36

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARACTERIZACIONES DEL INTERVALO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

P E R E Z   T R E J O   S U S A N A

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. FELIX CAPULIN PEREZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2002

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Caracterizaciones del Intervalo"

realizado por Susana Pérez Trejo

con número de cuenta 90524239 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Félix Capulín Pérez
Propietario	Dra. María Isabel Puga Espinosa
Propietario	Dr. Fernando Orozco Zitli
Suplente	M. en C. Julio César Cedillo Sánchez
Suplente	M. en C. David Herrera Carrasco

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

GRACIAS A LA VIDA QUE ME HA DADO TANTO...

A JESÚS Y FÉLIX.

AMO EL CANTO DEL ZENZONTLE,
PAJARO DE CUATROCIENTAS VOCES.
AMO EL COLOR DE EL JADE
Y EL ENERVANTE PERFUME DE LAS FLORES.
PERO AMO MÁS A MI HERMANO
EL HOMBRE.

NEZAHUALCOYOTL.

CARACTERIZACIONES DEL INTERVALO

FEBRERO 2002

Índice General

Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Un **subcontinuo** es un subconjunto de un espacio métrico no vacío el cual tambien es un continuo.
La gran variedad de continuos permite por sí misma que el estudio de este tipo de espacios sea muy rico en contenido y propiedades. La Teoría de Continuos es la encargada de dicho estudio.Pese a la gran cantidad de continuos este trabajo esta dedicado exclusivamente a aquel continuo que peca por su sencillez, pero que tiene un sin fin de propiedades que propiamente lo caracterizan: El intervalo cerrado $[0, 1]$ llamado tambien arco.
Los matemáticos se han empeñado en caracterizar de mil formas al intervalo cerrado $[0, 1]$. Entre las caracterizaciones más conocidas es la dada por George W. Henderson (1960), la cual dice: Si X es un continuo descomponible que es topológicamente equivalente a cada uno de sus subcontinuos con más de un punto entonces X es el arco.
Otra muy conocida es aquella que dice: X es un arco si y sólo si X tiene exactamente dos puntos que no son de corte. Esta se probará en el capítulo cinco utilizando conceptos como: número de disconección de un espacio, gráfica, puntos de corte, etc.
De entre las caracterizaciones del arco que existen, en el presente trabajo sólo se presentaran cinco que de alguna manera son clásicas, y son muy re presentativas. El trabajo está organizado en seis capítulos, cada uno de los cuales contiene una caracterización del arco.La herramienta preliminar necesaria para su demostración, es presentada en el primer capítulo.
Antes que nada diremos que X es un ARCO si X es homeomorfo a el intervalo cerrado $[0, 1]$ y diremos que un continuo X es una CURVA CERRADA SIMPLE si es homeomorfo a S^1.

Las demostraciones presentadas son las siguientes:

1. Un continuo de Peano, atriódico y sin curvas cerradas simples es un arco.

2. Todo continuo arco — conexo tipo arco es un arco.

3. Sea X un continuo tipo arco entonces X es imagen continua de 2^X ó $C(X)$ si y sólo si X es un arco.

4. Un continuo X es un arco si y sólo si existen p y $q \in X$ con $p \neq q$ tal que $ord(p, X) = ord(q, X) = 1$ y $ord(x, X) = 2$ $\forall x \neq p, q$.

5. Todo continuo X con exactamente dos puntos que no son de corte p y q es un arco

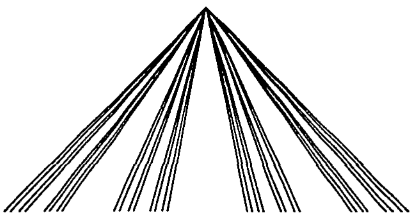
Capítulo 1

Preliminares

Recordemos que un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto y un **subcontinuo** es un subconjunto de un espacio métrico no vacío el cual también es un continuo.

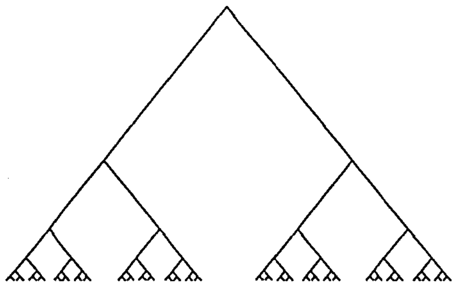
1.1 Arco-conexidad y conexidad por trayectorias.

Definition 1.1 *Un espacio X es arco conexo si para cualesquiera dos puntos distintos p, q existe un arco contenido en X con extremos p, q.*



arco-conexo

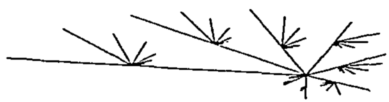
Definition 1.2 *Un espacio X es **localmente arco conexo** si para cada $p \in X$ y cada abierto U que contiene a p hay un conjunto abierto $V \subseteq U$ el cual es arco conexo.*



localmente arco-conexo

Definition 1.3 *Sea X un espacio topológico. Sea $p, q \in X$ una **trayectoria** de p a q es una función continua $\alpha : [0,1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$*

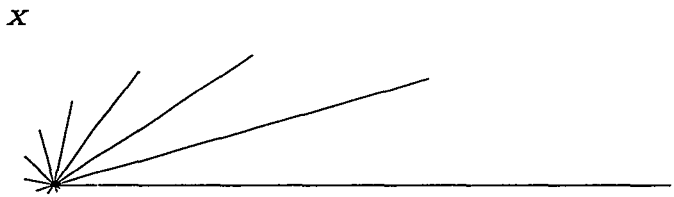
Definition 1.4 *Un espacio topológico X es **conexo por trayectorias** si para cualesquiera dos puntos $p, q \in X$ hay una trayectoria que une a p con q.*



Conexo por trayectorias

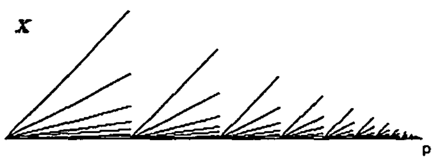
1.2 Conexidad Local

Definition 1.5 *Un continuo X es* ***localmente conexo en un punto*** *$p \in X$ si para cada conjunto abierto U, con $p \in U$ existe un subconjunto abierto conexo V tal que $p \in V$ y $V \subset U$. Diremos que X es* ***localmente conexo,*** *si X es localmente conexo en cada punto.*



Continuo localmente conexo

Definition 1.6 *Un continuo X es* ***conexo en pequeño*** *en $p \in X$, si para cada conjunto abierto U, con $p \in U$ existe una vecindad conexa V tal que $p \in V$ y $V \subset U$.*



Continuo conexo en pequeño en p

Definition 1.7 *Sea X un espacio topológico. Una* ***componente*** *C de X es un subconjunto conexo maximal de X. Si $p \in X$, entonces*

$$C_p = \cup \{C \subseteq X : p \in C \text{ y } C \text{ es conexo}\}$$

es llamada la componente de p en X.

Teorema 1.8 *Sea X un espacio topológico, X es localmente conexo si y sólo si las componentes de conjuntos abiertos son conjuntos abiertos.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sean U un conjunto abierto y C una componente de U. Demostrararemos que C es un conjunto abierto. Sea $p \in C$, como X es localmente conexo existe un conjunto V_p abierto y conexo tal que $p \in V_p \subset U$, por definición de C, $V_p \subseteq C$, por lo tanto $C = \cup\{V_p : p \in C\}$ por lo que C es un conjunto abierto.

$\Leftarrow$] Sean $p \in X$ y U un conjunto abierto que contiene a p. Demostraremos que existe un abierto conexo V talque $p \in V \subset U$. Sea C la componente de p contenida en U, por hipótesis C es un conjunto abierto así $V = C$, por lo tanto X es localmente conexo en p, para cada $p \in X$. ■

Teorema 1.9 *X es un continuo localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño en todos sus puntos.*

Demostración. $\Rightarrow$] Es una consecuencia inmediata de la definición de localmente conexo.

$\Leftarrow$]Por el teorema anterior basta probar que las componentes de cualquier conjunto abierto son conjuntos abiertos. Sea U un conjunto abierto y C una componente de U. Demostraremos que C es un conjunto abierto. Sea $p \in C$, como X es conexo en pequeño en cada punto, existe una vecindad conexa V talque $p \in V \subseteq U$ y como C es el mayor conexo contenido en U entonces $V \subseteq C$, pero V es una vecindad, así existe W abierto tal que $p \in W \subseteq V \subseteq C$, por lo tanto C es un conjunto abierto. ■

Definition 1.10 *Un continuo de Peano X es un continuo localmente conexo.*

Las siguientes propiedades de los continuos de Peano serán utilizadas sin demostrar. Su demostración puede verse en las referencias que aquí indicamos.

Teorema 1.11 *Todo continuo de Peano es arco conexo.[1, T.8.23 pag. 130]*

Teorema 1.12 *Cada continuo de Peano es localmente arco conexo.* *[1,T.8.25 pag. 131]*

Teorema 1.13 *En un continuo de Peano todo subconjunto abierto y conexo es arco conexo.[1,T.8.26 pag. 132]*

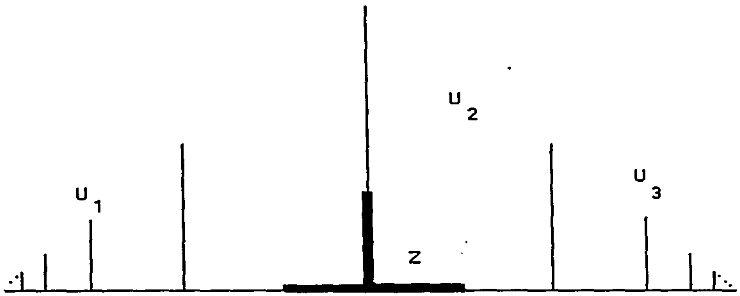
Teorema 1.14 *(Hahn-Mazurkiewicz) Un continuo X es la imagen continua del intervalo $[0,1]$ si y sólo si X es un continuo de Peano.* *[1,T.8.18, pag. 128]*

Teorema 1.15 *Si X es un espacio Hausdorff y conexo por trayectorias entonces X es arco conexo.*

Demostración. Sean $p, q \in X$ y $\alpha : [0,1] \rightarrow X$ una trayectoria que une a p con q, como $\alpha([0,1])$ es la imagen continua del intervalo $[0,1]$ entonces $\alpha([0,1])$ es un continuo de Peano por el teorema 1.14. Pero por el teorema 1.11 $\alpha([0,1])$ es arco-conexo. Por lo tanto hay un arco en $\alpha([0,1])$ que une a p con q, en otras palabras hay un arco en X que une p con q. ∎

1.3 Triodos

Definition 1.16 *Diremos que dos subconjuntos A, B están* ***mutuamente separados*** *si $\overline{A} \cap B = \phi = \overline{B} \cap A$,en tal caso la unión $A \cup B$ se denotará por $A|B$.*



Triodo

Definition 1.17 *Un continuo X es un* ***triodo,*** *si existe un subcontinuo Z de X tal que $X \setminus Z = \bigcup_{i=1}^{3} U_i$ y los U_i están mutuamente separados dos a dos.*

Definition 1.18 *Un continuo X es un* ***triodo simple*** *si es homeomorfo a una "T". Más presiso*

$$T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^2$$

Definition 1.19 *Un continuo X es* ***atriódico*** *si no contiene triodos.*

1.4 Hiperespacios

Ahora definiremos el concepto de **Hiperespacio** de un espacio topológico. Sea X un espacio topológico, definamos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y } A \neq \phi\} \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\} \end{aligned}$$

Claramente $C(X) \subseteq 2^X$

Si (X, d) es un espacio métrico compacto, se puede definir una métrica H_d para 2^X llamada la métrica de Hausdorff.

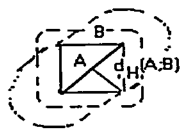
Sean $A, B \in 2^X$

$$H_d(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \quad \text{y} \quad B \subseteq N_\varepsilon(A)\}.$$

Donde

$$N_\varepsilon(A) = \{x \in X : \exists a \in A \quad \text{talque } d(a, x) < \varepsilon\} = \cup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$$

es la nube de radio ε alrededor de A. Esta nube, por definición, es un conjunto abierto.



Proposición 1.20 *H_d es una métrica en 2^X; por lo tanto en $C(X)$.*

Demostración. Mostraremos que H_d es una métrica. $H_d(A,B) \geq 0$ porque es el ínfimo de números positivos. Es claro que $H_d(A,B) = H_d(B,A)$. Para demostrar la desigualdad del triángulo, notemos primero que si A, $B \in 2^X$ y $a \in A$, entonces existe $b \in B$ tal que

$$d(a,b) \leq H_d(A,B) \ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Tomemos ahora un punto $a \in A$. Entonces, por (1), existe $b \in B$ tal que $d(a,b) \leq H_d(A,B)$. Ahora, para dicho elemento $b \in B$, aplicando (1) de nuevo, existe $c \in C$ tal que $d(b,c) \leq H_d(B,C)$. De este modo, usando la desigualdad del triángulo para d, tenemos que $d(a,c) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C)$. Por lo tanto, como $a \in A$ fue arbitario, hemos probado que

$$A \subset N_{H_d(A,B)+H_d(B,C)+\delta}(C)$$

para cualquier $\delta > 0$. Un argumento similar muestra que

$$C \subset N_{H_d(A,B)+H_d(B,C)+\delta}(A)$$

para cada $\delta > 0$. Por tanto $H_d(A,C) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C)$.

Esto muestra la desigualdad del triángulo. Además, si $H_d(A,B) = 0$, por (1) se tiene que para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) = 0$; es decir, $a = b$, por lo que cada elemento de A es un elemento de B, así $A \subseteq B$. Análogamente, tenemos que $B \subseteq A$. Por lo tanto, $A = B$. Además, si $A = B$ es claro que $H_d(A,B) = 0$. Por lo tanto H_d es una métrica en 2^X. ∎

A 2^X y $C(X)$ se les conoce con el nombre de hiperespacios de X

Se sabe que si X es un continuo entonces 2^X y $C(X)$ son continuos con la métrica de Hausdorff. Ver [1,T.4.17 pag. 61.] y [3,T.14.9 pag. 113.]

Es muy interesante saber que independientemente de la estructura de un continuo X, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son ***continuos arco conexos.*** Ver [3,T.14.9 pag. 113.]

Lema 1.21 *Sean X un continuo, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Si $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ entonces existe un número $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tal que $A \subseteq N_{\varepsilon_0}(B)$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, que para todo número $\varepsilon_0 < \varepsilon$, tenemos que $A \setminus N_{\varepsilon_0}(B) \neq \phi$. De este modo, la familia $\left\{A \setminus N_{\varepsilon - \frac{1}{n+1}}(B)\right\}_{n \in \mathbf{N}}$ es una familia decreciente de cerrados que tiene la propiedad de la intersección finita y por lo tanto $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} \left(A \setminus N_{\varepsilon - \frac{1}{n+1}}(B)\right) \neq \phi$. Sea $a \in \bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} \left(A \setminus N_{\varepsilon - \frac{1}{n+1}}(B)\right)$. Entonces $a \in A$ y $a \notin N_\varepsilon(B)$, lo cual es una contradicción. ■

Proposición 1.22 *Sean $A, B \in 2^X$. $H_d(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\varepsilon(A)$*

Demostración. $\Rightarrow]$Sea $\varepsilon > 0$, como por hipótesis

$$H_d(A, B) = \inf\left\{\varepsilon' > 0 : A \subseteq N_{\varepsilon'}(B) \text{ y } B \subseteq N_{\varepsilon'}(A)\right\} < \varepsilon.$$

existe ε_0 tal que $H_d(A, B) \leq \varepsilon_0 < \varepsilon$; de aquí $A \subseteq N_{\varepsilon_0}(B)$ y $B \subseteq N_{\varepsilon_0}(A)$ pero $A \subseteq N_{\varepsilon_0}(B) \subseteq N_\varepsilon(B)$, por lo tanto $A \subseteq N_\varepsilon(B)$, análogamente $B \subseteq N_\varepsilon(A)$.

$\Leftarrow]$Por el lema anterior, existen dos números $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tales que

$$\varepsilon_1 < \varepsilon \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 < \varepsilon$$

$A \subseteq N_{\varepsilon_1}(B)$ y $B \subseteq N_{\varepsilon_2}(A)$. Sea $\varepsilon_0 = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Como ε_0 es un número con la propiedad de que $A \subseteq N_{\varepsilon_1}(B) \subseteq N_{\varepsilon_0}(B)$ y $B \subseteq N_{\varepsilon_2}(A) \subseteq N_{\varepsilon_0}(A)$ y $H_d(A, B)$ es el infimo de los números con esta propiedad, tenemos que $H_d(A, B) \leq \varepsilon_0 < \varepsilon$ ■

Ahora definiremos lo que es una función de Whitney; las cuales nos dan una forma de "medir el tamaño" de los elementos de 2^X. Es además una herramienta muy importante en el área de los hiperespacios, especialmente en $C(X)$.

Definition 1.23 *Sea X un continuo. Una* **Función de Whitney** *para 2^X es una función continua $\mu : 2^X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

i) $\mu(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in X$

ii) Si $A, B \in 2^X$, son tales que $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < (B)$.

Nótese que si μ es una función de Whitney para 2^X, entonces $\mu \mid_{C(X)}$ es una función de Whitney para $C(X)$.

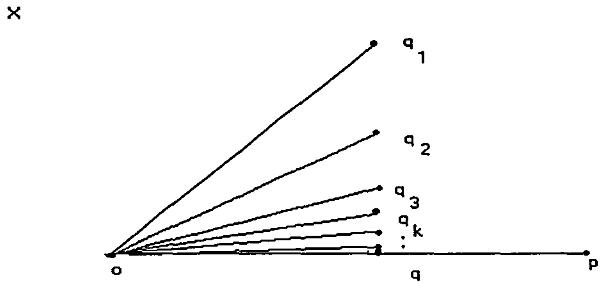
Teorema 1.24 *Si X es un continuo, entonces existen las funciones de Whitney.[3, T.13.4 pag. 107]*

Determinemos ahora una función un tanto curiosa con ayuda de funciones de Whitney, tal función no necesariamente es continua, la función estará definida de un continuo X arco conexo que no contiene cículos al intervado $[0, \mu(X)]$.
Formalmente, supongamos que X es un continuo arco conexo sin círculos. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Fijemos un punto $p \in X$. Definamos una función, $f : X \longrightarrow [0, \mu(X)]$ con la siguiente regla de correspondencia.

$$f(q) = \mu(A_q)$$

donde A_q es el único arco en X que une a p con q.

Si al espacio le pedimos la condición adicional de que sea localmente conexo, entonces la función será continua. Esta función será fundamental para nuestra primera caracterización del arco.



Ejemplo en el que f no necesariamente es continua.

Sea X la escoba de la figura anterior.

Probaremos que f no es continua en X. Si la función f definida en este espacio fuera continua, entonces tendríamos por un lado que como $q_n \longrightarrow q$ entonces $f(q_n) \longrightarrow f(q)$; es decir,

$$\mu(A_{q_n}) \longrightarrow \mu(A_q) \tag{1.1}$$

observemos que $A_q \subset A_0$ (A_0 es el arco que une a p con 0) por lo que

$$\mu(A_q) < \mu(A_0)$$

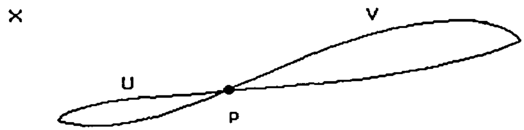
Por otro lado como $A_{q_n} \longrightarrow A_0$ y de la continuidad de μ debe ocurrir que

$$\mu(A_{q_n}) \longrightarrow \mu(A_0) \tag{1.2}$$

Pero $\mu(A_q) \neq \mu(A_0)$ por *definición* 1.24 (*ii*). Por lo tanto f no puede ser continua.

1.5 Puntos de corte

Definition 1.25 *Diremos que p es un* **punto de corte** *de un espacio conexo X si $X \setminus \{p\}$ no es conexo, es decir, $X \setminus \{p\} = U|V$.*



p es punto de corte de X

El siguiente teorema garantiza la existencia de puntos que no son de corte.

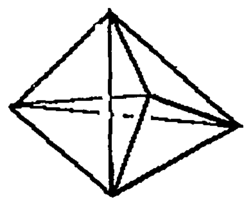
Teorema 1.26 *Sea X un continuo. Supongamos que p es un punto de corte de X, es decir $X \setminus \{p\} = U|V$. Entonces cada uno de los conjuntos U y V contienen al menos un punto que no es de corte de X.*
[1,T.66 pag. 89]

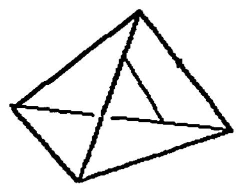
Corolario 1.27 *Sean X un continuo y $N = \{p \in X \mid p \text{ no es punto de corte}\}$ entonces no hay un subcontinuo propio que contenga a N.*

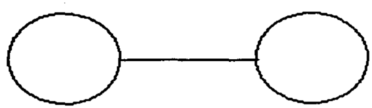
Demostración. Supongamos que existe un subcontinuo propio K de X tal que $N \subseteq K$. Sea $q \in X \setminus K$ entonces $q \in X \setminus N$ esto implica que $X \setminus \{q\} = U|V$, como $q \notin K$, $K \subseteq X \setminus \{q\}$ pero como K es conexo se tiene que $K \subseteq U$ o $K \subseteq V$. Sin perdida de generalidad supongamos que $K \subseteq V$, de aquí $N \subseteq V$ ya que $N \subseteq K$, contradiciendo el hecho de que también en U hay puntos que no son de corte. Por lo tanto no hay un subcontinuo propio que contenga a N. ■

1.6 Gráficas

Definition 1.28 *Una **gráfica** es un continuo el cual se puede escribir como una unión finita de arcos tales que cualesquiera dos arcos,son disjuntos, se intersectan en un punto extremo o se intersectan ambos, en sus puntos finales.*







Capítulo 2

PRIMERA CARACTERIZACION

Un continuo de Peano, atriódico y sin curvas cerradas simples es un arco.

Proposición 2.1 *Sean X un continuo arco-conexo sin circulos y $p \in X$ un punto fijo pero arbitrario. Sea $F : X \longrightarrow [0, \mu(X)]$ definida como sigue: $f(q) = \mu(A_q)$ donde A_q es el único arco en X que une a p con q. Si Y es un subcontinuo de X localmente conexo, entonces $f|_Y$ es continua.*

Demostración. Demostraremos que $f|_Y$ es continua. Sean $y \in Y$ y $\varepsilon > 0$. Sea A_y el único arco que une a p con y.
Por la continuidad de μ, existe $\delta > 0$ tal que si $H_d(A_y, A) < \delta$ donde $A \in C(X)$ entonces $|\mu(A_y) - \mu(A)| < \varepsilon$; o dicho de otra manera según la proposición 1.22, si $A_y \subset N_\delta(A)$ y $A \subset N_\delta(A_y)$. Entonces $|\mu(A_y) - \mu(A)| < \varepsilon$. Sea $U = B_{\frac{\delta}{4}}(y) \cap Y$. Nóte que $U \subset N_\delta(A_y)$. Como U es un conjunto abierto en Y, existe un conjunto V abierto y conexo en Y con $y \in V \subseteq U$. Vemos; por el teorema 1.13 V puede ser tomado arco conexo. Sea $s \in V$ entonces existe un arco sy en V que une a s con y. Sea A_s el arco que une a p con s. Note que como X no contiene círculos $A_s \subset A_y \cup sy$ [Ver figura] además

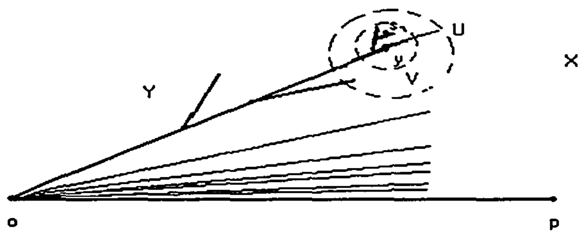
$$A_s \subset A_y \cup sy \subset N_\delta(A_y) \cup V \subset N_\delta(A_y) \cup B_{\frac{\delta}{4}}(y) \subset N_\delta(A_y)$$

por lo tanto $A_s \subseteq N_\delta(A_y)$. Por otro lado veamos que $A_y \subset A_s \cup sy$, como $sy \subset V \subset B_{\frac{\delta}{4}}(y)$, $d(y,t) < \frac{\delta}{2}$ $\forall t \in sy$, así tenemos que $d(s,t) \leq d(s,y) + d(y,t) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ $\forall t \in sy$, por lo tanto $sy \subseteq N_\delta(A_s) = \bigcup_{x \in A_s} B_\delta(x)$ por lo que

$$A_y \subset A_s \cup sy \subset N_\delta(A_s) \cup N_\delta(A_s) = N_\delta(A_s)$$

luego entonces $A_y \subseteq N_\delta(A_s)$. Por lo tanto $H_d(A_y, A_s) < \delta$, que por la continuidad de μ implica que

$|\mu(A_s) - \mu(A_y)| = |f(s) - f(y)| < \varepsilon$ por lo tanto f es continua $\forall y \in Y$. Por lo tanto $f|_Y$ es continua ■



Lema 2.2 *Sea X un continuo arco conexo sin triodos simples, ni círculos entonces para toda $p, q \in X$ y $\forall x \in X$ con $x \notin pq$ se tiene que:*

$$pq \subseteq xq \quad ó \quad pq \subset px$$

Demostración. Sean $p, q, x \in X$ tal que $x \notin pq$. Como X no tiene círculos ni triodos entonces x se une con un arco, al arco pq en p o en q
Por lo tanto $pq \subseteq xq$ ó $pq \subseteq px$ ■

Ahora probaremos la primera caracterización del arco.

Un continuo de Peano, atriódico y sin curvas cerradas simples es un arco.

Demostración. Para cada punto $x \in X$, definamos $f_x : X \longrightarrow [0, \mu(X)]$ por $f_x(y) = \mu(xy)$, donde xy es el único arco que une a x con y. La función f_x está bien definida ya que si X es un continuo localmente conexo, entonces X es arco conexo.
Sea $x_0 \in X$ fijo, como X es localmente conexo, entonces f_{x_0} es continua según la proposición 2.1
Sabemos que toda función continua que esta definida de un compacto a $\mathbb{R}$ alcanza su punto máximo. Sea $p \in X$ tal que

$$f_{x_0}(p) = max\{f_{x_0}(y) \mid y \in X\}$$

Análogamente sea $q \in X$ tal que

$$f_p(q) = max\{f_p(y) \mid y \in X\}.$$

Afirmamos: $X = pq$.

Prueba. Claramente $pq \subseteq X$. Observemos que $x_0 \in pq$, ya que si $x_0 \notin pq$ entonces ocurrirían dos casos:

$$x_0p \subset x_0q \quad \text{ó} \quad pq \subset x_0p$$

Sí ocurre $x_0p \subset x_0q$ entonces $\mu(x_0p) < \mu(x_0q)$ esto es $f_{x_0}(p) < f_{x_0}(q)$ contradiciendo la elección de p.

O bien sí ocurre $pq \subset x_0p$ entonces $\mu(pq) < \mu(x_0p)$ esto es $f_p(q) < f_p(x_0)$ contradiciendo la elección de q. Por lo tanto $x_0 \in pq$

Ahora probaremos que para toda $z \in X$, $z \in pq$
Supongamos que $z \notin pq$. Como anteriormente se hizo hay dos casos:

$$pq \subseteq zp \quad \text{ó} \quad zp \subset zq$$

Sí ocurre $pq \subseteq zp$, entonces $\mu(pq) < \mu(zp)$, es decir $f_p(q) < f_p(z)$ contradiciendo la elección de q.

O bien sí ocurre $zp \subset zq$ entonces $p \in zq$ por lo que $pq \subset zq$ pero $x_0 \in pq$ entonces $x_0 \in zq$ por lo tanto $px_0 \subset zx_0$, así $\mu(zx_0) > \mu(px_0)$; es decir, $f_{x_0}(z) > f_{x_0}(p)$ contradiciendo la elección de p. Por lo que $\forall z \in X, z \in pq$; es decir, $X \subseteq pq$ y como $pq \subseteq X$ entonces $X = pq$. Por lo tanto X es un arco. ∎

Otra forma de probar la misma caracterización es como sigue:

Teorema 2.3 *Sea X un continuo de Peano. Si X no es un arco, entonces X contiene círculos o triodos.*

Demostración. Por el teorema 1.26, existen puntos que no son de corte. Sean p y q dos puntos que no son de corte, entonces $X \setminus \{p\}$ y $X \setminus \{q\}$ son conexos y abiertos. Por el teorema 1.11, X es arco conexo. Sea A un arco que une a p con q, $X \setminus A \neq \phi$, porque por hipótesis X no es un arco; sea $r \in X \setminus A$. Debido a que $X \setminus \{p\}$ y $X \setminus \{q\}$ son abiertos y conexos, se tiene por el teorema 1.13, que ambos conjuntos son arco conexos.
Si B es un arco que va de r a q entonces se tienen dos posibilidades que

$$B \cap A = \{q\} \quad \text{ó} \quad B \cap A \neq \{q\}$$

Si $B \cap A \neq \{q\}$ entonces sea R el punto tal que B intersecta a A por primera vez entonces el conjunto $A \cup rR$ es un triodo simple. (rR es el arco que une a r con R).
Análogamente sí C es un arco que une a r con p tenemos dos casos:

$$C \cap A = \{p\} \quad \text{ó} \quad C \cap A \neq \{p\}$$

Si ocurre $C \cap A = \{p\}$ y $B \cap A = \{q\}$ tenemos un círculo en $C \cup B \cup A$
Si ocurre $C \cap A \neq \{p\}$ con un análisis similar a la parte anterior obtenemos un triodo simple. ∎

Dicho de otra forma **Un continuo X localmente conexo que no tiene triodos, ni círculos es un arco.**

Capítulo 3

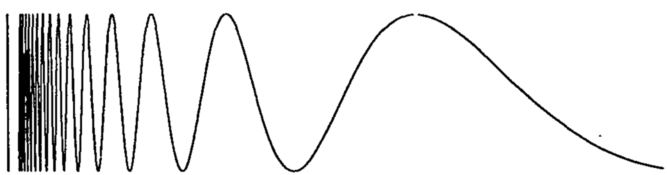
SEGUNDA CARACTERIZACION

Todo continuo arco − conexo tipo arco es un arco.

Para la siguiente caracterización utilizaremos los llamados continuos tipo arco.
Comencemos definiendo lo que es una ε-función.

Definition 3.1 *Sean X y Y espacios métricos, y $f : X \rightarrow Y$ y $\varepsilon > 0$ entonces f es una ε-función, siempre que f sea continua y $diam(f^{-1}(f(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in X$.*

Definition 3.2 *Se dirá que un continuo X es tipo arco si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε- función sobre algún arco.*



Continuo tipo-arco

Veamos que esta propiedad es hereditaria.

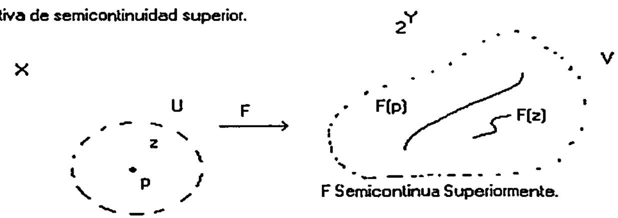
Definition 3.3 *Sea P una propiedad topológica de un continuo. Diremos que P es **hereditaria** si cada subcontinuo tiene la propiedad.*

Teorema 3.4 *Cada subcontinuo de un continuo X tipo arco es tipo arco.*

Demostración. Sea X un continuo tipo arco y sea Y un subcontinuo no degenerado de X. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $diam(Y) > \varepsilon$. Sea f una $\varepsilon-función$ de X sobre un arco A. Sea $g = f|_Y$ entonces como $g^{-1}(g(y)) = f^{-1}(g(y)) \cap Y$, se tiene que $diam(g^{-1}(g(y))) = diam(f^{-1}(g(y)) \cap Y) < \varepsilon$ por lo tanto g es una $\varepsilon - función$. Ahora bien como $\varepsilon < diam(Y)$, entonces $g(Y)$ es no degenerado, por lo que $g(Y)$ es un arco, ya que $g(Y)$ es un subconjunto conexo y compacto de un arco A. Por lo tanto hemos probado que existe una $\varepsilon - función$ de Y sobre un arco para cada $\varepsilon > 0$. ■

Definition 3.5 *Sean X y Y espacios topológicos. Una función $F : X \longrightarrow 2^Y$ es **Semicontinua superiormente en un punto** $p \in X$, si para cada conjunto abierto V de Y con $F(p) \subseteq V$, hay un conjunto abierto U de X con $p \in U$ tal que $\forall z \in U$, $F(z) \subseteq V$. F es **semicontinua superiormente**, si es semicontinua superiormente en cada punto $p \in X$.*

Idea Intuitiva de semicontinuidad superior.



F Semicontinua Superiormente.

Proposición 3.6 *Sea $F : X \to 2^X$, F es semicontinua superiormente si y sólo si el conjunto $A = \{x \in X \mid F(x) \subseteq V\}$ es abierto para cada conjunto abierto V en Y.*

Demostración. $\Longrightarrow \rfloor$ Supongamos que F es semicontinua superiormente. Sean V un conjunto abierto de Y y $A = \{x \in X \mid F(x) \subseteq V\}$. Demostraremos que A es abierto. Sea $x \in A$, por hipótesis existe un conjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $\forall z \in U$, $F(z) \subseteq V$, por lo tanto A es un conjunto abierto de X.

$\Longleftarrow \rfloor$ Sea $p \in X$. Demostraremos que F es semicontinua superiormente en p. Sea V un conjunto abierto de Y tal que $F(p) \subseteq V$, entonces por hipótesis $A = \{x \in X \mid F(x) \subseteq V\}$ es un conjunto abierto, pero $p \in A$, entonces haciendo $U = A$, en la definición 3.5 tenemos que $\forall z \in U$, $F(z) \subseteq V$ por lo tanto F es semicontinua superiormente en p, $\forall p \in X$. Por lo tanto F es semicontinua superiormente. ■

Proposición 3.7 *Sea f una función de X sobre Y tal que $f^{-1}(y)$ es cerrado en X para cada $y \in Y$. Definamos una función $F : Y \to 2^X$ con la siguiente regla: $F(y) = f^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$. Entonces f es una función cerrada si y sólo si F es semicontinua superiormente.*

Demostración. $\Longrightarrow \rfloor$Sean $y \in Y$ y U un conjunto abierto de X tal que $F(y) \subseteq U$. Como U es un conjunto abierto, $X \backslash U$ es un conjunto cerrado entonces por hipótesis $f(X\backslash U)$ es un conjunto cerrado con $y \notin f(X\backslash U)$, por que si $y \in f(X \setminus U)$ entonces existe $z \in X\backslash U$ tal que $f(z) = y$ lo cual no es posible ya que $z \in f^{-1}(y) \subseteq U$. Luego $Y\backslash f(X\backslash U)$ es un conjunto abierto, tal que $y \in Y\backslash f(X\backslash U)$. Sean $W = Y \setminus f(X \setminus U)$ y $z_0 \in W$; afirmamos que W es el conjunto buscado para la semicontinuidad superior. Como $z_0 \in W$ entonces $z_0 \in Y$ y $z_0 \notin f(X \setminus U) = \{f(x) \mid x \in X \setminus U\}$, esto es, no hay $x \in X \setminus U$ tal que $f(x) = z_0$ esto implica $f^{-1}(z_0) \cap (X \setminus U) = \phi$ entonces $f^{-1}(z_0) \subseteq U$, pero $f^{-1}(z_0) = F(z_0)$ por lo que $F(z_0) \subseteq U$ $\forall z_0 \in W$. Como $y \in W \subseteq U$, se tiene que F es semicontinua superiormente.

$\Longleftarrow$]Sea C un conjunto cerrado de X. Demostraremos que $f(C)$ es cerrado en Y, o equivalentemente que $Y \setminus f(C)$ es un conjunto abierto en Y. Sea $y \in Y \setminus f(C)$ entonces $y \in Y$ y $y \notin f(C)$ esto implica que $f^{-1}(y) \cap C = \phi$ ya que si $f^{-1}(y) \cap C \neq \phi$ ocurriría que existiría un punto $z \in f^{-1}(y) \cap C$, es decir $f(z) \in f(C)$ pero $f(z) = y \in f(C)$ contradicción. Por lo tanto $F(y) = f^{-1}(y) \subseteq X \setminus C$, pero como C es un conjunto cerrado, $X \setminus C$ es un conjunto abierto y por la semicontinuidad superior existe un conjunto W abierto tal que $F(z) \subset X \setminus C$ $\forall z \in W$, por lo tanto $f^{-1}(z) \subseteq X \setminus C$ por lo que $f^{-1}(z) \cap C = \phi$, así $z \notin f(C)$ $\forall z \in W$, luego entonces $W \subseteq Y \setminus f(C)$. Por lo tanto $Y \setminus f(C)$ es un conjunto abierto implicando que $f(C)$ es un conjunto cerrado. ■

Definition 3.8 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **normal** si y sólo dados F_1 y F_2 cerrados ajenos en X existen U y V abiertos ajenos tal que $F_1 \subset U$ y $F_2 \subset V$*

Proposición 3.9 *Sea X un espacio normal entonces para cualesquiera dos cerrados ajenos E y F existen dos subconjuntos abiertos U y V ajenos tales que $E \subset U$, $F \subset V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$.*

Demostración. Sean E, F dos subconjuntos cerrados y ajenos de X. Entonces por normalidad existen dos conjuntos abiertos G y H ajenos tales que $E \subseteq G$ y $F \subseteq H$. Como G es abierto $X \setminus G$ es cerrado y $E \cap (X \setminus G) = \phi$, aplicando de nuevo normalidad existen U y W conjuntos abiertos y ajenos tales que $E \subset U$ y $(X \setminus G) \subset W$, así $U \subset (X \setminus W) \subset G$ y por lo tanto $\overline{U} \subset (X \setminus W)$ por ser $X \setminus W$ cerrado.
Por lo tanto $E \subset \overline{U} \subset G$. Análogamente existe un subconjunto abierto V tal que $F \subset \overline{V} \subset H$ y como $H \cap G = \phi$, $\overline{V} \cap \overline{U} = \phi$. ■

Definition 3.10 *Un continuo* X *es* **unicoherente** *si siempre que* $X = A \cup B$ *con* $A, B \in C(X)$, *se cumple que* $A \cap B$ *es conexo.*

Continuo unicoherente.

Teorema 3.11 *Cada continuo* X *tipo arco es hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Por el teorema 3.4 basta probar que X es unicoherente. Sea X un continuo tipo arco. Supongamos que X no es unicoherente; es decir, existen $A, B \in C(X)$ tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo, así existen P y Q dos subconjuntos cerrados de $A \cap B$ con $P \cap Q = \phi$ tal que $A \cap B = P \cup Q$.
Como $A \cap B$ es un subconjunto cerrado de X, entonces P y Q son cerrados en X, por la proposición 3.9 existen dos subconjuntos abiertos U y V de X tales que $P \subset U$, $Q \subset V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$.
Como $A \cap B = P \cup Q$ y dado que $P \subseteq U$, tenemos que $A \cap U \neq \phi$. De manera análoga como $Q \subset V$ tenemos que $A \cap V \neq \phi$. Pero como A es conexo, y $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$ entonces $A \not\subset U \cup V$. Similarmente $B \not\subset U \cup V$. Por lo anterior $A \setminus [U \cup V]$ y $B \setminus [U \cup V]$ son conjuntos cerrados no vacíos. Sea

$$\varepsilon = min\{d(\overline{U}, \overline{V}), d(A \setminus [U \cup V], B), d(A, B \setminus [U \cup V])\}$$

Afirmamos que $\varepsilon > 0$, ya que en todos los casos tenemos conjuntos cerrados ajenos.
Como X es un continuo tipo arco, existe una $\varepsilon - función\ f$ de X sobre $[0, 1]$. Sea $J = f(A) \cap f(B)$. Ahora construiremos dos conjuntos G y H en $[0, 1]$. Sean $G = \{t \in J | f^{-1}(t) \subset U\}$ y $H = \{t \in J | f^{-1}(t) \subset V\}$.

1.- G y H son abiertos y ajenos en J.
Demostración. Sabemos que toda función continua de un compacto a un Hausdorff es cerrada. Como la $\varepsilon - función$ f satisface estas condiciones entonces f es cerrada. Definamos una función $F : [0,1] \longrightarrow 2^X$ como $F(y) = f^{-1}(y)$, así por la proposición 3.7 F es semicontinua superiormente y por la proposición 3.6 los conjuntos $G = \{t \in J | f^{-1}(t) \subset U\}$ y $H = \{t \in J | f^{-1}(t) \subset V\}$ son conjuntos abiertos de $[0,1]$ y como $U \cap V = \phi$ entonces $H \cap G = \phi$.

2.- $H \neq \phi$ y $G \neq \phi$.
Demostraremos que $G \neq \phi$. Para esto probaremos que $f(P) \subseteq G$. Sea $p \in P \subseteq U$ entonces $f(p) \in J$ como $p \in A \cap B$ entonces $f(p) \in f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) = J$ por lo tanto $f(p) \in J$.
Como f es una $\varepsilon - función$, $diam(f^{-1}(f(p))) < \varepsilon$.
Nótese que $p \in U$, porque $P \subseteq U$. Sea $x \in f^{-1}(f(p))$ entonces $d(x,p) < \varepsilon$ esto implica que $x \notin \overline{V}$ porque $d(\overline{U}, \overline{V}) \geq \varepsilon$, también $x \notin A \setminus [U \cup V]$, ya que $p \in B$ porque $A \cap B = P \cup Q$ y además $d(A \setminus [U \cup V], B) \geq \varepsilon$ y también $x \notin B \setminus [U \cup V]$ porque $d(B \setminus [U \cup V], A) \geq \varepsilon$ y $p \in A$, por lo tanto $x \in U$, así $f^{-1}(f(p)) \subseteq U$.
Por lo que $f(p) \in G$. Entonces $f(P) \subseteq G$ y por lo tanto $G \neq \phi$. Similarmente $H \neq \phi$.

3.- $J = G \cup H$.
Por construcción $G \cup H \subseteq J$. Por demostrar que $J \subseteq G \cup H$. Supongamos que $J \neq G \cup H$, entonces $J \setminus G \cup H \neq \phi$, así existe $z \in J$ tal que $z \notin G \cup H$, esto implica que $f^{-1}(z) \subsetneq U \cup V$. Por lo tanto existe $x \in f^{-1}(z)$ tal que $x \notin U \cup V$, sin perdida de generalidad supongamos que $x \in A \setminus [U \cup V]$, como $z \in J = f(A) \cap f(B)$ entonces existe $b \in B$ tal que $f(b) = z$. Por lo tanto $x, b \in f^{-1}(z)$, pero f es una $\varepsilon - función$ así $d(x,b) < \varepsilon$, lo cual no puede ser porque $b \in B$, $x \in A \setminus (U \cup V)$ y $d(A \setminus [U \cup V], B) \geq \varepsilon$. Por lo tanto $J = G \cup H$.
Por lo tanto como $J = G \cup H$, $G \cap H = \phi$ y $G \cap J \neq \phi \neq J \cap H$, J es disconexo lo cual no puede ser porque J es conexo por ser la intersección de dos subcontinuos de $[0,1]$.
Por lo tanto estuvo mal suponer que X no era unicoherente. Por lo tanto X es unicoherente. Por lo tanto X es hereditariamente unicoherente. ∎

Teorema 3.12 *Sean X un espacio topológico conexo y C un subconjunto conexo de X tales que $X \setminus C = A \cup B$ con A, B subconjuntos mutuamente separados de X entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos. Si X y C son continuos entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ también lo son.*

Demostración. Supongamos que $A \cup C = H \cup K$ con H y K conjuntos mutuamente separados; es decir, $\overline{K} \cap H = \phi = \overline{H} \cap K$. Como C es conexo, se tiene que $C \subseteq K$ o $C \subseteq H$, sin perdida de generalidad supongamos que $C \subseteq K$. De aquí $H \subseteq A$ por lo que $\overline{B} \cap H = \phi = \overline{H} \cap B$ así $H \cap \overline{(B \cup K)} = H \cap (\overline{B} \cup \overline{K}) = (H \cap \overline{B}) \cup (H \cap \overline{K}) = \phi$ y $\overline{H} \cap (B \cup K) = (\overline{H} \cap B) \cup (\overline{K} \cap B) = \phi$ en otras palabras H y $B \cup K$ son conjuntos mutuamente separados tales que $X = H \cup (B \cup K)$; contradiciendo el hecho de que X es conexo. Por lo tanto $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos.
Ahora demostraremos que si X y C son continuos entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son cerrados.
Probaremos primero que $\overline{A} \cup C = A \cup C$. Es claro que $A \cup C \subseteq \overline{A} \cup C$.
Ahora si $x \in \overline{A} \cup C$ entonces $x \in \overline{A}$ o $x \in C$, si $x \in C$ entonces $x \in A \cup C$, pero si $x \in \overline{A}$ y dado que $\overline{A} \cap B = \phi$ y $X = A \cup B \cup C$ entonces $x \in A \cup C$, por lo tanto $\overline{A} \cup C = A \cup C$. De esta manera $\overline{A \cup C} = \overline{A} \cup \overline{C} = \overline{A} \cup C = A \cup C$.
Por lo tanto $A \cup C$ es cerrado, análogamente $B \cup C$ es cerrado.
Así que como $A \cup C$ y $B \cup C$ son cerrados en un compacto entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son compactos, además son conexos, por lo tanto son continuos. ■

Teorema 3.13 *Todo continuo X tipo arco es atriódico.*

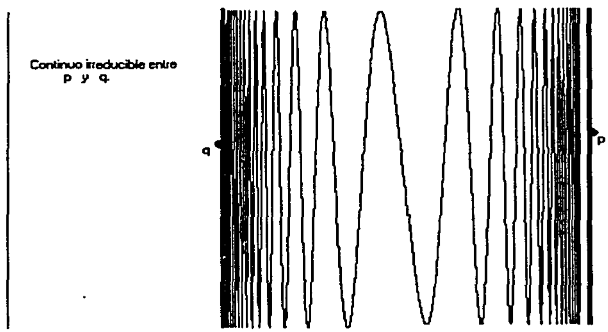
Demostración. Por el teorema 3.4, es suficiente probar que el mismo continuo tipo arco no es un triodo. Supongamos que X es un continuo tipo arco, el cual es un triodo. Entonces por definición de triodo, existe un subcontinuo Z de X tal que $X \setminus Z = \bigcup_{i=1}^{3} U_i$ donde cada U_i es abierto y los U_i están mutuamente separados. Sea $X \setminus Z = U_i | (U_j \cup U_k)$ $i \neq j$, $j \neq k$ y $i \neq k$. Entonces por el teorema 3.12, $U_i \cup Z$ es un continuo para cada $i = 1, 2, 3$. Fijemos ahora para cada i un punto $p_i \in U_i$ y tomemos

$$\varepsilon = min\{d(p_i, X \setminus U_i) | i = 1, 2, 3\} > 0 .... (1)$$

Como X es tipo arco existe una $\varepsilon-función$ f de X sobre $[0, 1]$. Sea $J_i = f(U_i \cup Z)$ $\forall i = 1, 2, 3$ cada J_i es un subintervalo cerrado de $[0, 1]$.

Note que $[0,1] = U_{i=1}^{3} J_i$ por que f es sobre y $\bigcap_{i=1}^{3} J_i \supset f(Z) \neq \phi$. De aquí uno de los conjuntos J_1, J_2, J_3 está contenido en la unión de los otros dos. Sin pérdida de generalidad supongamos $J_1 \subset J_2 \cup J_3$ luego entonces $f(p_1) = f(q)$ para algún $q \in Z \cup U_2 \cup U_3$ como f es una $\varepsilon - función$, se tiene que $d(p_1, q) < \varepsilon$, por otro lado como $q \in X \setminus U_1$ y por (1) se tiene que $d(p_1, q) \geq \varepsilon$, contradiciendo lo anterior. Por lo tanto X no puede ser un triodo. Por lo tanto X es atriódico. ■

Definition 3.14 *Se dirá que un continuo X es* ***irreducible*** *si existen dos puntos p y q tales que no existe un subcontinuo propio de X que los contenga.*



El siguiente resultado es muy importante.

Teorema 3.15 *(Teorema de Sorgenfrey)Todo continuo no degenerado, unicoherente y atriódico, es irreducible.* *[1,T.11.34 pag. 216]*

Teorema 3.16 *Cada continuo X tipo arco es irreducible*

Demostración. Por el teorema 3.11, X es hereditariamente unicoherente y por el teorema 3.13 X es atriódico. Entonces por el teorema 3.15 X es irreducible y por lo tanto hereditariamente irreducible. ■

Ahora probaremos la caracterización de este capítulo.

Todo continuo arco — conexo tipo arco es un arco.

Demostración. Como X es tipo arco, es irreducible, sean $p, q \in X$ tal que X es irreducible entre p y q, como X es arco conexo entonces existe un arco pq que une a p con q, por lo tanto $pq = X$ ya que X es irreducible entre p y q. Por lo tanto X es un arco. ■

Corolario 3.17 *Todo continuo tipo arco, localmente conexo es un arco.*

Demostración. Como X es un continuo localmente conexo entonces X es arco conexo y X es tipo arco entonces por el teorema anterior que X es un arco. ■

Otra forma de probar que el único continuo tipo arco, localmente conexo es un arco es como sigue.(sin utilizar lo arco-conexo directamente).

Demostración. Sabemos que un continuo tipo arco es atriódico y hereditariamente unicoherente esto implica que X no contiene círculos. Por lo tanto como X es localmente conexo y al ser tipo arco, no contiene ni círculos ni triodos, entonces se tiene por la primera caracterización que X es un arco. ■

Capítulo 4

TERCERA CARACTERIZACION

Sea X un continuo tipo arco entonces X es imagen continua de 2^X ó $C(X)$ si y sólo si X es un arco.

Teorema 4.1 *Sean X y Y espacios topológicos Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ continua y sobre. Si X es arco-conexo entonces Y es arco-conexo.*

Demostración. Por el teorema 1.15, basta probar que Y es conexo por trayectorias. Sean p, $q \in Y$. Probaremos que existe una trayecctoria que une a p con q. Consideremos $x \in f^{-1}(p)$ y $y \in f^{-1}(q)$, como X es arco-conexo existe un arco $A \subseteq X$ que une a x con y; es decir, existe un homeomorfismo $\sigma : [0,1] \longrightarrow A$ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.
Ahora consideremos la siguiente composición $\alpha = f \circ \sigma : [0,1] \longrightarrow Y$.
α es continua por ser composición de funciones continuas, además $\alpha(0) = f \circ \sigma(0) = f(x) = p$ y $\alpha(1) = f \circ \sigma(1) = f(y) = q$, de esta manera α es una trayectoria en Y que une a p con q. Por lo tanto Y es conexo por trayectorias y por ser Hausdorff se tiene por el teorema 1.15 que Y es arco-conexo. ∎

Como se puede observar la caracterización tiene que ver con funciones definidas en 2^X o $C(X)$.

Sea X un continuo tipo arco entonces X es imagen continua de 2^X ó $C(X)$ si y sólo si X es un arco.

Demostración. $\Rightarrow]$ Sea X un continuo tipo arco entonces como $C(X)$ y 2^X son arco conexos entonces la imagen continua es arco conexa, es decir X es arco conexo, pero X es un continuo tipo arco, por lo tanto la caracterización anterior nos dice que X es un arco.

$\Leftarrow]$Para el inverso sabemos que hay funciones de Whitney para $C(I)$ las cuales son continuas; es decir $\mu : C(I) \longrightarrow [0, \mu(I)]$ y $[0, \mu(I)]$ es homeomorfo a $[0,1]$ por lo tanto se tiene una función continua de $C(I)$ a I. En particular podríamos definir una función de $C(I)$ a I como sigue $\mu : C(I) \longrightarrow [0,1]$ definida por la regla de correspondencia $\mu([a,b]) = b - a$.

Claramente μ es sobre, ya que si $t \in [0,1]$ entonces $\mu([0,t]) = t$. Probaremos que μ es continua. Sea $[a,b] \in C(I)$ (a puede ser igual a b); es decir, probaremos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $\delta > 0$ tal que $H_d([a,b],[c,d]) < \delta$ entonces $(\mu([a,b]) - \mu([c,d])) < \varepsilon$.
Si $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ entonces si $[c,d] \subseteq N(\delta,[a,b])$ y si $[a,b] \subseteq N(\delta,[c,d])$ entonces $|c-a| < \delta$ y $|d-b| < \delta$ entonces
$|(a-b)-(c-d)| = |(a-c)+(b-d)| \leq |c-a| + |d-b| < \delta + \delta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Por lo tanto μ es continua. ■

Una función continua para 2^X sobre $[0,1]$ es como sigue.

$$\begin{aligned} f : 2^I &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto f(A) = \min A \end{aligned}$$

El $\min A$ existe porque A es un subconjunto no vacío, cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Claramente f es sobre ya que si $\alpha \in [0,1]$ entonces $f([\alpha,1]) = \alpha = \min([\alpha,1])$; f es continua: Para $A \in 2^X$ y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $B \in 2^X$ y $H_d(A,B) < \delta$ entonces $|f(A) - f(B)| < \varepsilon$. Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, si $H_d(A,B) < \delta$; es decir, si $A \subseteq N_\delta(B)$ y $B \subseteq N_\delta(A)$ entonces existe $b \in B$ tal que $|\min A - b| < \delta$ así $|\min A - \min B| \leq \delta < \varepsilon$ en otras palabras $|f(A) - f(B)| < \varepsilon$. Por lo tanto f es continua.

Capítulo 5

CUARTA CARACTERIZACION

Un continuo X es un arco si y sólo si existen p y $q \in X$ con $p \neq q$ tal que $ord(p, X) = ord(q, X) = 1$ y $ord(x, X) = 2$ $\forall x \neq p, q$.

Aquí se probará también una caracterización del círculo, utilizando el concepto de gráfica y el orden de un subconjunto A de X.

Para cada conjunto A, denotemos por $|A|$ la cardinalidad de A.

El siguiente concepto nos va a ayudar para la clasificación de curvas. El concepto es el de orden de un conjunto.

Definition 5.1 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Sea β un número cardinal. Diremos que A tiene orden o es de orden menor o igual que β en X, denotado por $ord(A, X) \leq \beta$, si para cada subconjunto abierto U existe otro conjunto abierto V, tal que $A \subseteq V \subseteq U$ y $|Fr(V)| \leq \beta$.*
Y diremos que A es de orden β en X, que denotamos por $ord(A, X) = \beta$, si $ord(A, X) \leq \beta$ y $ord(A, X) \not\leq \alpha$ para un número cardinal $\alpha < \beta$.
Si $A = \{p\}$ se escribe frecuentemente $ord(p, X)$ en vez de $ord(\{p\}, X)$. En particular si $ord(p, X) = 1$ decimos que p es un punto extremo de X.

Necesitamos un tipo especial de convergencia en un espacio topológico.

Definition 5.2 *Sea X un espacio topológico. Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X.*
Se define el límite superior de la sucesión $\{A_i\}$ ($limsup\, A_i$) y el límite inferior de la sucesión $\{A_i\}$ ($liminf\, A_i$) como sigue:

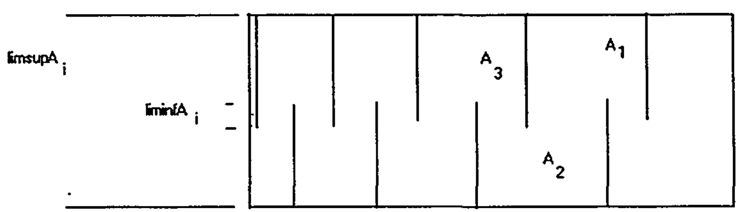
$limsup\ A_i = \{x \in X \mid \forall\, U$ subconjunto abierto con $x \in U$, $U \cap A_i \neq \phi$ para una infinidad de índices $\}$.

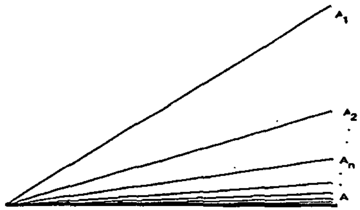
$liminf\ A_i = \{x \in X \mid \forall\, U$ subconjunto abierto con $x \in U$, $U \cap A_i \neq \phi$ excepto para una cantidad finita de índices$\}$.

Claramente $liminf\ A_i \subseteq limsup\ A_i$.

Definition 5.3 *Diremos que un subconjunto A de X es el límite de $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\lim A_i = A$ si y sólo si $liminf A_i = A = limsup A_i$.*

Ejemplo(donde se aprecia que el límite inferior es un subconjunto de el límite superior)





$\liminf A_i = \limsup A_i = A$

Ejemplo(donde se aprecia que el límite inferior coincide con el límite superior)

Notación: Sea X un espacio métrico compacto con topología τ. Para cada $U_1, U_2, U_{3,...,}U_n \in \tau \quad n < \infty$.
Sea $\langle U_1, U_2, U_{3,...,}U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subseteq \cup_{i=1}^n U_i \quad \text{y} \quad A \cap U_i \neq \phi \qquad \forall i = 1, ..., n\}$.

Para el siguiente teorema ver [1,T.4.5 pag. 54]

Teorema 5.4 *Sea X un espacio métrico compacto con métrica d y topologia τ. Entonces $\mathfrak{C} = \{\langle U_1, U_2, U_{3,...,}U_n \rangle : U_i \in \tau \quad$ para cada $\quad i = 1, ..., n\}$ es una base para la topología en 2^X obtenida por la métrica de Hausdorff.*

Lema 5.5 *Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X. Entonces*

$$\limsup A_i \neq \phi \qquad y \qquad \overline{\limsup A_i} = \limsup A_i$$

es decir, $\limsup A_i$ *es un conjunto cerrado.*

Demostración. Supongamos que $\limsup A_i = \phi$, esto es, para toda $x \in X$ existe un abierto U_x que contiene a x tal que U_x intersecta a lo más un número finito de A_i's. Sea $X = \bigcup_{x \in X} U_x$, entonces por compacidad existen $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ tales que $X = \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, como cada U_{x_i} intersecta a lo más un número finito de A_i's, $\cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ también intersecta solamente un número finito de A_i's. Esta es una contradicción ya que $X = \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Por lo tanto $\limsup A_i \neq \phi$.
Ahora probaremos que $\overline{\limsup A_i} = \limsup A_i$
Claramente $\limsup A_i \subseteq \overline{\limsup A_i}$
Sea $x \in \overline{\limsup A_i}$ entonces para cada abierto U que contiene a x, $U \cap \limsup A_i \neq \phi$. Sea $y \in U \cap \limsup A_i$, U es un abierto que contiene a y y como $y \in \limsup A_i$ entonces $U \cap A_i \neq \phi$ para una infinidad de índices, como esto ocurre para cualquier abierto U que contiene a x, entonces $x \in \limsup A_i$.
Por lo tanto $\overline{\limsup A_i} \subseteq \limsup A_i$. Por lo tanto $\limsup A_i$ es cerrado. ■

Teorema 5.6 *Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_i\}$ una sucesión de elementos en 2^X, entonces $\lim A_i = A$ (con respecto a la mérica de Hausdorff) si y sólo si $\limsup A_i = A = \liminf A_i$.*

Demostración. $\Leftarrow$] Por el lema 5.5, $A \in 2^X$ ya que $A = \limsup A_i$. Para probar que $\lim A_i = A$ con respecto a la métrica de Hausdorff usaremos el teorema 5.4.
Sean $U_1, ..., U_n$ abiertos de X tales que $A \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$,como $A \cap U_j \neq \phi$ para cada j y dado que $\liminf A_i = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

1.- $A_i \cap U_j \neq \phi \qquad \forall i \geq N_1 \quad$ y $\quad \forall j \leq n$
Como $A \subseteq \underset{j=1}{U_j}$, afirmamos que

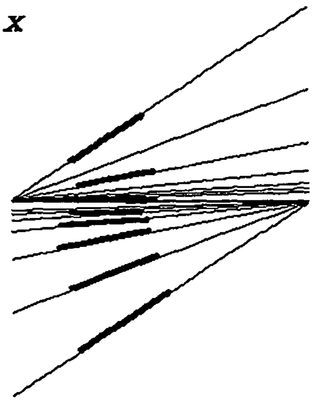
2.-$A_i \subseteq U_{j=1}^{n} U_j \quad \forall i \geqq N_2$ para algún $N_2 \in \mathbb{N}$.
Si suponemos lo contrario; es decir, si para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $i_N \in \mathbb{N}$, y $x_{i_N} \in A_{i_N}$ tal que $x_{i_N} \notin \cup_{j=1}^{n} U_j$, entonces podemos construir una sucesión $\{x_{i_N}\} \subseteq X \setminus \left(\cup_{j=1}^{n} U_j\right)$. Como $X \setminus \left(\cup_{j=1}^{n} U_j\right)$ es cerrado en un compacto entonces es compacto, así $\{x_{i_N}\}$ tiene una subsucesión $\{x_{i_k}\}$ que converge a un punto $x \in X \setminus \left(\cup_{j=1}^{n} U_j\right)$. Por otro lado por definición de $\limsup A_i$, $x \in \limsup A_i = A \subseteq \cup_{j=1}^{n} U_j$, por lo que $x \in \cup_{j=1}^{n} U_j$, contradiciendo lo anterior.
Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos por (1) y (2) que

3.-$A_i \in \langle U_1, ..., U_n \rangle \quad \forall i \geqq N$.
Por lo tanto $\{A_i\}$ converge a A con la métrica de Hausdorff.

$\Rightarrow]$Probaremos que $A \subseteq \liminf A_i$ y $\limsup A_i \subseteq A$.

1.-$A \subseteq \liminf A_i$: Sea $p \in A$. Sea U un conjunto abierto de X conteniendo a p. Si $A = \{p\}$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subseteq U$, de esta manera por la convergencia, para alguna $N \in \mathbb{N}$, $A_i \subseteq B_\varepsilon(p) \quad \forall i \geqq N$. Por lo tanto $A_i \cap U \neq \phi$ excepto para un número finito de índices, así $A = \{p\} \subseteq \liminf A_i$. Supongamos ahora que $A \neq \{p\}$. Entonces $A \in \langle U, X \setminus \{p\}\rangle$. Como $\langle U, X \setminus \{p\}\rangle$ es un subconjunto abierto de 2^X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i \geqq N$, $A_i \in \langle U, X \setminus \{p\}\rangle$. Así $A_i \cap U \neq \phi \quad \forall i \geqq N$. Por lo tanto $p \in \liminf A_i$ y por lo tanto $A \subseteq \liminf A_i$.

2.-$\limsup A_i \subseteq A$: Para probar esta contención lo haremos por complementos; es decir, probaremos que $(X \setminus A) \subseteq (X \setminus \limsup A_i)$. Sea $x \in (X \setminus A)$ (Si $A = X$, (2) se cumple trivialmente) . Sea W un conjunto abierto de X tal que $A \subseteq W$ y $x \notin \overline{W}$. Como $A \in \langle W \rangle$ y $\langle W \rangle$ es un subconjunto abierto de 2^X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i \geqq N$, $A_i \in \langle W \rangle$; es decir, $A_i \subset W \quad \forall i \geqq N$. Por lo tanto $A_i \cap \left(X \setminus \overline{W}\right) = \phi \quad \forall i \geqq N$, como $X \setminus \overline{W}$ es un abierto de X que contiene x, tenemos que $x \notin \limsup A_i$. Así hemos probado (2).
Por lo tanto como el $\limsup A_i \subset A \subset \liminf A_i \subset \limsup A_i$ entonces $\limsup A_i = \liminf A_i = A$. ■



Continuo de convergencia

Definition 5.7 *Sea X un espacio métrico. Diremos que un subcontinuo no degenerado A de X, es un* ***Continuo de Convergencia*** *de X si existe una sucesión $\{A_i\}$ de subcontinuos de X tal que $A = lim A_i$, con $A \cap A_i = \phi \quad \forall\, i = 1, ...$*
Si además X es compacto se pueden elegir los A_i's mutuamente ajenos, de la manera siguiente:
Sea $i_1 = 1$, como $A_1 \cap A = \phi$ se tiene que la distancia $d(A, A_1) > 0$. Elijamos i_2 de tal manera que $i_2 > i_1$ y $d_H(A, A_{i_2}) < \frac{d(A_1, A)}{2}$, i_3 se elije de tal manera $i_3 > i_2$ y $d_H(A, A_{i_3}) < \frac{d\left(A, A_{i_2}\right)}{2}$.
En general i_k se escoge de tal manera que $i_k > i_{k-1}$ y

$$d_H(A, A_{i_k}) < \frac{d\left(A, A_{i_{k-1}}\right)}{2}$$

así $A_{i_k} \cap A_{i_j} = \phi \qquad \forall k \neq j$ y $\lim_{k \to \infty} A_{i_k} = A$.

Lema 5.8 *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto conexo de X. Si U es un conjunto abierto de X tal que $U \cap A \neq \phi$ y $A \nsubseteq U$ entonces $fr(U) \cap A \neq \phi$.*

Demostración. Supongamos $fr(U) \cap A = \phi$ como $A \nsubseteq U$ entonces $A \cap (X \setminus \overline{U}) \neq \phi$ por lo que $A \subset (X \setminus \overline{U}) \cup U$ lo cual es una contradicción porque A es conexo y tanto U como $X \setminus \overline{U}$ son abiertos ajenos. Por lo tanto $fr(U) \cap A \neq \phi$. ∎

Proposición 5.9 *Si X es un continuo tal que $ord(x, X) < \aleph_0$ para cada $x \in X$, entonces X no tiene continuos de convergencia.*

Demostración. Supongamos que X tiene un continuo de convergencia A; esto es, existe una sucesión A_n, de subcontinuos tales que $\lim A_n = A$; como X es compacto los A_n los podemos tomar ajenos dos a dos.
Con esta suposición vamos a probar que hay un punto x tal que

$$ord(x, X) \geqq \aleph_0.$$

Sea $x \in A$, entonces para todo conjunto abierto U que contiene a x, se tiene que $U \cap A_i \neq \phi$ excepto para un conjunto finito de índices porque $A = \lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n$.

Como A es no degenerado, $diam A > 0$. Entonces si $\varepsilon < diam A$, y $V = B_\varepsilon(x)$, A_n está contenido en V a lo más para un número finito de índices n. Pues si $A_{n_k} \subseteq V$ para una infinidad de índices n_k entonces como $A = \lim A_{n_k}$, se tendría $diam A = \lim\limits_{n \to \infty} (diam A_{n_k}) \leqslant \varepsilon$. Entonces por el lema 5.8 $fr(V) \cap A_n \neq \phi$ excepto quizá para un número finito de índices y como los A_n's son disjuntos dos a dos tenemos que la $| fr(V) | \geqslant \aleph_0$. Por lo tanto $ord(x, X) \geqq \aleph_0$. Por lo tanto no hay continuos de convergencia. ∎

Teorema 5.10 ***(GOLPES EN LA FRONTERA)*** *Sean X un continuo, U un conjunto abierto de X, $U \subseteq X$ entonces si K es una componente de $\overline{U}$ entonces $K \cap Fr(U) \neq \phi$. [1, T.5.4, pag. 73].*

Teorema 5.11 *Sea M un continuo y*

$$N = \{p \in X : X \text{ no es conexo en pequeño en } p\}$$

Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K \subset N$

Demostración. Sea $p \in N$, entonces existe un abierto V que contiene a p tal que si U es una vecindad de p y $U \subset V$, entonces U no es conexo. Por otro lado como $p \in intV$ existe un abierto W tal que $p \in W$ y $\overline{W}$ es un subconjunto de V (por ser X regular). Note que $M = \overline{W}$ no es conexo. Sea C la componente de p en M, entonces $p \notin intC$ ya que si $p \in intC$, entonces C sería una vecindad conexa de p contenida en $M \subset V$, se sigue de lo anterior que $p \in \overline{M \setminus C}$ por lo tanto existe una sucesión $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq M \setminus C$ tal que:

1.-$\lim\limits_{i \to \infty} p_i = p$.
Sea C_i la componente de p_i en M entonces

2.-$C \cap C_i = \phi \quad \forall i \in \mathbb{N}$, ya que si $C_i \cap C \neq \phi$ para alguna i, $C \cup C_i$ sería un subcontinuo de M contenido en C porque C es la componente de p en M, de lo anterior $p_i \in C$, lo cual es una contradicción ya que $p_i \in M \setminus C$.

Sea Q una vecindad cerada de p tal que $Q \subset int\,(M)$. Podemos suponer que $p_i \in Q \quad \forall i$. Sea K_i la componente de p_i en Q. Es claro

3.- $K_i \subset C_i \qquad \forall i \in \mathbb{N}$

Como $C\,(X)$ es compacto la sucesión $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{K_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lim\limits_{j \to \infty} K_{i_j} = K \in C\,(X)$ tenemos que

4.- $p \in K$.

(De que $K_{i_j} \subset Q$; Q es cerrado en X y $\lim\limits_{j \to \infty} K_{i_j} = K$) se sigue

5.- $K \subset Q \subset int\,(M) \subset M$
Como K es conexo y usando (4) llegamos a

6.- $K \subset C$, entonces por (6), (3) y (2) $\quad K \cap K_{i_j} = \phi \qquad \forall j = 1, 2, 3, ..., ..$ por lo tanto si K no es degenerado K es un continuo de convergencia.

Probemos ahora que K no es degenerado. Por el teorema anterior $K_{i_j} \cup \left(\overline{X \setminus Q}\right) \neq \phi \qquad \forall j,$ y como $K = \lim\limits_{j \to \infty} K_{i_j}, \quad K \cap \left(\overline{X \setminus Q}\right) \neq \phi$. Por otro lado como $p \in int\,(Q)$ entonces $p \notin \overline{X \setminus Q}$, de aquí existe $q \in \overline{X \setminus Q}$ tal que $q \in K$ y $p \neq q$ por lo tanto K es no degenerado.

Por último probaremos que $K \subset M$. Supongamos que no es así; es decir, existe $x \in K$ tal que $x \notin N$. Por (5) tenemos que

7.- M es vecindad de x y por (6)

8.- C es la componente de x en M.

Como $x \notin N$, entonces X es conexo en pequeño en x, por (7) existe una vecindad conexa G tal que $G \subset M$, y por (8)

9.- $G \subset C$

Por (3) $x \in \limsup K_i \subset \limsup C_i$ y como $x \in int\,(G)$, existe un abierto U tal que $x \in U \subset G$. Por definición de limite superior, $U \cap C_i \neq \phi$ para una infinidad de i's así $G \cap C_i \neq \phi$ para una infinidad de i's y por (9) $C \cap C_i \neq \phi$ para una infinidad de i's, lo cual contradice (2). Por lo tanto $K \subset N$. ■

Proposición 5.12 *Si X es un continuo tal que $ord(x, X) < \aleph_0 \quad \forall x \in X$, entonces cada subcontinuo de X es un continuo de Peano. Por lo tanto cada subcontinuo de una gráfica es un continuo de Peano.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo tal que

$$ord(x, X) < \aleph_0 \quad \forall x \in X.$$

Se sigue de la proposición 5.9 que X no contiene continuos de convergencia. Por lo que ningún subcontinuo de X contiene subcontinuos de convergencia. Entonces por el teorema 5.11 tenemos que cada subcontinuo de X es conexo en pequeño en cada punto, por ende cada subcontinuo de X es de Peano. Esto prueba la primera parte. La segunda parte es utilizando la definición de gráfica y la proposición 5.9. Por lo tanto cada subcontinuo de una gráfica es un continuo de Peano. ■

Casi nos acercamos al resultado que queremos

Teorema 5.13 *Si un continuo de Peano no contiene triodos, entonces X es un arco ó un círculo.*

Demostración. Si X no es un arco, entonces por el teorema 2.3 X tiene triódos o curvas cerradas simples. Pero X no contiene triodos, por lo tanto X contiene círculos. Vamos a probar que el mismo espacio es un círculo.
Sea C un círculo de X. Supongamos que $X \setminus C \neq \phi$, sean $p \in X \setminus C$ y $q \in C$ Como X es arco conexo hay un arco A que va de p a q. Sea r el punto para el cual A intersecta a C por primera vez. Sean $a, b \in C$ y consideremos el arco ab que contiene a r, entonces $pr \cup ab$ es un triodo en X, contradiciendo el hecho de que X no contiene triodos. Por lo tanto estuvo mal suponer que $X \setminus C \neq \phi$. Por lo tanto $X = C$. Por lo tanto X es un círculo. ■

Teorema 5.14 *Si X es un continuo no degenerado entonces $ord(x, X) \leq 2$ $\forall x \in X$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. $\Longrightarrow$]Supongamos que $ord(x, X) \leq 2 \quad \forall x \in X$ entonces por el Teorema 5.12 X es un continuo de Peano y claramente, X no contiene triodos por que $ord(x, X) \leq 2$ $\forall x \in X$. Entonces por el Teorema 5.13, si X es un continuo de Peano sin triodos entonces X es un arco ó una curva cerrada simple.
$\Longleftarrow$]El círculo tiene la propiedad de que $ord(x, X) = 2$ y el arco I tiene la propiedad de que $ord(x, X) = 2$ si $0 < x < 1$, y

$$ord(0, X) = 1 = ord(1, X).$$

■

El siguiente resultado caracteriza a las curvas cerradas simples.

Corolario 5.15 *Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si cada punto x es de $ord(x, X) = 2$ en X.*

Demostración. $\Rightarrow$]Claramente toda curva cerrada simple cumple con que $ord(x, X) = 2$ $\forall x \in X$.
$\Leftarrow$]Si cada punto de X es de orden 2 en X entonces según el teorema 5.14 es un círculo (curva cerrada simple). ■

Un continuo X es un arco si y sólo si existen p y $q \in X$ con $p \neq q$ tal que $ord(p, X) = ord(q, X) = 1$ y $ord(x, X) = 2$ $\forall x \neq p, q$.

Demostración. $\Longrightarrow$) trivialmente un arco A tiene la propiedad de que existe $a, b \in A$ $ord(q, A) = 1 = ord(b, B)$ y $ord(x, A) = 2$ $\forall x \in A \setminus \{a, b\}$.

$\Longleftarrow$]Por el teorema 5.14 como $ord(x, X) \leq 2$ $\forall x \in X$, X es un arco o un círculo, pero no puede ser un círculo (según el corolario anterior) ya que existe al menos un punto de orden distinto de 2.
Por lo tanto X es un arco. ■

Capítulo 6

QUINTA CARACTERIZACION

Todo continuo X con exactamente dos puntos que no son de corte p y q es un arco

Para esta caracterización utilizaremos los conceptos de número de disconección y puntos de corte.

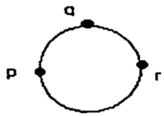
Definition 6.1 *(**Número de Disconección**). Sea X un espacio conexo. Un número cardinal $n \leq \aleph_0$ es llamado **número de disconección** para X si para cada $A \subseteq X$ tal que $|A| = n$, ocurre que $X \setminus A$ no es conexo.*

Denotaremos por $D(X) \leq \aleph_0$ a un número de disconección de X. Cuando $D(X) \leq \aleph_0$. Denotaremos por $D^S(X)$ al menor número de disconección para X.

Definition 6.2 *Una gráfica es un **árbol**, si no contiene curvas cerradas simples.*

Ejemplos de Números de disconección

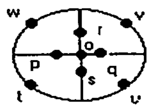
$X=S^1$



$A=\{p,q,r\}$. $|A|=3$ y $S^1 \setminus A$ es disconexo.

3 es un número de disconección para S^1. y $D^S(X)=2$

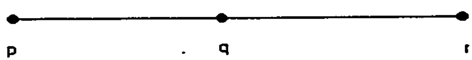
X



$A=\{o,p,q,r,s,t,u,v,w\}$. $|A|=9$ $D(X)=9$

$D^S(X)=5$

$X=[0,1]$



$A=\{p,q,r\}$ $|A|=3$ $D^S(X)=3$

El siguiente teorema se utilizará pero no se demostrará.

Teorema 6.3 *Sea X un continuo no degenerado entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. X es una gráfica
2. $D(X) < \aleph_0$
3. algún entero n es un número de disconección para X, es decir, $D^S(X) < \aleph_0$. [1,T.9.24, pag. 152].

El siguiente teorema nos dice como son los puntos de una gráfica con respecto a su orden.

Teorema 6.4 *Sea X un continuo. X es una gráfica entonces (1) y (2) se cumplen.*

1. $ord(x, X) < \aleph_0 \qquad \forall x \in X$
2. $ord(x, X) \leq 2 \qquad \forall x \in X$. excepto un número finito de puntos.

Demostración. Como X es la unión finita de arcos que dos a dos son ajenos o se unen en uno o en sus dos puntos finales, podemos tener tres clases de puntos en la gráfica:
i) Puntos finales, los cuales tienen orden uno y la cardinalidad de tal conjunto es finito, ya que sólo se tiene un número finito de arcos.
ii) Puntos en donde se unen tres o más arcos llamados puntos de ramificación cuyo orden es mayor o igual que tres y menor que $\aleph_0$, aquí sólo se tiene un número finito de puntos ya que sólo se tiene un número finito de arcos
iii) Puntos en donde no convergen tres o más arcos y que no son puntos finales, llamados puntos ordinarios que tienen orden dos que como la cardinalidad de X es igual a $2^{\aleph_0}$ entonces el $ord\,(x, X) = 2$ excepto un número finito de puntos. Por lo tanto (1) y (2) se tienen. ∎

Teorema 6.5 *Sea X un continuo, si sólo tiene un número finito de puntos que no son de corte.entonces X es un árbol.*

Demostración. Supongamos que X tiene sólo un número finito de puntos que no son de corte. Sea F tal conjunto.
Probaremos primero que $|F| + 1$ es un número de disconexión para X. Sea $A \subseteq X$, tal que $|A| = |F| + 1$, entonces existe $p \in A$ tal que p es un punto de corte de X. Por lo que hay al menos dos componentes de $X \setminus \{p\}$, las cuales son no númerables por ser ambas no degeneradas. Entonces como $p \in A$, $X \setminus A$ no es conexo y $|A| < \aleph_0$ tenemos que $|F| + 1$ es un número de disconexión para X. Así por el teorema 6.3 X es una gráfica.
Supongamos ahora que X contiene una curva cerrada simple S.
Sea $B = \{z \in S \mid ord(z, X) > 2\}$.
Observemos que un punto $p \in S \setminus B$ no es punto de corte de X, porque $S \setminus \{p\}$ es conexo y para cada $x \in X \setminus S$, existe un arco A en X, que une a x con un punto $z \in B$ tal que $A \cap S = \{z\}$. En otras palabras $(S \setminus B) \subset F$ pero como $|B| < \aleph_0$, por (2) del teorema 6.4, tenemos $|S \setminus B| \geq \aleph_0$, así hay una contradicción a la suposición de que $|F| < \aleph_0$ ya que $(S \setminus B) \subset F$. Por lo tanto X no tiene círculos. Así X es un árbol. ■

Finalmente llegamos al resultado que nos interesa.

Todo continuo X con exactamente dos puntos que no son de corte p y q es un arco

Demostración. $\Longrightarrow]$ Es claro.
$\Longleftarrow]$ Como X tiene un número finito de puntos de corte, entonces por el teorema 6.5, X es un árbol, por lo tanto una gráfica. Al ser X una gráfica es arco conexa.
Sea A un arco que une a p con q, entonces por el corolario 1.27, X es irreducible alrededor de p y q (es decir, no hay subcontinuo propio de X que contenga a p y q).
Por lo que A no puede ser propio. Por lo tanto $A = X$. Así X es un arco. ■

Bibliografía

[1] S.B. Nadler Jr. Continuum. Theory An Introduction, Marcel Deker, Inc. New Yord 1992.

[2] S.B. Nadler Jr. Hyperspaces of Sets, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol 49, M.arcel Dekker Inc.,N.Y. 1978.

[3] Illanes M. A. and S.B. Nadler Jr. Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances Marcel Dekker Inc. New York 1999.

[4] Hocking . J. G. and Young G.S, Topology, Addison-Wesley, Reading Mass, 1961.

[5] Henderson, G.W. Proof that Every Compact Decomposable Continuum. Which is Topologically Equivalent to Each of its nondegenerate subcontinua es an Arc, Annals of Mathematics Vol.72, No.3, 1960. p.p. 421-428.

[6] Kuratowski, K.,Topòlogy II Academic Press Inc., New York. London 1968.