42

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"VALUACION DE OPCIONES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A

J A N N E T G A R C I A M O R E L L

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. MA. EMILIA CABALLERO ACOSTA

DR. ALBERTO CONTRERAS CRISTAN

FACULTAD DE CIENCIAS
U.N.A.M.

Contenido

Introducción

Recientemente las finanzas han captado el interés de la comunidad matemática y áreas afines, debido a la necesidad de crear nuevos modelos para los sofisticados productos financieros. Estos productos se han ido desarrollando rápidamente en bancos, bolsas y casas de bolsa y sus clientes en el caso de México son instituciones como Petróleos Mexicanos, la Comisión Federal de Electricidad y compañías que exportan o importan grandes cantidades de sus artículos.

El valor de estos sofisticados productos depende del precio de otro instrumento financiero, por esta razón se les conoce con el nombre de derivados. De acuerdo al lugar donde se pueden comerciar existen dos tipos de derivados, los bursátiles que son los que se comercian en bolsa y los extrabursátiles que son los que se comercian en mostrador, es decir, los que se negocian entre un banco o corredor y su cliente. Como ejemplos bursátiles de estos productos se pueden mencionar los futuros, las opciones y los warrants y como ejemplos de derivados extrabursátiles están los forwards, las opciones, los warrants y los swaps.

De los derivados mencionados las opciones y en consecuencia los warrants que son títulos opcionales, son los que requieren de más herramientas matemáticas para obtener su precio. Este trabajo sólo se enfoca al estudio de las opciones, que son contratos que dan a quien los compra el derecho más no la obligación de comprar (opciones call) o vender (opciones put) una cantidad determinada de un bien llamado subyacente, que puede ser una acción, una divisa, una mercancía básica como el azúcar, las naranjas, el algodón o hasta un futuro. El bien se comercia a un precio preestablecido (el precio de ejercicio) dentro de un período determinado, al final de este período se le conoce como fecha de vencimiento o de maduración.

El derecho que da una opción se adquiere pagando una prima o precio, el cómo se calcula esta prima y qué debe de hacer con ella el vendedor de la opción son las preguntas básicas para trabajar con este derivado. Se dice que la valuación de una opción es el cálculo del precio justo que se paga por adquirir los derechos de este contrato y la cobertura de una opción es la eliminación del riesgo al que está expuesto el vendedor de una opción desde el momento en que asume la responsabilidad del ejercicio, por ejercicio se debe entender la acción de hacer efectivo el derecho que tiene el comprador. Por tal motivo y contrariamente a lo que piensa el público en general y algunas veces los reglamentadores y cuerpos legislativos, esta parte de las finanzas es un área de administración de riesgos, ya que las dos partes del contrato tienen protegidos sus intereses.

De acuerdo al tiempo en que se tiene el derecho de ejercer una opción existen dos tipos de contratos, la opción americana la cual se puede ejercer en cualquier momento durante la vida del contrato y la opción europea que sólo se puede ejercer al final del período acordado.

El desarrollo de esta tesis se centra en la valuación de las opciones europeas, en el primer capítulo se construye un mercado financiero a tiempo discreto y dentro de este mercado se desarrolla la teoría necesaria para encontrar el precio justo de una opción. En el segundo capítulo se usa el modelo de Cox-Ross para el precio del bien subyacente, como este modelo es discreto tanto en tiempo como en espacio, se asume que el bien subyacente es parte del mercado financiero que se construye en el primer capítulo y por lo tanto se recurren a los resultados de la primera parte del trabajo para crear un algoritmo con el cual se pueda realizar la valuación de una opción europea. También con este modelo discreto se dan otros algoritmos para valuar opciones asiáticas, lookback y opciones barrera. En el último capítulo se trabaja bajo el supuesto de que el precio del bien subyacente sigue el modelo continuo conocido con el nombre de Black-Scholes. Primeramente se deduce la fórmula de Black-Scholes que permite valuar una opción europea, posteriormente se encuentra la relación entre los parámetros del modelo discreto de Cox-Ross y los parámetros del modelo continuo. También en este capítulo se desarrollan dos métodos numéricos para valuar una opción europea y finalmente por medio de un ejemplo se comparan todos los métodos de valuación.

Capítulo 1

Modelo de Mercado Financiero Discreto.

En este primer capítulo, en base a un modelo de mercado financiero discreto, que no es más que un conjunto de activos o bienes cuyos precios cambian en el tiempo de forma discreta, se llega a determinar el precio de una opción europea para un activo del mercado. Es muy importante mencionar que en este mercado financiero discreto se trabaja bajo las siguientes hipótesis:

- No existen costos de transacción.
- Los activos no pagan dividendos.
- Los activos son divisibles, es decir, se puede comprar o vender un número no necesariamente entero de ellos.

En el desarrollo de este capítulo se añadirán otras condiciones como la ausencia de oportunidad de arbitraje y las ventas al descubierto, que en su debido momento se explicarán.

1.1 Activos financieros y estrategias.

1.1.1 Los activos financieros.

Un modelo de mercado financiero discreto es un conjunto de activos tal que el precio de cada uno de estos activos al tiempo n es una variable aleatoria, por lo cual el modelo se construye sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, donde Ω es un conjunto finito, con una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{N}$, tal que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se supone que para cada $\omega \in \Omega$, $\boldsymbol{P}(\{\omega\}) > 0$. En este modelo, el mercado estará compuesto por $d+1$ activos, cuyos precios al tiempo n son variables aleatorias $\mathcal{F}_n-$medibles, $X_n^0, X_n^1, ..., X_n^d$, con valores estrictamente positivos. El vector $X_n = (X_n^0, X_n^1, ..., X_n^d)$ es el vector de los precios al tiempo n, donde X_n^0 representa un activo sin riesgo y $X_0^0 = 1$. Si la tasa libre de riesgo es constante en cada periodo e igual a r, entonces $X_n^0 = (1+r)^n$. El coeficiente $\beta_n = \frac{1}{X_n^0}$ servirá para traer a valor presente una cantidad del tiempo n al tiempo 0. Los activos numerados del 1 al d son activos con riesgo.

1.1.2 Las estrategias.

Una estrategia queda definida por un proceso aleatorio $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ con valores en $\boldsymbol{R}^{d+1}$, $\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d$ denotan las cantidades respectivas de los activos de un portafolio al tiempo n. Es natural suponer que el proceso ϕ es predecible en el siguiente sentido:
para toda $i \in \{0, 1, ..., d\}$

$$\begin{cases} \phi_0^i \quad es\ \mathcal{F}_0 - medible \\ \phi_n^i \quad es\ \mathcal{F}_{n-1} - medible,\ para\ 1 \leq n \leq N. \end{cases}$$

Esta hipótesis de que el proceso ϕ sea predecible, se usa para asegurar que el portafolio al tiempo 0 se construye con la información al tiempo 0 y se conserva tal cual hasta el tiempo 1 y para $1 \leq n \leq N$ el portafolio al tiempo n:

$$\phi_n = (\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d),$$

se construye con la información disponible al tiempo $(n-1)$ y se conserva tal cual hasta el tiempo $n+1$.

El valor del portafolio al tiempo n es

$$V_n(\phi) = \langle \phi_n, X_n \rangle = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i . X_n^i,$$

en consecuencia el valor presente del portafolio es

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n \langle \phi_n, X_n \rangle = \langle \phi_n, \tilde{X}_n \rangle,$$

donde $\beta_n = \frac{1}{X_n^0}$ y $\tilde{X}_n = (1, \beta_n X_n^1, ..., \beta_n X_n^d)$ es el vector del valor presente de los precios.

Se dice que una estrategia es autofinanciable si la siguiente relación se cumple para toda $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$:

$$\langle \phi_n, X_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, X_n \rangle.$$

Esta relación se interpreta de la siguiente manera: al tiempo n después de conocer X_n, el inversionista reajusta su portafolio para pasar de la composición ϕ_n a la composición ϕ_{n+1}. El reajuste consiste en reinvertir al tiempo $n+1$ el valor total del portafolio de acuerdo a los precios del tiempo n, sin que el inversionista aporte o retire fondos.

Ejemplo 1.1 *Pensemos que el mercado está compuesto sólo de tres activos tales que al tiempo cuatro su vector de precios es* $(1.5, 6, 10)$ *y suponga que se tiene un portafolio que en ese mismo tiempo tiene las cantidades* $(2, 5, 7)$ *de los respectivos activos. Si se asume que la estrategia a seguir es autofinanciable, encontrar al tiempo cinco una posible composición del portafolio.*

Primero se tiene que calcular el valor del portafolio al tiempo cuatro,

$$\langle \phi_4, X_4 \rangle = 2(1.5) + 5(6) + 7(10) = 103.$$

Debido a que la estrategia es autofinanciable se tiene que cumplir la siguiente igualdad:

$$\langle \phi_5, X_4 \rangle = 103,$$

al sustituir el vector X_4 se llega a que

$$1.5\phi_5^0 + 6\phi_5^1 + 10\phi_5^2 = 103.$$

Por lo tanto, un posible valor de ϕ_5 puede ser $(6, 9, 4)$.

Observación 1.1 *La igualdad $\langle \phi_n, X_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, X_n \rangle$ es equivalente a que*

$$\langle \phi_{n+1}, X_{n+1} \rangle - \langle \phi_n, X_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, X_{n+1} - X_n \rangle,$$

en consecuencia también es equivalente a la siguiente igualdad

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \langle \phi_{n+1}, X_{n+1} - X_n \rangle.$$

Esto se puede verificar si se parte de la relación

$$\langle \phi_{n+1}, X_{n+1} - X_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, X_{n+1} \rangle - \langle \phi_{n+1}, X_n \rangle$$

y por hipótesis se cumple que

$$\langle \phi_{n+1}, X_{n+1} \rangle - \langle \phi_{n+1}, X_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, X_{n+1} \rangle - \langle \phi_n, X_n \rangle,$$

además se sabe que para $0 \leq n \leq N$

$$V_n(\phi) = \langle \phi_n, X_n \rangle.$$

Por esta razón al tiempo $n+1$, la diferencia $\langle \phi_{n+1}, X_{n+1} \rangle - \langle \phi_{n+1}, X_n \rangle$ representa la ganancia neta de la variación del valor del portafolio entre el tiempo n y n+1. Una estrategia autofinanciable es entonces, una estrategia para la cual las variaciones del valor del portafolio provienen únicamente de los movimientos de los activos.

La siguiente proposición permite precisar ciertas observaciones en términos de cantidades en valor presente.

Proposición 1.1 *Las condiciones siguientes son equivalentes:*

i) La estrategia ϕ es autofinanciable.

ii) Para todo $n \in \{1, .., N\}$,

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \Delta X_j \rangle,$$

donde ΔX_j es el vector $X_j - X_{j-1}$.

iii) Para todo $n \in \{1, .., N\}$,

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \Delta \tilde{X}_j \rangle,$$

donde $\Delta \tilde{X}_j$ es el vector $\tilde{X}_j - \tilde{X}_{j-1} = \beta_j X_j - \beta_{j-1} X_{j-1}$.

Demostración:

Primero se probará la equivalencia entre *i)* y *ii)*:

$$V_n(\phi) = [V_n(\phi) - V_{n-1}(\phi)] + [V_{n-1}(\phi) - V_{n-2}(\phi)] + \ldots + [V_1(\phi) - V_0(\phi)] + V_0(\phi),$$

por la observación (1.1), ϕ es una estrategia autofinanciable si y sólo si

$$V_n(\phi) = \langle \phi_n, X_n - X_{n-1} \rangle + \langle \phi_{n-1}, X_{n-1} - X_{n-2} \rangle + \ldots + \langle \phi_1, X_1 - X_0 \rangle + V_0(\phi),$$

por lo que podemos agrupar los términos del lado derecho y tener que

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, X_j - X_{j-1} \rangle,$$

entonces

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \Delta X_j \rangle.$$

Para demostrar la equivalencia entre *i)* y *iii)*, debemos notar que si ϕ es una estrategia autofinanciable,

$$\beta_n \langle \phi_n, X_n \rangle = \beta_n \langle \phi_{n+1}, X_n \rangle,$$

en consecuencia

$$\beta_{n+1} \langle \phi_{n+1}, X_{n+1} \rangle - \beta_n \langle \phi_n, X_n \rangle = \beta_{n+1} \langle \phi_{n+1}, X_{n+1} \rangle - \beta_n \langle \phi_{n+1}, X_n \rangle.$$

Si $\tilde{V}_n(\phi)$ denota el valor presente del portafolio al tiempo n, podemos sustituir en la igualdad anterior el valor presente del portafolio tanto del tiempo $n+1$ como de n

$$\tilde{V}_{n+1}(\phi) - \tilde{V}_n(\phi) = \langle \phi_{n+1}, \tilde{X}_{n+1} - \tilde{X}_n \rangle,$$

y como

$$\tilde{V}_n(\phi) = [\tilde{V}_n(\phi) - \tilde{V}_{n-1}(\phi)] + [\tilde{V}_{n-1}(\phi) - \tilde{V}_{n-2}(\phi)] + \ldots + [\tilde{V}_1(\phi) - \tilde{V}_0(\phi)] + \tilde{V}_0(\phi),$$

se tiene

$$\tilde{V}_n(\phi) = \langle \phi_n, \tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1} \rangle + \langle \phi_{n-1}, \tilde{X}_{n-1} - \tilde{X}_{n-2} \rangle + \ldots + \langle \phi_1, \tilde{X}_1 - \tilde{X}_0 \rangle + \tilde{V}_0(\phi),$$

por lo cual, ϕ es una estrategia autofinanciable si y sólo si

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n(\phi) &= \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \Delta \tilde{X}_j \rangle \\ &= V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \Delta \tilde{X}_j \rangle \end{aligned}$$

♠

Esta proposición muestra que para una estrategia autofinanciable, el valor presente del portafolio queda determinado por la riqueza inicial y el proceso $((\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ de cantidades de activos con riesgo, debido a que $\Delta \tilde{X}_j^0 = \tilde{X}_j^0 - \tilde{X}_{j-1}^0 = 0$. Para precisar un poco más este resultado, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.2 *Para todo proceso predecible $((\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$, y para toda variable V_0 $\mathcal{F}_0 -$ medible, existe un único proceso predecible $(\phi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ tal que la estrategia $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N} = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ es autofinanciable y el valor inicial del portafolio correspondiente es V_0.*

Demostración:

Sea $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N} = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ una estrategia autofinanciable tal que el valor inicial de su portafolio es V_0, por la proposición anterior y el hecho de que $\Delta\tilde{X}_j^0 = \tilde{X}_j^0 - \tilde{X}_{j-1}^0 = 0$ para $j \in \{1, ..., N\}$, se tiene para $n \in \{1, ..., N\}$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n(\phi) &= \phi_n^0.\tilde{X}_n^0 + \phi_n^1.\tilde{X}_n^1 + ... + \phi_n^d.\tilde{X}_n^d \\ &= V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n}(\phi_j^1.\Delta\tilde{X}_j^1 + ... + \phi_j^d.\Delta\tilde{X}_j^d)\end{aligned}$$

y para n=0

$$\tilde{V}_0(\phi) = V_0(\phi) = \phi_0^0.X_0^0 + \phi_0^1.X_0^1 + ... + \phi_0^d.X_0^d,$$

por lo que ϕ_n^0 queda determinado de manera única por:

$$\phi_n^0 = \begin{cases} V_0(\phi) - (\phi_0^1.X_0^1 + ... + \phi_0^d.X_0^d) & para\ n = 0, \\ V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n-1}(\phi_j^1\Delta\tilde{X}_j^1 + ... + \phi_j^d\Delta\tilde{X}_j^d) + (\phi_n^1(-\tilde{X}_{n-1}^1) + ... + \phi_n^d(-\tilde{X}_{n-1}^d)) & e.o.c., \end{cases}$$

de lo cual se observa que $(\phi_n^0)_{0\leq n\leq N}$ es predecible, ya que V_0 es $\mathcal{F}_0 - medible$; la estrategia $((\phi_n^1, ..., \phi_n^d))_{0\leq n\leq N}$ es predecible; y en el primer caso para $i \in \{1, ..., d\}$ X_0^i es $\mathcal{F}_0 - medible$, en el segundo caso para $i \in \{1, ..., d\}$ y $j \in \{1, ..., n-1\}$, $\tilde{X}_j^i$ es $\mathcal{F}_j - medible$ y por tanto, $\mathcal{F}_{n-1} - medible$. ♠

1.1.3 Estrategias admisibles y arbitraje.

Con el fin de dar una interpretación a valores negativos para las cantidades ϕ_n^i, se tomarán las siguientes convenciones: si $\phi_n^0 < 0$, significa que pedimos prestada la cantidad $|\phi_n^0|$ en el mercado de activos sin riesgo; si $\phi_n^i < 0$ para una $i \geq 1$, significa que se contrajo una deuda en activos con riesgo (por ventas al descubierto, es decir, por ventas que hacemos sin tener posesión de los activos, sin embargo las cobramos con el compromiso de entregarlas en un futuro). Entonces, los préstamos y las ventas al descubierto son permitidos, siempre y cuando el valor del portafolio sea positivo o nulo en todo instante para que el inversionista esté en condiciones de reembolsar sus préstamos. Lo anterior da sentido a la siguiente definición:

Definición 1.1 *Una estrategia ϕ es admisible si es autofinanciable y $V_n(\phi) \geq 0$ para toda $n \in \{0, 1, ..., N\}$.*

En finanzas, la palabra arbitraje significa la oportunidad de hacer una ganancia en un tiempo muy corto sin arriesgar dinero o bienes. En los mercados eficientes tales oportunidades no pueden existir por un intervalo significativo de tiempo, ya que antes de ocurrir esto los precios de los activos se tienen que mover para eliminarlas.
Para evitar en el modelo del mercado las oportunidades de arbitraje, se deben excluir aquellas estrategias tales que sin arriesgar dinero o bienes hacen que se tenga una ganancia, de otra forma habrían condiciones de inequidad en las operaciones. Con la siguiente definición quedan determinadas matemáticamente las estrategias que dan lugar al arbitraje,las cuales se sacarán del modelo posteriormente.

Definición 1.2 *Una estrategia de arbitraje es una estrategia admisible de valor inicial cero y de valor final distinto de cero, es decir, ϕ es una estrategia de arbitraje si cumple los siguientes puntos:*

(1) es autofinanciable,

(2) $V_n(\phi) \geq 0$ *para toda* $n \in \{1, ..., N-1\}$,

(3) $V_0(\phi) = 0$ *y*

(4) $V_N(\phi) > 0$.

1.2 Martingalas y arbitraje.

En esta sección se tratará la relación entre martingalas y arbitraje, es por ello que para los lectores que no estén familiarizados con la definición de una martingala ni con propiedades de la esperanza condicional, se recomienda revisar estos temas en el apéndice.
En la sección anterior se dijo que al existir arbitraje en el mercado, éste ocasionaría condiciones de desigualdad en las operaciones, por lo que nos gustaría tener un resultado que dijera algo

como lo siguiente: la ausencia de oportunidad de arbitraje da lugar a operaciones justas. Y precisamente esta última palabra da pie para la introducción de una martingala en nuestro modelo.

1.2.1 Transformada de Martingala.

Proposición 1.3 *Sea $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ y sea $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ un proceso predecible con respecto a $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$. Si $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$, entonces el proceso $(S_n)_{0\leq n\leq N}$ definido por:*

$$\begin{aligned} S_0 &= H_0 M_0, \\ S_n &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \ldots + H_n \Delta M_n \text{ para } n \geq 1 \end{aligned}$$

es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$.

A (S_n) se le llama "transformada martingala de (M_n) por el proceso (H_n)".
Demostración:
(S_n) es un proceso adaptado a $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ y para $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1} - S_n|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= H_{n+1}\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] = S_n$$

lo cual demuestra que (S_n) es una martingala. ♠

Una consecuencia de esta proposición y de la proposición (1.1) es que, bajo los modelos de mercados financieros tales que los precios en valor presente de los activos son martingalas, la espereanza del valor presente de un portafolio al tiempo N es igual a la riqueza inicial, es decir,

$$\mathbb{E}[\tilde{V}_N] = \mathbb{E}[\tilde{V}_0] = V_0.$$

A continuación se da una caracterización de una martingala que será de utilidad más adelante.

Proposición 1.4 *Una sucesión adaptada de variables aleatorias reales $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una martingala si y sólo si para todo proceso predecible $(H_n)_{0\leq n\leq N}$, se cumple que:*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right) = 0.$$

Demostración:
Si $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una martingala, para todo proceso predecible $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ podemos definir el proceso $(S_n)_{0\leq n\leq N}$ por:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_n &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} H_j \Delta M_j, \ \textit{para}\ 1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

Derivado de la proposición (1.3), $(S_n)_{0\leq n\leq N}$ es una martingala y en consecuencia $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(S_0) = 0$.
Recíprocamente si $j \in \{1, ..., N-1\}$, a todo evento $A \in \mathcal{F}_j$ le podemos asociar el proceso predecible $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ dado por:

$$\begin{aligned} H_n &= 0\ \textit{para}\ n \neq j+1 \\ H_{j+1} &= \mathbb{1}_A. \end{aligned}$$

Para este $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ la hipótesis nos asegura que

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(M_{j+1} - M_j)] = 0$$

y como la igualdad vale para cualquier $A \in \mathcal{F}_j$ se concluye que

$$\mathbb{E}(M_{j+1}|\mathcal{F}_j) = M_j.$$

♠

1.2.2 Mercados financieros viables.

La siguiente definición asigna nombre a los mercados donde no hay oportunidad de arbitraje.

Definición 1.3 *Decimos que un mercado es viable si no existe ninguna estrategia de arbitraje.*

Para traducir matemáticamente esta definición, tenemos el siguiente teorema que nos da una condición suficiente y necesaria para que no exista oportunidad de arbitraje.

Teorema 1.1 *El mercado es viable si y sólo si, existe una medida de probabilidad $\boldsymbol{P}^*$ equivalente* [1] *a $\boldsymbol{P}$ bajo la cual los precios en valor presente de los activos son martingalas.*

Demostración:
Supongamos que existe una probabilidad $\boldsymbol{P}^*$ equivalente a $\boldsymbol{P}$ tal que los precios en valor presente de los activos son martingalas. Por la proposición (1.1), tenemos que para toda estrategia autofinanciable $(\phi_n)_{0\leq n\leq N}$ se cumple la siguiente igualdad:

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n}\langle\phi_j, \Delta\tilde{X}_j\rangle,$$

gracias a la propoción (1.3) y al hecho de que una suma de martingalas es martingala, $(\tilde{V}_n(\phi))$ es una martingala bajo $\boldsymbol{P}^*$ y en consecuencia

$$\mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_0(\phi)).$$

Entonces, con una estrategia de valor inicial nulo

$$\mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = 0$$

y si además la estrategia es admisible se puede decir que $\tilde{V}_N(\phi) = 0$ $\boldsymbol{P}^*-c.s.$, pero $\boldsymbol{P}^*(\{\omega\}) > 0$ para toda $\omega \in \Omega$, por lo que $\tilde{V}_N(\phi) = 0$.

[1] Dos probabilidades $\boldsymbol{P}_1$ y $\boldsymbol{P}_2$ son equivalentes si y sólo si para todo evento A, $\boldsymbol{P}_1(A) = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{P}_2(A) = 0$. Aquí $\boldsymbol{P}^*$ equivalente a $\boldsymbol{P}$ implica que para todo $\omega \in \Omega$, $\boldsymbol{P}^*(\{\omega\}) > 0$.

Para demostrar la parte recíproca, se define a Γ como el conjunto convexo de las variables aleatorias no negativas distintas de la variable aleatoria idénticamente cero. Con este conjunto podemos decir que el mercado es viable si y sólo si para toda estrategia admisible ϕ tal que $V_0(\phi) = 0$, se cumple que $\tilde{V}_N(\phi) \notin \Gamma$.
A todo proceso predecible $((\phi_n^1, ..., \phi_n^d))_{0\leq n\leq N}$, le asociamos el proceso definido por:

$$\tilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n}(\phi_j^1 \Delta\tilde{X}_j^1 + ... + \phi_j^d \Delta\tilde{X}_j^d),$$

que es el proceso del valor presente de las ganancias acumuladas de una estrategia autofinanciable según las cantidades de activos con riesgo $\phi_n^1, ..., \phi_n^d$. De acuerdo a la proposición (1.2) existe un único proceso $(\phi_n^0)_{0\leq n\leq N}$ tal que la estrategia $(\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d)_{0\leq n\leq N}$ es autofinanciable y el valor inicial del portafolio correspondiente es cero. $\tilde{G}_n(\phi)$ es entonces, el valor presente de un portafolio al tiempo n que sigue una estrategia tal que $\tilde{G}_0(\phi) = 0$. La hipótesis de viabilidad del mercado implica que si $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$ para toda $n \in \{1, ..., N\}$ (esta condición es necesaria para que la estrategia sea admisible) entonces $\tilde{G}_N(\phi) = 0$ y por lo tanto $\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma$.
Aun en el caso de que la estrategia ϕ no sea admisible se puede probar este resultado:

Lema 1.1 *Si el mercado es viable, todo proceso predecible* $((\phi_n^1, ..., \phi_n^d))_{0\leq n\leq N}$ *satisface:*

$$\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma.$$

Demostración:
Supongamos que $\tilde{G}_N(\phi) \in \Gamma$. Si $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$ para toda $n \in \{0, ..., N\}$, tenemos una contradicción de viabilidad. Si no estamos en ese caso introducimos el entero $n = max\{\ k\ |\boldsymbol{P}(\tilde{G}_k(\phi) < 0) > 0\}$, con esto lo que sabemos es que $n \leq N-1$, que $\boldsymbol{P}(\tilde{G}_n(\phi) < 0) > 0$ y que si $m > n$ $\tilde{G}_m(\phi) \geq 0$. Definimos un nuevo proceso $(\psi_j)_{0\leq j\leq N}$ en $\boldsymbol{R}^d$ como:

$$\psi_j(\omega) = \begin{cases} 0 & si \quad j \leq n \\ \mathbb{1}_A(\omega)\phi_j(\omega) & si \quad j > n, \end{cases}$$

donde A es el evento $\{\tilde{G}_n(\phi) < 0\}$. En virtud de que ϕ es predecible y A es $\mathcal{F}_n$-medible podemos concluir que ψ es predecible y entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_j(\psi) &= \begin{cases} 0 & si \quad j \leq n \\ \sum_{i=n+1}^{j}(\psi_i^1 \Delta \tilde{X}_i^1 + \ldots + \psi_i^d \Delta \tilde{X}_j^d) & si \quad j > n, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & si \quad j \leq n \\ \mathbb{1}_A(\tilde{G}_j(\phi) - \tilde{G}_n(\phi)) & si \quad j > n, \end{cases}
\end{aligned}$$

como $\tilde{G}_j(\phi) \geq 0$ si $j > n$ y $\tilde{G}_n(\phi) < 0$ sobre A, tenemos que $\tilde{G}_j(\psi) \geq 0$ para toda $j \in \{0, ..., N\}$ y $\tilde{G}_N(\psi) > 0$ sobre A, que es una contradicción de la viabilidad del mercado, y así queda demostrado el lema. ♠

Proposición 1.5 *Las variables aleatorias de la forma $\tilde{G}_N(\phi)$, con ϕ en $\mathbb{R}^d$ predecible, forman un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{R}^\Omega$ de todas las variables aleatorias reales definidas sobre Ω.*

Demostración:

Sean ϕ_1 y ϕ_2 procesos predecibles en $\mathbb{R}^d$ y tomemos a dos reales a y b, entonces

$$\begin{aligned}
a\tilde{G}_N(\phi_1) + b\tilde{G}_N(\phi_2) &= a\sum_{j=1}^{N}(\phi_{1,j}^1 \Delta \tilde{X}_j^1 + \ldots + \phi_{1,j}^d \Delta \tilde{X}_j^d) + b\sum_{j=1}^{N}(\phi_{2,j}^1 \Delta \tilde{X}_j^1 + \ldots + \phi_{2,j}^d \Delta \tilde{X}_j^d) \\
&= \sum_{j=1}^{N}(a\phi_{1,j}^1 \Delta \tilde{X}_j^1 + \ldots + a\phi_{1,j}^d \Delta \tilde{X}_j^d) + \sum_{j=1}^{N}(b\phi_{2,j}^1 \Delta \tilde{X}_j^1 + \ldots + b\phi_{2,j}^d \Delta \tilde{X}_j^d) \\
&= \sum_{j=1}^{N}(a\phi_{1,j}^1 + b\phi_{2,j}^1)\Delta \tilde{X}_j^1 + \ldots + (a\phi_{1,j}^d + b\phi_{2,j}^d)\Delta \tilde{X}_j^d \\
&= \tilde{G}_N(a\phi_1 + b\phi_2),
\end{aligned}$$

con $a\phi_1 + b\phi_2$ proceso predecible. Por lo tanto, las variables aleatorias de la forma $\tilde{G}_N(\phi)$, con ϕ en $\mathbb{R}^d$ predecible, forman un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{R}^\Omega$ de todas las variables aleatorias reales definidas sobre Ω. ♠

Sea Λ el subespacio vectorial de las variables aleatorias de la forma $\tilde{G}_N(\phi)$, con ϕ en $\mathbb{R}^d$

predecible, del lema (1.1) el subespacio Λ no se intersecta con Γ, ni con el conjunto $K = \{Y \in \Gamma | \sum_\omega Y(\omega) = 1\}$, por tal motivo si se prueba que K es un compacto convexo, se puede hacer uso del Teorema de separación de convexos [2] para construir una probabilidad $\boldsymbol{P}^*$ bajo la cual los precios en valor presente de los activos son martingalas.
Demostremos que K es compacto convexo:
Sean $Z_1, Z_2 \in K$ y sea $\lambda \in [0,1]$, como $Z_1 \geq 0$ y $Z_2 \geq 0$ tenemos que $\lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2 \geq 0$ y

$$\begin{aligned}\sum_\omega \lambda Z_1(\omega) + (1-\lambda)Z_2(\omega) &= \lambda \sum_\omega Z_1(\omega) + (1-\lambda)\sum_\omega Z_2(\omega)\\ &= \lambda + (1-\lambda)\\ &= 1,\end{aligned}$$

por lo tanto K es convexo.

Si $m = card(\Omega)$, K también puede ser visto como el siguiente conjunto:
$\{(Y(\omega_1), Y(\omega_2), ..., Y(\omega_m)) | \sum_{i=1}^{m} Y(\omega_i) = 1$ *y al menos para alguna* $i \in \{1, ..., m\}$ $Y(\omega_i) > 0\}$.
Con esta nueva forma de ver a K, es claro que $K \subset B_1(0) \subset \boldsymbol{R}^m$, donde $B_1(0)$ es la bola unitaria con la norma euclidiana, por lo tanto K es acotado.
Sea $f : (\boldsymbol{R}_+ \cup \{0\})^m \to \boldsymbol{R}$ tal que $f(Y(\omega_1), Y(\omega_2), ..., Y(\omega_m)) = \sum_{i=1}^m Y(\omega_i)$, entonces $K = f^{-1}(\{1\})$, es decir, K es la imagen inversa de un cerrado de una función continua, por lo cual K es cerrado.
Por ser K un cerrado acotado contenido en $\boldsymbol{R}^m$ se concluye que K es compacto.
Y ahora sí estamos en condiciones de usar el Teorema de separación de convexos, que nos da la existencia de $(\lambda(\omega))_{\omega\in\Omega}$ con las siguientes características:

1. Para cada $Y \in K$,
$$\sum_\omega \lambda(\omega)Y(\omega) > 0.$$

2. Para todo ϕ predecible,
$$\sum_\omega \lambda(\omega)\tilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0.$$

[2]Este Teorema se puede revisar en Lamberton Damien y Bernard Lapeyre [1], 167-168.

De la propiedad 1, podemos deducir que $\lambda(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. En efecto, supóngase que existe i_0 tal que $\lambda(\omega_{i_0}) \leq 0$, sea $Y_0 \in K$ tal que $Y_0(\omega_{i_0}) = 1$ y $Y_0(\omega_i) = 0$ *para* $i \neq i_0$, entonces $\sum_{i=1}^{m} \lambda(\omega_i) Y_0(\omega_i) \leq 0$, que es una contradicción.

Por lo anterior, la medida de probabilidad $\boldsymbol{P}^*$ definida como:

$$\boldsymbol{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')}$$

es equivalente a $\boldsymbol{P}$ porque $\boldsymbol{P}^*(\{\omega\}) > 0$ para toda $\omega \in \Omega$.

Sea $(\phi_n^{i_0})_{0 \leq n \leq N}$ un proceso predecible en $\boldsymbol{R}$ con $i_0 \in \{1, 2, ..., d\}$, entonces el proceso en $\boldsymbol{R}^d$ $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N} = ((0, ..., \phi_n^{i_0}, 0, ..., 0))_{0 \leq n \leq N}$ es predecible y por tanto la variable aleatoria $\sum_{j=1}^{N} \phi_j^{i_0} \Delta \tilde{X}_j^{i_0}$ pertenece a Λ. De la propiedad 2 se tiene que

$$\sum_{\omega} \lambda(\omega) (\sum_{j=1}^{N} \phi_j^{i_0} \Delta \tilde{X}_j^{i_0})(\omega) = 0,$$

por lo que también se cumple que

$$\sum_{\omega} \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'} \lambda(\omega')} (\sum_{j=1}^{N} \phi_j^{i_0} \Delta \tilde{X}_j^{i_0})(\omega) = 0.$$

Si denotamos por $\mathbb{E}^*$ a la esperanza respecto a la probabilidad $\boldsymbol{P}^*$, la igualdad anterior es equivalente a decir que

$$\mathbb{E}^* \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j^{i_0} \Delta \tilde{X}_j^{i_0} \right) = 0.$$

Como i_0 es un entero arbitrario entre 1 y d podemos concluir, gracias a la proposición (1.4), que bajo $\boldsymbol{P}^*$ los precios en valor presente de los activos $(\tilde{X}_n^1), ..., (\tilde{X}_n^d)$ son martingalas. ♠

1.3 Mercados completos y valuación de opciones.

1.3.1 Mercados completos.

En base a la definición de una opción europea de vigencia N, podemos decir que este contrato representa para el comprador un activo o bien condicionado, ya que normalmente si se trata de un call, al tiempo N esta persona tendrá una ganancia igual a la diferencia entre el precio del bien subyacente y el precio de ejercicio si es que el primero de estos precios es mayor que el segundo, en otro caso la ganancia es nula. El importe del primer caso representa una ganancia para el comprador porque éste puede ejercer su derecho de comprar el bien subyacente con el precio de ejercicio y después venderlo a precio de mercado, o simplemente si el comprador toma este bien subyacente como materia prima la diferencia representa una ganancia por el ahorro que está haciendo cuando lo compra a un precio menor del precio de mercado. Por un razonamiento análogo se puede decir que un put europeo es un activo condicionado para el comprador de éste.

En términos de probabilidad, la opción o activo condicionado puede definirse por medio de una variable aleatoria $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$-medible, que represente la ganancia que permita el ejercicio de la opción. Así, para una opción de compra o call sobre una unidad del activo 1 con precio de ejercicio K, $h = (X_N^1 - K)_+$, donde $(.)_+$ denota la parte positiva. Para el caso de una opción de venta o put sobre una unidad del activo 1 con precio de ejercicio K, $h = (K - X_N^1)_+$. Existen otros ejemplos para el valor de h, los cuales se analizarán en el capítulo 2.

Los siguientes resultados de esta subsección, relacionan a la variable aleatoria h con el modelo de mercado financiero que se ha ido construyendo en este capítulo.

Definición 1.4 *Se dice que el activo condicionado definido por h es simulable si existe una estrategia admisible, tal que el valor del portafolio al tiempo N es igual a h.*

Observación 1.2 *En un mercado viable, para que la opción h sea simulable, es suficiente que exista una estrategia autofinanciable tal que el valor del portafolio sea igual a h al tiempo N.*

En efecto, si ϕ es una estrategia autofinanciable y $\boldsymbol{P}^*$ es una probabilidad equivalente a $\boldsymbol{P}$ bajo la cual los precios en valor presente de los activos son martingalas, entonces bajo $\boldsymbol{P}^*$, $(\tilde{V}_n(\phi))$ es una martingala (por ser una transformada de martingala). Lo anterior implica que para

$n \in \{0, ..., N\}$ $\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)|\mathcal{F}_n)$, pero tenemos que $\tilde{V}_N(\phi)$ es igual al valor presente de h que es mayor o igual a cero, entonces $\tilde{V}_n(\phi) \geq 0$ para $n \in \{0, .., N\}$ por lo que ϕ es admisible.

Definición 1.5 *Se dice que el mercado es completo si todo activo condicionado es simulable.*

El interés en los mercados completos es que con ellos se pretende, bajo un modelo de mercado financiero bien estructurado, valuar y hacer la cobertura de las opciones, valuar para conocer el precio justo o prima del contrato y hacer la cobertura para que el vendedor de la opción con la prima que recibe, construya un portafolio para producir al vencimiento del contrato la riqueza necesaria para garantizar el ejercicio de la opción sin ningún riesgo. El siguiente Teorema muestra una condición suficiente y necesaria para asegurar que las valuaciones y coberturas de las opciones se puedan realizar.

Teorema 1.2 *Un mercado viable es completo si y sólo si existe una única probabilidad $\boldsymbol{P}^*$ equivalente a $\boldsymbol{P}$, bajo la cual los precios en valor presente de los activos son martingalas.*

La probabilidad $\boldsymbol{P}^*$ se utilizará de aquí en adelante en los cálculos de precios y coberturas.

En la demostración de este teorema se utilizará el siguiente resultado inmediato:

Lema 1.2 *Si $\boldsymbol{P}_1$ y $\boldsymbol{P}_2$ son dos medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$, tales que $\int h d\boldsymbol{P}_1 = \int h d\boldsymbol{P}_2$ para toda función h que sea $\mathcal{F}-$ medible, entonces para todo A elemento de $\mathcal{F}$ se cumple que*

$$\boldsymbol{P}_1(A) = \boldsymbol{P}_2(A).$$

Demostración:

Ya se probó en el Teorema 1.1 que si el mercado es viable la probabilidad $\boldsymbol{P}^*$ existe. Para ver la unicidad se usa la hipótesis de que el mercado sea completo y por tanto toda variable aleatoria h que sea $\mathcal{F}_N$-medible y no negativa es simulable. Por la observación (1.2) lo anterior quiere decir que existe una estrategia autofinanciable ϕ tal que $h = V_N(\phi)$. Como ϕ es una estrategia autofinanciable se cumple lo siguiente:

$$\frac{h}{X_N^0} = \tilde{V}_N(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{N} \langle \phi_j, \Delta \tilde{X}_j \rangle.$$

Entonces, si $\boldsymbol{P}_1$ y $\boldsymbol{P}_2$ son dos probabilidades bajo las cuales los precios en valor presente de los activos son martingalas, $(\tilde{V}_n(\phi))_{0 \leq n \leq N}$ es una martingala bajo $\boldsymbol{P}_1$ y también bajo $\boldsymbol{P}_2$, en consecuencia para $i = 1$ ó 2

$$\mathbb{E}_i(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}_i(\tilde{V}_0(\phi)) = V_0(\phi),$$

de donde

$$\mathbb{E}_1\left(\frac{h}{X_N^0}\right) = \mathbb{E}_2\left(\frac{h}{X_N^0}\right).$$

Esta última igualdad se cumple para h $\mathcal{F}_N$-medible y arbitraria [3], por el Lema (1.2) $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2$ en $\mathcal{F}_N$ que supusimos igual a $\mathcal{F}$ al inicio de la sección 1.1.1, lo que prueba la unicidad de la medida de probabilidad.

Para probar la parte recíproca se usará el siguiente resultado:

Lema 1.3 *Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ y sea X una variable aleatoria definida también sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$. Si el espacio Ω es finito, entonces son equivalentes:*

(i) X_n *converge a* X *c.s..*

(ii) X_n *converge a* X *en probabilidad.*

(iii) X_n *converge en* L_p *a* X, $p \geq 1$.

(iv) X_n *converge en distribución a* X.

[3] Toda función h se puede descomponer como $h^+ - h^-$, donde h^+ es la parte positiva de h y h^- es la parte negativa. Si la igualdad se cumple para cualquier h $\mathcal{F}_N$-medible no negativa, con esta descomposición se ve claramente que la igualdad es válida para una h $\mathcal{F}_N$-medible arbitraria.

En esta segunda parte de la demostración del teorema, se tiene como hipótesis que el mercado es viable por lo que existe una probabilidad $\boldsymbol{P}^*$ equivalente a $\boldsymbol{P}$, bajo la cual los precios en valor presente de los activos son martingalas.
Si suponemos que el mercado no es completo entonces existe una variable aleatoria $h \geq 0$ no simulable.
Sea $\tilde{\Lambda}$ el espacio de las variables aleatorias de la forma:

$$G = U_0 + \sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n, \Delta \tilde{X}_n \rangle,$$

donde U_0 es $\mathcal{F}_0$-medible y $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N} = ((\phi_n^1, ..., \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ es un proceso predecible con valores en $\boldsymbol{R}^d$. Como resultado de la proposición (1.2) y de la observación (1.2) la variable aleatoria h/X_n^0 no pertenece a $\tilde{\Lambda}$, entonces $\tilde{\Lambda}$ es un subespacio propio del espacio de todas las variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.
Bajo el supuesto de que existen segundos momentos se puede dotar al espacio de todas las variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ con el producto escalar $\langle Y, Z \rangle \mapsto \mathbb{E}^*(YZ)$.
Es de interés demostrar que el subespacio $\tilde{\Lambda}$ es cerrado:
Sea G^{m_0} una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, para la cual existe una sucesión $(G_N^{k,m_0})_{k \geq 0}$ en $\tilde{\Lambda}$ ($G_N^{k,m_0} = \sum_{j=1}^{N} \phi_j^{k,m_0} \Delta \tilde{X}_j^{m_0}$, donde $(\phi_j^{k,m_0})_{0 \leq j \leq N}$ es un proceso predecible con valores en $\boldsymbol{R}$ y m_0 en $\{1, 2, ..., d\}$), tal que $G = \lim_{k \to \infty} G_N^{k,m_0}$.
Se demostrará que G^{m_0} pertenece a $\tilde{\Lambda}$:
Obsérvese que para toda $i = 0, 1, ..., N$

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{E}^*(G_N^{k,m_0} | \mathcal{F}_i) = \mathbb{E}^*(G^{m_0} | \mathcal{F}_i), \tag{1.1}$$

debido a que Ω es un conjunto finito el lema (1.3) nos asegura que la convergencia es en cualquier sentido.
Por otra parte, la sucesión $(G_n^{k,m_0})_{0 \leq n \leq N}$ ($G_n^{k,m_0} = \sum_{j=1}^{n} \phi_j^{k,m_0} \Delta \tilde{X}_j^{m_0}$) es una martingala porque es una transformada de la martingala $(\tilde{X}_n^{m_0})_{0 \leq n \leq N}$. Por lo cual,

$$\mathbb{E}^*(G_N^{k,m_0} | \mathcal{F}_1) = G_1^{k,m_0} = \phi_1^{k,m_0} \Delta \tilde{X}_1^{m_0},$$

20

por (1.1) se sabe que la sucesión $(\ \mathbb{E}^*(G_N^{k,m_0}|\mathcal{F}_1)\ )_{k\geq 0}$ converge a $\mathbb{E}^*(G^{m_0}|\mathcal{F}_1)$, entonces $\lim_{k\to\infty}\phi_1^{k,m_0}\Delta\tilde{X}_1^{m_0}$ existe y además como $(\phi_j^{k,m_0})_{0\leq j\leq N}$ es un proceso predecible con valores en $\mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\phi_1^{k,m_0}\Delta\tilde{X}_1^{m_0} &= \Delta\tilde{X}_1^{m_0}\lim_{k\to\infty}\phi_1^{k,m_0}\\ &= \Delta\tilde{X}_1^{m_0}\phi_1^{m_0},\end{aligned}$$

donde $\phi_1^{m_0}$ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$-medible.
En consecuencia, la sucesión $(\phi_1^{k,m_0}\Delta\tilde{X}_1^{m_0})_{k\geq 0}$ converge a una variable aleatoria de la forma $\phi_1^{m_0}\Delta\tilde{X}_1^{m_0}$, con $\phi_1^{m_0}$ $\mathcal{F}_0$-medible.
Por la unicidad del límite se concluye que

$$\mathbb{E}^*(G^{m_0}|\mathcal{F}_1) = \phi_1^{m_0}\Delta\tilde{X}_1^{m_0}.$$

Supóngase que para $m < N$ se cumple que

$$\mathbb{E}^*(G^{m_0}|\mathcal{F}_m) = \sum_{j=1}^{m}\phi_j^{m_0}\Delta\tilde{X}_j^{m_0},$$

donde $(\phi_j^{m_0})_{1\leq j\leq m}$ es un proceso predecible con valores en $\mathbb{R}$.
Bajo esta hipótesis se demostrará que este resultado es válido para $m+1$:
Si se condiciona con $\mathcal{F}_{m+1}$ se tiene que

$$\mathbb{E}^*(G_N^{k,m_0}|\mathcal{F}_{m+1}) = G_{m+1}^{k,m_0} = \sum_{j=1}^{m+1}\phi_1^{k,m_0}\Delta\tilde{X}_1^{m_0},$$

por (1.1) se sabe que la sucesión $(\ \mathbb{E}^*(G_N^{k,m_0}|\mathcal{F}_{m+1})\ )_{k\geq 0}$ converge a $\mathbb{E}^*(G^{m_0}|\mathcal{F}_{m+1})$ y por hipótesis se tiene que la sucesión $(\sum_{j=1}^{m}\phi_1^{k,m_0}\Delta\tilde{X}_1^{m_0})_{k\geq 0}$ converge a una variable aleatoria de la forma $\sum_{j=1}^{m}\phi_1^{m_0}\Delta\tilde{X}_1^{m_0}$. Debido a estas dos razones la sucesión $(\phi_{m+1}^{k,m_0}\Delta\tilde{X}_{m+1}^{m_0})_{k\geq 0}$ converge y además como $(\phi_j^{k,m_0})_{0\leq j\leq N}$ es un proceso predecible con valores en $\mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\phi_{m+1}^{k,m_0}\Delta\tilde{X}_{m+1}^{m_0} &= \Delta\tilde{X}_{m+1}^{m_0}\lim_{k\to\infty}\phi_{m+1}^{k,m_0}\\ &= \Delta\tilde{X}_{m+1}^{m_0}\phi_{m+1}^{m_0},\end{aligned}$$

donde $\phi_{m+1}^{m_0}$ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_m$-medible.
Entonces, la sucesión $(\phi_{m+1}^{k,m_0}, \Delta\tilde{X}_{m+1}^{m_0})_{k\geq 0}$ converge a una variable aleatoria de la forma $\phi_{m+1}^{m_0}\Delta\tilde{X}_{m+1}^{m_0}$ con $\phi_{m+1}^{m_0}$ $\mathcal{F}_m$-medible.
Por la unicidad del límite se concluye que

$$\mathbb{E}^*(G^{m_0}|\mathcal{F}_{m+1}) = \sum_{j=1}^{m+1} \phi_j^{m_0}\Delta\tilde{X}_j^{m_0},$$

con $(\phi_j^{m_0})_{1\leq j\leq m+1}$ proceso predecible con valores en $\mathbb{R}$.
En particular este resultado es válido para N, por lo tanto

$$\mathbb{E}^*(G^{m_0}|\mathcal{F}_N) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j^{m_0}\Delta\tilde{X}_j^{m_0},$$

con $(\phi_j^{m_0})_{1\leq j\leq N}$ proceso predecible con valores en $\mathbb{R}$.
Por otra parte, se sabe que

$$G^{m_0} = \lim_{k\to\infty} G_N^{k,m_0} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^*(G_N^{k,m_0}|\mathcal{F}_N) = \mathbb{E}^*(G^{m_0}|\mathcal{F}_N).$$

Entonces, G^{m_0} pertenece a $\tilde{\Lambda}$.
Sea G^0 una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, para la cual existe una sucesión de variables aleatorias $(G^{k,0})_{k\geq 0}$ $\mathcal{F}_0$-medibles, tal que $G^0 = \lim_{k\to\infty} G^{k,0}$.
Lo primero que se puede decir, es que la sucesión $(G^{k,0})_{k\geq 0}$ pertenece a $\tilde{\Lambda}$. Además como G^0 es el límite de esta sucesión, G^0 es $\mathcal{F}_0$-medible.
Ya se demostró que para toda m_0 en $\{1,2,..,d\}$, G^{m_0} pertenece a $\tilde{\Lambda}$ y se acaba de mostrar que G^0 también pertenece a $\tilde{\Lambda}$. Debido a que $\tilde{\Lambda}$ es un subespacio vectorial (se puede probar fácilmente), una variable de la forma

$$\begin{aligned} G &= G^0 + \sum_{m_0=1}^{d} G^{m_0} \\ &= G^0 + \sum_{m_0=1}^{d}\sum_{j=1}^{N} \phi_j^{m_0}\Delta\tilde{X}_j^{m_0} \\ &= G^0 + \sum_{j=1}^{N}\langle \phi_j, \Delta\tilde{X}_j\rangle, \end{aligned}$$

22

con $(\phi_j)_{0\le j\le N}$ proceso predecible en $\boldsymbol{R}^d$, pertenece a $\tilde{\Lambda}$. Por lo tanto, $\tilde{\Lambda}$ es cerrado.

Como consecuencia de este resultado, existe una variable aleatoria Y no nula ortogonal al subespacio $\tilde{\Lambda}$, tal que su proyección sobre $\tilde{\Lambda}$ es 0.

Con lo anterior podemos definir:

$$\boldsymbol{P}^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{Y(\omega)}{2\|Y\|_\infty}\right)\boldsymbol{P}^*(\{\omega\})$$

con $\|Y\|_\infty = max_{\omega\in\Omega}|Y(\omega)|$.

Veamos que $\boldsymbol{P}^{**}$ es una probabilidad:

Sea $Z \equiv 1$, entonces $Z \in \tilde{\Lambda}$ y

$$\langle Y - 0, Z\rangle = \mathbb{E}^*(Y) = 0,$$

es decir

$$\sum_\omega Y(\omega)\boldsymbol{P}^*(\{\omega\}) = 0,$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{2\|Y\|_\infty}\sum_\omega Y(\omega)\boldsymbol{P}^*(\{\omega\}) = 0,$$

en consecuencia

$$\sum_\omega \boldsymbol{P}^{**}(\{\omega\}) = \sum_\omega \boldsymbol{P}^*(\{\omega\}) = 1$$

y

$$\boldsymbol{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$$

para toda $\omega \in \Omega$, por lo tanto $\boldsymbol{P}^{**}$ es una probabilidad.

$\boldsymbol{P}^{**}$ es equivalente a $\boldsymbol{P}$ ya que para toda $\omega \in \Omega$ $\boldsymbol{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$ y es distinta de $\boldsymbol{P}^*$ porque al menos para una $\omega \in \Omega$ $\boldsymbol{P}^{**}(\{\omega\})$ es diferente a $\boldsymbol{P}^*(\{\omega\})$. Además, para todo proceso predecible en $\boldsymbol{R}$ $(\phi_n^{i_0})_{0\le n\le N}$ con $i_0 \in \{1, 2, ..., d\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{**}\left(\sum_{n=1}^N \phi_n^{i_0}\Delta\tilde{X}_n^{i_0}\right) &= \sum_{\omega\in\Omega}\left(\sum_{n=1}^N \phi_n^{i_0}\Delta\tilde{X}_n^{i_0}\right)(\omega)\boldsymbol{P}^{**}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega}\left(\sum_{n=1}^N \phi_n^{i_0}\Delta\tilde{X}_n^{i_0}\right)(\omega)\left(1 + \frac{Y(\omega)}{2\|Y\|_\infty}\right)\boldsymbol{P}^*(\{\omega\}) \\
&= \mathbb{E}^*\left(\sum_{n=1}^N \phi_n^{i_0}\Delta\tilde{X}_n^{i_0}\right) + \frac{1}{2\|Y\|_\infty}\mathbb{E}^*\left[Y\left(\sum_{n=1}^N \phi_n^{i_0}\Delta\tilde{X}_n^{i_0}\right)\right],
\end{aligned}$$

por hipótesis los precios en valor presente de los activos son martingala bajo $\mathbb{P}^*$, entonces con apoyo de la proposición (1.4) la primer esperanza es cero.
El proceso en $\mathbb{R}^d$ $(\phi_n)_{0\leq n\leq N} = ((0,...,\phi_n^{i_0},0,..,0))_{0\leq n\leq N}$ es predecible y por tanto la variable aleatoria $\sum_{n=0}^{N}\langle\phi_n, \Delta\tilde{X}_n\rangle$ pertenece a $\tilde{\Lambda}$ y Y es ortogonal a $\tilde{\Lambda}$, entonces la segunda esperanza también es cero. Por tanto

$$\mathbb{E}^{**}\left(\sum_{n=1}^{N}\phi_n^{i_0}\Delta\tilde{X}_n^{i_0}\right) = 0$$

para cualquier $i_0 \in \{1,2,...,d\}$. Por la misma proposición (1.4), $(\tilde{X}_n^{i_0})_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathbb{P}^{**}$-martingala lo que contradice la unicidad. ♠

1.3.2 Valuación y cobertura de los activos condicionados bajo los mercados completos.

Supóngase que el mercado es viable y completo. Sea un activo condicionado definido por una variable aleatoria $h \geq 0$ $\mathcal{F}_N$-medible y sea ϕ una estrategia admisible que simula a h, es decir,

$$V_N(\phi) = h.$$

El proceso $(\tilde{V}_n(\phi))_{0\leq n\leq N}$ es una transformada de la martingala $(\tilde{X}_n)_{0\leq n\leq N}$ bajo $\mathbb{P}^*$ y por consecuencia $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi))$, lo que implica que $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*\left[\frac{h}{X_N^0}\right]$.
En general

$$\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}^*\left[\frac{h}{X_N^0}|\mathcal{F}_n\right] \qquad para\ n = 0,1,..,N,$$

por lo tanto

$$V_n(\phi) = X_n^0\mathbb{E}^*\left[\frac{h}{X_N^0}|\mathcal{F}_n\right] \qquad para\ n = 0,1,..,N. \tag{1.2}$$

Con este resultado queda claro que bajo la hipótesis de que el mercado es viable y completo, el valor en cualquier momento del portafolio de toda estrategia admisible que simula a h está completamente determinado por h. Es natural decir que $V_n(\phi)$ es el valor de la opción, ya que esta cantidad representa la riqueza al tiempo n que permite, siguiendo la estrategia ϕ a partir del instante n, producir exactamente la riqueza h al instante N. A la variable aleatoia h se le conoce como el flujo de efectivo que garantiza la opción europea al tiempo de su vencimiento. Así, por un lado se está haciendo la valuación de una opción, o sea, se está dando el precio justo del contrato y por otro lado para el vendedor de una opción se está haciendo una cobertura, es decir, se le está asegurando la existencia de una estrategia con la cual se cubra de todo riesgo para garantizar, con una inversión inicial igual a la prima que recibe, el buen ejercicio de la opción si es que éste se llegase a realizar.

La igualdad (1.2) se usará como base en el capítulo 2 para hacer valuaciones de opciones.

Capítulo 2

Valuación de Opciones Europeas a tiempo discreto.

Hasta el momento lo único que se ha dicho sobre los precios de los activos que forman el mercado es que son variables aleatorias $\mathcal{F}_n - medibles$ al tiempo n, esta información no es suficiente si se quiere hacer la valuación de una opción europea al usar (1.2), para ello se requiere modelar el precio del bien subyacente. Este capítulo comienza con el desarrollo del modelo de Cox-Ross, que básicamente nos dice que si el precio del bien subyacente al tiempo n es X_n [1], entonces al tiempo $n+1$ el precio sólo puede tomar dos valores aX_n ó bX_n donde los números reales a y b cumplen ciertas condiciones.

Después se da un algoritmo que se basa en (1.2) para hacer la valuación de una opción europea, cuya función de flujo de efectivo al vencimiento está definida sobre el espacio de estados de una cadena de Markov. Como se verá a continuación la cadena del modelo de Cox-Ross es de Markov, entonces si modelamos el precio del bien subyacente con esta cadena, las opciones con flujo de efectivo $(X_N - K)_+$ en el caso de un call, se podrán valuar con este algoritmo, así como también podrán ser valuadas con él las opciones asiáticas, lookback y de barrera que se definen más adelante.

[1] En lo sucesivo se usará X_n para denotar el precio del activo subyacente de la opción al tiempo n y no el vector de los precios de los activos del mercado al tiempo n como se manejo en el capítulo 1.

Al final del capítulo se trata el problema de Dirichlet, el cual da lugar a la valuación de una opción que no es propiamente europea pero que sin embargo, su precio se puede calcular con el algoritmo antes mencionado.

2.1 Modelación discreta del precio del bien subyacente.

Para llegar a un algoritmo que nos permita valuar una opción, primero se necesita dar un modelo que represente el comportamiento del precio del bien subyacente. Para cubrir esta necesidad a tiempo discreto, se tiene el siguiente resultado que se utiliza para los modelos más comunes del precio del bien subyacente.

Proposición 2.1 *Sea* $\{Z_k, k \geq 1\}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, las cuales toman un número finito de valores* $\{a_1, \ldots, a_l\}$ *con probabilidades* $\{p_1, \ldots, p_l\}$*. Sea* $f(x,z)$ *una función de* $\mathcal{E} \times \{a_1, \ldots, a_l\}$ *en* $\mathcal{E}$*, donde* $\mathcal{E}$ *es un espacio de estados finito. Sea* $X_0 = x'$ *fija y se define el precio del bien subyacente al tiempo* $n+1$ *por:*

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1}),$$

entonces si dada X_n *la función* f *es inyectiva,* $(X_n, n \geq 0)$ *es una cadena de Markov homogénea con matriz de transición* $P(x, f(x, a_k)) = p_k$.

Demostración:

La prueba se realizará por medio de inducción siendo $n = 2$ la primera n para la cual el resultado tiene que cumplirse, antes de ver este caso se probará que X_1 es independiente de X_0. Utilizando el hecho de que f es inyectiva, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}[X_1 = x_1, X_0 = x'] &= \boldsymbol{P}[f(X_0, Z_1) = x_1, X_0 = x'] \\
&= \boldsymbol{P}[(x', Z_1) = f^{-1}(x_1), X_0 = x'] \\
&= \boldsymbol{P}[X_0 = x', Z_1 = a_{k_1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{P}[X_0 = x', Z_1 = a_{k_1}]\boldsymbol{P}[X_0 = x'] \\ &= \boldsymbol{P}[X_1 = f(x', a_{k_1})]\boldsymbol{P}[X_0 = x'] \\ &= \boldsymbol{P}[X_1 = x_1]\boldsymbol{P}[X_0 = x'], \end{aligned}$$

por lo que X_1 es independiente de X_0 y en consecuencia tenemos un resultadc que nos ayuda con la homogeneidad de la cadena,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}[X_1 = x_1|X_0 = x'] &= \boldsymbol{P}[X_1 = x_1] \\ &= \boldsymbol{P}[f(x', Z_1) = x_1] \\ &= \boldsymbol{P}[Z_1 = a_{k_1}] \\ &= p_{k_1}. \end{aligned}$$

Para el caso $n = 2$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}[X_2 = x_2|X_1 = x_1, X_0 = x'] &= \frac{\boldsymbol{P}[X_2 = x_2, X_1 = x_1, X_0 = x']}{\boldsymbol{P}[X_1 = x_1, X_0 = x']} \\ &= \frac{\boldsymbol{P}[f(X_1, Z_2) = x_2, X_1 = x_1, X_0 = x']}{\boldsymbol{P}[X_1 = x_1]\boldsymbol{P}[X_0 = x']} \\ &= \frac{\boldsymbol{P}[(x_1, Z_2) = f^{-1}(x_2), X_1 = x_1, X_0 = x']}{\boldsymbol{P}[X_1 = x_1]\boldsymbol{P}[X_0 = x']} \\ &= \frac{\boldsymbol{P}[X_1 = x_1, Z_2 = a_{k_2}, X_0 = x']}{\boldsymbol{P}[X_1 = x_1]\boldsymbol{P}[X_0 = x']} \end{aligned}$$

como X_0 es independiente de X_1 y de Z_2, entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}[X_2 = x_2|X_1 = x_1, X_0 = x'] &= \frac{\boldsymbol{P}[X_1 = x_1, Z_2 = a_{k_2}]}{\boldsymbol{P}[X_1 = x_1]} \\ &= \frac{\boldsymbol{P}[X_2 = f(x_1, a_{k_2})]}{\boldsymbol{P}[X_1 = x_1]} \\ &= \frac{\boldsymbol{P}[X_2 = x_2, X_1 = x_1]}{\boldsymbol{P}[X_1 = x_1]} \\ &= \boldsymbol{P}[X_2 = x_2|X_1 = x_1], \end{aligned} \tag{2.1}$$

además como X_1 es independiente de Z_2 por (2.1) tenemos que

$$\boldsymbol{P}[X_2 = x_2|X_1 = x_1] = p_{k_2}.$$

Ahora, el resultado se supone válido para n y se probará para $n+1$,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \ldots, X_0 = x'] \\
&= \frac{\boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x']}{\boldsymbol{P}[X_n = x_n, \ldots, X_0 = x']} \\
&= \frac{\boldsymbol{P}[f(X_n, Z_{n+1}) = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x']}{\boldsymbol{P}[X_n = x_n, \ldots, X_0 = x']} \\
&= \frac{\boldsymbol{P}[(x_n, Z_{n+1}) = f^{-1}(x_{n+1}), X_n = x_n, \ldots, X_0 = x']}{\boldsymbol{P}[X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x']\boldsymbol{P}[X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x']} \\
&= \frac{\boldsymbol{P}[X_n = x_n, Z_{n+1} = a_{k_{n+1}}, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x']}{\boldsymbol{P}[X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}]\boldsymbol{P}[X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x']} \\
&= \frac{\boldsymbol{P}[X_n = x_n, Z_{n+1} = a_{k_{n+1}}|X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x']}{\boldsymbol{P}[X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}]} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Observación: X_n depende de X_{n-1} y Z_n, X_{n-1} depende de X_{n-2} y $Z_{n-1}, \ldots$, X_2 depende de X_1 y Z_2 y vimos que X_1 sólo depende de Z_1. Entonces, para $k > 0$, X_k depende de $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$, por lo que X_k es independiente de Z_{k+j} para toda $j \geq 1$.

Por la anterior observación y por (2.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \ldots, X_0 = x'] &= \frac{\boldsymbol{P}[Z_{n+1} = a_{k_{n+1}}]\boldsymbol{P}[X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}]}{\boldsymbol{P}[X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}]} \\
&= \boldsymbol{P}[Z_{n+1} = a_{k_{n+1}}] \qquad (2.3) \\
&= \frac{\boldsymbol{P}[Z_{n+1} = a_{k_{n+1}}]\boldsymbol{P}[X_n = x_n]}{\boldsymbol{P}[X_n = x_n]} \\
&= \frac{\boldsymbol{P}[Z_{n+1} = a_{k_{n+1}}, X_n = x_n]}{\boldsymbol{P}[X_n = x_n]} \\
&= \boldsymbol{P}[Z_{n+1} = a_{k_{n+1}}|X_n = x_n] \\
&= \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n]
\end{aligned}$$

y por (2.3)

$$\boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n] = p_{k_{n+1}}.$$

Por lo tanto, $(X_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov homogénea con matriz de transición $P(x, f(x, a_k)) = p_k$. ♠

Cabe aclarar que con este resultado se tiene que $(X_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov con

respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ donde $\mathcal{F}_n$ es la σ-álgebra generada por $X_0, X_1, ..., X_n$, por lo que los resultados basados en esta proposición toman en cuenta dicha filtración.
La siguiente definición es un caso particular del modelo que se dió anteriormente para el precio del bien subyacente.

Definición 2.1 *Árbol de Cox-Ross. Sea* $\{Z_n, n \geq 1\}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes con ley común* $\boldsymbol{P}[Z_n = a] = p, \boldsymbol{P}[Z_n = b] = 1 - p$, *donde* $0 < p < 1$ *y* $0 < b < 1 < a$. *Sea* $X_0 = x'$ *y*

$$X_{n+1} = X_n Z_{n+1}$$

entonces, $X_n = x' \prod_{i=1}^n Z_i$.

Por el resultado anterior $(X_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov homogénea con matriz de transición:

$$\begin{aligned} P(x, xa) &= p \\ P(x, xb) &= 1 - p \\ P(x, y) &= 0 \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

Este modelo se utilizará posteriormente para la valuación de una opción.

2.2 Precio de opciones europeas a tiempo discreto.

2.2.1 Precio de opciones europeas bajo mercados completos.

Sea X_n el precio del bien subyacente de una opción europea al tiempo n y sea Φ una función boreliana de $\boldsymbol{R}_+$ a $\boldsymbol{R}$. Bajo la hipótesis de mercados completos, se probó al final del capítulo 1 que el valor de la opción al tiempo 0 que garantiza un flujo de efectivo $\Phi(X_N)$ al tiempo N (fin del periodo establecido en el contrato) es:

$$V_0 = \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{(1+r)^N} \Phi(X_N) \right], \tag{2.4}$$

donde el número positivo r representa la tasa libre de riesgo sobre un período.
Similarmente, se vió que el valor de la opción para $n \leq N$ es:

$$V_n = \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{(1+r)^{N-n}} \Phi(X_N) | \mathcal{F}_n \right], \tag{2.5}$$

y debido a que V_n deja de ser una variable aleatoria si se conoce la información de $\mathcal{F}_n$, entonces V_n se puede calcular de manera determinísta al tiempo n.
El asterisco de las esperanzas significa que éstas se calculan tomando en cuenta $\boldsymbol{P}^*$, que es la probabilidad bajo la cual los precios en valor presente de los activos son martingalas (para más detalles ver sección 1.3).

2.2.2 Algoritmo para la valuación de opciones.

En esta sección se da un algoritmo para valuar opciones europeas, es decir, un procedimiento que permite calcular (2.4) y (2.5). El algoritmo se basa en la siguiente proposición.

Proposición 2.2 *Sea $\mathcal{E}$ un subconjunto de $\boldsymbol{R}$ y sean Φ una función boreliana de $\mathcal{E}$ a $\boldsymbol{R}$ y r una función de $\mathcal{E}$ a $\boldsymbol{R}_+$. Si $(X_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov con matriz de transición P y espacio de estados $\mathcal{E}$, se puede definir ν como*

$$\begin{cases} \nu(N,x) &= \Phi(x), \\ \nu(n,x) &= \frac{1}{1+r(x)} \sum_{y \in \mathcal{E}} P(x,y)\nu(n+1,y), \;\; 0 \leq n < N \end{cases} \tag{2.6}$$

y entonces,

$$\nu(n, X_n) = \mathbb{E}^* \left[\left(\prod_{i=n}^{N-1} \frac{1}{1+r(X_i)} \right) \Phi(X_N) | \mathcal{F}_n \right] \;\; para \; 0 \leq n < N. \tag{2.7}$$

En particular,

$$\nu(0, x') = \mathbb{E}^* \left[\left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{1+r(X_i)} \right) \Phi(X_N) | X_0 = x' \right]. \tag{2.8}$$

Demostración:

Sea $V_0 = \nu(0, X_0)$ y para $n \geq 1$

$$V_n := \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+r(X_i)}\right) \nu(n, X_n),$$

de acuerdo a esta definición tenemos que

$$\mathbb{E}^*[V_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \left(\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{1+r(X_i)}\right) \mathbb{E}^*[\nu(n+1, X_{n+1})|\mathcal{F}_n],$$

debido a que $(X_n, n \geq 0)$ es cadena de Markov (ver proposición A.1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[\nu(n+1, X_{n+1})|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}^*[\nu(n+1, X_{n+1})|X_n] \\
&= \sum_{x_n \in \mathcal{E}} \mathbb{E}^*[\nu(n+1, X_{n+1})|X_n = x_n] \mathbb{1}_{\{X_n = x_n\}} \\
&= \sum_{x_n \in \mathcal{E}} \left[\sum_{x_{n+1} \in \mathcal{E}} \nu(n+1, x_{n+1}) P(x_n, x_{n+1})\right] \mathbb{1}_{\{X_n = x_n\}} \\
&= \sum_{x_n \in \mathcal{E}} (1 + r(x_n)) \nu(n, x_n) \mathbb{1}_{\{X_n = x_n\}} \\
&= (1 + r(X_n)) \nu(n, X_n),
\end{aligned}$$

por lo que para toda n

$$\mathbb{E}^*[V_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+r(X_i)}\right) \nu(n, X_n) = V_n,$$

entonces $(V_n, n \geq 0)$ es una martingala.

En consecuencia para $n \geq 0$

$$\mathbb{E}^*[V_N|\mathcal{F}_n] = V_n,$$

al sustituir los valores de V_N y V_n resulta que

$$\mathbb{E}^* \left[\left(\prod_{i=n}^{N-1} \frac{1}{1+r(X_i)}\right) \Phi(X_N)|\mathcal{F}_n\right] = \nu(n, X_n),$$

y en particular

$$\mathbb{E}^* \left[\left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{1+r(X_i)}\right) \Phi(X_N)|X_0 = x'\right] = \nu(0, x').$$

♠

Con esta proposición estamos en condiciones de calcular en forma determinista el precio de una opción europea al tiempo n, dado que se conoce X_n que es el precio del bien subyacente al tiempo n. El algoritmo que nos permite hacer esto es el siguiente:

1. Calcular $\Phi(x)$ para toda $x \in \mathcal{E}$.
2. Para cada $x \in \mathcal{E}$ obtener $\nu(N-1,x)$.
3. Repetir el paso 2 para los números anteriores a N-1 de forma decreciente, hasta obtener $\nu(n,x)$.

Bajo la hipótesis de que $(X_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov y con apoyo de (2.5), el precio justo de la opción al tiempo n, dado que $X_n = x$ es $\nu(n,x)$.

2.3 Valuación con el modelo de Cox-Ross.

En esta sección se asume que el proceso del precio del bien subyacente $(X_n)_{n\in I\!N}$ se apega al modelo de Cox-Ross [2] y que la tasa libre de riesgo (r) utilizada tanto para pedir prestado como para prestar, es constante en cada período.

2.3.1 Valuación para el modelo de Cox-Ross.

De acuerdo a la proposición (2.2) para el modelo de Cox-Ross, el precio al tiempo n de una opción europea con un flujo de efectivo al tiempo N de $\Phi(X_N)$ es $V_n = \nu(n, X_n)$ con

$$\begin{cases} \nu(N,x) & = & \Phi(x), \\ \nu(n,x) & = & \frac{p}{1+r}\nu(n+1,xa) + \frac{1-p}{1+r}\nu(n+1,xb), \; 0 \leq n < N. \end{cases} \tag{2.9}$$

[2] Este modelo también se conoce con el nombre de Modelo Binomial.

Normalmente si K es el precio de ejercicio, el flujo de efectivo $\Phi(X_N)$ es igual a $(X_N - K)_+$ si se trata de un call y $(K - X_N)_+$ si se trata de un put. Más adelante se trabaja con otros flujos de efectivo.

Por el momento nos enfocaremos a dar una condición para el tamaño de los saltos del árbol, complementaria a que $0 < b < 1 < a$, con la cual se asegura que no existe arbitraje en el mercado.

Proposición 2.3 *Bajo la hipótesis de Ausencia de Oportunidad de Arbitraje sucede que* $b \leq (1 + r) \leq a$.

Demostración:

Sea X_n el precio al tiempo n del bien subyacente de la opción que deseamos valuar. Entonces,

i) si se supone que $(1 + r) < b$, se puede hacer lo siguiente:

- en $t = 0$, pedir prestado X_0 unidades y comprar un activo X_0.
- en $t = 1$, vender el activo X_1, que vale al menos $X_0 b$ y pagar el préstamo. Nuestro saldo es al menos de $X_0[b - (1 + r)] > 0$, por lo que hay oportunidad de arbitraje.

ii) si se supone que $(1 + r) > a$, se puede hacer lo siguiente:

- en $t = 0$, vender al descubierto un activo X_0 e invertir X_0 unidades a la tasa r.
- en $t = 1$, pagar la venta al descubierto, a lo más se paga $X_0 a$ unidades. Nuestro saldo es al menos $X_0[(1 + r) - a] > 0$, por lo que hay oportunidad de arbitraje.

Por lo tanto, $b \leq (1 + r) \leq a$.

Esta proposición también se puede demostrar utilizando el Teorema (1.1), ya que $\{\tilde{X}_n\}_{0 \leq n \leq N}$

es martingala bajo alguna probabilidad $\boldsymbol{P}^*$, si y sólo si

$$I\!\!E^*\left[\tilde{X}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = \tilde{X}_n,$$

o sea

$$I\!\!E^*\left[\tilde{X}_{n+1}|X_0, X_1, ..., X_n\right] = \tilde{X}_n$$

y esto es equivalente a

$$I\!\!E^*\left[\tilde{X}_{n+1}|Z_1, ..., Z_n\right] = \tilde{X}_n$$

o lo que es lo mismo

$$I\!\!E^*\left[\frac{\tilde{X}_{n+1}}{\tilde{X}_n}|Z_1, ..., Z_n\right] = 1,$$

en consecuencia

$$I\!\!E^*\left[Z_{n+1}|Z_1, ..., Z_n\right] = (1+r)$$

y por independencia tenemos que

$$I\!\!E^*\left[Z_{n+1}\right] = (1+r),$$

que se traduce en

$$ap^* + b(1-p^*) = (1+r)$$

cuya solución es

$$p^* = \frac{(1+r)-b}{a-b} \quad y \quad (1-p^*) = \frac{a-(1+r)}{a-b},$$

entonces P^* existe, si y sólo si

$$(1+r) \geq b \quad y \quad a \geq (1+r).$$

Por lo tanto, $b \leq (1+r) \leq a$. ♠

Obsérvese que la condición $b \leq (1+r)$ se cumple siempre que $b < 1$, por lo que realmente con la anterior proposición sólo ~~se~~ agrega una condición al parámetro a.

Con el resultado de esta proposición se puede encontrar el precio de un call europeo a 3 meses con precio de ejercicio \$280 y precio actual del bien subyacente de \$280. Se sabe que después de 3 meses el precio puede subir a \$320 o bajar a \$260. La tasa libre de riesgo es del 5% trimestral. Primero se tiene que checar que se cumpla la condición de que $b \leq (1+r) \leq a$, que efectivamente se cumple porque $\frac{260}{280} \leq 1.05 \leq \frac{320}{280}$. Después con ayuda de (2.9) se calcula el precio de la opción que es igual a

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)}\left[p^*\Phi(X_0a) + (1-p^*)\Phi(X_0b)\right],$$

$p^* = \frac{(1+r)-b}{a-b} = \frac{1.05-\frac{13}{14}}{\frac{8}{7}-\frac{13}{14}} = 0.5667,$

$\Phi(X_0a) = (X_0a - K)_+ = (320 - 280)_+ = 40,$

$\Phi(X_0b) = (X_0b - K)_+ = (260 - 280)_+ = 0,$

Por lo tanto, el precio justo del call europeo al tiempo cero es $V_0 = 21.5886$.

2.3.2 Programa para obtener el precio de una opción.

El programa que a continuación se presenta fue diseñado en Matlab para calcular el precio de un call europeo en el tiempo 0, que garantiza al tiempo N un flujo de efectivo $\Phi(X_N) = max(X_N - K, 0)$, donde K el precio de ejercicio. El programa se basa en el algoritmo que se desarrolló en la subsección 2.2.2 adaptado al modelo de Cox-Ross.

Los argumentos necesarios para correr el programa son:

$X0$ Precio del bien subyacente al tiempo 0.

a Parámetro para determinar el tamaño del salto hacia arriba.

b Parámetro para determinar el tamaño del salto hacia abajo.

p Probabilidad de que el precio del bien subyacente se mueva de X a aX (en este programa $p = p^*$).

r Tasa de interés por período (en porcentaje).

N Vencimiento de la opción (número de períodos).

K Precio de ejercicio.

El código del programa es el siguiente:

```
function V0=precio(X0,a,b,p,r,N,K)
%Factor de descuento
desc=1/(1+r/100);
%Crea el vector y, cuyas entradas son los posibles precios
%del bien subyacente en el periodo N.
for m=2:(N+1)
    y(1)=X0;
    for n=m:-1:2
        y(n)=a*y(n-1);
        y(1)=b*y(1);
    end
end
%Crea un vector que contiene a los posibles flujos de efectivo
%en el periodo N.
for n=1:(N+1)
    y(n)=max(y(n)-K,0);
end

%Calcula el precio del contrato al tiempo 0.
for m=(N+1):-1:2
    for n=1:m-1
        tmp=p*y(n+1)+(1-p)*y(n);
        y(n)=desc*tmp;
    end
end
V0=y(1);
```

El resultado que da el programa es para una unidad del activo subyacente, si se desea hacer la valuación para un número ℓ de unidades del mismo activo subyacente, bastará multiplicar el resultado del programa por ℓ para tener dicha valuación.
Como una pequeña prueba al programa, se introdujeron los datos del ejercicio de la subsección anterior y se obtuvo que el precio del bien subyacente al tiempo 0 es 21.5886, cantidad que coincide con el resultado que se había dado.
Con este mismo programa se puede calcular el precio de la opción al tiempo n sabiendo el valor de X_n, ya que en el modelo de Cox-Ross la cadena que forman los precios del bien subyacente es homogénea en el tiempo, entonces si $X_n = x_n$ sólo basta redefinir $X_0 = x_n$ y el tiempo de vencimiento igual a $N - n$.
En la sección 3.5 se comparan por medio de un ejemplo los resultados de este método, usado como aproximación al método continuo, con el resultado de la fórmula de Black-Scholes que más adelante se tratará y con los dos métodos numéricos que se desarrollan en la sección 3.4.

2.3.3 Relación put-call.

Aunque las opciones put y call son superficialmente diferentes, se pueden combinar de tal manera que estén perfectamente correlacionadas. Esto se puede demostrar bajo el siguiente argumento:
Supóngase que tenemos un activo, que compramos un put y vendemos un call sobre el activo que tenemos, las dos opciones con fecha de vencimiento N y precio de ejercicio K. Si V_n es el valor de este portafolio al tiempo n, entonces

$$V_n = X_n + P_n - C_n,$$

donde X_n es el precio del activo subyacente, P_n es el valor del put y C_n es el valor del call, todos al tiempo n.
El valor del portafolio en la fecha en la que vencen las opciones es:

$$X_N + max(K - X_N, 0) - max(X_N - K, 0).$$

Esto puede ser reescrito como

$$\begin{cases} X_N + (K - X_N) - 0 = K & si \quad X_N \leq K, \\ X_N + 0 - (X_N - K) = K & si \quad X_N \geq K. \end{cases}$$

Si X_N es mayor o menor que K, en la fecha de vencimiento la ganancia del portafolio es la misma e igual a K. De esto, se puede concluir que el valor del portafolio en un tiempo t entre cero y N es el valor presente de K al tiempo t con respecto a la tasa libre de riesgo, de otra forma se podría construir una estrategia de arbitraje.

Como consecuencia, si el precio del bien subyacente se modela de acuerdo al árbol de Cox-Ross, se tiene al tiempo n la siguiente igualdad:

$$X_n + P_n - C_n = K(1 + r')^{-(N-n)},$$

donde la constante r' es la tasa libre de riesgo por período.

En el caso donde el precio del bien subyacente es modelado a tiempo continuo (capítulo 3), la relación al tiempo t está dada por:

$$X_t + P_t - C_t = Ke^{-r(N-t)},$$

donde la constante r es la tasa instantánea libre de riesgo.

Esta relación entre el activo subyacente y sus opciones es llamada **relación put-call**, la cual es muy útil para calcular el valor de un put cuando ya se conoce el valor de su respectivo call o viceversa.

2.3.4 Opciones Asiáticas o sobre promedio.

Tanto en esta subsección como en la 2.3.5 y la 2.3.6, se hacen valuaciones de opciones que aseguran un flujo de efectivo diferente a $\Phi(X_N) = (X_N - K)_+$ en el caso de un call, con la característica común de que la función boreliana Φ está definida sobre el espacio de estados de una cadena de Markov. Cabe recordar que para modelar el precio del bien subyacente X_n, se usa el árbol de Cox-Ross.

En las opciones asiáticas el flujo de efectivo en el tiempo de maduración N es $\Phi(X_N, L_N)$, donde Φ es una función boreliana y el proceso $(L_n)_{n\in I\!N}$ está definido por

$$L_{n+1} = L_n + X_{n+1}, \ L_0 = 0.$$

Un ejemplo clásico, llamado opción de golpe flotante está dado por $\Phi(X_N, L_N) = (X_N - \frac{1}{N}L_N)_+$ para el caso de un call, obsérvese que $\frac{1}{N}L_N$ sustituye al precio de ejercicio.
En general para una opción asiática, $\Phi(X_N, L_N)$ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_N - medible$, por lo tanto en base a la sección 1.3 se puede decir que el precio de este tipo de opciones al tiempo 0 es:

$$V_0 = I\!E^* \left[\frac{1}{(1+r)^N}\Phi(X_N, L_N)\right].$$

Si se desea utilizar el algoritmo que se dió en la subsección 2.2.2 para calcular esta esperanza, es necesario que primero se demuestre que $(X_n, L_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov.
Demostración:

$$\boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, L_{n+1} = l_{n+1} | X_n = x_n, L_n = l_n, \ldots, X_0 = x', L_0 = 0]$$

$$= \begin{cases} 0 & si\ l_{n+1} \neq x_{n+1} + l_n \\ \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, L_{n+1} = x_{n+1} + l_n | X_n = x_n, L_n = l_n, \ldots, X_0 = x', L_0 = 0] & \\ \qquad si\ l_{n+1} = x_{n+1} + l_n & \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & si\ l_{n+1} \neq x_{n+1} + l_n \\ \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, X_{n+1} + L_n = x_{n+1} + l_n | X_n = x_n, L_n = l_n, \ldots, X_0 = x', L_0 = 0] & \\ \qquad si\ l_{n+1} = x_{n+1} + l_n & \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & si \quad l_{n+1} \neq x_{n+1} + l_n \\ \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, L_n = l_n | X_n = x_n, L_n = l_n, \ldots, X_0 = x', L_0 = 0] & si \quad l_{n+1} = x_{n+1} + l_n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & si\ l_{n+1} \neq x_{n+1} + l_n \\ \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, L_n = l_n | X_n = x_n, L_n = l_n] & si\ l_{n+1} = x_{n+1} + l_n \end{cases}$$

porque (X_n) es cadena de Markov.

HO

Entonces,

$\boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, L_{n+1} = l_{n+1} | X_n = x_n, L_n = l_n, \ldots, X_0 = x', L_0 = 0]$

$$= \begin{cases} 0 & si \quad l_{n+1} \neq x_{n+1} + l_n \\ \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, L_{n+1} = x_{n+1} + l_n | X_n = x_n, L_n = l_n] & si \quad l_{n+1} = x_{n+1} + l_n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & si \quad l_{n+1} \neq x_{n+1} + l_n \\ \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, L_{n+1} = l_{n+1} | X_n = x_n, L_n = l_n] & si \quad l_{n+1} = x_{n+1} + l_n \end{cases}$$

Por otro lado, $\boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, L_{n+1} = l_{n+1} | X_n = x_n, L_n = l_n] = 0$ si $l_{n+1} \neq x_{n+1} + l_n$.

Por lo tanto, $(X_n, L_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov. ♠

Con este resultado podemos usar la proposición (2.2) para decir que $V_0 = \nu(0, x', 0)$, donde $\nu(n, x, l)$ está definida por

$$\begin{cases} \nu(N, x, l) &= \Phi(x, l), \\ \nu(n, x, l) &= \frac{p^*}{1+r}\nu(n+1, xa, l+xa) + \frac{1-p^*}{1+r}\nu(n+1, xb, l+xb), \; 0 \leq n < N \end{cases}$$

y ahora estamos en condiciones de poner en práctica el algoritmo de la subsección 2.2.2.

Si el flujo de efectivo al tiempo de maduración N, está definido por un promedio geométrico en lugar de un promedio aritmético, es decir, $\Phi(X_N, L_N) = (X_N - \sqrt[N]{L_N})_+$, entonces $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ debe ser definido por

$$L_{n+1} = L_n X_{n+1},$$

y el precio al tiempo n de la opción es $V_n = \nu(n, X_n, L_n)$, con

$$\begin{cases} \nu(N, x, l) &= \Phi(x, l), \\ \nu(n, x, l) &= \frac{p^*}{1+r}\nu(n+1, xa, lxa) + \frac{1-p^*}{1+r}\nu(n+1, xb, lxb), \; 0 \leq n < N. \end{cases}$$

2.3.5 Opciones Lookback.

En la opciones lookback el flujo de efectivo en el tiempo de maduración N es de la forma $\Phi(X_N, M_N)$, donde Φ es una función boreliana y $M_n := max(X_0, ..., X_n)$. Con el modelo de Cox-Ross, el proceso $(X_n, M_n, n \geq 0)$ satisface

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n Z_{n+1} & , \quad X_0 = x', \\ M_{n+1} = max(M_n, X_{n+1}) & , \quad M_0 = x'. \end{cases}$$

Nuevamente, $\Phi(X_N, M_N)$ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_N - medible$ por lo que el precio de la opción al tiempo 0 es:

$$V_0 = \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{(1+r)^N} \Phi(X_N, M_N) \right].$$

Para usar el algoritmo que se dió en la subsección 2.2.2 y así poder calcular el valor de V_0, se tiene que demostrar que $(X_n, M_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov.

Demostración:

$\boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, M_{n+1} = m_{n+1} | X_n = x_n, M_n = m_n, \ldots, X_0 = x', M_0 = x']$

$= \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, max(M_n, X_{n+1}) = m_{n+1} | X_n = x_n, M_n = m_n, \ldots, X_0 = x', M_0 = x']$,

debido a que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es cadena de Markov tenemos que

$\boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, max(M_n, X_{n+1}) = m_{n+1} | X_n = x_n, M_n = m_n, \ldots, X_0 = x', M_0 = x']$

$= \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, max(M_n, X_{n+1}) = m_{n+1} | X_n = x_n, M_n = m_n]$

$= \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, M_{n+1} = m_{n+1} | X_n = x_n, M_n = m_n]$

Por lo tanto, $(X_n, M_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov. ♠

En consecuencia, podemos usar la proposición (2.2) para decir que $V_0 = \nu(0, x', x')$, donde $\nu(n, x, m)$ está definida por

$$\begin{cases} \nu(N, x, m) = \Phi(x, m), \\ \nu(n, x, m) = \frac{p^*}{1+r}\nu(n+1, xa, max(m, xa)) + \frac{1-p^*}{1+r}\nu(n+1, xb, max(m, xb)), \ 0 \leq n < N, \end{cases}$$

y con esto ya podemos calcular V_0 con el algoritmo de la subsección 2.2.2.

2.3.6 Opciones Barrera.

El comprador de una opción barrera, pierde el derecho de ejercerla si el precio del bien subyacente rebasa un nivel acordado L antes o durante su maduración, por lo que el flujo de efectivo tiene que estar definido por la función $\Phi(X_N)1\!\!1_{\{\forall k, 0\le k\le N, X_k\le L\}}$, que es una variable aleatoria $\mathcal{F}_N - medible$ si Φ es una función boreliana. Entonces, de la sección 1.3 se tiene que el precio en el tiempo 0 de tal opción es:

$$V_0 = I\!\!E^* \left[\frac{1}{(1+r)^N}\Phi(X_N)1\!\!1_{\{\forall k, 0\le k\le N, X_k\le L\}}\right].$$

Para poder calcular V_0 tenemos que definir un nuevo proceso $(\hat{X}_n)_{n\in I\!\!N}$:

Proposición 2.4 *Sea*

$$\hat{X}_n = X_n 1\!\!1_{\{\forall 0\le k\le n, X_k\le L\}} + \delta 1\!\!1_{\{\exists 0\le k\le n, X_k > L\}},$$

donde δ denota un número real arbitrario estrictamente mayor que L.

(a) Para $\hat{X}_n \neq \delta$ se cumple que

$$\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n Z_{n+1} 1\!\!1_{\{X_n Z_{n+1}\le L\}} + \delta 1\!\!1_{\{X_n Z_{n+1} > L\}},$$

(b) Si $\hat{X}_n = \delta$, entonces $\hat{X}_{n+1} = \delta$.

(c) $(\hat{X}_n, n\ge 0)$ es una cadena de Markov.

Demostración:
(a) Como $\hat{X}_n \neq \delta$, podemos decir que para toda $k\in\{0,...,n\}$, $X_k \le L$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &= X_{n+1}1\!\!1_{\{X_{n+1}\le L\}} + \delta 1\!\!1_{\{X_{n+1}>L\}}\\ &= X_n Z_{n+1}1\!\!1_{\{X_n Z_{n+1}\le L\}} + \delta 1\!\!1_{\{X_n Z_{n+1}>L\}}\end{aligned}$$

pero $\hat{X}_k = X_k$ para toda $k\in\{0,...,n\}$, entonces

$$\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n Z_{n+1}1\!\!1_{\{X_n Z_{n+1}\le L\}} + \delta 1\!\!1_{\{X_n Z_{n+1}>L\}}.$$

(b) Si $\hat{X}_n = \delta$ se sabe que existe $k\in\{0,...,n\}$ tal que $X_k > L$, razón por la cual $\hat{X}_{n+1} = \delta$.

(c) En base a los dos incisos anteriores podemos decir que
$\boldsymbol{P}[\hat{X}_{n+1} = \hat{x}_{n+1} | \hat{X}_n = \hat{x}_n, \ldots, \hat{X}_0 = \hat{x}_0]$

$$= \begin{cases} \boldsymbol{P}[\hat{X}_n Z_{n+1} \mathbb{1}_{\{X_n Z_{n+1} \leq L\}} + \delta \mathbb{1}_{\{X_n Z_{n+1} > L\}} = \hat{x}_{n+1} | \hat{X}_n = \hat{x}_n, \ldots, \hat{X}_0 = \hat{x}_0] & si\ \hat{x}_n \neq \delta \\ 1 & si\ \hat{x}_n = \delta\ y\ \hat{x}_{n+1} = \delta \\ 0 & si\ \hat{x}_n = \delta\ y\ \hat{x}_{n+1} \neq \delta \end{cases}$$

Si $\hat{X}_n \neq \delta$ sabemos que $X_n = \hat{x}_n \leq L$ y recordemos que Z_{n+1} es independiente de X_k para toda $k \in \{0, ..., n\}$, lo cual implica que Z_{n+1} es independiente de $\hat{X}_k$ para toda $k \in \{0, ..., n\}$. Por estas dos razones y porque $(X_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov se tiene que
$\boldsymbol{P}[\hat{X}_{n+1} = \hat{x}_{n+1} | \hat{X}_n = \hat{x}_n, \ldots, \hat{X}_0 = \hat{x}_0]$

$$= \begin{cases} \boldsymbol{P}[\hat{X}_n Z_{n+1} \mathbb{1}_{\{X_n Z_{n+1} \leq L\}} + \delta \mathbb{1}_{\{X_n Z_{n+1} > L\}} = \hat{x}_{n+1} | \hat{X}_n = \hat{x}_n] & si\ \hat{x}_n \neq \delta \\ 1 & si\ \hat{x}_n = \delta\ y\ \hat{x}_{n+1} = \delta \\ 0 & si\ \hat{x}_n = \delta\ y\ \hat{x}_{n+1} \neq \delta \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \boldsymbol{P}[\hat{X}_{n+1} = \hat{x}_{n+1} | \hat{X}_n = \hat{x}_n] & si\ \hat{x}_n \neq \delta \\ 1 & si\ \hat{x}_n = \delta\ y\ \hat{x}_{n+1} = \delta \\ 0 & si\ \hat{x}_n = \delta\ y\ \hat{x}_{n+1} \neq \delta. \end{cases}$$

Por otro lado,

$$\boldsymbol{P}[\hat{X}_{n+1} = \hat{x}_{n+1} | \hat{X}_n = \hat{x}_n] = \begin{cases} 1 & si\ \hat{x}_n = \delta\ y\ \hat{x}_{n+1} = \delta \\ 0 & si\ \hat{x}_n = \delta\ y\ \hat{x}_{n+1} \neq \delta \end{cases}$$

Por lo tanto, $(\hat{X}_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov. ♠

Se definen la función $\hat{\Phi}$ por

$$\hat{\Phi}(\hat{x}) = \begin{cases} \Phi(\hat{x}) & si \quad \hat{x} \leq L \\ 0 & si \quad \hat{x} = \delta \end{cases}$$

y la función $\hat{\nu}(n, \hat{x})$ por

$$\begin{cases} \hat{\nu}(N, \hat{x}) & = & \hat{\Phi}(\hat{x}), \\ \hat{\nu}(n, \hat{x}) & = & \frac{p^*}{1+r} \hat{\nu}(n+1, \hat{x}a) + \frac{1-p^*}{1+r} \hat{\nu}(n+1, \hat{x}b) \quad para\ 0 \leq n < N, \end{cases} \tag{2.10}$$

con la convención de que $\hat{x}a = \delta$ si $\hat{x}a > L$ y $\hat{x}b = \delta$ si $\hat{x}b > L$.
La proposición (2.2) y el hecho de que $(\hat{X}_n, n \geq 0)$ sea una cadena de Markov, son elementos suficientes para afirmar que

$$\hat{\nu}(n,\delta) = \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{(1+r)^{N-n}} \hat{\Phi}(\hat{X}_N) | \hat{X}_n = \delta \right]$$

pero si $\hat{X}_n = \delta$, entonces $\hat{X}_N = \delta$ y $\hat{\nu}(n,\delta) = 0$. Por lo tanto, (2.10) es equivalente a

$$\begin{cases} \hat{\nu}(N,\hat{x}) &= \Phi(\hat{x}) & si \quad \hat{x} \leq L, \\ \hat{\nu}(N,\hat{x}) &= 0 & si \quad \hat{x} > L, \\ \hat{\nu}(n,\hat{x}) &= \frac{p^*}{1+r}\hat{\nu}(n+1,\hat{x}a) + \frac{1-p^*}{1+r}\hat{\nu}(n+1,\hat{x}b) & si \quad \hat{x} \leq L \; y \; 0 \leq n < N, \\ \hat{\nu}(n,\hat{x}) &= 0 & si \quad \hat{x} > L \; y \; 0 \leq n < N. \end{cases}$$

En particular, como $\hat{X}_0 = x' \mathbb{1}_{\{x' \leq L\}} + \delta \mathbb{1}_{\{x' > L\}}$ y x' es fija resulta que $\hat{X}_0$ también es fija y entonces al tiempo 0 el precio de la opción es:

$$V_0 = \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{(1+r)^N} \hat{\Phi}(\hat{X}_N) \right],$$

con $V_0 = \hat{\nu}(0,x')$, valor que puede ser calculado con el algoritmo de la subsección 2.2.2 aplicándolo a $\hat{\nu}$.

2.4 Problema de Dirichlet.

El problema de Dirichlet que a continuación se presenta, es de interés en el área de finanzas porque con él se logra valuar una opción tal que después de un tiempo acordado se puede ejercer si el precio del bien subyacente deja de pertener a cierto conjunto de valores ó en su defecto se puede ejercer hasta el vencimiento del contrato, como normalmente sucede en una opción europea. Cabe aclarar que en dicha opción las dos alternativas de ejercicio pueden tener diferentes funciones del flujo de efectivo.

Proposición 2.5 *Considérese el caso de un proceso parado al tiempo de salida de un conjunto fijo. Sea* $(X_p^{m,x'}, p \geq m)$ *una cadena de Markov con matriz de transición* P_p *y espacio de estados* $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$, *tal que* $X_m^{m,x'} = x'$. *Sea* B *un subconjunto de* $\mathcal{E}$, *se define el tiempo de salida de* B *por* $\gamma_B^{m,x'} = min\{k \geq m, X_k^{m,x'} \notin B\}$. *Dadas las funciones borelianas* $\Phi : B \to \mathbb{R}$ *y* $\Psi : (\mathcal{E} - B) \to \mathbb{R}$, *considérese la función* ν *definida recursivamente mediante las igualdades:*

$$\begin{cases} \nu(N,x) &= \Phi(x), & \forall x \in B, \\ \nu(n,x) &= \frac{1}{1+r}\sum_{y\in\mathcal{E}} P_n(x,y)\nu(n+1,y), & \forall x \in B \ y \ m \leq n < N, \\ \nu(n,x) &= \Psi(x), & \forall x \notin B \ y \ m \leq n \leq N, \end{cases} \tag{2.11}$$

donde r *es un número real entre 0 y 1.*

Entonces,

$$\nu(m,x') = \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{(1+r)^{\gamma_B^{m,x'}-m}} \Psi(X_{\gamma_B^{m,x'}}^{m,x'}) \mathbb{1}_{\{\gamma_B^{m,x'} \leq N\}} + \frac{1}{(1+r)^{N-m}} \Phi(X_N^{m,x'}) \mathbb{1}_{\{N < \gamma_B^{m,x'}\}} \right] \tag{2.12}$$

$V_m = \nu(m,x')$ es el precio al tiempo m de una opción que se construye a partir del problema de Dirichlet.

Observación 2.1 *Se está considerando a* $(X_p^{m,x'}, p \geq m)$ *como un proceso parado al tiempo* $\gamma_B^{m,x'}$, *por lo cual si* $x_p \notin B$ *para* $i \geq 0$

$$\therefore \quad P_{p+i}(x_p, x_{p+i}) = \begin{cases} 1 & si \ x_{p+i} = x_p \\ 0 & si \ x_{p+i} \neq x_p \end{cases}$$

y se toma como convención que

$$\nu(p+i, x_p) = (1+r)^i \Psi(x_p).$$

Demostración:

Para $p \in \{m, ..., N\}$ se define $V_p = \frac{1}{(1+r)^p}\nu(p, X_p^{m,x'})$, en particular $V_m = \frac{1}{(1+r)^m}\nu(m,x')$.

Veamos que $(V_p, m \leq p \leq N)$ es martingala:

para $p \in \{m, ..., N-1\}$

$$\mathbb{E}^*[V_{p+1}|\mathcal{F}_p] = \frac{1}{(1+r)^{p+1}}\mathbb{E}^*[\nu(p+1, X_{p+1}^{m,x'})|\mathcal{F}_p],$$

por ser $(X_p^{m,x'}, p \geq m)$ cadena de Markov (ver proposición A.1)

$$\mathbb{E}^*[V_{p+1}|\mathcal{F}_p] = \frac{1}{(1+r)^{p+1}}\mathbb{E}^*[\nu(p+1, X_{p+1}^{m,x'})|X_p^{m,x'}]$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[V_{p+1}|\mathcal{F}_p] &= \frac{1}{(1+r)^{p+1}}\sum_{x_p\in\mathcal{E}}\mathbb{E}^*[\nu(p+1, X_{p+1}^{m,x'})|X_p^{m,x'} = x_p]\mathbb{1}_{\{X_p^{m,x'}=x_p\}} \\
&= \frac{1}{(1+r)^{p+1}}\sum_{x_p\in\mathcal{E}}\left[\sum_{x_{p+1}\in\mathcal{E}}\nu(p+1, x_{p+1})P_p(x_p, x_{p+1})\right]\mathbb{1}_{\{X_p^{m,x'}=x_p\}},
\end{aligned}$$

si $x_p \in B$ podemos utilizar la segunda igualdad de (2.11) para decir que

$$\sum_{x_{p+1}\in\mathcal{E}}\nu(p+1, x_{p+1})P_p(x_p, x_{p+1}) = (1+r)\nu(p, x_p),$$

en otro caso, es decir, si $x_p \notin B$ tenemos que hacer uso de la observación (2.1) para llegar a que

$$\begin{aligned}
\sum_{x_{p+1}\in\mathcal{E}}\nu(p+1, x_{p+1})P_p(x_p, x_{p+1}) &= \nu(p+1, x_p)P_p(x_p, x_p) \\
&= (1+r)\Psi(x_p) \\
&= (1+r)\nu(p, x_p)
\end{aligned}$$

Por lo cual,

$\mathbb{E}^*[V_{p+1}|\mathcal{F}_p]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+r)^{p+1}}\left[\sum_{x_p\in B}(1+r)\nu(p, x_p)\mathbb{1}_{\{X_p^{m,x'}=x_p\}} + \sum_{x_p\notin B}(1+r)\Psi(x_p)\mathbb{1}_{\{X_p^{m,x'}=x_p\}}\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^{p+1}}\left[\sum_{x_p\in B}(1+r)\nu(p, x_p)\mathbb{1}_{\{X_p^{m,x'}=x_p\}} + \sum_{x_p\notin B}(1+r)\nu(p, x_p)\mathbb{1}_{\{X_p^{m,x'}=x_p\}}\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^{p+1}}(1+r)\nu(p, X_p^{m,x'}) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{p}}\nu(p, X_p^{m,x'}) \\
&= V_p
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(V_p, m \leq p \leq N)$ es martingala.

Con el fin de probar la igualdad (2.12), se usarán los siguientes resultados cuyas demostraciones se encuentran en el apéndice:

Proposición 2.6 *Sea $\gamma_B^{m,x'}$ el tiempo de salida definido en la proposición 2.5 y sea N un número natural. Si $\tau := \gamma_B^{m,x'} \wedge N$, entonces τ es un tiempo de paro acotado.*

Teorema 2.1 (Muestreo Opcional) *Sea N un número entero estrictamente positivo. Sea $(M_n)_{n\geq 0}$ una $\mathcal{F}_n$-martingala. Para cualquier tiempo de paro τ tal que $m \leq \tau \leq N$ c.s. se cumple que*

$$\mathbb{E}[M_\tau|\mathcal{F}_m] = M_m.$$

Para demostrar (2.12), aplicamos la proposición (2.6) y el teorema (2.1) a $\tau = \gamma_B^{m,x'} \wedge N$ y a la martingala $(V_p, m \leq p \leq N)$. Así tenemos que

$$\mathbb{E}^*[V_\tau|\mathcal{F}_m] = V_m,$$

o sea

$$\mathbb{E}^*\left[\frac{1}{(1+r)^\tau}\nu(\tau, X_\tau^{m,x'})|\mathcal{F}_m\right] = \frac{1}{(1+r)^m}\nu(m,x')$$

y en consecuencia

$\nu(m,x')$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{(1+r)^{\gamma_B^{m,x'}-m}}\nu(\gamma_B^{m,x'}, X^{m,x'}_{\gamma_B^{m,x'}})\mathbb{1}_{\{\tau=\gamma_B^{m,x'}\}} + \frac{1}{(1+r)^{N-m}}\nu(N, X_N^{m,x'})\mathbb{1}_{\{\tau=N\}}|\mathcal{F}_m\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{(1+r)^{\gamma_B^{m,x'}-m}}\Psi(X^{m,x'}_{\gamma_B^{m,x'}})\mathbb{1}_{\{\gamma_B^{m,x'}\leq N\}} + \frac{1}{(1+r)^{N-m}}\Phi(X_N^{m,x'})\mathbb{1}_{\{N<\gamma_B^{m,x'}\}}|\mathcal{F}_m\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[\sum_{i=m}^{N}\frac{1}{(1+r)^{i-m}}\Psi(X_i^{m,x'})\mathbb{1}_{\{\gamma_B^{m,x'}=i\}}|\mathcal{F}_m\right] + \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{(1+r)^{N-m}}\Phi(X_N^{m,x'})\mathbb{1}_{\{N<\gamma_B^{m,x'}\}}|\mathcal{F}_m\right] \\
&= \sum_{i=m}^{N}\mathbb{E}^*\left[\frac{1}{(1+r)^{i-m}}\Psi(X_i^{m,x'})\mathbb{1}_{\{\gamma_B^{m,x'}=i\}}|\mathcal{F}_m\right] + \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{(1+r)^{N-m}}\Phi(X_N^{m,x'})\mathbb{1}_{\{N<\gamma_B^{m,x'}\}}|\mathcal{F}_m\right],
\end{aligned}$$

debido a que $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ es una cadena de Markov (ver proposición A.1)

$$
\begin{aligned}
\nu(m,x') & \\
&= \sum_{i=m}^{N} \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{(1+r)^{i-m}}\Psi(X_i^{m,x'})\mathbb{1}_{\{\gamma_B^{m,x'}=i\}}|X_m^{m,x'}\right] + \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{(1+r)^{N-m}}\Phi(X_N^{m,x'})\mathbb{1}_{\{N<\gamma_B^{m,x'}\}}|X_m^{m,x'}\right] \\
&= \mathbb{E}^* \left[\sum_{i=m}^{N} \frac{1}{(1+r)^{i-m}}\Psi(X_i^{m,x'})\mathbb{1}_{\{\gamma_B^{m,x'}=i\}}|X_m^{m,x'}=x'\right] \\
&\quad + \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{(1+r)^{N-m}}\Phi(X_N^{m,x'})\mathbb{1}_{\{N<\gamma_B^{m,x'}\}}|X_m^{m,x'}=x'\right] \\
&= \mathbb{E}^* \left[\frac{1}{(1+r)^{\gamma_B^{m,x'}-m}}\Psi(X_{\gamma_B^{m,x'}}^{m,x'})\mathbb{1}_{\{\gamma_B^{m,x'}\leq N\}} + \frac{1}{(1+r)^{N-m}}\Phi(X_N^{m,x'})\mathbb{1}_{\{N<\gamma_B^{m,x'}\}}\right]
\end{aligned}
$$

♠

4a

Capítulo 3

Valuación de Opciones Europeas a tiempo continuo.

En este capítulo se introducirá un modelo continuo del precio del bien subyacente, el cual será la base para deducir la tan famosa fórmula de Black-Scholes, con la que se calcula el precio de una opción europea. En seguida, se encuentra la relación que existe entre los parámetros del modelo continuo con los parámetros del modelo de Cox-Ross, que es algo importante porque en el capítulo anterior sólo se dan ciertas condiciones para los parámetros del modelo binomial pero no se dice como calcularlos. En este capítulo se menciona como se pueden obtener a partir de los parámetros del modelo continuo, además esto servirá para poder comparar los respectivos métodos de valuación. También se desarrollan dos métodos numéricos que sirven para realizar la valuación de una opción europea, el primero es por medio de una aproximación probabilística y el segundo utiliza el método explícito de diferencias finitas. Y por último, en base a un ejemplo se comparan los cuatro métodos de valuación que se desarrollaron en este trabajo.

3.1 Modelo continuo del precio del bien subyacente.

Algunos autores como Samuelson, Black y Scholes, han modelado a tiempo continuo el precio del bien subyacente como el proceso llamado Movimiento Browniano Geométrico, el cual está dado por:

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}, \quad t \geq 0 \tag{3.1}$$

donde:

X_0 es el precio del bien subyacente al tiempo 0,

μ es una función de la tasa promedio de crecimiento del precio del bien subyacente,

σ mide la desviación estándar de los retornos $\left(\frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{X_{t_{i-1}}}\right)$, es llamada volatilidad del precio del bien subyacente,

$\{B_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano estándar.

En un mundo de riesgo neutral, es decir, en un mundo donde las preferencias de riesgo de los inversionistas son irrelevantes, debido a que la tasa de crecimiento de un activo no puede ser ni mayor ni menor que la tasa libre de riesgo, podemos reemplazar a μ por la tasa de interés (instantánea) para depósitos bancarios r, la cual se considerará constante en el tiempo. Entonces, (3.1) se convierte en:

$$X_t = X_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}, \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Una estimación simple de σ [1] se puede hacer de la siguiente manera:
Suponga que se tienen $n + 1$ valores del bien subyacente X, tales que ordenados en forma cronológica el intervalo de tiempo entre ellas (dt) es el mismo, llámese a estos valores $X_0, X_1, ..., X_n$.
Sea

$$\bar{m} = \frac{1}{ndt} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X_{i+1} - X_i}{X_i},$$

entonces

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{(n-1)dt} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{X_{i+1} - X_i}{X_i - \bar{m}} \right]^2.$$

Si dt está medido como fracción de un año, los parámetros $\bar{m}$ y $\bar{\sigma}$ son anuales.

[1]Para más detalles sobre la estimación de σ ver Paul Wilmott[4], pag. 25.

3.2 Fórmula de Black-Scholes.

Al igual que en el capítulo 1, para el caso en donde el precio del bien subyacente de una opción se modela en forma continua, se puede demostrar bajo la hipótesis de un mercado completo y con ausencia de oportunidad de arbitraje que el precio justo de un call europeo al tiempo t con precio de ejercicio K, que garantiza en la fecha de vencimiento T un flujo de efectivo $(X_T - K)_+$ está dado por:

$$C(t, X_t) = \mathbb{E}^* \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} (X_T - K)_+ | \mathcal{F}_t \right], \tag{3.3}$$

donde $r(t)$ es la tasa libre de riesgo, X_t representa el precio del bien subyacente al tiempo t y para $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ es la σ-álgebra generada por $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$.
$\mathbb{E}^*$ denota la esperanza con respecto a la medida martingala, es decir, la única medida de probabilidad equivalente a la probabilidad inicial tal que el proceso de los precios actualizados $(e^{-\int_t^T r(s)ds} X_t)_{t \geq 0}$ es martingala con respecto a esta nueva probabilidad.
En este mercado continuo también se trabaja bajo las siguientes hipótesis:

- No existen costos de transacción.
- Los activos no pagan dividendos.
- Los activos son divisibles, es decir, se puede comprar o vender un número no necesariamente entero de ellos.
- Las ventas al descubierto son permitidas.

Si se trabaja bajo el supuesto de que el precio del bien subyacente sigue el modelo (3.2), en el cual r y σ son constantes, el cálculo de la esperanza para $t = 0$ es sencillo:
Sea U una variable aleatoria con distribución normal de media 0 y varianza 1 y sea $X_0 = x$, entonces

$$X_T = x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T} U}.$$

Las cosas se facilitan si se define el conjunto $A = \{X_T > K\} = \{-d_0 < U\}$ llamado el conjunto de ejercicio, donde

$$d_0 = \frac{ln\left(\frac{x}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Con este conjunto A se puede calcular el precio de la opción como:

$$C(0,x) = \mathbb{E}^*\left[xe^{(\sigma\sqrt{T}U - \frac{\sigma^2}{2}T)}\mathbb{1}_{\{-d_0<U\}}\right] - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_0),$$

donde $\mathcal{N}(d_0)$ denota la función de distribución de U evaluada en d_0.
El cálculo de la esperanza es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\left[xe^{(\sigma\sqrt{T}U - \frac{\sigma^2}{2}T)}\mathbb{1}_{\{-d_0<U\}}\right] &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_0}^{\infty} e^{(\sigma\sqrt{T}u - \frac{\sigma^2}{2}T)}e^{-\frac{u^2}{2}}du \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_0} e^{-(\sigma\sqrt{T}u + \frac{\sigma^2}{2}T)}e^{-\frac{u^2}{2}}du \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_0} e^{-\frac{(u+\sigma\sqrt{T})^2}{2}}du,
\end{aligned}$$

al utilizar el cambio de variable

$$u' = u + \sigma\sqrt{T}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\left[xe^{-(\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\sqrt{T}U)}\mathbb{1}_{\{U<d_0\}}\right] &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_0+\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{u'^2}{2}}du' \\
&= x\mathcal{N}(d_1),
\end{aligned}$$

donde $d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T}$.
Por lo tanto,

$$C(0,x) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_0)$$

con

$$d_0 = \frac{ln\left(\frac{x}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad y \quad d1 = d_0 + \sigma\sqrt{T}.$$

Si se desea saber el valor del put con las mismas características del call europeo del cual se calculó anteriormente su valor, la forma más sencilla es hacer uso de la relación de paridad put-call (sec. 2.3.3), de tal manera que

$$P(0,x) = C(0,x) + Ke^{-rT} - x,$$

al sustituir el valor de $C(0,x)$ resulta que

$$P(0,x) = x[\mathcal{N}(d_1) - 1] + Ke^{-rT}[1 - \mathcal{N}(d_0)],$$

por la identidad $\mathcal{N}(d) + \mathcal{N}(-d) = 1$, tenemos que el valor del put europeo es

$$P(0,x) = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_0) - x\mathcal{N}(-d_1).$$

Para poder calcular con el modelo (3.2) el precio de un call europeo para un tiempo t mayor que 0 y menor o igual a T, el cálculo de la esperanza en (3.3) se hace indirectamente por medio del siguiente teorema, de hecho como este lo indica, la valuación se podría realizar cuando r sea función del tiempo y σ sea aleatoria.

Teorema 3.1 *Sea $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ la solución de la ecuación diferencial estocástica*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \tag{3.4}$$

donde $(B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano estándar y las funciones b y σ cumplen los siguientes puntos:

(i) $b, \sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son medibles.

(ii) existe K tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y toda $t \in [0,T]$

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y| \quad y$$

(iii) para toda $T \geq 0$

$$\int_0^T |b(t,0)|^2 + |\sigma(t,0)|^2 dt < \infty.$$

Sea Φ una función continua con crecimiento polinomial en $\mathbb{R}$ y sea r una función continua no negativa de $[0,T]$ a $\mathbb{R}$.

Sea ν una función real de clase $C^{1,2}([0,T)\times\mathbb{R})$, continua en $[0,T]\times\mathbb{R}$ con derivadas acotadas (en x) uniformemente en el tiempo, tal que es solución de la siguiente ecuación diferencial parcial backward llamada ecuación de Kolmogorov:

$$\begin{cases} \frac{\partial\nu}{\partial t}(t,x) + A\nu(t,x) - r(t)\nu(t,x) = 0 \quad en \quad [0,T)\times\mathbb{R}, \\ \nu(T,x) = \Phi(x) \quad en \quad \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.5}$$

donde

$$A\nu(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2} + b\frac{\partial\nu}{\partial x}.$$

Entonces

$$\nu(t,x) = \mathbb{E}^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}\Phi(X_T)|X_t = x],$$

en particular

$$\nu(0,x_0) = \mathbb{E}^*\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}\Phi(X_T)\right].$$

Demostración:
Sea $f(t,X_t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}\nu(t,X_t)$.
Se define

$$\begin{aligned} N_t^f &= f(t,X_t) - f(0,X_0) - \int_0^t b(s,X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s,X_s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)ds - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds. \end{aligned}$$

Si $Af = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial f}{\partial x}$, entonces

$$N_t^f = f(t,X_t) - f(0,X_0) - \int_0^t Af(s,X_s)ds - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds,$$

por la fórmula de Itô (ver Teorema B.3 en apéndice) se tiene que

$$N_t^f = \int_0^t \sigma(s,X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dBs$$

y por el Teorema B.2, $(N_t^f)_{0\leq t\leq T}$ es martingala.

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}\frac{\partial \nu}{\partial t}(t,X_t) - r(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}\nu(t,X_t),$$

entonces si

$$\begin{aligned} N_t &= e^{-\int_0^t r(s)ds}\nu(t,X_t) - \nu(0,x_0) \\ &\quad - \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du}[A\nu(s,X_s) + \frac{\partial \nu}{\partial t}(s,X_s) - r(s)\nu(s,X_s)]ds, \end{aligned}$$

el proceso $(N_t)_{0\leq t\leq T}$ es martingala.

Pero por hipótesis ν satisface (3.5), por lo cual el proceso $\{N_t = e^{-\int_0^t r(s)ds}\nu(t,X_t) - \nu(0,x_0)\}_{0\leq t\leq T}$ también es martingala, así es que

$$\mathbb{E}^*[N_T|\mathcal{F}_t] = N_t \quad c.s.$$

y en consecuencia

$$\mathbb{E}^*[e^{-\int_0^T r(s)ds}\nu(T,X_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-\int_0^t r(s)ds}\nu(t,X_t) \quad c.s.,$$

Gracias al Teorema B.4 se puede decir que $(X_t, 0\leq t\leq T)$ es proceso de Markov y así

$$\mathbb{E}^*[e^{-\int_0^T r(s)ds}\nu(T,X_T)|X_t] = e^{-\int_0^t r(s)ds}\nu(t,X_t) \quad c.s.,$$

que es equivalente a

$$\mathbb{E}^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}\nu(T,X_T)|X_t] = \nu(t,X_t) \quad c.s.,$$

entonces

$$\mathbb{E}^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}\Phi(X_T)|X_t = x] = \nu(t,x).$$

En particular,

$$\mathbb{E}^*[e^{-\int_0^T r(s)ds}\Phi(X_T)] = \nu(0,x_0).$$

♠

Lo que nos dice este teorema es que para valuar una opción tal que el precio del bien subyacente es solución de la ecuación (3.4), basta con resolver la ecuación (3.5) ya que $\nu(t,X)$ es el precio justo de la opción europea al tiempo t, dado que $X_t = X$. Por lo tanto, si se considera un activo de precio X_t al tiempo t, tal que es solución de

$$dX_t = X_t(r\,dt + \sigma dB_t), \quad X_0 = x_0 \tag{3.6}$$

con $r > 0$ y $\sigma > 0$, entonces el precio al tiempo t de un call europeo con flujo de efectivo $\Phi(X_T)$ y fecha de maduración T está dado por

$$C(t, X_t) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t],$$

donde $C(t, X)$ satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}(t, X) + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 C}{\partial X^2}(t, X) + rX\frac{\partial C}{\partial X}(t, X) - rC(t, X) = 0 & en \quad [0, T) \times \mathbb{R}, \\ C(T, X) = \Phi(X) \quad en \quad \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.7}$$

La ecuación (3.7) es llamada Ecuación Diferencial Parcial de valuación para un call europeo con valor $C(t, X)$. Adicionalmente, a $C(t, X)$ se le pide que cumpla

$$C(t, 0) = 0 \qquad C(t, X) \sim X \;\; cuando \; X \to \infty \qquad y \qquad C(T, X) = \Phi(X) = max(X - K, 0).$$

De estas últimas condiciones la tercera, como se verá más adelante, es básica para obtener la fórmula de Black-Scholes, por lo tanto si está condición no se cumple la fórmula no es válida. Para este caso se recomienda usar el método numérico de la subsección 3.4.2 para resolver la ecuación (3.7) o utilizar el método de aproximación probabilística desarrollado en la subsección 3.4.1. para calcular el precio de la opción por medio de otro razonamiento. Cabe aclarar que en el caso de un put esta condición se maneja como $P(T, X) = max(K - X, 0)$.

Antes de resolver explícitamente la ecuación (3.7) se probará primero que el proceso (3.2) es solución de la ecuación (3.6), es decir, el proceso (3.2) es solución de la ecuación

$$X_t = x_0 + \int_0^t X_s r\,ds + \int_0^t X_s \sigma dB_s.$$

Sea $X_t = f(t, B_t)$, donde

$$f(t, x) = x_0 \exp[(r - \sigma^2/2)t + \sigma x].$$

Por la fórmula de Itô para el movimiento browniano (ver apéndice B):

$$\begin{aligned} X_t &= f(t, B_t) \\ &= f(0, B_0) + \int_0^t X_s[(r - \sigma^2/2) + \sigma^2/2]ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X_t = x_0 + \int_0^t X_s r ds + \int_0^t X_s \sigma dB_s.$$

El primer paso para resolver la ecuación (3.7) es convertirla en una ecuación de calor o de difusión para lo cual se realizan los cambios de variables:

$$X = Ke^y, \qquad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \qquad y \qquad C = K\nu(\tau, y),$$

donde K es el precio de ejercicio y T es el tiempo de vida de la opción.

Con estos cambios las diferenciales parciales que se necesitan quedan de la siguiente forma:

$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 K \frac{\partial \nu}{\partial \tau}$

$\frac{\partial C}{\partial X} = \frac{1}{e^y}\frac{\partial \nu}{\partial y}$ y

$\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} = \frac{1}{Ke^{2y}}\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} - \frac{\partial \nu}{\partial y}\right)$,

al sustituirlas en (3.7) tenemos la ecuación

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + (k-1)\frac{\partial \nu}{\partial y} - k\nu, \tag{3.8}$$

donde $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ y la condición inicial es $\nu(0, y) = max(e^y - 1, 0)$.

La ecuación (3.8) aún no es una ecuación de calor, todavía se necesita realizar el cambio de variable

$$\nu = e^{\alpha y + \beta \tau} u(\tau, y),$$

donde α y β son constantes que más adelante se encontrarán.

Con este cambio de variable las diferenciales parciales quedan como:

$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = e^{\alpha y + \beta \tau}\left[\beta u(\tau, y) + \frac{\partial u(\tau, y)}{\partial \tau}\right]$,

$\frac{\partial \nu}{\partial y} = e^{\alpha y + \beta \tau}\left[\alpha u(\tau, y) + \frac{\partial u(\tau, y)}{\partial y}\right]$ y

$\frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} = e^{\alpha y + \beta \tau}\left[\alpha^2 u(\tau, y) + 2\alpha\frac{\partial u(\tau, y)}{\partial y} + \frac{\partial^2 u(\tau, y)}{\partial y^2}\right]$, que al sustituirlas en (3.8) nos dan la ecuación

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - ku, \tag{3.9}$$

con condición inicial $u(0,y) = max(e^{y(1-\alpha)} - e^{-\alpha y}, 0)$.
Para eliminar de la ecuación (3.9) el término u, se tiene que elegir

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k$$

y para eliminar el término $\frac{\partial u}{\partial y}$, α tiene que satisfacer la siguiente igualdad

$$0 = 2\alpha + (k-1).$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene que

$$\alpha = -\frac{(k-1)}{2} \qquad y \qquad \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2.$$

Entonces se tiene

$$\nu(\tau, y) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)y - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(\tau, y), \tag{3.10}$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad para \quad -\infty < y < \infty \quad y \quad \tau > 0, \tag{3.11}$$

con condición inicial $u(0,y) = u_0(y) = max(e^{\frac{1}{2}(k+1)y} - e^{\frac{1}{2}(k-1)y}, 0)$.
La ecuación (3.11) ya es una ecuación de calor con condición inicial $u_0(y)$, por lo tanto la solución está dada por

$$u(\tau, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-(y-s)^2/4\tau} ds. \tag{3.12}$$

Para resolver esta integral es conveniente hacer el cambio de variable $y' = \frac{(s-y)}{\sqrt{2\tau}}$, así la ecuación (3.12) se puede expresar como

$$\begin{aligned} u(\tau, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y'\sqrt{2\tau} + y) e^{-\frac{1}{2}y'^2} dy' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)(y'\sqrt{2\tau}+y)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(y'\sqrt{2\tau}+y)}, 0\right) e^{-\frac{1}{2}y'^2} dy', \end{aligned}$$

para eliminar el máximo se debe integrar sobre las $(y')'s$ tales que

$$\frac{1}{2}(k+1)(y'\sqrt{2\tau}+y) \geq \frac{1}{2}(k-1)(y'\sqrt{2\tau}+y),$$

es decir, se debe integrar sobre las $(y')'s$ que satisfacen

$$y' \geq \frac{-y}{\sqrt{2\tau}},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} u(\tau,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-y}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(y'\sqrt{2\tau}+y)} e^{-\frac{1}{2}y'^2} dy' \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-y}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(y'\sqrt{2\tau}+y)} e^{-\frac{1}{2}y'^2} dy' \\ &= I_1 - I_0. \end{aligned}$$

Las integrales I_1 e I_0 se resuelven completando el cuadrado en el exponente para tener una integral estándar:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-y}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(y'\sqrt{2\tau}+y)-\frac{1}{2}y'^2} dy' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)y}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-y}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y'^2-(k+1)\sqrt{2\tau}y']} dy' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)y}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-y}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(y'-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dy'. \end{aligned}$$

Si $z = y' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)y+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-y}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)y+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \mathcal{N}(d_1), \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{y}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

60

y $\mathcal{N}(d_1)$ es la función de distribución normal con media 0 y varianza 1, evaluada en d_1.
De manera idéntica se pueden realizar los cálculos para I_0, excepto que $(k+1)$ es reemplazado por $(k-1)$, así

$$I_0 = e^{\frac{1}{2}(k-1)y+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}\mathcal{N}(d_0),$$

donde

$$d_0 = \frac{y}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}.$$

Entonces,

$$u(\tau, y) = e^{\frac{1}{2}(k+1)y+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\mathcal{N}(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)y+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}\mathcal{N}(d_0)$$

y por (3.10) tenemos que

$$\nu(\tau, y) = e^{y}\mathcal{N}(d_1) - e^{-k\tau}\mathcal{N}(d_0). \tag{3.13}$$

Para obtener el valor del call europeo $C(t, X)$ es necesario invertir los cambios realizados, por lo que

$$y = \ln\left(\frac{X}{K}\right), \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \qquad y \qquad \nu(\tau, y) = \frac{C}{K}.$$

Al ser sustituidas estas variables en (3.13) nos permiten afirmar que

$$C(t, X) = X\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_0),$$

donde

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{X}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad y$$

$$d_0 = \frac{ln\left(\frac{X}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Cuando $t = 0$, la fórmula coincide con la que se obtuvo al principio de esta sección.
Por la relación de paridad put-call se puede decir que el precio del put europeo con las mismas características del call europeo del cual se calculó anteriormente su valor, está dado por:

$$P(t, X) = X[\mathcal{N}(d_1) - 1] + Ke^{-r(T-t)}[1 - \mathcal{N}(d_0)],$$

si se toma en cuenta la identidad $\mathcal{N}(d) + \mathcal{N}(-d) = 1$, tenemos que el valor del put europeo es

$$P(t, X) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_0) - X\mathcal{N}(-d_1).$$

En la sección 3.5 se trabaja con un ejemplo para comparar el resultado de la fórmula de Black-Scholes con los resultados de la valuación al utilizar el modelo de Cox-Ross como aproximación al modelo continuo y al usar los dos métodos numéricos de la sección 3.4.

3.3 Relación entre los parámetros de los modelos de Cox-Ross y de Black-Scholes.

El modelo de Cox-Ross que se ha estudiado, también se puede ver como la versión discreta del modelo de Black-Scholes (3.2) bajo las siguientes condiciones:

- El precio del activo X solo cambia en los tiempos discretos $\delta t, 2\delta t, 3\delta t, ..., M\delta t = T$ (T es la fecha en la que la opción vence).
- Si al tiempo $m\delta t$ el precio del bien subyacente es X_m, entonces al tiempo $(m+1)\delta t$ el precio tomará sólo los valores $aX_m > X_m$ ó $bX_m < X_m$ $(0 < b < 1 < a)$.
- La probabilidad p, de que X se mueva a aX es conocida.

Para poder escoger de manera adecuada los parámetros a,b y p del modelo de Cox-Ross, tenemos que asegurarnos de que las propiedades del modelo continuo no sean modificadas cuando éste se discretiza. Por lo tanto a, b y p, son tales que las esperanzas y las varianzas de X_{m+1} dado X_m, son iguales para el modelo continuo (3.2) y el modelo de Cox-Ross.
El cálculo de la esperanza y de la varianza para el modelo continuo (3.2), requiere la densidad de X_{s+t} dado X_s, la cual se obtendrá a continuación:
Sea $X_0 = x_0$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\left[X_{s+t} \leq x | X_s = x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})s+\sigma w_s}\right] &= \boldsymbol{P}\left[x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(s+t)+\sigma W_{s+t}} \leq x | X_s = x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})s+\sigma w_s}\right] \\
&= \boldsymbol{P}\left[x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(s+t)+\sigma(W_s+W_t)} \leq x | X_s = x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})s+\sigma w_s}\right] \\
&= \boldsymbol{P}\left[x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})s+\sigma W_s} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} \leq x | X_s = x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})s+\sigma w_s}\right],
\end{aligned}$$

67

sea $x_s = x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})s+\sigma w_s}$, entonces

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\left[x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})s+\sigma W_s} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} \leq x | X_s = x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})s+\sigma w_s}\right] &= \boldsymbol{P}\left[X_s e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} \leq x | X_s = x_s\right] \\
&= \boldsymbol{P}\left[x_s e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} \leq x\right] \\
&= \boldsymbol{P}\left[W_t \leq \frac{log\left(\frac{x}{x_s}\right) - (r-\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{log\left(\frac{x}{x_s}\right)-(r-\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Al realizar el cambio de variable

$$y = x_s e^{\sigma u + (r-\frac{\sigma^2}{2})t},$$

tenemos que (3.14) es igual a

$$\int_0^x \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi t}} exp\left[-\left(log\left(\frac{y}{x_s}\right) - (r-\frac{\sigma^2}{2})t\right)^2 / 2\sigma^2 t\right] dy,$$

por lo tanto la densidad de X_{s+t} dado que $X_s = x_s$ es:

$$\frac{1}{\sigma x_{s+t}\sqrt{2\pi t}} exp\left[-\left(log\left(\frac{x_{s+t}}{x_s}\right) - (r-\frac{\sigma^2}{2})t\right)^2 / 2\sigma^2 t\right], \quad x_{s+t} \geq 0. \tag{3.15}$$

Si a la densidad (3.15) la componemos con X_s, entonces obtenemos la densidad de X_{s+t} dado X_s, la cual se denotará por $p(X_s, s; x_{s+t}, s+t)$.

Y ahora estamos en condiciones de poder calcular para el modelo continuo (3.2), la esperanza de X_{m+1} dado X_m, cabe recordar que para poder hacer la versión discreta del modelo se hizo la convención de que al tiempo $m\delta t$ el precio del bien subyacente es X_m, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_c[X_{m+1}|X_m = x_m] &= \int_0^\infty x' p(x_m, m\delta t; x', (m+1)\delta t) dx' \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} e^{-[log(\frac{x'}{x_m}) - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t]^2/2\sigma^2\delta t} dx',
\end{aligned}$$

sea $u = log(\frac{x'}{x_m}) - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t, \quad du = \frac{1}{x'}dx'$

al despejar $x' = x_m e^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t]} e^u$, por lo cual

$$\mathbb{E}_c[X_{m+1}|X_m = x_m] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2\sigma^2\delta t}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} x_m e^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t]} e^u du$$

$$\begin{aligned}
&= x_m e^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left[\frac{u^2}{2\sigma^2\delta t}-u+\left(\frac{\sigma^2\delta t}{2}\right)\right]}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} e^{\left(\frac{\sigma^2\delta t}{2}\right)} du \\
&= x_m e^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t]} e^{\left(\frac{\sigma^2\delta t}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{u}{\sqrt{2\sigma^2\delta t}}-\sqrt{\frac{\sigma^2\delta t}{2}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} du \\
&= x_m e^{r\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\left[\frac{-1}{2\sigma^2\delta t}(u-\sigma^2\delta t)^2\right]}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} du \\
&= x_m e^{r\delta t},
\end{aligned}$$

esta esperanza compuesta con X_m nos da como resultado que

$$I\!E_c[X_{m+1}|X_m] = X_m e^{r\delta t}. \tag{3.16}$$

Para calcular las varianzas, tanto en el caso continuo como en el discreto se utilizará la siguiente igualdad:

$$Var[X_{m+1}|X_m] = I\!E\left[X_{m+1}^2|X_m\right] - I\!E[X_{m+1}|X_m]^2.$$

En el modelo continuo la segunda esperanza se deduce de la ecuación (3.16) y la primera se calcula a continuación:

$$\begin{aligned}
I\!E\left[X_{m+1}^2|X_m = x_m\right] &= \int_0^{\infty} (x')^2 p(x_m, m\delta t; x', (m+1)\delta t) dx' \\
&= \int_0^{\infty} \frac{x'}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} e^{-[log(\frac{x'}{x_m})-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t]^2/2\sigma^2\delta t} dx',
\end{aligned}$$

sea $u = log(\frac{x'}{x_m}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t, \quad du = \frac{1}{x'}dx'$
entonces $x' = x_m e^{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t]} e^u$, por lo cual

$$\begin{aligned}
I\!E_c[X_{m+1}^2|X_m = x_m] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2\sigma^2\delta t}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} x_m^2 e^{[2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t]} e^{2u} du \\
&= x_m^2 e^{[2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{u^2}{2\sigma^2\delta t}-2u+2\sigma^2\delta t\right)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} e^{2\sigma^2\delta t} du \\
&= x_m^2 e^{[2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t]} e^{2\sigma^2\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{u}{\sqrt{2\sigma^2\delta t}}-\sqrt{2\sigma^2\delta t}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} du \\
&= x_m^2 e^{(2r+\sigma^2)\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\left[\frac{-1}{2\sigma^2\delta t}(u-2\sigma^2\delta t)^2\right]}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} du \\
&= x_m^2 e^{(2r+\sigma^2)\delta t},
\end{aligned}$$

al hacer la composición de esta esperanza con X_m tenemos

$$\mathbb{E}_c[X_{m+1}^2|X_m] = X_m^2 e^{(2r+\sigma^2)\delta t}. \tag{3.17}$$

De (3.16) y (3.17) podemos decir que:

$$\begin{aligned} Var_c[X_{m+1}|X_m] &= X_m^2 e^{(2r+\sigma^2)\delta t} - X_m^2 e^{2r\delta t} \\ &= X_m^2 e^{2r\delta t}\left(e^{\sigma^2\delta t} - 1\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Por otra parte, para el modelo discreto de Cox-Ross se tiene:

$$\mathbb{E}_d[X_{m+1}|X_m] = [pa + (1-p)b]X_m, \tag{3.19}$$

y

$$\mathbb{E}_d[X_{m+1}^2|X_m] = [pa^2 + (1-p)b^2]X_m^2, \tag{3.20}$$

entonces, al usar (3.20) e igualar (3.16) y (3.19)

$$Var_d[X_{m+1}|X_m] = X_m^2[pa^2 + (1-p)b^2 - e^{2r\delta t}]. \tag{3.21}$$

Tenemos hasta el momento las esperanzas y las varianzas de los dos modelos, el paso que sigue es la igualación de ellas:

$$pa + (1-p)b = e^{r\delta t} \tag{3.22}$$

y

$$pa^2 + (1-p)b^2 = e^{(2r+\sigma^2)\delta t}. \tag{3.23}$$

Para determinar de manera única los valores de a, b y p, se tiene que elegir una tercera ecuación como complemento de las dos anteriores. La tercera ecuación puede ser:

$$a = \frac{1}{b}, \tag{3.24}$$

ó

$$p = \frac{1}{2}. \tag{3.25}$$

Caso $a = \frac{1}{b}$.

De la ecuación (3.22) tenemos,

$$p = \frac{e^{r\delta t} - b}{a - b},$$

y de la ecuación (3.23)

$$p = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\delta t} - b^2}{a^2 - b^2},$$

entonces

$$\frac{e^{r\delta t} - b}{a - b} = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\delta t} - b^2}{a^2 - b^2},$$

como $(a^2 - b^2)$ se puede ver como $(a + b)(a - b)$, tenemos que

$$a + b = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\delta t} - b^2}{e^{r\delta t} - b}, \tag{3.26}$$

si sustituímos $a = \frac{1}{b}$ en (3.26)

$$\frac{1}{b} + b = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\delta t} - b^2}{e^{r\delta t} - b},$$

al multiplicar por b ambos lados de la igualdad

$$1 + b^2 = \frac{be^{(2r+\sigma^2)\delta t} - b^3}{e^{r\delta t} - b},$$

cuando se pasa todo del lado izquierdo resulta que

$$(e^{r\delta t} - b)(1 + b^2) + b^3 - be^{(2r+\sigma^2)\delta t} = 0,$$

con un poco de álgebra se llega a

$$b^2 - b(e^{-r\delta t} + e^{(r+\sigma^2)\delta t}) + 1 = 0,$$

por lo que b satisface la siguiente ecuación:

$$b^2 - 2Ab + 1 = 0, \tag{3.27}$$

donde $A = \frac{1}{2}\left(e^{-r\delta t} + e^{(r+\sigma^2)\delta t}\right)$,

como (3.27) es una ecuación de segundo grado

$$b = \frac{2A \pm \sqrt{4A^2 - 4}}{2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}.$$

66

A continuación se probará que a también satisface (3.27).

Si sustituimos $b = \frac{1}{a}$ en (3.26)

$$a + \frac{1}{a} = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\delta t} - \frac{1}{a^2}}{e^{r\delta t} - \frac{1}{a}},$$

al multiplicar por a y luego por $(e^{r\delta t} - \frac{1}{a})$ se tiene,

$$(a^2+1)(e^{r\delta t} - \frac{1}{a}) = ae^{(2r+\sigma^2)\delta t} - \frac{1}{a},$$

si se pasa todo del lado izquierdo resulta que

$$a^2 e^{r\delta t} + e^{r\delta t} - a - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - ae^{(2r+\sigma^2)\delta t} = 0,$$

un poco de álgebra nos lleva a

$$a^2 + 1 - ae^{-r\delta t} - ae^{(r+\sigma^2)\delta t} = 0,$$

entonces

$$a^2 - 2Aa + 1 = 0.$$

Como $a > b$ y $A > 0$,

$$a = A + \sqrt{A^2 - 1},$$

$$b = A - \sqrt{A^2 - 1},$$

y

$$p = \frac{e^{r\delta t} - b}{a - b}.$$

Observación 3.1 *Si δt es muy grande, p ó $(1-p)$ pueden llegar a ser negativos, razón por la cual el método binomial no funcionaría.*

Caso $p = \frac{1}{2}$.

Si $p = \frac{1}{2}$, de la ecuación (3.22) se tiene que

$$a + b = 2e^{r\delta t}, \tag{3.28}$$

y de la ecuación (3.23) obtenemos

$$a^2 + b^2 = 2e^{(2r+\sigma^2)\delta t}, \tag{3.29}$$

estas dos últimas ecuaciones son invariantes bajo intercambio de a y b, por lo que se buscarán soluciones de la forma $a = B + C$ y $b = B - C$.
Al usar la ecuación (3.28) se encuentra que $B = e^{r\delta t}$ y entonces

$$a^2 + b^2 = 2(B^2 + C^2) = 2(e^{2r\delta t} + C^2),$$

por la ecuación (3.29)

$$e^{2r\delta t} + C^2 = e^{(2r+\sigma^2)\delta t},$$

para conocer el valor de C solamente se tiene que hacer un despeje y como resultado

$$C = e^{r\delta t}\sqrt{e^{\sigma^2\delta t} - 1}.$$

Por lo tanto,

$$a = e^{r\delta t}\left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2\delta t} - 1}\right),$$
$$b = e^{r\delta t}\left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2\delta t} - 1}\right),$$

y

$$p = \frac{1}{2}.$$

Observación 3.2 *Si δt es muy grande, b puede llegar a ser negativo, razón por la cual el método binomial no funcionaría.*

En los dos casos propuestos $p = p^*$, esto se demuestra si se define r' como la tasa constante por cada período δt, ya que $(1 + r') = e^{r\delta t}$ y en la demostración de la proposición 2.3 se vió que $p^* = \frac{(1+r')-b}{a-b}$. Esto demuestra que $p = p^*$ en el primer caso, para ver esto en el segundo caso se tienen que sustituir los valores encontrados de a y b en

$$p^* = \frac{e^{r\delta t} - b}{a - b},$$

de donde resulta que

$$p^* = \frac{1}{2}.$$

En el primer caso se puede demostrar que p^* tiende a $1/2$ cuando δt tiende a 0. Debido a que los parámetros se obtienen por igualación de momentos la convergencia de p^* a $1/2$ no tiene porque ser rápida, por lo cual para δt muy pequeña se recomienda usar el caso en donde $p^* = \frac{1}{2}$.

3.4 Métodos numéricos en el caso browniano.

En la sección 3.1 se mencionó que el precio del bien subyacente puede ser modelado por un movimiento browniano geométrico, ahora de acuerdo a este modelo se presentarán dos métodos numéricos para valuar una opción europea. Es importante hacer notar que estos métodos son una alternativa a la fórmula de Black-Scholes cuando el flujo de efectivo que garantiza el call al tiempo de su vencimiento, es diferente a la parte positiva de la diferencia entre el precio del bien subyacente al tiempo de maduración y el precio de ejercicio, de otra forma se tendría que encontrar la solución de la integral (3.12) cambiando el valor de u_0, que en algunos casos no sería un cálculo fácil.

En la sección 3.5 se da un ejemplo en donde se utilizan estos métodos para valuar un call europeo, los resultados son comparados con los dos métodos anteriores de valuación.

3.4.1 Aproximación probabilística.

Considere un activo con riesgo tal que su precio sigue un movimiento browniano geométrico, para obtener el precio de una opción al tiempo t que tiene a este bien como subyacente y conociendo el precio del bien en este tiempo, no es necesario simular trayectorias brownianas ya que bajo un mercado viable y completo se puede demostrar que el precio está dado por la esperanza de un funcional del movimiento browniano al tiempo de maduración. Por lo tanto, el precio de la opción sólo depende de la ley de dicho movimiento y es esto lo que lleva a tener interés por aproximar la ley de un movimiento browniano estándar $(B_t)_{t\geq 0}$. En esta sección la aproximación de la ley de $(B_t)_{t\geq 0}$ se realiza por medio de un proceso $(B_t^N)_{t\geq 0}$ el cual toma valores en un espacio discreto. Para construir este proceso discreto, se cuenta con la siguiente porposición basada en el Teorema del Límite Central.

Proposición 3.1 *Sea λ un número real entre 0 y 1. Sea $(X_i)_{i\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tal que $\boldsymbol{P}[X_1 = \pm 1] = \frac{\lambda}{2}$ y $\boldsymbol{P}[X_1 = 0] = 1 - \lambda$. Sea*

$$S_n := X_1 + ... + X_n,$$

por convención $S_0 = 0$.
Sea N un número natural, se elige a $k = T/N$ como unidad para discretizar el tiempo y a $h = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}$ como unidad para discretizar el espacio. Por último se define

$$B_t^{(N)} := hS_{[t/k]},$$

donde $[t/k]$ es la parte entera de t/k.
Entonces la sucesión $(B_T^{(N)})_{N\geq 1}$ converge en distribución a B_T.

Demostración:
Como $\mathbb{E}[X_1] = 0$ y $\mathbb{E}[X_1^2] = \lambda$ se tiene que $Var[X_1] = \lambda$ y

$$\begin{aligned} B_T^{(N)} = hS_{[T/k]} &= \frac{\sqrt{T}(X_1 + ... + X_{[\frac{TN}{T}]})}{\sqrt{N\lambda}} \\ &= \frac{\sqrt{T}(X_1 + ... + X_N)}{\sqrt{N}\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

Por otro lado se sabe que B_T tiene una distribución $\mathcal{N}(0, T)$, entonces por el Teorema del Límite Central se afirma que $(B_T^{(N)})_{N\geq 1}$ converge en distribución a B_T. ♠

Con esta proposición lo único que se hace es aproximar a un movimiento browniano estándar en el tiempo de vencimiento de la opción, el proceso que se construye de ninguna manera pretende

70

modelar al precio del bien subyacente.
Como ya se mencionó anteriormente, para valuar una opción europea al tiempo cero es necesario calcular

$$\mathbb{E}^*[f(B_T)],$$

donde T es el tiempo de maduración de la opción. Con base en la proposición $A.3$ se puede afirmar que si f es una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ continua y acotada, una forma de aproximar esta esperanza es calcular para una N suficientemente grande

$$\mathbb{E}^*\left[f(B_T^{(N)})\right].$$

Para realizar este cálculo se define la función g por $g(x) = f(hx)$, donde h es la unidad para discretizar el espacio. Con esta definición tenemos que

$$\mathbb{E}^*\left[f(B_T^{(N)})\right] = \mathbb{E}^*\left[f(hS_N)\right] = \mathbb{E}^*[g(S_N)].$$

La siguiente proposición da un algoritmo que sirve para calcular $\mathbb{E}^*[g(S_N)]$.

Proposición 3.2 *Sea* $u(n,j) := \mathbb{E}[g(j+S_n)]$ *para* $j \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\begin{cases} u(0,j) &= g(j) \\ u(n,j) &= \frac{\lambda}{2}u(n-1,j-1) + (1-\lambda)u(n-1,j) + \frac{\lambda}{2}u(n-1,j+1) \ \textit{para}\ n \geq 1. \end{cases}$$

Demostración:
Por definición tenemos que

$$u(0,j) = \mathbb{E}[g(j+S_0)] = \mathbb{E}[g(j)] = g(j)$$

y para $n \geq 1$ se cumple que

$$\begin{aligned} u(n,j) &= \mathbb{E}[g(j+S_n)] \\ &= \mathbb{E}[g(j+S_{n-1}+X_n)] \\ &= \mathbb{E}\left[g(j+S_{n-1}+X_n)\mathbb{1}_{\{X_n=-1\}}\right] + \mathbb{E}\left[g(j+S_{n-1}+X_n)\mathbb{1}_{\{X_n=0\}}\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[g(j+S_{n-1}+X_n)\mathbb{1}_{\{X_n=1\}}\right]. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{E}$ el espacio de estados de la cadena $(S_n)_{n\geq 1}$. Ya que $(X_i)_{i\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, para $x_n = -1, 0, 1$ se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(j + S_{n-1} + X_n)\mathbb{1}_{\{X_n = x_n\}}\right] &= \sum_{s_{n-1}\in\mathcal{E}} g(j + s_{n-1} + x_n)\boldsymbol{P}(S_{n-1} + X_n = s_{n-1} + x_n) \\
&= \sum_{s_{n-1}\in\mathcal{E}} g(j + s_{n-1} + x_n)\boldsymbol{P}(S_{n-1} = s_{n-1})\boldsymbol{P}(X_n = x_n) \\
&= \boldsymbol{P}(X_n = x_n) \sum_{s_{n-1}\in\mathcal{E}} g(j + s_{n-1} + x_n)\boldsymbol{P}(S_{n-1} = s_{n-1}) \\
&= \boldsymbol{P}(X_n = x_n)\mathbb{E}[g(j + S_{n-1} + x_n)],
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
u(n,j) &= \frac{\lambda}{2}\mathbb{E}\left[g(j - 1 + S_{n-1})\right] + (1-\lambda)\mathbb{E}\left[g(j + S_{n-1})\right] \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}\mathbb{E}\left[g(j + 1 + S_{n-1})\right] \\
&= \frac{\lambda}{2}u(n-1, j-1) + (1-\lambda)u(n-1, j) + \frac{\lambda}{2}u(n-1, j+1).
\end{aligned}$$

♠

Con el algoritmo que da la proposición 3.2 se diseñó un programa en Matlab, tal que aproxima el precio de un put europeo al tiempo cero, con

$$g(x) = e^{-rT}\left(K - X_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma h x}\right)_+ .$$

Caben recordar dos cosas, la primera es que este programa se hizo bajo el supuesto de que el precio del bien subyacente sigue un movimiento browniano geométrico y la segunda cosa por recordar es que el algoritmo es estable sólo para $0 < \lambda \leq 1$.

Los argumentos que necesita este programa son los siguientes:

X0 Precio del bien subyacente al tiempo cero.

T Tiempo de vida de la opción.

K Precio de ejercicio.

r Tasa instantánea de interés.

sigma Volatilidad del precio del bien subyacente.

lambda $\lambda = 2\boldsymbol{P}[X_1 = \pm 1]$.

N Natural para fijar las unidades que discretizan el tiempo y el espacio. (ver prop. 3.1)

El código del programa es el siguiente:

```
function Esp=Esp(X0,T,K,r,sigma,lambda,N)
h=sqrt(T/(N*lambda));
%Calcula u(0,j)=g(j).
indices = [1:1:(2*N+1)];
X_T=X_0.*exp((mu-sigma.^2/2).*T+sigma.*h.*(indices-(N+1)));
u(N,:)= (exp(-r*T)).*max(K-X_T,0);
%Calcula de manera recursiva u(N-1,-1), u(N-1,0) y u(N-1,1).
for n=N-1:-1:1
    for j=1:2*n+1
          u(n,j)=lambda/2*[u(n+1,j)+u(n+1,j+2)]+(1-lambda)*u(n+1,j+1);
    end
end
%Calcula E[g(S_N)]=u(N,0)
Esp=lambda/2*[u(1,1)+u(1,3)]+(1-lambda)*u(1,2);
```

Si se quiere valuar la opción de venta para un tiempo t entre 0 y T, basta con poner como argumentos del programa a $(T-t)$ en lugar de T y a x_t el precio conocido del bien subyacente al tiempo t en vez de X_0.

Para valuar un call europeo por este método, es necesario calcular primero el precio del put con las mismas características y después utilizar la relación put-call. Esto se debe a que el flujo de efectivo que garantiza un put en el tiempo de su vencimiento es acotado, lo que permite hacer uso de la proposición $A.3$ para su valuación.

3.4.2 Método explícito de diferencias finitas.

Considere la forma general de la ecuación transformada de valuación Black-Scholes para un call europeo,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad para \ \ y \in \mathbb{R} \quad y \quad \tau > 0, \tag{3.30}$$

con condición inicial $u(y,0) = u_0(y)$ dada en (3.11).

Un método explícito de diferencias finitas aproxima la solución u en los puntos de una red, para lograr esto se discretiza el espacio con una unidad $\delta > 0$ entre los puntos L_1 y L_2, también se discretiza el tiempo con una unidad $h > 0$. Estas unidades son usadas para construir la red $\{(L_1 + j\delta, nh), j \in \mathbf{Z}, \mathrm{L}_1 + \mathrm{j}\delta \leq \mathrm{L}_2, \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ en $[L_1, L_2]\mathrm{x}\mathbb{R}^+$. La aproximación de $u(L_1 + j\delta, nh)$ será denotada por $U(j,n)$.

El método se basa en la aproximación de las cantidades $\frac{\partial}{\partial \tau}u(L_1 + j\delta, nh)$ y $\frac{\partial}{\partial y}u(L_1 + j\delta, nh)$ por combinaciones lineales de algunas $U(j,n)$'s, para toda j y para toda n.

Obsérvese que

$$\frac{\partial}{\partial \tau}u(L_1 + j\delta, nh) \approx \frac{U(j,n+1) - U(j,n)}{h},$$

similarmente

$$\frac{\partial}{\partial y}u(L_1 + j\delta, nh) \approx \frac{U(j+1,n) - U(j,n)}{\delta},$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(L_1 + j\delta, nh) &\approx \frac{\frac{U(j+1,n) - U(j,n)}{\delta^2} - \frac{U(j,n) - U(j-1,n)}{\delta^2}}{} \\
&\approx \frac{U(j+1,n) - 2U(j,n) + U(j-1,n)}{\delta^2}.
\end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en (3.30) tenemos que

$$\frac{U(j,n+1) - U(j,n)}{h} = \frac{U(j+1,n) - 2U(j,n) + U(j-1,n)}{\delta^2}, \tag{3.31}$$

74

con condición inicial

$$U_0(j) = u_0(L_1 + j\delta) = max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)(L_1+j\delta)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(L_1+j\delta)}, 0\right).$$

Sea

$$\lambda = \frac{2h}{\delta^2},$$

entonces cuando se despeja a $U(j, n+1)$ de (3.31) se llega a que

$$U(j,n+1) = \frac{\lambda}{2}U(j+1,n) + (1-\lambda)U(j,n) + \frac{\lambda}{2}U(j-1,n). \tag{3.32}$$

La razón por la que este método es llamado explícito es porque para toda n, $U(.,n+1)$ queda esplícitamente definida en términos de $U(.,n)$.

Es importante hacer notar que el algoritmo (3.32) sólo es estable para $0 < \lambda \leq 1$.

Para calcular el precio de un call europeo por medio de este método, tenemos que invertir los cambios de variables que se hicieron en la sección 3.2 cuando se transformó la ecuación de Black-Scholes en una ecuación de calor, entonces

$$y = \ln\left(\frac{X}{K}\right), \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \qquad y \qquad \nu(y,\tau) = \frac{C}{K},$$

al sustituir estas variables en (3.10) resulta que

$$C(X,t) = X^{\frac{1}{2}(1-k)}K^{\frac{1}{2}(1+k)}e^{-\frac{1}{8}(k+1)^2\sigma^2(T-t)}u\left(\log\left(\frac{X}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right),$$

por lo que sólo basta aproximar $u\left(\log\left(\frac{X}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)$ con el algoritmo (3.32) para tener el valor de $C(X,t)$.

En este caso $h = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{(T-t)}{N}$, $\delta = \sqrt{\frac{2h}{\lambda}}$ y las aproximaciones de u se realizan en la red:

$$\{(L_1 + j\delta, nh), j \in \mathrm{Z}, \mathrm{L_1 + j\delta \leq L_2, n \in \{0, 1, ..., N\}}\}$$

con $L_1 = \ln\left(\frac{X_0}{K}\right) - N\delta$ y $L_2 = \ln\left(\frac{X_0}{K}\right) + N\delta$.

Nótese que N es un natural que sirve para discretizar el intervalo $[0, \frac{1}{2}\sigma^2 T]$.

El siguiente programa aproxima el precio al tiempo cero de un call europeo por el método explícito de diferencias finitas. Los argumentos son los siguientes:

X0 Precio del bien subyacente al tiempo cero.

K Precio de ejercicio.

T Tiempo de vida de la opción.

r Tasa instantánea de interés.

sigma Volatilidad del precio del bien subyacente.

N Natural que sirve para discretizar el intervalo $[0, \frac{1}{2}\sigma^2 T]$.

delta Tamaño de la unidad que discretiza al espacio.

El código del programa es el siguiente:

```
function mexp_dif=mexp_dif(X0,K,T,r,sigma,N,delta)
z=(1/2)*sigma^2;
k=r/z;
h=z*T/N;
lambda=2*h/delta^2;
L_1=log(X0/K)-N*delta;
%Calcula U(j,0)
indices = [1:1:(2*N+1)];
X_T = L_1+indices.*delta;
U(:,1)=max(exp(1/2*(k+1).*(X_T)')-exp(1/2*(k-1).*(X_T)'),0);
%Calcula de manera recursiva U(N+1,N+1)=u(log(X0/K),1/2*sigma^2*T)
for n=2:N+1
   for j=n:(2*N+1)-(n-1)
      U(j,n)=lambda/2*[U(j+1,n-1)+U(j-1,n-1)]+(1-lambda)*U(j,n-1);
   end
end
```

```
%Calcula C(X0,0)
mexp_dif=X0^(1/2*(1-k))*K^(1/2*(1+k))*exp(-1/4*z*T*(k+1)^2)*U(N+1,N+1);
```

Si se quiere aproximar el precio de un call europeo al tiempo t con este programa, sólo se tiene que poner como argumento a $(T-t)$ en vez de T y a x_t el precio conocido del bien subyacente al tiempo t en lugar de X_0.

3.5 Comparación de métodos para valuación.

En esta última sección, a través de un ejemplo se comparan los cuatro métodos de valuación para una opción europea desarrollados en este trabajo.

Ejemplo 3.1 *Se desea saber el precio de un call europeo tal que el precio del bien subyacente el día de hoy es de \$12, el precio de ejercicio es de \$10 y el contrato vence dentro de seis meses. Para realizar la valuación, considérese una volatilidad de 0.20 y una tasa de interés instantánea de 0.05.*

Primero se realizó la valuación con el modelo de Cox-Ross, para ello se tuvieron que calcular tanto la tasa de interés por período como los parámetros del modelo de acuerdo a la sección 3.3. Estos cálculos, como lo muestra la siguiente tabla, varían según la unidad que discretiza al tiempo, es decir, dependen del número de subintervalos que se utilizan para dividir al intervalo $[t, T]$, donde t es el tiempo en el cual se desea conocer el precio y T es la fecha de vencimiento de la opción. Para el ejemplo, el intervalo a dividir es el $[0, \frac{1}{2}]$ y la unidad de discretización es $\frac{T}{N}$, donde N es el número de períodos en este intervalo.
Los resultados que muestra la siguiente tabla, se obtuvieron al considerar el caso $p^* = \frac{1}{2}$ y las aproximaciones al precio de la opción por este método se muestran en la tabla 2.

N	a	b	$\frac{r^{(2N)}}{2N}$
16	1.03698541	0.96614202	0.0015637213
32	1.02580500	0.97575810	0.0007815552
64	1.01807665	0.98270474	0.0003907013
128	1.01269826	0.98769240	0.0001953315
256	1.00893753	0.99125779	0.0000976610
512	1.00629919	0.99379846	0.0000488293
1024	1.00443961	0.99560486	0.0000244143

Tabla 1: Parámetros del modelo Cox-Ross.

Para hacer la valuación por medio de la fórmula de Black-Scholes, sólo hay que sustituir en ésta los datos que se tienen. El resultado que se obtuvo fue de **\$2.29524.**

En la siguiente tabla se muestran las aproximaciones que se hicieron para el precio del call europeo, por medio de los métodos binomial, probabilístico y el explícito de diferencias finitas. En el método probabilístico $\lambda = 2\boldsymbol{P}^*[X_1 = \pm 1]$ y en el método de diferencias finitas δ es la unidad para discretizar el espacio, es igual a $\sqrt{\frac{\sigma^2 T}{\lambda N}}$. Para los dos métodos se tomó $\lambda = 0.6$.

	Métodos			
N	**Binomial**	**Probabilístico**	**Dif. Finitas**	
		$\frac{\lambda}{2} = .3$	δ	Precio
16	2.29518226	2.29511	0.0456	2.92636
32	2.29350762	2.29456	0.0322	2.73358
64	2.29560062	2.29528	0.0228	2.60091
128	2.29495005	2.29528	0.0161	2.50929
256	2.29513997	2.29518	0.0114	2.44562
512	2.29520409	2.29525	0.0081	2.40166
1024	2.29520490	2.29524	0.0057	2.36988

Tabla 2: Aproximación al precio del call.

Cuando el precio del bien subyacente puede ser modelado de forma continua, definitivamente la forma más efectiva de valuar una opción europea con flujo de efectivo $\Phi(X_N) = (X_N - K)_+$ es con la fórmula de Black-Scholes. Si el flujo de efectivo cambia significativamente, con base a los resultados que muestra la tabla 2, los métodos de valuación con mejores resultados serían el método binomial y el probabilístico, el método explícito de diferencias finitas tiene una convergencia más lenta.

Con respecto a la rapidez con la que corren los programas, se observó que para N's pequeñas no hay mucha diferencia ya que las respuestas prácticamente son inmediatas. Para N's grandes, como por ejemplo para 1024, el método probabilístico es el más rápido aunque no difiere mucho del método binomial, pero el método explícito de diferencias finitas se tarda aproximadamente cinco veces más que los otros dos.

79

Conclusiones

Cuando ya se ha desarrollado la teoría necesaria para hacer la valuación de una opción, se ve claramente que este producto financiero sirve para cubrirse de un riesgo y no sólo para la especulación. Esto se debe a que el cálculo del precio justo de una opción toma en cuenta a las dos partes del contrato, al comprador de éste se le garantiza no pagar demás por el derecho de ejercicio y al vendedor se le garantiza que el dinero que reciba sea suficiente para seguir una estrategia tal que el valor de ésta al tiempo de vencimiento sea igual al monto que asegure el buen ejercicio de la opción.

Desde un punto de vista financiero, es muy lógico que el precio justo de una opción europea sea la esperanza del valor presente del flujo de efectivo que tendrá el comprador del contrato en la fecha de maduración, es una esperanza porque el flujo de efectivo es una función que depende del precio del bien subyacente al tiempo de vencimiento el cual es una variable aleatoria. Por lo tanto, el precio justo de una opción que se dedujo en el primer capítulo coincide con el lado práctico de las finanzas.

En esta tesis, para calcular la esperanza que da como resultado el precio justo de una opción europea, se trabajó con dos modelos para el precio del bien subyacente, el primero es el de Cox-Ross que corresponde a considerar un discreto de valores en tiempo y en espacio para el precio y el segundo es el modelo continuo de Black-Scholes. Para saber cual de estos dos modelos elegir al realizar la valuación de una opción, es necesario observar el comportamiento histórico del precio del bien subyacente, si el precio suele quedarse en un valor por un período relativamente largo de tiempo, entonces lo más conveniente es elegir el modelo de Cox-Ross. Por otra parte, si el precio tiende a cambiar continuamente se tendría que escoger el modelo de Black-Scholes. En la sección 3.5, para fines de ilustración, se asume que el modelo adecuado es el de Black-Scholes. El modelo de Cox-Ross sirvió en esa sección, para estudiar una aproximación a ese modelo continuo.

Para un caso real, si se ha decidido tomar al modelo de Cox-Ross para llevar a cabo la valuación es necesario determinar los parámetros a, b y p de acuerdo a la sección 3.3 para una δt que se adapte al comportamiento del precio del bien subyacente, recordar que δt es la unidad para discretizar el tiempo. Otra opción sería calcular a, b y p de acuerdo a observaciones históricas del precio del bien subyacente.

En caso de que uno decida trabajar con el modelo de Black-Scholes es importante tener bien claro quien es la función del flujo de efectivo que determina la opción, es importante porque la fórmula de Black-Scholes para un call europeo que se deduce en la sección 3.2, sólo es válida para un flujo de efectivo igual a la parte positiva de la diferencia entre el precio del bien subyacente al tiempo de vencimiento y el precio de ejercicio, si el flujo cambia entonces la fórmula ya no es válida. Para cambios muy pequeños se podría deducir con un procedimiento análogo al de la sección 3.2 una fórmula muy similar, pero si los cambios son significativos lo más conveniente es hacer uso de los métodos numéricos de la sección 3.4, sólo se tendría que cambiar en cualquiera de los dos programas la instrucción que calcula el flujo de efectivo. De estos dos métodos numéricos el probabilístico es mucho más eficiente que el método explícito de diferencias finitas, ya que tiene una mayor velocidad de convergencia al precio justo y el programa corre mucho más rápido.

Otra alternativa para realizar la valuación de una opción europea cuando se ha decidido trabajar con el modelo continuo, sería tomar el modelo de Cox-Ross como aproximación al modelo de Black-Scholes, de esta manera con una δt muy pequeña se calcularía el precio justo de la opción. De ser necesario, se puede cambiar en el programa de la subsección 2.3.2 la instrucción que calcula el flujo de efectivo en el tiempo de vencimiento.

Apéndice A

Procesos Estocásticos.

En este apéndice se enuncian los resultados utilizados en el desarrollo de la tesis concernientes al tema de procesos estocásticos, la mayoría de ellos se presenta junto con su demostración.
Primeramente, se define un proceso estocástico como una representación matemática de un fenómeno aleatorio en el tiempo, si el tiempo se maneja en forma discreta entonces el proceso es una sucesión de variables aleatorias y si el tiempo se considera en forma continua entonces tenemos una familia de variables aleatorias con índices en $\mathbb{R}^+ \cup 0$:
en el primer caso el proceso se puede ver como una función
$X : \mathbb{N} \cup 0 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $X(n,.) = X_n(.)$ *es una variable aleatoria para toda* $n \in \mathbb{N} \cup 0$,
en el segundo caso se puede ver como
$X : \mathbb{R}^+ \cup 0 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $X(t,.) = X_t(.)$ *es una variable aleatoria para toda* $t \in \mathbb{R}^+ \cup 0$
ó
$X : [0,T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $X(t,.) = X_t(.)$ *es una variable aleatoria para toda* $t \in [0,T]$.

Dentro de los procesos estocásticos a tiempo discreto se encuentran las cadenas de Markov discretas que se definen a continuación:

Definición A.1 *Una sucesión de variables aleatorias* $(X_n)_{n\geq 0}$ *definidas sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, *la cual toma valores en un espacio de estados* $\mathcal{E}$ *a lo más numerable, es* *una cadena de Markov si cumple que:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0] &= \boldsymbol{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n] \\ &= P_{n+1}(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

para todo $x_0, x_1, ..., x_{n+1} \in \mathcal{E}$ *y para toda* $n \in I\!N$.
La matriz $P_n = (P_n(i,j))_{i,j \in \mathcal{E}}$ *es llamada matriz de transición al tiempo* n*, si la matriz es la misma para toda* $n \in I\!N$ *se dice que la cadena es homogénea en el tiempo.*

Para una cadena de Markov discreta es fácil comprobar las siguientes propiedades:

1. para toda $n \in I\!N$ y para $x_0, x_1, ..., x_{n+1} \in \mathcal{E}$

$$\boldsymbol{P}[X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0] = \boldsymbol{P}[X_0 = x_0] P_1(x_0, x_1) P_2(x_1, x_2) \cdots P_n(x_{n-1}, x_n),$$

2. para $n < m$ y $x_0, x_1, ..., x_{n+1} \in \mathcal{E}$ se tiene

$$\boldsymbol{P}[X_m = x_m | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0] = \boldsymbol{P}[X_m = x_m | X_n = x_n].$$

La siguiente definición se da para el caso en donde el tiempo se maneja en forma discreta:

Definición A.2 .

a) Una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ *en* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *es una sucesión de sub*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$*, tal que* $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ *para toda* $n \in I\!N$.

b) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ *es una sucesión de variables aleatorias definidas en* Ω*, diremos que* $(X_n)_{n \geq 0}$ *es adaptada a la filtración* $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ *si* X_n *es* $\mathcal{F}_n$*-medible para toda* $n \in I\!N \cup 0$.

Análogamente, para el caso continuo se da la siguiente definicón:

Definición A.3 .

a) Una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es una familia de sub*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$*, tal que* $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ *si* $0 \leq s < t$.

b) Si $(X_t)_{t\geq 0}$ *es una familia de variables aleatorias definidas en* Ω*, diremos que* $(X_t)_{t\geq 0}$ *es adaptada a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* X_t *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para toda* $t \in \mathbb{R}^+ \cup 0$.

La definición que a continuación se presenta juega un papel muy importante en el desarrollo del primer capítulo, se utiliza para definir las estrategias en base a las cuales se hace tanto la valuación de una opción como la cobertura de la misma.

Definición A.4 *Una sucesión de variables aleatorias* $(X_n)_{n\geq 0}$ *adaptada a la filtración* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *es predecible si para toda* $n \geq 1$, X_n *es* $\mathcal{F}_{n-1}$*-medible y* X_0 *es* $\mathcal{F}_0$*-medible.*

Con la siguiente definición se da una generalización del concepto de probabilidad y esperanza condicional que se estudia en los cursos básicos y que es de mucha utilidad en este trabajo.

Definición A.5 *Sea* X *una variable aleatoria en* $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y sea* $\mathcal{G}$ *una sub*σ*-álgebra de* $\mathcal{F}$*. Se define* $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *como una variable aleatoria tal que*

(1) Y *es* $\mathcal{G}$*-medible y*

(2) $\int_A Y \, d\mathbb{P} = \int_A X \, d\mathbb{P} \qquad$ *para todo* $A \in \mathcal{G}$.

Si $X = \mathbb{1}_B$ *entonces* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] := \mathbb{P}[B|\mathcal{G}]$ *y se le llama "la probabilidad condicional de que ocurra* B *dado* $\mathcal{G}$*".*

El manejo de las esperanzas condicionales se basa en las siguientes propiedades, donde se supone que $\mathcal{G}$ es una subσ-álgebra de $\mathcal{F}$:

1. Si X es una variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible, entonces $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ c.s..
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}[X]$.

3. Si Z es $\mathcal{G}$-medible y acotada y el producto ZX pertenece a $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, entonces

$$\mathbb{E}[ZX|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \ c.s..$$

4. Para toda variable aleatoria Z $\mathcal{G}$-medible y acotada, tal que el producto ZX pertenece a $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se cumple que

$$\mathbb{E}[Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}[ZX].$$

5. Linealidad: para toda λ y μ en $\mathbb{R}$ se satisface que

$$\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y|\mathcal{G}] = \lambda\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mu\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \quad c.s..$$

6. Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$ c.s..

7. Si $\mathcal{C}$ es una subσ-álgebra de $\mathcal{G}$,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{C}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{C}] \quad c.s..$$

8. Si X es independiente de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ c.s..

9. Sea X una variable aleatoria con valores en un conjunto $\mathcal{E}$ a lo más numerable. Si $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra generada por una partición $(A_i)_{i\in I}$ finita o numerable de Ω, entonces

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i\in I} \mathbb{E}[X|A_i]\mathbb{1}_{A_i} \tag{A.1}$$

donde $\mathbb{E}[X|A_i] = \sum_{x\in\mathcal{E}} x\mathbb{P}[X = x|A_i]$.

Demostraciones:

1. Es inmediata de la definición de esperanza condicional.

2. Sea $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, entonces

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y d\mathbb{P},$$

por la definición de esperanza condicional

$$\int_{\Omega} Y d\boldsymbol{P} = \int_{\Omega} X d\boldsymbol{P}$$

y se sabe que

$$\int_{\Omega} X d\boldsymbol{P} = \mathbb{E}[X].$$

3. El producto $Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ es $\mathcal{G}$-medible, sólo basta demostrar que

$$\int_{A} Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} = \int_{A} ZX d\boldsymbol{P}$$

para todo $A \in \mathcal{G}$.

(a) Si $Z = \mathbb{1}_B$ con $B \in \mathcal{G}$ y si $A \in \mathcal{G}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \int_{A} Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} &= \int_{A} \mathbb{1}_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} \\ &= \int_{A\cap B} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} \\ &= \int_{A\cap B} X d\boldsymbol{P} \\ &= \int_{A} \mathbb{1}_B X d\boldsymbol{P}. \end{aligned}$$

(b) Si $Z = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbb{1}_{B_i}$ con $b_i \in \boldsymbol{R}$ y $B_i \in \mathcal{G}$ para $1 \leq i \leq n$, entonces para $A \in \mathcal{G}$ se satisface que

$$\begin{aligned} \int_{A} Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} &= \int_{A} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \mathbb{1}_{B_i}\right) \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i \int_{A} \mathbb{1}_{B_i} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} \end{aligned}$$

y por (a) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} b_i \int_{A} \mathbb{1}_{B_i} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} &= \sum_{i=1}^{n} b_i \int_{A} \mathbb{1}_{B_i} X d\boldsymbol{P} \\ &= \int_{A} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \mathbb{1}_{B_i}\right) X d\boldsymbol{P} \\ &= \int_{A} ZX d\boldsymbol{P}. \end{aligned}$$

Las variables aleatorias de esta forma se llaman funciones simples medibles.

(c) Si $Z \geq 0$ y Z es $\mathcal{G}$-medible existe una sucesión de funciones simples medibles $(Z_n)_{n\geq 1}$ tal que

i. $0 \leq Z_n \leq Z_{n+1} \leq Z$ para toda $n \in I\!N$ y

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n(\omega) = Z(\omega)$ para casi toda $\omega \in \Omega$.

Es claro que

$$|Z_n X| \leq Z|X| \in L^1$$

$$y \quad |Z_n I\!E[X|\mathcal{G}]| \leq Z|I\!E[X|\mathcal{G}]| \leq Z|X| \in L^1,$$

se puede entonces aplicar en los dos casos el Teorema de Convergencia Dominada.

Sea $A \in \mathcal{G}$,

$$\int_A Z I\!E[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A Z_n I\!E[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P}$$

al aplicar el resultado de (b) a la integral del lado derecho se tiene

$$\begin{aligned}\int_A Z I\!E[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} &= \lim_{n\to\infty} \int_A Z_n X d\boldsymbol{P} \\ &= \int_A \lim_{n\to\infty} Z_n X d\boldsymbol{P} \\ &= \int_A Z X d\boldsymbol{P}.\end{aligned}$$

(d) Si Z no es como en los incisos anteriores, entonces la podemos ver como $Z^+ - Z^-$, donde Z^+ es la parte positiva de Z y Z^- es el valor absoluto de la parte negativa de Z. Por lo cual

$$\begin{aligned}\int_A Z I\!E[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} &= \int_A \left(Z^+ - Z^-\right) I\!E[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} \\ &= \int_A Z^+ I\!E[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} - \int_A Z^- I\!E[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P},\end{aligned}$$

al aplicar el resultado de (c) a cada integral del lado derecho se tiene que

$$\int_A Z I\!E[X|\mathcal{G}]d\boldsymbol{P} = \int_A Z X d\boldsymbol{P}.$$

4. Por la propiedad 3

$$\mathbb{E}[Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[ZX|\mathcal{G}]]$$

y por la propiedad 2 se cumple que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[ZX|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[ZX].$$

5. $\lambda\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mu\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ es $\mathcal{G}$-medible y para $A \in \mathcal{G}$ se tiene que

$$\int_A (\lambda\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mu\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}])\, d\mathbf{P} = \lambda \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbf{P} + \mu \int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]d\mathbf{P},$$

por definición de esperanza condicional

$$\begin{aligned} \lambda \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbf{P} + \mu \int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]d\mathbf{P} &= \lambda \int_A X d\mathbf{P} + \mu \int_A Y d\mathbf{P} \\ &= \int_A (\lambda X + \mu Y) d\mathbf{P}. \end{aligned}$$

6. Sea $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ y supóngase que existe $A \in \mathcal{G}$ tal que $\mathbf{P}(A) > 0$ y $Y(\omega) < 0$ para cada $\omega \in A$, entonces

$$0 \leq \int_A X d\mathbf{P} = \int_A Y d\mathbf{P} < 0$$

que claramente es una contradicción.

7. $Z = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{C}]$ es $\mathcal{C}$-medible y para $A \in \mathcal{C}$ se cumple que

$$\int_A Z d\mathbf{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbf{P},$$

por la definición de $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ y porque $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbf{P} = \int_A X d\mathbf{P},$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{C}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{C}].$$

8. La $\mathbb{E}[X]$ es una constante, por lo tanto es $\mathcal{G}$- medible y para $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A \mathbb{E}[X] d\boldsymbol{P} = \mathbb{E}[X]\boldsymbol{P}(A).$$

Por otro lado,

$$\int_A X d\boldsymbol{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_A X d\boldsymbol{P}$$

y por independencia

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbb{1}_A X d\boldsymbol{P} &= \left(\int_\Omega \mathbb{1}_A d\boldsymbol{P}\right)\left(\int_\Omega X d\boldsymbol{P}\right) \\ &= \boldsymbol{P}(A)\mathbb{E}[X].\end{aligned}$$

9. Como los elementos de $\mathcal{G}$ son uniones ajenas de elementos de la partición $(A_i)_{i\in I}$, basta probar que para cada A_i se cumple lo siguiente:

$$\int_{A_i} \mathbb{E}[X|A_i] d\boldsymbol{P} = \int_{A_i} X d\boldsymbol{P}.$$

Veamos cuanto vale el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}\int_{A_i} \mathbb{E}[X|A_i] d\boldsymbol{P} &= \int_{A_i} \left(\sum_{x\in\mathcal{E}} x\boldsymbol{P}[X=x|A_i]\right) d\boldsymbol{P} \\ &= \boldsymbol{P}(A_i)\sum_{x\in\mathcal{E}} x\boldsymbol{P}[X=x|A_i] \\ &= \sum_{x\in\mathcal{E}} x\boldsymbol{P}[X=x, A_i].\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\int_{A_i} X d\boldsymbol{P} &= \int_{A_i} \left(\sum_{x\in\mathcal{E}} x\mathbb{1}_{(X=x)}\right) d\boldsymbol{P} \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{x\in\mathcal{E}} x\mathbb{1}_{(X=x)\cap A_i}\right) d\boldsymbol{P} \\ &= \sum_{x\in\mathcal{E}} x\boldsymbol{P}[X=x, A_i].\end{aligned}$$

♠

Proposición A.1 *Sea N un número natural. Si $(X_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E}$, entonces para toda $n \leq N$ y para toda función $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}[f(X_N)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X_N)|X_n],$$

donde $\mathcal{F}_n$ es la σ-álgebra generada por $X_0, X_1, ..., X_n$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \sigma(X_0, X_1, ..., X_n) \\ &= \sigma\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n : x_j \in \mathcal{E}, j = 0, 1, ..., n\}. \end{aligned}$$

De hecho, los cilindros finitodimensionales

$$\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\}_{(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathcal{E}^{n+1}}$$

forman una partición de Ω que genera a $\mathcal{F}_n$.
Sabemos por la propiedad (9) de la esperanza condicional que:

$$\mathbb{E}[f(X_N)|\mathcal{F}_n] = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[f(X_N)|C_i] \mathbb{1}_{C_i},$$

donde $(C_i)_{i \in I}$ es la familia numerable de todos los cilindros finitodimensionales.
Para un cilindro fijo

$$\mathbb{E}[f(X_N)|C_i] = \mathbb{E}[f(X_N)|X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0]$$

y como $(X_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov

$$\mathbb{E}[f(X_N)|C_i] = \mathbb{E}[f(X_N)|X_n = x_n].$$

Por otra parte, también por la propiedad (9) de la esperanza condicional sabemos que:

$$\mathbb{E}[f(X_N)|X_n] = \sum_{x_n \in \mathcal{E}} \mathbb{E}[f(X_N)|X_n = x_n] \mathbb{1}_{\{X_n = x_n\}},$$

90

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_N)|\mathcal{F}_n] &= \sum_{i\in I} \mathbb{E}[f(X_N)|C_i]\mathbb{1}_{C_i} \\
&= \sum_{i\in I} \mathbb{E}[f(X_N)|X_n = x_n]\mathbb{1}_{C_i} \\
&= \sum_{x_n\in\mathcal{E}} \mathbb{E}[f(X_N)|X_n = x_n]\mathbb{1}_{\{X_n=x_n\}} \\
&= \mathbb{E}[f(X_N)|X_n].
\end{aligned}$$

♠

A continuación se presenta la definición de una martingala que es fundamental para poder desarrollar la teoría necesaria para valuar una opción. En base a una martingala se definen los mercados en donde no existe oportunidad de arbitraje.

Definición A.6 *Una sucesión de variables aleatorias integrables $(M_n)_{n\geq 0}$ definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, adaptada a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ es una martingala si*

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} \quad c.s.$$

para toda n en $\mathbb{N}$.

Propiedades de una martingala:

1. Si $(M_n)_{n\geq 0}$ es una martingala

   $$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$$

   para toda n en $\mathbb{N}$.

2. $(M_n)_{n\geq 0}$ es una martingala si y sólo si

   $$\mathbb{E}[M_{n+j}|\mathcal{F}_n] = M_n \quad c.s.$$

   para toda $j \geq 0$.

3. La suma de dos martingalas es una martingala.

Demostraciones:

1. Por definición de Martingala, para toda $n \geq 1$ se cumple que:

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} \quad c.s.,$$

lo cual implica que la siguiente igualdad es verdadera

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[M_{n-1}],$$

por la propiedad 2 de la esperanza condicional se tiene

$$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_{n-1}],$$

y como esta última igualdad vale para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces se puede concluir que

$$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

2. Por la propiedad (1) de la esperanza condicional

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] = M_n \quad c.s.$$

y para $j \geq 1$ como $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+j-1}$ se satisface que

$$\mathbb{E}[M_{n+j}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+j}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_{n+j-1}],$$

por propiedades de la esperanza condicional y debido a que $(M_n)_{n\geq 0}$ es una martingala

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+j}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_{n+j-1}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+j}|\mathcal{F}_{n+j-1}]|\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[M_{n+j-1}|\mathcal{F}_n],
\end{aligned}$$

si $j = 1$ ya se tiene demostrado el resultado y si $j \geq 2$ se vuelve a condicionar la última esperanza pero ahora con $\mathcal{F}_{n+j-2}$ para tener

$$\mathbb{E}[M_{n+j}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+j-2}|\mathcal{F}_n],$$

este procedimiento se realiza hasta obtener

$$\mathbb{E}[M_{n+j}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n],$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}[M_{n+j}|\mathcal{F}_n] = M_n \quad c.s.$$

para toda $j \geq 0$.

La parte recíproca se demuestra tomando j=1.

3. Sean $(M_n)_{n\geq 0}$ y $(X_n)_{n\geq 0}$ dos martingalas. Por linealidad de la esperanza condicional se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n + X_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1} + X_{n-1} \quad c.s., \end{aligned}$$

además para toda $n \geq 0$, $M_n + X_n$ es una variable aleatoria integrable y la sucesión $(M_n + X_n)_{n\geq 0}$ es adaptada a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ya que por definición de martingala cada una de las sucesiones lo es.

♠

Los siguientes resultados se utilizan para demostrar la proposición 2.5, ésta se basa en el problema de Dirichlet para hacer la valuación de una opción que no es propiamente europea pero que sin embargo, se puede calcular su precio justo por medio del algoritmo que se da en el capítulo 2 para las opciones europeas.

Definición A.7 *La función $\tau : \Omega \to \bar{\mathbb{N}}$ es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si el conjunto $\{\omega : \tau(\omega) \leq n\}$ pertenece a $\mathcal{F}_n$ para toda $n \geq 0$.*

Proposición A.2 *Sea* $(X_p^{m,x'}, p \geq m)$ *una cadena de Markov con matriz de transición* P_p *al tiempo* p *y espacio de estados* $\mathcal{E}$, *tal que* $X_m^{m,x'} = x'$. *Sea* B *un subconjunto de* $\mathcal{E}$, *se define el tiempo de salida de* B *por* $\gamma_B^{m,x'} = min\{k \geq m, X_k^{m,x'} \notin B\}$.
Si N *es un número natural y se define* $\tau = \gamma_B^{m,x'} \wedge N$, *entonces* τ *es un tiempo de paro acotado con respecto a la filtración* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, *donde* $\mathcal{F}_n$ *es la* σ*-álgebra generada por* $X_0, X_1, ..., X_n$.

Demostración:
Probar que τ es acotado se reduce a examinar su definición, la cual nos dice que $\tau \leq N$. Para demostrar que τ es tiempo de paro se tiene que verificar que para $n \in \{m, ..., N\}$ el conjunto $\{\tau \leq n\} = \{\gamma_B^{m,x'} \wedge N \leq n\}$ pertenece a $\mathcal{F}_n$, esto es equivalente a demostrar que $\{\gamma_B^{m,x'} \leq n\} \cup \{N \leq n\}$ está en $\mathcal{F}_n$. Como $\mathcal{F}_n$ es $\sigma-$álgebra basta ver que $\{\gamma_B^{m,x'} \leq n\}$ y $\{N \leq n\}$ pertenecen a $\mathcal{F}_n$:

i) $\{\gamma_B^{m,x'} \leq n\} = \{inf\{k \geq m, X_k^{m,x'} \notin B\} \leq n\} = \cup_{k=m}^{n}\{X_k^{m,x'} \notin B\}$,
y para cada k de la unión $\{X_k^{m,x'} \notin B\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$, entonces $\{\gamma_B^{m,x'} \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

ii) $\{N \leq n\} = \{\omega : N(\omega) \leq n\} = \begin{cases} \emptyset & si\ N(\omega) > n \\ \Omega & si\ N(\omega) \leq n, \end{cases}$
por lo que $\{N \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Por lo tanto, τ es un tiempo de paro. ♠

Definición A.8 *Sea* τ *un tiempo de paro, se define a la* σ*-álgebra detenida al tiempo* τ *como:*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} \ : \ A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \ para\ toda\ n \in I\!N\}.$$

Lema A.1 *Sea* $(X_n)_{n\geq 0}$ *una martingala con respecto a la filtración* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. *Si* k *es un número natural y* τ *es un tiempo de paro tal que* $\tau \leq k$, *entonces*

$$I\!E[X_k|\mathcal{F}_\tau] = X_\tau \quad c.s.. \tag{A.2}$$

Demostración:
Primero se tiene que verificar que X_τ es $\mathcal{F}_\tau$-medible. Sea B un elemento de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, entonces para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq n\} &= \{X_\tau \in B\} \cap \left(\cup_{j=1}^{n}\{\tau = j\}\right)\\ &= \cup_{j=1}^{n}\left(\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau = j\}\right)\end{aligned}$$

y para cada j de la unión, el conjunto $\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau = j\}$ pertenece a $\mathcal{F}_j$ porque X_j es $\mathcal{F}_j$-medible y τ es un tiempo de paro, en consecuencia $\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq n\}$ pertenece a $\mathcal{F}_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, X_τ es $\mathcal{F}_\tau$-medible.
El paso que sigue es probar la igualdad (A.2). Se define para $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ el conjunto $E_j = \{w : \tau(\omega) = j\}$, entonces $\Omega = \cup_{j=1}^{k} E_j$ y para $A \in \mathcal{F}_\tau$

$$\begin{aligned}A \cap E_j &= A \cap (\{\tau \leq j\} \setminus \{\tau \leq (j-1)\})\\ &= A \cap (\{\tau \leq j\} \cap \{\tau \leq (j-1)\}^C)\\ &= A \cap \{\tau \leq j\} \setminus \{\tau \leq (j-1)\},\end{aligned}$$

por lo cual $A \cap E_j$ es $\mathcal{F}_j$-medible. Si a este último resultado le añadimos la hipótesis que se tiene de que la sucesión $(X_n)_{n\geq 0}$ es una martingala, entonces la siguiente igualdad es válida:

$$\int_{A\cap E_j} X_k d\boldsymbol{P} = \int_{A\cap E_j} X_j d\boldsymbol{P}$$

y por la definición de E_j se cumple que

$$\int_{A\cap E_j} X_k d\boldsymbol{P} = \int_{A\cap E_j} X_\tau d\boldsymbol{P},$$

al sumar en ambos lados de la igualdad sobre $j = 1, 2, \ldots, k$ se concluye que

$$\int_A X_k d\boldsymbol{P} = \int_A X_\tau d\boldsymbol{P}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_\tau] = X_\tau \quad c.s..$$

♠

El siguiente resultado es conocido como Teorema de Muestreo Opcional:

Teorema A.1 *Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Si τ_1 y τ_2 son dos tiempos de paro tales que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq k$, entonces*

$$\mathbb{E}[X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}] = X_{\tau_1} \quad c.s.. \tag{A.3}$$

Demostración:
En la prueba del Lema anterior se verificó que X_{τ_1} es $\mathcal{F}_{\tau_1}$-medible, por lo que sólo falta demostrar que la igualdad (A.3) es válida. Como $\tau_1 \leq \tau_2$ entonces $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$ y por la propiedad (7) de la esperanza condicional

$$\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{\tau_1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{\tau_2}]\mathcal{F}_{\tau_1}] \quad c.s.,$$

si aplicamos el Lema A.1 en ambos lados de la igualdad se concluye que

$$X_{\tau_1} = \mathbb{E}[X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}] \quad c.s..$$

♠

Por último, se presenta una proposición que es de mucha utilidad para el dasarrollo teórico del método probabilístico:

Proposición A.3 *Sea X una variable aleatoria y $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una súcesión de variables aleatorias, son equivalentes:*

(1) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

(2) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$, *para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada.*

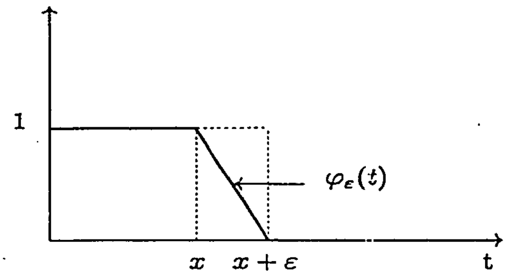
Demostración:
Primero se demostrará que (2) implica (1), para demostrar (1) es necesario probar que para toda x en el conjunto de continuidad de F_X (función de distribución de X) se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_n\leq x\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X\leq x\}}].$$

Para llegar a esta igualdad, se empieza por afirmar que para toda $\varepsilon > 0$ existe una función $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ continua tal que:

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \leq x \\ 0 & si \quad t \geq x + \varepsilon, \end{cases}$$

para $x \in C_{F_X}$, donde C_{F_X} es el conjunto de continuidad de F_X.
Si se desea probar la anterior afirmación sólo basta tomar $\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(x+\varepsilon-t)$ para $t \in [x, x+\varepsilon]$, tal como se muestra en la siguiente figura.



Por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X_n)] = \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X)]$$

y debido a que $\varphi_\varepsilon(t) \leq \mathbb{1}_{\{t \leq x+\varepsilon\}}$ tenemos que

$$\mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X)] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \leq x+\varepsilon\}}] = \mathbb{P}[X \leq x+\varepsilon] = F_X(x+\varepsilon),$$

pero también se cumple que $\mathbb{1}_{\{t\leq x\}} \leq \varphi_\varepsilon(t)$, de donde

$$\limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n \leq x] \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X_n)] \leq F_X(x+\varepsilon),$$

como estas desigualdades son válidas para toda $\varepsilon > 0$ y $x \in C_{F_X}$ podemos decir que

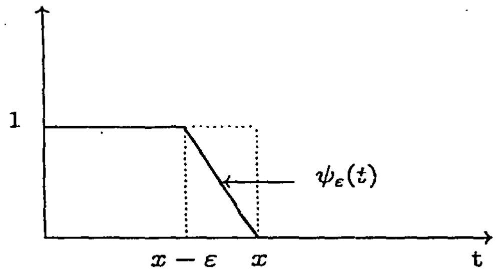
$$\limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x^+) = F_X(x).$$

Por otro lado, se demostrará que $F_X(x^-) \leq \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x)$, para lo cual se afirma que para toda $\varepsilon > 0$ existe una función $\psi_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,1]$ continua tal que

$$\psi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \leq x - \varepsilon \\ 0 & si \quad t \geq x, \end{cases}$$

para $x \in \mathcal{C}_{F_X}$.

La demostración de la afirmación anterior se puede realizar tomando $\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(x-t)$ para $t \in [x-\varepsilon, x]$, tal como lo muestra la siguiente figura.



Por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X_n)] = \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X)],$$

además $\psi_\varepsilon(t) \geq \mathbb{1}_{\{t \leq x-\varepsilon\}}$ por lo que

$$\mathbb{E}[\psi_\varepsilon(X)] \geq \boldsymbol{P}(X \leq x-\varepsilon) = F_X(x-\varepsilon)$$

pero también tenemos que $\mathbb{1}_{\{t\leq x\}} \geq \psi_\varepsilon(t)$, entonces

$$\liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \liminf_{n\to\infty} \boldsymbol{P}[X_n \leq x] \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[\psi_\varepsilon(X_n)] \geq F_X(x-\varepsilon),$$

ya que las desigualdades se valen para toda $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathcal{C}_{F_X}$ podemos decir que

$$\liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \geq \lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x-\varepsilon) = F_X(x^-) = F_X(x).$$

Hasta este momento se ha demostrado que

$$F_X(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x),$$

que es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

por lo tanto, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Para probar la parte recíproca, primero se demostrará que el resultado es válido para funciones

98

en $\mathcal{C}^1$ con soporte compacto ($\mathcal{C}^1_{\mathcal{K}}$).
Sea $f \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{K}}$, como sabemos que $f' \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ podemos decir lo siguiente

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\mathbf{R}} f(t)d\mathbf{P}_{X_n}(t) = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{-\infty}^{t} f'(u)du \right) d\mathbf{P}_{X_n}(t),$$

por Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{-\infty}^{t} f'(u)du \right) d\mathbf{P}_{X_n}(t) &= \int_{\mathbf{R}} f'(u) \left(\int_{u}^{\infty} d\mathbf{P}_{X_n}(t) \right) du \\ &= \int_{\mathbf{R}} f'(u)[1 - F_{X_n}(u)]du. \end{aligned}$$

Ahora se obtendrá el límite cuando n tiende a infinito de la última integral, para hacer esto se usará el Teorema de Convergencia Dominada con respecto a $d\mu = f'(u)du$. De la hipótesis se puede deducir fácilmente que $(1 - F_{X_n}(x))_n$ converge *c.s.* a $1 - F_X(x)$ y $|1 - F_{X_n}(x)| \leq 1$ para toda $n \geq 1$, por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f'(u)[1 - F_{X_n}(u)]du = \int_{\mathbf{R}} f'(u)[1 - F_X(u)]du = \mathbb{E}[f(X)],$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

para toda $f \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{K}}$.
El siguiente objetivo es demostrar el inciso (2) para $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, la prueba empieza con la afirmación de que para toda $\varepsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{K}}$ tal que $\|f - g\| = \sup_t\{|f(t) - g(t)|\} < \frac{\varepsilon}{4}$, bastaría tomar $g = f * \varphi$ donde φ es una función muy suave como $\exp^{\frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon}}$ y $(*)$ denota la convolución entre las dos funciones. Como $g \in \mathcal{C}^1_{\mathcal{K}}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$

$$|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces las siguientes desigualdes son válidas para $n \geq N$:

$$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[g(X_n)]|$$

$$\begin{aligned} &+ \; |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| \\ &+ \; |\mathbb{E}[g(X)] - \mathbb{E}[f(X)]| \\ &< \; \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

para toda $f \in C_{\mathcal{K}}$.
Con este resultado, la demostración de que la igualdad anterior vale para toda f en el conjunto de las funciones continuas y acotadas (C_{ac}), es consecuencia del corolario A.1 que se presenta más adelante. ♠

La siguiente proposición ayudará a probar el corolario A.1.

Proposición A.4 *Sea $(\boldsymbol{P}_n)_n$ una sucesión de medidas de probabilidad en $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{P}$ una medida de probabilidad en $\boldsymbol{R}$. Son equivalentes:*

(a) $\lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}} f d\boldsymbol{P}_n = \int_{\boldsymbol{R}} f d\boldsymbol{P}$ *para toda $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ continua y acotada.*

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}} f d\boldsymbol{P}_n = \int_{\boldsymbol{R}} f d\boldsymbol{P}$ *para toda $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ continua y de soporte compacto.*

Demostración:
Es inmediato decir que (a) implica (b) porque si una función $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ es continua de soporte compacto entonces f es continua y acotada.
Recíprocamente, sea $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ continua y acotada y sea $\varepsilon > 0$. Se puede trabajar bajo el supuesto de que $|f| \leq 1$, si esto no fuese cierto se sabe que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|f| \leq M$ y se trabajaría con $f_1 = f/M$.
Como $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}) = 1$, entonces existe $[-L, L]$ intervalo tal que

$$\boldsymbol{P}([-L, L]) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{5},$$

100

lo anterior es cierto porque $1 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}([-n,n])$. Por lo tanto existe φ continua de soporte compacto ($0 \leq \varphi \leq 1$) tal que

$$\int_{\boldsymbol{R}} \varphi d\boldsymbol{P} \geq \boldsymbol{P}([-L,L]) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{5}, \tag{A.4}$$

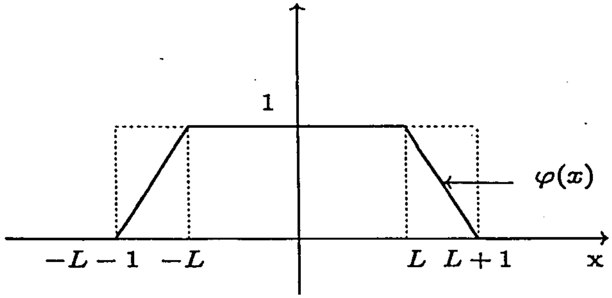
lo que implica que

$$\int_{\boldsymbol{R}} (1-\varphi) d\boldsymbol{P} \leq \frac{\varepsilon}{5}.$$

Para demostrar la existencia de φ, basta tomar

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [-L,L] \\ L+1-x & si\ x \in (L, L+1] \\ L+1+x & si\ x \in [-L-1,-L) \\ 0 & si\ x \in (-\infty,-L-1) \cup (L+1,\infty), \end{cases}$$

la figura muestra la función $\varphi(x)$.



Como ya se mencionó, φ es una función continua de soporte compacto y la hipótesis nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}} \varphi d\boldsymbol{P}_n = \int_{\boldsymbol{R}} \varphi d\boldsymbol{P},$$

entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se cumple que

$$\int_{\boldsymbol{R}} \varphi d\boldsymbol{P}_n > \int_{\boldsymbol{R}} \varphi d\boldsymbol{P} - \frac{\varepsilon}{20},$$

por $(A.4)$

$$\int_{\boldsymbol{R}} \varphi d\boldsymbol{P}_n > (1-\frac{\varepsilon}{5}) - \frac{\varepsilon}{20} = 1 - \frac{\varepsilon}{4},$$

lo que implica que

$$\int_{\boldsymbol{R}} (1-\varphi) d\boldsymbol{P}_n < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por otra parte, $\Phi = \varphi.f$ es continua de soporte compacto, por lo que existe $M \in I\!N$ tal que para $n \geq M$ se cumple que

$$\left|\int_{\boldsymbol{R}} \varphi.f d\boldsymbol{P}_n - \int_{\boldsymbol{R}} \varphi.f d\boldsymbol{P}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, si $n \geq M+N$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\boldsymbol{R}} f d\boldsymbol{P}_n - \int_{\boldsymbol{R}} f d\boldsymbol{P}\right| &\leq \left|\int_{\boldsymbol{R}} \varphi.f d\boldsymbol{P}_n - \int_{\boldsymbol{R}} \varphi.f d\boldsymbol{P}\right| \\
&\quad + \left|\int_{\boldsymbol{R}} (1-\varphi) f d\boldsymbol{P}_n\right| + \left|\int_{\boldsymbol{R}} (1-\varphi) f d\boldsymbol{P}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\boldsymbol{R}} (1-\varphi)|f| d\boldsymbol{P}_n + \int_{\boldsymbol{R}} (1-\varphi)|f| d\boldsymbol{P} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\boldsymbol{R}} (1-\varphi) d\boldsymbol{P}_n + \int_{\boldsymbol{R}} (1-\varphi) d\boldsymbol{P} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{5} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

lo que demuestra (a). ♠

El siguiente corolario servirá para concluir la demostración de la proposición $A.3$, la prueba de este corolario se basa en la proposición anterior.

Corolario A.1 *Si $(X_n)_n$ es una sucesión de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ y X es otra variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, son tales que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f(X_n) dQ = \int_{\Omega} f(X) dQ$$

para toda $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ continua y de soporte compacto.

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f(X_n)dQ = \int_{\Omega} f(X)dQ$$

para toda $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ continua y acotada.

Demostración:

Por hipótesis se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f(X_n)dQ = \int_{\Omega} f(X)dQ$$

para toda $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ continua y de soporte compacto.

En ambos lados de la igualdad se puede aplicar el Teorema de Cambio de Variable para tener que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}} f(x)dQ_{X_n} = \int_{\boldsymbol{R}} f(x)dQ_X \tag{A.5}$$

para toda $f \in \mathcal{C}_K$ y en donde dQ_{X_n} es la medida inducida por X_n, así como dQ_X es la medida inducida por X.

Con ayuda de la proposición $A.4$ podemos afirmar que $(A.5)$ se cumple para toda $f \in \mathcal{C}_{ac}$. Y nuevamente por el Teorema de Cambio de Variable, podemos ver a la igualdad anterior como

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f(X_n)dQ = \int_{\Omega} f(X)dQ$$

para toda $f \in \mathcal{C}_{ac}$. ♠

Definición B.1 *Para $\varphi \in \mathcal{S}$ se define la integral estocástica como*

$$\int_0^T \varphi(t)dB_t := \sum_{i=1}^{n} X_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Lema B.1 *Sea $\varphi \in \mathcal{S}$.*

$$\mathbb{E}[\int_0^T \varphi(t)dB_t] = 0 \quad y \quad \mathbb{E}[(\int_0^T \varphi(t)dB_t)^2] = \mathbb{E}[\int_0^T \varphi^2(t)dt].$$

Con el siguiente resultado queda determinada la integral estocástica para toda función en $\mathbb{H}^2$:

Teorema B.1 *Para todo $\varphi \in \mathbb{H}^2$ existe una sucesión $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{S}$ tal que φ_n converge a φ tanto en $\mathbb{H}^2$ como casi seguramente. Además en $\mathcal{S}^2(\Omega)$ se tiene que*

$$\int_0^T \varphi(t)dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \varphi_n(t)dB_t$$

y

$$\mathbb{E}[\int_0^T \varphi(t)dB_t] = 0, \qquad \mathbb{E}[(\int_0^T \varphi(t)dB_t)^2] = \mathbb{E}[\int_0^T \varphi^2(t)dt].$$

Es posible asociar un proceso a la integral estocástica de una función φ en $\mathbb{H}^2$, dicho proceso está definido por:

$$W_t(\varphi) := W(\varphi \mathbb{1}_{[0,t]}) = \int_0^t \varphi(s)dB_s,$$

una propiedad importante de este proceso se da en el teorema que a continuación se presenta:

Teorema B.2 *Si $\varphi \in \mathbb{H}^2$, entonces el proceso $\left(\mathbb{1}_{(0,t]}(s)\varphi(s,\omega)\right)_{t\geq 0}$ está en $\mathbb{H}^2$ y $\left(W_t(\varphi) = \int_0^T \mathbb{1}_{(0,t]}(s)\varphi(s,\omega)dB_s\right)_{t\geq 0}$ es una martingala continua para $t \in [0,T]$.*

Este resultado es fundamental para demostrar el teorema 3.1, al igual que lo es la fórmula de Itô. Para dar esta fórmula primero se tienen que definir los procesos de Itô:

Definición B.2 *Un proceso de Itô es un proceso continuo, adaptado y de cuadrado integrable, de la forma:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \varphi(s)dB_s \tag{B.1}$$

donde:

- X_0 *es una variable aleatoria* $\mathcal{F}_0$*-medible.*
- b *es un proceso adaptado, tal que* $\mathbb{E}[(\int_0^T |b(s)|ds)^2] < \infty$.
- B *es un movimiento browniano estándar, con valores en* $\mathbb{R}$.
- φ *es un proceso adaptado en* $\mathbb{H}^2([0,T] \times \Omega)$.

Teorema B.3 *Sea* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un proceso de Itô de la forma (B.1) y* f *una función en* $C^{1,2}_{ac}(\mathbb{R})$. $f(t, X_t)$ *es un proceso de Itô de descomposición:*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} b(s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\varphi(s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\varphi^2(s)ds. \end{aligned}$$

A la descomposición de $f(t, X_t)$ se le llama fórmula de Itô para el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$.
Un movimiento browniano que empieza en x se puede ver como un proceso de Itô, ya que

$$x + B_t = x + \int_0^t dB_s,$$

entonces la fórmula de Itô para un movimiento browniano que empieza en x es:

$$\begin{aligned} f(t, x + B_t) &= f(x) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x + B_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, x + B_s)ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, x + B_s)ds. \end{aligned}$$

En el capítulo 3, se demuestra que el modelo de Black-Scholes es la solución de una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x$$

que bajo la forma integral se expresa como

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \tag{B.2}$$

tal que cumple con los siguientes puntos:

- $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ son funciones definidas sobre $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$, conjuntamente medibles,
- existe K tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y toda $t \in [0,T]$

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y| \quad y$$

- para toda $T > 0$

$$\int_0^T |b(t,0)|^2 + |\sigma(t,0)|^2 dt < \infty.$$

El siguiente resultado es de utilidad en este trabajo porque exhibe propiedades acerca del modelo Black-Scholes, las cuales se usan como medio para hacer la valuación de una opción europea.

Teorema B.4 *Bajo las hipótesis precedentes, para toda condición inicial X_0, determinista o aleatoria, de cuadrado integrable, $\mathcal{F}_0$-medible,*

(a) existe una única solución de la ecuación (B.2) tal que pertenece a $\mathbb{H}^2([0,T] \times \Omega)$ para toda T y

(b) la solución de (B.2) es un proceso de Markov.

107

Bibliografía

[1] D. Lamberton, B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliquè á la finance.* Ellipses, 1-22:54-55, 1997.

[2] B.Lapeyre, A. Sulem, D. Talay. *Understanding numerical analysis for financial models.* 1-11:51:53,131:134, 1999

[3] N. El Karoui. *Calcul stochastique.* Ecole Polytechnique, 18-19:47:52-67:73-74, 1999.

[4] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne. *The mathematics of financial derivatives.* Cambridge University Press, 24-25:40-41:71-79:135-144:180-189, 1995.

[5] R.J. Elliott, P.E. Kopp. *Mathematics of financial markets.* Springer, 6-43, 1999.