7

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL INDICE DE PUNTO FIJO Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARAMETRIZADAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

S A E L C R U Z C A B E L L O

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO

2002

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"El índice de punto fijo y ecuaciones diferenciales parametrizadas"

realizado por Sael Cruz Cabello

con número de cuenta 9653479-7 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Carlos Prieto de Castro
Propietario	Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora
Propietario	Dra. Laura Ortiz Bobadilla
Suplente	Dr. Marcelo Alberto Aguilar González
Suplente	Dr. Ernesto Rosales González

Consejo Departamental de Matemáticas

P.A.

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

A Chavo, Elena y Elisa

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que me ayudaron en la realización de este trabajo. Esto incluye a mis sinodales y a todos los maestros que he tenido en todos estos años (Carlos, Marcelo, Laura y Ernesto, Mónica, Javier, Paz, Toño, Alejandro, ...); a mis padres Elena y Salvador; a mi hermana Elisa; a mis primos Leonardo y Adrián; a mis abuelitos Susén, María Luisa y Eleno, a mi cuate Marco; a todos los compañeros y amigos que he conocido en la facultad y el instituto: Elohim, Luis Edoardo, Pepe, Cruz, Tavo, Santiago, Barbas, Tatiana, Pablo, Rocío, Ivette, Galo, Era, Edgar, Omar, Miguel, Yuri, Jorge, Cristóbal, Araceli, Diana, Javier, Batata, Luis, Laura, Edna, Paulo, Mito, ...

El índice de punto fijo y ecuaciones diferenciales parametrizadas

Sael Cruz Cabello

Índice General

Introducción

Sea $h : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Consideremos la ecuación diferencial

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = h(t, y, \lambda) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^n$ es un parámetro. Estaremos interesados en encontrar parejas (y, λ) que satisfagan la ecuación $(*)$, donde $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable. Los teoremas clásicos de existencia de soluciones no nos garantizan nada en este caso, pues requerimos funciones $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definidas en todo el intervalo (no sólo en una vecindad de 0) y que además cumplan $y(1) = 0$. Preguntémonos entonces si $(*)$ tiene solución para alguna $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Nos gustaría poder dar una cota inferior N para el número de soluciones de $(*)$. Esto es posible bajo ciertas hipótesis adicionales sobre h. Decir explícitamente cuáles son estas condiciones y decir cuál es la cota inferior N es el resultado principal de este trabajo.

La principal herramienta que utilizamos para probar este resultado es el índice de punto fijo. En el capítulo 1 damos una primera definición de este concepto y probamos el teorema de Lefschetz-Hopf, que relaciona el índice de una aplicación con su número de Lefschetz. En el capítulo 2 generalizamos la clase de funciones para las que tiene sentido hablar del índice. Si en el capítulo 1 nos restringimos a aplicaciones $f : U \longrightarrow R^n$, con $U \subset V$ abierto, V retracto de vecindad euclidiana, en el capítulo 2 hablamos de funciones $f : U \longrightarrow X$ relativamente compactas, donde $U \subset X$ es abierto y X es un retracto absoluto de vecindad. Aunque no lo necesitaremos posteriormente, aquí probaremos el teorema de punto fijo de Schauder. En el capítulo 3 definimos el número de Nielsen $N(f)$ de una aplicación $f : X \longrightarrow X$ y probamos su propiedad esencial: $N(f) \leq |\mathrm{Fix}(g)|$, donde $g : X \longrightarrow X$ es cualquier aplicación homotópica a f y $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X | g(x) = x\}$. Finalmente, enfrentamos el problema de calcular una cota inferior para el número de soluciones de la ecuación

$$\begin{cases} Ly = H(y, \lambda) \\ B(y) = 0 \end{cases}$$

donde $L : E \longrightarrow F$ es un isomorfismo de espacios lineales normados reales, $H : E \times \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ una función tal que para todo $B \subset E \times \mathbb{R}^n$ acotado, se tiene que el conjunto $\overline{H(B)}$ es compacto (es decir, H es completamente continua) y $B : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal continua suprayectiva. Esto nos permitirá dar una cota inferior para el número de soluciones de la ecuación (*).

Capítulo 0

Conceptos preliminares

En este capítulo introductorio, daremos algunas definiciones elementales y fijaremos notaciones que serán usadas a lo largo de todo el texto.

0.1 Álgebra Homológica

En toda esta sección, R representará un anillo conmutativo con unidad, introduciremos primero los conceptos de R-módulo graduado y morfismos de R-módulos graduados, para después poder definir los complejos de cadenas de R-módulos y la homología de un complejo de cadenas.

0.1.1 Definición. 1. Un R-módulo graduado es una colección $M_* = \{M_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de R-módulos, donde $\mathbb{Z}$ representa a los números enteros.

2. Dados dos R-módulos graduados, $\{M_j\}$ y $\{N_j\}$, $k \in \mathbb{Z}$, un morfismo de grado k, $f_\# : M_* \longrightarrow N_*$ entre ellos, es una colección de homomorfismos de R-módulos $\{f_j\}$, donde
$$f_j : M_j \to N_{j+k}$$
3. Dados dos R-módulos graduados M_* y N_*, se le puede dar una estructura de R-módulo graduado al conjunto de morfismos entre ellos de la manera siguiente:
$$(\mathrm{Hom}(M_*, N_*))_k = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M_i, N_{i+k})$$
4. Un complejo de cadenas de R-módulos es un R-módulo graduado M_* junto con un morfismo $\partial_* : M_* \longrightarrow M_*$ de grado -1 tal que $\partial \circ \partial = 0$, es decir, $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$
5. Dados dos complejos de cadenas (C, ∂_C) y (D, ∂_D), un morfismo entre ellos es un morfismo de grado cero entre los R-módulos graduados subyacentes, $\{f_j\}$ de manera que el diagrama
$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_C"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\partial_D"'] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$
es conmutativo para toda n.

Es claro que los complejos de cadenas de R-módulos y sus morfismos forman una categoría, a la que denotaremos por $\partial\mathcal{AG}$.

Dado un complejo de cadenas (C, ∂_C), la propiedad $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ muestra que $\partial_{n+1}(M_{n+1}) \subset \ker(\partial_n)$. De manera que podemos pensar en los R-módulos cocientes

$$H_n(C) = \frac{\ker(\partial_n)}{\partial_{n+1}(M_{n+1})}$$

Más aún, un morfismo de complejos de cadenas $f_\# : C \to D$ induce un homomorfismo de R-módulos graduados

$$f_* : H_*(C) \to H_*(D)$$

como se verifica fácilmente usando el diagrama de arriba.

0.1.2 DEFINICIÓN. Al R-módulo $H_n(C)$ se le conoce como el *n-ésimo R-módulo de homología* del complejo (C, ∂_C)

Existen dos conceptos más, relativos al álgebra homológica, que nos serán de utilidad en los capítulos siguientes, estos son la homotopía entre dos morfismos de complejos de cadenas y el producto tensorial de dos complejos de cadenas.

0.1.3 DEFINICIÓN. Dados dos complejos de cadenas, (C, ∂_C) y (D, ∂_D), y dos morfismos $f_\#, g_\#$ entre ellos, decimos que son *homotópicos* (escribimos $f_\# \simeq g_\#$) si existe un morfismo $\mathbb{H}_\# : C_* \to D_*$ de R-módulos graduados de grado 1 de manera que

$$\partial_D \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_C = g_n - f_n$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. El morfismo h_j recibe el nombre de *homotopía* entre $\{f_j\}$ y $\{g_j\}$.

En la siguiente sección veremos varios ejemplos importantes de todos estos conceptos.

0.1.4 Proposición. *1. $\simeq$ es una relación de equivalencia*

2. Si $\{f_j\} \simeq \{g_j\}$ entonces $f_{*n} = g_{*n}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$

La *demostración* es inmediata. □

0.1.5 DEFINICIÓN. Dados dos complejos de cadenas (C_n, ∂_C) y (D, ∂_D), definimos su producto tensorial $(C \otimes D, \partial_{C\otimes D})$ mediante las igualdades:

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes D_j \qquad \partial_{C\otimes D}|_{C_i \otimes D_j} = \partial_C \otimes \mathrm{id} + (-1)^i \mathrm{id} \otimes \partial_D$$

0.2 TOPOLOGÍA

En esta sección únicamente estableceremos notación muy elemental e introduciremos algunos conceptos elementales de homología simplicial.

Durante todo este trabajo, la palabra *aplicación* significará siempre función continua. Denotaremos por $\mathfrak{Top}$ a la categoría que tiene por objetos a los espacios topológicos y por morfismos a las funciones continuas entre ellos.

0.2.1 Notación. Dado un espacio topológico X, y $A \subset X$, denotaremos

1. la cerradura de A por $\overline{A}$
2. el interior de A por A°
3. la frontera de A por ∂A
4. si X y Y son espacios topológicos homeomorfos, escribiremos $X \approx Y$
5. si X es homotópicamente equivalente a Y escribiremos $X \simeq Y$
6. si $f, g : X \longrightarrow Y$ son aplicaciones homotópicas escribiremos también $f \simeq g$.

0.2.2 DEFINICIÓN. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Dado $B \subset Y$ con $B \supset f(X)$, existe una única aplicación $\bar{f} : X \to B$ tal que $\bar{f}(x) = f(x)$. A $\bar{f}$ se le llama la *contracción de f*.

Esta última definición, tal vez poco común, la incluimos aquí porque la usaremos en el capítulo 2. El siguiente concepto será fundamental durante el desarrollo del trabajo.

0.2.3 DEFINICIÓN. Sea X un espacio topológico, decimos que X es un retracto de vecindad euclidiana (ENR), si para alguna $n > 0$ existen aplicaciones $i : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $r : U \longrightarrow X$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es una vecindad abierta de $i(X)$, tales que $r \circ i = \mathrm{id}$.

En otras palabras, X es un ENR si es homeomorfo a un retracto de una vecindad abierta $U \subset \mathbb{R}^n$.

0.3 Homología singular

Introduciremos aquí sólo los conceptos más elementales de la homología singular.

0.3.1 Definición. Sea $n \geq 0$, el *n-simplejo estándar*, Δ_n, es el subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ más pequeño que contiene a la base canónica $\{e_1, \ldots e_n\}$, donde $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con el 1 en el i-ésimo lugar. Notemos que $\mathbb{R}^0 = \{*\}$, de manera que $\Delta_0 = *$.

0.3.2 Definición. Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{Z}$. Definimos $S_n(X)$ como el grupo libre abeliano generado por el conjunto

$$\{\sigma : \Delta_n \to X | \ \sigma \quad \text{es} \quad \text{aplicación}\}$$

si $n \geq 0$. Si $n < 0$, definimos $S_n(X) = 0$. Más generalmente, si $A \subset X$, $S_n(A)$ es un subgrupo de $S_n(X)$, y definimos, para $n \in \mathbb{Z}$, $S_n(X, A) = \frac{S_n(X)}{S_n(A)}$, así, $S_n(X, A) = 0$ si $n < 0$.

Notemos que si $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una aplicación de parejas (es decir $f : X \to Y$ es una aplicación tal que $f(A) \subset B$),entonces induce $f_\# : S(X, A) \to$

$S(Y,B)$ por composición, es decir, si σ es un generador de $S_n(X,A)$, definimos $f_\#(\sigma) = f \circ \sigma$.

Así, le hemos asociado funtorialmente a cada espacio topoloógico X un grupo graduado, daremos ahora la definición de un operador frontera para este grupo graduado.

0.3.3 DEFINICIÓN. Sea $j \in \{0, \ldots, q\}$. Definimos $\varepsilon^j : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ como la restricción de la única aplicación lineal de $\mathbb{R}^q$ en $\mathbb{R}^{q+1}$ tal que $\varepsilon^j(e_i) = e_i$ si $i < j$, $\varepsilon^j(e_i) = e_{i+1}$ si $i \geq j$.

A la imagen de ε^j le llamaremos la *j-ésima cara de Δ_q*.

Con ayuda de las ε^j, construiremos $\partial : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ para que $(S(X), \partial)$ sea un complejo de cadenas.

0.3.4 DEFINICIÓN. Sea $\sigma \in S_q(X)$ un generador arbitrario; definimos

$$\partial(\sigma) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j (\sigma\varepsilon^j)$$

y extendemos esta definición a todo $S_q(X)$ para que sea un homomorfismo de R-módulos.

Resulta, como era de esperarse, que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ para toda $q \in \mathbb{Z}$, es decir, $(S(X), \partial)$ es efectivamente un complejo de cadenas. Más aún, $f_\#$ define un morfismo de complejos de cadenas. De esta manera le hemos asociado funtorialmente a cada espacio topológico X un complejo de cadenas de grupos abelianos. Si hacemos el producto tensorial de cada grupo con el anillo R, obtenemos un complejo de cadenas de R-módulos. A este complejo de cadenas le podemos calcular su homología.

0.3.5 DEFINICIÓN. Al n-ésimo R-módulo de homología de $\{S_n(X) \otimes R, \partial\}$, $H_n(S_n(X) \otimes R)$, se le conoce como el *n-ésimo R-módulo de homología de X con coeficientes en R*, $H_n(X; R)$. Por definición tenemos entonces $H_n(X; R) = H_n(S_n(X) \otimes R)$.

Denotaremos por f_* al morfismo (de grado cero) inducido por $\bar{f}$ en los R-módulos de homología. Resulta que los R-módulos de homología de un espacio cumplen varias propiedades que permiten calcularlos en muchos casos. En este sentido, tenemos el siguiente:

0.3.6 Teorema. *Los grupos de homología de un espacio tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si $f, g : X \to Y$ son aplicaciones homotópicas, se tiene $f_* = g_*$. A esta proposición se le llama axioma de* homotopía.
2. *$H_n(\{*\}) = 0$ si $n > 0$, y $H_n(\{*\}) = R$ si $n = 0$. A esta proposición se le llama axioma de* dimensión.
3. *Si $U \subset A \subset X$ es tal que $\overline{U} \subset A^\circ$ se tiene que $H_n(X, A) \cong H_n(X \setminus U, A \setminus U)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. A esta propiedad se le llama axioma de* escisión.

4. *Si $A \subset X$, se tiene una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

donde $i : A \longrightarrow X$, $j : X \longrightarrow (X,A)$ son las inclusiones correspondientes y ∂ es un homomorfismo tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"'] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "f_*"] \\ H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"'] & H_{n-1}(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativo para toda $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. A esta proposción se le llama exactitud.

Este teorema es la principal herramienta en el cálculo de los grupos de homotopía de un espacio.

0.3.7 DEFINICIÓN. Sea X un espacio topológico, decimos que X es un retracto de vecindad euclidiana (ENR), si para alguna $n > 0$ existen aplicaciones $i : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $r : U \longrightarrow X$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es una vecindad abierta de $i(X)$, tales que $r \circ i = \mathrm{id}$.

En otras palabras, X es un ENR si es homeomorfo a un retracto de una vecindad abierta $U \subset \mathbb{R}^n$.

Capítulo 1

El índice de punto fijo

El objetivo principal de este capítulo es definir el índice de punto fijo y probar el teorema de Lefschetz-Hopf. Siempre que se hable de homología estaremos pensando en la homología simplicial.

1.1 Producto exterior en homología

En esta sección auxiliar, queremos definir un homomorfismo $\times : H_m(X, A) \otimes H_n(Y, B) \to H_{m+n}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$, que llamaremos producto exterior en homología. La construcción de dicho homomorfismo está basada en el siguiente teorema, conocido como el teorema de Eilenberg-Zilber, que enunciamos sin demostración, por estar basado a su vez en el más complicado teorema de modelos acíclicos.

1.1.1 Teorema. *Los funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : Top \times Top \to \partial AG$ definidos por $\mathcal{F}(X,Y) = S(X \times Y)$, $\mathcal{G}(X,Y) = SX \otimes SY$ son naturalmente homotópicamente equivalentes (donde SX es el complejo de cadenas asociado a X en el proceso de construír la homología singular). Más aún, existen únicos (salvo homotopía) morfismos naturales de cadenas*

$$\Phi : SX \otimes SY \longleftrightarrow S(X \times Y) : \Psi$$

tales que

(i) $\Psi \circ \Phi \simeq \mathrm{id}_{SX \otimes SY}$, $\quad \Phi \circ \Psi \simeq \mathrm{id}_{S(X \times Y)}$

(ii) En dimensión cero

$$\Phi(\sigma \otimes \tau) = (\sigma, \tau)\,, \qquad \Psi(\sigma, \tau) = \sigma \otimes \tau$$

De aquí se sigue que cualquier morfismo de cadenas natural $\phi : SX \otimes SY \to S(X \times Y)$ que cumpla $\phi(\sigma \otimes \gamma) = (\sigma, \gamma)$ es (naturalmente) homotópico a Φ. Denotaremos por EZ a cualquier morfismo de cadenas en la clase de homotopía de Φ o Ψ. Tenemos el siguiente resultado:

1.1.2 Proposición. *El diagrama*

$$\begin{tikzcd}
SX \otimes SY \arrow[r, leftrightarrow, "EZ"] \arrow[d, "\tau"'] & S(X \times Y) \arrow[d, "t_{\#}"] \\
SY \otimes SX \arrow[r, leftrightarrow, "EZ"] & S(Y \times X)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo salvo homotopía, donde $t(x,y) = (y,x)$, $(x,y) \in X \times Y$ *y* $\dot{\tau}(\xi \otimes \eta) = (-1)^{|\xi||\eta|}\eta \otimes \xi$, *donde* $|\xi|$ *indica la dimensión de* ξ, $\xi \in SX$, $\eta \in SY$.

Demostración: Basta observar que en dimensión cero el diagrama conmuta estrictamente. □

Nosotros necesitamos extender a Φ, Ψ a parejas de espacios. Con este fin, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} SX \otimes SY \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\Phi"'] & SX/SA \otimes SY/SB \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\Phi'"'] & 0 \\ S(X \times Y) \arrow[r, "g"'] \arrow[u, shift right, "\Psi"'] & \frac{S(X\times Y)}{S\{X\times B, A\times Y\}} \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\Psi'"'] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $S\{X \times B, A \times Y\}$ denota al subgrupo generado por $S(X \times B)$ y $S(A \times Y)$ vistos como subgrupos de $S(X \times Y)$, f y g son los morfismos cocientes respectivos y lo que queremos es construir las equivalencias homotópicas inversas Φ', Ψ'. La naturalidad de Φ nos dice que el diagrama

$$\begin{tikzcd} SA \otimes SY \arrow[r, "i_*\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\Phi_{A,Y}"'] & SX \otimes SY \arrow[d, "\Phi_{X,Y}"] \\ S(A \times Y) \arrow[r, "i_*"'] & S(X \times Y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si identificamos $SA \otimes SY$ con $(i_* \otimes \mathrm{id})(SA \otimes SY)$ y a $S(A \times Y)$ con $i_*(S(A \times Y))$, tenemos que $\Phi_{X,Y}(SA \otimes SY) \subset S(A \times Y)$. Análogamente, $\Phi_{X,Y}(SX \otimes SB) \subset S(X \times B)$, pudiendo construir entonces Φ' y Ψ' para que el diagrama conmute. La naturalidad de la homotopía $s : \Psi \circ \Phi \simeq \mathrm{id}$ nos dice que $s((SA) \otimes (SY))_k \subset (SA \otimes SY)_{k+1}$ y análogamente $s((SX) \otimes (SB))_k \subset (SX \otimes SB)_{k+1}$ de manera que s induce una homotopía $s' : \Psi' \circ \Phi' \simeq \mathrm{id}$, y de manera análoga se prueba que $\Phi' \circ \Psi' \simeq \mathrm{id}$.

Antes de poder definir el producto exterior, necesitamos todavía una función auxiliar más. Dados dos complejos de cadenas C y D de R-módulos, (R anillo conmutativo con unidad) denotemos por Z_nC a $\ker \partial_n$. Tenemos una función bilineal $a : Z_nC \times Z_nD \to H_{n+m}(C \otimes D)$ dada por $a(x, y) = [x \otimes y]$; veremos que a induce una función $\bar{a} : H_nC \times H_mD \to H_{n+m}(C \otimes D)$, efectivamente, si $x = x' + \partial(c)$, tenemos $a(x, y) = [x \otimes y] = [x' + \partial c \otimes y] = [x' \otimes y + \partial c \otimes y] = [x' \otimes y] = a(x', y)$. Análogamente $a(x, y) = a(x, y')$ si $y = y' + \partial d$. No es difícil verificar que $\bar{a}$ es bilineal y por lo tanto induce $\alpha : HC \otimes HD \to H(C \otimes D)$. Resulta además que α es natural. Tenemos, en resumen,

$$\alpha : H(X, A) \otimes H(Y, B) \to H(\frac{SX}{SA} \otimes \frac{SY}{SB})$$

$$\frac{SX}{SA} \otimes \frac{SY}{SB} \xrightarrow{\Phi'} \frac{S(X \times Y)}{S\{X \times B, A \times Y\}} \xrightarrow{q} \frac{S(X \times Y)}{S(A \times Y \cup X \times B)}$$

Pasando a homología y componiendo obtenemos: $q_* \circ \Phi'_* \circ \alpha : H(X, A) \otimes H(Y, B) \to H(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$

1.1.3 Definición. Este homomorfismo o la correspondiente función bilineal son el *producto exterior en homología*, resulta ser natural pues α, Φ' y q lo son.

En vez de $q_* \circ \Phi'_* \circ \alpha(\alpha \otimes \beta)$ escribiremos $\alpha \times \beta$.

Si P es el espacio de un solo punto, $(X \times P, A \times P) \to (X, A)$ es un homeomorfismo. Sean ahora $[g] \in H_0P$ correspondiente a 1 bajo un isomorfismo con $\mathbb{Z}$ y $[\sigma] \in H(X, A)$. Tenemos que $p_*([\sigma] \times [g]) = p_*[\Phi'[\sigma \otimes g]] = [p \circ \Phi'[\sigma \otimes g]] = [\sigma]$. La última igualdad es consecuencia de la conmutatividad salvo homotopía del diagrama

$$\begin{tikzcd} SX \otimes SP \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \eta"'] & S(X \times P) \arrow[d, "SP_*"] \\ SX \otimes (\mathbb{Z}, 0) \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & SX \end{tikzcd}$$

donde η es un isomorfismo de SP con $(\mathbb{Z}, 0)$, que es el complejo de cadenas con grupo cero en todos los índices excepto en el cero, donde es $\mathbb{Z}$. La conmutatividad salvo homotopía de este diagrama es una consecuencia directa del teorema de Eilenberg-Zilber. Es gracias a esta propiedad que a $[g]$ lo denotamos usualmente por 1.

1.2 CLASES FUNDAMENTALES

Dado $n > 0$, sea o un generador arbitrario de $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$. Dada una pareja (V, K) con V abierto, K compacto y $K \subset V \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, tenemos la siguiente situación:

$$H_n\mathbb{S}^n \xrightarrow{i_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \backslash K) \xleftarrow{j_*} H_n(V, V \backslash K)$$

Observemos que la inclusión j es una escisión y por lo tanto j_* es un isomorfismo. Tenemos la siguiente

1.2.1 Definición. Se define la *clase fundamental* de K en V, o_K, por $o_K = j_*^{-1} \circ i_*(o)$.

Sea $P \in K$, dado que el diagrama de inclusiones

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \arrow[r, hook] \arrow[dr] & (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n\backslash K) \arrow[d, hook] & (V, V\backslash K) \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook, "i"] \\
& (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n\backslash P) & (V, V\backslash P) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo tenemos que $i_*(o_K) = o_P$ para todo $P \in K$. De hecho, esta propiedad caracteriza a o_K, aunque aquí no probaremos este hecho. Si tenemos $K \subset U \subset V$ y denotamos por o_K^U la clase fundamental de (U, K) y por o_K^V la clase fundamental de (V, K), el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \arrow[r, hook] & (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n\backslash K) & (V, V\backslash K) \arrow[l, hook'] \\
& & (U, U\backslash K) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ull, hook']
\end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo en homología. Esto nos muestra que $i_*(o_K^U) = o_K^V$. Por eso es que en la notación usual no aparece el abierto sino sólo el compacto. Tenemos el siguiente resultado:

1.2.2 Proposición. *Si $o_{K_i} \in H_{n_i}(V_i, V_i\backslash K_i)$ es la clase fundamental de K_i para $n = 1, 2$ entonces $o_{K_1} \times o_{K_2} \in H_{n_1+n_2}(V_1 \times V_2, V_1 \times V_2\backslash K_1 \times K_2)$ es la clase fundamental de $K_1 \times K_2$.*

Demostración: Véase [Do2], VII, 2.15

1.2.3 OBSERVACIÓN. Si $n > 0$, $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$ y o_0 genera $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$, pues en la composición de homomorfismos inducidos por inclusión, $H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus 0) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$ ambas flechas son isomorfismos, como o_0 es la imagen de un generador, debe ser también un generador.

1.3 EL ÍNDICE DE PUNTO FIJO

En esta sección definiremos el índice de punto fijo para aplicaciones $g : V \to \mathbb{R}^n$, donde $V \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $\mathrm{Fix}(g) = \{x \mid g(x) = x\}$ es compacto. Posteriormente probaremos varias propiedades de este índice que nos permitirán calcularlo en algunos casos y extender la definición del índice a funciones $h : U \to Y$, con $U \subset Y$, Y un ENR.

1.3.1 DEFINICIÓN. Sea $n > 0$, $V \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación con $F = \mathrm{Fix}(g)$ compacto. Si $i : V \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ denota la inclusión, tenemos $i - g : (V, V \setminus F) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$. Definimos $I(g)$ como el único entero que hace cierta la igualdad $(i - g)_*(o_F) = I(g)o_0$. (La existencia y unicidad de $I(g)$ se siguen de la observación 1.2.3).

1.3.2 OBSERVACIÓN. Notemos que la definición anterior no depende del generador $o \in H_n(\mathbb{S}^n)$ escogido.

1.3.3 Teorema. *Sea $g : V \to \mathbb{R}^n$ con $V \subset \mathbb{R}^n$ y* $\mathrm{Fix}(g)$ *compacto. Se tienen las siguientes propiedades:*

(a) **Unidades.** *Si $g : V \to \mathbb{R}^n$ es constante, digamos $g(V) = \{p\}$ tenemos*

$$I(g) = \begin{cases} 0 \mathrm{si} p \notin V \\ 1 \mathrm{si} p \in V \end{cases}$$

(b) **Escisión.** *Sean W abierto, K compacto con $\mathrm{Fix}(g) \subset K \subset W \subset V$, entonces $I(g) = I(g|_W)$, más aún, $I(g)(o_0) = (i - g|_W^K)_*(o_K)$, donde $i - g|_W^K : (W, W \setminus K) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$ es la restricción de $i - g$.*

(c) **Aditividad.** *Si $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, V es abierto para toda i, $F_i = \mathrm{Fix}(g|_{V_i})$ es compacto para toda i y $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$ entonces $I(g) = \sum_{i=1}^n I(g|_{V_i})$.*

(d) **Multiplicatividad.** *Dadas $g : V \to \mathbb{R}^n$, $g' : V' \to \mathbb{R}^m$, podemos definir $g \times g' : V \times V' \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Tenemos $\mathrm{Fix}(g \times g') = \mathrm{Fix}(g) \times \mathrm{Fix}(g')$ y $I(g \times g') = I(g) \cdot I(g')$.*

(e) **Invariancia Homotópica.** *Sea $H : U \times I \to \mathbb{R}^n$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathrm{Fix}(H_t)$ compacto para toda $t \in I$, $\bigcup_{t \in I} \mathrm{Fix}(H_t)$ tal que existe K compacto con $\bigcup_{t \in I} \mathrm{Fix}(H_t) \subset K \subset U$, entonces $I(H_0) = I(H_1)$.*

(f) **Conmutatividad.** *Dadas $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : V \to \mathbb{R}^m$, con $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, entonces se tiene $\mathrm{Fix}(f \circ g) \approx \mathrm{Fix}(g \circ f)$ y si estos conjuntos son compactos, entonces $I(f \circ g) = I(g \circ f)$ (desde luego, estamos pensando en $f \circ g$ y $g \circ f$ donde estas composiciones tengan sentido).*

(g) Puntos fijos. $I(f) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$

(h) Contracción. *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ una aplicación con* $\mathrm{Fix}(f)$ *compacto y $f(U) \subset \mathbb{R}^n$. Si denotamos por $f' : U' \to \mathbb{R}^n$ la contracción de f, donde $U' = U \cap \mathbb{R}^n$, se tiene $I(f) = I(f')$.*

Demostración:

(a) Si $g(p) \notin V$, entonces $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$, de manera que $H_n(V, V \setminus \mathrm{Fix}(g)) = H_n(V, V) = 0$ y por lo tanto $I(g) = 0$. Si $g(V) = p \in V$, y, sin pérdida de generalidad suponemos $p = 0 \in V$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(V, V \setminus p) \arrow[r, "i-g"] \arrow[d, hook] & (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \arrow[d, hook] \\
(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus 0) \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus 0)
\end{tikzcd}$$

donde las aplicaciones verticales son las inclusiones correspondientes. Al tomar homología, las inclusiones inducen isomorfismos por escisión, el recorrido de o_p nos muestra:

$$(i - g)_* = \mathrm{id}$$

y por lo tanto $I(g) = 1$

(b) El diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_n(V, V \setminus \mathrm{Fix}(g)) \arrow[r, "(i-g)_*"] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \\
H_n(W, W \setminus \mathrm{Fix}(g)) \arrow[u, "i_*"] \arrow[ur, "(i-g|_W)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, pues el correspondiente diagrama topológico lo es, tenemos así: $I(g|W)\cdot o_O = (i-g|_W)_*(o_{\mathrm{Fix}(g)}) = (i-g)_*(i_*(o_{\mathrm{Fix}(g)})) = (i-g)_* o_{\mathrm{Fix}(g)} = I(g)\cdot o_O$. Esto prueba $I(g) = I(g|_W)$. Para probar $I(g)(o_0) = (i-g|_W)_* o_K$ basta observar que $i_* : H_n(W, W\setminus K) \to H_n(W, W\setminus \mathrm{Fix}(g))$ satisface $i_*(o_K) = o_{\mathrm{Fix}(g)}$ de manera que $(i-g|_W^K)_* o_K = (i-g|_W)_* i_*(o_K) = (i-g|_W)_* o_{\mathrm{Fix}(g)} = I(g)\cdot o_0$.

(c) Sea W_j una vecindad abierta de $\mathrm{Fix}(g|_{V_j})$ tal que $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (esta construcción es posible gracias a la compacidad de $\mathrm{Fix}(g|_{V_j})$). Por la propiedad de escisión, sabemos que $I(g) = I(g|_{\cup W_j})$, tenemos así

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n\setminus 0) & (\bigcup_{j=1}^m W_j, \bigcup_{j=1}^m W_j \setminus \mathrm{Fix}(g)) \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "(i-g|_{\cup W_j})"] & (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus 0) \\
& \coprod_{j=1}^n (W_j, W_j\setminus F_j)) \arrow[ul, "\coprod i"] \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "\coprod(i-g|_{W_j}"'] &
\end{tikzcd}$$

que conmuta claramente. Al pasar a homología las dos aplicaciones de la derecha se vuelven $(i-g|_{\bigcup W_j})_*$ la de arriba, y $\bigoplus(i-g|_{W_j})_*$ la de abajo, por aditividad de la homología. Al observar el recorrido de las clases fundamentales obtenemos

$$\begin{tikzcd}
o_0 \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & o_{\bigcup F_j} \arrow[r, mapsto] & I(g)\cdot o_0 = \sum(I(g|_{W_j}))\cdot o_0 \\
& (o_{F_j})_{j=1}^m \arrow[u, mapsto] \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

lo cual muestra que $I(g) = \sum I(g|_{W_j}) = \sum I(g|_{V_j})$, donde la última igualdad se da gracias a la propiedad de escisión.

(d) Es claro que $F_{g\times g'} = F_g \times F_{g'}$. Por otro lado, $I(g\times g')(o_0 \times o_{0'}) = (i\times i' - g\times g')_*(o_F \times o_{F'}) = ((i-g)\times(i'-g'))_*(o_F\times o_{F'}) = (i-g)_*(o_F) \times (i'-g')_*(o_{F'}) = I(g)\cdot o_0 \times I(g')\cdot o_{0'} = I(g)\cdot I(g')(o_0\times o_{0'})$, recordando que $o_0\times o_{0'}$ y $o_F\times o_{F'}$ son fundamentales en $H_{n+m}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\setminus 0)$ y $H_{n+m}(V\times V', V\times V'\setminus F\times F')$ respectivamente gracias a la proposición 1.2.2 sobre el producto de clases fundamentales. La tercera igualdad se debe a la naturalidad del producto exterior y la última a la bilinealidad del mismo.

(e) Las hipótesis nos permiten hablar de $I(H_t)$ para toda $t\in I$. La propiedad de escisión nos dice que $I(H_t)(o_0) = (i-H_t)_*(o_K)$, pero $(i-H_t)_*$ en realidad no depende de t , pues $i - H_t \simeq i - H_{t'}$ para cualesquiera $t, t' \in I$. Tenemos así $I(g) = I(H_0) = I(H_1) = I(g')$.

(f) No es difícil observar que f y g definen homeomorfismos inversos entre $\mathrm{Fix}(g\circ f)$ y $\mathrm{Fix}(f\circ g)$. Si alguno de estos conjuntos es compacto (y por lo tanto el otro también) tiene sentido hablar de $I(f\circ g)$ y $I(g\circ f)$. Definamos $\gamma : U\times V \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ por $\gamma(x,y) = (g(y), f(x))$ y consideremos la homotopía $\gamma_t(x,y) = (tg\circ f(x) + (1-t)g(y), f(x)), t\in I$. Veremos que $\bigcup_{t\in I}\mathrm{Fix}(\gamma_t) = \mathrm{Fix}(\gamma_t)$ y que este último conjunto es compacto y por lo tanto podremos usar (d). Sea $(x,y)\in\mathrm{Fix}(\gamma_t)$, entonces

$$x = tg\circ f(x) + (1-t)g(y), y = f(x) \Rightarrow$$
$$x = tg\circ f(x) + (1-t)g\circ f(x) = g(f(x))\ ;$$

así

$$\begin{aligned}\mathrm{Fix}(\gamma_t) &= \{(x,y) \in U \times V \mid x \in \mathrm{Fix}(g \circ f), y = f(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathrm{Fix}(g \circ f) \times f(\mathrm{Fix}(g \circ f)) \mid y = f(x)\}\end{aligned}$$

Y este último conjunto es claramente compacto si $\mathrm{Fix}(g \circ f)$ lo es, y además no depende de t. Usando (d) concluimos entonces que $I(\gamma_0) = I(\gamma_1)$. Notemos ahora que $\gamma_1(x,y) = (g \circ f(x), f(x))$, pudiendo así extender γ_1 de manera estándar a $U \times \mathbb{R}^m$. Consideremos ahora la homotopía $\delta_t : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dada por $\delta_t(x,y) = (g \circ f(x), (1-t)f(x))$. Es inmediato observar que δ_0 es la extensión de γ_1 y por lo tanto $I(\delta_0) = I(\gamma_1)$ (usando la propiedad de escisión). Calculemos ahora $\bigcup_{t \in I} \mathrm{Fix}(\delta_t)$. Si $(x,y) \in \mathrm{Fix}(\delta_t)$ entonces $x = g \circ f(x), y = (1-t)f(x)$, de manera que $\mathrm{Fix}(\delta_t) = (\mathrm{id}, (1-t)f)(\mathrm{Fix}(g \circ f)$ y $\bigcup_{t \in I} \mathrm{Fix}(\delta_t) = \Delta(\mathrm{Fix}(g \circ f) \times I)$, donde $\Delta : U \times V \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ está dada por $\Delta(x,y,t) = \delta_t(x,y)$. Esto prueba que $\bigcup_{t \in I} \mathrm{Fix}(\delta_t)$ es compacto y por lo tanto $I(\delta_0) = I(\delta_1)$. Pero $\delta_1(x,y) = (g \circ f(x), 0)$ de manera que aplicando (c) tenemos $I(\delta_1) = I(g \circ f) \cdot I(\mathrm{cte}) = I(g \circ f)$, pues $I(\mathrm{cte}) = 1$ dado que $0 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{cte}) = \mathbb{R}^m$ (aquí, cte representa la función constante cero). Resumiendo, hemos probado que $I(\gamma) = I(\delta_0) = I(\delta_1) = I(g \circ f)$. Usando homotopías análogas se prueba que $I(\gamma) = I(f \circ g)$ y por lo tanto $I(g \circ f) = I(f \circ g)$.

(g) Es inmediato verificar que $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset \Rightarrow I(f) = 0$

(h) Esta propiedad es una consecuencia sencilla de las propiedades de escisión y conmutatividad. Sean $U' \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión y $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$

la contracción de f. Tenemos las siguientes dos maneras de componer estas dos aplicaciones

$$f' = f \circ i : U' \to \mathbb{R}^n, \qquad i \circ f : f^{-1}(U') \to \mathbb{R}^{n+1},$$

lo cual muestra, por conmutatividad, que $I(f') = I(i \circ f)$. Como la contracción de f, $f : U \to \mathbb{R}^n$ es continua, se tiene que $f^{-1}(U')$ es un abierto en U y por lo tanto también en $\mathbb{R}^{n+1}$. Se verifica fácilmente que $\mathrm{Fix}(f) \subset f^{-1}(U')$, lo cual termina la prueba, pues por escisión se tiene $I(i \circ f) = I(f)$. □

Esta última propiedad del índice no será relevante sino hasta el próximo capítulo, donde jugará un papel importante. Como ya hemos dicho, es (e) lo que nos sugiere generalizar el índice de punto fijo . Si tenemos $h : U \to Y$, donde $U \subset Y$ es un ENR y Y es un espacio topológico cualquiera y $i : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, $r : V \to U$ son tales que $r o i = \mathrm{id}$, con V abierto en $\mathbb{R}^n$, tenemos $h = h o r o i$. Si $\mathrm{Fix}(h)$ es compacto, (f) sugiere definir $I(h) = I(i \circ h \circ r : (h \circ r)^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n)$. Hay que estar seguros, desde luego, de que ésta es una buena definición, es decir, de que no depende de r ni de i. Supongamos entonces que tenemos $i' : U \to V' \subset \mathbb{R}^m$, $r' : V' \to U$, con $r' \circ i' = \mathrm{id}$. Tenemos las composiciones $i' \circ r : V \to V'$, $i \circ h \circ r' : (h \circ r')^{-1}(U) \to V$. Dado que V, V' y $(h \circ r')^{-1}(U)$ son abiertos en $\mathbb{R}^m$ o en $\mathbb{R}^n$, podemos usar (e) y obtener

$$I(i' \circ r \circ i \circ h \circ r') = I(i \circ h \circ r' \circ i' \circ r)$$

es decir, $I(i' \circ h \circ r') = I(i \circ h \circ r)$. Hemos probado así que ésta es una buena definición. Es inmediato verificar que las propiedades (a)-...-(f) se siguen cumpliendo y que la nueva definición coincide con la anterior cuando el dominio es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

1.4 EL TEOREMA DE LEFSCHETZ-HOPF

Después de introducir los conceptos necesarios, en esta sección enunciaremos y probaremos el teorema de Lefschetz-Hopf, que relaciona el índice de punto fijo de f con la traza de f_*. De ahora en adelante, R denotará un anillo conmutativo con unidad.

1.4.1 DEFINICIÓN. Sea M un R-módulo graduado, donde R es un anillo conmutativo con unidad. Definimos su dual, M^* como el R-módulo graduado que al entero i le asocia el R-módulo $M_i^* = \mathbf{Hom}(M_{-i}, R)$. Para cada R-módulo N, definimos $\Theta_{M,N} : M^* \otimes N \to \mathbf{Hom}(M, N)$ por $\Theta(\varphi \otimes n)(m) = (-1)^{|m||n|}\varphi(m) \cdot n$.

Es claro que Θ es homomorfismo de módulos graduados, y es rutina probar que Θ es una transformación natural vista como $\Theta : \_^* \otimes N \to \mathbf{Hom}(\_, N)$ y también vista como $\Theta : M^* \otimes \_ \to \mathbf{Hom}(M, \_)$.

1.4.2 DEFINICIÓN. Diremos que un homomorfismo de módulos graduados β :

$M \longrightarrow N$ es de rango finito si $\beta = g \circ f$, donde $f : M \to F$, $g : F \to N$, donde $F_i = \bigoplus_{j=1}^{k_i} R_j$, $R_j = R$, para toda j y $k_i = 0$ para casi toda i.

1.4.3 Proposición. *Sea $\beta : M \to N$ homomorfismo de módulos graduados. $\beta \in \mathbf{im}(\Theta) \Leftrightarrow \beta$ es de rango finito.*

Demostración: $(\Rightarrow)$ Si tenemos $\varphi \otimes n \in M_i^* \otimes N_j$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_{-i} \arrow[r, "\Theta(\varphi\otimes n)"] \arrow[d, "\varphi"'] & N_j \\ R \arrow[ur, "\cdot n"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta excepto quizá por un signo. Por lo tanto, si tenemos $\sum_{a=1}^{s}(\varphi_a \otimes n_a) \in M_i^* \otimes N_j$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_{-i} \arrow[r, "\sum_{a=1}^{s}\Theta(\varphi_a\otimes n_a)"] \arrow[d, "(\varphi_a)_{a=1}^{s}"'] & N_j \\ R^s \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

donde $R^s = R \oplus \cdots R$, s veces y $g(r_1, \ldots, r_s) = \sum r_i I_i n_i$, puede ser hecho conmutativo si escogemos adecuadamente los $I_i = \pm 1$. En el caso de tener un elemento cualquiera en $\bigoplus_{i+j=k}(M_i^* \otimes N_j)$, basta observar que para casi toda (i, j) el término correspondiente $\sum \varphi_a \otimes n_a$ es cero y por lo tanto $\Theta(\sum \varphi_a \otimes n_a) = 0$ que obviamente factoriza a través del R-módulo 0.

Hemos probado que $\mathrm{Im}(\Theta) \subset \{\beta : M \to N \mid \beta \textit{ es de rango finito}\}$.

$(\Leftarrow)$ Sea $\beta \in \mathbf{Hom}_n(M, N)$ de rango finito, entonces, para casi toda v, $\beta_v : M_v \to N_{n+v}$ es cero, que es igual a $\Theta(0)$, $0 \in M_v^* \otimes N_{n+v}$. Para las v restantes, tenemos

$$\begin{tikzcd} M_v \arrow[r, "\beta_v"] \arrow[d, "f_v"'] & N_{n+v} \\ R^{s_v} \arrow[ur, "g_v"'] & \end{tikzcd}$$

pero f_v debe ser de la forma $(f_1, \ldots, f_s)$, con $f_i \in M^*_{-v}$, y $g_v(r_1, \ldots, r_s) = \sum r_i \cdot n_i$, para n_i adecuadas. Entonces $\sum f_a \otimes I_a \cdot n_a \in M^*_{-v} \otimes N_{n+v}$, $\Theta_u(\sum f_a \otimes I_a \cdot n_a) : M_v \to N_{n+v}$ es igual a β_v escogiendo adecuadamente $I_i = \pm 1$. Con esto basta para mostrar que $\beta \in \mathrm{Im}(\Theta)$. □

1.4.4 Proposición. *Si N es un R-módulo graduado libre (i.e. N_i es libre para toda i) entonces Θ es inyectiva.*

Demostración: Primero probaremos el resultado en el caso particular $N_m = R$, $N_i = 0$ si $i \neq m$. En este caso $(M^* \otimes N) = (M^*)_{n-m}$ y $\mathbf{Hom}(M, N) = \mathbf{Hom}(M_{n-m}, R) = (M^*)_{n-m}$, de donde, para $t \in M$

$$\Theta(\varphi)(t) = (-1)^{|t|}\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

resultando que Θ es inyectiva.

Supongamos ahora que N y N' son libres finitamente generados, probaremos que $\Theta_{M,N\oplus N'}$ es inyectiva. Esto es claro si observamos que

$$M^* \otimes (N \oplus N') \cong (M^* \otimes N) \oplus (M^* \otimes N)$$

$$\mathbf{Hom}(M, N \oplus N') \cong \mathbf{Hom}(M, N) \oplus \mathbf{Hom}(M, N')$$

y que bajo estos isomorfismos $\Theta_{M,N\oplus N'}$ corresponde a $\Theta_{M,N}\oplus\Theta_{M,N'}$ de manera que $\Theta_{M,N\oplus N'}$ es inyectiva por ser suma directa de dos inyectivas. De esta manera probamos la proposición para cualquier N finitamente generado. En el caso general, para $a \in M^* \otimes N$ siempre podemos encontrar un submódulo libre de N finitamente generado que contenga a a (por ejemplo, el generado por los elementos de N de los cuales a es combinación lineal), llamemos N' a este submódulo de N. La naturalidad de Θ aplicada a $i : M^* \otimes N' \hookrightarrow M^* \otimes N$ muestra que $\Theta_{M,N}|_{M^*\otimes N'} = \Theta_{M,N'}$, de manera que $\Theta_{M,N}(a) = 0 \Rightarrow \Theta_{M,N'}(a) = 0 \Rightarrow a = 0$ por lo dicho antes para módulos graduados finitamente generados. $\square$

1.4.5 DEFINICIÓN. Dado un R-módulo graduado N, definamos la función evaluación $e : N^* \otimes N \to R$ por

$$e(\varphi \otimes n) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{si } \varphi \otimes n \in (N^* \otimes N)_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si N es libre y $\beta : N \to N$ es un homomorfismo de rango finito, las dos proposiciones anteriores nos aseguran que $\Theta^{-1}(\beta)$ es un elemento en $N^* \otimes N$. Definimos el *número de Lefschetz* de β, $\Lambda(\beta) = e(\Theta^{-1}(\beta))$

1.4.6 OBSERVACIÓN. Si $\beta \in \mathbf{Hom}_n(N, N), n \neq 0$, entonces

$$\Theta^{-1}(\beta) \in \bigoplus_{i+j=n} (N_i^* \otimes N_j),\ e(\Theta^{-1}(\beta)) = 0$$

así que $\Lambda(\beta) = 0$ excepto cuando $\beta \in \mathbf{Hom}_0(N, N)$.

En este caso podemos expresar $\Lambda(\beta)$ en términos de la representación matricial de β. Con este fin, escojamos una base B_i para N_i. Dado $v \in B_i$, existen β_b^v tales que $\beta(v) = \sum_{b\in B_i} \beta_b^v b$. La condición rango$(\beta_i) < \infty$ lo que dice es que para casi toda b, $B_b^v = 0$ para toda v; es decir, que si definimos $\varphi^b(v) = \beta b_b^v$, entonces $\varphi^b = 0$ para casi toda b, de manera que $c_i = \sum_{b\in B_i} \varphi^b \otimes b \in N_{-i} \otimes N$. La otra implicación de rango$(\beta_i) < \infty$ es que $B_i : N_i \to N_i$ es el homomorfismo cero para casi toda i, de manera que el c_i correspondiente es cero, así que $a = \sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^i c_i = \sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^i \sum_{b\in B_i} \varphi^b \otimes b \in N^* \otimes N$. Resulta que, si $v \in B_j$, $\Theta(a)(v) = (\sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^i \sum_{b\in B_i} \varphi^b \otimes b)(v) = \sum_i(-1)^i \sum_{b\in Bi}(-1)^{ji}\varphi^b(v) \cdot b = \sum_{b\in B_i} \beta_b^v \cdot b = \beta(v)$. Es decir, $a = \Theta^{-1}(\beta)$. Así, $\Lambda(\beta) = e(a)$, pero $e(a) = \sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^i \sum_{b\in B_i} \varphi^b(b) = \sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^i \sum_{b\in B_i} \beta_b^b = \sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^i \mathrm{Tr}(\beta_i)$. En este momento vale la pena recordar que la traza de un homomorfismo $h : R^s \to R^s$ está bien definida como la traza de una matriz que represente a h (i.e. no depende de la base escogida), así que en realidad nuestra elección de β_i carece de importancia. Estamos preparados para enunciar y probar el resultado más importante del capítulo.

1.4.7 Teorema. (de Lefschetz-Hopf) *Sea Y un ENR (retracto de vecindad euclidiana), $K \subset Y$ compacto, $f : Y \to Y$, con $f(Y) \subset K$. Entonces* $\mathrm{Fix}(f)$ *es compacto, $(f|_K)_* : H(K;\mathbb{Q}) \to H(K;\mathbb{Q})$ es de rango finito y $\Lambda(f|_K)_* = I(f)$.*

Demostración: A lo largo de esta prueba $H(X, A)$ denotará $H(X, A; \mathbb{Q})$, así $H(X \times X') = H(X) \otimes H(X')$ (ver [Do2], Teorema de Künneth). Observemos que $\mathrm{Fix}(f) = (i - f)^{-1}\{0\}$, siendo así cerrado en K y por lo tanto compacto. Ya que cualquier ENR se encaja en $\mathbb{R}^n$ para n adecuada, podemos suponer $Y \subset \mathbb{R}^n$. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ el abierto del cual Y es retracto, $r : V \to Y$ la retracción e $i : Y \to V$ la inclusión, definamos $g := i \circ f \circ r : V \to i(K) = K$. Observemos que para toda $k \in K$, $g(k) = i(f(r(k))) = i(f(k)) = f(k)$, así $f|_K = g|_K$ (y por lo tanto $(f|_K)_* = (g|_K)_*$). $I(f)$ es, por definición, $I(ifr) = I(g)$. De esto se sigue que lo que tenemos que probar es $I(g) = \Lambda(g|_K)_*$.

Si $d : (V, V \setminus K) \times K \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$ está dada por $d(x, y) = x - y$, $\Delta : (V, V \setminus K) \to (V, V \setminus K) \times V$ por $\Delta(x) = (x, x)$, el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
H_*((V, V \setminus K) \times V) & \xrightarrow{(id \times g)_*} & H_*((V, V \setminus K) \times K) \\
\Delta_* \uparrow & & \downarrow d_* \\
H_*(V, V \setminus K) & \xrightarrow[(i-g)_*]{} & H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)
\end{array}$$

conmuta pues el correspondiente diagrama topológico lo hace. Usando la naturalidad del producto exterior, y el hecho de que $\times : H_*(V, V \setminus K) \otimes HK_* \to H_*((V, V \setminus K) \times K)$ es un isomorfismo (recordemos que las homologías tienen coeficientes en $\mathbb{Q}$) obtenemos

$$\begin{tikzcd}
H_*(V,V\setminus K)\otimes HV_* \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes g_*"] & H_*(V,V\setminus K)\otimes HK_* \arrow[d, "d_*"] \\
H_*(V,V\setminus K) \arrow[u, "\Delta_*"] \arrow[r, "(i-g)_*"'] & H_*(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0)
\end{tikzcd}$$

donde por un pequeño abuso denotamos a $\times^{-1}\circ\Delta_*$ por Δ_* y a $d_*\circ\times$ por d_*. Tenemos así el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H_*(V,V\setminus K)\otimes HV_* \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes g_*"] & H_*(V,V\setminus K)\otimes HK_* \arrow[r, "\hat{d}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "d_*"] & (HK)^*\otimes HK_* \arrow[d, "e"] \\
H_*(V,V\setminus K) \arrow[u, "\Delta_*"] \arrow[r, "(i-g)_*"'] & H_*(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0) & \mathbb{Q} \arrow[l, "o_0"']
\end{tikzcd}$$

donde $(HK)^* = \mathbf{Hom}(HK,\mathbb{Q})$ y $\hat{d}$ está definida para hacer conmutativo el diagrama: $(\hat{d}(v))(k)(o_o) = d_*(v\otimes k)$, y o_o representa el único homomorfismo (que resulta ser isomorfismo)tal que $1\mapsto o_o$. Veamos ahora el recorrido de $o_K\in H_n(V,V\setminus K)$ a lo largo de este diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Delta_*(o_K) \arrow[rr, mapsto] & & (\hat{d}\otimes g_*)(\Delta_*(o_K)) =: a_g \arrow[d, mapsto] \\
o_K \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & (i-g)_*o_K \arrow[r, mapsto] & I(g) = e(a_g)
\end{tikzcd}$$

Así que $e(a_g) = I(g)$, de manera que $I(g) = \Lambda(\Theta(a_g))$. Nos bastaría entonces probar $\Theta(a_g) = (g|_K)_*$ (y así $I(g) = \Lambda(g|_K)_*)$. Con este fin, definamos $t: X\times Y\to Y\times X$ por $t(x,y) = (y,x)$. No es difícil ver, usando la conmutatividad del producto exterior que $t_*(\sigma\otimes\eta) = (-1)^{|\sigma||\eta|}(\eta\otimes\sigma)$. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_*(V,V\setminus K)\otimes HV_*\otimes HK* \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes t_*"] \arrow[d, "\hat{d}\otimes g_*\otimes\mathrm{id}"'] & H_*(V,V\setminus K)\otimes HK_*\otimes HV_* \arrow[r, "d_*\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\hat{d}\otimes\mathrm{id}\otimes g_*"'] & H_*(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0)\otimes HV_*\cong HV_* \arrow[d, "g_*"] \\
(HK)^*\otimes HK_*\otimes HK_* \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes t_*"'] & (HK)^*\otimes HK_*\otimes HK_* \arrow[r, "e\otimes\mathrm{id}"'] & \mathbb{Q}\otimes HK_*\cong HK_*
\end{tikzcd}$$

es conmutativo: el cuadrado izquierdo lo es claramente, dado qué es t_*. El cuadrado de la derecha proviene de tomar el producto tensorial de la parte correspondiente del diagrama anterior con $H(V) \xrightarrow{g_*} H(K)$. Observemos que $(e\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes t_*)(\phi\otimes n\otimes m) = (-1)^{|n||m|}(e\otimes\mathrm{id})(\phi\otimes m\otimes n) = (-1)^{|n||m|}\phi(m)\cdot n = \Theta(\phi\otimes n)(m)$. Veamos ahora el recorrido de $\Delta_*(o_K)\otimes k$, donde k es cualquier elemento de HK, a lo largo del diagrama anterior:

$$\begin{tikzcd}
\Delta_*(o_K)\otimes k \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (d_*\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes t_*(\Delta_* o_K\otimes k) = w_k \arrow[d, mapsto] \\
(\hat{d}\otimes g)_*(\Delta_* o_K)\otimes k) = a_g\otimes k \arrow[r, mapsto] & \Theta(a_g)(k) = g_*(w_k)
\end{tikzcd}$$

Si lográramos demostrar que

$$\Phi(K,V): H_\lambda K \to H_\lambda V \quad \text{dada por}$$

$$\Phi(K,V)(k) = (o\times)^{-1}(d\times\mathrm{id})_*(\mathrm{id}\times t)_*\circ(\Delta\times\mathrm{id})_*(o_K\times k)$$

(donde $o\times$ es el isomorfismo canónico de $H_\lambda(V)$ con $H_{n+\lambda}((\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0)\times V))$ es igual a $i_*: H_\lambda K \to H_\lambda V$ (donde $i: K\hookrightarrow V$ denota la inclusión), tendríamos, por naturalidad del producto exterior $\Phi(K,V)(k) = (d_*\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes t_*)(\Delta_* o_K\otimes k) = i_*(k)\in H_\lambda V$ y así

$$\Theta(a_g)(k) = g_* i_*(k) = (g|_K)_*(k)$$

que es lo que queremos. Hasta el momento sólo hemos probado

(1.4.7) $$\Theta(a_g) = g_*\Phi(K,V)$$

Hemos reducido la prueba del teorema anterior a la prueba de la siguiente:

1.4.8 Proposición.

$$\Phi(K,V)(k) = (o\times)^{-1}(d\times \mathrm{id})_*(\mathrm{id}\times t)_* \circ (\Delta\times \mathrm{id})_*(o_K\times k)$$

(donde $o\times$ es el isomorfismo canónico de $H_\lambda V$ con $H_{n+\lambda}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0)\times V)$) es igual a $i_* : H_\lambda K \to H_\lambda V$

Antes de empezar la demostración, daremos una definición muy sencilla que usaremos en el párrafo siguiente.

1.4.9 DEFINICIÓN. Sea $C=\mathbb{R}^n$, de manera que C es un complejo CW. Dada una base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de C, a la descomposición CW de C, donde las k-células son los conjuntos $\{\sum_{v=1}^k t_v e_v | 0 < t_v < 1\}$ más una traslación por un vector en $\mathbb{Z}^n$ se le llamará descomposición cúbica si la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es un conjunto de vectores con la misma norma ortogonales entre sí. Debe ser claro el porqué del nombre.

Demostración: Antes que nada, sean $K' \subset K \subset V \subset V'$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, con K, K' compactos y V, V' abiertos. Se tiene entonces la igualdad

$$i_*(V,V')\Phi(K,V) = \Phi(K,V')$$

que es una consecuencia sencilla de la naturalidad del producto exterior y del hecho de que $i_* : H_\lambda(V, V \setminus K) \to H_\lambda(V', V' \setminus K)$ cumple $i_*(o_K) = o_K$. Por otro lado, como consecuencia casi inmediata de que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_\lambda(K) & H_{\lambda+n}((V, V \setminus K)) \times K) \arrow[l, "(o_K\times\cdot)^{-1}"'] \\
 & H_{\lambda+n}((V, V \setminus K')) \arrow[u, "i_*"'] \arrow[d, "i_*"] \\
H_\lambda(K') \arrow[uu, "i_*"] & H_{\lambda+n}((V, V \setminus K') \times K') \arrow[l, "(o_K\times\cdot)^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

conmute, tenemos la identidad

$$\Phi(K, V) i_*(K', K) = \Phi(K', V)$$

Como consecuencia de estas dos ecuaciones, tenemos las siguientes implicaciones:

1. $\Phi(K, V) = i_*(K, V) \Rightarrow \Phi(K, V') = i_*(K, V')$
2. $\Phi(K, V) = i_*(K, V) \Rightarrow \Phi(K', V) = i_*(K', V)$
3. $\Phi(K, V') = i_*(K, V') \Rightarrow i_*(V, V')[\Phi(K, V) - i_*(K, V)] = 0$
4. $\Phi(K', V) = i_*(K', V) \Rightarrow [\Phi(K, V) - i_*(K, V)] i_*(K', K) = 0$

Seguiremos varios pasos, empezando con un caso muy particular de K y V para acabar demostrando el resultado en toda su generalidad.

Caso 1. K=pto=p, gracias a (1) podemos reemplazar a V por una bola abierta alrededor de p. Denotaremos también a esta bola por V. Siguiendo el recorrido del generador $1_p \in H_0 p$ bajo $\Phi(p, V)$, observamos
$1_p \mapsto o_p \times 1_p \mapsto o_p \times 1_p \times 1_p \mapsto o_p \times 1_p \times 1_p \mapsto o_0 \times 1_p \mapsto 1_p$
de donde se sigue inmediatamente el resultado.

Quizá haya que aclarar por qué $\Delta_*(o_p) = o_p \times 1_p$. Observemos que $\Delta : (V, V \setminus \{p\}) \to (V, V \setminus p) \times V$ es homotópica a $f : (V, V \setminus \{p\}) \to (V, V \setminus \{p\}) \times \{p\}$ dada por $f(x) = (x, p)$ (recordemos que V es una bola) y f "es" la identidad en $(V, V \setminus \{p\})$, de manera que $f_*(o_p) = o_p = o_p \times 1_p$

Caso 2. $\Phi_0 : H_0 K \to H_0 V$. Basta observar que $H_0 K$ está generado por los subgrupos (subespacios lineales) $H_0 P$ y usar el caso anterior.

Caso 3. Consideremos el caso $K \approx \mathbb{S}^\lambda$, donde $\mathbb{S}^\lambda$ es la λ-esfera,$\lambda \geq 1$, y V es una vecindad de K tal que K es retracto fuerte por deformación de V, y sean $r : V \to K$ la retracción, $i : K \hookrightarrow V$ la inclusión. Las hipótesis sobre K y V implican que i_* es un isomorfismo, de manera que i_* es multiplicación por un número racional no cero, q_0, pues $H_\lambda K \cong H_\lambda V \cong \mathbb{Q}$. De la misma manera $\Phi_\lambda(K, V)$ es multiplicación por algún racional q_1 (posiblemente cero), y por lo tanto, $\Phi_\lambda = q i_*$, si $q = q_1/q_0$. Por otro lado, fijo un homeomorfismo de K con $\mathbb{S}^\lambda$, podemos hablar del mapeo antípoda en K, sea A esta aplicación, es claro que $g = A \circ r : V \to K$ no tiene puntos fijos, de manera que $I(g) = 0$. Con el fin de calcular el número de Lefschetz de $\Theta(a_g) = g_* \Phi_\lambda$, que como ya vimos coincide con

$I(g)$, observemos que:

$$g_*\Phi_\lambda = g_*qi_* = qA_*r_*i_* = qA_* = q(-1)^{\lambda+1}\text{id}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la fórmula $\deg A = (-1)^{\lambda+1}$. Tenemos entonces $\Lambda(g\Phi) = 1 + (-1)^\lambda q(-1)^{\lambda+1}$, es decir,$0 = I(g) = 1 - q$, de manera que $q = 1$ y por lo tanto $\Phi_\lambda(K, V) = i_*$

Caso 4. Sea C un cubo ($C = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$) y $K = C_\lambda$ el λ-esqueleto de alguna descomposición cúbica de C. V cualquier abierto de C (con $K \subset V$). $\mathbb{S}^\lambda$ tiene una vecindad $W \subset V$ de la cual es retracto por deformación, de manera que por el caso 3,$\Phi(S, W) = i_*(S, W)$ y entonces $\Phi(S, V) = i_*(S, W)$ por (1), más aún

$$[\Phi(C^\lambda, V) - i_*(C^\lambda, V)]i_*(\mathbb{S}^\lambda, C^\lambda) = 0$$

para toda $\mathbb{S}^\lambda$ como arriba, esto implica $\Phi(C^\lambda, W) = i_*(C^\lambda, V)$ puesto que $H_\lambda(C^\lambda)$ está generado por los subgrupos $i_*(H_\lambda(\mathbb{S}^\lambda)$ donde $\mathbb{S}^\lambda$ es la frontera de una $(\lambda+1)$-célula de C.

Caso 5. K un subcomplejo de C^λ, V arbitrario. Sea U un abierto tal que C^λ es retracto por deformación de U y $W \subset U \cap V$ abierto tal que K es retracto por deformación de W. Dado que C^λ no tiene $(\lambda+1)$-células (pensemos por un momento en homología celular) resulta que $H_\lambda C^\lambda$ es (isomorfo a) un subespacio de $\bigoplus_{\sigma\in\Sigma}\mathbb{Q}$, donde Σ es el conjunto de λ-células de C^λ, y también $H_\lambda(K)$ es (isomorfo a) un subespacio $\bigoplus_{\sigma'\in\Sigma'}\mathbb{Q}$

donde $\Sigma' \subset \Sigma$ es el conjunto de λ-células de K. En otras palabras, $H_\lambda(C^\lambda) = \ker(\partial)$, $H_\lambda(K) = \ker(\partial|_K)$ donde ∂ es el operador frontera del complejo $H_n(C^n, C^{n-1})$ y $\partial|_K$ es el operador frontera del complejo $H_n(K^n, K^{n-1})$, es decir, $\partial|_K$ es efectivamente una restricción de ∂. De todo esto, tenemos que $i_* : H_\lambda(K) \to H_\lambda(C^\lambda)$ es inyectiva. Gracias al diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H_\lambda(K) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\cong"'] & H_\lambda(C^\lambda) \arrow[d, "\cong"] \\ H_\lambda(W) \arrow[r, "i_*(W,U)"'] & H_\lambda(U) \end{tikzcd}$$

observamos que también $i_*(W, U)$ es monomorfismo. Por el caso 4,

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(C^\lambda, U) = i_*(C^\lambda, U) &\Rightarrow \Phi(K, U) = i_*(K, U) \text{ por (2)} \\ &\Rightarrow i_*(W, U)[\Phi_\lambda(K, W) - i_*(K, W)] = 0 \text{ por (3)} \\ &\Rightarrow \Phi_\lambda(K, W) = i_*(K, W) \end{aligned}$$

pues $i_*(W, U)$ es monomorfismo. Finalmente, (1) implica

$$\Phi_\lambda(K, V) = i_*(K, V)$$

Caso 6. Por fin atacamos el caso general: K cualquier compacto de $\mathbb{R}^\lambda$, V cualquier abierto de $\mathbb{R}^\lambda$. Desde luego $K \subset V$. Escojamos una estructura CW de $\mathbb{R}^\lambda$ suficientemente fina para que cualquier célula que toque a K esté completamente contenida en V (aquí usamos la compacidad de

K). Denotemos por M a la unión de estas células. Así que tenemos $K \subset M \subset V$. Sea M^λ el λ-esqueleto de M. Por el caso 5, $\Phi_\lambda(M^\lambda, V) = i_*(M^\lambda, V)$ de manera que

$$[\Phi_\lambda(M, V) - i_*(M, V)]i_*(M^\lambda, M) = 0$$

por (4). Para concluir bastará probar que $i_*(M^\lambda, M)$ es suprayectiva. Pero esto es fácilmente verificable, si pensamos de nuevo en homología celular, pues $H_\lambda(M)$ es cociente de un subespacio de $H_\lambda(M^\lambda, M^{\lambda-1})$, y $H_\lambda(M^\lambda)$ es ese mismo subespacio antes de hacer cociente (tomemos la descomposición CW de M^λ dada por la de M, en ese caso (y también en cualquier otro), M^λ no tiene $(\lambda+1)$-células. lo que garantiza la afirmación pasada).

$\square$

Capítulo 2

El teorema de punto fijo de Schauder

La idea principal de este capítulo es generalizar el índice de punto fijo a aplicaciones $f : U \to E$ relativamente compactas, donde E es un espacio normado real y U es abierto en E, manteniendo siempre la hipótesis $\mathrm{Fix}(f)$ compacto. Luego se probará un análogo al teorema de Lefschetz-Hopf para este tipo de aplicaciones.

2.1 Generalización del número de Lefschetz

En esta sección auxiliar, generalizaremos la definición de número de Lefschetz para homomorfismos de módulos graduados no necesariamente de rango finito. Para empezar, daremos una generalización de la definición de traza para ciertas transformaciones lineales en un espacio vectorial de dimensión posiblemente infinita. Más precisamente, supongamos que E es un espacio vectorial y $\phi : E \to E$ una transformación lineal. Consideremos el subespacio lineal $\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(\phi^n)$, donde ϕ^n es la n-iterada de ϕ. Es claro que $\phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(\phi^n)) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(\phi^n)$ de manera que si la dimensión de

$$\tilde{E} := \frac{E}{\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(\phi^n)}$$

es finita podemos pensar en la traza de

$$\tilde{\phi} : \tilde{E} \to \tilde{E}$$

2.1.1 DEFINICIÓN. Si ϕ y $\tilde{\phi}$ son como arriba, definimos la traza generalizada de ϕ por

$$\mathrm{Tr}(\phi) = \mathrm{tr}(\tilde{\phi})$$

donde tr es la función traza habitual.

Si ahora $E = \{E_m\}$ es un espacio vectorial graduado y $\phi : E \to E$ un homorfismo, diremos que ϕ es un endomorfismo de Leray, si el espacio vectorial graduado $\{\tilde{E}_m\}$ es de tipo finito, es decir, $\tilde{E}_m$ es de dimensión finita para toda $m \in \mathbb{Z}$ y $\tilde{E}_m = 0$ para casi toda $m \in \mathbb{Z}$. En ese caso, definimos el *número de* Lefschetz generalizado de ϕ, $\Lambda(\phi)$ mediante la igualdad

$$\Lambda(\phi) = \sum_m (-1)^m \mathrm{Tr}(\phi_m)$$

Es sencillo observar que esta definición coincide con la dada en el capítulo anterior si ϕ es de rango finito. Se tiene la siguiente proposición que nos será de utilidad más adelante.

2.1.2 Proposición. *Supóngase que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\mu"] & E' \arrow[dl, "\nu"'] \\ E \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\mu"'] & E' \arrow[u, "\phi'"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde E, E' son espacios vectoriales graduados y ϕ, ϕ', μ, ν morfismos de espacios vectoriales graduados. Entonces, ϕ es un endomorfismo de Leray si y sólo si ϕ' lo es, en ese caso $\Lambda(\phi) = \Lambda(\phi')$.

Demostración: Probaremos primero que μ induce $\tilde{\mu} : \tilde{E} \to \tilde{E}'$. Para esto, basta observar que si $\phi^n(x) = 0$ entonces $\phi'^n\mu(x) = 0$, es decir, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(\phi^n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(\phi'^n)$. Tenemos entonces $\tilde{\mu} : \tilde{E} \to \tilde{E}'$. De manera análoga, existe $\tilde{\nu} : \tilde{E}' \to \tilde{E}$. Así, tenemos $\tilde{\phi} = \tilde{\nu} \circ \tilde{\mu}$, $\tilde{\phi}' = \tilde{\mu} \circ \tilde{\nu}$. Si $\tilde{\phi}$ es de Leray entonces $\tilde{E}$ es del tipo finito, y entonces $\tilde{\phi}'$ es de rango finito como morfismo de espacios vectoriales graduados (pues factoriza a través de $\tilde{E}$), y por lo tanto es de Leray. Es claro ahora cómo probar que si $\tilde{\phi}'$ es de Leray, $\tilde{\phi}$ tambin lo es. La segunda parte de la afirmación es trivial si recordamos que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Esto termina la prueba. $\square$

2.1.3 Definición. Sea $f : X \to X$ una aplicación del espacio topológico X en sí mismo. Diremos que f es una *aplicación de Lefschetz* si $f_* : H(X, \mathbb{Q}) \to$

$H(X, \mathbb{Q})$ es de Leray. Definimos el *número de Lefschetz* de f como el número de Lefschetz de f_*, es decir $\Lambda(f) := \Lambda(f_*)$.

Se tiene la siguiente propiedad del número de Lefschetz:

2.1.4 Proposición. *Supóngase que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & X' \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u"'] & X' \arrow[u, "f'"'] \arrow[ul, "v"] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde X, X' son espacios topológicos y f, f', u, v aplicaciones. Entonces, f es una aplicación de Lefschetz si y sólo si f' lo es, en ese caso $\Lambda(f) = \Lambda(f')$. Además, $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Fix}(f') \neq \emptyset$

Demostración: La primera parte es inmediata si aplicamos el funtor homología al diagrama y aplicamos la proposición anterior. La segunda también es sencilla: si $x \in \mathrm{Fix}(f)$ entonces $u(x) \in \mathrm{Fix}(f')$; si por el contrario, $x' \in \mathrm{Fix}(f')$ entonces $v(x') \in \mathrm{Fix}(f)$. □

2.2 APROXIMACIÓN POR APLICACIONES DE DIMENSIÓN FINITA

En esta sección veremos que bajo ciertas hipótesis, una aplicación $f : U \rightarrow E$ con U abierto en E, un espacio normado real, puede, en cierto sentido, ser

aproximada por una aplicación cuya imagen esté contenida en un subespacio lineal de E de dimensión finita.

2.2.1 DEFINICIÓN. Se dice que una aplicación $f : X \to Y$ es *relativamente compacta* si $\overline{f(X)}$ es compacto. Si Y es un espacio normado, diremos que f es *de dimensión finita* si $f(X)$ está contenido en un subespacio lineal de Y de dimensión finita.

A continuación, enunciaremos y probaremos los teoremas que dan nombre a esta sección, y que son indispensables para generalizar la noción de índice a una clase más grande de aplicaciones.

2.2.2 Teorema. *Sea U un abierto de un espacio normado real E, y sea $f : X \to U$ una aplicación relativamente compacta, donde X es un espacio topológico arbitrario. Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeña, existen un poliedro finito $K_\varepsilon \subset U$ y una aplicación $f_\varepsilon : X \to U$ que cumplen:*

1. *$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ para toda $x \in X$.*
2. *$f_\varepsilon(X) \subset K_\varepsilon$*
3. *$f \simeq f_\varepsilon$, más aún, la aplicación $H(x,t) = tf(x) + (1-t)f_\varepsilon(x)$ define una homotopía entre f y f_ε con imagen en U.*

Demostración: Dado que $\overline{f(X)}$ es compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_{2\varepsilon}(\overline{f(X)}) \subset U.$$

Tenemos para $\overline{f(X)}$ la cubierta abierta dada por $B(y,\varepsilon)$, con $y \in \overline{f(X)}$; de manera que $B(y,\varepsilon) \subset U$ para toda $y \in \overline{f(X)}$. Si $\{y_1,\ldots,y_n\}$ son tales que las respectivas bolas cubren a $\overline{f(X)}$, definamos

$$\lambda_i(x) = \max\{0, \varepsilon - \|f(x) - y_i\|\}$$

Observemos que λ_i es continua, y que $\sum_i \lambda_i(x) > 0$ para toda $x \in X$. Definamos

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\sum_i \lambda_i(x) y_i}{\sum_j \lambda_j(x)}$$

Es sencillo probar que f_ε cumple 1. Sea K_ε el subconjunto del convexo más pequeño que contiene a $\{y_1,\ldots,y_k\}$ cuyos elementos son exactamente aquellos

$$\alpha = \sum \alpha_i y_i \quad \text{con} \quad \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \in [0,1] \quad \text{tales que} \quad \bigcap_{i \in I_\alpha} B_\varepsilon(y_i) \neq \emptyset$$

$$\text{donde} \quad I_\alpha = \{i | \alpha_i \neq 0\}$$

Si $\sum \alpha_i y_i \in K_\varepsilon$, sea $j \in I_\alpha$. Observemos

$$\|\sum_i \alpha_i y_i - y_j\| = \|\sum_i \alpha_i (y_i - y_j)\| \leq \sum_i \alpha_i \|y_i - y_j\| < \sum \alpha_i 2\varepsilon = 2\varepsilon,$$

de manera que $\sum_i \alpha_i y_i \in B_{2\varepsilon}(y_j) \subset U$ Así, $K_\varepsilon \subset U$. Veamos ahora que $f_\varepsilon(X) \subset K_\varepsilon$. Para esto, basta probar $I_{f_\varepsilon(x)} \neq \emptyset$. Pero, por la definición de f_ε, $I_{f_\varepsilon(x)} = \{i | f(x) \in B_\varepsilon(y_i)\}$, lo cual es claramente no vacío. La propiedad 3 es inmediata, ya que $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ implica que el segmento que une a $f(x)$ con $f_\varepsilon(x)$ está contenido en U, dada nuestra elección de ε. $\square$

2.2.3 DEFINICIÓN. Cualquier f_ε que cumpla 1, 2, 3 del teorema anterior recibirá el nombre de *ε-aproximación de f*.

2.2.4 Lema. *Sean V un abierto en un espacio normado real E y $f : \overline{V} \to E$ una aplicación relativamente compacta sin puntos fijos en la frontera de V, ∂V. Entonces se cumplen:*

(a) $\eta = \inf_{x \in \partial V} \|x - f(x)\| > 0$

(b) *Si $f_\varepsilon : \overline{V} \to E$ es tal que $\|f_\varepsilon(x) - f(x)\| < \varepsilon$ para toda $x \in X$, y $\varepsilon < \eta$, entonces f_ε no tiene puntos fijos en ∂V (Obsérvese que f_ε no tiene que ser ε-aproximación de f).*

(c) *Si $2\varepsilon < \eta$, para cualesquiera dos ε-aproximaciones de f, digamos f_ε y f'_ε, se tiene que:*

$$H : \overline{V} \times I \to E \quad \text{dada} \quad \text{por } H(x,t) = tf_\varepsilon(x) + (1-t)f'_\varepsilon(x)$$

define una homotopía de dimensión finita entre f_ε y f'_ε. Más aún, $\mathrm{Fix}(H_t)$ es compacto para toda $t \in I$ y $\overline{\bigcup_{t \in I} \mathrm{Fix}(H_t)}$ es un compacto contenido en V.

Demostración:

(a) Si $\eta = 0$, existe una sucesión $\{x_n\}$ en ∂V con $\|x_n - f(x_n)\| < \frac{1}{n}$. Dado que $f(x_n) \in \overline{f(\overline{V})}$, existe una subsucesión$\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $\{f(x_{n_j})\}$ es convergente. Sea l el límite de esta sucesión. Observemos que l es también el límite de la sucesión $\{x_{n_j}\}$ y por lo tanto $l \in \partial V$. Por continuidad, se tiene que $f(l) = l$, lo cual es una contradicción.

(b) Si existiera $x \in \partial V \cap \mathrm{Fix}(f_\varepsilon)$, tendríamos $\|f(x) - x\| < \eta$, lo cual claramente contradice la definición de η.

(c) Que H define una homotopía de dimensión finita entre f_ε y f'_ε es claro. Observemos que $\mathrm{Fix}(H_t)$ es cerrado en $\overline{V}$ para toda $t \in I$, y por lo tanto cerrado en E, además de estar obviamente contenido en algún subespacio de E de dimensión finita y ser acotado, siendo por lo tanto compacto. Es inmediato probar que para toda $(x,t) \in \overline{V} \times I$ se tiene

$$\|H(x,t) - f(x)\| < \varepsilon$$

lo cual implica que $H(\overline{V} \times I)$ es acotado, pues $\overline{f(V)}$ lo es, dado que f es relativamente compacta. De manera que $\bigcup_{t\in I} \mathrm{Fix}(H_t)$ es acotado y está contenido en un subespacio de E de dimensión finita, dado que toda la imagen de H lo está. Esto prueba que $\overline{\bigcup_{t\in I} \mathrm{Fix}(H_t)}$ es compacto. Sea ahora $x \in \overline{\bigcup_{t\in I} \mathrm{Fix}(H_t)}$. Sabemos entonces que existe (x_n) sucesión en $\bigcup_{t\in I} \mathrm{Fix}(H_t)$ que converge a x. Sea t_n tal que $x_n \in \mathrm{Fix}(H_{t_n})$. Dada la compacidad de I, existe una subsucesión de (t_n) (que seguiremos denotando por (t_n)) que converge, digamos, a t_0. Tenemos entonces

$$H(t_0, x) = H(\lim_{n\to\infty}(t_n, x_n)) = \lim_{n\to\infty} H(t_n, x_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

de manera que $x \in V$, pues por el inciso anterior, $\mathrm{Fix}(H_t) \subset V$ (esto último ya que $\|H_t(x) - f(x)\| < \varepsilon$ para toda $(x,t) \in \overline{V} \times I$, como se verifica fácilmente).

$\square$

2.3 El índice de Leray-Schauder

Por fin estamos preparados para la anunciada generalización del índice de punto fijo, que desarrollaremos en esta sección, posiblemente la más importante del capítulo.

Sea E un espacio normado real y U un abierto de E. Sea $f : U \to E$ una aplicación relativamente compacta con $\mathrm{Fix}(f)$ compacto. Sea V un abierto tal que $\mathrm{Fix}(f) \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Definimos $g := f|_V$. Observemos que:

(i) g es relativamente compacta

(ii) Se cumplen, por lo tanto, los teoremas de la sección pasada para g.

En particular, existe una ε-aproximación de g, que denotaremos por g_ε, y si $2\varepsilon < \eta$, cualesquiera dos de ellas son homotópicas. Sea, pues, ε tal que $2\varepsilon < \eta$ y g_ε una ε-aproximación de g. Como sabemos, existe E^n, subespacio lineal de E de dimensión n, que contiene a la imagen de g_ε. Denotemos por $\tilde{g}_\varepsilon$ a la contracción a E^n de la restricción de g_ε a $E^n \cap V$ (véase 0.2.2). Es decir,

$$\tilde{g}_\varepsilon : E^n \cap V \to E^n$$

Notemos que $\mathrm{Fix}(\tilde{g}_\varepsilon)$ es cerrado en $\overline{V} \cap E^n$, siendo por lo tanto compacto.

2.3.1 DEFINICIÓN. Definimos

$$I(f) := I(\tilde{g}_\varepsilon),$$

donde claramente el índice de la derecha es el que definimos en el capítulo pasado. A $I(f)$ se le conoce como el *índice de Leray-Schauder* de f.

Aparentemente, esta definición depende de tres elecciones, a saber

1. El abierto V.
2. La ε-aproximación de g.
3. El subespacio lineal E^n.

Veamos porqué, en el fondo, estas elecciones no son relevantes:

3. El hecho de que la elección de E^n no afecte la definición es una consecuencia inmediata de la propiedad de contracción vista en el capítulo anterior.

2. Si g_ε y g'_ε son ε-aproximaciones de g como en la definición, escojamos E^m subespacio lineal de dimensión finita de E suficientemente grande para contener la imagen de ambas. La homotopía del lema 2.2.4 se restringe a $E^m \cap V$, de manera que por la compacidad de $\overline{\bigcup_{t\in I} \mathrm{Fix}(H_t)}$ y de $\mathrm{Fix}(H_t)$ para toda $t \in I$, la igualdad

$$\overline{\bigcup_{t\in I} \mathrm{Fix}(H_t|_{V\cap E^n})} = \overline{\bigcup_{t\in I} \mathrm{Fix}(H_t)} \cap V \cap E^n$$

y la invariancia homotópica para el índice de aplicaciones en $\mathbb{R}^n$, se tiene que $I(\tilde{g}_\varepsilon) = I(\tilde{g}'_\varepsilon)$.

1. La elección de V es irrelevante, gracias a la propiedad de escisión para el índice de aplicaciones en $\mathbb{R}^n$.

Una vez convencidos de que nuestra definición es buena, probaremos propiedades de este índice análogas a aquéllas del índice en $\mathbb{R}^n$. Tenemos el siguiente

2.3.2 Teorema. *Sean U un conjunto abierto en un espacio normado real E y $f : U \to E$ una aplicación relativamente compacta con* $\text{Fix}(f)$ *compacto. Se tienen las siguientes propiedades:*

(a) Unidades. *Si f es constante, $I(f) = 0$ si $f(U) \notin U$, $I(f) = 1$ si $f(U) \in U$*

(b) Escisión. *Para todo abierto V tal que* $\text{Fix}(f) \subset V \subset U$ *se tiene*

$$I(f) = I(f|_V)$$

(c) Aditividad. *Si $U = \bigcup_{i=1}^m U_i$, U_i es abierto para toda i, $F_i =$* $\text{Fix}(f|_{U_i})$ *es compacto para toda i y $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces $I(f) = \sum_{i=1}^n I(f|_{U_i})$.*

(d) Multiplicatividad. *Dada $f' : U' \to E'$, como la f de la hipótesis, podemos definir $f \times f' : U \times U' \to E \times E'$. Dado que $E \times E'$ es un espacio vectorial normado real, con norma*

$$\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

podemos pensar en el índice de $f \times f'$. Resulta que

$$I(f \times f') = I(f) \cdot I(f')$$

(e) Invariancia Homotópica. *Si dada $f' : U \to E$ existe una homotopía $H : U \times I \to E$ entre f y f' tal que existe K compacto con $F = \bigcup_{t \in I} \mathrm{Fix}(H_t) \subset K \subset U$, entonces $I(f) = I(f')$. Obsérvese que no se pide que los conjuntos $\mathrm{Fix}(H_t)$ sean compactos.*

(f) Conmutatividad. *Dadas $f : U \to E'$, $g : U' \to E$, con $U \subset E$, $U' \subset E'$ abiertos, entonces se tiene $\mathrm{Fix}(f \circ g) \approx \mathrm{Fix}(g \circ f)$; si estos conjuntos son compactos y además $f \circ g$ es relativamente compacta, entonces $I(f \circ g) = I(g \circ f)$ (desde luego, estamos pensando en $f \circ g$ y $g \circ f$ donde estas definiciones tengan sentido).*

(g) Puntos Fijos. $I(f) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$

(h) Propiedad de Lefschetz. *Si $g : U \to U$ es relativamente compacta y además $\mathrm{Fix}(g)$ es compacto, entonces g es de Lefschetz e $I(g) = \Lambda(g)$.*

Demostración: Las pruebas de (a), (b), (c) y (d) son consecuencias directas de las correspondientes propiedades del índice para aplicaciones de $\mathbb{R}^n$. Para la prueba de (f) se necesitan algunas de las otras propiedades, y es por eso que la demostraremos al último.

(e) Sean V abierto con $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$, ε suficientemente pequeña y $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset K$ tal que $\bigcup B_\varepsilon(y_i) \supset \overline{H(U \times I)}$. Consideremos H_ε :

$\overline{V} \times I \to E$, dada por

$$H_\varepsilon(x,t) = \sum_i \frac{\lambda_i(x,t)\cdot y_i}{\sum_j \lambda_j(x,t)} \quad \text{donde} \quad \lambda_j(x,t) = \max\{0, \varepsilon - \|H(x,t) - y_i\|\}$$

Se prueba sin dificulad que H está bien definida (i.e. $\sum_j \lambda_j(x,t) \neq 0$ para toda $x \in \overline{V}$) y también que

$$\|H_\varepsilon(x,t) - H(x,t)\| < \varepsilon$$

para toda $(x,t) \in \overline{V} \times I$. De manera que $H_\varepsilon(x,0)$ y $H_\varepsilon(x,1)$ son ε-aproximaciones de $H(x,0)$ y $H(x,1)$ respectivamente. Es claro que existe un subespacio linealE^n de E de dimensión finita que contiene la imagen de H_ε. Consideremos la restricción de la contracción

$$\tilde{H}_\varepsilon : V \cap E^n \times I \to E^n$$

Observemos que $\bigcup \mathrm{Fix}(\tilde{H}_{\varepsilon t}) \subset \overline{B_\varepsilon K \cap E^n} \subset E^n$. Para poder usar la invariancia homotópica del índice en $\mathbb{R}^n$, sólo faltaría probar que $\mathrm{Fix}(\tilde{H}_{\varepsilon t})$ es compacto para toda $t \in I$. Pero $\mathrm{Fix}(\tilde{H}_{\varepsilon t}) \subset \overline{V}$, lo cual muestra que es cerrado, $\mathrm{Fix}(\tilde{H}_{\varepsilon t}) \subset \overline{H_\varepsilon(V \times I)}$ muestra que es compacto. Así, tenemos:

$$I(H_0) = I(H_{\varepsilon 0}) = I(H_{\varepsilon 1}) = I(H_1)$$

donde las igualdades de los extremos se dan por definición del índice y la de enmedio por la invariancia homotópica para el índice en $\mathbb{R}^n$.

(g) Si $I(f) \neq 0$, se tiene, que, para cualquier n suficientemente grande, la restricción de cualquier $\frac{1}{n}$-aproximación de f tiene índice distinto de cero.

En la notación de la definición tenemos $I(\tilde{g}_{\frac{1}{n}}) \neq 0$, así que, para cada n grande, existe $x_n \in V$ punto fijo de $\tilde{g}_{\frac{1}{n}}$. Dado que $\overline{f(U)}$ es compacto, se tiene que existe una subsucesión de (x_n) (que seguiremos denotando por (x_n)) de manera que $(f(x_n))$ es convergente, digamos a $y \in \overline{f(U)}$. Por otro lado, usando la desigualdad del triángulo, tenemos

$$\|f(x_n) - x_n\| < \frac{1}{n},$$

lo que muestra que (x_n) también converge a y. Así

$$f(y) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$$

de manera que $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.

(h) Sea ε suficientemente pequeña, g_ε una ε-aproximación de g y $\tilde{g}_\varepsilon$ la contracción de g_ε a un subespacio de dimensión finita E^n. Hagamos $U_n = U \cap E^n$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
U_n \arrow[r, hook, "\subset"] & U \\
U_n \arrow[u, "\tilde{g}_\varepsilon"] \arrow[r, hook, "\subset"'] & U \arrow[u, "g_\varepsilon"'] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Por definición, se tiene $I(g) = I(\tilde{g}_\varepsilon)$. Por el teorema de Lefschetz-Hopf, sabemos que $\tilde{g}_\varepsilon$ es de Lefschetz (incluso de rango finito), y además

$$\Lambda(\tilde{g}_\varepsilon) = I(\tilde{g}_\varepsilon).$$

La proposición 2.1.4 afirma que también g_ε es de Lefschetz y que $\Lambda(g_\varepsilon) = \Lambda(\tilde{g}_\varepsilon)$. Pero el lema 2.2.4 nos dice que $g_\varepsilon \simeq g$, de manera que el homomorfismo inducido en homología por ambas aplicaciones es el mismo, así: $\Lambda(g) = \Lambda(g_\varepsilon)$. Combinando estas igualdades, tenemos $I(g) = \Lambda(g)$.

(f) Es fácil ver que g y f definen homeomorfismos inversos entre los conjuntos $\mathrm{Fix}(g \circ f)$ y $\mathrm{Fix}(f \circ g)$. Para que tenga sentido la proposición, supongamos que estos conjuntos son compactos. Dividiremos la demostración en dos casos.

Caso 1. Supongamos que f y g son ambas relativamente compactas. Siendo así, se puede repetir casi exactamente la prueba de la conmutatividad en $\mathbb{R}^n$.

Definamos $\gamma : U' \times U \to E' \times E$ haciendo $\gamma(x, y) = (g(y), f(x))$ y pensemos en la homotopía

$$h : U' \times U \times I \to E' \times E(x, y, t) \mapsto (tgf(x) + (1-t)g(), f(x))$$

La demostración de que $\bigcup_{t \in I} \mathrm{Fix}(h_t)$ coincide con $\mathrm{Fix}(h_0)$ y de que este conjunto es compacto es completamente análoga al caso de aplicaciones en $\mathbb{R}^n$. Resulta evidente que h es relativamente compacta si notamos que h es la composición

$$\begin{array}{ccccc} U' \times U \times I & \longrightarrow & E \times E \times I & \longrightarrow & E \\ (x, y, t) & \longmapsto & (gf(x), g(y), t) & \longmapsto & tgf(x) + (1-t)g(y) \end{array}$$

y recordamos que tanto f como g lo son. Usando la propiedad de invariancia homotópica, se tiene

$$I(\gamma) = I(h_0) = I(h_1)$$

Definiremos una homotopía más:

$$H : U' \times E \times I \to E' \times E(x, y, t) \mapsto (gf(x), (1-t)f(x))$$

Se observa inmediatamente que la restricción de H_0 a $U' \times U$ coincide con h_1 y que $\mathrm{Fix}(H_0) \subset U' \times U$, de manera que por escisión tenemos

$$I(h_1) = I(H_0)$$

Usando otra vez la invariancia homotópica, se muestra que

$$I(H_0) = I(H_1)$$

ya que $\bigcup_{t \in I} \mathrm{Fix}(H_t)$ es compacto (nuevamente, la prueba es la misma que en el caso $\mathbb{R}^n$) y H es relativamente compacta. Pero $H_1(x, y) = (gf(x), 0)$, de manera que por multiplicatividad se tiene

$$I(H_1) = I(g \circ f) \cdot I(\mathrm{cte}) = I(g \circ f)$$

donde la segunda igualdad es una consecuencia directa de la propiedad de unidades. Todo esto junto muestra

$$I(\gamma) = I(g \circ f)$$

Usando homotopías análogas se muestra $I(\gamma) = I(f \circ g)$, lo que concluye la prueba de este caso particular.

Caso general Supongamos que f es compacta. Dado que E es un espacio topológico normal, existe $A \subset U$ abierto acotado con $\partial A \subset U$ y $\mathrm{Fix}(f \circ g) \subset A$. Sea $A' = f^{-1}(A)$. Observemos que (*i*) $f^{-1}(\overline{A}) \subset U'$, de manera que $\overline{f^{-1}(A)} \subset U'$

(*ii*) $\mathrm{Fix}(g \circ f) \subset f^{-1}(A)$ (si $gf(x) = x \Rightarrow fgf(x) = f(x) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{Fix}(f \circ g) \subset A$)

(*iii*) $gf : f^{-1}(A) \to E'$, $f \circ g : g^{-1}(A') \to E$ son relativamente compactas.

El lema 2.2.4 garantiza que los números

$$\eta_1 = \inf_{x \in \partial A'} \{\|gf(x) - x\|\}, \qquad \eta_2 = \inf_{x \in \partial g^{-1}(A')} \{\|fg(x) - x\|\}$$

son mayores que cero, pues

$$\mathrm{Fix}(f \circ g) \subset g^{-1} f^{-1}(\mathrm{Fix}(fg)) \subset g^{-1}(A') \quad \text{y también} \quad \mathrm{Fix}(g \circ f) \cap \partial A = \emptyset$$

Por otro lado, se tiene que $K = \overline{f(U')}$ es compacto y por lo tanto $K \cap \overline{A}$ también. Dado que $K \cap \overline{A} \subset U$, podemos pensar en $g|_{K \cap \overline{A}}$, que es uniformemente continua por la compacidad del dominio. Más precisamente, dado $y \in K \cap \overline{A}$, existe $\delta_y > 0$ tal que $B_{\delta_y}(y) \subset U$ y si $y', y'' \in B_{\delta_y}(y) \subset U$ entonces $\|g(y') - g(y'')\| < \eta$. Por compacidad, existe $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset K \cap \overline{A} \subset U$ tal que $\bigcup B_{\delta_{y_i}}(y_i) \supset K \cap \overline{A}$. Sea $V = \bigcup B_{\delta_{y_i}}(y_i)$. Es claro que V es una vecindad abierta del compacto $K \cap \overline{A}$, de manera que existe $\alpha > 0$ tal que $B_\alpha(K \cap \overline{A}) \subset V$. Sea $\varepsilon = \min\{\delta_{y_1}, \ldots, \delta_{y_k}, \eta, \alpha\}$. Así, si tenemos $y \in K \cap \overline{A}$ y $\|y' - y\| < \varepsilon$, entonces $\|g(y) - g(y')\| < \varepsilon$ y $y' \in V$ (en particular, $ty + (1-t)y' \in V$ para toda $t \in I$).

Sea ahora f_ε una ε-aproximación de $f : \overline{f^{-1}(A)} \to E$. Por definición, sabemos que $H : U' \times I \to E$ dada por $H(x,t) = tf(x) + (1-t)f_\varepsilon(x)$ define una homotopía relativamente compacta entre f y f_ε, que además satisface claramente $\|H(x,t) - H(x,t')\| < \varepsilon$, de manera que $H(\overline{f^{-1}(A)} \times I) \subset B_\varepsilon(\overline{f^{-1}(A)} \subset B_\varepsilon(f^{-1}(\overline{A})) \subset V$. Una vez observado esto, podemos considerar la homotopía $g \circ H : \overline{f^{-1}(A)} \times I \to E'$. Por la elección de ε, es claro que $\|gH(x,t) - gH(x,0)\| < \eta$ para cualquier $x \in f^{-1}(A)$ y $t \in I$. Lo que esto muestra, es que $\mathrm{Fix}(g \circ H_t) \subset f^{-1}(A)$ para toda $t \in I$ (Otra vez el lema 2.2.4). Además, si existiera $x \in \overline{\bigcup \mathrm{Fix}(g \circ H_t)} \cap \partial f^{-1}(A)$, se tendría una sucesión $(x_n) \in \bigcup \mathrm{Fix}(g \circ H_t)$ con $\lim x_n = x$, y $t_n \in I$ tal que $gH(x_n, t_n) = x_n$ y (t_{n_j}) una subsucesión de (t_n) convergente, digamos, a t_0. Tendríamos así

$$x = \lim x_n = \lim gH(x_n, t_n) = gH(\lim(x_n, t_n)) = gH(x, t_0)$$

lo que muestra $x \in \mathrm{Fix}(g \circ H_{t_0}) \cap \partial f^{-1}(A)$, lo cual es claramente una contradicción, pues habíamos ya dicho que este conjunto era vacío. Por otra parte, $\overline{\bigcup \mathrm{Fix}(g \circ H_t)}$ es compacto, pues es claramente un subconjunto de $\overline{g(H(\overline{f^{-1}(A)} \times I))}$, que es compacto pues H es relativamente compacta. Lo que todo esto muestra es que podemos usar la propiedad de invariancia homotópica, de manera que

$$I(g \circ f|_{f^{-1}(A)}) = I(g \circ f_\varepsilon|_{f^{-1}(A)})$$

En otro orden de ideas, sabemos que existe E^n, subespacio lineal de dimensión finita de E, y $K_\varepsilon \subset E^n$ compacto con $f_\varepsilon(U') \subset K_\varepsilon$, de manera que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(A) \arrow[r, "g\circ f_\varepsilon"] \arrow[d, "\tilde{f}_\varepsilon"'] & E' \\ K_\varepsilon \arrow[ur, "g_\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{f}_\varepsilon$ y g_ε son las restricciones y contracciones obvias de f_ε y g respectivamente. Así,

$$I(g\circ f_\varepsilon|_{f^{-1}(A)}) = I(\tilde{g}\circ \tilde{f}_\varepsilon|_{f^{-1}(A)})$$

Observemos también que $K_\varepsilon \subset B_\varepsilon(\overline{f^{-1}(A)}) \subset V$ de manera que $\tilde{g}$ es compacta, y claramente $\tilde{f}$ también. Por el caso particular que ya vimos, se tiene

$$I(\tilde{g}\circ \tilde{f}_\varepsilon|_{f^{-1}(A)}) = I(\tilde{f}_\varepsilon\circ \tilde{g}|_{\tilde{g}^{-1}f^{-1}(A)})$$

Hemos probado

$$I(g\circ f|_{f^{-1}(A)}) = I(\tilde{f}_\varepsilon\circ \tilde{g}|_{g^{-1}(A')})$$

Probaremos ahora $I(f\circ g|_{g^{-1}(A')}) = I(f_\varepsilon\circ \tilde{g}|_{\tilde{g}^{-1}(A')})$

Dado que $\overline{g^{-1}(A')} \subset g^{-1}(\overline{A'})$, podemos considerar la composición $H\circ(g\times \mathrm{id}) : \overline{g^{-1}(A')}\times I \to E$. Es claro que $\|H(g(x),0)-H(g(x),1)\| < \varepsilon < \eta$, de manera que $\mathrm{Fix}(H_t\circ g)\cap \partial(g^{-1}(A') = \emptyset$ (una vez más, lema 2.2.4) y por lo tanto $\overline{\bigcup \mathrm{Fix}(H_t g)} \subset g^{-1}(A')$ (la prueba de este hecho es igual a la de que $\overline{\bigcup \mathrm{Fix}(gH_t)} \subset f^{-1}(A)$ en el párrafo anterior). Además $Hg(\overline{g^{-1}(A')}\times I) \subset H(\overline{A'}\times I)$ de manera que Hg es relativamente compacta. Usando invariancia homotópica, tenemos $I(H_1 g|_{g^{-1}(A')} = I(H_0 g|_{g^{-1}(A')})$ es decir,

$$I(f_\varepsilon g|_{g^{-1}(A')}) = I(fg|_{g^{-1}(A')})$$

pero $f_\varepsilon g(g^{-1}(A')) \subset f_\varepsilon(A') \subset B_\varepsilon(K \cap \overline{O}) \cap E^n \subset E^n$, entonces:

$$I(f_\varepsilon g|_{g^{-1}(A')}) = I(f_\varepsilon g : g^{-1}(A') \cap B_\varepsilon(K \cap \overline{O}) \cap E^n \to E^n).$$

Para terminar, basta observar que el lado derecho no es otra cosa que $I(\tilde{f}_\varepsilon \tilde{g}|\tilde{g}(f^{-1}(A)))$ de manera que

$$I(fg|_{g^{-1}(A')}) = I(gf|_{f^{-1}(A)})$$

□

2.4 El teorema de punto fijo de Schauder

Primero daremos la definición tradicional de retracto absoluto de vecindad (ANR), después, con ayuda de un teorema de J. Dugundji, daremos una definición alternativa. Al final, probaremos un teorema que relaciona el número de Lefschetz de una aplicación de un ANR en sí mismo, con la existencia de puntos fijos en la clase de homotopía de la aplicación.

2.4.1 Definición. Sea Y un espacio topológico metrizable, decimos que Y es un *retracto absoluto de vecindad* (ANR), si dada cualquier pareja (X, A), con X métrico y A cerrado en X, y una aplicación $f : A \longrightarrow Y$, existen U abierto en X, con $A \subset U$, y $F : U \longrightarrow Y$ tal que $F(a) = f(a)$ para toda $a \in A$. Si se puede escoger $U = X$, decimos que Y es un retracto absoluto (AR).

Lo que la definición anterior nos dice es que podemos extender f a una vecindad (abierta) de A.

2.4.2 DEFINICIÓN. Sean W, Y espacios topológicos. Decimos que W es r-dominado por Y si existen aplicaciones $i : W \longrightarrow Y$ encaje y $r : U \longrightarrow W$ tales que $r \circ i = \mathrm{id}$, donde U es una vecindad abierta de $i(W)$ en Y.

2.4.3 Proposición. *Sean W, Y espacios topológicos.*

1. *Si W es r-dominado por Y y Y es ANR, entonces W es ANR.*
2. *Si V es abierto en W y W es ANR, entonces V es ANR.*
3. *Si X es un subconjunto convexo de un espacio normado, entonces X es AR.*

Demostración: Sea (X,A) como en la definición 2.4.1

1. Sea $f : A \longrightarrow W$ una aplicación. Componiendo con el encaje $i : W \hookrightarrow Y$, se tiene una aplicación $i \circ f : A \longrightarrow Y$, y dado que Y es un ANR, se tiene una extensión $F : U \longrightarrow Y$, donde U es un abierto en X que contiene a A. Es inmediato verificar que $r \circ F$ es una extensión de f.

2. Sea $f : A \longrightarrow V$ una aplicación. Componiendo con la inclusión $i : V \hookrightarrow W$, se tiene una aplicación $i \circ f : A \longrightarrow W$, y dado que W es un ANR, se tiene una extensión $F : U \longrightarrow W$. Es claro que $F^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de A, de manera que $F|_{F^{-1}(V)}$ es la extensión de f buscada.

3. Véase [Du] y 2.4.5 más abajo. □

Los siguientes dos teoremas, que enunciamos sin demostración, nos permitirán dar una definición alternativa de ANR.

2.4.4 Teorema. *Cualquier espacio metrizable se puede encajar como subespacio cerrado de un espacio vectorial normado adecuado.*

2.4.5 Teorema. *Sean X un espacio métrico, $A \subset X$ cerrado, y L un espacio vectorial localmente convexo. Entonces cualquier aplicación $f : A \longrightarrow L$ admite una extensión $F : X \longrightarrow L$, más aún, $F(X)$ está contenido en el convexo más pequeño generado por $f(A)$.*

Para la demostración de estos resultados, véase [AE] y [Du] respectivamente.

2.4.6 Teorema. *Y es un ANR si y sólo si Y está r-dominado por un abierto de un espacio vectorial normado.*

Demostración: Sea Y un ANR. Por el teorema 2.4.4, sabemos que existen un espacio normado E y un encaje $g : Y \hookrightarrow E$ con $g(Y)$ cerrado. Se tiene

$g^{-1} : g(Y) \longrightarrow Y$, y por consiguiente, existen U vecindad abierta de $g(Y)$ y $r : U \longrightarrow Y$ extensión de g^{-1}. Es claro que $r \circ i \circ g = \mathrm{id}$, de manera que Y está r-dominado por U. Inversamente, supongamos que Y es r-dominado por U, donde U es abierto en E, un espacio vectorial normado. Por la primera parte de la proposición 2.4.3, bastaría ver que U es ANR, por la segunda parte, bastaría ver que E es un ANR. Pero esto es una consecuencia inmediata de 2.4.5. □

El siguiente resultado, aparentemente fuera de lugar aquí, nos será de utilidad en el siguiente capítulo.

2.4.7 Proposición. *Todo ANR es semilocalmente simplemente conexo.*

Demostración: Sea X un ANR. Supongamos que $X \subset E$, donde E es un espacio vectorial normado y $r : V \longrightarrow X$ es una retracción de X, donde $V \supset X$ es una vecindad abierta de X. Dado $x \in X$, sea B_x una bola abierta con centro en x suficientemente pequeña para estar contenida en V. $B_x \cap X$ es una vecindad de x en X. Sea $c : I \longrightarrow X$ un lazo basado en x y contenido en $B_x \cap X$. Visto como un lazo en B_x, c es nulhomotópico, pues B_x es contraíble, esto implica que $r \circ c$ es nulhomotópico en $r(B_x) \subset r(V) = X$. Pero es claro que $r \circ c = c$, lo cual muestra que X es semilocalmente simplemente conexo. □

2.4.8 Teorema. *Sea X un ANR, y $f : X \longrightarrow X$ una aplicación relativamente* *compacta con* Fix(f) *compacto. Supongamos además que* X *está* r*-dominado por* U*, donde* U *es abierto en un espacio vectorial normado real* E*. Entonces* f *es de Lefschetz y el número de Lefschetz de* f *es igual al índice de Leray-Schauder de* $i \circ f \circ r$*. Es decir,*

$$\Lambda(f) = I(i \circ f \circ r) = \Lambda(i \circ f \circ r)$$

Demostración: Denotemos por $i : X \hookrightarrow U$ al encaje. Basta con observar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "r"] & X \arrow[dl, "i \circ f"'] \\ U \arrow[u, "i \circ f \circ r"] \arrow[r, "r"'] & X \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

y recordar la proposición 2.1.2, que muestra, en este caso, que f es de Lefschetz, pues $i \circ f \circ r$ lo es. Además, $\Lambda(f) = \Lambda(i \circ f \circ r)$, de manera que $\Lambda(f) = I(i \circ f \circ r)$.

□

2.4.9 Teorema. *Sean* X *un ANR y* $f : X \longrightarrow X$ *una aplicación relativamente compacta con* Fix(f) *compacto. Entonces* $\Lambda(f) \neq 0 \Rightarrow \text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Demostración:

$$\Lambda(f) \neq 0 \Rightarrow \Lambda(i \circ f \circ r) \neq 0 \Rightarrow \text{Fix}(i \circ f \circ r) \neq \emptyset \Rightarrow \text{Fix}(f) \neq \emptyset$$

si i, r son como en el teorema anterior. □

2.4.10 Corolario. *Sea X un ANR con homología trivial, es decir, $H_n(X;\mathbb{Q}) = 0$ si $n > 0$, $H_0(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Entonces cualquier $f : X \longrightarrow X$ relativamente compacta tiene un punto fijo.*

Demostración: No es difícil observar que $f_* : H_0(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_0(X;\mathbb{Q})$ es un isomorfismo; de hecho, si $[\sigma]$ es un generador de $H_0(X;\mathbb{Q})$, $f_*[\sigma] = [f\circ\sigma] = [\sigma]$. Si $\mathrm{Fix}(f)$ es compacto esto muestra que $\Lambda(f) = 1$ y por lo tanto $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$. Si $\mathrm{Fix}(f)$ no es compacto, tenemos $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, pues $\emptyset$ es compacto. □

2.4.11 Corolario. (Teorema de punto fijo de Schauder) *Sea X un subconjunto convexo de un espacio vectorial localmente convexo. Entonces cualquier $f : X \longrightarrow X$ relativamente compacta tiene al menos un punto fijo.*

Demostración: Es inmediato verificar que X cumple con las hipótesis del corolario anterior. □

2.5 El índice de Leray-Schauder para ANR

En esta última sección de este capítulo, daremos una generalización más del índice de punto fijo, aplicándolo en esta ocasión a retractos absolutos de vecindad (ANR). Como es de esperarse, la definición y la mayoría de los resultados son consecuencia inmediata de los de la sección anterior. En el Capítulo 1 definimos el índice para ENR, con base en el índice para aplicaciones de abiertos de

$\mathbb{R}^n$. En esta sección haremos lo mismo para ANR y aplicaciones relativamente compactas, con base en el índice definido para aplicaciones relativamente compactas que tienen por dominio un abierto en un espacio normado real.

2.5.1 DEFINICIÓN. Sean X un ANR y $U \subset X$ un abierto. Si $f : U \longrightarrow X$ es una aplicación relativamente compacta con $\mathrm{Fix}(f)$ compacto, $V \subset E$ es abierto en un espacio normado real E que r-domina a X e $i : X \longrightarrow E$ es la inclusión, definimos el *índice de* f mediante la igualdad

$$I(f) = I(i \circ f \circ r) : r^{-1}(U) \longrightarrow E)$$

•

Obsérvese primero que $i \circ f \circ r : r^{-1}(U) \longrightarrow E$ es relativamente compacta, pues f lo es, de manera que tiene sentido la definición anterior. La forma de mostrar que esta definición no depende esencialmente del retracto escogido es prácticamente la misma que usamos para mostrar lo propio en el caso de un ENR.

2.5.2 **Teorema.** *Sea X un ANR, $U \subset X$ abierto y $f : U \longrightarrow X$ una aplicación realativamente compacta con* $\mathrm{Fix}(f)$ *compacto. Se tienen las siguientes propiedades:*

(a)Unidades. *Si f es constante, $I(f) = 0$ si $f(U) \notin U$, $I(f) = 1$ si $f(U) \in U$*

(b) Escisión. *Si* $U' \subset X$ *es un abierto tal que* $\mathrm{Fix}(f) \subset U'$*, se tiene* $I(f) = I(f|_{U'})$.

(c) Aditividad. *Si* $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$*,* U_i *es abierto para toda* i*,* $F_i = \mathrm{Fix}(f|_{U_i})$ *es compacto para toda* i *y* $F_i \cap F_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$ *entonces* $I(f) = \sum_{i=1}^{n} I(f|_{U_i})$.

(d) Multiplicatividad. *Dada* $f' : U' \to X'$*, relativamente compacta, con* $\mathrm{Fix}(f)$ *compacto,* X' *un ANR y* $U' \subset X'$ *abierto, podemos definir* $f \times f' : U \times U' \to X \times X'$*. Dado que* $X \times X'$ *es un ANR, podemos pensar en el índice de* $f \times f'$*. Resulta que*

$$I(f \times f') = I(f) \cdot I(f')$$

(e) Invariancia Homotópica. *Sea* $H : U \times I \longrightarrow X$ *una homotopía relativamente compacta, tal que existe* K *compacto con* $F = \bigcup_{t \in I} \mathrm{Fix}(H_t) \subset K \subset U$*, entonces* $I(H_0) = I(H_1)$.

(f) Conmutatividad. *Dadas* $f : U \to X'$*,* $g : U' \to X$*, con* $U \subset X$*,* $X' \subset X'$ *abiertos, entonces se tiene* $\mathrm{Fix}(f \circ g) \approx \mathrm{Fix}(g \circ f)$*; si estos conjuntos son compactos y además* $f \circ g$ *es relativamente compacta, entonces* $g \circ f$ *es relativamente compacta e* $I(f \circ g) = I(g \circ f)$ *(desde luego, estamos pensando en* $f \circ g$ *y* $g \circ f$ *donde estas definiciones tengan sentido).*

(g) Puntos Fijos. $I(f) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$

(h) Propiedad de Lefschetz. *Si* $g : U \to U$ *es relativamente compacta y además* $\mathrm{Fix}(g)$ *es compacto, entonces* g *es de Lefschetz e* $I(g) = \Lambda(g)$.

La demostración de cada una de estas propiedades es consecuencia inmediata de la correspondiente propiedad en el teorema 2.3.2 $\square$

La propiedad de invariancia homotópica se ve fortalecida por la siguiente proposición, que permite olvidarse de algunas de las hipótesis:

2.5.3 Proposición. *Sea $H : X \times I \longrightarrow X$ una homotopía relativamente compacta. Entonces existe $K \subset X$ compacto tal que $\cup \mathrm{Fix}(H_t) \subset K$.*

Demostración: Sea $\mathcal{H} : X \times I \longrightarrow X \times I$ la homotopía gorda asociada a H, es decir, $\mathcal{H}(x,t) = (H(x,t),t)$. La contención $\overline{\mathrm{Fix}(\mathcal{H})} \subset \overline{\mathcal{H}(X \times I)}$ muestra que $\overline{\mathrm{Fix}(\mathcal{H})}$ es compacto. Por otro lado, no es difícil verificar la igualdad de conjuntos $\cup \mathrm{Fix}(H_t) = \mathrm{proy}_X(\mathrm{Fix}(\mathcal{H}))$, de manera que $\cup \mathrm{Fix}(H_t) \subset K = \mathrm{proy}_X(\overline{\mathrm{Fix}(\mathcal{H})})$. $\square$

Capítulo 3

Teoría de Nielsen

En este capítulo definiremos el número de Nielsen para una aplicación $f : X \longrightarrow X$ relativamente compacta con $\mathrm{Fix}(f)$ compacto, donde X es un ANR. Este número resultará ser una cota inferior para la cardinalidad de $\mathrm{Fix}(f)$, además de ser un invariante homotópico. Posteriormente, daremos condiciones suficientes para poder aplicar toda esta teoría a un problema más o menos general de operadores, que incluye, entre otros, algunos problemas de ecuaciones diferenciales parametrizadas por algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

3.1 El número de Nielsen

Sea X un ANR y $f : X \longrightarrow X$ una aplicación relativamente compacta con $\mathrm{Fix}(f)$ compacto.

3.1.1 Definición. Sean $x, y \in \mathrm{Fix}(f)$. Decimos que x es equivalente a y, $x \sim y$, o que x está en la misma *clase de punto fijo* que y si existe $c : I \longrightarrow X$ tal que $c(0) = x$, $c(1) = y$ y $f \circ c \simeq c \ \mathrm{rel}(\partial I)$.

Es sencillo verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathrm{Fix}(f)$ y que las clases de punto fijo son localmente conectables por trayectorias.

3.1.2 Proposición. *Sea F una clase de punto fijo de f, es decir*

$$F = \{x \in \mathrm{Fix}(f) \mid x \sim x_o\}$$

para algún $x_o \in \mathrm{Fix}(f)$, entonces F es abierto y cerrado en $\mathrm{Fix}(f)$.

Demostración: Sea $x \in F$. Sea W una vecindad de x tal que todo lazo en W es nulhomotópico en X (tal W existe porque X es semilocalmente simplemente conexo. Véase 2.4.7). Sea $U \subset f^{-1}(W) \cap W$ una vecindad de x conectable por trayectorias. Por último, sea $y \in U \cap \mathrm{Fix}(f)$. Demostraremos que $x \sim y$. Es claro que si c es una trayectoria entre x y y en U (es decir $c(I) \subset U$), se cumple $f(c(I)) \subset W$, de manera que $f \circ c \simeq c \ \mathrm{rel}(\partial I)$. Esto muestra, efectivamente, que F es abierto en $\mathrm{Fix}(f)$. La compacidad de $\mathrm{Fix}(f)$ muestra que existe sólo un número finito de clases de punto fijo, que son claramente ajenas entre sí, de aquí se sigue inmediatamente que F es también cerrado en $\mathrm{Fix}(f)$. $\square$

3.1.3 Corolario. *Para cada clase de punto fijo F de f, existe un abierto $W \subset X$ tal que $W \cap \mathrm{Fix}(f) = F$.* $\square$

Si X es un ANR y f es relativamente compacta, tiene sentido el siguiente concepto.

3.1.4 DEFINICIÓN. Sea F una clase de punto fijo de f. Definimos el *índice de* F, $I(F)$, como el índice de $f|_W : W \longrightarrow X$, donde W es una vecindad abierta de F tal que $W \cap \mathrm{Fix}(f) = F$.

La propiedad de escisión del índice nos dice que la anterior es una buena definición, es decir, no depende de la vecindad W escogida.

3.1.5 DEFINICIÓN. Decimos que una clase de punto fijo F es *esencial* si $I(F) \neq 0$. El *número de Nielsen* de f, $N(f)$, es el número de clases de punto fijo esenciales de f.

Como una consecuencia inmediata de la definición anterior, tenemos el siguiente resultado.

3.1.6 **Teorema.** *f tiene al menos $N(f)$ puntos fijos.* □

Dada una homotopía $H : X \times I \longrightarrow X$, recordemos que la homotopía gorda asociada a H está dada por $\mathcal{H}$: $X \times I \longrightarrow X \times I$, $\mathcal{H}(x,t) = (H(x,t),t)$. La ventaja de $\mathcal{H}$ es que es una aplicación de un espacio en sí mismo, y como tal, podemos hablar de sus puntos fijos.

3.1.7 Nota. **Observemos que si $\cup\mathrm{Fix}(H_t)$ es compacto, entonces $\mathrm{Fix}(\mathcal{H})$ también lo es, pues es cerrado en el compacto $\cup\mathrm{Fix}(H_t) \times I$.**

3.1.8 Proposición. *Sea $H : X \times I \longrightarrow X$ una homotopía, $\mathcal{H}$ su homotopía gorda asociada, y sea $\mathcal{F}$ una clase de punto fijo de $\mathcal{H}$. Entonces, para cada $t \in I$, $\mathcal{F}_t = \{x \in X \mid (x,t) \in \mathcal{F}\}$ es una clase de punto fijo de H_t o $\mathcal{F}_t = \emptyset$.*

Demostración: Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, sean $x, y \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Sabemos que existe $c = (c_1, c_2) : I \longrightarrow X \times I$ tal que $c(0) = (x,t)$, $c(1) = (y,t)$ y $\mathcal{H} \circ c \simeq c \operatorname{rel}(\partial I)$. Es claro que $c \simeq (c_1, t) \operatorname{rel}(\partial I)$, de manera que tenemos

$$\mathcal{H}(c_1, t) \simeq \mathcal{H}(c_1, c_2) \simeq c \simeq (c_1, t) \operatorname{rel}(\partial I).$$

Es decir, c_1 es una trayectoria entre x y y tales que $H_t \circ c_1 \simeq c_1 \operatorname{rel}(\partial I)$. Hemos probado que si $x, y \in \mathcal{F}_t$ entonces $x \sim y$. Inversamente, sea $x \in \mathcal{F}_t$ y $y \in X$ tal que existe $c : I \longrightarrow X \times \{t\}$ con $c(0) = (x,t)$, $c(1) = (y,t)$ y $c \simeq H_t \circ c \operatorname{rel}(\partial I)$. Es claro entonces que $c \times \mathrm{cte}_t : I \times I \longrightarrow X \times t \times I$ es homotópica a $H(c \times \mathrm{cte}_t) \times \mathrm{id} : I \times I \longrightarrow X \times t \times I$ relativamente a la frontera del intervalo, pero el lado derecho no es otra cosa que $\mathcal{H} \circ c$. Esto muestra $y \in \mathcal{F}_t$, lo que termina la prueba. □

3.1.9 Teorema. *Sea $H : X \times I \longrightarrow X$ una homotopía relativamente compacta con $\cup\mathrm{Fix}(H_t)$ compacto. Sea $\mathcal{H}$ su homotopía gorda asociada, y $\mathcal{F}$ una clase de punto fijo de $\mathcal{H}$. Entonces para cada $t \in I$,*

$$I(\mathcal{F}) = I(\mathcal{F}_t)$$

si definimos $I(\emptyset) = 0$. El lado derecho representa, más precisamente, el índice de la clase de punto fijo $\mathcal{F}_t \subset \mathrm{Fix}(H_t)$, donde $H_t : X \longrightarrow X$ está dada por $H_t(x) = H(x,t)$, y $t \in I$ fija.

Demostración: La idea de la prueba es ir "aplastando" $\mathcal{H}$ hasta obtener H_t. Sea $W \subset X \times I$ una vecindad de $\mathcal{F}$ tal que $W \cap \mathrm{Fix}(\mathcal{H}) = \mathcal{F}$, y sea $G : W \times I \longrightarrow X \times I$ la homotopía dada por $G((x,s),r) = (H_{rt+(1-r)s}(x), rt + (1-r)s) = \mathcal{H}(x, rt + (1-r)s)$. Observemos los siguientes hechos:

1. G es una homotopía entre $\mathcal{H}$ y $(H_t, t) : W \longrightarrow X \times I$

2. G es relativamente compacta, pues $G(W \times I) \subset \mathcal{H}(W) \subset H(W) \times I$ y H es relativamente compacta.

3. $\cup \mathrm{Fix}(G_r)$ es compacto. Es claro que $\cup \mathrm{Fix}(G_r) = \mathrm{Fix}(\mathcal{H}) \cap W = \mathcal{F}$. Este último conjunto es compacto, pues es cerrado en $\mathrm{Fix}(\mathcal{H})$, que es compacto.

La invariancia homotópica del índice, muestra en este caso que $I(\mathcal{H}|_W) = I((H_t,t)|_W)$. Para terminar la prueba bastaría mostrar que $I((H_t,t)|_W) = I(H_t|_{W_t})$. La prueba de este hecho es una repetición, casi literal, de la demostración de (g) en 1.3.3. Sin embargo, la escribiremos aquí. Consideremos las aplicaciones siguientes:

$$H'_t : W \longrightarrow X \quad i_t : W_t \hookrightarrow W$$

$$(x,s) \mapsto H_t(x) \quad x \mapsto (x,t)$$

donde $W_t = \{x \in X \mid (x,t) \in W\}$. La composición $H'_t \circ i_t : W_t \longrightarrow X$ es igual a la restricción de H_t a W_t. La composición $i_t \circ H'_t : H_t^{-1}(W_t) \longrightarrow W$ es igual a la restricción de (H_t, t) a $H_t^{-1}(W_t)$. Por las propiedades de conmutatividad y escisión del índice (puesto que $H_t^{-1}(W_t) \supset \mathcal{F}_t$), se tiene entonces que $I(\mathcal{F}) = I(\mathcal{F}_t)$. □

Observemos que $\mathcal{F}_t$ puede ser vacío aunque $\mathcal{F}$ no lo sea. Como consecuencia inmediata del teorema anterior, se obtiene el siguiente resultado.

3.1.10 Corolario. *Sea $H : X \times I \longrightarrow X$ una homotopía relativamente compacta con $\cup\mathrm{Fix}(H_t)$ compacto. Entonces $N(H_0) = N(H_1)$.* □

3.1.11 Lema. *Sean X, Y ANRs, y $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ aplicaciones. El homeomorfismo $f| : \mathrm{Fix}(g \circ f) \longrightarrow \mathrm{Fix}(f \circ g)$, así como su inverso $g| : \mathrm{Fix}(f \circ g) \longrightarrow \mathrm{Fix}(g \circ f)$, respeta las clases de punto fijo, es decir, si $x, x' \in \mathrm{Fix}(g \circ f)$ son tales que $x \sim x'$, entonces $f(x) \sim f(x')$. Así, $f|$ y $g|$ definen biyecciones inversas entre las clases de punto fijo de $\mathrm{Fix}(g \circ f)$ y las clases de punto fijo de $\mathrm{Fix}(f \circ g)$.*

Demostración: Si $c : I \longrightarrow X$ es una trayectoria entre x y x' tal que $c \simeq (g \circ f) \circ c \operatorname{rel}(\partial I)$ entonces claramente $f \circ c$ es una trayectoria entre $f(x)$ y $f(x')$ tal que $f \circ c \simeq (f \circ g) \circ f \circ c \operatorname{rel}(\partial I)$ con lo cual $f(x) \sim f(x')$ en $\operatorname{Fix}(f \circ g)$. $\square$

3.1.12 Teorema. (Conmutatividad del número de Nielsen). *Sean X, Y ANRs, y $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ aplicaciones, de las cuales alguna es relativamente compacta. Entonces $N(f \circ g) = N(g \circ f)$.*

Demostración: Sea F una clase de punto fijo de $g \circ f$. Por el lema anterior, $f(F)$ es una clase de punto fijo de $f \circ g$. Demostraremos a continuación que $I(f(F)) = I(F)$. En efecto, sea W una vecindad abierta de F tal que $W \cap \operatorname{Fix}(g \circ f) = F$, veamos que $g^{-1}(W)$ es una vecindad abierta de $f(F)$ tal que $g^{-1}(W) \cap \operatorname{Fix}(f \circ g) = f(F)$. Sea $y \in g^{-1}(W) \cap \operatorname{Fix}(f \circ g)$, entonces $g(y) \in W \cap \operatorname{Fix}(g \circ f) = F$ y por lo tanto $f \circ g(y) = y \in f(F)$. Inversamente, si $x \in F$, $g \circ f(x) = x \in W$, y por lo tanto $f(x) \in g^{-1}(W)$, de manera que se tiene la otra contención y por lo tanto $g^{-1}(W) \cap \operatorname{Fix}(f \circ g) = f(F)$. Tenemos entonces

$$I(F) = I(g \circ f|_W : W \longrightarrow X), \qquad I(f(F))) = I(f \circ g|_{g^{-1}(W)} : g^{-1}(W) \longrightarrow Y)$$

Para ver que estos dos enteros son iguales basta usar la propiedad de conmutatividad del índice para las aplicaciones

$$f|_W : W \longrightarrow Y, \qquad g|_{g^{-1}(W)} : g^{-1}(W) \longrightarrow X$$

y la propiedad de escisión para mostrar que $I(g \circ f|_{f^{-1}g^{-1}(W)}) = I(g \circ f|_W)$.

□

Tenemos un teorema más, que nos será de utilidad más adelante para calcular el número de Nielsen de algunas aplicaciones.

3.1.13 Teorema. *Sean X y Y ANRs compactos homotópicamente equivalentes, y $h : X \longrightarrow Y$, $k : Y \longrightarrow X$ equivalencias homotópicas inversas, es decir $h \circ k \simeq \mathrm{id}_Y$, $k \circ h \simeq \mathrm{id}_X$. Si el diagrama de aplicaciones*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ X & \xleftarrow{k} & Y \end{array}$$

es conmutativo salvo homotopía, se tiene $N(f) = N(g)$.

Demostración:

$$N(f) = N(k \circ g \circ h) = N(h \circ k \circ g) = N(g)$$

donde las igualdades de los extremos se dan por la invariancia homotópica del número de Nielsen y la de enmedio por la conmutatividad. □

3.2 Retracciones y μ-retracciones

Antes de poder enunciar el teorema principal de este trabajo, son necesarias las siguientes definiciones y proposiciones sencillas, que nos permitirán en su momento enunciar con mayor brevedad algunos resultados de la siguiente sección.

3.2.1 DEFINICIÓN. Sean X un espacio topológico, $S \subset X$ y $F : X \longrightarrow X$ una aplicación. Decimos que F *se retrae a* S *con respecto a* $\rho : W \longrightarrow S$ si W es una vecindad abierta de $S \cup F(S)$ y $\rho : W \longrightarrow S$ es una retracción, y se tiene que $\mathrm{Fix}(F) \cap S = \mathrm{Fix}(f)$, donde $f = \rho \circ F|_S : S \longrightarrow S$.

Notemos que la contención $\mathrm{Fix}(F) \cap S \subset \mathrm{Fix}(f)$ se da siempre.

3.2.2 Proposición. *Sean* X *un espacio topológico,* $S \subset X$ *y* $F : X \longrightarrow X$ *una aplicación. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. F *se retrae a* S *con respecto a* $\rho : W \longrightarrow S$.

2. *Si* $y \in W \setminus S$ *y* $x = \rho(y)$, *se tiene* $y \neq F(x)$.

3. *Si* $x \in S$ *es tal que* $\rho F(x) = x$, *entonces* $F(x) = x$.

Demostración:

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea $y \in W \setminus S$ y $x = \rho(y)$. Si $y = F(x)$ tendríamos $\rho F(x) = \rho(y) = x$. Así, $x \in \mathrm{Fix}(f)$, pero $F(x) = y \in W \setminus S$, de manera que $x \notin \mathrm{Fix}(F)$ y por lo tanto $\mathrm{Fix}(f) \not\subseteq \mathrm{Fix}(F) \cap S$, lo cual es una contradicción.

(2 $\Rightarrow$ 1) Sea $x \in \text{Fix}(f)$, así, $\rho F(x) = x \in S$. Sea $y = F(x)$. Si $y \in S$, entonces es claro que $F(x) = x$. Si $y \notin S$, se tiene, por hipótesis, $y \neq F(x)$, lo cual es claramente una contradicción. Esto muestra que $x \in \text{Fix}(F) \cap S$ y por lo tanto $\text{Fix}(f) \subset \text{Fix}(F) \cap S$.

(1 $\Rightarrow$ 3) Sea $x \in S$ tal que $\rho F(x) = x$, de donde $x \in \text{Fix}(f) = \text{Fix}(F) \cap S$, de manera que $x \in \text{Fix}(F)$.

(3 $\Rightarrow$ 1) Es claro. □

3.2.3 Proposición. *Sean E un espacio vectorial normado, S un ANR encajado en E como un subconjunto acotado y $F : X \longrightarrow X$ una aplicación completamente continua retraíble con respecto a $\rho : W \longrightarrow S$. Si hacemos $f = \rho \circ F : S \longrightarrow S$, se tiene que F tiene al menos $N(f)$ puntos fijos en S.*

Demostración: El hecho de que F sea completamente continua implica que f es relativamente compacta, como es fácil verificar. Así, tiene sentido hablar de $N(f)$. La proposición 3.1.6 nos dice que f tiene al menos $N(f)$ puntos fijos, por último, la igualdad de conjuntos $\text{Fix}(f) = \text{Fix}(F) \cap S$ nos garantiza la existencia de al menos $N(f)$ elementos en $\text{Fix}(F) \cap S$. □

3.2.4 Definición. Sean E un espacio normado, $Q \subset E$ y $\mu > 0$. Denotemos por $B_\mu(Q)$ al conjunto

$$\{x \in E \mid \text{ existe } y \in Q \text{ tal que } \|x - y\| < \mu\}.$$

Decimos que $F : E \longrightarrow E$ es *μ-retraíble con respecto a $\rho : W \longrightarrow S$* si W es una vecindad abierta de $S \cup B_{\mu}(F(S))$ y para toda $y \in W \setminus S$ se tiene $\|y - F(x)\| > \mu$, donde $x = \rho(y)$.

Observemos que la proposición 3.2.2 nos dice que si F es μ-retraíble con respecto a ρ entonces F es retraíble con respecto a ρ. Siempre que tengamos una aplicación μ-retraíble con respecto a ρ, la podemos modificar ligeramente y obtener una aplicación retraíble con respecto a ρ. La siguiente proposición precisa esta idea.

3.2.5 Proposición. *Sea E un espacio vectorial normado y U, $V : E \longrightarrow E$ aplicaciones tales que U es μ-retraíble con respecto a $\rho : W \longrightarrow S$ y $\|V(x)\| < \mu$ para toda $x \in S$. Entonces $U + V : E \longrightarrow E$ es retraíble con respecto a ρ.*

Demostración: **La prueba es directa a partir de 3.2.2. Sea $y \in W \setminus S$ y sea $x = \rho(y)$. Por hipótesis, se tiene que $\|y - U(x)\| > \mu$ y $\|V(x)\| < \mu$. Usando la desigualdad del triángulo obtenemos $\|y - (U(x) + V(x))\| > 0$, de manera que $y \neq U(x) + V(x)$.** □

Terminaremos esta sección con un sencillo resultado que nos será de utilidad práctica más adelante. Sean $A_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^2 | r \leq \|x\| \leq R\}$, $W = \mathbb{R}^2 \setminus 0$ y

$$\rho_{r,R}(x) = \begin{cases} \frac{r}{\|x\|}x \text{ si } 0 < \|x\| \leq r \\ x \text{ si } r \leq \|x\| \leq R \\ \frac{R}{\|x\|}x \text{ si } \|x\| \geq R \end{cases}$$

3.2.6 Proposición. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación y supóngase que existen números $0 < \mu < r < R$ tales que*

1. $\|F(x)\| > \mu$ *para toda* $x \in A_{r,R}$
2. $\|x\| = r$ *implica* $\|F(x)\| \geq r + \mu$
3. $\|x\| = R$ *implica* $\|F(x)\| \leq R - \mu$

Entonces F es μ-retraíble en $A_{r,R}$ con respecto a $\rho_{r,R}$.

La *demostración* es elemental. □

3.3 Aplicaciones a la teoría de operadores

En esta sección estudiaremos las soluciones de un cierto tipo de sistema de ecuaciones. Primero transformaremos el problema en uno de punto fijo, luego analizaremos bajo qué condiciones las soluciones existen, finalmente, el número de Nielsen nos dará una cota inferior para el número de soluciones. En la siguiente sección mostramos varios ejemplos de este tipo de problemas.

Sean E y F espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$, $L : E \longrightarrow F$ un isomorfismo, $H : E \times \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ una aplicación completamente continua y $B : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal continua suprayectiva. Estaremos interesados en encontrar soluciones $(y, \lambda) \in E \times \mathbf{R}^n$ de

$$\begin{cases} Ly = H(y, \lambda) \\ B(y) = 0 \end{cases} \tag{3.3.0}$$

Dado el enfoque de este trabajo, parece lo más prudente tratar de convertir este problema en uno de punto fijo. Es decir, nos gustaría encontrar un operador T de manera que sus puntos fijos fueran las soluciones de 3.3.0. Sea $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ un inverso derecho de B, es decir, una aplicación tal que $B \circ \sigma = \mathrm{id}$. Si denotamos por E_0 a $\ker(B)$, se tiene que $\gamma : E \longrightarrow E_0 \times \mathbb{R}^n$ definida por $\gamma(x) = (x - \sigma B(x), Bx)$ es un isomorfismo, cuyo inverso está dado por $\gamma^{-1}(u, \lambda) = u + \sigma(\lambda)$. Definiremos otra aplicación auxiliar más antes de definir el operador T prometido. Sea $H^+ : E \times \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ definida por $H^+(u, \lambda) = H(u, \lambda) + L\sigma(\lambda)$. Definimos ahora $T : E \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E \times \mathbb{R}^n$ como la composición

$$E \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{H^+} F \xrightarrow{L^{-1}} E \xrightarrow{\gamma} E_0 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E \times \mathbb{R}^n .$$

Tenemos el siguiente resultado, que nos garantiza que T es el operador que estábamos buscando.

3.3.1 Proposición. *Los puntos fijos de T son las soluciones de 3.3.0.*

Demostración: Es una cuestión puramente de cálculo observar que

$$T(u, \lambda) = (T_1(u, \lambda), T_2(u, \lambda)) = (L^{-1}H(u, \lambda) - \sigma B L^{-1} H(u, \lambda), BL^{-1}H(u, \lambda) + \lambda).$$

De manera que $T(u, \lambda) = (u, \lambda) \Rightarrow BL^{-1}H(u, \lambda) = 0 \Rightarrow u = L^{-1}H(u, \lambda) \Rightarrow Bu = 0$, y por lo tanto (u, λ) es solución de 3.3.0. Inversamente, si (u, λ) es solución de 3.3.0 se tiene $T(u, \lambda) = (u - \sigma Bu, Bu + \lambda) = (u, \lambda)$. $\square$

3.3.2 Proposición. *El operador T definido arriba es completamente continuo.*

Demostración: Basta con probar que la cerradura en $E \times \mathbb{R}^n$ de $T(A \times C)$ es compacta si $A \times C$ es un subconjunto acotado de $E \times \mathbb{R}^n$. Observemos que

$$T_1(A\times C) = L^{-1}H(A\times C) - \sigma BL^{-1}H(A\times C) \subset L^{-1}\overline{H(A \times C)} - \sigma BL^{-1}\overline{H(A \times C)}$$

y que el conjunto de la derecha es compacto porque H es completamente continua. Esto muestra que $\overline{T_1(A \times C)}$ es compacto en E. De manera similar, observemos que

$$T_2(A \times C) = BL^{-1}H(A \times C) + C \subset BL^{-1}\overline{H(A \times C)} + \overline{C}$$

y que el conjunto de la derecha es compacto por ser H completamente continua y $\overline{C}$ compacto por el teorema de Heine-Borel[1]. □

La idea ahora es poder retraer T a un ANR encajado en $E \times \mathbb{R}^n$ como subconjunto acotado, de manera que con auxilio de la proposición 3.2.3 tengamos una cota inferior para las soluciones de 3.3.0.

3.3.3 DEFINICIÓN. Sean E un espacio vectorial normado, $F : E \longrightarrow E$ una aplicación completamente continua, y $v \in \mathbb{R}$ un número mayor que cero. Decimos que F cumple la *condición de Leray-Schauder para v* (escibiremos F es

[1] Ésta es una de las razones por las que el conjunto de parámetros debe ser un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

v-LS) si se cumple que para toda $y \in E$ con $\|y\| = v$, $F(y) \neq \omega y$ para toda $\omega > 1$.

3.3.4 Proposición. *Sea $F : E \longrightarrow E$ completamente continua y v-LS. Entonces existe $x \in \mathrm{Fix}(F) \cap D_v(0)$, donde $D_v(0)$ representa la bola cerrada de radio v centrada en el origen.*

Demostración: Consideremos la retracción radial $\rho : E \longrightarrow D_v(0)$, es decir, $\rho(x) = \frac{v}{\|x\|}x$ si $\|x\| \geq v$ y $\rho(x) = x$ si $x \in D_v(0)$. El hecho de que F sea completamente continua, garantiza claramente que $\rho \circ F : D_v(0) \longrightarrow D_v(0)$ es relativamente compacta. El teorema de punto fijo de Schauder nos garantiza entonces que existe un punto fijo x de $\rho \circ F$. El hecho de que $F(x) \neq \omega x$ para toda $\omega > 1$ nos asegura que x es también punto fijo de F. □

Como preparación para el teorema principal, introduciremos algunas aplicaciones auxiliares, construidas a partir de las que ya tenemos. Definimos $\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\Pi(\lambda) = \lambda + BL^{-1}H(0, \lambda)$$

Definimos $\Phi_\lambda : E \longrightarrow E$ para $\lambda \in \mathbb{R}^n$ por

$$\Phi_\lambda(y) = H(y, \lambda) - H(0, \lambda)$$

y también

$$H_\lambda(y) = H(y, \lambda)$$

Podemos finalmente enunciar el teorema principal de este trabajo.

3.3.5 Teorema. *Supóngase que existen números positivos $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ y un ANR compacto $S \subset \mathbb{R}^n$ tales que*

1 Π *es μ-retraíble en S con respecto a $\rho_S : W \longrightarrow S$. Llamemos $\pi : S \longrightarrow S$ a esta retracción.*

2 *Para cada $\lambda \in S$ la aplicación $L^{-1}H_\lambda : E \longrightarrow E$ es ν-LS.*

3 *Si $\lambda \in S$ y $\|y\| < \nu$ se tiene que*

$$\|\Phi_\lambda(y)\| < \frac{\mu}{\|BL^{-1}\|}$$

Entonces 3.3.0 tiene al menos $N(\pi)$ soluciones (y, λ) con $\|y\| < \nu$ y $\lambda \in S$.

La *demostración* es una consecuencia directa de los siguientes dos lemas.

3.3.6 Lema. *Sea $D = D_\nu(0)$ y ρ_ν como en 3.3.4. Bajo las hipótesis de 3.3.5, se tiene que $T : E \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E \times \mathbb{R}^n$ se retrae a $D \times S$ con respecto a la retracción $\rho = \rho_\nu \times \rho_S : E \times W \longrightarrow D \times S$.*

Llamemos $\tau : D \times S \longrightarrow D \times S$ al retracto de T dado por el lema anterior.

3.3.7 Lema. *Bajo las hipótesis de 3.3.5 se tiene que $N(\tau) = N(\pi)$.*

Demostración de 3.3.6: Definamos $T_{2\,y} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $T_{2\,y}(\lambda) = T_2(y, \lambda)$. Observemos que $T_2 = \Pi + BL^{-1}\Phi_\lambda$. Sea $y \in E$ con $\|y\| < \nu$.

Por la hipótesis 3 de 3.3.5 se tiene que $\|BL^{-1}\Phi_\lambda(y)\| < \mu$ si $\lambda \in S$. La hipótesis de que Π es μ-retraíble con respecto a $\rho_S : W \longrightarrow S$ y la proposición 3.2.5, nos muestran entonces que $T_{2\,y}$ se retrae a S con respecto a ρ_S. Supongamos ahora que existe $(y, \lambda) \in D \times S$ con $\rho T(y, \lambda) = (y, \lambda)$. Demostraremos que $T(y, \lambda) = (y, \lambda)$. Por la parte anterior sabemos que $T_{2\,y}(\lambda) = \lambda$. y por lo tanto $BL^{-1}H(y, \lambda) = 0$, pues $T_2(y, \lambda) = \lambda + BL^{-1}H(y, \lambda)$, de manera que $T_1(y, \lambda) = L^{-1}H_\lambda(y)$. Por ser ρ_ν la retracción radial, la suposición $\rho_\nu T_1(y, \lambda) = y$ implica que existe $\omega \in [1, \infty)$ tal que $T_1(y, \lambda) = \omega y$. Si $\omega = 1$ la prueba está terminada. Si $\omega > 1$ se debe tener $\|y\| < \nu$, pues de otra manera contradiríamos la hipótesis 2 de 3.3.5. Pero entonces es claro que $\rho_\nu T_1(y, \lambda) = T_1(y, \lambda)$. Lo cual muestra que $T(y, \lambda) = (y, \lambda)$. □

Demostración de 3.3.7: Definamos $\mathcal{H} : D \times S \times I \longrightarrow D \times S$ por

$$\mathcal{H}(y, \lambda, t) = \rho(tT_1(y, \lambda), \Pi(\lambda) + tBL^{-1}\Phi_\lambda(y))$$

Las hipótesis 1 y 3 de 3.3.5 muestran que $\Pi(\lambda) + tBL^{-1}\Phi_\lambda(y) \in W$ para toda $(y, \lambda, t) \in D \times S \times I$, de tal manera que tiene sentido la definición de $\mathcal{H}$. Es claro que $\mathcal{H}$ es una homotopía entre $\rho(T_1, T_2) = \tau$ y $\rho(0, \Pi) = 0 \times \pi$. Demostraremos a continuación que $\mathcal{H}$ es relativamente compacta, de manera que $N(\tau) = N(0 \times \pi)$ gracias a la proposición 2.5.3 y al corolario 3.1.10. En efecto, para toda $t \in I$, $\rho_\nu(tT_1(D \times S))$ es un subconjunto de la cerradura convexa de $\rho_\nu(T_1(D \times S)) \cup \{0\}$ que es relativamente compacto por ser T (y por lo tanto T_1) relativamente compacta. Dado que $S \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, es relativamente compacto, y por lo tanto $\overline{D_\mu(S)}$ es compacto. La hipótesis 3 de

3.3.5 muestra que

$$\overline{D_\mu(S)} \supset \{\rho_s(\Pi(\lambda) + tBL^{-1}\Phi_\lambda(y)) \mid (y, \lambda, t) \in D \times S \times I\}$$

de manera que el conjunto de la derecha es relativamente compacto. Todo esto junto muestra que $\mathcal{H}$ es relativamente compacta y por lo tanto $N(\tau) = N(0\times\pi)$. Para terminar la prueba, basta aplicar la conmutatividad del número de Nielsen a las aplicaciones $f : D \times S \longrightarrow S$ e $i : S \hookrightarrow D \times S$ dadas por $f(d, s) = \pi(s)$, $i(s) = (0, s)$, lo cual muestra finalmente $N(\pi) = N(\tau)$. □

3.4 ECUACIONES DIFERENCIALES PARAMETRIZADAS

En esta sección presentaremos varias ecuaciones diferenciales que se pueden expresar como un problema del tipo 3.3.0, posteriormente nos concentraremos en un caso particular de este tipo de ecuaciones y daremos condiciones suficientes para que se cumpla la hipótesis 2 de 3.3.5.

Antes de poder mencionar los primeros ejemplos, necesitamos introducir un poco de notación y algunas definiciones sencillas. Sea $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación. Definimos $\|y\|_0 = \sup\{|y(t)| \mid t \in [0,1]\}$. $C_n^k[0,1]$ denotará al espacio vectorial topológico que consiste de las aplicaciones de clase C_k, $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con la norma $\|y\|_k = \max\{\|y\|_0, \|y'\|_0, \dots \|y^k\|_0\}$. Por otro lado, para $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\|y\|_{(p)} = (\int_0^1 \|y(s)\|^p \mathrm{d}s)^{\frac{1}{p}}$$

Es bien sabido que esto último define una norma en $C_n^k[0,1]$. También es resultado conocido la desigualdád de Hólder:

$$\|fg\|_{(1)} \leq \|f\|_{(p)}\|g\|_{(q)} \text{ donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Cuando $p = q = 2$, la desigualdad de Hölder se conoce como la desigualdad de Schwarz. Un último resultado que necesitaremos es el siguiente:

(3.4.0) $$si\ p < q \Rightarrow \|g\|_{(p)} < \|g\|_{(q)}$$

También nos será de utilidad el siguiente resultado.

3.4.1 Teorema. (Arzela-Ascoli) *Un conjunto $K \subset C_n^k[0,1]$ es compacto si y sólo si es cerrado, acotado y equicontinuo, es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t - t'| < \delta$ entonces $|f(t) - f(t')| < \varepsilon$ para toda $f \in K$.*

Una referencia útil donde se explican con más detalle estos conceptos y resultados es [Ru]

Estamos preparados ahora para los siguientes ejemplos.

3.4.2 Proposición. *Sea $h : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación. El problema de encontrar una $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y un $\lambda \in \mathbb{R}^n$ que satisfagan*

(3.4.2) $$\begin{cases} y'(t) = h(t, y(t), \lambda) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

puede ser expresado en la forma 3.3.0

Demostración: Siguiendo la notación de 3.3.0, sea $E = \{y \in C_n^1[0,1] | y(0) = 0\}$, $F = C_n^0[0,1]$, $L : E \longrightarrow F$ dada por $L(y) = y'$. La $H : E \times \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ está dada por $H(y,\lambda)(t) = h(t, y(t), \lambda)$. Por último, definamos $B : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mediante la igualdad $B(y) = y(1)$. El hecho de que H es una aplicación completamente continua es una consecuencia de que h sea continua (y por lo tanto uniformemente continua en cualquier compacto) y del teorema de Arzela-Ascoli. □

3.4.3 Proposición. *Sea $h : [0,1] \times \mathbb{R}^{3n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación. El problema de encontrar una $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y una $\lambda \in \mathbb{R}^n$ que satisfagan*

$$\begin{cases} y''(t) = h(t, y(t), y'(t), \lambda) \\ y(0) = y(\frac{1}{2}) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{3.4.3}$$

puede ser expresado en la forma 3.3.0

Demostración: Sea $E = \{y \in C_n^2[0,1] | y(0) = y(1) = 0\}$, $F = C_n^0[0,1]$, $L(y) = y''$. Nuevamente definimos $H : E \times \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ por $H(y,\lambda)(t) = h(t, y, y', \lambda)$. El mismo teorema de Arzela-Ascoli implica que H es completamente continua. Por último, hacemos $B(y) = y(\frac{1}{2})$ □

3.4.4 Nota. En un futuro, nos será útil la observación siguiente. En el caso de la proposición 3.4.3

$$L^{-1}y(t) = \int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s$$

donde $G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$G(t,s) = \begin{cases} (t-1)s & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(s-1) & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Esto es claro si integramos por partes.

Tenemos un ejemplo más.

3.4.5 Proposición. *Sea $h : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación y $A \in \mathbb{R}^n$. El problema de encontrar una $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y un $\lambda \in \mathbb{R}^n$ que satisfagan*

$$\begin{cases} y''(t) = h(t, y(t), \lambda) \\ y(0) = y(1) = 0 \\ \int_0^1 y(s)\mathrm{d}s = A \end{cases} \tag{3.4.5}$$

puede ser expresado en la forma 3.3.0

Demostración: En este caso, hagamos $E = \{y \in C_n^2[0,1] | y(0) = 0\}$, $F = C_n^0[0,1] \times \mathbb{R}^n$ con la norma del producto. Sea $L : E \longrightarrow F$ dada por $L(y) = (y'', \int_0^1 y(s)\mathrm{d}s)$. Por último, sean $H(y,\lambda)(t) = (h(t,y(t),\lambda), A)$ y $B(y) = y(1)$. □

A continuación, daremos algunas condiciones para que el problema de la proposición 3.4.3 satisfaga la hipótesis 2 de 3.3.5 Con el objetivo de hacer clara y sencilla la demostración del teorema que nos interesa, probaremos en este momento algunos lemas que nos serán de utilidad en la demostración del mismo.

3.4.6 Lema. *En el caso de la proposición 3.4.3, la aplicación* $\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de 3.3.5 está dada por*

$$\Pi(\lambda) = \lambda + \int_0^1 g(s)h(s,0,0,\lambda)\mathrm{d}s$$

donde

$$g(s) = \begin{cases} -\frac{s}{2} \text{ si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{s-1}{2} \text{ si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Demostración: Véase la prueba de 3.4.3 □

3.4.7 Lema. $\|BL^{-1}\| < 48^{-\frac{1}{2}}$

Demostración: Es una consecuencia sencilla de la desigualdad de Schwarz. □

3.4.8 Lema. *Sean* $c_1, c_2 \in [0, \infty)$ *no ambas cero, y* $0 \leq \sigma < 1$, *entonces la aplicación* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x - c_1 - c_2x^\sigma$ *tiene un único cero positivo (i.e. existe una única* $t_0 > 0$ *tal que* $f(t_0) = 0$*).* □

3.4.9 Lema. *Si* $0 \leq \sigma < 1$,

$$\int_0^1 \|y(s)\|^{1+\sigma}\mathrm{d}s \leq \|y\|_{(2)}^{1+\sigma}$$

Demostración: Supongamos primero que $\sigma \geq \frac{1}{2}$. La desigualdad de Schwarz y 3.4.0 muestran

$$\int_0^1 \|y(s)\|^{1+\sigma}\mathrm{d}s \leq \|y\|_{(2)}\|y\|_{(2\sigma)}^{\sigma} < \|y\|_{(2)}^{1+\sigma}$$

Análogamente, si $\sigma < \frac{1}{2}$, tenemos

$$\int_0^1 \|y(s)\|^{1+\sigma} ds < \|y\|_{(1)}^{\frac{1}{2}} \|y\|_{(1+2\sigma)}^{\frac{1}{2}+\sigma} < \|y\|_{(2)}^{1+\sigma}$$

□

3.4.10 Teorema. *Sea $h : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación para la cual existen constantes positivas c_1, c_2 no ambas cero y $0 \leq \sigma < 1$ tales que:*

$$\|h(x,u)\| \leq c_1 + c_2 \|u\|^\sigma$$

para toda $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$. Entonces cualquier solución $y \in C_n^2[0,1]$ de

$$\begin{cases} y''(t) = h(t, y(t), \lambda) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

cumple $\|y\|_2 < 3t_0$, si t_0 es el cero positivo de $f(x) = x - c_1 - c_2 x^\sigma$

Demostración: **Usando el teorema fundamental del cálculo e integrando por partes, obtenemos:**

$$\int_0^1 y_j(s) y_j''(s) ds = -\int_0^1 |y_j'(s)| ds$$

para toda $1 \leq j \leq n$. Así, tenemos

$$\int_0^1 \|y'(t)\| dt = |\int_0^1 \sum y_j'^2(t) dt \leq \sum \int_0^1 |y_j'^2(t)| dt \leq \sum \int_0^1 |y_j(t)||y_j''(t)| dt =$$

$$\int_0^1 \sum |y_j(t)||y_j''(t)| dt \leq \int_0^1 \|y(t)\|\|y''(t)\| dt$$

Usando los lemas anteriores, tenemos entonces:

$$\|y'\|_{(2)}^2 \leq \int_0^1 \|y(s)\|\|y''(s)\|\mathrm{d}s \leq \int_0^1 \|y(s)\|\|(c_1 + c_2|y(s)\|^\sigma)\mathrm{d}s$$

$$c_1\|y\|_{(2)} + c_2\int_0^1 \|y(s)\|^{1+\sigma}\mathrm{d}s < c_1\|y\|_{(2)} + c_2\|y\|_{(2)}^{1+\sigma} \leq c_1\|y'\|(2) + c_2\|y'\|_{(2)}^{1+\sigma}$$

puesto que $\|y(s)\| \leq \|y'\|_{(2)}$ como una consecuencia del teorema fundamental del cálculo, la desigualdad de Schwarz, $y(0) = 0$ y $\|y\|_{(2)} \leq \|y\|_0$. Tenemos entonces

$$\|y'\|_{(2)} < c_1 + c_2\|y'\|_{(2)}^\sigma$$

lo cual muestra claramente $\|y'\|_{(2)} < t_0$. Así, tenemos también $\|y\|_0 < t_0$. Dado que y es solución de la ecuación diferencial, tenemos $\|y''(s)\| < c_1 + c_2t_0^\sigma = t_0$, de manera que $\|y''\|_0 < t_0$. También tenemos:

$$\|y'(0)\| \leq \|y'(x)\| + \int_0^x \|y''(s)\|\mathrm{d}s$$

$$\leq \|y'(x)\| + \|y''\|_0 < \|y'(x)\| + t_0$$

y por lo tanto

$$\|y'(0)\| - t_0 < \|y''\|_{(2)} < t_0$$

donde la última desigualdad se obtiene al integrar ambos lados de

$$|y'(0)| - t_0 \leq \|y'(x)\|$$

Por último

$$\|y'(s)\| \leq \|y'(0)\| + |\int_0^x y''(s)\mathrm{d}s| < 3t_0$$

Todo esto prueba que $\|y'\|_0 < 3t_0$ y por lo tanto $\|y\|_2 < 3t_0$. $\square$

3.4.11 Corolario. *Supóngase que para $S \subset \mathbb{R}^n$ existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$ no ambas cero y $0 \leq \sigma < 1$ tales que*

$$\|h(t,y,\lambda)\| < c_1 + c_2\|y(t)\|^\sigma$$

para toda $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in S$. Entonces $L^{-1}H_\lambda : E \longrightarrow E$ es $3t_0$-LS, si t_0 es el único cero positivo de $f(x) = x - c_1 - c_2x^\sigma$.

Demostración: Sea $y \in E$ tal que $L^{-1}H_\lambda(y) = \omega y$ para alguna $\omega > 1$. Por la definición de E, se tiene $y(0) = y(1) = 0$. Por las definiciones de L y H, tenemos $\omega y''(t) = h(t, y(t), \lambda)$. Es decir, y es solución de

$$\begin{cases} y''(t) = \frac{1}{\omega}h(t, y(t), \lambda) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Dado que este problema satisface entonces las hipótesis del teorema anterior, tenemos $\|y\|_2 < 3t_0$. □

Veremos ahora dos ejemplos que ilustran la manera en que se usaría el teorema 3.3.5 para dar una cota inferior del número de soluciones de una ecuación diferencial apropiada.

3.4.12 Proposición. *El problema*

$$\begin{cases} y' = Ky^{\frac{1}{3}} - \lambda e^{\frac{-\lambda}{100}t} + \lambda^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

satisface la hipótesis 1 del teorema 3.3.5 si $S = [\frac{1}{2}, \frac{9}{2}]$ independientemente de la constante $K > 0$, también satisface la hipótesis 2. Si $K \geq 60$ no tiene *soluciones no triviales. Sin embargo, si $K \leq \frac{1}{4}$, existe al menos una solución (y, λ), con $\lambda \in S$.*

Demostración: Es claro que en este caso, $E = \{y \in C^1[0,1] | y(0) = 0\}$, $F = C^1[0,1]$, $L(y) = y'$, $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $h(y, \lambda, t) = Ky^{\frac{1}{3}} - \lambda e^{\frac{-\lambda}{100}} t + \lambda^{\frac{1}{3}}$, $B(y) = y(1)$. No es difícil observar que

$$\Pi(\lambda) = \lambda + \int_0^1 (-\lambda e^{\frac{-\lambda}{100}} s + \lambda^{\frac{1}{3}}) ds = \lambda(1 - \frac{1}{2} e^{\frac{-\lambda}{100}}) + \lambda^{\frac{1}{3}}$$

De manera que Π es $\frac{1}{2}$-retraíble en $S = [\frac{1}{2}, \frac{9}{2}]$ por la proposición 3.2.6. Entonces es claro que $N(\pi : S \longrightarrow S) = 1$, como cualquier aplicación del intervalo en sí mismo. Obsérvese que ni S ni $N(\pi)$ dependieron de la constante K. Para verificar la hipótesis 2 obsérvese que si $y \in E$ cumple $H_\lambda y = Ly$ para $\lambda \in S$ entonces se tiene

$$|y'(t)| = |Ky(t)^{\frac{1}{3}} - \lambda e^{\frac{-\lambda}{100}} t + \lambda^{\frac{1}{3}}|$$

$$\leq K|y(t)|^{\frac{1}{3}} + |-\lambda e^{\frac{-\lambda}{100}} t + \lambda^{\frac{1}{3}}| \leq K\|y'\|_0^{\frac{1}{3}} + 2.65$$

de manera que

$$\|y'\|_0 \leq K\|y'\|_0^{\frac{1}{3}} + 2.65$$

y por lo tanto se tiene

$$\|y\|_1 = \|y'\|_0 < (K + 2.65)^{\frac{3}{2}}$$

(observando que $\|y\|_1 = \|y'\|_0$ es una consecuencia sencilla de $y(0) = 0$. Ahora, si existe $y \in E$ con $\|y\|_0 = (K + 2.65)^{\frac{3}{2}} = \nu$ y $L^{-1}H_\lambda(y) = \omega y$ para $\omega > 1$

entonces

$$\omega\|y'\|_0 = \|H_\lambda(y)\|_0 < (K + 2.65)^{\frac{3}{2}} = \|y\|_0$$

y por lo tanto

$$\omega\|y\|_1 < \|y\|_1$$

lo cual es claramente una contradicción. Hemos mostrado pues que $L^{-1}H_\lambda$ es ν-LS. Veamos ahora como debe ser K para que se cumpla la hipótesis 3 de 3.3.5. Es claro que $\|BL^{-1}\| = 1$, de manera que necesitamos $K > 0$ tal que $|H(y,\lambda) - H(0,\lambda)| < \frac{1}{2}$. En esta última expresión, el lado izquierdo es igual a $K|y(t)|^{\frac{1}{3}} \leq K\|y\|_1^{\frac{1}{3}} < K(K + 2.65)^{\frac{1}{2}}$, de manera que basta hacer $K < \frac{1}{4}$. Por último, no es difícil ver que si $K \geq 60$ y $\lambda > 0$ se tiene $y'(t) > 0$ para toda $t \in [0,1]$, de manera que el problema no tiene solución no trivial en este caso.

□

Tenemos un ejemplo más, en este caso $n = 2$.

3.4.13 Proposición. *El problema*

$$\begin{cases} u'' = \frac{\beta^{1/3}}{9}v^{1/3} + \alpha[2t^{1/3} - 4(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/3}] \\ v'' = \frac{\alpha^{1/3}}{9}u^{1/3} + \beta[16 - 2t^{1/3} + 4(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/3}] \\ u(0) = u(1/2) = u(1) = 0 \\ v(0) = v(1/2) = v(1) = 0 \end{cases}$$

tiene al menos dos soluciones no triviales $(y,\lambda) \in D \times S$. Si (y,λ) es una solución no trivial de este problema, se tiene que $\Pi(\lambda) \neq \lambda$.

Observemos que este es un problema del tipo 3.4.3.

Demostración: Calculando como en el ejemplo pasado (con ayuda de la proposición 3.4.6), tenemos

$$\begin{aligned}\Pi(\lambda) = \Pi(\alpha,\beta) &= (\alpha + 2\eta\alpha + \frac{\alpha}{2}(\alpha^2+\beta^2)^{-1/3}, -\beta - 2\eta\beta - \frac{\beta}{2}(\alpha^2+\beta^2)^{-1/3}) \\ &= ((1+2\eta) + \frac{1}{2}\|\lambda\|^{-2/3})(\alpha,-\beta)\end{aligned}$$

donde

$$\eta = \int_0^1 s^{-1/3} g(s)\mathrm{d}s = \frac{9}{56}(2^{-4/3}-1) \text{ (aproximadamente -0.1)}$$

Así,

$$\|\Pi(\lambda)\| = \|\Pi(\alpha,\beta)\| = (1+2\eta)\|\lambda\| + \frac{1}{2}\|\lambda\|^{1/3}.$$

Lo que queremos hacer es usar la proposición 3.2.6 para mostrar que Π es μ-retraíble con respecto a la retracción radial en $A_{r,R} = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 | r \leq \|\lambda\| \leq R\}$ para μ, r, R adecuados. Con este fin, definamos la función auxiliar $\Phi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ dada por $\Phi(x) = (1+2\eta)x + \frac{1}{2}x^{1/3}$. Notemos que $\|\Pi(\lambda)\| = \Phi(\|\lambda\|)$. Con todo esto en mente, no es muy complicado observar que Π es μ-retraíble (con respecto a la retracción radial) en $A_{r,R}$, con $\mu = (-108\eta)^{-1/2}$, $r = (-12\eta)^{-3/2}$, $R = 6.1$

Nos gustaría ahora calcular $N(\pi)$, donde π es el retracto de Π. Observemos entonces que $\rho_{r,R}$, la retracción radial, es homotópica a la identidad en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, de manera que $\pi = \rho \circ \Pi \simeq \Pi|_{A_{r,R}}$. La homotopía $\mathcal{H} : A_{r,R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por

$$\mathcal{H}(\alpha,\beta,t) = (1 + t(2\eta + \frac{1}{2}\|\lambda\|^{-2/3}))(\alpha,-\beta)$$

muestra que $\Pi|_{A_{r,R}}$ es homotópica a la reflexión con respecto al eje x, de manera que $-1 = \text{grado}(\Pi) = \text{grado}(\pi)$ y por lo tanto $N(\pi) = 2$ (véase [Jiang]). Haciendo cuentas se observa que

$$\text{Fix}(\pi) = \text{Fix}(\Pi) \cap A_{r,R} = \{((-4\eta)^{-3/2}, 0), (-(-4\eta)^{-3/2}, 0)\}.$$

Para verificar la hipótesis 2 de 3.3.5 usaremos el corolario 3.4.11. Debe ser claro que en este caso la aplicación $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está dada por

$$\begin{aligned} h(t, y, \lambda) = (&\frac{\beta^{1/3}}{9} v^{1/3} + \alpha[2t^{1/3} - 4(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/3}, \\ &\frac{\alpha^{1/3}}{9} u^{1/3} + \beta[16 - 2t^{1/3} + 4(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/3}) \end{aligned}$$

si $y = (u, v)$, de manera que tenemos

$$h(t, y, \lambda) = (\frac{\beta^{1/3}}{9} v(t)^{1/3}, \frac{\alpha^{1/3}}{9} u(t)^{1/3}) + (2t^{1/3} - 4(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/3})(\alpha, -\beta) + (0, 16\beta)$$

Usando la desigualdad del triángulo tenemos:

$$\begin{aligned} \|h(t, y, \lambda)\| &\leq \|(\frac{\beta^{1/3}}{9} v(t)^{1/3}, \frac{\alpha^{1/3}}{9} u(t)^{1/3})\| + |2t^{1/3}\|\lambda\| - 4\|\lambda^{1/3}\|| + 16|\beta| \\ &\leq 105 + \|(\frac{\beta^{1/3}}{9} v(t)^{1/3}, \frac{\alpha^{1/3}}{9} u(t)^{1/3})\| \\ &\leq 105 + \frac{2^{1/2}\|\lambda^{1/3}\|}{9} \|y(t)\|^{1/3} \leq 105 + (.29)\|y(t)\|^{1/3} \end{aligned}$$

De manera que $L^{-1}H_\lambda$ es $3t_0$-LS para toda $\lambda \in A_{r,R}$, si t_0 es el cero positivo de la aplicación $f(x) = x - 105 - .29x^{1/3}$. Podemos considerar $t_0 = 107$.

Sólo resta por verificar la hipótesis 3 de 3.3.5. Observemos del lema 3.4.7 que

$$\frac{\mu}{\|BL^{-1}\|} \geq \sqrt{48}\mu = \sqrt{\frac{49}{108\eta}} > 2.1$$

Por otro lado, si $\lambda \in A_{r,R}$ y $\|y\|_2 \leq 3t_0$, tenemos $\|y(t)\| \leq 321$ para $t \in [0,1]$, de manera que

$$\|H(y,\lambda)(x) - H(0,\lambda)(x)\| = \|(\frac{\beta^{1/3}}{9}v(t)^{1/3}, \frac{\alpha^{1/3}}{9}u(t)^{1/3})\|$$

$$\leq (.29)(321)^{1/3} < 2.1 < \frac{\mu}{\|BL^{-1}\|}$$

Todo esto junto muestra que el problema en cuestión satisface las hipótesis de 3.3.5 y por lo tanto, tiene al menos dos soluciones (y,λ) con $\|y\|_2 < 321$ y $r \leq \lambda \leq R$.

Para concluir probaremos que si $\Pi(\lambda) = \lambda$ no existe y solución del problema para esta λ particular. Desarrollaremos sólo el caso $\lambda = ((-4\eta)^{-3/2}, 0)$, siendo el otro análogo. Con esta λ, la primer ecuación diferencial toma la forma

$$u''(t) = 2\alpha t^{1/3} - 4\alpha^{1/3}$$

Usando la nota 3.4.4, se tiene que

$$u(t) = (\frac{14}{9})^{1/2}(1 - 2^{-4/3})^{-3/2}\theta(t)$$

donde $\theta(t) = t^{7/3} + (2^{-1/3} - 2)t^2 + (1 - 2^{-1/3})t$, que cumple con las condiciones iniciales del problema. La segunda ecuación diferencial en este caso se vuelve

$$v''(t) = \frac{1}{9}(\frac{14}{9})^{2/3}(1 - 2^{-4/3})^{-1}(\theta(t))^{1/3} = M(\theta(t))^{1/3}$$

Observemos que $M > 0$. Usando de nuevo 3.4.3, se tiene que $v(t)$ debe ser igual a

$$M\int_0^1 G(t,s)(\theta(s))^{1/3}ds$$

donde G es como en la prueba de 3.4.3. En particular, se tiene

$$v(\frac{1}{2}) = \frac{-M}{2}\int_0^{1/2} s((\theta(s))^{1/3} + (\theta(1-s))^{1/3})\mathrm{d}s$$

Se puede probar también que $\theta(s) + \theta(1-s) \geq 0$ si $s \in [0, \frac{1}{2}]$, y obviamente el lado derecho no es idénticamente cero, de manera que $v(\frac{1}{2}) < 0$ lo que muestra que no existe solución del problema con $\lambda = ((-4\eta)^{-3/2}, 0)$. □

BIBLIOGRAFÍA

[AE] R. F. ARENS & J. JR. EELLS, *On embedding uniform and topological spaces*, Pacific Journal of Mathematics, t.6, 1956

[Bw1] ROBERT F. BROWN, *Nielsen fixed point theory and parametrized differential equations*, Contemporary Mathematics 72, 1988

[Bw2] ROBERT F. BROWN, *Topological identification of multiple solutions to parametrized nonlinear equations*, Pacific Journal of Mathematics 131, 1988

[Do1] ALBRECHT DOLD, *Fixed point index and fixed point theorem for euclidean neighborhood retracts*, Topology 4, 1965

[Do2] ALBRECHT DOLD, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1972

[Do3] ALBRECHT DOLD, Traducción: Carlos Prieto, *Teoría de punto fijo Vol II, III*, Monografías del Instituto de Matemáticas, 1984

[Du] J. DUGUNDJI, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific Journal of Mathematics 1, 1951

[Gr] ANDRZEJ GRANAS, *The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANR's*, Bull. Soc. Math. France 100, 1972

[Jiang] BOJU JIANG, *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*, Contemporary Mathematics Vol.14, American Mathematical Society

[Sch] U. KURT SCHOLZ, *The Nielsen fixed point theory for noncompact spaces*, Rocky Mountain Journal of Mahtematics 4, 1971

[Ru] WALTER RUDIN,*Real & Complex Analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, 1966