} \iff$$

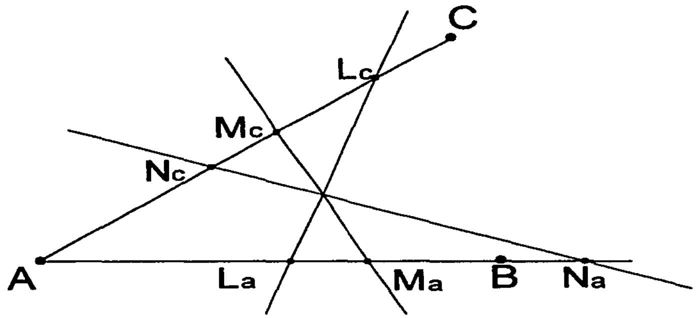
(pasando todos los términos del lado izquierdo de la igualdad)

$$\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CL_c}{L_cA}-\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CM_c}{M_cA}-\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{CL_c}{L_cA}-\frac{CN_c}{N_cA}\cdot\frac{BL_a}{L_aA}+\frac{CN_c}{N_cA}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}+\frac{CM_c}{M_cA}\cdot\frac{BL_a}{L_aA}=0$$

Aquí obtuvimos una condición necesaria y suficiente teniendo como referencia dos segmentos no paralelos AB y AC. Este será nuestro siguiente lema:

Lema 2.8. *Si l, m y n no pasan por A entonces concurren en un punto que no está en AB ni en AC si y sólo si*

$$\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CL_c}{L_cA}-\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CM_c}{M_cA}-\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{CL_c}{L_cA}-\frac{CN_c}{N_cA}\cdot\frac{BL_a}{L_aA}+\frac{CN_c}{N_cA}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}+\frac{CM_c}{M_cA}\cdot\frac{BL_a}{L_aA}=0$$



Si l no pasa por los vértices del ΔABC podemos usar el teorema de Menelao para despejar $\frac{CL_c}{L_cA}$, y al sustituir en el lema nos da:

$$-\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{BL_a}{L_aA}-\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CM_c}{M_cA}+\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{BL_a}{L_aA}-\frac{CN_c}{N_cA}\cdot\frac{BL_a}{L_aA}+\frac{CN_c}{N_cA}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}+\frac{CM_c}{M_cA}\cdot\frac{BL_a}{L_aA}=0$$

Y multiplicando por $\frac{AL_a}{L_aB}$ y ordenando tenemos:

$$\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}-\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CM_c}{M_cA}-\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}+\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}-\frac{CN_c}{N_cA}+\frac{CM_c}{M_cA}=0$$

$\Longleftrightarrow$

$$-\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}+\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CM_c}{M_cA}+\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}-\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}+\frac{CN_c}{N_cA}-\frac{CM_c}{M_cA}=0$$

Se puede demostrar también que si l pasa por C o A esto sigue siendo válido.

Como puede verse, todos los factores en todos los términos de la expresión anterior son razones de división de los lados AB, BC y CA, que es lo que queríamos. Esto nos permitirá olvidarnos de las longitudes de los segmentos y fijarnos únicamente en las razones, por ejemplo, no necesitamos saber la longitud del segmento AL_a si ya conocemos el valor de la razón $\frac{AL_a}{L_aB}$, ni las longitudes de los lados, lo que nos permite tener una independencia del tamaño de los triángulos.

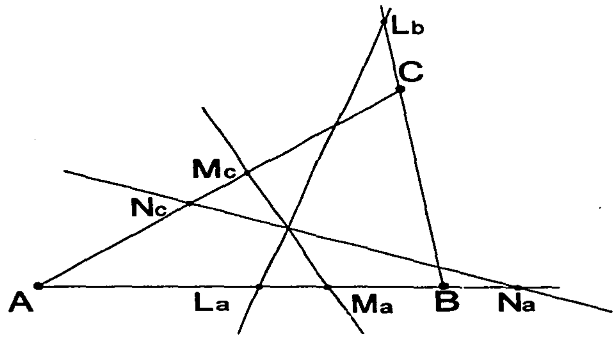
Entonces podemos introducir una nueva notación para esta forma de pensar:

Notación: L_a es el punto de intersección de la recta l y el lado a (prolongado), pero también podemos pensar a L_a como la razón en que el punto divide al lado AB, entonces I_j será la razón en que el punto de intersección de la recta i y el lado j divide al segmento JK, donde JK es un lado del triángulo orientado positivamente.

Estamos usando tres puntos en AB: L_a, M_a y N_a, dos puntos de CA: N_c y M_c, y un punto de BC: L_b, con lo cual tenemos el teorema para el primer caso:

Teorema 2.9. *Si n, m no pasan por A, y l no pasa por B, entonces concurren en un punto que no está en a ni en c si y sólo si*

$$-\frac{L_a}{M_a}N_c+\frac{L_a}{N_a}M_c-\frac{1}{M_a\cdot L_b}+\frac{1}{N_a\cdot L_b}-M_c+N_c=0$$



Para el segundo caso, queremos usar dos puntos de cada lado, digamos L_a y M_a en a, L_b y N_b en b, y M_c y N_c en c. Para esto una simple aplicación del teorema de Menelao para encontrar $\frac{BN_a}{N_aA}$ y sustituirlo en el teorema anterior nos dará lo que buscamos. Si n no pasa por los vértices del triángulo tenemos $\frac{BN_a}{N_aA} = -\frac{BN_b}{N_bC} \cdot \frac{CN_c}{N_cA}$ y al sustituirlo obtenemos:

$$-\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}-\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}\cdot\frac{CM_c}{M_cA}-\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}-\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}+\frac{CN_c}{N_cA}-\frac{CM_c}{M_cA}=0$$

y multiplicando todo por $\frac{AN_c}{N_cC}$ y ordenando:

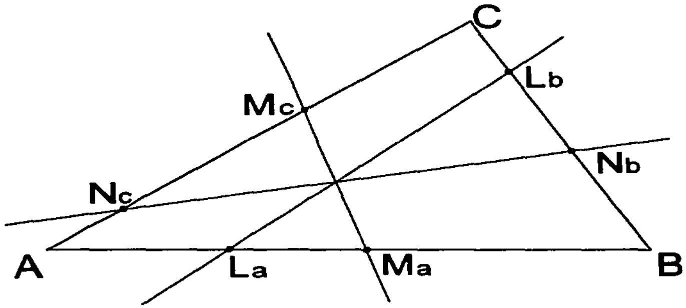
$$\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CM_c}{M_cA}+\frac{AN_c}{N_cC}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}+\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}+\frac{BN_b}{N_bC}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}+\frac{AN_c}{N_cC}\cdot\frac{CM_c}{M_cA}=1$$

Lo único que se necesita aquí es que l no pase por B, m no pase por A, y que n no pase por C.

Entonces tenemos el teorema para el segundo caso:

Teorema 2.10. *Si l no pasa por B, m no pasa por A, y n no pasa por C, entonces l, m, n concurren en un punto que no está en a ni en c si y sólo si*

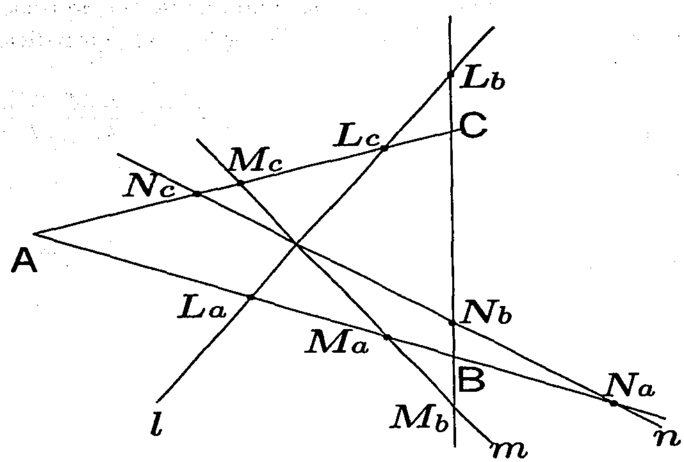
$$L_aM_cN_b + \frac{1}{L_bM_aN_c} + \frac{L_a}{M_a} + \frac{M_c}{N_c} + \frac{N_b}{L_b} = 1$$



Con esto tenemos completamente determinados los casos en que queremos relacionar sólo dos puntos de intersección de cada recta, pero, nos podría interesar también encontrar una relación cíclica en la cual se relacionaran todos los puntos de encuentro con los lados, eso es lo que veremos a continuación: (ahora no usaremos la notación que definimos antes)

Teorema 2.11. *Si l no pasa por los vértices A, C, n no pasa por A, B, y m no pasa por B, C entonces l, m y n concurren en un punto que no está en los lados del triángulo si y sólo si*

$$\frac{AL_a}{L_aM_a}\cdot\frac{M_aN_a}{N_aB}\cdot\frac{BN_b}{N_bL_b}\cdot\frac{L_bM_b}{M_bC}\cdot\frac{CM_c}{M_cN_c}\cdot\frac{N_cL_c}{L_cA}=-1$$



Demostración

Necesidad:

Por razón cruzada tenemos que si l, m y n concurren en un punto que no está en b ni en c, y l, m, n no pasan por C entonces:

$$\frac{CN_c}{N_cL_c} \cdot \frac{L_cM_c}{M_cC} = \frac{CN_b}{N_bL_b} \cdot \frac{L_bM_b}{M_bC} \Longrightarrow \frac{1}{N_bC} \cdot CN_c \cdot M_cL_c = \frac{1}{N_bL_b} \cdot \frac{L_bM_b}{M_bC} \cdot M_cC \cdot N_cL_c$$

y sustituyéndolo en el teorema 2 tenemos:

$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aN_a}{N_aB} \cdot \frac{BN_b}{N_bL_b} \cdot \frac{L_bM_b}{M_bC} \cdot \frac{CM_c}{M_cN_c} \cdot \frac{N_cL_c}{L_cA} = -1$$

con las condiciones de que el punto de concurrencia no esté sobre los lados del triángulo además de que l no pase por A, n no pase por B, y m no pase por C.

Suficiencia:

Primero supongamos que l no pasa por B:

La relación sucede si y sólo si

$$-\frac{M_aN_a}{N_aB} \cdot \frac{L_bM_b}{M_bC} \cdot \frac{N_cL_c}{L_cA} = \frac{L_aM_a}{AL_a} \cdot \frac{N_bL_b}{BN_b} \cdot \frac{M_cN_c}{CM_c}$$

$$\iff$$

$$-\frac{M_aB+BN_a}{N_aB}\cdot\frac{L_bC+CM_b}{M_bC}\cdot\frac{N_cA+AL_c}{L_cA}=\frac{L_aA+AM_a}{AL_a}\cdot\frac{N_bB+BL_b}{BN_b}\cdot\frac{M_cC+CN_c}{CM_c}$$

$$\iff$$

$$-\left(\frac{M_aB}{N_aB}-1\right)\cdot\left(\frac{L_bC}{M_bC}-1\right)\cdot\left(\frac{N_cA}{L_cA}-1\right)=\left(-1+\frac{AM_a}{AL_a}\right)\cdot\left(-1+\frac{BL_b}{BN_b}\right)\cdot\left(-1+\frac{CN_c}{CM_c}\right)$$

$$\iff$$

(multiplicando por $\frac{1}{M_aB}\frac{1}{L_bC}\frac{1}{N_cA}$)

$$-\left(\frac{1}{N_aB}-\frac{1}{M_aB}\right)\cdot\left(\frac{1}{M_bC}-\frac{1}{L_bC}\right)\cdot\left(\frac{1}{L_cA}-\frac{1}{N_cA}\right)=$$
$$\left(-\frac{1}{M_aB}+\frac{1}{AL_a}\cdot\frac{AM_a}{M_aB}\right)\cdot\left(-\frac{1}{L_bC}+\frac{1}{BN_b}\cdot\frac{BL_b}{L_bC}\right)\cdot\left(-\frac{1}{N_cA}+\frac{1}{CM_c}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}\right)$$

$$\iff$$

(multiplicando por $AB\cdot BC\cdot CA$)

$$-\left(\frac{AB}{N_aB}-\frac{AB}{M_aB}\right)\cdot\left(\frac{BC}{M_bC}-\frac{BC}{L_bC}\right)\cdot\left(\frac{CA}{L_cA}-\frac{CA}{N_cA}\right)=$$
$$\left(-\frac{AB}{M_aB}+\frac{AB}{AL_a}\cdot\frac{AM_a}{M_aB}\right)\cdot\left(-\frac{BC}{L_bC}+\frac{BC}{BN_b}\cdot\frac{BL_b}{L_bC}\right)\cdot\left(-\frac{CA}{N_cA}+\frac{CA}{CM_c}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}\right)$$

$$\iff$$

(descomponiendo AB, BC y CA, en sumandos que coincidan con los denominadores)

$$-\left(\frac{AN_a+N_aB}{N_aB}-\frac{AM_a+M_aB}{M_aB}\right)\cdot\left(\frac{BM_b+M_bC}{M_bC}-\frac{BL_b+L_bC}{L_bC}\right)\cdot$$
$$\left(\frac{CL_c+L_cA}{L_cA}-\frac{CN_c+N_cA}{N_cA}\right)=$$
$$\left(-\frac{AM_a+M_aB}{M_aB}+\frac{AL_a+L_aB}{AL_a}\cdot\frac{AM_a}{M_aB}\right)\cdot\left(-\frac{BL_b+L_bC}{L_bC}+\frac{BN_b+N_bC}{BN_b}\cdot\frac{BL_b}{L_bC}\right)\cdot$$
$$\left(-\frac{CN_c+N_cA}{N_cA}+\frac{CM_c+M_cA}{CM_c}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}\right)$$

$\Longleftrightarrow$
(simplificando)

$$-\left(\frac{AN_a}{N_aB}-\frac{AM_a}{M_aB}\right)\cdot\left(\frac{BM_b}{M_bC}-\frac{BL_b}{L_bC}\right)\cdot\left(\frac{CL_c}{L_cA}-\frac{CN_c}{N_cA}\right)=$$
$$\left(-1+\frac{L_aB}{AL_a}\cdot\frac{AM_a}{M_aB}\right)\cdot\left(-1+\frac{N_bC}{BN_b}\cdot\frac{BL_b}{L_bC}\right)\cdot\left(-1+\frac{M_cA}{CM_c}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}\right)$$

$\Longleftrightarrow$
(multiplicando por $\frac{AL_a}{L_aB}$ y usando el teorema de Menelao para ver que $\frac{CL_c}{L_cA}\frac{AL_a}{L_aB}=\frac{L_bC}{BL_b}$)

$$\left(\frac{AN_a}{N_aB}-\frac{AM_a}{M_aB}\right)\cdot\left(\frac{BM_b}{M_bC}-\frac{BL_b}{L_bC}\right)\cdot\left(\frac{L_bC}{BL_b}+\frac{CN_c}{N_cA}\cdot\frac{AL_a}{L_aB}\right)=$$
$$\left(-\frac{AL_a}{L_aB}+\frac{AM_a}{M_aB}\right)\cdot\left(-1+\frac{N_bC}{BN_b}\cdot\frac{BL_b}{L_bC}\right)\cdot\left(-1+\frac{M_cA}{CM_c}\cdot\frac{CN_c}{N_cA}\right)$$

aquí ya llegamos a lo que queremos, se puede despejar $\frac{AL_a}{L_aB}$ y L_c no aparece, por lo tanto, si I es el punto de concurrencia de m y n, y l' es la recta que pasa por I y por L_b entonces L'_a divide en la misma razón a AB que L_a, de manera que $L_a = L'_a$, por tanto l, m, n concurren en I.

El segundo caso es el que sucede cuando l pasa por B: si eso sucede entonces la relación se reduce a:

$$\frac{AB}{BM_a}\cdot\frac{M_aN_a}{N_aB}\cdot\frac{BN_b}{N_bB}\cdot\frac{BM_b}{M_bC}\cdot\frac{CM_c}{M_cN_c}\cdot\frac{N_cL_c}{L_cA}=-1$$

esto quiere decir que como n no pasa por A, entonces L_c divide al segmento N_cA en la misma razón que L'_c para cualquier l' que pase por B y que concurra con m y n, por lo tanto $L_c = L'_c$ y l, m, n concurren. *Q.E.D.*

Con esto hemos terminado el desarrollo teórico de nuestras generalizaciones del teorema de Ceva para el triángulo, más adelante, veremos algunos ejemplos prácticos aplicados a algunos problemas, pero, a continuación analizaremos que es lo que sucede en el caso de los cuadriláteros.

2.2. GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE CEVA PARA CUADRILÁTEROS

Con lo visto anteriormente, surge la pregunta de si podemos encontrar relaciones como las del triángulo para cuadriláteros, entonces en esta sección analizaremos a fondo el tema con el objetivo de determinar la posibilidad o imposibilidad de obtener este tipo de generalizaciones, para esto tenemos que verificar varios casos, incluidos en estos algunos muy particulares, como los de los paralelogramos. Entonces, comencemos.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, I_j es (como lo hemos estado usando) el punto de intersección de la recta i y el lado j, primero probaremos una generalización del teorema de Menelao:

Lema 2.12. *Si l es una recta que no pasa por los vértices del cuadrilátero $ABCD$, entonces*

$$\frac{AL_a}{L_aB} \cdot \frac{BL_b}{L_bC} \cdot \frac{CL_c}{L_cD} \cdot \frac{DL_d}{L_dA} = 1$$

Dem. sea P el punto de intersección de l y la recta diagonal AC, entonces aplicando el teorema de Menelao al ΔABC obtenemos

$$\frac{AL_a}{L_aB} \cdot \frac{BL_b}{L_bC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$$

y aplicando al ΔCDA tenemos

$$\frac{CL_c}{L_cD} \cdot \frac{DL_d}{L_dA} \cdot \frac{AP}{PC} = -1$$

entonces, despejando $\frac{CP}{PA}$ y sustituyéndolo tenemos:

$$\frac{AL_a}{L_aB} \cdot \frac{BL_b}{L_bC} \cdot \frac{CL_c}{L_cD} \cdot \frac{DL_d}{L_dA} = 1$$

Q.E.D.

De la forma anterior vemos que el teorema de Menelao se puede generalizar a cualquier polígono y la relación será igual a 1 si el polígono tiene un número par de lados, o a -1 si tiene un número impar, además puede verse que el inverso no es cierto.

Siguiendo el mismo método podemos generalizar el teorema 2.11 pag 15.

Teorema 2.13. *Si l no pasa por A, m no pasa por C, n no pasa por B ni D entonces si l, m, n concurren, se tiene que*

$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aN_a}{N_aB} \cdot \frac{BN_b}{N_bL_b} \cdot \frac{L_bM_b}{M_bC} \cdot \frac{CM_c}{M_cL_c} \cdot \frac{L_cN_c}{N_cD} \cdot \frac{DN_d}{N_dM_d} \cdot \frac{M_dL_d}{L_dA} = 1$$

Dem. Sean P, Q, R los puntos de intersección de las rectas (m y CA), (n y CA) y (l y CA), respectivamente. Aplicando el teorema 2.11 (pag 15) al ΔABC y al ΔADC tenemos: Si l no pasa por A, n no pasa por B, y m no pasa por C, entonces l, m y n concurren en un punto que no está en los lados del triángulo si y sólo si

$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aN_a}{N_aB} \cdot \frac{BN_b}{N_bL_b} \cdot \frac{L_bM_b}{M_bC} \cdot \frac{CP}{PQ} \cdot \frac{QR}{RA} = -1$$

y

Si l no pasa por A, n no pasa por D, y m no pasa por C, entonces l, m y n concurren en un punto que no está en los lados del triángulo si y sólo si

$$\frac{AL_d}{L_dM_d} \cdot \frac{M_dN_d}{N_dD} \cdot \frac{DN_c}{N_cL_c} \cdot \frac{L_cM_c}{M_cC} \cdot \frac{CP}{PQ} \cdot \frac{QR}{RA} = -1$$

entonces, despejando $\frac{CP}{PQ} \cdot \frac{QR}{RA}$ de uno y sustituyendo en el otro llegamos a:

$$\frac{AL_a}{L_aM_a} \cdot \frac{M_aN_a}{N_aB} \cdot \frac{BN_b}{N_bL_b} \cdot \frac{L_bM_b}{M_bC} \cdot \frac{CM_c}{M_cL_c} \cdot \frac{L_cN_c}{N_cD} \cdot \frac{DN_d}{N_dM_d} \cdot \frac{M_dL_d}{L_dA} = 1$$

En el caso en que l, m, n concurran en la diagonal AC, podemos usar límites para demostrar que sigue siendo válido.

Q.E.D.

De la misma forma este teorema se puede generalizar a cualquier polígono, y se puede ver también que el inverso no es válido.

Tratemos de encontrar una condición necesaria y suficiente que tome en cuenta la menor cantidad posible de puntos en cada lado del cuadrilátero. Para esto podemos basarnos en alguna de las formas en que lo hicimos para el triángulo, por ejemplo, nos basaremos en la forma en que llegamos al teorema 2.9 (Pág. 14), entonces, usaremos el lema 2.8 (Pág. 13):

Si l, m y n no pasan por A, entonces concurren en un punto que no está en AB ni en AD, si y sólo si

$$\frac{BN_a}{N_aA} \cdot \frac{DL_d}{L_dA} - \frac{BN_a}{N_aA} \cdot \frac{DM_d}{M_dA} - \frac{BM_a}{M_aA} \cdot \frac{DL_d}{L_dA} - \frac{DN_d}{N_dA} \cdot \frac{BL_a}{L_aA} + \frac{DN_d}{N_dA} \cdot \frac{BM_a}{M_aA} + \frac{DM_d}{M_dA} \cdot \frac{BL_a}{L_aA} = 0$$

podemos ahora usar el teorema de Menelao generalizado y despejar $\frac{DL_d}{L_dA}$ para después sustituirlo:

Si l no pasa por los vértices del cuadrilátero $ABCD$ tenemos

$$\frac{AL_a}{L_aB} \cdot \frac{BL_b}{L_bC} \cdot \frac{CL_c}{L_cD} \cdot \frac{DL_d}{L_dA} = 1 \iff \frac{DL_d}{L_dA} = \frac{L_aB}{AL_a} \cdot \frac{L_bC}{BL_b} \cdot \frac{L_cD}{CL_c}$$

y al sustituir tenemos:

$$\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{L_aB}{AL_a}\cdot\frac{L_bC}{BL_b}\cdot\frac{L_cD}{CL_c}-\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{DM_d}{M_dA}-\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{L_aB}{AL_a}\cdot\frac{L_bC}{BL_b}\cdot\frac{L_cD}{CL_c}-\frac{DN_d}{N_dA}\cdot\frac{BL_a}{L_aA}+$$
$$\frac{DN_d}{N_dA}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}+\frac{DM_d}{M_dA}\cdot\frac{BL_a}{L_aA}=0$$

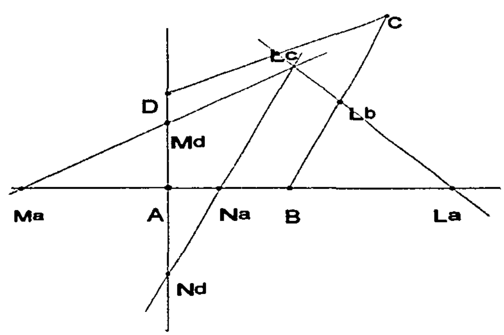
Multiplicando por $\frac{AL_a}{L_aB}$ y ordenando:

$$\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{DN_d}{N_dA}-\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{DM_d}{M_dA}+\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}-\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}$$
$$-\frac{DN_d}{N_dA}+\frac{DM_d}{M_dA}=0$$

Entonces, tenemos:

Teorema 2.14. *Si m, n no pasan por A, n no pasa por D, y l no pasa por B ni por C, entonces, l, m, n concurren en un punto que no está en AB, ni en AD, si y sólo si*

$$\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}-\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DM_d}{M_dA}+\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}$$
$$-\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}+\frac{DM_d}{M_dA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}=1$$

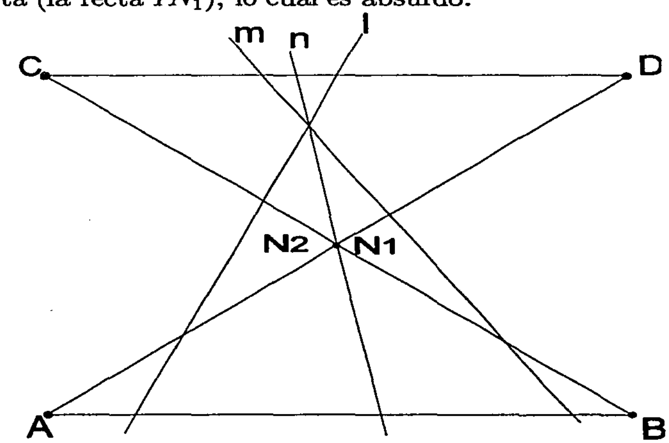


La relación anterior toma en cuenta tres puntos de l, dos de m y dos de n, entonces, como queremos hacer un análisis lo más exhaustivo posible de los casos que se tienen, nos interesaría buscar una relación necesaria y suficiente que tomara en cuenta sólo dos puntos de intersección de cada recta con los lados, y a la vez que tomara en cuenta todos los lados, pero vamos a ver que eso no es posible:

Supongamos que encontramos una relación que cumple lo que queremos, entonces hay al menos un lado con al menos dos puntos de la relación. Sea $ABCD$ un cuadrilátero y supongamos que hay dos puntos de la relación que están en a, llamémosles L_1 y M_1 a esos puntos, a continuación veremos los casos posibles y un contraejemplo para cada caso:

1. Los puntos que se toman en cuenta de alguna de las líneas están en lados opuestos:

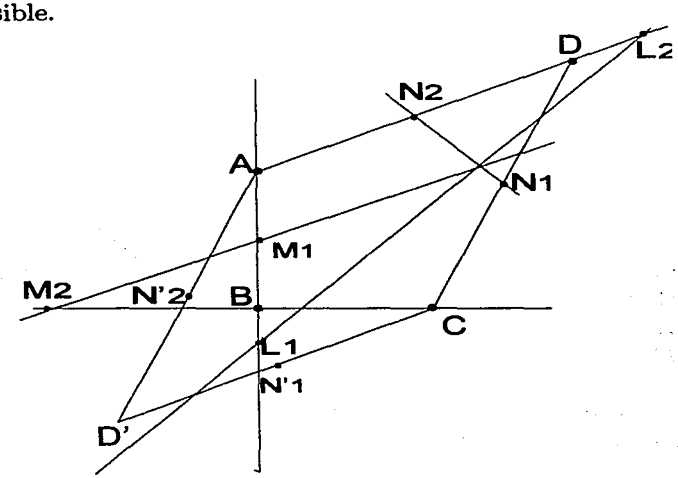
   Tomemos un cuadrilátero cruzado $ABCD$ de tal forma que el punto de intersección de BC y AD sea el punto medio de BC y también el de AD y tomemos las rectas l, m de tal forma que su punto de intersección I no sea el punto medio de BC. Sea n la recta que pasa por el punto medio de BC y por I. En la relación que estamos suponiendo sólo se toman en cuenta los puntos N_1 y N_2 de la recta n, esto nos garantiza que la relación no cambia si escogemos cualquier otra recta que pase por N_1 y dejamos fijas las rectas l y m, es decir, como se cumple la relación para toda recta que pasa por N_1, todas las rectas que pasan por N_1 pasan por I, o lo que es lo mismo: por el punto N_1 sólo pasa una recta (la recta IN_1), lo cual es absurdo.



2. Los dos puntos considerados de cada línea están en lados adyacentes:

   - L_2, M_2 están en lados distintos:

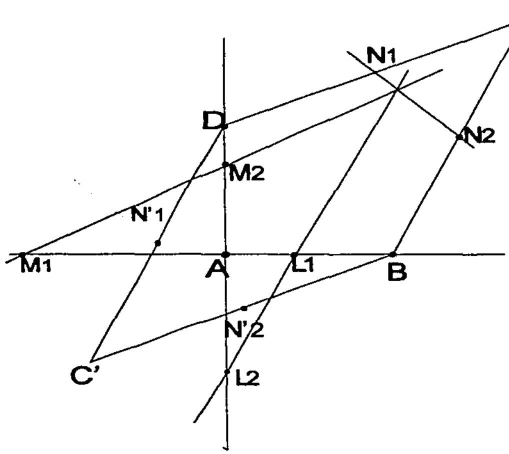
     Supongamos que L_2 está en d y que M_2 está en b, entonces en c tiene que estar N_1 o N_2, digamos N_1, lo que nos lleva a que N_2 está en b o en d, casos análogos, porque si nos olvidamos de los nombres, en ambos casos queda la misma configuración de puntos sobre los lados. Supongamos que N_2 está en d. Entonces tomemos un cuadrilátero $ABCD$ tal que $AB = BC$ y $CD = DA = 2AB$. Sea L_1L_2 una recta paralela a DB y que no pase por los vértices del cuadrilátero, N_1 el punto medio de CD, N_2 el de DA. Por último m una recta concurrente con l y n, que no pase por los vértices del cuadrilátero. Ahora construyamos un cuadrilátero con lados iguales a los de $ABCD$. Seá D' la reflexión de D sobre CA, N_1' el punto medio de CD', N_2' el de $D'A$, L_2' el punto de intersección de D' y l. M_1 y M_2 quedan igual, entonces como l, m, n concurren, si existiera la relación entonces también L_1L_2', m y $N_1'N_2'$ concurrirían, pero la intersección de L_1L_2' y m esta en uno de los semiplanos determinados por AC, y $N_1'N_2'$ esta completamente en el otro, por lo tanto no pueden concurrir, por lo tanto este caso tampoco es posible.



- L_2, M_2 están en el mismo lado

  L_2 y M_2 están ambos en b o en d, supongamos que están en d, entonces N_1 esta en c y N_2 en b (porque en cada lado del cuadrilátero debemos tomar en cuenta al menos un punto de intersección de las rectas), tomemos el cuadrilátero $ABCD$ de tal forma que $AB = DA$ y $BC = CD = 2AB$, sea N_1 el punto medio de CD y N_2 el punto medio de BC. Sea C' la reflexión de C sobre la recta BD, N_1' el punto medio de $C'D$, N_2' el punto medio de BC', entonces suponiendo que L_1L_2, M_1M_2 y N_1N_2 concurren (no en el punto al infinito) entonces, L_1L_2, M_1M_2 y $N_1'N_2'$ también tienen que concurrir, pero el punto de concurrencia de L_1L_2 y

M_1M_2 esta en uno de los semiplanos determinados por la recta BD y $N_1'N_2'$ queda completamente en el interior del otro semiplano por lo tanto L_1L_2, M_1M_2 y $N_1'N_2'$ no concurren.



Todo lo anterior nos asegura que no existe una relación necesaria y suficiente para que tres rectas concurran, y que tome en cuenta sólo dos puntos de cada recta, y todos los lados del cuadrilátero.

Q.E.D.

Ya vimos que el mínimo número de puntos que se pueden tomar en cuenta son siete, porque encontramos ya una relación, pero, siguiendo con nuestro análisis de casos, veamos si podemos encontrar todas las relaciones que tomen en cuenta todos los lados y siete de los puntos de intersección.

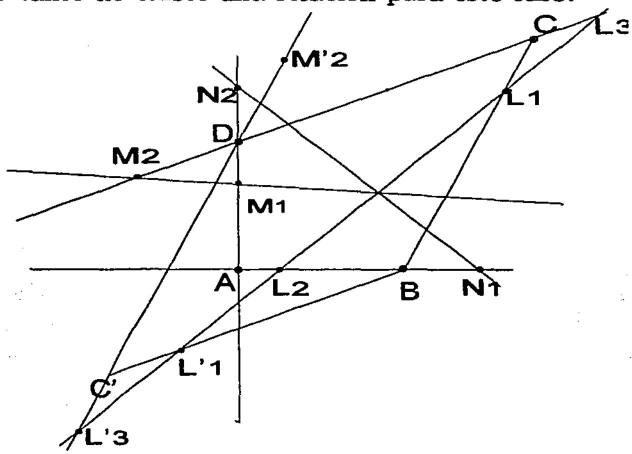
Como son siete puntos, tenemos que usar tres puntos de una recta, sea l esa recta, y m, n las otras dos. Si los dos puntos de m o los dos puntos de n están en lados opuestos del cuadrilátero entonces no existe relación alguna porque, como hemos hecho anteriormente, con un cuadrilátero cruzado podemos encontrar un contraejemplo, entonces N_1 y N_2 deben estar en lados adyacentes, así como M_1 y M_2.

Supongamos que N_1 esta en a y N_2 en d, esto nos lleva a considerar tres casos:

1. También M_1 esta en a y M_2 en d por lo tanto L_1 tiene que estar en b, L_2 en c y L_3 en a o d. Este es el caso del teorema 2.14 (Pág. 21).

2. M_1 esta en d y M_2 en c, o M_1 esta en a y M_2 en b, casos análogos, supongamos M_1 esta en d y M_2 en c, entonces en b tiene que estar un punto de l digamos L_1, lo que nos da dos subcasos:

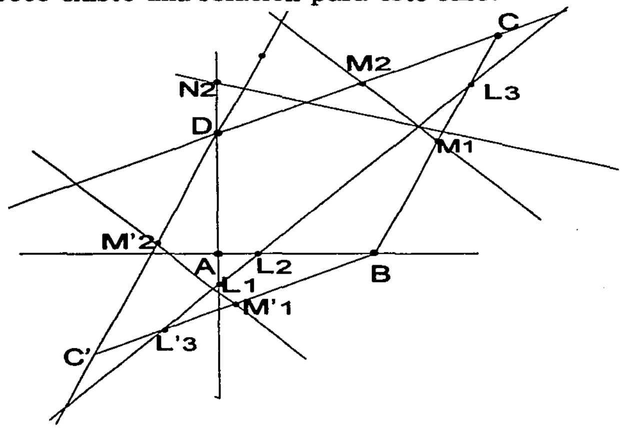
   a) L_2 esta en a y L_3 en c o L_2 esta en c y L_3 en a, casos iguales, salvo por el nombre de los puntos, supongamos lo primero. Tomemos un cuadrilátero $ABCD$ tal que $DA = AB$ y $BC = CD = 2AB$, una recta l paralela a AC y que no pase por los vértices, una recta m no paralela a AC, que no pase por D y de tal forma que no concurran l, m y d. Por último una recta n concurrente con l y m y distinta de ellas. Entonces, formemos un cuadrilátero $ABC'D$, donde C' es el punto de reflexión de C sobre DB, sea L'_1 el punto de intersección de l y BC', L'_3 el de l y $C'D$, M'_2 el punto sobre $C'D$ tal que $C'M'_2 = CM_2$. Si la relación existiera entonces, sería la misma para el cuadrilátero $ABCD$ y para el cuadrilátero $ABC'D$, con lo cual, las rectas $L'_1L_2L'_3$, N_1N_2 y $M_1M'_2$ concurrirían también, pero $L'_1L_2L'_3$ y N_1N_2 concurren en el mismo punto que $L_1L_2L_3$ y N_1N_2 y como M'_2 no esta sobre m entonces $M_1M'_2 \neq m$, por lo tanto no concurre con $L'_1L_2L'_3$ y N_1N_2, por lo tanto no existe una relación para este caso.



   b) L_2 esta en c y L_3 en d o L_2 esta en a y L_3 en d, casos análogos y se puede seguir exactamente el mismo método que en el caso 2a por lo tanto, no existe relación para este caso.

3. M_1 esta en b y M_2 en c, de la forma que se elijan L_1, L_2 y L_3 obtendremos casos análogos. entonces tomemos el cuadrilátero del ejemplo 2a, l una recta paralela a AC

que no pase por los vértices, M_1 el punto medio de BC, M_2 el de CD, y n una recta concurrente con l y m, y tomemos los puntos de l de tal forma que L_1 este en d, L_2 en a, y L_3 en b. Ahora tomemos el mismo cuadrilátero $ABC'D$ del caso 2a y definamos M_1' como el punto medio de BC' y M_2 el de $C'D$, además L_3' es el punto de intersección de l y la recta BC'. Si existiera una relación para el cuadrilátero $ABCD$, entonces también se cumpliría para el cuadrilátero $ABC'D$, por lo tanto las rectas L_1L_2, N_1N_2 y $M_1'M_2'$ también concurrirían, pero el punto de intersección de L_1L_2 y N_1N_2 queda en uno de los semiplanos determinados por BD y $M_1'M_2'$ queda completamente en el otro, por lo tanto tampoco existe una relación para este caso.

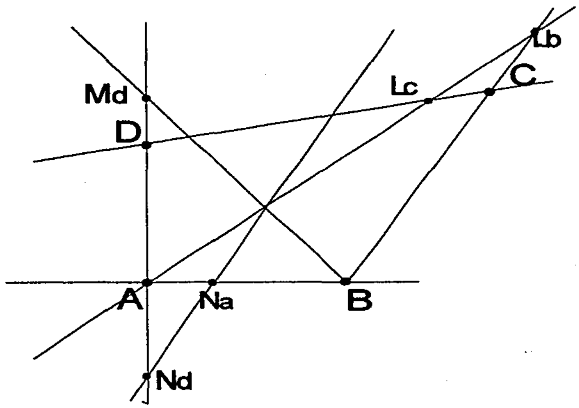


Ya no buscaremos relaciones para cuando conocemos ocho de los puntos, porque conociendo ocho se conocen siete, cuyo caso esta completamente determinado. Lo que si vamos a hacer es encontrar unos corolarios del teorema 2.14 (Pág. 21), para los casos en que algunas de las rectas pasan por los vértices.

El primer corolario es para cuando tenemos una recta pasa por uno de los vértices, el segundo para cuando dos rectas pasan por dos de los vértices, el tercero para tres de los vértices, y el cuarto para cuando una recta pasa por dos de los vértices, es decir, coincide con una de las diagonales.

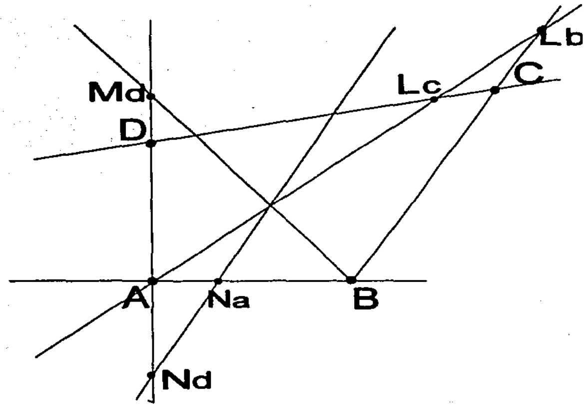
Corolario 2.15. *Si m, n no pasan por A, n no pasa por D, l no pasa por B ni por C, pero l si pasa por A, entonces, l, m, n concurren en un punto que no esta en AB, ni en AD si* *y sólo si*

$$\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}-\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}$$
$$+\frac{DM_d}{M_dA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}=1$$



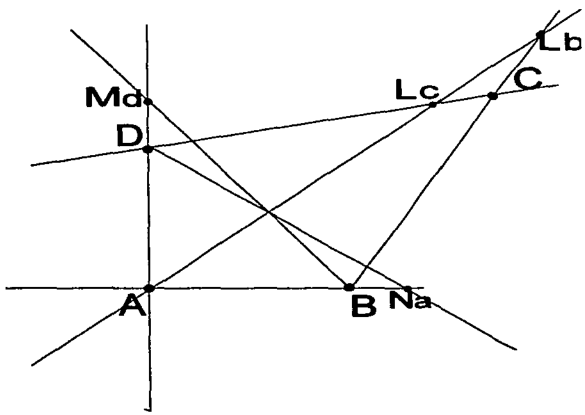
Corolario 2.16. *Si m, n no pasan por A, n no pasa por D, y l no pasa por B ni por C, pero l si pasa por A y m por B, entonces, l, m, n concurren en un punto que no esta en AB, ni en AD si y sólo si*

$$\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}+\frac{DM_d}{M_dA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}=1$$



Corolario 2.17. *Si m, n no pasan por A, y l no pasa por B ni por C, pero l si pasa por A, m por B, y n por D, entonces, l, m, n concurren en un punto que no esta en AB, ni en AD si y sólo si*

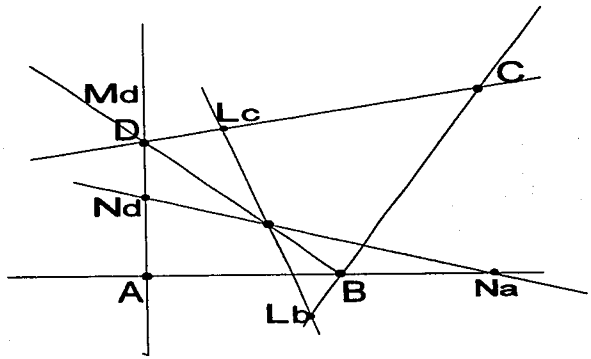
$$\frac{AM_d}{M_dD} \cdot \frac{DL_c}{L_cC} \cdot \frac{CL_b}{L_bB} \cdot \frac{BN_a}{N_aA} = -1$$



Corolario 2.18. *Si l no pasa por B ni por C, y m es la diagonal BD, entonces, l, m, n*

concurren en un punto que no esta en AB, ni en AD si y sólo si

$$\frac{AN_d}{N_dD} \cdot \frac{DL_c}{L_cC} \cdot \frac{CL_b}{L_bB} \cdot \frac{BN_a}{N_aA} = 1$$



2.3. EJEMPLOS DE PROBLEMAS EN LOS QUE SE UTILIZA LA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE CEVA PARA TRIÁNGULOS.

Hasta aquí hemos visto bastante teoría, comenzaremos con algunos ejemplos que ilustren como se puede usar lo visto anteriormente. En esta sección veremos problemas de la generalización para el triángulo y en la siguiente, para cuadriláteros.

Los primeros tres problemas resultan inmediatamente de observar las relaciones que hemos construido, pero veremos también su solución sin usarlas.

El cuarto problema es uno de los seis que conformaron el examen de la XXXVI olimpiada internacional de matemáticas.

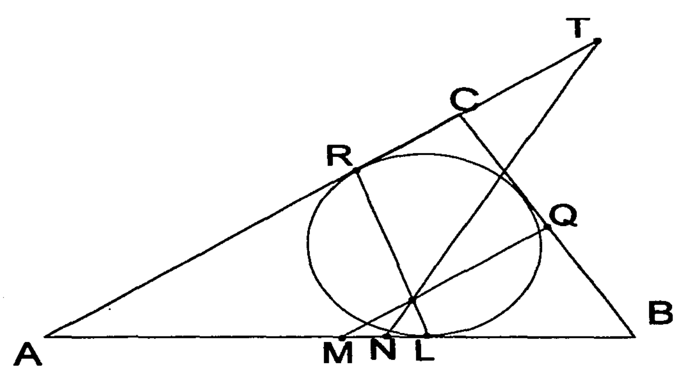
También veremos en el ejemplo 6, la aplicación de estos teoremas a un problema presentado en la revista Mathematics Magazine de 1992.

El último ejemplo de esta sección es un problema de la olimpiada de los países Balcánicos.

Ejemplo 1. *Sean*

- ABC *un triángulo,*
- M, Q *los puntos medios de* AB, BC, *respectivamente,*
- L *y* R *lo puntos de tangencia del incírculo con* AB, AC, *respectivamente,*
- N *el punto medio de* LM,
- T *un punto en* $\overrightarrow{RC}$ *tal que* $RT = MB$.

Demostrar que RL, TN *y* QM *son concurrentes.*



Primera demostración:

Lo primero que debemos notar es que el punto de concurrencia puede quedar sobre AB, dentro del triángulo o fuera de él, o lo que es lo mismo $L = M$ y entonces $L = M = N$, L está en $\overline{MB}$, o L está en $\overline{AM}$, respectivamente.

Si $L = M$, evidentemente RL, TN y QM concurren en N.

Los dos casos restantes pueden tomarse por separado o usar segmentos dirigidos, aquí usaremos la segunda opción.

Sea P' el punto de intersección de RL y QM, como $QM \| AC$ tenemos

$$\Delta MP'L \sim \Delta ARL \Rightarrow \frac{MP'}{AR} = \frac{LM}{LA} \Rightarrow MP' = \frac{LM \cdot AR}{LA} = LM$$

(porque $AR = LA$).

Sea P'' el punto de intersección de las rectas TN y QM, como $QM \| AC$, tenemos

$$\Delta MP''N \sim \Delta ATN \Rightarrow \frac{MP''}{AT} = \frac{NM}{NA} \Rightarrow$$

$$MP'' = \frac{NM \cdot AT}{NA} = \frac{\frac{LM}{2}(AR + RT)}{\frac{ML}{2} + LA} = \frac{LM\,(LA + MA)}{ML + 2LA} = \frac{LM\,(LA + MA)}{MA + LA} = LM \Rightarrow$$

$$MP' = LM = MP'' \therefore P' = P''$$

Por lo tanto, RL, TN y QM concurren. *Q.E.D.*

Segunda demostración:

Es inmediato del lema 2.1 (Pág. 4), o del teorema 2.2 (Pág. 2.2), usando el teorema 2.2, podemos identificar l con RL, m con TN, n con QM y S el punto al infinito.

Se cumplen las condiciones del teorema y si $NM \neq 0$, entonces

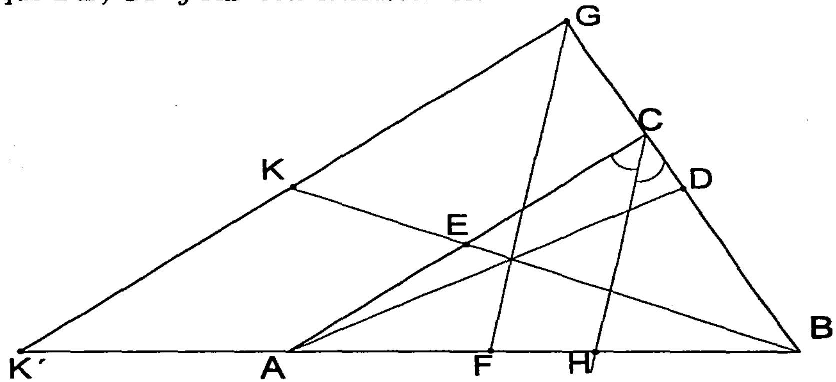
$$\frac{AL}{LN}\frac{NM}{MB}\frac{BQ}{QC}\frac{CS}{ST}\frac{TR}{RA} = -1$$

lo que implica que las rectas concurren, y si $NM = 0$ evidentemente también concurren. *Q.E.D.*

Ejemplo 2. *Sea ABC un triángulo,*

- *E es el punto medio de AC,*
- *H es el punto de intersección de AB y la bisectriz interna por C,*
- *F y G son puntos en $\overline{AB}$ y en $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, tales que $AH = FB$ y $BG = CA$,*
- *D es el punto medio de BG.*

Demostrar que BE, GF y AD son concurrentes.



Sean

K' el punto en AB tal que $GK' \| CA$,

K el punto de intersección de GK' y BE, y

T el punto de intersección de GF y KD.

Como $GK' \| CA$ y BE es mediana, tenemos que K es el punto medio de GK'.

Sean P' el punto de intersección de AD y EB, y P'' el de BE y GF. Queremos ver que $P' = P''$.

#	Afirmación	Justificación
1	$\frac{KD}{BK'} = \frac{1}{2}$	K es el punto medio de GK' D es el punto medio de BG
2	$BK' = 2KD$	por $\boxed{1}$
3	$\frac{BA}{BK'} = \frac{CB}{GB} \therefore BK' = \frac{BA \cdot GB}{CB} \therefore KD = \frac{BA \cdot GB}{2CB}$	$\Delta BAC \sim \Delta BK'G$ y $\boxed{2}$
4	$\frac{KP'}{P'B} = \frac{KD}{BA} = \frac{BA \cdot GB}{2CB \cdot BA} = \frac{AC}{2CB}$	$\Delta KDP' \sim \Delta BAP'$ $\boxed{3}$ y $AC = GB$
5	$\frac{KP''}{P''B} = \frac{TK}{BF}$	$\Delta KTP'' \sim \Delta BFP''$
6	$KT = \frac{K'F}{2}$	$KT \parallel K'F$ y K es el punto medio de GK'
7	$AK' = AB - K'B = AB - \frac{AB \cdot GB}{CB} = AB\left(\frac{CB - GB}{CB}\right)$	$\boxed{3}$
8	$\frac{TK}{BF} = \frac{\frac{FK'}{2}}{BF} = \frac{\frac{FA - K'A}{2}}{BF} = \frac{FA - BA\left(\frac{CB - AC}{CB}\right)}{2BF} = \frac{FA}{2BF} - \frac{BA}{2BF} + \frac{BA \cdot AC}{2BF \cdot CB} = \frac{FA}{2BF} - \frac{BF + FA}{2BF} + \frac{BA}{2BF}\left(\frac{BF}{FA}\right) = \frac{FA}{2FB} - \frac{1}{2} - \frac{FA}{2FB} + \frac{BA}{2FA} = \frac{BF + FA}{2FA} - \frac{1}{2} = \frac{BF}{2FA} = \frac{AC}{2CB}$	Por $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ y $\frac{AC}{CB} = \frac{AH}{HB} = \frac{BF}{FA}$
9	$\frac{KP''}{P''B} = \frac{TK}{BF} = \frac{AC}{2CB}$	$\boxed{5}$ y $\boxed{8}$

De $\boxed{9}$ y $\boxed{4}$ tenemos que P' y P'' dividen en la misma razón a KB de modo que $P' = P''$. Por tanto AD, BE y GF concurren. *Q.E.D.*

Segunda demostración:
como $CE = EA \neq 0$, $DB = GD \neq 0$, $BG = CA$ y $\frac{AF}{FB} = \frac{HB}{AH} = \frac{BC}{CA}$ (porque CH es bisectriz) tenemos que:

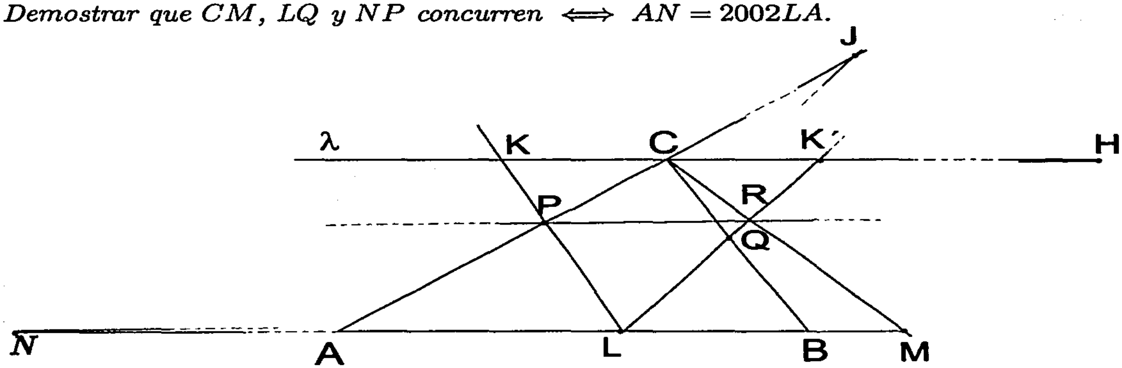
$$\frac{BG}{GD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BG}{BC} \cdot \frac{DB}{GD} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

entonces aplicando el corolario 2.4 (Pág. 7) al ΔBCA tenemos que AD, BE y GF concurren. *Q.E.D.*

Ejemplo 3. *Sean ABC un triángulo, y*

- *L, Q, P la intersección de las bisectrices internas por C, A, B y los lados opuestos, respectivamente,*
- *M un punto en $\overrightarrow{LB}$ tal que $LM = \frac{2003}{2001}AL$,*
- *N un punto sobre $\overrightarrow{BA}$*

Demostrar que CM, LQ y NP concurren $\iff$ $AN = 2002LA$.



Primera demostración:

Llamaremos a, b y c a los lados opuestos a los vértices A, B y C, como es usual en los triángulos.

Primeramente supongamos que las rectas concurren, y sea R el punto de concurrencia. Tracemos por C la exmediana l ($l \| AB$), sean K, K' y H los puntos de intersección de l y LP, l y LQ, l y NP respectivamente, y sea J el punto de intersección de CA y LQ (J puede ser el punto al infinito).

Por la definición de L, Q y P sabemos que P y J son conjugados armónicos con respecto a AC.

#	Afirmación	Justificación
1	$KC = CK'$	P y J dividen armónicamente a AC y $l \parallel AB$
2	$\frac{CH}{NA} = \frac{a}{c} \therefore CH = \frac{a \cdot NA}{C}$	$\Delta APN \sim \Delta CPH$ y BP es bisectriz
3	$\frac{CH}{MN} = \frac{RC}{RM}$	$\Delta CRH \sim \Delta MRN$
4	$\frac{RC}{RM} = \frac{CK'}{ML}$	$\Delta CRK' \sim \Delta MRL$
5	$\frac{CH}{MN} = \frac{CK'}{ML}$	$\boxed{3}$ y $\boxed{4}$
6	$MA + AN = MN = \frac{ML \cdot NA}{CK'} \cdot \frac{a}{c}$	$\boxed{2}$ y $\boxed{5}$
7	$MA = NA\left(\frac{ML}{CK'} \cdot \frac{a}{c} + 1\right)$	$\boxed{6}$
8	$\frac{KC}{AL} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{a}{c} \therefore CK' = KC = \frac{a \cdot AL}{c}$	$\Delta CKP \sim \Delta ALP$ y $\boxed{1}$
9	$\frac{ML}{CK'} \cdot \frac{a}{c} + 1 = \frac{\frac{2003}{2001} LA}{\frac{a}{c} AL} \cdot \frac{a}{c} + 1 = -\frac{2003}{2001} + 1 = -\frac{2}{2001}$	$\boxed{8}$
10	$NA = \frac{MA}{\frac{-2}{2001}} = \frac{ML + LA}{\frac{-2}{2001}} = \frac{\frac{2003}{2001} LA + LA}{-\frac{2}{2001}} = \frac{2003LA + 2001LA}{-2} = -2002LA = 2002AL$	$\boxed{7}$ y $\boxed{9}$

Supongamos ahora que $AN = 2002LA$.

Sea R' el punto de intersección de CM y QL, N' el de PR' y BA, por la primera parte de la demostración, tenemos que $AN' = 2002LA \Rightarrow N' = N \Rightarrow LQ$, NP y CM concurren. $Q.E.D.$

Segunda demostración:

Aplicando el corolario 2.3 (Pág. 7) al triángulo ABC tenemos que $\frac{AN}{NM} \cdot \frac{ML}{LB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$ si y sólo si LQ, NP y CM concurren, además por el teorema de Ceva tenemos que

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AL}{LB} = 1$$

por lo tanto

$$\frac{BQ}{QC}\frac{CP}{PA}\frac{AN}{NM}\frac{ML}{LB} = 1 \iff \frac{AN}{AL}\frac{ML}{NM} = 1 \iff \frac{2003}{2001}\frac{NA}{NM} = 1$$

$\iff$

$$\frac{2003}{2001} NA = NM = NA + AM$$

$\iff$

$$NA\left(\frac{2003}{2001} - 1\right) = AM = AL + LM = AL\left(1 + \frac{2003}{2001}\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$$NA\frac{2}{2001} = AL\frac{4004}{2001}$$

$\Longleftrightarrow$

$$NA = 2002AL$$

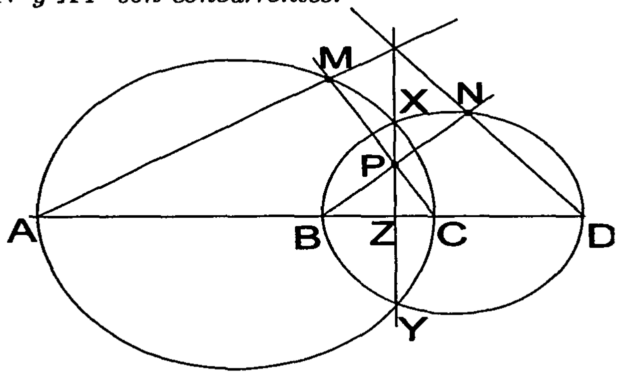
Entonces LQ, NP y CM concurren si y sólo si $NA = 2002AL$.

Con esta demostración vemos que el problema es cierto también si L, P y Q son tales que AQ, CL y BP concurren en cualquier punto que no esté en los lados del triángulo. *Q.E.D.*

Ejemplo 4. *En este ejemplo veremos un problema de la XXXVI Olimpiada Internacional de Matemáticas.*

Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos en una recta, en ese orden. Los círculos con diámetros AC y BD se intersectan en X y Y. XY corta a BC en Z. Sea P un punto en la línea XY distinto de Z. CP intersecta al círculo con diámetro AC en C y M, y BP intersecta al círculo con diámetro BD en B y en N.

Probar que AM, DN y XY son concurrentes.



Primera demostración:

Si $P = X$ o $P = Y$, evidentemente $N = P = M$. Por tanto AM, DN, XY son concurrentes.

Si $X \neq P \neq Y$, sea P' el punto de intersección de las rectas DN y XY, como BD es diámetro el $\angle BND = 90°$, y por ser XY el eje radical el $\angle DZP' = 90°$, y como $\angle BDN = \angle ZDP'$, el $\Delta ZDP' \sim \Delta NDB$ el cual a su vez es semejante al ΔZPB. Por lo tanto

$$\Delta ZDP' \sim \Delta ZPB \Rightarrow \frac{ZP'}{ZD} = \frac{ZB}{ZP} \therefore ZP' = \frac{ZB \cdot ZD}{ZP}$$

Si llamamos P'' al punto de intersección de las rectas AM y XY, de una forma completamente análoga a lo anterior, podemos encontrar que $ZP'' = \frac{ZC \cdot ZA}{ZP}$.

Por estar Z en el eje radical tenemos que $ZB \cdot ZD = ZC \cdot ZA$. De manera que $ZP' = ZP''$, y por estar usando segmentos dirigidos $P' = P''$, entonces AM, DN, XY concurren en P'. *Q.E.D.*

Segunda demostración:

Si $P = X$ o $P = Y$, evidentemente $N = P = M$, así que AM, DN, XY son concurrentes.

Si $X \neq P \neq Y$, como P y Z están en el eje radical tenemos $PC \cdot PM = PB \cdot PN$ y $ZB \cdot ZD = ZA \cdot ZC$. Por ser XY el eje radical $\angle DZP = 90° = \angle PZA$, y como AC y BD son diámetros $\angle PND = 90° = \angle AMP$, por tanto P, Z, N, D son concíclicos así como A, Z, P, M. Esto implica que $BP \cdot BN = BZ \cdot BD$. Entonces $CP \cdot CM = CZ \cdot CA$. De manera que

$$\frac{CA}{AZ}\frac{ZD}{DB}\frac{BN}{NP}\frac{PM}{MC} = \frac{CA}{CM}\frac{ZD}{ZA}\frac{BN}{BD}\frac{PM}{PN} = \frac{BZ}{BP}\frac{CP}{CZ}\frac{PB}{PC}\frac{ZC}{ZB} = 1$$

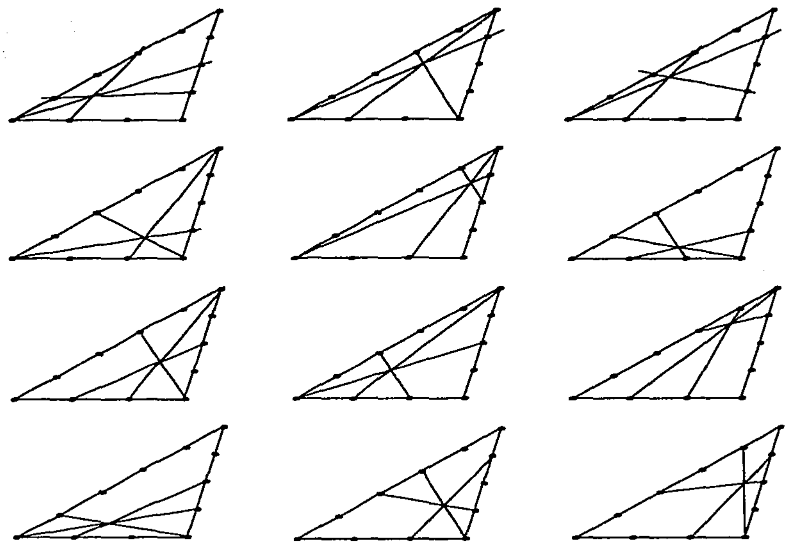
Entonces el corolario 2.3 (Pág. 7) aplicado al triángulo CBP nos dice que AM, DN, XY concurren. *Q.E.D.*.

Ejemplo 5. *En la revista "Mathematics Magazine" de febrero de 1992 (véase [3]) se encuentra un artículo sobre una generalización del teorema de Ceva, la generalización que ahí se expone es en esencia uno de los casos que hemos encontrado, el teorema 2.10 (Pág. 15), en el cual se usan dos puntos en cada lado del triángulo, para demostrarlo hacen uso de coordenadas baricéntricas (véase [5]), dado que con ellas se pueden encontrar fácilmente las coordenadas de los puntos sobre los lados del triángulo de referencia y así poder encontrar las ecuaciones de las rectas y sus puntos de intersección.*

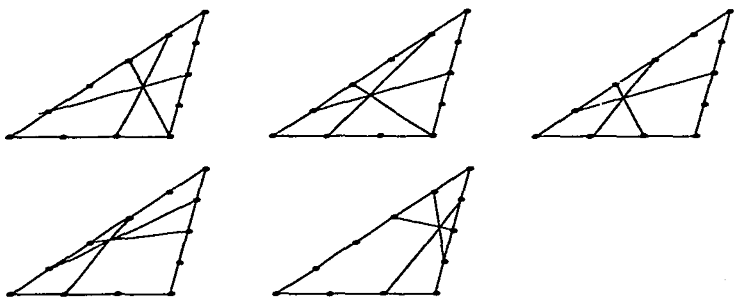
Una de las aplicaciones que ahí muestran es de especial interés para nosotros, me refiero a la configuración que descubrió el artista alemán M. C. Escher, la cual es como sigue:

Si en un $\triangle ABC$ dividimos uno de los lados en cinco partes iguales, otro lado en cuatro partes iguales y el último en tres partes iguales, y si tomamos dos puntos de división de cada lado (los cuales también pueden ser los vértices del triángulo) y las ternas de rectas que se forman con cada pareja de puntos que no están en el mismo lado, entonces encontraremos doce casos de concurrencia.

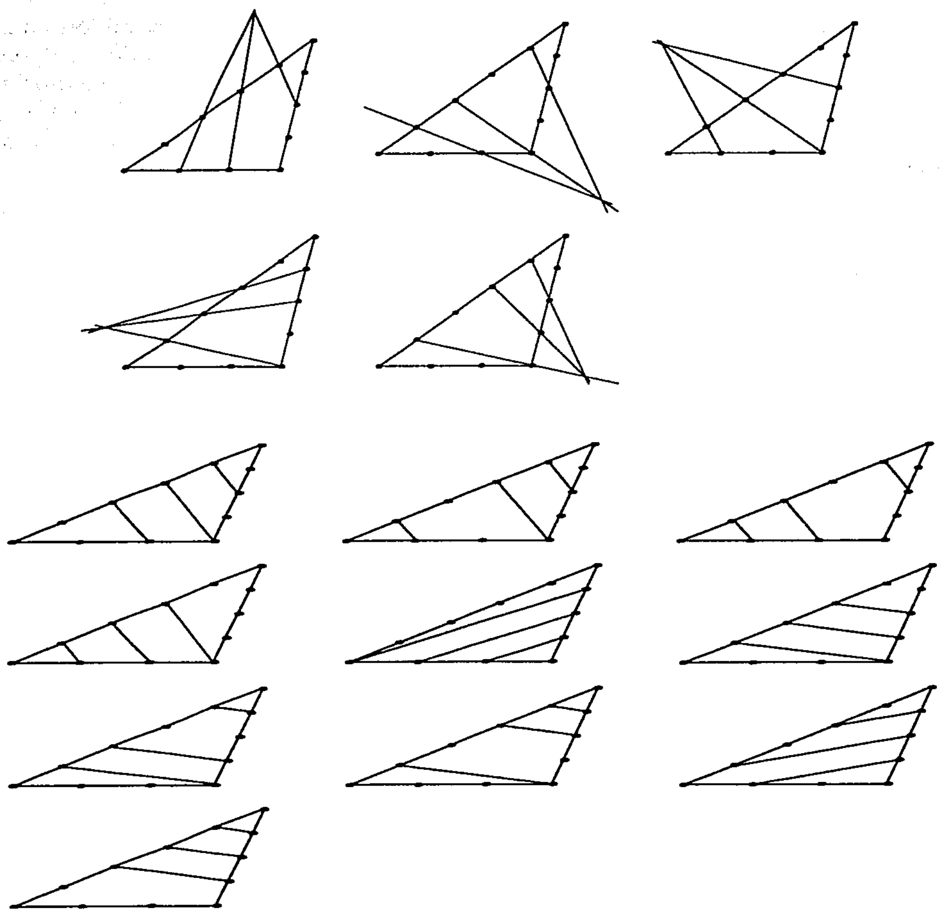
Dicho en otras palabras, si llamamos B_1, C_1 a los puntos elegidos en AB, B_2, C_2 a los de BC, y B_3, C_3 a los de CA, entonces la terna de puntos es la formada por las rectas B_1C_3, B_2C_1 y B_3C_2. En el artículo se menciona que con el teorema se puede demostrar que en realidad son exactamente doce casos, y eso se puede verificar fácilmente, también se menciona que Escher obtiene cinco casos más cuando toma tres de los puntos B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 como puntos de división interna de un lado del triángulo, pero que el teorema parece no poder aplicarse en este caso. Con lo que hemos desarrollado hasta el momento sí se puede verificar ya que tenemos relaciones para tres puntos en un lado, dos en otro y uno en el último (teoremas 2.9 (Pág. 14) y 2.6 (Pág. 2.6)) y relaciones para tres puntos en un lado y tres en otro (lemas 2.8 (Pág. 13) y 2.1 (Pág. 4)). Podemos hacer un programa de computadora que verifique las relaciones y nos de todas las concurrencias, así nos daremos cuenta que no sólo hay cinco casos más sino diez, cinco de los cuales tienen el punto de concurrencia fuera del triángulo (posiblemente por esta razón no fueron encontrados), y tenemos diez casos de concurrencia en el punto al infinito, es decir, paralelas. Estos son todos los casos de concurrencia para esta configuración (si B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 son distintos entre sí).



Concurrencias encontradas por Escher y que pueden demostrarse con el artículo mencionado y con nuestros teoremas.



Concurrencias encontradas por Escher y que no pueden demostrarse con el teorema del artículo, pero si con nuestros resultados.



Concurrencias no encontradas por Escher ni mencionadas en el artículo, éstas no pueden ser demostradas con el resultado del artículo pero si con nuestros resultados.

De la misma forma podemos encontrar todos los casos de concurrencia si dividimos cada lado de un triángulo en el número de partes iguales que deseemos.

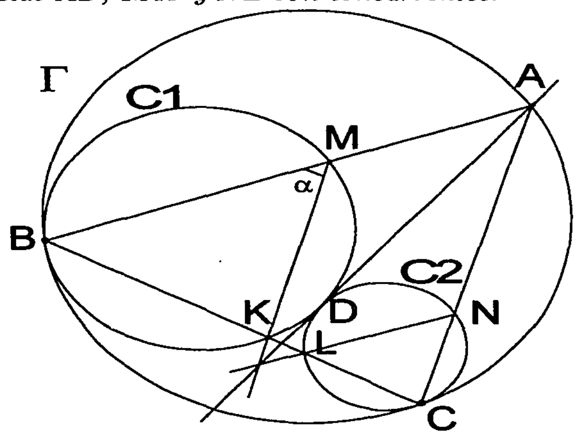
En el Apéndice se encuentra el listado y la explicación del programa escrito en turbo pascal que utilicé para encontrar estas concurrencias.

En este programa podemos encontrar el total de concurrencias también cuando dividimos los lados del triángulo no sólo en tres, cuatro y cinco partes iguales, así, encontramos por ejemplo que si dividimos cada lado en dos partes iguales, sólo tenemos un caso de concurrencia, el de las medianas. Si dividimos cada lado en tres partes iguales obtendremos siete concurrencias, si dividimos cada lado en cuatro partes iguales, setenta y tres, y si dividimos cada lado en cinco, doscientas cuatro concurrencias.

Ejemplo 6. *(Problema 3 de la 14ª olimpiada de matemáticas de los países Balcánicos, 1997, Kalampaka, Grecia)*

Tres círculos Γ, C_1 y C_2 están dados en el plano. C_1 y C_2 son tangentes internamente a Γ en los puntos B y C, respectivamente. Además C_1 y C_2 son tangentes externamente una a la otra en el punto D. Sea A uno de los puntos en los que la tangente común a C_1 y C_2 por D intersecta a Γ. Denotemos por M el segundo punto de intersección de la línea AB y C_1, y por N el segundo punto de intersección de la línea AC y C_2. También denotemos por K y L los segundos puntos de intersecciones de la línea BC con C_1 y C_2 respectivamente

Demostrar que las rectas AD, MK y NL son concurrentes.



Demostración:

Sean R, r_1 y r_2 los radios de Γ, C_1 y C_2, respectivamente, entonces, por la ley de los senos $BK = 2r_1\text{sen}\alpha$, donde α es el ángulo inscrito que subtiende al arco BK, pero α es igual al ángulo que forman la tangente en B a C_1 y el segmento BC.

Como la tangente en B a C_1 también es tangente a Γ, tenemos que $BC = 2R\text{sen}\alpha$, entonces

$$\frac{BK}{KC} = \frac{2r_1\text{sen}\alpha}{2R\text{sen}\alpha - 2r_1\text{sen}\alpha} = \frac{r_1}{R - r_1}$$

de la misma forma

$$\begin{aligned}\frac{BL}{LC} &= \frac{R-r_2}{r_2}\\ \frac{CN}{NA} &= \frac{r_2}{R-r_2}\\ \frac{AM}{MB} &= \frac{R-r_1}{r_1}\end{aligned}$$

Si llamamos P al punto de intersección de AD y BC, tendremos que como P está en el eje radical de C_1 y C_2,

$$BP\cdot KP = PL\cdot PC \iff (BK+KP)\,KP = PL\,(PL+LC) \iff (2r_1\text{sen}\alpha + KP)\,KP = PL\,(PL+2r_2\text{sen}\alpha)$$

también tenemos que

$$2R\text{sen}\alpha = BC = BK+KP+PL+LC = 2r_1\text{sen}\alpha + KP + PL + 2r_2\text{sen}\alpha$$

, y al resolver este sistema de ecuaciones obtenemos:

$(2r_1\text{sen}\alpha + KP)\,KP = PL\,(PL+2r_2\text{sen}\alpha)$
$2R\text{sen}\alpha = 2r_1\text{sen}\alpha + KP + PL + 2r_2\text{sen}\alpha$,

Solución: $\left\{\begin{array}{l} KP = -2(\sin\alpha)\frac{r_2r_1-r_2R+r_1^2-2r_1R+R^2}{r_2+r_1-2R},\\ PL = -2(\sin\alpha)\frac{r_2^2+r_2r_1-2r_2R-r_1R+R^2}{r_2+r_1-2R}\end{array}\right\}$

Por lo tanto

$$\frac{BP}{PC}=\frac{PL}{KP}=\frac{-2(\sin\alpha)\frac{r_2^2+r_2r_1-2r_2R-r_1R+R^2}{r_2+r_1-2R}}{-2(\sin\alpha)\frac{r_2r_1-r_2R+r_1^2-2r_1R+R^2}{r_2+r_1-2R}}=\frac{R-r_2}{R-r_1}$$

Entonces podemos aplicar el 2.3 (Pág. 7)del teorema 2.2 al triángulo BCA e identificar l, m y n con MK, AD y NL, respectivamente

$\frac{BK}{KP}\cdot\frac{PL}{LC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AM}{MC}=$

$$\frac{2r_1\sin\alpha}{-2(\sin\alpha)\frac{r_2r_1-r_2R+r_1^2-2r_1R+R^2}{r_2+r_1-2R}}\,\frac{-2(\sin\alpha)\frac{r_2^2+r_2r_1-2r_2R-r_1R+R^2}{r_2+r_1-2R}}{2r_2\sin\alpha}\,\frac{r_2}{R-r_2}\,\frac{R-r_1}{r_1}=1$$

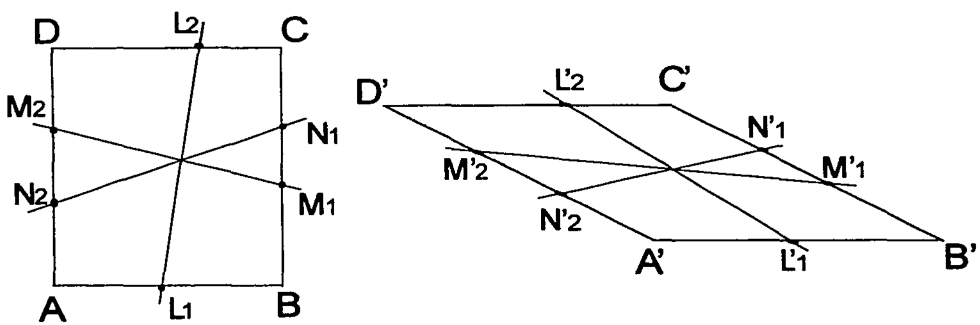
Por lo tanto MK, AD y NL son concurrentes. *Q.E.D.*

2.4. EJEMPLOS DE PROBLEMAS EN LOS QUE SE UTILIZA LA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE CEVA PARA CUADRILÁTEROS.

En esta sección veremos ejemplos en donde puede utilizarse la generalización del teorema de Ceva para cuadriláteros, y como resultado del primero de ellos veremos un poco más de teoría al encontrar una generalización para el caso particular de los paralelogramos.

Ejemplo 7. *Tomemos un cuadrilátero $ABCD$ y tres rectas L_1L_2, M_1M_2 y N_1N_2, de tal forma que cada lado del cuadrilátero contenga al menos uno de los puntos L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2 y todos estos puntos estén sobre los lados, además de que no coincidan con los vértices o las rectas coincidan con los lados del cuadrilátero. Para cualquier cuadrilátero $A'B'C'D'$, tomemos L_1', L_2', M_1', M_2', N_1', N_2' como puntos correspondientes de L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2, sobre lados correspondientes y de tal forma que la razón en que divide cada punto a su lado sea igual a la razón en que su punto correspondiente divide al lado correspondiente.*

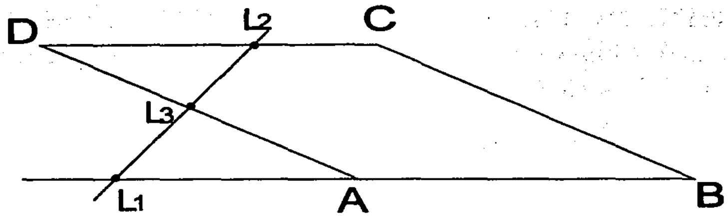
Si L_1L_2, M_1M_2 y N_1N_2 concurren para algún paralelogramo $ABCD$ entonces L_1', L_2', M_1', M_2', N_1', N_2' concurrirán para cualquier paralelogramo $A'B'C'D'$



Demostración.

Tomemos la recta L_1L_2, L_1 y L_2 se encuentran en lados opuestos o en lados adyacentes del cuadrilátero, veamos el primer caso:

Si se encuentran en lados opuestos. Supongamos que L_1 esta en AB y L_2 en CD.



Sea L_3 el punto de intersección de las rectas L_1L_2 y DA, entonces

$$\Delta AL_1L_3 \sim \Delta DL_2L_3 \therefore \frac{DL_3}{L_3A} = -\frac{DL_2}{L_1A}$$

ya que estamos tomando la orientación con respecto al paralelogramo, esto es, si L_3 se encuentra en el segmento DA entonces, DL_3 y L_3A son ambos positivos, pero DL_2 y L_1A tienen signos opuestos, y si L_3 no está en el segmento DA entonces, DL_3 y L_3A tienen signos opuestos, y DL_2 y L_1A tienen signos iguales.

$AL_1 + L_1B = AB$, y sea $r_1 = \frac{AL_1}{L_1B}$, entonces, tenemos que

$$AL_1 = r_1 \cdot L_1B = r_1 \cdot (AB - AL_1) \therefore L_1A = \frac{r_1BA}{1+r_1}$$

de la misma forma si $r_2 = \frac{CL_2}{L_2D}$, entonces,

$$(CD - L_2D) = CL_2 = r_2 \cdot L_2D \therefore DL_2 = \frac{DC}{(1+r_2)}$$

entonces

$$\frac{DL_3}{L_3A} = -\frac{DL_2}{L_1A} = -\frac{\frac{DC}{(1+r_2)}}{\frac{r_1BA}{1+r_1}} = -\frac{1+\frac{1}{r_1}}{(1+r_2)}$$

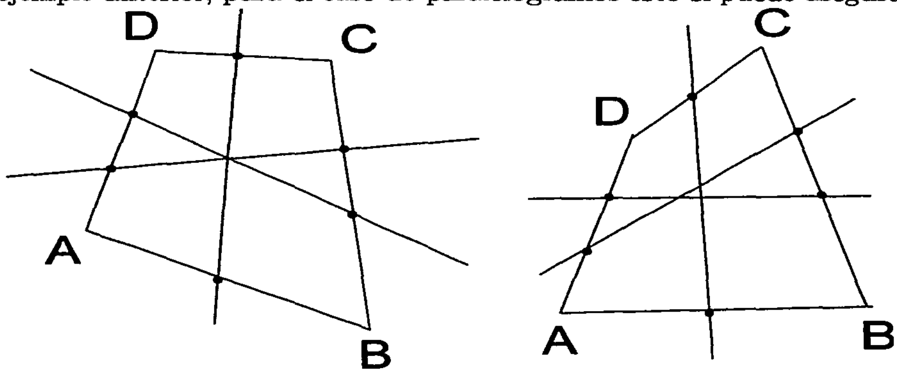
ya que por ser $ABCD$ un paralelogramo $BA = DC$, como $\frac{A'L_1'}{L_1'B'} = \frac{AL_1}{L_1B} = r_1$ y $\frac{C'L_2'}{L_2'D'} = \frac{CL_2}{L_2D} = r_2$ son fijos para todo paralelogramo $A'B'C'D'$, tenemos que para todo paralelogramo $A'B'C'D'$

$$\frac{D'L_3'}{L_3'A'} = -\frac{1+\frac{1}{r_1}}{(1+r_2)}$$

esto quiere decir que L_3' divide al lado $D'A'$ en la misma razón para todo paralelogramo $A'B'C'D'$(lo mismo sucede si L_3' es el punto al infinito).

Como se puede esperar, todas las demás razones en que dividen a los lados restantes los puntos de las intersecciones de las rectas con los lados, es independiente del paralelogramo que se elija, por lo tanto si las rectas concurren en algún paralelogramo $ABCD$ podemos usar el teorema 2.14 (Pág. 21) y veremos que la relación se cumple, pero, por lo que acabamos de ver, la relación se cumplirá para cualquier paralelogramo $A'B'C'D'$ y puntos L_1', L_2', M_1', M_2', N_1', N_2' elegidos de la forma que dice el ejemplo (esto es debido a que las razones de división de los lados nunca cambian), por lo tanto, las rectas concurrirán para cualquier paralelogramo $A'B'C'D'$. *Q.E.D.*

Como vimos, no hay una relación necesaria y suficiente que me garantice que tres rectas concurren si se toman en cuenta dos puntos de intersección de cada recta con los lados del cuadrilátero y que todos los lados del cuadrilátero estén involucrados, se podría decir entonces que si tenemos tres rectas concurrentes y seis de sus puntos de intersección con los lados (dos de cada recta), entonces, al cambiar los ángulos interiores y dejar los lados de la misma longitud, nada me garantiza que las nuevas rectas sigan concurriendo, pero como vimos en el ejemplo anterior, para el caso de paralelogramos esto si puede asegurarse

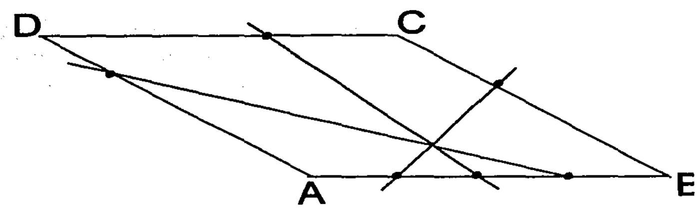


Al cambiar los ángulos, las rectas ya no concurren

El ejemplo 7 que acabamos de ver nos indica que para el caso especial de los paralelogramos, podemos encontrar formulas como las del teorema 2.14 (Pág. 21) y sus corolarios pero que sólo utilicen dos puntos de cada una de las rectas l, m, n.

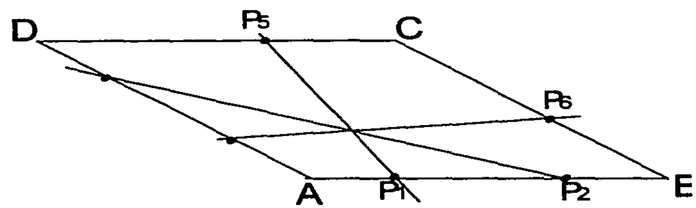
Veamos las formas de colocar seis puntos en un paralelogramo de manera que cada lado tenga al menos uno de los puntos y las rectas que formen no coincidan con los lados:

1. Tres puntos están en un lado, cada punto determinará una recta porque estamos considerando rectas distintas de los lados. En este caso los demás puntos están forzados a estar uno en cada uno de los lados restantes.

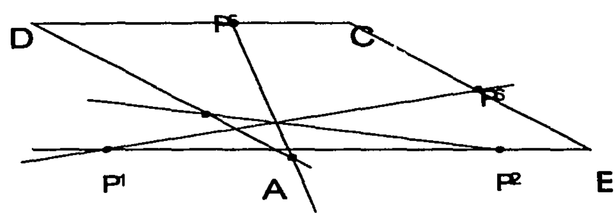


2. Uno de los lados tiene dos puntos P_1 y P_2, y un lado adyacente a él tiene otros dos puntos P_3 y P_4. Cada punto que falta esta sobre uno de los lados que faltan, si llamamos P_5 y P_6 a esos puntos tenemos tres posibilidades:

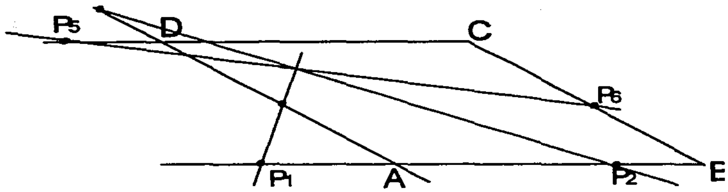
   a) P_5 esta unido a P_1 o P_2 con una de las rectas. En este caso la recta que pasa por P_6 esta forzada a pasar por P_3 o P_4, y por los dos últimos puntos debe pasar la última recta.



   b) P_5 esta unido a P_3 o P_4. Aquí la recta que pasa por P_6 está forzada a pasar por P_1 o P_2, con lo que la última recta pasa por los dos puntos restantes.

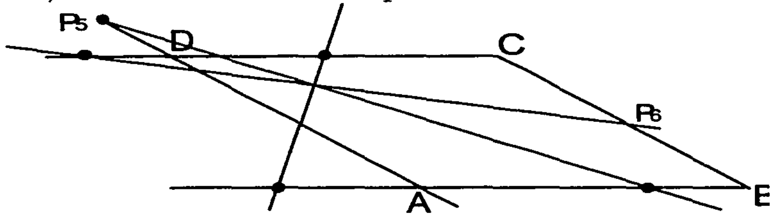


   c). P_5 esta unido a P_6. Ahora las otras dos rectas pasarán por P_1, P_3 y P_2, P_4 o P_1, P_4 y P_2, P_3.

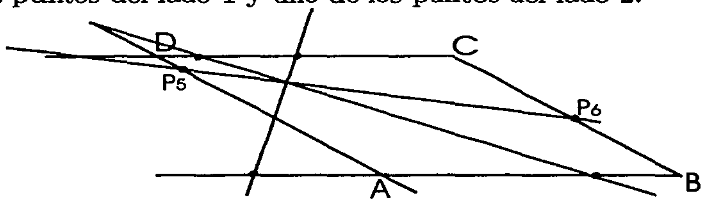


3. Uno de los lados tiene dos puntos llamémosle lado 1 a ese lado, y el lado opuesto, llamémosle lado 2, tiene otros dos puntos, uno de los lados restantes tiene un punto P_5 y el último lado tiene el último punto P_6. Tenemos sólo dos subcasos:

   a) P_5 está unido a uno de los puntos del lado 1, entonces P_6 esta unido a uno de los puntos del lado 2, con lo cual los restantes puntos están unidos.

   b) P_5 está unido a P_6 por una de las rectas, entonces las otras dos rectas tienen cada una uno de los puntos del lado 1 y uno de los puntos del lado 2.

Como se dijo anteriormente podemos encontrar relaciones necesarias y suficientes para las concurrencias en cada uno de los casos anteriores pero sólo veremos uno de los casos ya que los demás se pueden encontrar de la misma forma. El caso que veremos es el $2a$, todo lo que tenemos que hacer es partir de las relaciones ya encontradas y despejar algunas de las razones como se hizo en el ejemplo 7, de manera que la relación que encontremos tome en cuenta sólo las razones en que los puntos dividen a los lados. Partamos del teorema 2.14 (Pág. 21).

Si m, n no pasan por A, n no pasa por D, y l no pasa por B ni por C, entonces, l, m, n concurren en un punto que no esta en AB, ni en AD si y sólo si

$$\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}-\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DM_d}{M_dA}+\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}-$$
$$\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}+\frac{DM_d}{M_dA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}=1$$

Al igual que en el ejemplo, si n no pasa por A, B y l no pasa por C, B, podemos despejar $\frac{BN_a}{N_aA}$ y $\frac{CL_b}{L_bB}$, tenemos que

$$\frac{BN_a}{N_aA}=-\frac{1+\frac{DN_d}{N_dA}}{\frac{CN_b}{N_bB}+1}\text{ y }\frac{CL_b}{L_bB}=-\frac{1+\frac{AL_a}{L_aB}}{\frac{DL_c}{L_cC}+1}.$$

Entonces podemos sustituirlos en la relación:

$$\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}+\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{1+\frac{DN_d}{N_dA}}{\frac{CN_b}{N_bB}+1}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DM_d}{M_dA}+\frac{1+\frac{DN_d}{N_dA}}{\frac{CN_b}{N_bB}+1}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{1+\frac{AL_a}{L_aB}}{\frac{DL_c}{L_cC}+1}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}$$
$$+\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\cdot\frac{1+\frac{AL_a}{L_aB}}{\frac{DL_c}{L_cC}+1}+\frac{DM_d}{M_dA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}=1$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}\left(\frac{CN_b}{N_bB}+1\right)\left(\frac{DL_c}{L_cC}+1\right)+\frac{AL_a}{L_aB}\left(1+\frac{DN_d}{N_dA}\right)\left(\frac{DL_c}{L_cC}+1\right)\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DM_d}{M_dA}+$$
$$\left(1+\frac{DN_d}{N_dA}\right)\frac{AN_d}{N_dD}\left(1+\frac{AL_a}{L_aB}\right)\frac{DL_c}{L_cC}+\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\left(1+\frac{AL_a}{L_aB}\right)\left(\frac{CN_b}{N_bB}+1\right)+$$
$$\frac{DM_d}{M_dA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\left(\frac{CN_b}{N_bB}+1\right)\left(\frac{DL_c}{L_cC}+1\right)=\left(\frac{CN_b}{N_bB}+1\right)\left(\frac{DL_c}{L_cC}+1\right)$$

Esta es la generalización del teorema de Ceva en el caso de paralelogramos. Vemos que es bastante grande y muy difícil de recordar, pero sólo utiliza seis puntos de encuentro, así que el teorema queda de la siguiente forma

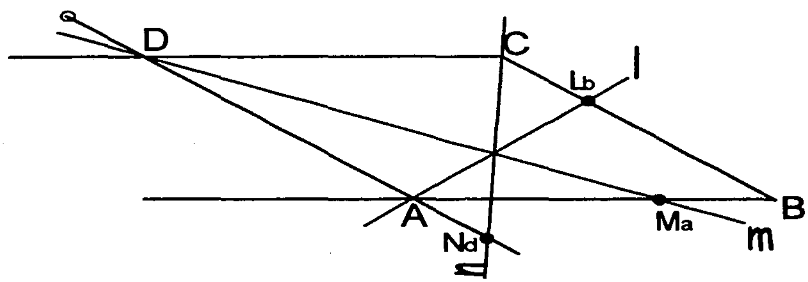
Teorema 2.19. *Si $ABCD$ es un paralelogramo y l no pasa por B, C, m no pasa por A, n no pasa por A, B, D, entonces l, m y n concurren si y sólo si*

$$\frac{AL_a}{L_aB}\cdot\frac{BM_a}{M_aA}\left(\frac{CN_b}{N_bB}+1\right)\left(\frac{DL_c}{L_cC}+1\right)+\frac{AL_a}{L_aB}\left(1+\frac{DN_d}{N_dA}\right)\left(\frac{DL_c}{L_cC}+1\right)\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DM_d}{M_dA}+$$
$$\left(1+\frac{DN_d}{N_dA}\right)\frac{AN_d}{N_dD}\left(1+\frac{AL_a}{L_aB}\right)\frac{DL_c}{L_cC}+\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\left(1+\frac{AL_a}{L_aB}\right)\left(\frac{CN_b}{N_bB}+1\right)+$$
$$\frac{DM_d}{M_dA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\left(\frac{CN_b}{N_bB}+1\right)\left(\frac{DL_c}{L_cC}+1\right)=\left(\frac{CN_b}{N_bB}+1\right)\left(\frac{DL_c}{L_cC}+1\right)$$

También podemos obtener varios corolarios si hacemos que algunas de las líneas pasen por los vértices del paralelogramo, por ejemplo,

Corolario 2.20. *Sea $ABCD$ un paralelogramo. Supongamos que l pasa por A, m por D, y n por C, entonces l, m y n concurren si y sólo si*

$$\left(\frac{BL_b}{L_bC}+1\right)\left(\frac{BM_a}{M_aA}+1\right)\frac{AN_d}{N_dD}=-1$$



Demostración.

En la expresión del teorema 2.14 (Pág. 2.14) varios sumandos se hacen cero y resulta que l, m, n concurren si y sólo si:

$$\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}-\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}=1$$

y como $\frac{DL_c}{L_cC}=-\left(\frac{BL_b}{L_bC}+1\right)$ y $\frac{BN_a}{N_aA}=-\left(\frac{DN_d}{N_dA}+1\right)$tenemos:

$$\left(\frac{DN_d}{N_dA}+1\right)\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\left(\frac{BL_b}{L_bC}+1\right)+\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\left(\frac{BL_b}{L_bC}+1\right)\cdot\frac{CL_b}{L_bB}=1$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left(\frac{AN_d}{N_dD}+1\right)\left(\frac{CL_b}{L_bB}+1\right)+\frac{BM_a}{M_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\left(\frac{CL_b}{L_bB}+1\right)=1$$

$\Longleftrightarrow$

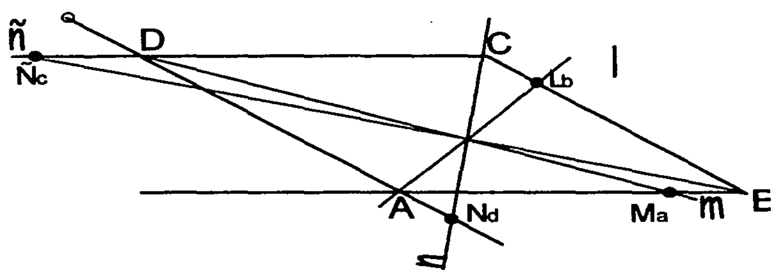
$$\left(\frac{CL_b}{L_bB}+1\right)\left(\frac{AN_d}{N_dD}\left(1+\frac{BM_a}{M_aA}\right)+1\right)=1$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left(\frac{BL_b}{L_bC}+1\right)\left(\frac{BM_a}{M_aA}+1\right)\frac{AN_d}{N_dD}=-1$$

Q.E.D.

Supongamos ahora que tenemos una línea mas $\tilde{n}$ que pasa por B,



y tomando el cuadrilátero $BCDA$ y las líneas $\tilde{N}, L, M$ tenemos que concurren si y sólo si

$$\left(\frac{C\tilde{N}_c}{\tilde{N}_cD}+1\right)\left(\frac{CL_b}{L_bB}+1\right)\frac{BM_a}{M_aA}=-1$$

entonces podemos obtener la siguiente implicación:

Teorema 2.21. *Si $l, m, n, \tilde{n}$ concurren un un cuadrilátero $ABCD$, y l pasa por A, m por D, n por C y $\tilde{n}$ por B entonces*

$$\frac{AN_d}{N_dD}\frac{D\tilde{N}_c}{M_aB}\frac{BL_b}{L_bC}=-1$$

La demostración es muy sencilla ya que como l, m, n concurren tenemos que

$$\left(\frac{BL_b}{L_bC}+1\right)\left(\frac{BM_a}{M_aA}+1\right)\frac{AN_d}{N_dD}=-1$$

y como $\tilde{n}, m, n$ concurren tenemos:

$$\left(\frac{C\tilde{N}}{\tilde{N}D}+1\right)\left(\frac{CL}{LB}+1\right)\frac{BM_a}{M_aA}=-1$$

por lo tanto

$$\left(\frac{BL_b}{L_bC}+1\right)\left(\frac{BM_a}{M_aA}+1\right)\frac{AN_d}{N_dD}=\left(\frac{C\tilde{N}_c}{\tilde{N}_cD}+1\right)\left(\frac{CL_b}{L_bB}+1\right)\frac{BM_a}{M_aA}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{BC}{L_bC}\left(1+\frac{AM_a}{M_aB}\right)\frac{AN_d}{N_dD}=\left(\frac{C\tilde{N}_c}{\tilde{N}_cD}+1\right)\frac{CB}{L_bB}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{BL_b}{L_bC}\frac{AB}{M_aB}\frac{AN_d}{N_dD}=\frac{CD}{\tilde{N}_cD}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{AN_d}{N_dD}\frac{D\tilde{N}_c}{M_aB}\frac{BL_b}{L_bC}=-1$$

Q.E.D.

Veamos otro útil teorema.

Si m no pasa por A, l no pasa por B ni por C, y m es la diagonal BD, entonces, l, m, n concurren en un punto que no esta en AB, ni en AD si y sólo si

$$\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{BN_a}{N_aA}=1$$

Teorema 2.22. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Si l no pasa por B ni por C, y m es la diagonal BD, entonces, l, m, n concurren si y sólo si las rectas N_dL_c, L_bN_a y la diagonal AC concurren.*

Demostración.

Por el corolario 2.18 (Pág. 28) aplicado al cuadrilátero $ABCD$, l, m, n concurren si y sólo si

$$\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}\cdot\frac{BN_a}{N_aA}=1$$

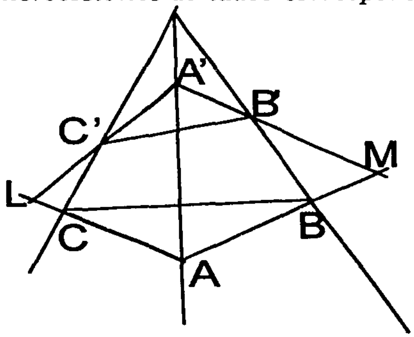
esto es lo mismo que

$$\frac{BN_a}{N_aA}\cdot\frac{AN_d}{N_dD}\cdot\frac{DL_c}{L_cC}\cdot\frac{CL_b}{L_bB}=1$$

si y sólo si N_dL_c, L_bN_a y la diagonal AC concurren (esto me lo asegura el mismo corolario aplicado al cuadrilátero $BCDA$). *Q.E.D.*

El siguiente ejemplo es el conocido teorema de Desargues, el cual tiene casos especiales como vértices correspondientes que coinciden o si algún vértice coincide con el centro de perspectiva. Estos casos son evidentes y se toman a parte de esta demostración:

Ejemplo 8. *En los triángulos ABC y $A'B'C'$, las rectas que unen a vértices correspondientes concurren si y sólo si las intersecciones de lados correspondientes son colineales.*

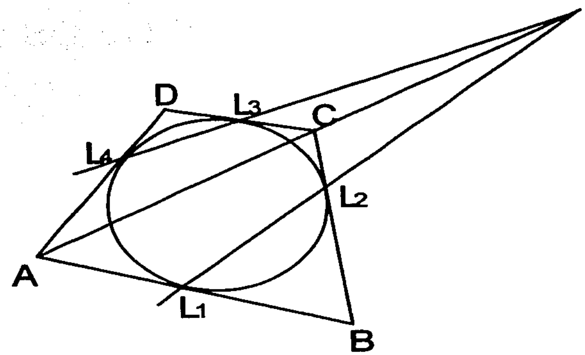


Demostración.

Sean M el punto común de AB y $A'B'$, y L el de AC y $A'C'$, por el teorema anterior aplicado al cuadrilátero $LA'MA$, CC', AA' y BB' concurren si y sólo si BC, $B'C'$ y LM concurren, esto es, las intersecciones de los lados correspondientes son colineales. *Q.E.D.*

En el ejemplo anterior si L o M son puntos al infinito podemos tomar límites y la demostración sigue siendo válida para esos casos.

Ejemplo 9. *Si tenemos un cuadrilátero $ABCD$ circunscrito a una circunferencia C y L_1, L_2, L_3, L_4 los puntos de tangencia de AB, BC, CD y DA con C, entonces L_1L_2 y L_3L_4 concurren con la diagonal AC, así como L_4L_1 y L_2L_3 concurren con la diagonal BD.*



La demostración se sigue inmediatamente del corolario2.18 (Pág. 28) y del teorema 2.22.
Q.E.D.

3. ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS CONVEXOS

Durante el taller de geometría y convexidad realizado en Guanajuato, un matemático presentó una conjetura acerca de iluminación de polígonos convexos, el observó que al parecer cualquier polígono convexo puede iluminarse colocando lámparas de 60° en sus vértices, por ejemplo, cualquier triángulo puede iluminarse con una lámpara de 60° en uno de sus vértices, basta colocar la lámpara en el ángulo menor o igual a 60° que siempre tiene el triángulo, en este caso es casi inmediato, pero el caso general no había sido resuelto, entonces la conjetura es la siguiente:

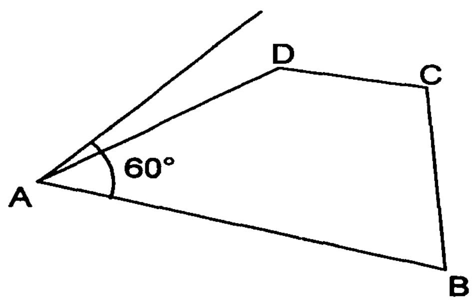
Conjetura 3.1. *Todo polígono convexo puede iluminarse colocando lámparas de* 60° *en sus vértices.*

Presentamos aquí la demostración para los casos del cuadrilátero y del pentágono, después lo demostramos para el caso general.

3.1. PENTÁGONO Y CUADRILÁTERO

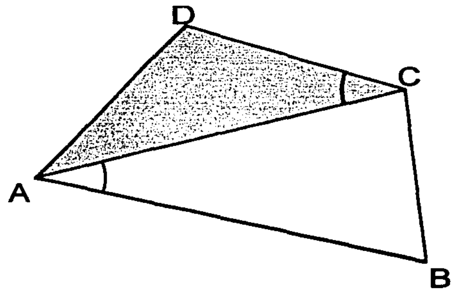
Teorema 3.2. *Cualquier cuadrilátero convexo puede iluminarse colocando lámparas de* 60° *en sus vértices.*

Demostración:
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, tracemos la diagonal AC.
Si alguno de los ángulos interiores del cuadrilátero es menor o igual a 60°, entonces, con una lámpara en ese vértice iluminamos todo el cuadrilátero, ya que es convexo.



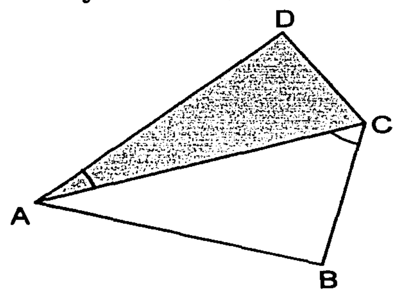
Si todos los ángulos interiores son mayores que 60°, como $\hat{B} > 60°$, $\angle BAC < 60°$ o $\angle ACB < 60°$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\angle BAC < 60°$, ahora en el ΔACD, también $\angle DCA < 60°$ o $\angle CAD < 60°$,

1. Si $\angle DCA \leq 60°$, entonces con $\angle BAC$ y $\angle DCA$ iluminamos todo el cuadrilátero.



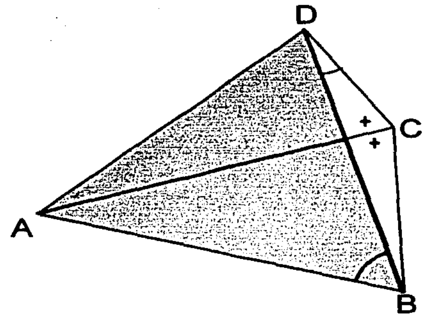
2. Si $\angle DCA > 60°$, entonces $\angle CAD < 60°$.

   a) Si $\angle ACB \leq 60°$, entonces con $\angle ACB$ y $\angle CAD$ iluminamos todo el cuadrilátero.



   b) Si $\angle ACB > 60°$, entonces $\angle DCB > 120° \Rightarrow \angle CBD < 60°$ y $\angle BDC < 60°$, entonces como $\angle BAD > 60°$, el $\angle DBA < 60°$ o $\angle ADB < 60°$.

      1) Si $\angle DBA < 60°$, entonces con $\angle DBA$ y $\angle BDC$ iluminamos el cuadrilátero.



2) Si $\angle ADB < 60°$, entonces con $\angle ADB$ y $\angle CBD$ iluminamos el cuadrilátero.

Q.E.D.

El teorema me garantiza que cualquier cuadrilátero convexo se puede iluminar con una lámpara de 60° en uno de sus vértices o dos lámparas cada una en vértices opuestos.

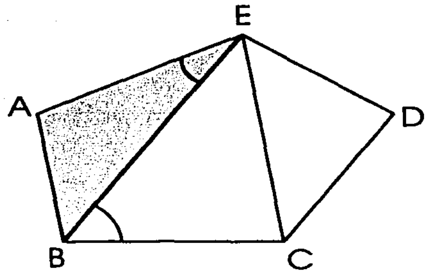
El siguiente es el caso para el pentágono.

Teorema 3.3. *Todo pentágono convexo puede iluminarse con lámparas de* 60°*, en sus vértices.*

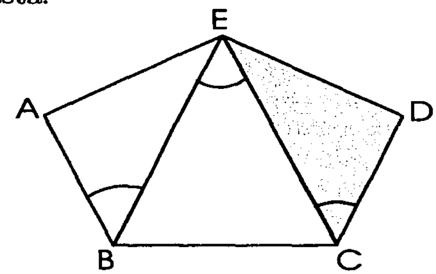
Demostración:

Sea $ABCDE$ un pentágono convexo, si alguno de sus ángulos interiores es menor o igual a 60°, entonces con una lámpara en ese vértice, se ilumina todo el pentágono, entonces supongamos que todos los ángulos interiores son mayores que 60°, tracemos la diagonal EC y tomemos el cuadrilátero convexo $ABCE$, el cual, por el teorema anterior puede ser iluminado con una lámpara si alguno de sus ángulos interiores es menor o igual a 60° o, con dos lámparas en vértices diagonalmente opuestos, si todos los ángulos interiores son mayores que 60° (en particular $\angle AEC > 60°$, esto lo usaremos en el caso 1.b.i).

1. Si necesito dos lámparas para iluminar $ABCE$, puedo iluminarlo con lámparas en E, B o con lámparas en A, C, sin pérdida de generalidad puedo suponer que se puede con las lámparas en E y B, esto es, $\angle AEB$ y $\angle CBE$ son menores o iguales a 60°, o $\angle BEC$ y $\angle EBA$ lo son, si sucede lo primero entonces también queda iluminado todo el pentágono y ya terminamos,

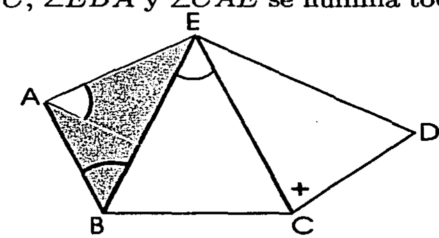


si $\angle BEC$ y $\angle EBA$ son los menores o iguales a 60°, entonces con estos dos ángulos únicamente se ilumina el cuadrilátero $ABCE$, si $\angle DCE \leq 60°$, entonces con este ángulo ilumino ΔECD y ya está.

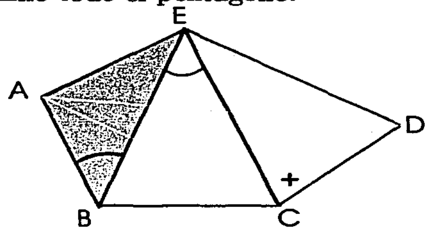


Si $\angle DCE > 60°$, entonces $\angle DCA > 60°$ y al tomar el cuadrilátero $ACDE$ tenemos dos casos:

a) $ACDE$ puede iluminarse con una lámpara en un vértice. Como los ángulos del cuadrilátero en C, D y E son mayores que 60°, la lámpara que ilumina $ACDE$ está en A, entonces con $\angle BEC$, $\angle EBA$ y $\angle CAE$ se ilumina todo el pentágono.



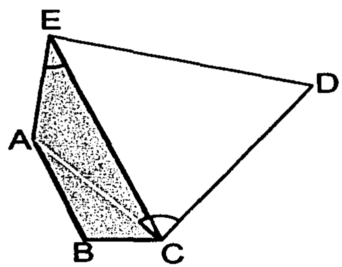
b) Si $\angle CAE > 60°$, $ACDE$ se ilumina con dos lámparas, colocadas en vértices diagonalmente opuestos. Si se ilumina con lámparas en A y D entonces, con las lámparas en A, B, D y E ilumino todo el pentágono.



Si no se puede iluminar con lámparas en A y D, entonces $\angle DAE > 60°$ o $\angle ADC > 60°$

1) Si $\angle DAE > 60°$ como $\angle AEC > 60°$ (porque estamos en el caso en que todos los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCE$ son mayores que $60°$) tenemos que $\angle AED > 60°$ y por lo tanto $\angle EDA < 60°$, por lo tanto $\angle CAD > 60°$ (porque si no $\angle EDA$ y $\angle CAD$ iluminarían a $ACDE$), esto quiere decir que $\angle CAE > 120°$ pero entonces la suma de los ángulos interiores del ΔACE sería mayor a $180°$, entonces este caso no es posible.
2) Si $\angle ADC > 60°$ podemos seguir el mismo procedimiento del caso $1b1$ y llegar a que la suma de los ángulos interiores del ΔCDE sería mayor a $180°$, y darnos cuenta que tampoco este caso es posible.

2. Si necesito una lámpara para iluminar a $ABCE$, entonces, esa lámpara está en C o E, sin pérdida de generalidad supongamos que esta en E, entonces, tomemos el cuadrilátero $ACDE$, si éste es iluminado por una sola lámpara, la lámpara debe estar en A o en C y de este modo ya estaría iluminado todo el pentágono,

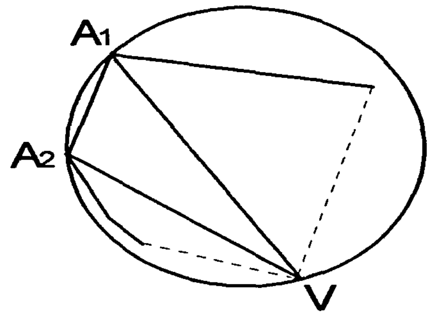


entonces si $CDEA$ sólo puede ser iluminado con lámparas en vértices diagonalmente opuestos, podemos renombrar $ABCDE$ como $CDEAB$ y seguir los mismos pasos del caso 1. *Q.E.D.*

3.2. CASO GENERAL

Veremos ahora el caso general, pero antes un lema.

Lema 3.4. *Todo polígono convexo puede ser encerrado en una circunferencia que pase por al menos tres de sus vértices.*



Demostración:

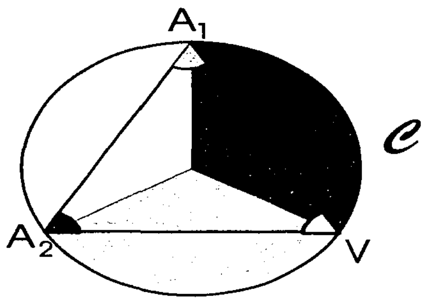
Sea $A_1A_2\ldots A_n$ un n-ágono convexo, entonces por ser convexo, todo el polígono está de un lado de la recta A_1A_2, sea V un vértice del n-ágono tal que $\angle A_1VA_2$ sea el mínimo de todos los ángulos $\angle A_1A_iA_2$ con $i = 3, 4, \ldots, n$, entonces la circunferencia C circunscrita al ΔA_1VA_2 encierra por completo al n-ágono y pasa por al menos tres de sus vértices: A_1, A_2 y V. *Q.E.D.*

Con esto ya podemos probar la conjetura, más aún, probaremos que a lo más se necesitan tres lámparas.

Teorema 3.5. *Todo polígono convexo puede iluminarse con menos de cuatro lámparas de* $60°$ *colocadas en sus vértices (cada vértice con a lo más una lámpara).*

Primera demostración:

Sea $A_1A_2\ldots A_n$ un polígono convexo orientado positivamente y sea C una circunferencia como en el lema. Si ΔA_1A_2V es equilátero, entonces con $\angle VA_2A_1$, $\angle A_1VA_2$, $\angle A_2A_1V$, iluminamos todo el círculo C y por lo tanto todo el polígono.

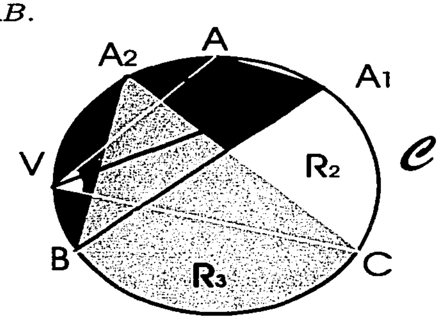


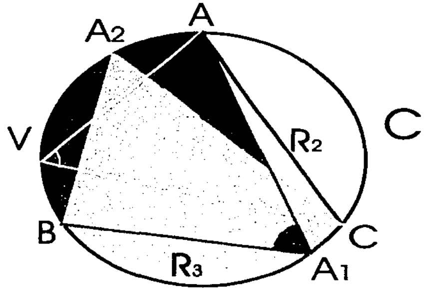
Si ΔA_1A_2V no es equilátero, entonces alguno de sus ángulos interiores es menor que 60°, sin pérdida de generalidad supongamos que es $\angle A_2A_1V$, entonces su lado opuesto A_2V es menor que el lado de un triángulo equilátero inscrito en $\mathcal{C}$, por lo tanto, podemos encontrar un punto P en $\mathcal{C}$ tal que el arco PA_2V sea de 120°.

Sea A un punto que esté tanto en el arco PA_2, como en el arco A_1A_2, y distinto de A_1 y A_2,

Sean B y C, puntos en $\mathcal{C}$ tales que el triángulo ABC es equilátero.

A_2 y V están en el arco AB.





En cualquiera de los dos casos tomemos el $\angle AA_1B$, con este ángulo queda iluminada la región encerrada por $\overline{A_1A}$, $\widehat{_{AB}}$ y $\overline{BA_1}$, sea R_1 esta región.

Ahora tomemos el $\angle CVA$ por el cual queda iluminada la región encerrada por $\overline{AV}$, $\overline{VC}$ y $\widehat{_{CA}}$, sea R_2 esta región.

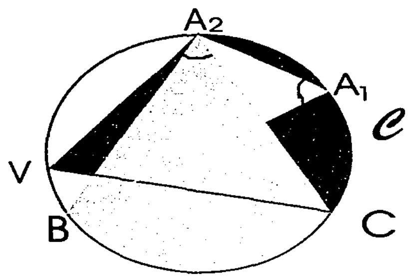
Por último tomemos el $\angle BA_2C$ que ilumina la región encerrada por $\overline{A_2B}$, $\widehat{_{BC}}$ y $\overline{CA_2}$, sea R_3 esta región, entonces, el $\angle BA_2C$ únicamente no ilumina R_4 y R_5, donde R_4 es la región delimitada por $\widehat{_{A_2B}}$ y $\overline{BA_2}$, y R_5 la delimitada por $\widehat{_{CA_2}}$ y $\overline{A_2C}$, pero R_4 está en R_1 ya que A_2 está en $\widehat{_{AB}}$, y R_5 esta en la región encerrada por $\widehat{_{CV}}$ y VC, ya que A_2 está en $\widehat{_{CV}}$ y esta región es igual a R_2 unión la región delimitada por $\overline{VA}$ y $\widehat{_{AV}}$ la cual esta contenida en la región delimitada por $\overline{BA}$ y $\widehat{_{AB}}$ y esta a su vez esta contenida en R_1, por tanto R_5 está contenida en $R_1 \cup R_2$, esto quiere decir que todo el círculo queda iluminado por $\angle AA_1B$, $\angle CVA$ y $\angle BA_2C$. *Q.E.D.*

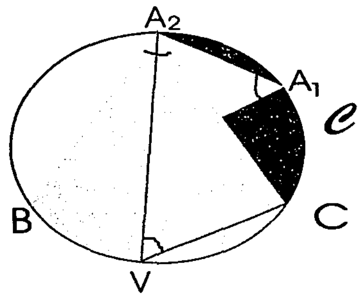
Segunda demostración. (Dr.Alejandro Illanes Mejía)

Sea $A_1A_2 \ldots A_n$ un polígono convexo orientado positivamente y sea C una circunferencia como en el lema.

Sin perder generalidad, supongamos que $\angle A_2$ es el mayor del ΔA_1A_2V. Entonces $\angle A_2 \geq 60°$.

Construyamos el triángulo equilátero que pasa por A_2 y está inscrito en C, y sean B y C sus otros vértices.





Tenemos tres arcos $\widehat{A_2B}$, $\widehat{BC}$ y $\widehat{CA_2}$. V y A_1 no pueden estar en el mismo arco, porque $\angle A_2 \geq 60°$, esto implica que A_1 no puede estar en el arco $\widehat{A_2B}$, y V no puede estar en el arco $\widehat{CA_2}$, entonces podemos iluminar todo el círculo y, en consecuencia el polígono, con una lámpara en A_2, que ilumina al ΔA_1BC y a la región encerrada por el segmento CB y el arco $\widehat{BC}$. Una lámpara en A_1, que ilumine la región delimitada por el segmento BA_2 y el arco $\widehat{A_2B}$. Por último una lámpara en V, que ilumine la región que falta de iluminar. *Q.E.D.*

3.3. FORMALIZACIÓN DE CONCEPTOS. El ángulo de iluminación.

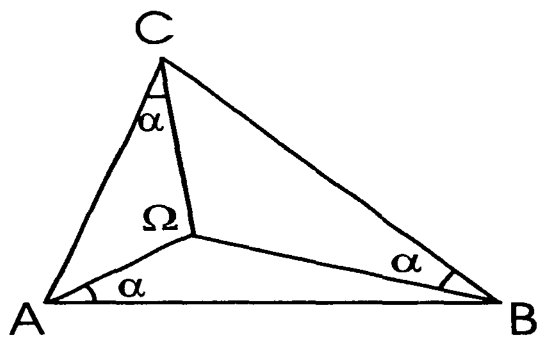
Teniendo ya este resultado, podemos plantearnos el problema de encontrar el mínimo valor del ángulo de las lámparas para cada polígono, por ejemplo, en el caso del triángulo, 60° parece ser un ángulo demasiado grande, tanto que con una sola lámpara se puede iluminar cualquier triángulo.

Definición 1. *Diremos que un ángulo α puede iluminar a un polígono convexo P si y sólo si en cada vértice V de P existe un ángulo de magnitud α con vértice en V, de tal forma que la unión de las superficies barridas por cada ángulo contenga al polígono.*

Definición 2. *El ángulo de iluminación del n-ágono será el menor ángulo que puede iluminar a todo polígono convexo de n lados.*

El ángulo de iluminación existe para todo n-ágono y es menor o igual que 60° ya que el ángulo de 60° puede iluminar a cualquier polígono convexo y el ángulo de cero grados no.

Vamos a encontrar el ángulo de iluminación del triángulo, para eso usaremos el ángulo de Brocard del triángulo.



El primer punto de Brocard de un triángulo ABC se designa con la letra griega Ω y es el punto en el interior del triángulo tal que $\angle BA\Omega = \angle CB\Omega = \angle AC\Omega$, se encuentra fácilmente construyendo una circunferencia que pase por A y B y que sea tangente a BC, y una circunferencia que pase por B y C y que sea tangente a CA.

Uno de los puntos de intersección de las dos circunferencias es B y el otro es Ω, porque si llamamos I al punto de intersección (distinto de B) de las dos circunferencias, $\angle BAI = \angle CBI$ porque BC es tangente a la primera circunferencia y abarcan arcos iguales, de la misma forma $\angle CBI = \angle ACI$, entonces $I = \Omega$.

Al ángulo $BA\Omega$ se le designa con la letra griega ω, y se le llama el ángulo de Brocard. Sea P el punto de intersección de $A\Omega$ y BC, demostraremos que el ángulo de Brocard siempre es menor o igual a treinta grados.

1. $\frac{BP}{PC} = \frac{\Omega B \text{sen } B}{C\Omega \text{sen } A}$ porque $\angle B\Omega P = \angle BA\Omega + \angle \Omega BA = \omega + (B - \omega) = B$, y también $\angle P\Omega C = A$.

2. Si h es la altura del $\Delta\Omega BC$ bajada desde C, entonces

   $BC\text{sen } \omega = h = C\Omega\text{sen}\left(180° - \hat{A} - \hat{B}\right) = C\Omega\text{sen } \hat{C}$, es decir,

$$C\Omega = \frac{BC\text{sen}\omega}{\text{sen}\hat{C}}$$

   de la misma forma $= \Omega B\text{sen } \hat{B}$ y por lo tanto

$$\Omega B = \frac{AB\text{sen}\omega}{\text{sen}\hat{B}}$$

   Sustituyendo $C\Omega$ y ΩB en 1 tenemos

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\Omega B\text{sen } B}{C\Omega\text{sen } A} = \frac{AB\text{sen}\omega \cdot \text{sen } \hat{C} \cdot \text{sen } B}{\text{sen } \hat{B} \cdot BC\text{sen}\omega \cdot \text{sen } A} = \frac{AB\text{sen } \hat{C}}{BC\text{sen } \hat{A}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}$$

   porque por la ley de los senos $\frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{AB}{BC}$,

3. entonces tenemos que $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BP}{PC}$ y como $BP + PC = BC$,

$$BP = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}PC = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}(BC - BP) = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}BC - \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}BP \therefore$$

$$BP\left(1 + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}\right) = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}} \therefore$$

$$BP = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}}\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \frac{\overline{AB}^2 \cdot BC}{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$$

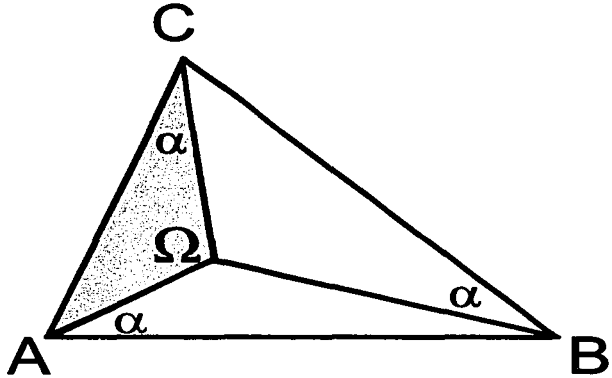
y usando ley de los senos en el ΔABP tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\hat{B}+\omega\right)}{\operatorname{sen}\,\omega} = \frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}{AB\cdot BC} = \frac{AB}{BC}+\frac{BC}{AB} \geq 2 \therefore$$

$$\operatorname{sen}\omega \leq \frac{\operatorname{sen}\left(\hat{B}+\omega\right)}{2} \leq \frac{1}{2} \therefore \omega \leq 30^\circ$$

Con esto ya podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Todo triángulo puede ser iluminado con lámparas de* 30° *en sus vértices (el ángulo de* 30° *puede iluminar a cualquier triángulo).*



Demostración:

Sea ABC un triángulo y Ω el punto de Brocard del ΔABC, como vimos anteriormente el ángulo de Brocard siempre es menor o igual a 30°, por lo tanto $\angle BA\Omega$, $\angle CB\Omega$ y $\angle AC\Omega$ iluminan todo el triángulo y son menores o iguales a 30°, esto quiere decir que, con más razón, el triángulo puede ser iluminado con lámparas de 30°. *Q.E.D.*

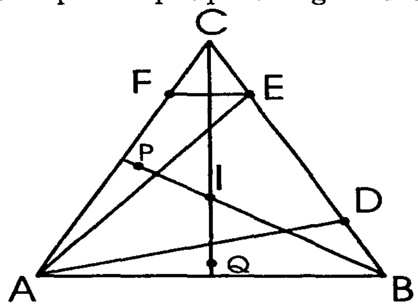
Teorema 3.7. *El ángulo de iluminación del triángulo es igual a* 30°*. (No todos los triángulos pueden ser iluminados con lámparas de menos de* 30° *en sus vértices).*

Demostración:

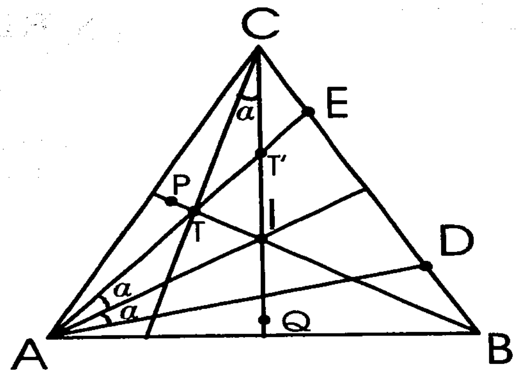
Sea ABC un triángulo equilátero y supongamos que $\alpha < 30^\circ$ puede iluminar al ΔABC. Sea I el incentro del triángulo, entonces I tiene que ser iluminado desde algún vértice, supongamos que es iluminado desde A.

Sean D y E los puntos en BC tales que $\angle DAI = \alpha = \angle IAE$, entonces al menos el interior de los triángulos ABD y AEC no es iluminado por la lámpara en A. Sea P un punto en el interior del ΔAEC que esté sobre la recta BI y Q un punto sobre CI en el interior del ΔABD, entonces P tiene que ser iluminado por una lámpara en B o en C, veamos ambos casos:

1. Si P es iluminado por una lámpara en B, nombremos F al punto en CA tal que $\angle FBI = \alpha$, $F \neq C$ porque $\angle CBF = 30° - \alpha > 0$. El ΔCFE tiene que ser iluminado con una lámpara en C pero eso es imposible porque el ángulo en C es de $60°$ y $\alpha < 30°$.



2. Si P es iluminado por una lámpara en C. Sea T el punto de intersección de AE y BI, entonces $\angle TCI = \angle IAE = \alpha$, esto quiere decir que Q no es iluminado por la lámpara en C, ni tampoco el interior del $\Delta T'EC$ donde T' es el punto de intersección de CI y AE. Entonces Q tiene que ser iluminado con una lámpara en B, pero haciendo un análisis similar al de la lámpara en C, la lámpara en B no ilumina el interior del ΔCBI y por lo tanto, tampoco ilumina el interior del $\Delta T'EC$. Entonces en este caso también es imposible iluminar al triángulo.



Se sigue que el ángulo de iluminación del triángulo es igual a 30°. *Q.E.D.*

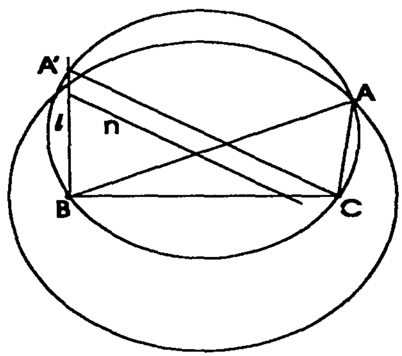
4. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

4.1. PRIMER PROBLEMA

Durante la cuarta jornada sobre la enseñanza de la geometría realizada en la facultad de ciencias de la UNAM, hubo un taller sobre construcciones con regla y compás, el problema planteado por el Dr. Alejandro Illanes, era construir un triángulo conociendo tres de los siguientes datos: el ángulo $\angle A$, el lado opuesto a A: BC, la bisectriz v, la mediana m, y la altura h. Como sabemos son diez casos en total y durante el taller se vieron las soluciones de nueve de ellos, pero, uno de los casos quedo sin resolverse y el Dr. Illanes nos dijo que aún no conocía la solución, así que nos invitó a que siguieramos pensando en como encontrarla. Aquí presento una solución a ese problema.

Para algunos de los demás casos hay soluciones muy sencillas, como por ejemplo el caso en el que se conocen el lado BC, $\angle A$ y la mediana m.

Construcción:



Trazar el segmento BC, y una recta l perpendicular a BC por B. Por un punto de l distinto de B trazar un ángulo igual a $\angle A$ y con lado inicial en l, y llamemos n al lado final. Por C trazar una paralela a n y llamemos A' a su punto de intersección con la recta l, ahora tracemos una circunferencia C_1 que pase por los puntos A', B y C y tracemos otra circunferencia C_2 con centro en el punto medio de BC y radio igual a m. Sea A el punto de intersección de C_1 y C_2 entonces ΔABC es el triángulo buscado, además vemos que podemos tener dos, una o ninguna solución, dependiendo del valor de m.

Es tiempo de ver la solución del problema que antes mencionamos:

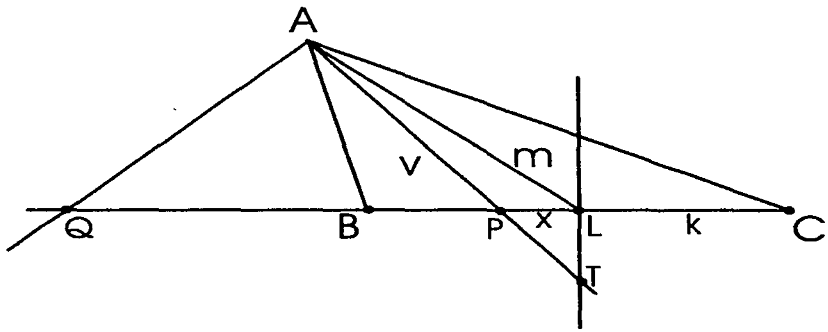
Construir un triángulo ABC dadas la bisectriz v por A, la mediana m por A, y el lado BC.

El caso en el que $v = m$ es muy sencillo ya que A será uno de los puntos sobre la mediatriz del segmento BC tal que la distancia de A al punto medio de BC es igual a m.

Veamos el caso en el que $v \neq m$.

Si suponemos que el problema está resuelto, sean:

- a es el lado BC y $k = \frac{a}{2}$
- P es el punto de intersección de v y a, y Q el punto de intersección de a y la bisectriz externa.
- T es el punto de intersección de la bisectriz interna y la mediatriz de BC.
- L es el punto medio de BC y x la distancia de L a P.



Tenemos que el $\Delta QAP \sim \Delta TLP$ y sabemos que P y Q dividen en la misma razón (con signo opuesto) a CB. Por tanto

$$\frac{k+x}{k-x} = \frac{2k+BQ}{BQ} \Rightarrow k \cdot BQ + x \cdot BQ = 2k^2 + k \cdot BQ - 2kx - x \cdot BQ$$

$\Rightarrow$

$$2x \cdot BQ = 2k^2 - 2kx \Rightarrow BQ = \frac{k\,(k-x)}{x}$$

y de la semejanza tenemos

$$\frac{PQ}{AP} = \frac{PT}{LP} \Rightarrow \frac{(k-x) + \frac{k(k-x)}{x}}{v} = \frac{PT}{x} \Rightarrow \frac{k^2 - x^2}{v} = PT$$

Ahora, aplicando la ley de los cosenos al ΔAPL, tenemos

$$v^2 + m^2 - 2vm\cos(\angle PAL) = x^2 \Rightarrow \cos(\angle PAL) = \frac{v^2 + m^2 - x^2}{2vm}$$

y, utilizando la ley de los cosenos en el triángulo ATL obtenemos:

$$LT^2 = m^2 + (v + PT)^2 - 2m(v + PT)\cos(\angle PAL)$$

$\Rightarrow$

$$LT^2 = m^2 + \left(v + \frac{k^2 - x^2}{v}\right)^2 - 2m\left(v + \frac{k^2 - x^2}{v}\right)\frac{v^2 + m^2 - x^2}{2vm}$$

$\Rightarrow$

$$m^2 + \left(\frac{v^2 + k^2 - x^2}{v}\right)^2 - \left(\frac{v^2 + k^2 - x^2}{v}\right)\frac{v^2 + m^2 - x^2}{v} = LT^2$$

Utilizando el teorema de Pitágoras en el ΔPTL,

$$\left(\frac{k^2 - x^2}{v}\right)^2 - x^2 = LT^2$$

$\Rightarrow$

$$m^2 + \left(\frac{v^2 + k^2 - x^2}{v}\right)^2 - \left(\frac{v^2 + k^2 - x^2}{v}\right)\frac{v^2 + m^2 - x^2}{v} = \left(\frac{k^2 - x^2}{v}\right)^2 - x^2$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} v^2m^2 + (v^4 + 2v^2k^2 - 2v^2x^2 + k^4 - 2k^2x^2 + x^4) - \\ (v^4 + v^2m^2 - 2v^2x^2 + v^2k^2 + k^2m^2 - k^2x^2 - x^2m^2 + x^4) = \\ k^4 - 2k^2x^2 + x^4 - v^2x^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$x^4 - v^2k^2 - v^2x^2 - k^2x^2 + k^2m^2 - x^2m^2 = 0$$

Y sus raíces positivas son:

$$x=\sqrt{\frac{v^2+k^2+m^2\pm\sqrt{\left(v^2+k^2+m^2\right)^2-4\left(k^2m^2-k^2v^2\right)}}{2}}$$

como x tiene que ser menor que k, el signo $+$ no está permitido, entonces la solución es:

$$x=\sqrt{\frac{v^2+k^2+m^2-\sqrt{\left(v^2+k^2+m^2\right)^2-4\left(k^2m^2-k^2v^2\right)}}{2}}$$

que es construible con regla y compás.
Lo que tenemos que ver es cuándo hay solución,

$$\left(v^2+k^2+m^2\right)^2-4\left(k^2m^2-k^2v^2\right)=v^4+6k^2v^2+2v^2m^2+k^4-2k^2m^2+m^4=$$
$$v^4+6k^2v^2+2v^2m^2+\left(k^2-m^2\right)^2\geq 0$$

por lo tanto

$$\sqrt{\left(v^2+k^2+m^2\right)^2-4\left(k^2m^2-k^2v^2\right)}$$

siempre existe. Ahora tenemos que verificar que

$$v^2+k^2+m^2-\sqrt{\left(v^2+k^2+m^2\right)^2-4\left(k^2m^2-k^2v^2\right)}$$

nunca es negativo para que exista su raíz. Como la bisectriz siempre es menor o igual a la mediana (lo probaremos más adelante) tenemos:

$$m^2-v^2\geq 0 \iff 4k^2\left(m^2-v^2\right)\geq 0 \iff 4\left(k^2m^2-k^2v^2\right)\geq 0$$

$\iff$

$$\left(v^2+k^2+m^2\right)^2\geq\left(v^2+k^2+m^2\right)^2-4\left(k^2m^2-k^2v^2\right)$$

$\iff$

$$v^2+k^2+m^2-\sqrt{\left(v^2+k^2+m^2\right)^2-4\left(k^2m^2-k^2v^2\right)}\geq 0$$

Por lo tanto siempre existe x. Entonces para construir el triángulo basta calcular x y ver si es menor que k para que exista solución, después se debe construir un segmento de longitud BC, su punto medio L y un punto P sobre BC tal que $LP=x$, ahora se puede construir el triángulo ALP tal que $AL = m$ y $PA = v$, entonces ΔABC es el triángulo buscado.

Demostración:

ΔABC tiene sin lugar a dudas el lado BC y la mediana con las longitudes pedidas, ahora tenemos que ver que AP es bisectriz del ángulo BAC, entonces suponiendo que $AB \leq CA$, y siguiendo la forma en que encontramos x, llamemos T al punto de intersección de la bisectriz con la mediatriz de BC y sea Q el punto en la recta BC tal que $\angle QAP = 90°$, entonces utilizando la ley de los cosenos en los triángulos APL y ATL, para despejar $\cos(\angle PAL)$ de la primera expresión y sustituirlo en la segunda, obtenemos

$$LT^2 = m^2 + (v + PT)^2 - 2m(v + PT)\frac{v^2 + m^2 - x^2}{2vm}$$

y por el teorema de Pitágoras $(PT)^2 - x^2 = LT^2$, entonces

$$(PT)^2 - x^2 = m^2 + (v + PT)^2 - 2m(v + PT)\frac{v^2 + m^2 - x^2}{2vm}$$

pero x se encontró como una raíz del polinomio:

$$\left(\frac{k^2 - x^2}{v}\right)^2 - x^2 = m^2 + \left(v + \frac{k^2 - x^2}{v}\right)^2 - 2m\left(v + \frac{k^2 - x^2}{v}\right)\frac{v^2 + m^2 - x^2}{2vm}$$

$\Rightarrow$

$$(PT)^2 - \left(\frac{k^2 - x^2}{v}\right)^2 = (v + PT)^2 - \left(v + \frac{k^2 - x^2}{v}\right)^2 + \frac{v^2 + m^2 - x^2}{v}\left(\frac{k^2 - x^2}{v} - PT\right)$$

$\Rightarrow$

$$0 = (-v^2 + m^2 - x^2)\left(-\frac{k^2 - x^2}{v} + PT\right)$$

Esto implica que alguno de los factores es igual a cero. Como $x^2 = v^2 + m^2 - 2vm\cos\angle PAL$, entonces $-v^2 + m^2 - x^2 = -2v^2 + 2vm\cos\angle PAL$, supongamos que es igual a cero, entonces

$$-2v^2 + 2vm\cos\angle PAL = 0$$

$\iff$

$$2vm\cos\angle PAL = 2v^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$m \cos \angle PAL = v$$

esto sucede si y sólo si ΔAPL es rectángulo, con ángulo recto en P. Por tanto v es también la altura del ΔABC, y por lo tanto el triángulo es isósceles y por lo tanto $v = m$ pero estabamos suponiendo que $v \neq m$, por lo tanto $-v^2+m^2-x^2$ no es cero, entonces $-\frac{k^2-x^2}{v}+PT=0$, por lo tanto, $PT=\frac{k^2-x^2}{v}$

ahora por semejanza tenemos

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{AP} &= \frac{PT}{LP} \Rightarrow \frac{(k-x)+BQ}{v} = \frac{PT}{x} = \frac{\frac{k^2-x^2}{v}}{x} \Rightarrow \\ BQ &= \frac{k^2-x^2}{x} - k + x = \frac{k\,(k-x)}{x} \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{CQ}{QB} = \frac{CB+BQ}{QB} = \frac{2k+\frac{k(k-x)}{x}}{-\frac{k(k-x)}{x}} = -\frac{k+x}{k-x} = -\frac{CP}{PB}$$

por lo tanto el haz de rectas $A\,(CBPQ)$ es armónico y como el ángulo que forman las rectas AP y AQ es recto, tenemos que AP es bisectriz del ángulo BAC, con lo cual queda demostrada la construcción. *Q.E.D.*

Ahora demostraremos que la bisectriz por un vértice siempre es menor o igual que la mediana por el mismo vértice.

Si el triángulo es isósceles es evidente, si no, entonces sea C la circunferencia circunscrita y sean v y m la bisectriz y la mediana por un mismo vértice, supongamos que el vértice es A. Sea L el punto medio de BC y D el punto de intersección de C y v, y P el punto de intersección de BC y v. Por ser v bisectriz el punto D es el punto medio del arco BC y por ser L el punto medio de BC el ΔDPL es rectángulo con ángulo recto en L, por lo tanto

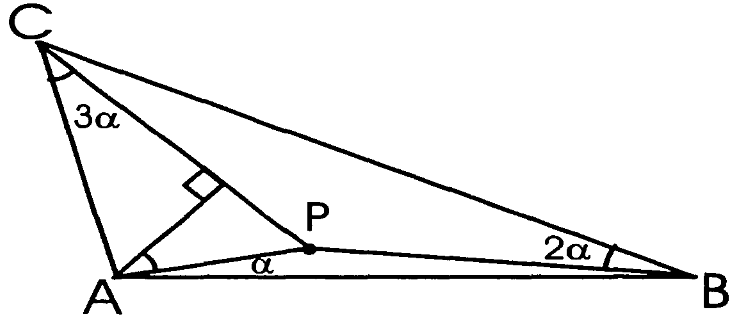
$$\angle LPA = \angle LDP + \angle PLD > 90^\circ \therefore \angle ALP < 90^\circ$$

y como a mayor ángulo se opone mayor lado, la mediana es mayor que la bisectriz. *Q.E.D.*

4.2. SEGUNDO PROBLEMA

Presentamos ahora el último problema de esta tesis.

Siguiendo la idea del punto de Brocard, podemos tratar de construir puntos P en el interior de un triángulo ABC de tal forma que los ángulos $\angle BAP$, $\angle CBP$ y $\angle ACP$ cumplan con ciertas relaciones.



Entonces, tratemos de construir un punto P tal que $2\angle BAP = \angle CBP$ y $3\angle BAP = \angle ACP$. Primero llamemos a, b y c a los lados opuestos a los vértices A, B y C. Veamos que la altura del ΔCPA por A es igual a $AP\text{sen}((A-\alpha)+3\alpha) = AP\text{sen}(A+2\alpha)$ donde α es el ángulo BAP, pero esa altura también es igual a $b\text{sen}3\alpha$, por lo tanto $AP = \frac{b\text{sen}3\alpha}{\text{sen}(A+2\alpha)}$, de la misma forma $CP = \frac{a\text{sen}2\alpha}{\text{sen}(C-\alpha)}$, entonces por la ley de los senos aplicada al ΔAPC tenemos $\frac{AP}{\text{sen}3\alpha} = \frac{CP}{\text{sen}(A-\alpha)}$, y al sustituir los valores de AP y CP obtenemos:
$\frac{b}{\text{sen}(A+2\alpha)} = \frac{a\text{sen}2\alpha}{\text{sen}(C-\alpha)\text{sen}(A-\alpha)}$ y entonces

$$b\text{sen}\,(C-\alpha)\,\text{sen}\,(A-\alpha) = a\text{sen}2\alpha\text{sen}\,(A+2\alpha)$$

Tomemos el ΔABC como el triángulo de lados $a=5$, $b=3$ y $c=4$, entonces el ángulo A es de $90°$, y la relación anterior se reduce a $b\text{sen}(C-\alpha)\cos(\alpha) = a\text{sen}2\alpha\cos 2\alpha$, entonces

$$bsen\,(C-\alpha) = a2sen\alpha\cos 2\alpha$$

$\Longleftrightarrow$

$$b\,(\text{sen}C\cos\alpha - \text{sen}\alpha\cos C) = a2sen\alpha\cos 2\alpha$$

$\Longleftrightarrow$

$$b\,(\text{sen}C - \tan\alpha\cos C) = a2\tan\alpha\cos 2\alpha = 2a\tan\alpha\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$\Longleftrightarrow$

$$bsenC - b\tan\alpha\cos C + bsenC\tan^2\alpha - b\tan^3\alpha\cos C = 2a\tan\alpha - 2a\tan^3\alpha$$

$\Longleftrightarrow$

$$\tan^3\alpha\,(b\cos C - 2a) - \tan^2\alpha\,(b\mathrm{sen}C) + \tan\alpha\,(2a + b\cos C) - bsenC = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$\tan^3\alpha\left(\frac{9}{5} - 10\right) - \tan^2\alpha\left(\frac{12}{5}\right) + \tan\alpha\left(10 + \frac{9}{5}\right) - \frac{12}{5} = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$41\tan^3\alpha + 12\tan^2\alpha - 59\tan\alpha + 12 = 0$$

Si a $\tan\alpha$ le llamamos x entonces tenemos este polinomio:

$$41x^3 + 12x^2 - 59x + 12 = 0$$

Este polinomio es irreducible en $\mathbf{Q}[x]$, para demostrarlo basta mostrar que no se factoriza en $\mathbf{Z}[x]$ (véase [2]). Si se factorizara entonces habría un factor lineal de la forma $(x \pm 1)$, $(x \pm 2)$, $(x \pm 3)$, $(x \pm 4)$, $(x \pm 6)$, $(x \pm 12)$, $(41x \pm 1)$, $(41x \pm 2)$, $(41x \pm 3)$, $(41x \pm 4)$, $(41x \pm 6)$, $(41x \pm 12)$, entonces veamos si alguno los siguientes numeros es un cero del polinomio: $x = \mp 1$, ∓ 2, ∓ 3, ∓ 4, ∓ 6, ∓ 12, $\mp\frac{1}{41}$, $\mp\frac{2}{41}$, $\mp\frac{3}{41}$, $\mp\frac{4}{41}$, $\mp\frac{6}{41}$, $\mp\frac{12}{41}$.

Sea $f(x) = 41x^3 + 12x^2 - 59x + 12$, entonces

$f(-1) = 42$	$f(1) = 6$	$f(-2) = -150$	$f(2) = 270$
$f(-3) = -810$	$f(3) = 1050$	$f(-4) = -2184$	$f(4) = 2592$
$f(-6) = -8058$	$f(6) = 8946$	$f(-12) = -68400$	$f(12) = 71880$
$f\left(-\frac{1}{41}\right) = \frac{22602}{1681}$	$f\left(\frac{1}{41}\right) = \frac{17766}{1681}$	$f\left(-\frac{2}{41}\right) = \frac{25050}{1681}$	$f\left(\frac{2}{41}\right) = \frac{15390}{1681}$
$f\left(-\frac{3}{41}\right) = \frac{27510}{1681}$	$f\left(\frac{3}{41}\right) = \frac{13050}{1681}$	$f\left(-\frac{4}{41}\right) = \frac{29976}{1681}$	$f\left(\frac{4}{41}\right) = \frac{10752}{1681}$
$f\left(-\frac{6}{41}\right) = \frac{34902}{1681}$	$f\left(\frac{6}{41}\right) = \frac{6306}{1681}$	$f\left(-\frac{12}{41}\right) = \frac{1200}{41}$	$f\left(\frac{12}{41}\right) = -\frac{5400}{1681}$

Entonces, $[\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] = 3$ y para que x fuera construible se necesitaría que existiera algún entero r tal que $2^r = 3$, lo cual es imposible, entonces $|\tan\alpha|$ no es construible, por lo tanto, tampoco α y tampoco se puede encontrar el punto que estamos buscando.

5. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Por el momento es todo, aún se puede hacer más investigación sobre los temas presentados, principalmente me interesa la parte de iluminación de polígonos convexos, en donde solo encontramos el ángulo de iluminación para el triángulo, y me gustaría encontrar el del cuadrilátero, o si fuera posible el de un polígono convexo en general.

También me gustaría encontrar algún tipo de generalización del teorema de Menelao para puntos cualesquiera (que no necesariamente estén sobre los lados del triángulo) pero aún no pienso bien si puede existir o no ese tipo de generalización.

Me interesa también depurar más el programa que presenté en turbo pascal, para que sea más fácil de entender y me gustaría encontrar matemáticamente el número de concurrencias en un triángulo dada cualquier división de los lados.

Todas estas preguntas quedarán para posteriores investigaciones, espero que mi forma de escribir esta tesis no haya sido muy enredada, ya que me interesaba mostrar la forma y el orden en que se me fueron ocurriendo las cosas.

Por último quiero agradecer la ayuda y el tiempo que me dedicó mi asesor de tesis:

M. en C. Alejandro Bravo Mojica,

y también a mis sinodales:

Dr. Alejandro Illanes Mejía,
M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez,
M. en C. Julieta Verdugo Díaz,
Mat. Luis Alberto Briseño Aguirre.

6. BIBLIOGRAFÍA

La teoría en la que se basa esta tesis, puede ser encontrada principalmente en el primer libro, y sólo para el último problema de construcciones con regla y compás se puede consultar el segundo. En las demás referencias se pueden encontrar cuestiones relacionadas con esta tesis y se hizo alusión a ellas durante el desarrollo.

Referencias

[1] Shively, L. S., *Introducción a la Geometría Moderna.* Editorial CECSA, 1984.

[2] Fraleigh, John B., *Álgebra abstracta.* Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., 1987.

[3] Klamkin, Murray S.; Liu, Andy., *Simultaneous generalizations of the teoremas of Ceva and Menelaus.* Math. Mag. 65 (1992), no. 1, 48–52.

[4] Lipman, J., *A generalization of Ceva's teorema.* Amer. Math. Monthly 67 (1960), 162-163.

[5] Maravall, Dario C., *Geometría analítica y proyectiva del plano.* Editorial DOSSAT, 1965.

7. APÉNDICE

A continuación presentamos el listado del programa en turbo pascal e iremos justificándolo y explicándolo:

Este programa pide el número de partes en que queremos dividir cada lado del triángulo, y como resultado muestra ternas de pares de números, en donde cada número representa uno de los puntos de división. Los puntos de división están númerados en orden, comenzando en el vértice A el cual será representado por el cero. Así, en el caso en el que cada lado se divide en dos partes, el vértice A es representado con el número cero, el punto medio de AB con el 1, el vértice C con el 2, el punto medio de BC con el 3, el vértice C con el 4, y el punto medio de CA con el 5. Con lo que el resultado será dado en la forma: $(0,3)$, $(1,4), (2,5)$, de esta forma $(0,3)$ es la mediana que va del punto 0 al 3, es decir: va del vértice A al punto medio de BC.

Al final muestra el total de ternas encontradas y da la opción de elegir uno de los triángulos para mostrarlo en pantalla.

Para correr el programa hay que escribir "concu" en una terminal de MSDOS, o correrlo con la opción de "ejecutar de windows".

```
program concu;
uses graph,crt;

type rectas = record
prpp: integer; prsp: integer; srpp: integer; srsp: integer; trpp: integer; trsp: integer;
{prpp abrevia "primer recta primer punto", srsp "segunda recta segundo punto", etc.}
end;

const
  TernasMax: integer = 5000;
var
  opcion, total, i, a, b, c, La, Lb, Lc, Na, Nb, Nc, Ma, Mb, Mc: integer;
  siono:string;
  letra:char;
  concurrentes: array[1..5000] of rectas; {Este arreglo nos servirá para ir guardando todas
las ternas concurrentes y poder ir comparándolas con las anteriores para cuidar que no se
repitan, así como para poder elegir una para presentarla en pantalla}

  {El siguiente procedimiento recibe los puntos de división L1,L2,M1,M2,N1,N2 que en-
contremos en el triángulo, usa un triángulo ABC con el ángulo B de 90° y dibuja las rectas
L1L2, M1M2 y N1N2 para ejemplificar las concurrencias que encontremos}
procedure dibtriangulo(L1, L2, M1, M2, N1, N2: integer);

const
```

```
    a1: integer = 230; a2: integer = 330; b1: integer = 410; b2: integer = 330; c1: integer = 410;
c2: integer = 150;

var
  Lx1, Ly1, Lx2, Ly2, Mx1, My1, Mx2, My2, Nx1, Ny1, Nx2, Ny2: integer;
  codigoerror, modograf, drvgraf: integer;

procedure recta(x,y,u,v: integer);

var
  i,j: integer;

function maximo(num1, num2: integer): integer;
{Esta función nos da el máximo de dos los números num1 y num2}
begin
  if num1>num2 then maximo:=num1
  else maximo:=num2;
end;

function minimo(num1,num2: integer): integer;
begin
  minimo:=num1+num2-maximo(num1,num2);
end;

begin
  if u-x<>0 then
  begin
    i:=maximo(x,u); line(x,y,u,v);
    repeat
      i:=i+1; j:=round((i-x)*((v-y)/(u-x))+y);
      if ((v-y)/(u-x)>2)or((v-y)/(u-x)<-2) then
      begin
        putpixel(i,j-2,blue);
        putpixel(i,j-1,blue); putpixel(i,j+2,blue);
      end;
      putpixel(i,j-1,blue);
      putpixel(i,j,blue); putpixel(i,j+1,blue);
    until (i=639)or(j>478)or(j<1);
    i:=minimo(x,u);
     repeat
      i:=i-1; j:=round((i-x)*((v-y)/(u-x))+y);
      if ((v-y)/(u-x)>2)or((v-y)/(u-x)<-2) then
      begin
```

```
      putpixel(i,j-2,blue); putpixel(i,j-1,blue); putpixel(i,j+2,blue);
    end;
    putpixel(i,j,blue); putpixel(i,j+1,blue);
    until (i=0)or(j>478)or(j<1);
  end
  else line(x,0,x,479);
 end;
{Fin del procedimiento recta}
begin
 drvgraf:= vga; modograf:= vgahi; initgraph(drvgraf, modograf, ''); codigoerror:=graphresult;
 if codigoerror <> grOK then
 begin
  writeln('error de gráficos: ',grapherrormsg(codigoerror)); halt;
 end;
 line(a1,a2,b1,b2); line(b1,b2,c1,c2); line(c1,c2,a1,a2); setcolor(blue);
 if L1<a then
 begin
  Lx1:=round(a1+((b1-a1)/a)*L1); Ly1:=a2;
 end
 else
 begin
  Lx1:=b1; Ly1:=round(c2+((b2-c2)/b)*(b-L1+a));
 end;
 if M1<a then
 begin
  Mx1:=round(a1+((b1-a1)/a)*M1); My1:=a2;
 end
 else
 begin
  Mx1:=b1; My1:=round(c2+((b2-c2)/b)*(b-M1+a));
 end;
 if N1<a then
 begin
  Nx1:=round(a1+((b1-a1)/a)*N1); Ny1:=a2;
 end
 else
 begin
  Nx1:=b1; Ny1:=round(c2+((b2-c2)/b)*(b-N1+a));
 end;
```

```
if L2<a+b then
begin
  Lx2:=b1; Ly2:=round(c2+((b2-c2)/b)*(b-L2+a));
end
else
begin
  Lx2:=round(a1+((c1-a1)/c)*(c-L2+a+b)); Ly2:=round(c2+((a2-c2)/c)*(L2-a-b));
end;
if M2<a+b then
begin
  Mx2:=b1; My2:=round(c2+((b2-c2)/b)*(b-M2+a));
end
else
begin
  Mx2:=round(a1+((c1-a1)/c)*(c-M2+a+b));
  My2:=round(c2+((a2-c2)/c)*(M2-a-b));
end;
if N2<a+b then
begin
  Nx2:=b1; Ny2:=round(c2+((b2-c2)/b)*(b-N2+a));
end
else
begin
  Nx2:=round(a1+((c1-a1)/c)*(c-N2+a+b)); Ny2:=round(c2+((a2-c2)/c)*(N2-a-b));
end;
recta(Lx1,Ly1,Lx2,Ly2); recta(Mx1,My1,Mx2,My2);
recta(Nx1,Ny1,Nx2,Ny2);
letra:=readkey; closegraph; textmode(3);
end;
{fin del procedimiento dibtriangulo}
```

function dpidpidpi(La,Ma,Lb,Nb,Mc,Nc: integer): boolean;

{Esta función me dice si las rectas L_aM_a, L_bN_by M_cN_c concurren} {este es el caso en el que se toman dos puntos en cada lado del triángulo y estamos aplicando el teorema 2.7. a, b y c son los números en que están divididos los lados AB, BC y CA, "La" es el número de $\frac{AB}{\text{a}}$'s que hay de A a La, es decir $AL_a = \left(\frac{AB}{\text{a}}\right)(La)$, etc. entonces el teorema se reduce a lo que tenemos aquí}

```
begin
  if ((-Mc*La*Lb-(c-Mc)*(a-La)*(b-Lb))*(-Ma*Nb*Nc-(a-Ma)*(b-Nb)*(c-Nc)))
```

```
  =(-a*c*Lb*(Ma-La)*(b-Nb)*(Mc-Nc)) then dpidpidpi:=true else dpidpidpi:=false;
end;
{Fin de la función dpidpidpi}

procedure Casos321(a,b,c,caso: integer);
procedure revisa(Lc,Mc,Nc,La,Ma,Nb,caso: integer);
{Este procedimiento revisa la concurrencia en el caso con tres puntos en un lado, dos
en otro y uno en el tercero}
var
  ppp,psp,spp,ssp,tpp,tsp, contador: integer;
  bandera: boolean;
begin
  bandera:=false;
{Numeraremos los puntos de división del triángulo del uno al a+b+c-1, entonces, por
ejemplo, el vértice A será el punto 0, el vértice B será el punto a, etc. Esta es la forma en
que se guardan las rectas en el arreglo "concurrentes". Como sabemos tenemos seis formas
de colocar tres puntos en un lado, dos en otro y uno en el último lado de un triángulo, esto
es lo mismo que aplicar el teorema que vamos a usar a todos los triángulos dirigidos que
resulten al permutar sus vértices, pero en el arreglo "concurrentes" se están guardando las
ternas con una única numeración, la del triángulo ABC, entonces este "CASE" convierte la
numeración de cada permutación a la numeración del ΔABC y así poder comparar si esa
terna no esta ya incluida en "concurrentes". Además como la recta que tiene como primer
punto i y como segundo punto al j es la misma que la que tiene como primer punto al j y
segundo al i, los ordenaremos de tal forma que el primer punto siempre sea menor que el
segundo, al igual que como están guardados en "concurrentes".
 Una cosa con lo que hay que tener cuidado es que los valores de a, b, c dentro de este
procedimiento no necesariamente tienen los mismos valores que los a, b, c del triángulo
original}
  case caso of
  {El primer caso es la númeracion normal, la del ΔABC}
  1: begin
       ppp:=La; psp:=a+b+Lc; spp:=Ma; ssp:=a+b+Mc;
       if Nc=c then
       begin
         tpp:=0; tsp:=a+Nb;
       end
       else
       begin
         tpp:=a+Nb; tsp:=a+b+Nc;
       end;
```

```
    end;
{El caso 2 es para el ΔBAC}
  2: begin
       ppp:=a-La; psp:=a+c-Lc; spp:=a-Ma; ssp:=a+c-Mc;
       if Nb=0 then
       begin
         tpp:=0; tsp:=a+c-Nc;
       end
       else
       begin
         tsp:=a+c+b-Nb; tpp:=a+c-Nc;
       end;
     end;
{El caso 3 es para el ΔBCA}
  3: begin
       ppp:=Lc; psp:=c+La; spp:=Mc; ssp:=c+Ma; tpp:=Nc; tsp:=c+a+Nb;
     end;
{El caso 4 es para el ΔCBA}
  4: begin
       ppp:=b-Nb; psp:=b+a+c-Nc;
       if Mc=0 then
       begin
         spp:=0; ssp:=b+a-Ma;
       end
       else
       begin
         spp:=b+a-Ma; ssp:=b+a+c-Mc;
       end;
       if Lc=0 then
       begin
         tpp:=0; tsp:=b+a-La;
       end
       else
       begin
         tpp:=b+a-La; tsp:=b+a+c-Lc;
       end;
     end;
{Este es para el ΔCAB}
  5: begin
```

```
ppp:=Nb; psp:=b+Nc;
if La=a then
begin
  spp:=0; ssp:=b+Lc;
end
else
begin
  spp:=b+Lc; ssp:=b+c+La;
end;
if Ma=a then
begin
  tpp:=0; tsp:=b+Mc;
end
else
begin
  tpp:=b+Mc; tsp:=b+c+Ma;
end;
end;
```

{El úntimo caso para el ΔACB}

```
6: begin
    ppp:=c-Lc; psp:=c+b+a-La; spp:=c-Mc; ssp:=c+b+a-Ma; tpp:=c-Nc;
    tsp:=c+b-Nb;
  end;
end;

if total > 0 then
begin {Esto quiere decir: "si hay alguna terna en concurrentes[]"}
```

{Este FOR revisa que la terna no este ya en el arreglo "concurrentes", esto se tiene que hacer porque cuando uno de los puntos en cuestión es un vértice, este se puede tomar como peteneciente a cualquiera de los dos lados que inciden con él, con lo cual podríamos tener ternas repetidas}

```
for contador:=1 to total do with concurrentes[contador] do
begin
  if ((prpp = ppp)and(prsp = psp)and(srpp= spp)and(srsp = ssp)and (trpp= tpp)and(trsp
= tsp))or ((prpp = spp)and(prsp = ssp)and(srpp= ppp)and(srsp = psp)and (trpp= tpp)and(trsp
= tsp))or ((prpp = tpp)and(prsp = tsp)and(srpp= spp)and(srsp = ssp)and (trpp= ppp)and(trsp
= psp))or ((prpp = spp)and(prsp = ssp)and(srpp= tpp)and(srsp = tsp)and (trpp= ppp)and(trsp
= psp))or ((prpp = tpp)and(prsp = tsp)and(srpp= ppp)and(srsp = psp)and (trpp= spp)and(trsp
= ssp))or ((prpp = ppp)and(prsp = psp)and(srpp= tpp)and(srsp = tsp)and (trpp= spp)and(trsp
= ssp)) then
```

```
          begin
            bandera:=true; exit;
          end;
        end;
      end;
      if bandera=false then
```
{Si la terna no estaba repetida se guarda el arreglo y se actualiza "total" que es el número de ternas en "concurrentes" y se presenta en pantalla}

```
      begin
        total:= total+1;
        if total > TernasMax then
        begin
          writeln('tenemos más de ',TernasMax,' ternas');
          halt;
        end;
        with concurrentes[total] do
        begin
          prpp:=ppp; prsp:=psp; srpp:=spp; srsp:=ssp; trpp:=tpp; trsp:=tsp;
        end;
        if La*(c-Mc)=Ma*(c-Lc) then write('paralelas ');
        writeln(total,'(',ppp,',',psp,') (',spp,',',ssp,') (',tpp,',',tsp,')');
        if total=23 then readln;
      end;
    end;
    {Fin del procedimiento revisa)
```

{La siguiente función hace uso del teorema 2.6 (Pág.10) para verificar si las rectas LaLc, MaMc y NbNc concurren y al igual que en la función dpidpidpi el teorema se reduce a la forma en que aquí se usa (después de cancelar $\frac{AB}{a}$, $\frac{BC}{b}$ y $\frac{CA}{c}$)}

```
    function tpidpiupi(Lc,Mc,Nc,La,Ma,Nb: integer): boolean;
    begin
      if (La*(Lc-Mc)*(-Ma*Nb*Nc-(a-Ma)*(b-Nb)*(c-Nc)))=
      -a*(Ma-La)*(b-Nb)*(Mc-Nc)*(c-Lc) then
        tpidpiupi:= true
      else
         tpidpiupi:= false;
    end;
    {Fin de la función tpidpiupi}

    begin
```

```
{Aquí se hace la revisión de todas las ternas posibles con la configuración dada, al recorrer todas las posibilidades para los puntos Lc,Mc,Nc,La,Ma y Nb}
{Para evitar repeticiones vamos a tomar Lc<Mc<Nc, La y Ma no pueden ser cero porque Lc y Mc están en c, Nb no puede ser b porque Nc esta en c}
   for Lc:=0 to c-2 do
     for Mc:=Lc+1 to c-1 do
       for Nc:=1 to c do
         for La:=1 to a do
           for Ma:=1 to a do
             for Nb:=0 to b-1 do
{Aquí se cuida que los puntos sean distintos y que los puntos que deban formar una recta no se encuentren en el mismo lado del triángulo}
               if (Nc<>Lc)and(Nc<>Mc)and(La<>Ma) and ((Lc<>0)or(La<>a))and
               ((Nc<>c)or(Nb<>0))and ((Ma<>a)or(Nb<>0))and ((Nb<>0)or(La<>a))
then
{Si concurren las rectas entonces se revisa si no han sido ya tomadas en cuenta}
                 if tpidpiupi(Lc,Mc,Nc,La,Ma,Nb) then
                   revisa(Lc,Mc,Nc,La,Ma,Nb,caso);
end;
{Fin del procedimiento Casos321}

{El procedimiento Caso33 busca los casos con tres puntos en el interior de un lado y tres en el interior de otro lado}
procedure Caso33(a,b,c,caso: integer); var ppp,psp,spp,ssp,tpp,tsp: integer;
function tpitpi(La,Ma,Na,Lb,Mb,Nb: integer): boolean;
{Esta función hace uso del lema 2.1 (Pág. 4) para ver si las rectas con puntos en a y b concurren, el lema queda reducido de la forma en que aquí se encuentra}
begin
  if (a-La)*(Na-Ma)*(Mb-Lb)*Nb=Lb*(Nb-Mb)*(Ma-La)*(a-Na) then
    tpitpi:= true
  else
    tpitpi:=false;
end;
{Fin de la función tpitpi}

begin
  if (a>3)and(b>3) then
{Este FOR recorre todas las posibilidades, no tomamos en cuenta los puntos que coinciden con los vértices ya que estos casos ya fueron encontrados al tomar ese punto como punto del otro lado común por lo mismo no será necesario comparar las ternas después
```

con las encontradas anteriormente, y los tres primeros FOR me garantizan que tampoco se repitan entre ellas en este caso (el caso 3puntos, 3puntos)}

```
for La:=1 to a-3 do
  for Ma:=La+1 to a-2 do
    for Na:=Ma+1 to a-1 do
      for Lb:=1 to b-1 do
        for Mb:=1 to b-1 do
          for Nb:=1 to b-1 do
            if (Lb<>Mb)and(Lb<>Nb)and(Mb<>Nb) then
              if tpitpi(La,Ma,Na,Lb,Mb,Nb) then
              begin
                if (a-Ma)*(Nb) = (a-Na)*(Mb) then write('paralelas ');
```

{Hay tres formas de colocar tres puntos en un lado de un triángulo y tres en el otro, este CASE transforma la numeración de los puntos a la numeración que se usa en "recurrentes[]"}

```
                case caso of
```

{Los puntos están en el lado a y en el lado b}

```
                1: begin
                      ppp:=Na; psp:=a+Nb; spp:=Ma; ssp:=a+Mb; tpp:=La; tsp:=a+Lb;
                    end;
```

{Los puntos están en el lado b y en el lado c}

```
                2: begin
                      ppp:=c+Nb; psp:=a+c+Na; spp:=c+Mb; ssp:=a+c+Ma;
                      tpp:=c+Lb; tsp:=a+c+La;
                   end;
```

{Los puntos están en el lado c y en el lado a}

```
                3: begin
                      ppp:=Nb; psp:=b+c+Na; spp:=Mb; ssp:=b+c+Ma; tpp:=Lb;
                      tsp:=b+c+La;
                   end;
                end;
                writeln('(',ppp,',',psp,') (',spp,',',ssp,') (',tpp,',',tsp,')');
                total:= total+1;
                if total>TernasMax then
                begin
                  writeln('Tenemos más de ', TernasMax, ' ternas');
                  halt;
                end;
                with concurrentes[total] do
```

```
                        begin
                          prpp:=ppp; prsp:=psp; srpp:=spp; srsp:=ssp; trpp:=tpp; trsp:=tsp;
                        end;
                      end;
end;
{Fin del procedimiento Casos33}


{Empieza implementación del programa principal}
begin
  total:=0; writeln('en cuantas partes quieres dividir a'); readln(a);
  writeln('en cuantas partes quieres dividir b'); readln(b);
  writeln('en cuantas partes quieres dividir c'); readln(c);
{Este FOR recorre las posibilidades para encontrar las concurrencias del caso en que
tenemos dos puntos en cada lado del triángulo}
  for La:=0 to a-1 do
    for Ma:=1 to a do
      for Lb:=1 to b do
        for Nb:=0 to b-1 do
          for Mc:=0 to c-1 do
            for Nc:=1 to c do
            begin
              if (La<>Ma)and(Lb<>Nb)and(Nc<>Mc)and
              ((La<>0)or((Lb<>b)and(Nc<>c)))and
              ((Ma<>a)or((Nb<>0)and(Mc<>0)))and
              ((Nb<>0)or(Nc<>c))and ((Lb<>b)or(Mc<>0))and
              ((Nc<>c)or(Ma<>a)or(Lb<>b)) then
{El último AND se usa porque si Nc=c, Ma=a y Lb=b entonces ya se tomo en cuenta
en los casos de tres puntos en un lado, dos en otro, y uno en el último (ya que Nc, Ma y
Lb esta en a}
                       if dpidpidpi(La,Ma,Lb,Nb,Mc,Nc) then
                       begin
                         write(' (',La,',',a+Lb,') (',Ma,',',a+b+Mc,') (');
                         writeln(a+Nb,',',(a+b+Nc)mod(a+b+c),')');
                         total:=total+1;
                         concurrentes[total].prpp:=La; concurrentes[total].prsp:=a+Lb;
                         concurrentes[total].srpp:=Ma;
                         concurrentes[total].srsp:=a+b+Mc;
                         concurrentes[total].trpp:=a+Nb;
                         concurrentes[total].trsp:=(a+b+Nc)mod(a+b+c);
```

```
                    if a+Nb > (a+b+Nc)mod(a+b+c) then
                    begin
                      concurrentes[total].trpp:=(a+b+Nc)mod(a+b+c);
                      concurrentes[total].trsp:=a+Nb;
                    end;
                  end;
              end;
    writeln;
    Casos321(a,b,c,1); Casos321(a,c,b,2);
    Casos321(b,c,a,3); Casos321(b,a,c,4); Casos321(c,a,b,5); Casos321(c,b,a,6);
    writeln;
    Caso33(a,b,c,1); Caso33(b,c,a,2); Caso33(c,a,b,3);
    writeln('Tenemos un total de ',total, ' concurrencias. ¿Quieres dibujar uno de los triángulos?
(si/no)');
    readln(siono);
    if siono= 'si' then
    repeat
      writeln('¿Que número de triángulo quieres ver? (numero de triángulos= ',total,')')
      writeln('escribe 0 si quieres salir del programa');
      readln(opcion);
      if (opcion < total+1) and (opcion>0) then
        with concurrentes[opcion] do
        begin
          dibtriangulo(prpp,prsp,srpp,srsp,trpp,trsp);
        end
      else
        if opcion<>0 then
          writeln('el numero debe estar entre 0 y ',total);
    until opcion=0;
  end.
```

Este programa fue compilado con la versión 7 de Turbo Pascal. En caso de querer compilar este programa, con la versión 7, y si se quiere correr en una máquina más rápida que una pentium pro de 200MHz, es necesario tomar en cuenta el bug de Turbo Pascal que causa un "runtime error 200" al querer correr el programa.

Se puede usar, por ejemplo, el patch hecho por Andreas Bauer, para componer este error.

La forma de usarlo es simple, después de compilar el programa concu.pas, y obtener el executable concu.exe, se debe escribir en línea de comandos lo siguiente: "tppatch concu.exe" con lo cual se resuelve el problema.