31

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"LAS COMPLETACIONES DE Q RESPECTO A UNA VALUACION"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICA

PRESENTA:

LILIA MONTOYA GUTIERREZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. CARMEN GOMEZ LAVEAGA

2002

Universidad Nacional
Autónoma de
México

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Las completaciones de Q respecto a una valuación"

realizado por Montoya Gutiérrez Lilia

con número de cuenta 8117049-2 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dra. Carmen Gómez Laveaga

Propietario Mat. Clotilde García Villa

Propietario Mat. Luis Colavita Ferreyra

Suplente Dra. Bertha Tomé Arreola

Suplente Dr. Juan Morales Rodríguez

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a la Dra. Carmen Gómez Laveaga por su apoyo, paciencia y tiempo que dedicó para ayudarme en el trabajo de tesis.

Gracias a Coti por sus comentarios y su tiempo en la revisión de esta tesis.

Gracias a los profesores de la Facultad de Ciencias que me enseñaron la otra cara de las Matemáticas que no conocía, a todas las personas que en su momento me ayudaron prestándome su computadora y su tiempo, José Trinidad, Cesar, Alejandro.

Especialmente doy las gracias a mis queridos padres por su ayuda incondicional en todo momento.

Gracias a Salvador por estar a mi lado y tenerme confianza.

Finalmente gracias a mis pequeños Oliver Salvador y Adriana Pamela por ser mi inspiración, los quiero mucho.

ÍNDICE

INTRODUCCION

En este trabajo, construiremos , los números p-ádicos, donde p es un número primo .

Su utilidad en la Teoría de los Números es de gran importancia, como lo muestra por ejemplo el teorema de Hasse-Minkowski que dice :

"Una forma cuadrática con coeficientes enteros tiene solución en los números enteros si y sólo si tiene solución en los números reales y en los números p-ádicos para todo primo p" .

Fue el matemático alemán Kurt Hensel (1861- 1941) quien construyó, para cada número primo *p*, esta nueva clase de número y que fue inspirado en el hecho de que si una ecuación con coeficientes enteros $F(x_1, \ldots, x_1) = 0$ tiene solución en los enteros entonces la ecuación $F(x_1, \ldots, x_1) \equiv 0 \pmod{m}$ tiene solución para todo entero m y si $m = p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} \ldots p^{\alpha_r}$ es la descomposición de m como producto de primos enteros entonces la ecuación $F(x_1, \ldots, x_1) \equiv 0 \pmod{m}$ tiene solución si y sólo si $F(x_1, \ldots, x_1) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ tiene solución para cada $i=1, 2, \ldots, r$.

Hensel notó que la solubilidad de $F(x_1, \ldots, x_1) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ era equivalente a la solubilidad de la ecuación en los números p-ádicos.

La analogía que hay entre los números reales y los números p-ádicos puede ser desarrollada de muchas maneras, la construcción que aquí presentamos está hecha de manera análoga a la construcción de los números reales a partir de los números racionales, mediante sucesiones de Cauchy, dando para esto un significado diferente a la noción de convergencia, es

decir, cambiaremos la métrica usual en $\mathbb{Q}$ por otra, llamada la métrica p-ádica .

Como esta métrica tiene algunas propiedades que no tiene el valor absoluto usual, se obtienen resultados particulares, como por ejemplo el siguiente teorema que no es verdadero para la métrica usual :

Si $\boldsymbol{K}$ *es completo respecto a una valuación no-arquimediana* $|\ |$, *y si* $\{a_n\}$ *es una sucesión de elementos de* $\boldsymbol{K}$ *tal que* $lim_{n\to\infty}a_n=0$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *converge.*

CAPITULO I

VALUACIONES SOBRE UN CAMPO

En este capítulo estudiaremos una generalización del valor absoluto usual sobre $\mathbb{Q}$. Más concretamente, introduciremos la noción de valuación (de rango 1)sobre un campo K, entre las cuales el valor absoluto es un ejemplo. El objetivo principal de este capítulo será determinar todas las valuaciones sobre $\mathbb{Q}$ salvo cierta equivalencia que definiremos más adelante.

Sabemos que el valor absoluto sobre $\mathbb{Q}$ es la función

$$| \ | : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

y satisface las siguientes propiedades para $x, y \in \mathbb{Q}$

(1) $|x| \geq 0$ y $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$
(2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Extendemos ahora este concepto, y aunque nuestro objetivo es estudiar las valuaciones (de rango 1) sobre $\mathbb{Q}$, daremos la definición en general y algunos resultados para cualquier campo $\boldsymbol{K}$, que posteriormente aplicaremos al caso concreto de $\mathbb{Q}$.

<u>*Definición 1.1*</u> Una valuación sobre un campo $\boldsymbol{K}$ es una función

$$| \ | : \boldsymbol{K} \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface para toda $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}$:

$$\begin{aligned}
&(1)\ |a| \geq 0 \ \text{ y } \ |a| = 0 \text{ si y solo si } a = 0 \\
&(2)\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\
&(3)\ |a + b| \leq |a| + |b|
\end{aligned}$$

Ejemplos :

Son valuaciones sobre $\boldsymbol{K}$ las siguientes :

1. Sea $\boldsymbol{K}$ un campo, definimos :

$$| \ | : \boldsymbol{K} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$|a| = \begin{cases} 0 \text{ si } a = 0 \\ 1 \text{ si } a \neq 0, \end{cases}$$

y se denomina la ***valuación trivial.***

2. $\boldsymbol{K} = \mathbb{Q}$ y $|\ |$ la función de valor absoluto usual.

3. $\boldsymbol{K} = \mathbb{R}$ y $|\ |$ la función de valor absoluto usual.

4. $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ y $|\ |$ la función de valor absoluto usual dada por :

$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Definición 1.2 Una valuación sobre un campo $\boldsymbol{K}$ se llama no arquimediana si satisface :

$$|a+b| \leq \max\{|a|,|b|\}$$

Proposición 1.1 Si $|\ |$ es una valuación sobre un campo $\boldsymbol{K}$, entonces :

$$\begin{aligned} &i)\ |\pm 1| = 1 \\ &ii)\ |-a| = |a| \\ &iii)\ |a^{-1}| = \frac{1}{|a|},\ \text{si } a \neq 0 \\ &iv)\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ \text{si } b \neq 0 \end{aligned}$$

Además, si $|\ |_\infty$ denota el valor absoluto usual sobre $\mathbb{R}$, tenemos :

$$v)\ \big||a|-|b|\big|_\infty \leq |a+b|$$

$$vi)\ \big||a|-|b|\big|_\infty \leq |a-b|$$

Proposición 1.2 **Sea $|\ |$ una valuación sobre un campo K. Son equivalentes :**

(1) $|a| \leq 1 \Rightarrow |a+1| \leq 1$
(2) $|a+b| \leq max\{|a|,|b|\}$

Demostración
(1) $\Rightarrow$ (2) Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$|a| = max\{|a|,|b|\}$$

(i) Si $|a| = 0$, **entonces** $|b| = 0$ **y así,** $|a+b| = max\{|a|,|b|\} = 0$

(ii) Si $|a| \neq 0$, **como** $|b| \leq |a|$, **entonces** $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 1$ **y así, por (1),**

$$\left|\frac{b}{a}+1\right| \leq 1.$$

Entonces

$$\left|\frac{b+a}{a}\right| \leq 1$$

$$\frac{1}{|a|}\cdot|a+b| \leq 1$$

y de aquí tenemos que $|a+b| \leq |a| = max\{|a|,|b|\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $|a| \leq 1$. **Entonces tenemos, por hipótesis,**

$$|a+1| \leq max\{|a|,|1|\} = |1|$$

■

Proposición 1.3 Si $|\ |$ es una valuación no arquimediana, y si $|a| \neq |b|$, entonces

$$|a+b| = max\{|a|,|b|\}$$

Demostración

Supongamos que $|a| > |b|$. Entonces, por ser $|\ |$ no arquimediana

$$|a| = |a+b+(-b)| \leq max\{|a+b|,|-b|\}.$$

Pero

$$max\{|a+b|,|-b|\} = |a+b|,$$

ya que si

$$max\{|a+b|,|-b|\} = |b|$$

entonces tendríamos que $|a| \leq |b|$, contrario a la hipótesis. Por otro lado, tenemos que

$$|a+b| \leq max\{|a|,|b|\} = |a|$$

Por lo tanto

$$|a| \leq max\{|a+b|,|-b|\} = |a+b| \leq |a|$$

Concluimos entonces que $|a| = |a+b|$.

■

Observación: En el caso en que $|a| = |b|$, la proposición 1.3 no es verdadera como lo muestra el siguiente ejemplo :

Si $a = -b$, entonces $|a| = |-b| = |b|$, así que en el caso que $|a| \neq 0$ tenemos que $|a+b| = 0 \neq |a|$.

Teorema 1.1 Sea $|\ |$ una valuación no arquimediana sobre $\boldsymbol{K}$. Entonces, $V = \{a \in \boldsymbol{K} / |a| \leq 1\}$ es un anillo conmutativo con identidad y $P = \{a \in \boldsymbol{K} / |a| < 1\}$ es el único ideal maximal de V.

Demostración

Sean $a, b \in V$, entonces, como $|\ |$ es no arquimediana, tenemos que

$$|a+b| \leq max\{|a|,|b|\} \leq 1$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \leq 1 .$$

Por lo tanto, $a + b$ y $a \cdot b$ pertenecen ambos a V.

Además, $1 \in V$, así que V es un anillo con identidad .

Por otro lado :

(1) P es un ideal de V.

Si $a, b \in P$ y $r \in V$ entonces,

$$|a+b| \leq max\{|a|,|b|\} < 1$$

$$|a \cdot r| = |a| \cdot |r| < 1$$

(2) P es maximal

Si P' es un ideal de V tal que $P \subsetneq P' \subseteq V$ entonces $P' = V$. Ya que si $a \in P'-P$ entonces $|a| = 1$ y así $a^{-1} \in V$ y de aquí $1 \in P'$ y así $P' = V$.

$\blacksquare$

Recordemos que si R es un anillo y M es un ideal de R entonces M es un ideal maximal de R si y sólo si $R/_M$ es campo, así que en nuestro caso, por el teorema 1.1 $V/_P$ es campo.

El anillo V se llama el *anillo de valuación asociado a la valuación no arquimediana* $|\ |$ y el campo V/P se llama el *campo de clases residuales*.

El siguiente teorema es de gran importancia para nuestro estudio.

Teorema 1.2 Sea K un campo con una valuación $|\ |$, y supongamos que $|m| \leq d$ para todos los enteros m de K (aquí el conjunto de enteros se refiere a una imágen isomorfa de $\mathbb{Z}$, si la característica de K es cero, ó a una imágen isomorfa de $\mathbb{Z}_p$, si la característica es p). Entonces, la valuación $|\ |$ es no arquimediana.

Demostración

Sean $a, b \in K$, $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $|b| \leq |a|$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
|a+b|^n = |(a+b)^n| &= \left|\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \left|\binom{n}{i}\right| |a^{n-i}| |b^i| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |a|^n \\
&\leq \sum d \cdot |a|^n \\
&= (n+1) \cdot d |a|^n \\
&= (n+1) \cdot d \left(max\{|a|, |b|\}\right)^n
\end{aligned}
$$

Tomando la raíz n-ésima a ambos lados de la desigualdad tenemos

$$|a+b| \leq |a| \cdot ((n+1)d)^{1/n}$$

pero

$$lim_{n\to\infty}((n+1)\cdot d)^{1/n}=1$$

entonces

$$|a+b|\leq|a|=max\{|a|,|b|\}$$

■

<u>*Corolario 1.2*</u> Si $\boldsymbol{K}$ es un campo de característica distinta de cero y $|\ |$ es una valuación sobre $\boldsymbol{K}$ entonces, $|\ |$ es no arquimediana.

Demostración

Sea p la característica de $\boldsymbol{K}$ y sea $m\in\mathbb{Z}$ con $0\leq m\leq p\text{-}1$, entonces

$$|m|\leq|1|+\ldots+|1|\leq p\text{-}1$$

Por el teorema 1.2, $|\ |$ es no arquimediana.

■

<u>*Corolario 1.3*</u> Si $\boldsymbol{K}=\mathbb{Z}_p$, la única valuación es la trivial.

Demostración

Como la característica de $\boldsymbol{K}$ es distinta de cero entonces cualquier valuación sobre K es no-arquimediana, así que

$$|x|=|1+\ldots+1|\leq max\{|1|,\ldots,|1|\}=1$$

para toda $x\in\mathbb{Z}_p$. (*)

Por otro lado, no puede suceder que $|x| < 1$, ya que si esto sucediera para $x \neq 0$ entonces $1 < |x^{-1}|$ y esto es imposible por (*). De aquí obtenemos que $|x| = 1$, para todo $x \neq 0$ en $\mathbb{Z}_p$.

■

Definición 1.3 Sea K un conjunto. Una función $d: K \times K \to \mathbb{R}$ se llama métrica si para $x, y, z \in K$ se satisface :

i) $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
ii) $d(x, y) = d(y, x)$
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Como en el caso del valor absoluto usual sobre $\mathbb{R}$, cada valuación sobre un campo K induce una métrica en K :

Sea $|\ |$ una valuación sobre K.

Definimos

$$d : K \times K \to \mathbb{R}$$

como sigue :

$$d(x, y) = |x - y|$$

Claramente d es una métrica en $\in K$

Así que dada una valuación $|\ |$ sobre K, podemos considerar a K como un espacio métrico, con la métrica inducida por $|\ |$.

Esto nos permite trabajar con el concepto de convergencia de una sucesión, de Cauchy, etc. en ***K***.

Definición 1.4 Sea ***K*** un campo y $|\ |$ una valuación sobre ***K***. La sucesión $\{a_n\}$ de elementos de ***K*** se llama de Cauchy con respecto a la valuación $|\ |$, si para cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ si $n, m >$N.

Definición 1.5 La sucesión $\{a_n\}$ se llama nula con respecto a la valuación $|\ |$, si para cualquier número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que $|a_n| < \varepsilon$ para todo n > N.

Sean $|\ |_1$ y $|\ |_2$ dos valuaciones no triviales sobre ***K***.

Definición 1.6 Dos valuaciones no triviales $|\ |_1$ y $|\ |_2$ son equivalentes, y lo denotaremos por $|\ |_1 \approx |\ |_2$, si $|a|_1 < 1$ implica $|a|_2 < 1$.

Teorema 1.3 Si $|\ |_1 \approx |\ |_2$ entonces $|a|_1 = 1$ implica $|a|_2 = 1$.

Demostración

Supongamos que $|a|_1 = 1$, como $|\ |_1$ es no trivial, existe b ε ***K*** tal que $|b|_1 < 1$ (esta b siempre existe, ya que si tuviéramos c ε ***K*** tal que $|c|_1 > 1$ entonces $|c^{-1}|_1 < 1$).

$$|a^n b|_1 = |a|_1^n |b|_1 < 1,$$

y como $| \ |_1 \approx | \ |_2$, entonces

$$|a^n b|_2 < 1$$

así que

$$|a|_2 < \left(\frac{1}{|b|_2}\right)^n$$

tomando el limite cuando $n \to \infty$ tenemos $|a|_2 \leq 1$.

Ahora, si hacemos lo mismo para a^{-1} obtenemos

$$|a^{-1}|_2 \leq 1$$

y de aquí concluimos que

$$|a|_2 = 1.$$

■

<u>Teorema 1.4</u> La relación $\approx$ es de equivalencia.

Demostración

Claramente $\approx$ es reflexiva y transitiva .
Veamos que es simétrica.

Supongamos que $| \ |_1 \approx | \ |_2$.
Supongamos que $|a|_2 < 1$. Debemos probar que $|a|_1 < 1$.

Si $|a|_1 \geq 1$, entonces $|a^{-1}|_1 \leq 1$ y de aquí

$$|a^{-1}|_1 = 1 \quad \text{o} \quad |a^{-1}|_1 < 1.$$

Veamos que es imposible cualquiera de estas dos últimas afirmaciones y así tendríamos entonces que $|a|_1 < 1$.

(1) Si $|a^{-1}|_1=1$, el teorema 1.3 nos diría entonces que $|a^{-1}|_2 = 1$, lo que no puede ser ya que esto implicaría que $|a|_2 = 1$.

(2) Si $|a^{-1}|_1<1$, como $| \ |_1 \approx | \ |_2$, entonces $|a^{-1}|_2 < 1$ y de aquí $|a|_2 > 1$ que contradice a la hipótesis.

Por lo tanto $|a|_1<1$ y así $| \ |_2 \approx | \ |_1$.

■

Teorema 1.5 Si $| \ |_1 \approx | \ |_2$ entonces $| \ |_2 = | \ |_1^{\gamma}$ para alguna $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

Demostración

Sea $a \varepsilon K$, $a \neq 0$ y $b \varepsilon K$ tal que $|b|_1 > 1$ y fijemosla.

Entonces $|a|_1 = |b|_1^{\alpha}$ donde

$$\alpha = \frac{\log |a|_1}{\log |b|_1}$$

Ahora, sean $n, m \ \varepsilon \ \mathbb{Z}$ tal que $n/m > \alpha$.

$$|a|_1 = |b|_1^{\alpha} < |b|_1^{n/m}$$

y así

$$\left|\frac{a^m}{b^n}\right|_1 < 1$$

y como $| \ |_1 \approx | \ |_2$, entonces

$$\left|\frac{a^m}{b^n}\right|_2 < 1$$

y asi

$$|a|_2 < |b|_2^{n/m} \quad \text{para toda } n, m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n/m > \alpha .$$

Análogamente, para $\dfrac{n}{m} < \alpha$, tenemos $|a|_2 > |b|_2^{n/m}$ y así obtenemos $|a|_2 = |b|_2^{\alpha}$.

Entonces

$$\alpha = \frac{\log|a|_1}{\log|b|_1} = \frac{\log|a|_2}{\log|b|_2}$$

y así

$$\log |a|_2 = \frac{\log|b|_2}{\log|b|_1} \cdot \log|a|_1$$

Tomando $\mu = \dfrac{\log|b|_2}{\log|b|_1}$ tenemos que $|a|_2 = |a|_1^{\mu}$ para cualquier $a \in K$, $a \neq 0$.

Además $|0|_2 = |0|_1^{\mu}$

■

Teorema 1.6 **Son equivalentes las siguientes afirmaciones :**

1) $|\ |_1 \approx |\ |_2$

2) $\{a_n\}$ **es una sucesión nula respecto a** $|\ |_1$ **si y sólo si** $|\ |_2$ **es una sucesión nula respecto a** $|\ |_2$.

Demostración

(1) $\Rightarrow$ (2)

Supongamos $|\ |_1 \approx |\ |_2$. **Por el teorema 1.5** $|\ |_2 = |\ |_1^{\gamma}$. **Sea** $\{a_n\}$ **una sucesión nula respecto a** $|\ |_1$, **y sea** $\varepsilon > 0$ **sabemos que** $\sqrt[\gamma]{\varepsilon}$ **existe N∈ℕ tal que** $|a_n|_1 < \sqrt[\gamma]{\varepsilon}$ **para cada** $n > N$.

Por lo tanto $|a_n|_2 = |a_n|_1^{\gamma} < \varepsilon$ **para cada** $n > N$.

Concluimos así que $\{a_n\}$ **es nula respecto a** $|\ |_2$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sea $|a|_1 < 1$.

Entonces $\{a^n\}$ **es nula respecto a** $|\ |_1$ **y así por hipótesis** $\{a^n\}$ **es nula respecto a** $|\ |_2$. **Entonces, dada** $\varepsilon = 1$ **existe N tal que** $|a|_2^n = |a^n|_2 < 1$ **para cada n>N.**

De aquí obtenemos que $|a|_2 < 1$ **y así** $|\ |_1 \approx |\ |_2$.

■

CAPITULO II

COMPLETACION DE UN CAMPO

El campo $\boldsymbol{Q}$ con el valor absoluto usual no es un campo completo. Si consideramos $\boldsymbol{Q}$ con el valor absoluto usual, podemos ver que existen sucesiones de Cauchy que no convergen . Recordando nuestros cursos de análisis, mediante un proceso de "completación" construimos el campo de números reales (respecto al valor absoluto usual) en el cual cada sucesión de Cauchy converge. En este capítulo estudiaremos la completación de un campo respecto a una valuación dada

Definición 2.1 Sea $\boldsymbol{K}$ un campo y $|\,|$ una valuación sobre $\boldsymbol{K}$. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de $\boldsymbol{K}$. Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ converge a un elemento $a \in \boldsymbol{K}$, y en este caso lo denotaremos $lim_{n \to \infty} a_n = a$, si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para toda $n > N$.

Definición 2.2 Una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a una valuación $|\,|$ si, para todo $\varepsilon > 0$ existe una N en los naturales tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$, para todo m, $n > N$.

Proposición 2.1 Si $\{a_n\}$ es de Cauchy entonces es acotada .

Demostración

Sea $\varepsilon = 1$. En la definición de sucesión de Cauchy encontramos que existe algún N tal que $|a_m - a_n| < 1$ para $m, n > N$.

En particular

$$|a_m| - |a_{N-1}| \leq |a_m - a_{N-1}| < 1$$

$$|a_m| \leq 1 + |a_{N+1}|$$

Sea $B = max\{|a_m| \; / \; m \leq N+1\}$.

Entonces $1+B$ es la cota de la sucesión ya que

$$|a_m| = \begin{cases} 1+B \\ B < 1+B \end{cases}$$

para toda $m > N$.

Así pues, $\{a_m \; / \; m < N\}$ está acotada ; puesto que los a_i restantes son en número finito, toda la sucesión esta acotada.

■

<u>*Definición 2.3*</u> El campo *K* se llama completo respecto a la valuación $| \; |$ si cada sucesión de Cauchy en *K* respecto a $| \; |$ tiene un límite en *K*.

De la misma manera que se define convergencia de una serie infinita en $\boldsymbol{R}$ respecto al valor absoluto usual, lo podemos hacer para un campo completo respecto a una valuación y es válido también el resultado de que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Sin embargo recordemos que el

inverso de este resultado no es cierto en $\mathbb{R}$ respecto al valor absoluto usual, consideremos la serie armónica como ejemplo (ver apéndice). Pero en el caso en que $|\ |$ es no arquimediana , este resultado si es válido.

Definición 2.4 Dada una sucesión $\{a_n\}$ usaremos la notación $\sum_{n=p}^{q} a_n \quad (p \leq q)$ para expresar la suma $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$. A $\{a_n\}$ le asociamos una sucesión $\{s_n\}$, donde

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

A los números s_n se les llama sumas parciales de la serie

Definición 2.5 Sea K un campo y $|\ |$ una valuación sobre K. Sea $\{s_n\}$ una sucesión de elementos de K . Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y si existe el $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ como un número real, entonces la serie $\sum a_n$ se llama convergente y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = s$$

Teorema 2.1 Si K es completo respecto a una valuación no-arquimediana $|\ |$, y si $\{a_n\}$ es una sucesión de elementos de K tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración

Supongamos $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ y consideremos $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales. Si $n > m$ tenemos que

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq \max\{|a_i| \ / \ i = m+1, \ldots, n\} \to 0$$

Veamos que $\{s_n\}$ es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos, entonces, que existe N tal que $|a_n| < \varepsilon$ si $n > N$.

Si $n > m > N$, entonces

$$|s_n - s_m| \leq max\{|a_i| \,/\, i = m+1,\ldots,n\} < \varepsilon$$

Como $\boldsymbol{K}$ es completo, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

■

Definición 2.6 **Sea $\hat{K}$ un campo y $|\;|$ una valuación sobre $\hat{K}$ y $\boldsymbol{K}$ subcampo de $\hat{K}$. Se dice que $\boldsymbol{K}$ es denso en $\hat{K}$ si para cada $a \in \hat{K}$ y $\varepsilon > 0$, existe $a' \in \boldsymbol{K}$ tal que $|a'-a| < \varepsilon$.**

Definición 2.7 **Sea $(\boldsymbol{K}, |\;|)$ un campo valuado. Un campo $\hat{K}$ ~~en~~ con una valuación $|\;|$^ es una completación del campo valuado $(\boldsymbol{K}, |\;|)$ si existe un morfismo de campo**

$$\varphi : \boldsymbol{K} \rightarrow \hat{K}$$

tal que :

(1) $\hat{K}$ es completo respecto a $|\;|$^
(2) $\varphi(\boldsymbol{K})$ es denso en $\hat{K}$
(3) Para todo $x \in \boldsymbol{K}$, $|x| = |\varphi(x)|$^

Dado el campo $\boldsymbol{K}$ y $|\;|$ una valuación sobre $\boldsymbol{K}$, construiremos la completación de $\boldsymbol{K}$ respecto a esta valuación, es decir, construiremos a continuación un campo $\hat{K}$, completo tal que $\boldsymbol{K}$ es isomorfo a un subcampo denso de $\hat{K}$ y más aún este isomorfismo preservará distancia (isometría).

Sea $A = \{\{a_n\} / \{a_n\}$ es sucesion de Cauchy en K respecto a $|\ |\}$.

Definimos en A una suma y un producto como sigue :

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad \{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$$

Estas dos operaciones están bien definidas en A como lo muestra la siguiente :

<u>*Proposición 2.2*</u> Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones de Cauchy en K, respecto a $|\ |$, entonces $\{a_n\} + \{b_n\}$ y $\{a_n\} \cdot \{b_n\}$ también lo son.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Existen N_1 y N_2 números naturales tales que :

$|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ y $|b_r - b_s| < \varepsilon/2$ para todo $n, m > N_1$ y para todo $r, s > N_2$.

Sea $N = max\{N_1, N_2\}$ y $n, m > N$.

Entonces

$$|a_n + b_n - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\therefore \{a_n + b_n\} \text{ es de Cauchy.}$$

Por otro lado, como $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son de Cauchy, por la proposición 2.1 entonces son acotadas.

Entonces, existen M_1, $M_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$|a_n| < M_1, \qquad |b_n| < M_2$$

para toda n.

Así que, dada $\varepsilon > 0$, existen N_1 y N_2 números naturales tales que

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M_1} \quad \text{y} \quad |b_r - b_s| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M_2}$$

para todo $n, m > N_1$ y para todo $r, s > N_2$.

Sea $N = max\{N_1, N_2\}$ y $n, m > N$.

Entonces

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - a_m b_m| &= |(a_n - a_m) b_n + (b_n - b_m) a_m| \\
&\leq |a_n - a_m| \cdot |b_n| + |b_n - b_m| \cdot |a_m| \\
&< |a_n - a_m| \cdot M_1 + |b_n - b_m| \cdot M_2 \\
&< \frac{\varepsilon}{2M_1} \cdot M_1 + \frac{\varepsilon}{2 M_2} \cdot M_2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.2 (A, $+$, $\cdot$) es un anillo con identidad y $J=\{\{a_n\}\in A \,/\, \{a_n\}$ es nula$\}$ es un ideal maximal de A, y por lo tanto $A\,/\,J$ es un campo.

Demostración

Claramente (A, $+$, $\cdot$) es un anillo donde el neutro aditivo es la sucesión constante cero y el elemento identidad es la sucesión constante 1.

Demostraremos ahora que J es un ideal maximal de A.

a) J es un ideal de A.

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son nulas entonces $\{a_n+b_n\}$ es nula, ya que

$$|a_n+b_n|\leq|a_n|+|b_n|.$$

Claramente la sucesión constante cero es nula.

Si $\{a_n\}\in J$ y $\{c_n\}\in$ A entonces $\{c_n\}\cdot\{a_n\}\in J$ ya que, como $\{c_n\}$ es de Cauchy entonces está acotada, digamos por M, entonces

$$|c_n a_n|\leq M|a_n|$$

b) J es maximal

Supongamos que I es un ideal de A tal que $J\subset I$ y $J\neq I$.

Veremos que $I=A$.

Sea $\{a_n\} \in I$ y $\{a_n\} \notin J$. Entonces $\{a_n\}$ no es nula, por lo que existen $\varepsilon > 0$ y un natural N tal que $|a_n| \geq \varepsilon$ para toda $n > N$, porque de otra manera tendríamos que para cada $\varepsilon > 0$ y cada N existe, $n > N$ tal que $|a_n| < \varepsilon$. (*)

Por otro lado como $\{a_n\}$ es de Cauchy, sabemos que dada $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{para todo } n, m > N$$

Así que para cada $m > N$

$$|a_m| \leq |a_n| + |a_n - a_m| < 2\varepsilon$$

donde n tiene la propiedad (*).

Esto último nos dice que $\{a_n\}$ es nula, lo cual contradice la hipótesis.

Así que, como $\{a_n\}$ no es nula, a partir de algún entero N, $a_n \neq 0$ entonces definimos :

$$b_n = \begin{Bmatrix} 0 \text{ si } n \leq N \\ \dfrac{1}{a_n} \text{ si } n > N \end{Bmatrix}$$

Esta sucesión $\{b_n\}$ es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$.

Existen $\varepsilon' > 0$ y un natural N_1 tal que

$$|a_n| \geq \varepsilon \text{ para } n > N_1$$

Es decir, $\left|\frac{1}{a_n}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ para $n > N_1$

Por otro lado dada $\varepsilon'^2 \cdot \varepsilon > 0$ existe un natural N_2 tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon'^2 \cdot \varepsilon$$

si $n, m > N_2$ (por ser $\{a_n\}$ de Cauchy).

Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$ y sean $n, m > N$ tenemos

$$\begin{aligned} |b_n - b_m| &= \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right| = \left|\frac{a_n - a_m}{a_n a_m}\right| \\ &= \frac{1}{|a_n| \cdot |a_m|} \cdot |a_n - a_m| \\ &< \frac{1}{\varepsilon'^2} \cdot \varepsilon'^2 \cdot \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{b_n\}$ es de Cauchy y así $\{b_n\} \in$ A.

Observemos que $\{b_n\} \cdot \{a_n\} = \{0,0,\ldots,0,1,1,\ldots\} = \{1,1,\ldots\} - \{1,1,\ldots 1,0,0,\ldots\}$

Como I es un ideal y $\{a_n\} \in I$ y por ser $\{1,1,\ldots,1,0,0,\ldots\}$ una sucesión nula entonces pertenece a I.

Concluimos de aquí que $\{1, 1, \ldots\}$ pertenece a I y así $I = A$.

Por lo tanto J es un ideal maximal de A y entonces $\widetilde{k}=A/J$ es un campo.

■

Introduciremos ahora una valuación sobre $\widetilde{k}$.

<u>*Definición 2.8*</u> Sea $\alpha=\{a_n\}+J\in\widetilde{k}$, definimos

$$|\ |':\widetilde{k}\to\mathbb{R}$$

dada por

$$|\alpha|'=\lim_{n\to\infty}|a_n|$$

En el siguiente teorema veremos que $|\ |':\widetilde{k}\to\mathbb{R}$ está bien definida, es decir, que efectivamente $\lim_{n\to\infty}|a_n|$ no depende del representante que tomemos y es una valuación sobre $\widetilde{k}$.

<u>*Teorema 2.3*</u> Sea $\widetilde{k}=A/J$. Entonces

(1) $\lim_{n\to\infty}|a_n|$ existe para cada $\{a_n\}\in A$

(2) Si $\alpha=\{a_n\}+J$ y $\beta=\{b_n\}+J$ y $\alpha=\beta$ entonces $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}|b_n|$

(3) $|\ |':\widetilde{k}\to\mathbb{R}$ dada por $|\alpha|'=\lim_{n\to\infty}|a_n|$ donde $\alpha=\{a_n\}+J$ es una valuación sobre $\widetilde{k}$

Demostración

(1) Por (vi) de la proposición 1.1. tenemos

$$\left\| a_n \right| - \left| a_m \right\|_\infty \leq \left| a_n - a_m \right|$$

lo cual implica que $\{|a_k|\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, y por lo tanto

$$\lim_{k \to \infty} |a_k|$$

existe

(2) Si $\alpha = \beta$ entonces $\{a_n\}$-$\{b_n\}$= $\{a_n - b_n\} \in J$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$$

y así

$$\lim_{n \to \infty} |a_n - b_n| = 0$$

Usando nuevamente *(vi)* de la proposición 1.1 tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \left\| a_n \right| - \left| b_n \right\|_\infty = 0$$

y entonces

$$|\alpha|' = \lim_{n \to \infty} |a_n| = \lim_{n \to \infty} |b_n| = |\beta|'$$

(3) $|\ |$ es una valuación sobre $\widetilde{k}$.

Sea $\alpha = \{a_n\} + J$. Como $|a_n| \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$|\alpha|' = lim_{n\to\infty} |a_n| \geq 0$$

Además $lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ si y sólo si $\{a_n\} \in J$, es decir,

$$lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \text{ si y sólo si } \alpha = 0.$$

(ii) Sean

$$\alpha = \{a_n\} + J \quad \text{y} \quad \beta = \{b_n\} + J$$

$$|\alpha \cdot \beta|' = lim_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n| =$$

$$lim_{n\to\infty} |a_n| \cdot lim_{n\to\infty} |b_n| =$$

$$|\alpha|' \cdot |\beta|'$$

(iii) Sea

$$|\alpha + \beta|' = lim_{n\to\infty} |a_n + b_n| \leq lim_{n\to\infty} (|a_n| + |b_n|) =$$

$$lim_{n\to\infty} |a_n| + lim_{n\to\infty} |b_n| =$$

$$|\alpha|' + |\beta|'$$

■

Teorema 2.4 Sea $\boldsymbol{K}$ un campo y $|\ |$ una valuación sobre $\boldsymbol{K}$. Existe un campo $\widetilde{k}$, una valuación $|\ |'$ sobre $\widetilde{k}$ y una función $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{K} \to \widetilde{k}$ tal que :

(1) i es un morfismo de campos (y por lo tanto un isomorfismo sobre $i(\boldsymbol{K})$).
(2) i $(\{a \cdot b\} + J)$ es denso en $\widetilde{k}$.
(3) $|\, i\,(a)\,|' = |a|$. $\forall\ a \in \boldsymbol{K}$. (Isometría)
(4) $(\widetilde{k}, |\ |')$ es completo

Demostración

Sea $\widetilde{k} = {}^{A}\!/\!_{J}$, como se definió en el teorema 2.2, $|\ |'$ la valuación (el teorema 2.3 nos asegura que lo es) definida en 2.8.

Definimos

$$i : \boldsymbol{K} \to \widetilde{k}$$

como $i(a) = \{a\} + \boldsymbol{J}$, donde $\{a\}$ denota la sucesión constante igual a a. Entonces $\widetilde{k}$, $|\ |'$ e i satisfacen las condiciones del teorema :

(1) i es claramente un morfismo de campos.

$$\begin{aligned} i\,(a+b) &= \{a+b\} + J = (\{a\} + J\,) + (\{b\} + J\,) = i(a) + i(b) \\ i\,(a \cdot b) &= \{a \cdot b\} + J = (\{a\} + J\,) \cdot (\{b\} + J) = i(a) \cdot i(b) \\ i(1) &= \{1\} + J \end{aligned}$$

Como todo morfismo de campos es inyectivo, entonces $\boldsymbol{i}$ es un isomorfismo sobre su imagen $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{K})$.

(2) $i(\boldsymbol{K})$ es denso en $\widetilde{k}$.

Sea $\alpha \in \widetilde{k}$, $\alpha = \{a_n\} + J$ y sea $\varepsilon > 0$.

Demostraremos que existe un elemento $\beta \in i(K)$ tal que $|\alpha - \beta|' < \varepsilon$.

Como $\{a_n\}$ es de Cauchy, dada $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$.

Consideremos $\beta = \{a_N\} + J$, donde $\{a_N\}$ es la sucesión constante igual a a_N. Entonces $\beta \in i(K)$ ya que $\beta = i(a_N)$ y además

$$|\alpha - \beta|' = lim_{m \to \infty} |a_N - a_m| \leq \varepsilon$$

Por lo tanto $i(\widetilde{k})$ es denso en $\widetilde{k}$.

(3) $|\, i(a)\, |' = |a|$ para toda $a \in K$.

Sea $\alpha \in i(K)$. Entonces $\alpha = i(a) = \{a\} + J$ donde $a \in K$

$$|\, i(a)\, |' = lim_{m \to \infty} |a| = |a|$$

(4) $(\widetilde{k}, |\;|')$ es completo.

Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\widetilde{k}$. Como $i(K)$ es denso en $\widetilde{k}$, para cada n, existe

$$\beta_n = \{b_n, b_n, \ldots, b_n, \ldots\} + J \in i(K)$$

tal que

$$|\alpha_n - \beta_n|' < 1/n.$$

Ahora, sea $\alpha = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\} + J$.

Afirmamos que $\alpha \in \widetilde{k}$ y $lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$

Para ver que $\alpha \in \widetilde{k}$ debemos demostrar que $\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ es de Cauchy en $\boldsymbol{K}$.

Notemos que

$$\beta_n - \beta_m = \{b_n - b_m, b_n - b_m, \ldots, b_n - b_m, \ldots\} + J$$

y por lo tanto

$$|\beta_n - \beta_m|' = |b_n - b_m|$$

Sea $\varepsilon > 0$, existen N_1 y N_2 números naturales tales que

$\frac{1}{N_1} < \varepsilon/3$ por la propiedad arquimediana de los reales

$$|\alpha_n - \alpha_m|' < \varepsilon/3$$

para todo $n, m > N_2$.

Esta N_2 existe ya que $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Entonces, tomando $N = max\{N_1, N_2\}$, tenemos que si $n, m > N$, entonces

$$|b_n - b_m| = |\beta_n - \beta_m|'$$

$$\leq |\beta_n - \alpha_n|' + |\alpha_n - \alpha_m|' + |\alpha_m - \beta_m|'$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} \\
&< \frac{1}{N_1} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{N_1} \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\{b_n\}$ es de Cauchy.

Para ver $lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$, basta demostrar que $lim_{n\to\infty}\beta_n = \alpha$ debido a la siguiente desigualdad

$$|\alpha - \alpha_n|' \le |\alpha - \beta_n|' + |\beta_n - \alpha_n|'$$

Por último, que $lim_{n\to\infty}\beta_n = \alpha$ es inmediato ya que

$$|\alpha - \beta_n|' = lim_{k\to\infty}|b_k - b_n|$$

y por lo tanto

$$lim_{n\to\infty}|\alpha - \beta_n| = lim_{n\to\infty} lim_{k\to\infty}|b_k - b_n| = 0$$

■

<u>*Proposición 2.3*</u> Si $\boldsymbol{K}$ es denso en $\boldsymbol{K_1}$, entonces, para todo $\alpha \in \boldsymbol{K_1}$ existe una sucesión de elementos de $\boldsymbol{K}$ que convergen a α.

Demostración

Como $\boldsymbol{K}$ es denso en $\boldsymbol{K_1}$ para $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_k \in \boldsymbol{K}$ tal que $|\alpha - \alpha_k| < \frac{1}{k}$ y de aquí $\{\alpha_k\}$ converge a α.

■

Teorema 2.5 (unicidad) Sea $\boldsymbol{K}$ un campo y $|\ |$ una valuación sobre $\boldsymbol{K}$. Sean K_1 y K_2 campos completos respecto a las valuaciones $|\ |_1$ y $|\ |_2$ respectivamente, tales que $\boldsymbol{K}$ es denso en K_1 y K_2 y $|a| = |a|_1 = |a|_2$ para cada $a \in \boldsymbol{K}$. Entonces existe un isomorfismo, $f\colon K_1 \to K_2$ que es una isometría y tal que $f(a) = a$ para $a \in \boldsymbol{K}$.

Demostración

Dado cualquier elemento $\alpha \in K_1$, por ser $\boldsymbol{K}$ denso en K_1, existe una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de K que convergen a α (proposición 2.10).

Como K también está contenido en K_2 y K_2 es completo entonces

$$lim_{n \to \infty} a_n$$

existe en K_2, respecto de $|\ |_1$ y como aquí usamos el hecho de que $|a| = |a|_1 = |a|_2$ para todo $a \in \boldsymbol{K}$ entonces también es de Cauchy respecto de $|\ |_2$. Por lo tanto converge en K_2

Sea

$$lim_{n \to \infty} a_n = \alpha', \ \alpha' \in K_2$$

Definimos

$$f\colon K_1 \to K_2$$

por

$$f(\alpha) = \alpha',$$

es decir,

$$f(\lim_{K_1} a_n) = \lim_{K_2} a_n$$
$$\quad n \to \infty \qquad\quad n \to \infty$$

donde el límite dentro del paréntesis es en K_1 y el otro límite en K_2.

Debemos demostrar :

(i) f está bien definida, es decir, si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ en K_1, con a_n, b_n $\in K$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ en K_2.

(ii) f es un isomorfismo de campos.

(iii) f es una isometría, es decir, $|\alpha|_1 = |f(\alpha)|_2$ para todo $\alpha \in K_1$.

(iv) $f(a) = a$ para todo $a \in \boldsymbol{K}$.

Demostración

(i) Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

para todo en K_1 y,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha' \text{ en } K_2.$$

Probaremos que $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha'$

Sea $\varepsilon > 0$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha'$ en K_2, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha'|_2 < \varepsilon/3$ para toda $n > N_1$.

También existen N_2 y N_3 números naturales tales que

$$|a_n - \alpha|_1 < \varepsilon/3$$

para todo $n > N_2$ y,

$$|b_n - \alpha|_1 < \varepsilon/3 \text{ para toda } n > N_3.$$

Sea

$$N = max\ \{ N_1,\ N_2,\ N_3 \}.$$

Entonces, para toda $n > N$ tenemos

$$|\alpha' - \mathrm{b}_n|_2 \leq |\alpha' - a_n|_2 + |a_n - b_n|_2 = |\alpha' - a_n|_2 + |a_n - b_n|_1$$

$$\leq |\alpha' - a_n|_2 + |a_n - \alpha|_1 + |\alpha - b_n|_1$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

(ii) Claramente f es morfismo ya que si

$$lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\ ,\ lim_{n\to\infty} b_n = \beta \text{ en } K_1 \text{ y,}$$
$$lim_{n\to\infty} a_n = \alpha',\ lim_{n\to\infty} b_n = \beta' \text{ en } K_2$$

entonces

$$f(\alpha + \beta) = f(lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = lim_{n\to\infty} a_n + lim_{n\to\infty} \mathrm{b}_n$$

$$= \alpha' + \beta' = f(\alpha) + f(\beta)$$

Análogamente sucede lo mismo para el producto.

Recordemos que los morfismos de campo son inyectivos .

Por último f **es sobre, pues si** $\alpha' \in K_2$, **entonces** $\alpha' = lim\ a_n$ **en** K_2 **donde** $a_n \in K$. **Si** $\alpha = lim_{n\to\infty} a_n$ **en** K_1, **entonces** $f(\alpha) = \alpha'$.

Entonces f **es un** ***isomorfismo.***

(iii) Veremos ahora que $|\alpha|_1 = |f(\alpha)|_2$ **para todo** $\alpha \in K$.

Sean $\alpha \in K_1$, $lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $lim_{n\to\infty} b_n = 0$, **donde** $a_n, b_n \in K$

$$|\alpha|_1 \leq |\alpha - a_n|_1 + |a_n - b_n|_1 + |b_n|_1 = |\alpha - a_n|_1 + |a_n - b_n|_2 + |b_n|_2$$

Tomando límite a ambos lados tenemos

$$|\alpha|_1 \leq lim_{n\to\infty} |a_n - b_n|_1$$

Por otro lado

$$|a_n - b_n|_1 \leq |a_n - \alpha|_1 + |\alpha|_1 + |b_n|$$

Nuevamente tomando límite

$$lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| \leq |\alpha|_1$$

por lo tanto,

$$|\alpha|_1 = lim_{n\to\infty} |a_n - b_n|$$

Análogamente, si $lim_{n\to\infty} a_n = \alpha' = f(\alpha)$, **obtenemos**

$$|f(\alpha)|_2 = lim_{n\to\infty}|a_n - b_n|$$

Concluimos entonces que $|\alpha|_1 = |f(\alpha)|_2$.

(iv) Como, para todo $a \in K$, $lim_{n\to\infty} a = a$ tanto en K_1 como en K_2, tenemos que $f(a) = a$ para todo $a \in K$.

■

<u>*Teorema 2.6*</u> Si $|\ |$ es una valuación no arquimediana sobre K, entonces $|K| = |\hat{k}|$, donde $\hat{k}$ es la completación de K y donde $|K| = \{|x| / x \in K\}$

Demostración

Debemos demostrar que para cada $\alpha \in \hat{k}$, existe $a \in K$ tal que $|\alpha| = |a|$.
Sea $\alpha \in \hat{k}$, si $\alpha = 0$ entonces $|\alpha| = 0$.

Supongamos que $\alpha \neq 0$ y sea $\{a_n\}$ una sucesión en K tal que

$$\alpha = lim_{n\to\infty} a_n .$$

Sea n tal que $|\alpha - a_n| < |\alpha|$. Entonces, como $|\ |$ es no arquimediana y por la proposición 1.2 tenemos que

$$|a_n| = |\alpha + (a_n - \alpha)| = max\{|\alpha|, |a_n - \alpha|\} = |\alpha|$$

escogiendo n tal que $|a_n - \alpha| < |\alpha|$.

Entonces

$$|a_n| = |\alpha| \quad \text{donde } a_n \in K.$$

■

CAPITULO III

COMPLETACIONES SOBRE $\mathbb{Q}$

En este capítulo aplicaremos los conceptos vistos en el capítulo I para el caso en que $K = \mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales. Estudiaremos las valuaciones sobre $\mathbb{Q}$ y las caracterizaremos todas, salvo la relación de equivalencia definida en 1.5. Encontraremos también las completaciones de $\mathbb{Q}$ respecto a estas valuaciones, que son por supuesto, la determinada por el valor absoluto usual y para cada número primo p, las determinadas por la valuación *p-ádica*, cuya definición presentamos a continuación.

Definición 3.1 Sea $c \in \mathbb{R}$, donde $0 < c < 1$, y p un número primo. Para cada número racional x, sea

$$|x|_p = \begin{cases} c^{\alpha} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donde $x = p^{\alpha}\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a \cdot b$.

Nota 1. Los números c y p dados en la definición estarán fijos a través de esta discusión .

Nota 2. $|p|_p = c$

Proposición 3.1 Sean $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ y $x = p^{\alpha}\dfrac{a}{b}$, donde $(a, p) = (b, p) = 1$ y $|\ |_p$ como en la definición 3.1. Entonces

(1) $\alpha > 0$ si y sólo si $|x|_p < 1$
(2) $\alpha = 0$ si y sólo si $|x|_p = 1$
(3) $\alpha < 0$ si y sólo si $|x|_p > 1$

Demostración
Como $0 < c < 1$ entonces $\log c < 0$ el resultado se obtiene de

(1) $\alpha \cdot \log c < 0$ *si y sólo si* $\alpha > 0$
(2) $\alpha \cdot \log c = 0$ *si y sólo si* $\alpha = 0$
(3) $\alpha \cdot \log c > 0$ *si y sólo si* $\alpha < 0$

■

Teorema3.1 La función $|\ |_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada en la definición 3.1, es una valuación no-arquimediana sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración
Primero veremos que $|\ |_p$ es una valuación.

(1) Es claro de la definición que $|x|_p \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{Q}$, y que $|x|_p = 0$ si y solo si $x = 0$.

(2) Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ con $x = p^{\alpha}\dfrac{a}{b}$, $y = p^{\beta}\dfrac{c}{d}$, donde $\underline{p \nmid a \cdot b \cdot c \cdot d}$

Tenemos que

$$x \cdot y = p^{\alpha+\beta}\frac{ac}{bd},$$

Entonces

$$|x \cdot y|_p = c^{\alpha+\beta} = c^{\alpha} \cdot c^{\beta} = |x|_p \cdot |y|_p$$

(3) Sea $x = p^{\alpha} \frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a$ y $p \nmid b$.

Para probar que $|\ |_p$ es no-arquimediana, probaremos la afirmación equivalente $|x|_p \leq 1 \Rightarrow |1+x|_p \leq 1$ dada en la proposición 1.2 .

Supongamos entonces que, $|x|_p \leq 1$. Por la proposición 3.1 anterior tenemos $\alpha \geq 0$.

Entonces

$$1 + x = 1 + p^{\alpha} \frac{a}{b} = \frac{b + p^{\alpha} a}{b}$$

y como $(b, p) = 1$ por lo tanto $|1+x|_p \leq 1$.

∎

Los siguientes lemas nos serán de utilidad para el teorema que les sigue :

<u>*Lema 3.1*</u> Si $0 < r \leq s$ y para $i = 1, \ldots, n$ $a^i \in R^+$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r}$$

Dcmostración

Sea $d = \sum_{i=1}^{n} a_i^r$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^s}{d^{1/r}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^s}{d^{s/r}}\right)^{1/s}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^r}{d}\right)^{s/r}\right)^{1/s}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^r}{d}\right)^{1/s}$$

donde $a_i^r/d \leq 1$, y donde $r \leq s$.

Pero

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^r}{d} = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} a_i^r = 1$$

De aquí que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{1/s} \leq d^{1/r} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r} \qquad \blacksquare$$

Lema 3.2 Si $0 < \alpha \leq 1$ y $b_i \in \mathbb{R}^+$ para $i=1,\dots,n$, entonces

$$\left(b_1 + b_2 + \dots + b_n\right)^{\alpha} \leq b_1^{\alpha} + \dots + b_n^{\alpha}$$

Demostración

Por el lema anterior, se elige $a_i = b_i$, $i=1,\dots,n$, $s=1$ y $r = \alpha$. Entonces obtenemos

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq \left(b_1^{\alpha} + b_2^{\alpha} + \dots + b_n^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

o

$$\left(b_1 + b_2 + \dots + b_n\right)^{\alpha} \leq b_1^{\alpha} + \dots + b_n^{\alpha}$$

Proposición 3.2 Sean m y n enteros mayores que 1 y $|\ |$ cualquier valuación sobre $\mathbb{Q}$. Entonces

$$|m| \leq \ max\{1, |n|\}^{\log m / \log n}$$

Demostración

Escribiendo m en base n tenemos

$$m = a_o + a_1 \cdot n + \dots + a_k \cdot n^k$$

donde $0 \leq a_i \leq n\text{-}1$ para $i = 0, \dots, k$,

Como $n^k \leq m$, entonces

$$k \leq \frac{\log m}{\log n}$$

Por otro lado tenemos que

$$|a_i| = |1+1+\ldots+1| \le n$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|m| &\le |a_0| + |a_1|\cdot|n| + \ldots + |a_k|\cdot|n|^k \\
&\le n\left(1 + |n| + \ldots + |n|^k\right) \\
&\le n\sum_{i=0}^{k} max\{1,\ |n|\}^i \\
&\le n(k+1)\cdot\left(max\{1,|n|\}\right)^k \\
&\le n\left(\frac{\log m}{\log n}+1\right)\cdot\left(max\{1,|n|\}\right)^{\frac{\log m}{\log n}}
\end{aligned}$$

Remplazando m por m^t tenemos

$$|m|^t \le n\left(t\frac{\log m}{\log n}+1\right)\cdot\left(max\{1,|n|\}\right)^{t\cdot\frac{\log m}{\log n}}$$

Obteniendo la raíz t-ésima a ambos lados tenemos

$$|m| \le \sqrt[t]{n\left(t\frac{\log m}{\log n}+1\right)}\cdot\left(max\{1,|n|\}\right)^{\frac{\log m}{\log n}}$$

pero, como $\frac{1}{t} \le 1$ para toda $t \ge 1$, tenemos que

$$\sqrt[t]{n\left(t\frac{\log m}{\log n}+1\right)} = \sqrt[t]{n\cdot t\left(\frac{\log m}{\log n}+\frac{1}{t}\right)} \le \sqrt[t]{n\cdot t\left(\frac{\log m}{\log n}+1\right)}$$

y así

$$|m| \leq \sqrt[t]{n \cdot t\left(\frac{\log m}{\log n}+1\right)} \cdot \left(max\{1,|n|\}\right)^{\frac{\log m}{\log n}}$$

y de aquí, usando el hecho de que $lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{t} = 1$, y $lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{a} = 1$ donde a es una constante obtenemos :

$$|m| \leq \left(max\{1,|n|\}\right)^{\frac{\log m}{\log n}}$$

■

Los ejemplos que hemos dado hasta ahora de valuaciones sobre $\mathbb{Q}$ son, la valuación trivial, para cada primo p la valuación p-ádica y el valor absoluto usual. Probaremos ahora que estas son todas, salvo cierta equivalencia que definiremos más adelante.

Denotemos por $|\ |_\infty$ al valor absoluto usual sobre $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.2 Sea $|\ |$ una valuación sobre $\mathbb{Q}$. Entonces es verdadera una y solo una de las siguientes proposiciones :

(1) $|\ |$ es la valuación trivial

(2) $|\ | = |\ |_p$ para algún primo p.

(3) $|\ | = |\ |_\infty^\alpha$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $0 < \alpha \leq 1$.

Demostración

Pueden suceder 3 casos :

(1) $|m| = 1$. Para todo $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$

(2) $|m| < 1$ para algún entero $m > 1$

(3) $|m| > 1$ para todo entero $m > 1$

(1) Si $|m| = 1$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, entonces $|\ |$ es la valuación trivial ya que si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{a}{b} \neq 0$ entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} = 1$

(2) Supongamos que $|m| < 1$ para algún entero $m > 1$, en este caso tenemos, entonces, que $|n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ ya que por el teorema anterior

$$|n| \leq \left(max\{1, |m|\}\right)^{\frac{\log n}{\log m}}$$

y por el teorema 1.2 concluimos que $|\ |$ es no arquimediana.

Sea p el mínimo entero positivo tal que $|p| < 1$, esto lo podemos hacer ya que $\{x \in \mathbb{Z} / |x| < 1\} \neq \varnothing$ pues $|m| < 1$. Veremos que p es primo. Por hipótesis $p > 1$, supongamos que $p = r \cdot q$ donde $r, q < p$, y $r > 1$ entonces

$$0 < |p| = |r \cdot q| = |r| \cdot |q| < 1$$

Por lo tanto tendríamos que $|r| < 1$ o $|q| < 1$, lo cual es imposible, ya que p es el mínimo con esta propiedad. Concluimos entonces que p es primo.

Demostraremos ahora que para toda $n \in \mathbb{Z}$, $|n|<1$ si y sólo si p/ n.

$\Rightarrow$) Supongamos $|n|<1$. Por el algoritmo de la división tenemos

$$n = p \cdot q + r \quad \text{donde} \quad 0 \leq r < p.$$

Si $r \neq 0$, $|r|=1$ ya que $r < p$ y p es el mínimo con la propiedad $|p|<1$. Así que

$$|n| = max\{|p \cdot q|, |r|\} = 1$$

lo que contradice que $|n|<1$.

$$\therefore \; r = 0 \; \text{ y } \; p/n.$$

$\Leftarrow$) Si p/n, entonces $n = p \cdot q$ y así tenemos que

$$|n| = |p + p + \dots p| \leq |p| < 1$$

Consideremos, ahora, $x \in \mathbb{Q}$ y $x \neq 0$ y sea $x = p^{\alpha} \cdot \dfrac{a}{b}$ donde $p \nmid a \cdot b$

$$|x| = |p^{\alpha}| \cdot \left|\frac{a}{b}\right| = |p^{\alpha}| \cdot \frac{|a|}{|b|} = |p|^{\alpha}$$

ya que por la equivalencia anterior $|a| = |b| = 1$.

Así que si $c = |p|$, entonces $0 < c < 1$ y $|x| = c^{\alpha}$.

Por lo tanto

$$|x| = |x|_p.$$

Supongamos, ahora, la ultima posibilidad, que es, $|n| > 1$ si $n > 1$. De la proposición 3.2 tenemos que

$$|m|^{1/\log m} \leq |n|^{1/\log n}$$

y como esta última desigualdad se da para cualesquiera enteros n, $m > 1$, entonces

$$|m|^{1/\log m} = |n|^{1/\log n}$$

Sea $c = |m|^{1/\log m}$. Como $|m| > 1$ entonces $c > 1$ y así $c = e^{\alpha}$ donde $\alpha > 0$.

Entonces

$$|m| = c^{\log m} = e^{\alpha \log m} = m^{\alpha} = |m|_{\infty}^{\alpha}.$$

Además $0 < \alpha \leq 1$, puesto que , tomando $m = 2$ tenemos $|2| = |1 + 1| \leq 2$ y por lo tanto $2^{\alpha} \leq 2$ lo que significa que $\alpha \leq 1$.

Por último, como $|-m| = |m| = |m|_{\infty}^{\alpha}$, $|-1| = |1| = |1|_{\infty}$ y $|0| = |0|_{\infty} = 0$

tenemos que para toda $x \in \mathbb{Q}$ $|x| = |x|_{\infty}^{\alpha}$ con $0 < \alpha \leq 1$.

Por otro lado, ya vimos que $|\ |_{\infty}^{\alpha}$ es una valuación sobre $\mathbb{Q}$ con $0 < \alpha \leq 1$.

En el capítulo I definimos cuándo dos valuaciones no triviales son equivalentes. Si 0<c, c'<1 y $|p|_1 = c$, $|p|_2 = c'$ entonces $|\ |_1 \approx |\ |_2$.

Hemos demostrado que, salvo equivalencias, las valuaciones no triviales sobre $\mathbb{Q}$, son las p-ádicas, es decir, $|\ |_p$ con p primo y el valor absoluto usual $|\ |_\infty$.

Estudiaremos ahora, la completación de $\mathbb{Q}$ respecto a una valuación p-ádica a la cual denotaremos por $\mathbb{Q}_p$, y a cuyos elementos llamaremos números p-ádicos. La valuación de $\mathbb{Q}_p$ que extiende a $|\ |_p$ lo denotaremos de la misma manera.

El siguiente teorema nos ofrece una descripción de los elementos de $\mathbb{Q}_p$. Esta expansión es análoga a la expansión decimal de los números reales y veremos qué resultados similares se obtienen, como por ejemplo la análoga a la periodicidad en la expansión decimal de los números racionales.

<u>*Teorema 3.3*</u> Cada número p-ádico α se expresa de la forma

$$\alpha = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p_j$$

donde cada $a_j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $|\alpha|_p = |p|_p^n$.

Más aún, los a_j son únicos módulo p.

Demostración

Sea $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ y $\alpha \neq 0$. Por el teorema 3.7 $|\alpha|_p = |p|_p^n$ para alguna $n \in \boldsymbol{Z}$ y entonces $\beta = \frac{\alpha}{p^n}$ es tal que $|\beta|_p = 1$.

Sean $\boldsymbol{V}$ el anillo de valuación de $|\ |_p$ sobre $\mathbb{Q}$. y $\boldsymbol{P}$ el único ideal maximal de V, $\widetilde{V}$ el anillo de valuación de $|\ |_p$ sobre $\mathbb{Q}_p$ y $\widetilde{P}$ el único ideal maximal (teorema 1.1)

Claramente $\beta \in \widetilde{V}$

Sea $\beta = lim_{k \to \infty} c_k$ donde $c_k \in \mathbb{Q}$. Entonces existe $\boldsymbol{N}$

tal que

$|\beta - c_k| < 1$ para toda $k \geq \boldsymbol{N}$. Entonces

$$|c_N| = |c_N - \beta + \beta|_p = max\{|c_N - \beta|_p, |\beta|_p\} = |\beta|_p = 1$$

Y por lo tanto $c_N \in \boldsymbol{V}$.

Denotemos $b_n = c_N \in \mathbb{Q}$. Entonces b_n satisface

$$|b_n|_p = 1 \quad \text{y} \quad |\beta - b_n|_p < 1$$

$$\text{y así} \quad \beta + \widetilde{P} = b_n + \widetilde{P}.$$

Sea $b_n = \frac{e_n}{d_n}$, donde $e_n, d_n \in \mathbb{Z}$ y $p \nmid e_n \cdot d_n$ lo cual es posible ya que $|b_n|_p = 1$.

Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $d_n \cdot x \equiv 1$ *(mod p)*.

Entonces

$$b_n - e_n \cdot x = \frac{e_n}{d_n} - e_n \cdot x = \frac{e_n(1 - d_n \cdot x)}{d_n} \in \mathrm{P} \subseteq \widetilde{P}.$$

Tomando $a_n = e_n \cdot x$, tenemos que $\beta + \widetilde{P} = b_n + \widetilde{P} = a_n + \widetilde{P}$.

Como $|a_n - \beta|_p < 1$, entonces $|a_n \cdot p^u - \beta \cdot p^u|_p < |p^u|_p$.

Y así

$$\alpha = \beta \cdot p^n = a_n \cdot p^n + (\beta - a_n) p^n = a_n \cdot p^n + \alpha_1$$

donde

$$\alpha_1 = (\beta - a_n) p^n \quad \text{y} \quad |\alpha_1|_p < |p|_p^n = |\alpha|_p,$$

es decir,

$$\alpha = a_n \cdot p^n + \alpha_1 \text{ donde } |\alpha_1|_p = |p|_p^m, \text{ con } m > n.$$

Así pues, podemos hacer nuevamente el mismo trabajo para α_1, análogo a lo que hicimos con α. Entonces después de k pasos obtenemos que

$$\alpha = a_n \cdot p^n + a_{n+1}p^{n+1} + \ldots + a_{n+k}p^{n+k} + \gamma_k$$

donde cada $a_i \in \mathbb{Z}$, $|a_i|_p = 1$ o $a_i = 0$ para $i = n, \ldots, n+k$ y $|\gamma_k|_p \leq |p|_p^{n+k}$.

Por último, como $lim_{k\to\infty} |p|_p^{n+k} = 0$ concluimos que

$$\alpha = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j$$

■

Este último teorema nos dice que cada $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ se puede expresar de la forma

$$\alpha = \frac{a_{-n}}{p^n} + \frac{a_{-n+1}}{p^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{p} + a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$$

donde los a_i $(i = -n, -n+1, \ldots)$ son únicos módulo p.

Cuando consideramos cada a_i tal que $0 \leq a_i \leq p-1$ entonces las llamaremos ***representación o expansión canónica de*** α.

Abreviaremos está última expresión de la siguiente forma

$$\alpha = a_{-n} \cdot a_{-n+1} \cdot \ldots : a_{-1} \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \qquad (p)$$

A los elementos $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ cuya expansión es de la forma

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots \quad (p)$$

Los llamaremos ***enteros p-ádicos***

Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones para $\alpha \in \mathbb{Q}_p$

1) α es un entero p-ádico.

2) $|\alpha_p| = |p|_p^n$ con $n \geq 0$.

3) $\alpha \in \widetilde{V}$, donde $\widetilde{V}$ es el anillo de valuación de $|\ |_p$ sobre $\mathbb{Q}_p$.

Teorema 3.4 Sea α un entero p-adico, $\alpha = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j$ y sea para cada $n = 1,2,\ldots,$

$$s_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j$$

Entonces para cada $n = 1,2,\ldots,$ se tiene que

$$\alpha \equiv s_n (\text{mod } \widetilde{V}\ p^n) \qquad \text{y} \qquad s_{n+1} \equiv s_n (\text{mod } \widetilde{V}\ p^n)$$

donde $\widetilde{V} \cdot p^n$ es el ideal de $\widetilde{V}$ generado por $\sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j$.

Demostración

Para n= 1,2,..., tenemos

$$\alpha - s_n = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j - \sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j = p^n \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^{j-n} = p^n \cdot \beta$$

donde

$$\beta = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^{j-n} .$$

Entonces $\beta \in \widetilde{V}$ **ya que** $|\beta|_p \leq 1$ **y así**

$$\alpha - s_n = p^n \cdot \beta \in p^n \widetilde{V} .$$

Por lo tanto $\alpha \equiv s_n$ **(mod** $p^n \widetilde{V}$ **) con** $n = 1, 2, \ldots$ **, además**

$$s_{n+1} - s_n = a_n p^n \in p^n \widetilde{V}$$

y de aquí

$$s_{n+1} \equiv s_n \mod p^n \widetilde{V}$$

■

__*Teorema 3.5*__ $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ **es racional si y sólo si su expansión canónica**

$$\sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j , \; 0 \leq a_j \leq p-1$$

donde $|\alpha|_p = |p|_p^n$ **es periódica.**

Demostración

$\Rightarrow$)Supongamos que la expansión canónica de α es periódica. Entonces podemos escribir α de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\alpha = a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \ldots + a_{n+k} p^{n+k} + \\ + b_1 p^{n+k+1} + b_2 p^{n+k+2} + \ldots + b_j p^{n+k+j} + \\ + b_{j+1} p^{n+k+1} + \ldots + b_{2j} p^{n+k+2j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p^n (a_n + a_{n+1} p + \ldots + {}_{n+k} p^k) \\ = \quad & + p^{n+k+1} (b_1 + b_2 p + \ldots + b_j p^{j-1}) \\ & + p^{n+k+j+1} (b_1 + b_2 p + \ldots + b_j p^{j-1})\end{aligned}$$

$$= p^n A + p^{n+k+1} B (1 + p^j + p^{2j} + \ldots) \qquad (*)$$

donde

$$A = a_n + a_{n+1} p + \ldots + a_{n+k} p^k,$$

y

$$B = b_1 + b_2 p + \ldots + b_j p^{j-1}.$$

Entonces (*) es igual a

$$\alpha = p^n \mathrm{A} + p^{n+k+1} \mathrm{B} \cdot \frac{1}{1 - p^j} \qquad (**)$$

en $\mathbb{Q}_p$

$$1+p^j+p^{2j}+\ldots+p^{(t-1)j}=\frac{1-p^{j-1}}{1-p^j}\rightarrow\frac{1}{1-p^j}$$

cuando $t\rightarrow\infty$. Aún más (**) es un número racional.

$\Rightarrow$) Asumimos, inversamente, que $\alpha\in\mathbb{Q}$. Y si escribimos a α como

$$\alpha=\frac{p^n\left[A(p^j-1)-Bp^{k+1}\right]}{p^j-1}$$

donde A, B $\in\mathbb{Z}$, y donde $0\leq A<p^{k+1}$, $0\leq B<p^j$, de aquí que α tiene una expansión canónica periódica y la podemos escribir :

$$A=a_n+a_{n+1}p+\cdots+a_{n+k}p^k,\quad 0\leq a_i<p$$

$$B=b_1+b_2p+\cdots+b_jp^{j-1},\quad 0\leq b_i<p$$

$$y\qquad \alpha=p^nA+p^{n+k+1}B\frac{1}{1-p^j}$$

lo cual implica que α puede estar escrita de la forma

$$\begin{aligned}\alpha \;=\;& a_np^n+a_{n+1}p^{n+1}+\cdots+a_{n+k}p^{n+k}\\ &+b_1p^{n+k+1}+b_2p^{n+k+2}+\cdots+b_jp^{n+k+j}\\ &+b_1p^{n+k+j+1}+\cdots+b_jp^{n+k+2j}\end{aligned}$$

Debemos probar que α puede ser escrito de la forma (**). Sea $|\alpha|_p = |p|_p^n$, y $\alpha / p^n = \beta$, donde $|\beta|_p = 1$. Podemos escribir a $\beta = c/d$, *con* $c, d \in \mathbb{Z}$, y $p \nmid d$, $p \nmid c$.

Entonces existe un entero j tal que $p^j \equiv 1 \pmod{d}$.

Ahora

$$\beta = \frac{c(p^j - 1)}{d(p^j - 1)}$$

y entonces $d / p^j - 1$, tenemos $\alpha = p^n \beta = p^n \dfrac{e}{p^j - 1}$,

donde $e \in \mathbb{Z}$ Lo siguiente es elegir un entero mínimo k tal que

$$0 \leq e < p^{k+1}, \text{ si } \alpha \geq 0;$$

$$-p^{k+1} \leq e < 0, \quad \text{si} \quad \alpha < 0.$$

Entonces $(p^{k+1}, p^j - 1) = 1$, podemos resolver la congruencia

$$p^{k+1} x \equiv 1 \pmod{p^j - 1}.$$

Sea B una solución, donde tomamos $0 \leq B < p^j - 2$ si $\alpha \geq 0$, y $1 \leq B < p^j - 1$ si $\alpha < 0$.

Ahora

$$p^{k+1} B \equiv -e \pmod{p^j - 1},$$

y, de aquí,

$$e = A(p^j - 1) - B p^{k+1},$$

donde $A \in \mathbb{Z}$ Es fácil ver que en ambos casos $0 \le A < p^{k+1}$.

Sustituyendo a

$$e = A(p^j - 1) - B\,p^{k+1},$$

en

$$\alpha = p^n \beta = p^n \frac{e}{p^j - 1},$$

obtenemos

$$\alpha = \frac{p^n\left[A\left(p^j - 1\right) - Bp^{k+1}\right]}{p^j - 1}$$

donde $0 \le A < p^{k+1}$, $0 \le \mathrm{B} < p^j$

<u>*Observación*</u>: (1) La igualdad

$$a_i p^i + a_{i+1} p^{i+1} = (a_i + p)p^i + (a_{i+1} - 1)p^{i+1} = (a_i - p)p^i + (a_{i+1} + 1)p^{i+1}$$

nos lleva a las siguientes igualdades

$$a_{-n}a_{-n+1}\ldots a_{0,}a_1\ldots a_i a_{i-1}\ldots = a_{-n}a_{-n+1}\ldots a_{0,}a_1\ldots(a_i + p)(a_{i+1} - 1)a_{i+2}$$
$$a_{-n}a_{-n+1}\ldots a_{0,}a_1\ldots a_i a_{i-1}\ldots = a_{-n}a_{-n+1}\ldots a_{0,}a_1\ldots(a_i - p)(a_{i+1} + 1)a_{i+2}$$

(2) Para cada i, tenemos que $a_i = a_i' + pt$, donde $0 \le a_i' \le p\text{-}1$ y así por (1)

$$a_i p^i + a_{i+1} p i + 1 = a_i' p^i + (a_{i+1} + t)p^{i+1}$$

(3) $0 = 00\ldots p(p\text{-}1)\ldots (p\text{-}1), (p\text{-}1)\ldots$

ya que

$$s_k = p \cdot p^{-n} + (p-1)p^{-n+1} + \cdots + (p-1)p^{-n+k} = p^{-n+(k+1)}$$

y

$$lim_{k \to \infty} s_k = 0$$

A continuación daremos ejemplos del desarrollo canónico de un número *p-ádico* y de la suma y el producto de dos números *p-ádicos* :

1) Sea $\alpha = \frac{1}{5} \in Q_3$

Consideremos la notación y el proceso del teorema 3.4, tenemos

$$\left|\frac{1}{5}\right|_3 = |3|_3^0 = 1,$$

así que $n = 0$.

Para $e_0 = 1$ y $d_0 = 5$ tenemos que

$$5x \equiv 1 \pmod 3$$

tiene como solución $x = 2$ y así

$$e_0 \cdot 2 = 2 \text{ y así } a_0 = 2$$

$$\gamma_1 = 1/5 - 2 = -9/5$$

Como

$$|\gamma_1|_3 = |3|_3^2$$

entonces $a_1 = 0$.

Ahora,

$$\gamma_2 = -\tfrac{9}{5},$$

entonces $\gamma_2/3^2 = -\tfrac{1}{5}$.

Nuevamente,

$$5x \equiv 1 \pmod 3 \quad \text{tiene como solución } x = 2$$

y así

$$e_2 \cdot 2 = (-1)\cdot 2 \equiv 1 \pmod 3)$$

y así $a_2 = 1$.

Entonces

$$\gamma_3 = \left(-\tfrac{1}{5} - 1\right)\cdot 3^2 = \left(-\tfrac{6}{5}\right)\cdot 3^2 = \left(-\tfrac{2}{5}\right)\cdot 3^3$$

$$\gamma_3/3^3 = -\tfrac{2}{5}$$

$$e_3 \cdot 2 = (-2)\cdot 2 = -4 \equiv 2 \pmod 3$$

$$a_3 = 2$$

$$\gamma_4 = \left(-\tfrac{2}{5} - 2\right)\cdot 3^3 = \left(-\tfrac{12}{5}\right)\cdot 3^3 = -\tfrac{4}{5}\cdot 3^4$$

$$e_4 \cdot 2 = (-4)\cdot 2 = -8 \equiv 1 \pmod 3$$

$$a_4 = 1$$

$$\gamma_5 = \left(-\tfrac{4}{5} - 1\right)\cdot 3^4 = \left(-\tfrac{9}{5}\right)\cdot 3^4 = -\tfrac{1}{5}\cdot 3^6.$$

$$a_5 = 0$$

Como

$$\gamma\ {}^{5}\!/_{3^6} = -{}^{1}\!/_{5} = \gamma\ {}^{2}\!/_{3^2},$$

tenemos que a partir de aquí se repetirán los dígitos, es decir,

$$a_6 = 1,\ a_7 = 2,\ a_8 = 1,\ a_9 = 0,\ \text{etc.}$$

Por lo tanto la representación canónica de $1/5$ en Q_3 es

$$1/5 = 2{,}01210121 \qquad \text{en } Q_3.$$

Sean $\alpha = 123{,}412$, $\beta = 421{,}032$, $\gamma = 124{,}\ 131$ y $\delta = 321{,}221$

$$\alpha = 1\cdot5^{-2} + 2\cdot5^{-1} + 3\cdot5^{0} + 4\cdot5^{1} + 1\cdot5^{2} + 2\cdot5^{3}$$
$$\beta = 4\cdot5^{-2} + 2\cdot5^{-1} + 1\cdot5^{0} + 0\cdot5^{1} + 3\cdot5^{2} + 2\cdot5^{3}$$

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= 5\cdot5^{-2} + 4\cdot5^{-1} + 4\cdot5^{0} + 4\cdot5^{1} + 4\cdot5^{2} + 4\cdot5^{3}\\
&= 5^{-1} + 4\cdot5^{-1} + 4\cdot5^{0} + 4\cdot5^{1} + 4\cdot5^{2} + 4\cdot5^{3}\\
&= 5\cdot5^{-1} + 4\cdot5^{0} + 4\cdot5^{1} + 4\cdot5^{2} + 4\cdot5^{3}\\
&= 5^{0} + 4\cdot5^{0} + 4\cdot5^{1} + 4\cdot5^{2} + 4\cdot5^{3}\\
&= 5\cdot5^{0} + 4\cdot5^{1} + 4\cdot5^{2} + 4\cdot5^{3}\\
&= 5^{1} + 4\cdot5^{1} + 4\cdot5^{2} + 4\cdot5^{3}\\
&= 5\cdot5^{1} + 4\cdot5^{2} + 4\cdot5^{3}\\
&= 5^{2} + 4\cdot5^{2} + 4\cdot5^{3}\\
&= 5^{3} + 4\cdot5^{3}\\
&= 5^{4}\\
&= 0\cdot5^{0} + 0\cdot5^{1} + 0\cdot5^{2} + 0\cdot5^{3} + 1\cdot5^{4}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\alpha + \beta = 0{,}0001$$

$$\begin{array}{r} 123{,}412 \\ +\underline{421{,}032} \\ 000{,}0001 \end{array}$$

Análogamente encontramos $\gamma \cdot \delta$

$$\begin{array}{r} \underline{124,\ 131 \times 321{,}221} \\ 3\ 6\ (12)\ 3\ 9\ 3 \qquad\qquad\qquad\quad \\ 2\ 4\ \ 8\ 2\ 6\ 2 \qquad\qquad\quad \\ 1\ \ 2\ 4\ 1\ 3\ 1 \qquad\quad\ \ \\ 2\ 4\ 8\ 2\ 6\ 2 \qquad\ \ \\ 2\ 4\ 8\ 2\ 6\ 2 \quad \\ 1\ 2\ 4\ 1\ 3\ 1 \\ \hline 3\ 3\ 3\ 3\ \ 4,2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \end{array}$$

$\gamma \cdot \delta =$

$= (1 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{0} + 1 \cdot 5^{1} + 3 \cdot 5^{2} + 1 \cdot 5^{3}) \cdot (3 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-1} + 1 \cdot 5^{0} + 2 \cdot 5^{1} + 2 \cdot 5^{2} + 1 \cdot 5^{3})$

$= (1 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{0} + 1 \cdot 5^{1} + 3 \cdot 5^{2} + 1 \cdot 5^{3}) \cdot (3 \cdot 5^{-2})$
$+ (1 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{0} + 1 \cdot 5^{1} + 3 \cdot 5^{2} + 1 \cdot 5^{3}) \cdot (2 \cdot 5^{-1})$
$+ (1 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{0} + 1 \cdot 5^{1} + 3 \cdot 5^{2} + 1 \cdot 5^{3}) \cdot (1 \cdot 5^{0})$
$+ (1 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{0} + 1 \cdot 5^{1} + 3 \cdot 5^{2} + 1 \cdot 5^{3}) \cdot (2 \cdot 5^{1})$
$+ (1 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{0} + 1 \cdot 5^{1} + 3 \cdot 5^{2} + 1 \cdot 5^{3}) \cdot (2 \cdot 5^{2})$
$+ (1 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{0} + 1 \cdot 5^{1} + 3 \cdot 5^{2} + 1 \cdot 5^{3}) \cdot (1 \cdot 5^{3})$

$= 3 \cdot 5^{-4} + 6 \cdot 5^{-3} + 12 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-1} + 9 \cdot 5^{0} + 3 \cdot 5^{1} + 2 \cdot 5^{-3} + 4 \cdot 5^{-2} + 8 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^{0} + 6 \cdot 5^{1} + 2 \cdot 5^{2} + 1 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{0} + 1 \cdot 5^{1} + 3 \cdot 5^{2} + 1 \cdot 5^{3} + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{0} + 8 \cdot 5^{1} + 2 \cdot 5^{2} + 6 \cdot 5^{3} + 2 \cdot 5^{4} + 2 \cdot 5^{0} + 4 \cdot 5^{1} + 8 \cdot 5^{2} + 2 \cdot 5^{3} + 6 \cdot 5^{4} + 2 \cdot 5^{5} + 1 \cdot 5^{1} + 2 \cdot 5^{2} + 4 \cdot 5^{3} + 1 \cdot 5^{4} + 3 \cdot 5^{5} + 1 \cdot 5^{6}$

$$= 3\cdot5^{-4} + (6+2)\cdot5^{-3} + (12+4+1)\cdot5^{-2} + (3+8+2+2)\cdot5^{-1} +$$
$$(9+2+4+4+2)\cdot5^{0} + (3+6+1+8+4+1)\cdot5^{1} + (2+3+2+8+2)\cdot5^{2} +$$
$$(1+6+2+4)\cdot5^{3} + (2+6+1)\cdot5^{4} + (2+3)\cdot5^{5} + 1\cdot5^{6}$$

$$= 3\cdot5^{-4} +(3)\cdot5^{-3} + 5^{-2} +35\cdot5^{-2} +2\cdot5^{-2} +3\cdot55^{-1} +$$
$$+45\cdot5^{0} +1\cdot5^{0} +455^{1} +3\cdot5^{1} + 35\cdot5^{2} +2\cdot5^{2} + 3\cdot5^{3} + 2\cdot5\cdot5^{3} +4\cdot5^{4} +5\cdot5^{4} +$$
$$5\cdot5^{5} +1\cdot5^{6}$$

$$=3\cdot5^{-4} +(3)\cdot5^{-3} + 5^{-2} +3\cdot5^{-1} +2\cdot5^{-2} + 3\cdot5^{0} +4\cdot5^{1} +1\cdot5^{0} +4\cdot5^{2} +3\cdot5^{1} +$$
$$3\cdot5^{3} +2\cdot5^{2} + 3\cdot5^{3} + 2\cdot5^{4} +4\cdot5^{4} +1\cdot5^{5} +1\cdot5^{6} +1\cdot5^{6}$$

$$=$$
$$3\cdot5^{-4} +(3)\cdot5^{-3} +3\cdot5^{-2} +3\cdot5^{-1} +4\cdot5^{0} +2\cdot5^{1} +2\cdot5^{2} +2\cdot5^{3} +2\cdot5^{4} +2\cdot5^{5} +2\cdot5^{6}$$

$= 33334.222222$

Apéndice

Teorema Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

El inverso de este teorema no es cierto en $\mathbb{R}$, un ejemplo de ello es la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

la cual es divergente y sin embargo $lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Demostración

Sea s_n la suma parcial de los primeros n términos, entonces

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + 2 \times \frac{1}{4} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_4 + 4 \times \frac{1}{8} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$s_{16} = s_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > s_8 + 8 \times \frac{1}{16} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

en general :

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^n+2^n} > 2^n + 2^n \times \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2}$$
$\rightarrow \infty$

Por inducción se tiene que

$$s_{2^n} > \frac{n}{2} \rightarrow \infty \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

entonces $\{s_n\}$ es divergente. Por lo tanto, la serie armónica es divergente

Bibliografía

[1] *Bachman George. Introduction to p-adic numbers and valuation theory. Academic Press.*

[2] *Borevich Z. I & Shaferevich I.R. Number theory. Academic Press .*

[3] *I. N. Herstein. Abstract Algebra. Macmillan Publishing Company.*

[4] *Iribarren T. Ignacio L. Topología de Espacios Métricos. Limusa.*

[5] *Koblitz Neal. P-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-functions. Springer-Verlag. Segunda Edición.*

[6] *Mahler Kurt. Introduction to p-adic numbers and their functions. Cambridge at the university press 1973.*

[7] *Niven & Zuckerman . Introducción a la Teoría de Los Números. Limusa.*

[8] *Robert Alain. Acurse in p-adic analisis. Graduate texts in mathematics. Springer*

[9] *Weiss Edwin. Algebraic Number Theory. Chelsea Publishing Company.*