



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

COMPUERTAS LOGICAS OPTICAS BASADAS EN SOLITONES ESPACIALES

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO EN TELECOMUNICACIONES
P R E S E N T A :
RAFAEL SALAS MONTIEL

DIRECTOR DE TESIS: DR. OLEG KOLOKOLTSEV



CIUDAD UNIVERSITARIA

2002

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México, por haberme dado la oportunidad de ser parte de ella y de sentirme honrado por haber pasado por sus aulas. Por darme todas las facilidades de un desarrollo personal integral. De alguna forma tendré que retribuir los servicios que me dio.

A la Facultad de Ingeniería, por el alto nivel de conocimientos con que cubre los planes de estudios, niveles que me han permitido enfrentar problemas físicos y matemáticos satisfactoriamente.

A Centro de Instrumentos, que con su apoyo he podido poner en práctica mis conocimientos teóricos. Por permitirme entrar en sus laboratorios y permanecer en constante aprendizaje.

Quiero agradecer de manera especial al Dr. Oleg Kolokoltssev, de quien he aprendido un sin número de conocimientos, tanto teóricos como prácticos en el área de microondas y óptica. Por todas las charlas que me permitieron desarrollarme tanto en aspectos de ingeniería como en aspectos de la vida diaria. Por haber sido mi tutor en el servicio social y por haberme dirigido en este trabajo de tesis y sobre todo, por permitirme conocerlo y tener el gusto de considerarlo como un amigo. СПАСИБО ОЛЕГ.

A mis padres por aguantarme durante ya 24 años. Quiero decirles que sin su apoyo, todo hubiera sido mucho más difícil. A mi hermana, por soportarme de igual manera y ayudarme a entender aspectos de otras materias relacionados con las telecomunicaciones.

A Eliza, mi pareja, que a pesar del corto tiempo que hemos estado juntos, a tenido que absorber momentos difíciles a mi lado.

A todas ustedes, gracias mil.

---

<b>Introducción.....</b>	<b>1</b>
<b>Objetivos principales.....</b>	<b>9</b>
<b>1. Óptica no lineal para comunicaciones ópticas.</b>	
1.1. Principios básicos de óptica no lineal.....	13
1.2. Ondas ópticas guiadas (GOW's).....	15
1.3. Teoría lineal de perturbaciones.....	25
1.3.1. Ortogonalidad de las GOW's.....	26
1.4. Teoría de acoplamiento de modos ópticos para perturbaciones.....	30
Conclusiones del capítulo 1.....	33
<b>2. Propagación de pulsos y solitones ópticos.</b>	
2.1. Auto-Modulación de Fase (Self-Phase Modulation, SPM).....	38
2.2. Ecuación de propagación de pulsos (NLSE en el dominio del tiempo).....	41
2.3. Formación de solitones ópticos temporales en fibras ópticas.....	52
2.4. Ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) para solitones espaciales.....	54
2.4.1. Solución de la NLSE para solitones espaciales fundamentales.....	56
Conclusiones del capítulo 2.....	64
<b>3. Método de propagación de rayos (Beam Propagation Method, BPM).</b>	
3.1. Ecuación de Fresnel y forma clásica del BPM.....	70
3.2. Aproximación de diferencias finitas.....	74
3.3. Método de separación longitudinal.....	77
3.4. Programación numérica de la NLSE.....	79
3.5. Algoritmo de reducción de Crout.....	81
Conclusiones del capítulo 3.....	83

---

#### **4. Estudio de los efectos de las interacciones entre solitones espaciales tipo Kerr.**

4.1. Análisis del desplazamiento y de la resolución espacial del soliton señal en la conmutación dependiendo del ángulo y de la diferencia relativa de fase entre ellos.....	87
4.2. Investigación del cambio de fase entre los solitones después de la interacción entre ellos.....	94
4.3. Simulación de una conmutación basada en tres solitones usando las condiciones óptimas encontradas en los puntos anteriores para dos solitones.....	97
Conclusiones del capítulo 4.....	100

#### **5. Resultados de los experimentos numéricos y análisis de resultados.**

5.1. Esquema de compuerta lógica óptica con solitones de amplitudes iguales.....	107
5.2. Esquema de compuerta lógica óptica con solitones con diferentes amplitudes.....	112
Conclusiones del capítulo 5.....	120

Conclusiones generales.....	123
-----------------------------	-----

#### **Apéndices**

A. Sistemas de unidades en óptica no lineal.....	125
B. Manuscrito del artículo sometido a revisión.....	129
C. Copia de la carta para la revisión del manuscrito.....	139

---

## INTRODUCCIÓN

El sueño primordial de aquellos ingenieros y científicos que trabajan e investigan dentro del campo de las telecomunicaciones ópticas es, sin duda, el de integrar una red totalmente óptica. Una red cuyos elementos sean dispositivos totalmente ópticos (amplificadores, ruteadores, filtros selectivos, conmutadores, etc).

La necesidad de una red óptica se debe al aumento exponencial en el tráfico de datos y a la necesidad de disminuir los costos de operación, administración y mantenimiento de las redes actuales.

La tecnología que se ha adoptado para resolver los problemas en cuanto a capacidad de tráfico, que ha permitido un uso más eficiente del ancho de banda de las fibras ópticas y que nos permite pensar en redes de próxima generación [1] es la multiplexación por división de longitud de onda (WDM). Ésta tecnología está basada en la transmisión de hasta 32 canales sobre una sola fibra óptica. Sin embargo, el número de canales ópticos transportados tiende a aumentar cada vez más haciendo imprescindible implementar funciones de inserción / extracción de longitudes de ondas y de transconectores ópticos. Es ahí donde dispositivos como conmutadores ópticos desempeñaran un papel primordial para el desarrollo de la nueva generación de redes ópticas que permitan administrar y restablecer estos canales ópticos de forma más rentable. Estos dispositivos de conmutación óptica deberán tener una gran ancho de banda óptico, bajas pérdidas de inserción, tiempos de conmutación ultracortos (~ femtosegundos) y su tecnología de fabricación (monolítica) deberá ser de bajo costo.

En años recientes, especialistas en el campo de la óptica no lineal han puesto especial atención en dispositivos de conmutación óptica basados en interacciones no lineales entre *solitones ópticos espaciales*<sup>1</sup>, debido principalmente a lo atractivos que son para conmutaciones ultrarrápidas en sistemas de comunicaciones ópticas ultrarrápidas. Otra de las ventajas de utilizar dispositivos no lineales totalmente ópticos es la posibilidad de disminuir las pérdidas en los sistemas de comunicaciones por fibra óptica debidas a las transformaciones de energía óptica-eléctrica-óptica que existen en elementos optoelectrónicos convencionales.

---

<sup>1</sup> A lo largo del trabajo de tesis se usará también el término solitones espaciales.

---

Han sido estudiados un gran número de estos conmutadores ópticos, además, existen diferentes propuestas referentes a las estructuras de guías de ondas por las que los *solitones espaciales* se propagan para lograr interacciones eficientes, con una geometría simple que permita, desde un punto de vista tecnológico, su fácil construcción y con bajos costos de producción.

La palabra “soliton” fue empleada por primera vez por Zabusky y Kruskal en 1965 [2] mientras trabajaban con ondas de movimiento no lineales unidimensionales. Encontraron que la forma de la onda no lineal permanecía sin cambio alguno, incluso cuando dos de ellas chocaban entre sí, además, observaron que éstas ondas se comportaban como partículas. La palabra “soliton” es una combinación entre la palabra inglesa “solitary” que significa solitaria con el sufijo “on”, utilizado comúnmente para describir partículas (fotón, electrón, etc) [3].

Los *solitones espaciales* son rayos ópticos “auto-atrapados” que existen en virtud del balance entre la difracción y la no linealidad del medio por el que se propagan. Estos solitones tienen propiedades que normalmente están asociadas con partículas. Para que un *soliton* sea creado, se requiere de una fuerte interacción entre la onda y el medio por el cual se propaga, es decir, un *soliton espacial* es un rayo óptico que se propaga en un medio no lineal sin sufrir difracción. Estos dos efectos contrarios permiten la creación de solitones. Los solitones clásicos tipo Kerr pueden describirse por medio de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE). La solución para la NLSE se obtuvo, por primera vez, por Zakharov y Shabat en 1972 por medio del método inverso de esparsamiento (Inverse Scattering Method) [4]. Más tarde, se descubrieron un sin número de mecanismos físicos para la formación de solitones [5].

La figura 1 muestra simulaciones realizadas con el software “OpticScheme” desarrollado por el equipo del Laboratorio de Fotonica de Microondas del Centro de Instrumentos de la UNAM, el software esta basado en el método de propagación de rayos (BPM) descrito en el capítulo 3. Éste método ha sido usado en diversos trabajos [6] por la rapidez y confiabilidad en sus resultados. El método resuelve de manera alternada los efectos difracción y de autoenfouque. La figura 1 muestra la propagación de un *soliton espacial tipo Kerr* y de un rayo óptico en condiciones normales de difracción.

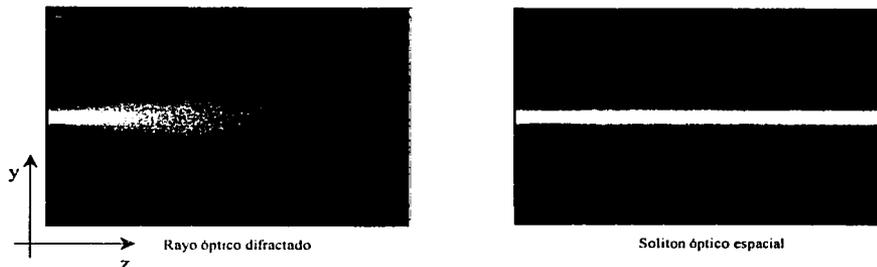


Figura 1. Vista superior de un rayo óptico difractado propagándose dentro de un medio lineal y de un soliton espacial propagándose dentro de un medio no lineal tipo Kerr.

Para incitar la creación de cualquier *soliton*, ya sea espacial o temporal, se requiere de una potencia lo suficientemente alta para obtener respuestas no lineales del medio. Además, la longitud de difracción y la longitud no lineal deben ser iguales.

A pesar de la gran cantidad de artículos concernientes a las interacciones no lineales entre *solitones espaciales* en películas delgadas como guías de onda ópticas que presentan una no linealidad tipo Kerr, aún existen algunos problemas sin resolver.

Existen dos tipos principales de interacciones entre solitones ópticos espaciales en guías de onda planas no lineales:

- a) Interacción entre *solitones espaciales* con vectores de campo eléctrico paralelos (solitones con el mismo modo de propagación:  $TE \leftrightarrow TE$ ,  $TM \leftrightarrow TM$ ).
- b) Interacción entre *solitones espaciales* con polarización ortogonal ( $TE \leftrightarrow TM$ ).

En el caso escalar (a), con solitones con polarización paralela, el resultado de su interacción depende fuertemente de la diferencia de fase inicial entre ellos. En éste caso, el resultado de la interacción es impredecible, ya que una señal soliton siempre inicia con fase aleatoria. Por eso, muchos de los trabajos que aparecen en la literatura relacionada con solitones consideran el caso para solitones con polarización ortogonal, el cual no depende de la diferencia de fase entre ellos

---

Sin embargo, es posible demostrar que la interacción entre *solitones espaciales* con campos eléctricos paralelos es más atractiva para diversas aplicaciones debido a que éste caso es el más simple para la implementación práctica en guías de ondas planas no lineales. Éste tipo de interacciones entre solitones son empleadas en éste trabajo de tesis.

Las interacciones entre solitones coherentes tipo Kerr con campos eléctricos paralelos fueron estudiadas teóricamente por primera vez por Zakharov y Shabat [4] y más tarde por J. P. Gordon en 1985 [7]. J.P. Gordon obtuvo la solución explícita para dos solitones.

En estos trabajos se encontró que las interacciones entre solitones tienen un comportamiento parecido al de las interacciones entre partículas masivas. Estas interacciones han sido observadas en líquidos no lineales (carbon disulfide) en 1985 [8], en guías de onda de vidrio no lineales en 1990 [9] y en semiconductores en 1991 [10]. Ellos observaron que al inyectar dos *solitones espaciales* fundamentales paralelos entre sí dentro de una guía de onda plana monomodo, estos se atraían o se repelían dependiendo de la fase relativa ( $\delta\phi$ ) entre ellos. Se atraen cuando  $\delta\phi \leq \pi_2$  y se repelen cuando  $\pi_2 \leq |\delta\phi| \leq 3\pi_2$ , en cualquier otro caso, los *solitones espaciales* se separan. Existe un caso especial  $\delta\phi = 0$ , para el cual los *solitones espaciales* se atraen y se repelen periódicamente.

En la figura 2 se muestran los dos casos clásicos los cuales representan los dos casos limite de interacción entre solitones. La figura 2(a) ilustra el efecto atracción entre solitones para cuando  $\delta\phi = 0$  y la figura 2(b) muestra la repulsión cuando  $\delta\phi = 180^\circ$ . Ambos efectos fueron simulados con el software "OpticScheme".

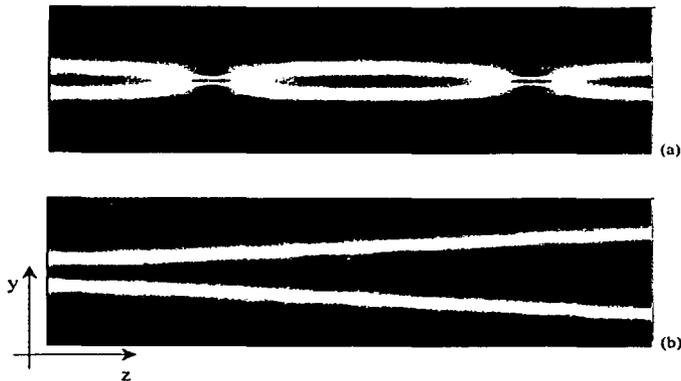


Figura 2. Vista superior de la simulación de interacciones entre solitones espaciales en medios no lineales tipo Kerr. La fase relativa entre ellos es: (a) de  $0^\circ$ , atracción y, (b) de  $180^\circ$ , repulsión.

Estos efectos de interacción pueden explicarse de manera cualitativa considerando que un soliton ejerce cierta perturbación sobre el otro. Imaginemos un soliton propagándose en una cierta dirección sin perturbación alguna. Ahora, un segundo soliton (en fase) es inyectado justo al lado del primero perturbando el índice de refracción del medio lo que provoca que el primer soliton se "monte" en un gradiente del índice de refracción que se incrementa hacia el segundo soliton. Éste gradiente es la causa de que los solitones se atraigan uno al otro. Cuando los solitones están en contrafase, los campos eléctricos interfieren para cancelarse en el punto central entre ellos. Ahora, cada soliton se "monta" en un gradiente que se incrementa lejos del otro soliton, lo que produce que cada uno se aleje del otro.

En el presente trabajo se pretende realizar un modelado en computadora de un conmutador totalmente óptico ultrarrápido (compuertas lógicas ópticas). Para esto se consideró únicamente la interacción entre solitones espaciales Kerr<sup>2</sup>. Éste tipo solitones poseen tiempos de duración ultracortos para conmutación y pueden ser usados para construir dispositivos ópticos ultrarrápidos.

*Es muy importante mencionar que las interacciones entre solitones de Kerr dependen fuertemente de la diferencia relativa de fase  $\delta\phi$ .*

<sup>2</sup> Tiene características estables de propagación en películas delgadas poliméricas como guías de onda ópticas que presentan una no linealidad tipo Kerr.

---

En trabajos recientes se han propuesto distintos esquemas complejos para eliminar la influencia de la diferencia relativa de fase inicial ( $\delta\phi_i$ ), dispositivos tales como moduladores de polarización [11] y dispositivos ópticos de arrastre [12] con esquemas ópticos complejos integrados en cascada.

Este trabajo de tesis tiene como objetivo encontrar efectos que permitan realizar una compuerta lógica óptica sencilla y eficiente que cuente con independencia de la diferencia relativa de fase inicial ( $\delta\phi_i$ ).

Este trabajo muestra que después de la colisión entre solitones tipo Kerr, ambos cambian su fase (de la amplitud compleja) para emerger de la guía con una diferencia relativa de fase constante de  $180^\circ$ . Éste cambio de fase de  $180^\circ$  no depende de la diferencia relativa de fase inicial ( $\delta\phi$ ) entre solitones. Es importante mencionar que aun no se ha presentado ningún trabajo o reporte sobre éste concepto para solitones espaciales. (Estas afirmaciones serán analizadas con mayor detenimiento en el Capítulo 4).

Éste efecto de cambio de fase inducido por la colisión entre solitones tipo Kerr es, precisamente, el efecto con el cual está basado la compuerta lógica óptica propuesta en ésta tesis y para la cual se ha pensado en una estructura de guía de onda plana que permita, de manera práctica, realizar un dispositivo completamente óptico con características estables.

#### *Estructura del trabajo:*

El trabajo de tesis se dividió en 5 capítulos; en los capítulos 1 y 2 se describirá la teoría básica relativa a la óptica no lineal para telecomunicaciones ópticas, se analizarán analíticamente las características y propiedades de las ondas ópticas dentro de las guías de onda, además de otras teorías que permitan una comprensión más amplia de los solitones ópticos, su formación causada por efectos no lineales y su propagación en guías de onda. Para su comprensión, es necesario estudiar la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) que describe el comportamiento de solitones dentro de una guía de onda plana, ecuación que puede ser deducida a partir de las conocidas ecuaciones de Maxwell. Además, se encontrará una solución analítica de la NLSE para el soliton espacial fundamental.

---

En el capítulo 3 se explicará el método numérico utilizado para obtener y analizar una solución numérica de la NLSE para casos cuando el número de solitones  $N$  sea tal que  $N > 2$ . Para tales casos no se ha presentado aún una solución explícita de la NLSE. El método utilizado es el Método de Propagación de Rayos (Beam Propagation Method, BPM). Éste método es el más conveniente para un modelado en computadora de interacciones escalares soliton – soliton ya que ha probado ser muy efectivo, preciso y rápido. La principal ventaja de éste método es que puede describir la evolución de los rayos ópticos espaciales en guías de onda ópticas con parámetros físicos variables (longitud, curvaturas, grosor, número de capas de las guías, etc.).

El método se basa en la NLSE y utiliza la aproximación de diferencias finitas para los operadores de derivación transversales, el esquema aproximado longitudinal con direcciones alternadas y el algoritmo de reducción de Crout para la solución de sistemas de ecuaciones con tres diagonales.

En el capítulo 4 se realizarán los experimentos numéricos acerca de las interacciones entre solitones espaciales. Los experimentos numéricos se analizará como la diferencia relativa de fase inicial entre solitones afecta las características energéticas (desplazamiento y amplitud) de los solitones.

Finalmente, en el capítulo 5 se mostrarán y se analizarán los resultados obtenidos. Se presentará la estructura de guía de onda plana propuesta para la realización de la conmutación óptica con todas las condiciones necesarias para una conmutación óptica y se explicará el funcionamiento de ésta. Además, se mostrarán los resultados relativos a la interacción entre solitones espaciales tipo Kerr con diferentes amplitudes.

---

## Referencias de la introducción.

- [1] Perrier P., Thompson S., "Interconectores ópticos: lo más novedoso de la red óptica básica". Revista de Telecomunicaciones de Alcatel – 3er. trimestre de 2000.
- [2] N.J. Zabusky and M.D. Kruskal. "Interaction of 'solitons' in a collisionless plasma and the recurrence of initial state". Phys. Rev. Lett. / Vol. 15 / No.6 / pp 240 – 243. 1965.
- [3] Nakazawa Masataka. "Soliton Transmission in Telecommunication Networks". IEEE Communications Magazine. March 1994.
- [4] V.E. Zakharov, and A.B. Shabat. "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media". Sov. Phys. JEPT, Vol. 34, No. 1, pp. 62 – 69. 1972.
- [5] Stegeman G., Christodoulides N., Segev M. "Optical Spatial Solitons: Historical Perspectives". Quantum Electronics, Vol. 6, November/December 2000.
- [6] Garzia F., Sibilia C. Bertolotti M. "All-optical soliton based router". Opt. Comm. Elsevier / 168 September 1999 / pp 277 – 285.
- [7] Gordon J. P. Optics Letters. Vol. 8, pp. 596 (1983).
- [8] A. Barthelemy, S. Maneuf and C. Froehly. Opt. Commun. / Vol. 55 / pp. 201. 1985.
- [9] Aitchison J. S., Weiner A. M., Silberberg Y., Leaird D. E., Oliver K., Jackel J. L., and Smith P. W. E. "Experimental observation of spatial soliton interactions". January 1, 1991 / Vol. 16, No. 1 / OPTICS LETTERS
- [10] G.R. Allan, S.R. Skinner, D.R. Andersen, and A.L. Smirl. Opt. Lett. / Vol. 16 / pp. 157. 1991.
- [11] G. Cancellieri, F. Chiaraluce, E. Gambi, and P. Pierleoni. "All-Optical polarization modulator based on spatial soliton coupling". J. of Lightwave Techn. Vol. 14, No. 3, pp. 513 – 523. 1996.
- [12] F. Chiaraluce, E. Gambi, and P. Pierleoni. "A nonlinear device for optical dragging with compensation of the initial phase difference". Electrotechnical Conference. MELECON-96, 8<sup>th</sup> Mediterranean, Vol. 3, pp. 1497 - 1500. 1996.

---

## **OBJETIVOS PRINCIPALES**

**Encontrar las condiciones necesarias que permitan interacciones independientes de la diferencia relativa de fase entre solitones espaciales con vectores de campo eléctrico paralelos.**

**También, construir un modelo en computadora que simule una compuerta lógica óptica con interacciones independientes de la diferencia relativa de fase entre solitones espaciales con vectores de campo eléctrico paralelos.**



**1. Óptica  
no lineal para  
comunicaciones  
ópticas**



---

# 1. Óptica no lineal para comunicaciones ópticas

## 1.1. Principios básicos de óptica no lineal

La óptica "tradicional" que conocemos es una rama de la física que trata del estudio de la luz y de su interacción con diferentes materiales. La respuesta de un material al ser excitado por un haz de luz de baja intensidad cambia de manera lineal, es decir, cambia de manera proporcional con la intensidad de la luz presente a la entrada y más importante, la intensidad de la luz no provoca alteración alguna respecto a sus propiedades ópticas.

El análisis clásico de la propagación de la luz (superposición, reflexión, refracción, etc.) presupone esta relación lineal entre el campo electromagnético de la luz y el sistema atómico que responde y que forma al medio.

Sin embargo, la óptica no lineal estudia los fenómenos que ocurren cuando la intensidad del haz de luz excitada es lo suficientemente alta para provocar cambios en las propiedades ópticas de algunos materiales. Se sabe que sólo la luz LASER es capaz de modificar las propiedades ópticas de los materiales. Son fenómenos "no lineales" en el sentido de que los materiales responden de manera no lineal respecto del campo óptico aplicado.

Para describir de manera más precisa la óptica no lineal es necesario demostrar como la polarización  $P(t)$  de cualquier material depende de la intensidad  $E(t)$  del campo óptico aplicado. Para el caso lineal, la polarización inducida depende linealmente respecto del campo aplicado de la siguiente manera:

$$P(t) = \chi^{(1)} E(t) \quad (1.1.1)$$

donde

$\chi^{(1)}$  es la susceptibilidad lineal.

---

En óptica no lineal, la respuesta no lineal puede describirse mediante la generalización de la ecuación anterior [1]:

$$\begin{aligned} P(t) &= \chi^{(1)}E(t) + \chi^{(2)}E^2(t) + \chi^{(3)}E^3(t) + \dots \\ &\equiv P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \dots \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Las constantes  $\chi^{(2)}$  y  $\chi^{(3)}$  son conocidas como susceptibilidades de 2do y 3er orden respectivamente. Como ejemplo, podemos mencionar que  $\chi^{(2)}$  es responsable por efectos como el de la generación de segunda armónica (SHG) (efecto existente únicamente en medios que no presentan simetría central) y que  $\chi^{(3)}$  es responsable por efectos como el de mezclado de onda (Four Wave Mixing, FWM) y de la formación de solitones.

La manera más común para describir fenómenos ópticos no lineales está basado en expresar la polarización en términos del campo eléctrico aplicado. La polarización es de especial importancia para la descripción de fenómenos no lineales debido a que ésta actúa como fuente de nuevas componentes del campo electromagnético.

Como veremos en capítulos posteriores, la ecuación que describe la propagación de ondas en medios no lineales tiene una forma similar a la siguiente:

$$\nabla^2 E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1.1.3)$$

donde  $n$  es el índice de refracción ( $n^2 = \epsilon$ ) y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. La ecuación diferencial en derivadas parciales es una ecuación de onda no homogénea en la cual la polarización conduce al campo eléctrico.

---

<sup>1</sup> En congruencia con la literatura consultada, la tilde denota cantidades que varían rápidamente respecto del tiempo.

## 1.2. Ondas Ópticas Guiadas (GOW's)

En éste sub-capítulo se estudiará la propagación de ondas ópticas a través de películas delgadas. La razón por la cual se incluye éste sub-capítulo es debido a que se sabe que los solitones espaciales tipo Kerr *son inestables en medios con volumen*, sin embargo, son estables cuando limitamos la difracción a una sola dimensión como en guías de ondas planas o en películas delgadas [2].

La ecuación (1.1.3) describe la propagación de ondas ópticas a través de películas delgadas. En éste sub-capítulo analizaremos el *caso lineal*, por lo tanto

$$\begin{aligned}\chi^{(2)} &= \chi^{(3)} = 0 \\ \vec{P} &= \chi^{(1)} \vec{E}\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

En sub-capítulos posteriores analizaremos el caso para el cual el material presenta una no linealidad de 3<sup>er</sup> orden, ya que solo en éste tipo de no linealidad se pueden crear solitones.

Las GOWs son guiadas debido a que la película delgada está hecha de una o varias capas de material dieléctrico sobre un sustrato de menor índice de refracción para confinar las ondas dentro del material de mayor índice de refracción. En la figura 1.2.1 se muestra un esquema de una película delgada para la propagación de GOWs, además, se muestra el sistema de coordenadas utilizado para el estudio de las GOWs.

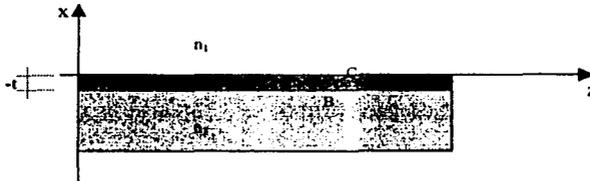


Figura 1.2.1. Sistema de coordenadas utilizado para el estudio de las GOWs.

El análisis puede realizarse de dos maneras. La primera mediante la idealización de rayos y otra, más completa, mediante la aplicación de las ecuaciones de Maxwell. Para un análisis más completo, deduciremos la ecuación de propagación mediante el uso de las ecuaciones de Maxwell en unidades gaussianas [3]

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot D = 4\pi \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$B = \mu H$$

$$D = \epsilon E$$

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

donde

$E$  es la intensidad del campo eléctrico [V/m].

$D$  es la densidad del flujo eléctrico [C/m<sup>2</sup>].

$B$  es la densidad del flujo magnético [T].

$H$  es la intensidad del campo magnético [A/m].

$J$  es la densidad de corriente eléctrica [A/m<sup>2</sup>].

$\rho$  es la densidad de carga eléctrica.

$\epsilon$  es la permitividad del medio.

$\mu$  es la permeabilidad del medio.

Las ondas ópticas guiadas (GOWs) deben satisfacer las siguientes condiciones para que puedan propagarse dentro de la guía mostrada en la figura 1.2.1 [4]:

a)  $n_2 > n_1 > n_3$

b) Reflexión total interna.

c) Resonancia transversal; en A y D (fig. 1.2.1), las ondas deben tener la misma amplitud, fase y polarización.

Se desea encontrar la solución de éstas ecuaciones en medios sin pérdidas ( $\rho = 0, \bar{J} = 0$ ), además de recurrir a materiales no magnéticos ( $B = \mu H$ ).

La manera más usual de obtener la ecuación de onda es la siguiente:

Se toma el rotacional de la primera ecuación de Maxwell y se intercambia el orden de las derivadas en el espacio y en el tiempo resultantes en el miembro de la derecha de la ecuación, además, sabemos que  $D = \epsilon E$  con lo que se tiene

$$\nabla \times \nabla \times E + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

además se conoce la siguiente identidad del calculo vectorial

$$\nabla \times \nabla \times E = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E, \text{ por lo tanto}$$

$$\nabla^2 E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.2)$$

## Modos TE

Para modos TE, podemos definir el campo como

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ E_y(x) \\ 0 \end{Bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \vec{H} &= \begin{Bmatrix} H_x(x) \\ 0 \\ H_z(x) \end{Bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Un análisis similar puede ser realizado para modos TM.

Suponemos que el medio es *isotrópico*, por lo tanto

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}$$

tomando la segunda derivada de  $\vec{E}$  con respecto al tiempo

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} e^{j(\omega t - \beta z)}, \text{ sabiendo que } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{ y, sustituyendo en (1.2.2), se tiene}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 n^2 E_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) E_y = 0$$

sabemos que  $E_y$  no depende de  $y$ , por lo que podemos simplificar la ecuación anterior como

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (1.2.4)$$

Como se puede observar en la figura 1.2.1, se tienen tres diferentes regiones para cada uno de los medios. La región I es el aire, la región II es la película y la región III es el sustrato. Para mayor comprensión del análisis, se resolverá la ecuación anterior para cada una de las regiones. Además, solamente se analizará el modo TE (transversal eléctrico,  $E_z = 0, H_z \neq 0$ ).

**Para la Región I ( $x > 0$ ):**

$$k_{c_1}^2 = k_1^2 n_1^2 - \beta^2 \quad (1.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k_{c_1}^2 E_y = 0 \quad E_y(x) = A^+ e^{-qx} + A^- e^{qx}$$

la onda pasa sin reflexión de la región I a la II, la onda reflejada no existe, por lo tanto:

$$q = \sqrt{\beta^2 - k_1^2 n_1^2} \quad (1.2.5a)$$

$$E_y(x) = A e^{-qx}; \quad x > 0$$

**Para la Región II ( $-t < x < 0$ ):**

$$k_{c_2}^2 = k_2^2 n_2^2 - \beta^2 \quad (1.2.6)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k_{c_2}^2 E_y = 0 \quad E_y(x) = B e^{-hx} + C e^{hx}$$

$$E_y(x) = B \cos(k_{c_2} x) + C \sin(k_{c_2} x)$$

$$h = \sqrt{k_2^2 n_2^2 - \beta^2} = k_{c_2} \quad (1.2.6a)$$

$$E_y(x) = B \cos(hx) + C \sin(hx); \quad -t < x < 0$$

Para la Región III ( $x < -t$ ):

$$k_c^2 = k_3^2 n_3^2 - \beta^2 \quad (1.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k_c^2 E_y = 0 \quad E_y(x) = De^{-px} + Ee^{px}$$

la onda pasa sin reflexión de la región II a la III, la onda reflejada no existe, por lo tanto:

$$p = \sqrt{\beta^2 - k_3^2 n_3^2} \quad E_y(x) = De^{-px}; x < -t$$

$$E_y(x) = De^{p(x+t)}; x+t < 0$$

Para obtener el valor de las constantes, hay que aplicar las condiciones de frontera.

$$\begin{aligned} E_y' &= E_y'' \Big|_{x=0} & \frac{\partial E_y'}{\partial x} &= \frac{\partial E_y''}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ E_y'' &= E_y''' \Big|_{x=-t} & \frac{\partial E_y''}{\partial x} &= \frac{\partial E_y'''}{\partial x} \Big|_{x=-t} \end{aligned}$$

Resumiendo las soluciones para cada región:

$$E_y(x) = \begin{cases} Ae^{-\alpha x}; & x > 0 \\ B \cos(\beta x) + C \sin(\beta x); & -t < x < 0 \\ De^{p(x+t)}; & x < -t \end{cases}$$

$$E'_y(0) = A$$

$$E''_y(0) = B$$

$$A = B$$

$$E''_y(-t) = A \cos(ht) - C \sin(ht)$$

$$E'''_y(-t) = D$$

$$\tan(ht) = \frac{A}{C} - \frac{D}{C \cos(ht)}$$

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x} = -A \cdot q \cdot e^{-qx}$$

$$\frac{\partial E''_y}{\partial x} = -A \cdot h \cdot \sin(htx) + C \cdot h \cdot \cos(htx)$$

$$\frac{\partial E'''_y}{\partial x} = p \cdot D \cdot e^{p(x+t)}$$

$$\frac{A}{C} = \frac{h}{q}$$

$$\frac{D}{C \cdot \cos(ht)} = \frac{h}{p} - \frac{h^2}{q \cdot p} \tan(ht)$$

$$\tan(ht) = \frac{h(p+q)}{h^2 - q \cdot p}$$

$$\tan(ht) = \frac{(p+q)}{h \left( 1 - \frac{q \cdot p}{h^2} \right)}$$

(1.2.8)

La ec. (1.2.8) se le conoce con el nombre de *ecuación característica*. En las siguientes líneas se analizará la ecuación característica para modos TE dentro de películas delgadas. Se desea encontrar los valores de las constantes de propagación para cada modo en términos de otros parámetros físicos como  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $t$  y la longitud de onda de la onda que se propaga.

Para su análisis supondremos  $n_1 = n_3$ , por lo que las ecuaciones (1.2.5a) y (1.2.6a) quedan como

$$q^2 = \beta^2 - k_1^2 n_1^2 \quad (1.2.9)$$

$$h^2 = k_1^2 n_2^2 - \beta^2 \quad (1.2.10)$$

y la ecuación característica (1.2.8) la podemos describir como

$$\tan(ht) = \frac{2q}{h\left(1 - \frac{q^2}{h^2}\right)} \quad (1.2.11)$$

El objetivo del análisis es obtener una solución gráfica, primero se empieza sumando las ecs. (1.2.9) y (1.2.10) y multiplicando por  $t^2$  de la siguiente manera

$$h^2 t^2 + q^2 t^2 = (n_2^2 - n_1^2) k_1^2 t^2 \quad (1.2.12)$$

y se hace

$$X = ht$$

$$Y = qt$$

$$R = \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)} k_1 t$$

ahora se puede graficar la ec.

$$X^2 + Y^2 = R^2 \quad (1.2.13)$$

ahora, se multiplica la ec. (1.2.11) por  $ht$ , se tiene

$$ht \tan(ht) = \frac{2qt}{\left(1 - \frac{q^2}{h^2}\right)} \quad (1.2.14)$$

y rescribiéndola en términos de  $X$  e  $Y$  se obtiene

$$\frac{Y}{1 - Y^2} = \frac{1}{2} X \tan X \quad (1.2.15)$$

La figura 1.2.2 muestra gráficamente la ecs. (1.2.13) y (1.2.15) para la obtención de las constantes de propagación de los modos TE dentro de la película delgada. Las intersecciones entre esta dos curvas definen las condiciones de propagación para los diferentes modos dentro de la película delgada. Por ejemplo, para el modo fundamental  $TE_0$ , se obtienen los valores de  $h$  y  $p$  de la gráfica y utilizando la ec. (1.2.9) se puede calcular el valor de  $\beta_0$ .

Las constante de propagación para los siguientes modos  $TE_M$  pueden ser calculadas de la misma manera.

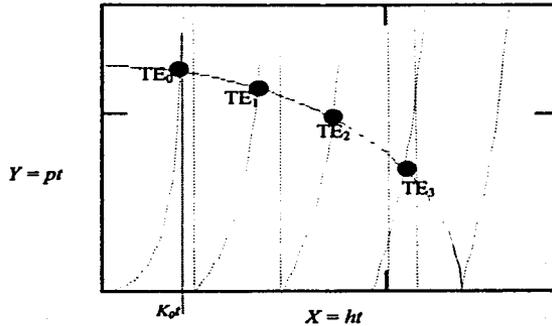


Figura 1.2.2. Representación gráfica de la ecuación característica para modos TE en películas delgadas [5].

La solución para  $E_y$  completa se muestra a continuación.

$$E_y(x) = \begin{cases} -\frac{h}{q} e^{-qx}; & x > 0 \\ -\frac{h}{q} \left[ \cos(hx) - \frac{q}{h} \operatorname{sen}(hx) \right]; & -t < x < 0 \\ -\frac{h}{q} \left[ \frac{h}{p} \operatorname{sen}(ht) - \frac{q}{p} \cos(ht) \right] e^{p(x+t)}; & x < -t \end{cases}$$

De la ec. (1.2.12) se tiene que

$$h^2 t^2 + q^2 t^2 = (n_2^2 - n_1^2) k_1^2 t^2 = V^2 \quad (1.2.16)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

donde  $V$  es la frecuencia normalizada

$$V = \frac{2\pi t}{\lambda} \sqrt{n_2^2 - n_1^2} \quad (1.2.17)$$

$V$  es inversamente proporcional a  $\lambda$  por lo que aumenta con la frecuencia óptica de la señal.

La importancia de definir la frecuencia normaliza  $V$ , es que podemos a partir de ella conocer el número de modos que puede soportar la guía.

Hemos visto que podemos utilizar la gráfica de la figura 1.2.2 para calcular la constante de propagación, sin embargo, podemos obtener una gráfica del parámetro de propagación normalizado  $b$  en función de la frecuencia normaliza  $V$  y poder calcular el número de modos soportados por la guía de onda para diferentes espesores ( $t$ ) y para diferentes longitudes de onda, ya que

$$V = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_2^2 - n_1^2}.$$

Para la obtención de la gráfica utilizaremos la ec. (1.2.16) de donde definimos  $b$  como

$$b = \left(\frac{qt}{V}\right)^2 = 1 - \left(\frac{ht}{V}\right)^2 \quad (1.2.18)$$

resolvemos la ec. (1.2.14) para  $q^2 t^2$  y la sustituimos en la ec. (1.2.16), además, incluimos en ésta nueva ecuación el parámetro de propagación normalizado  $b$  de la ec. (1.2.18) en (1.2.16) para obtener

$$\tan^2(V \sqrt{1-b}) = \frac{4b}{1-2b} \quad (1.2.19)$$

sabemos que  $\tan(x) = \tan(x + n\pi)$ , por lo que después de sacar raíz cuadrada a ambos miembros de la ec (1.2.19) tenemos

$$\tan(V \sqrt{1-b} + n\pi) = \pm \sqrt{\frac{4b}{1-2b}}$$

y resolviendo para  $V$

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-b}} \left[ n\pi + \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{4b}{1-2b}} \right) \right] \quad (1.2.20)$$

A partir de la ec. (1.2.20) podemos calcular fácilmente a  $V$  en función de  $b$ . Normalmente se gráfica la función recíproca  $b = f(V)$ . La figura (1.2.3) muestra los resultados de éste análisis.

Cuando la diferencia entre los índices de refracción de las tres regiones es pequeña, los modos de propagación TE y TM tienen prácticamente el mismo valor de  $b$ .

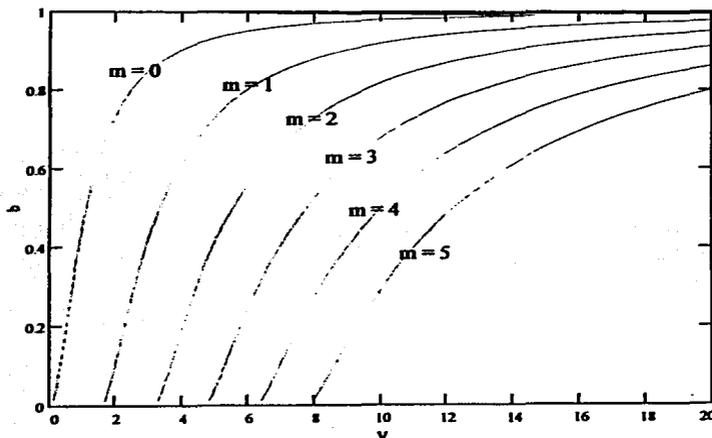


Figura 1.2.3. Guía plana. Parámetro de propagación normalizado  $b$  en función de la frecuencia normalizada  $V$  [6].

### 1.3. Teoría lineal de perturbaciones

La teoría lineal de perturbaciones que se presenta en éste sub-capítulo tiene como objetivo mostrar la importante propiedad de ortogonalidad de las ondas ópticas guiadas, ya que ésta propiedad nos permite conocer la manera en que interactúan ondas de diferentes modos dentro de películas delgadas, además, nos permite conocer el flujo mutuo de energía entre modos en la dirección de propagación.

#### Propiedades energéticas de las GOW's

Para conocer las propiedades energéticas de las GOWs, se debe partir de un análisis mediante las ecuaciones de Maxwell para medios sin pérdidas de la sig. forma:

$$\nabla \times \bar{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{H}_1 \quad \text{con } \mu = 1, \quad \bar{B} = \bar{H}$$

$$\nabla \times \bar{H}_2^* = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \bar{E}_2^*$$

Suponemos que en la guía de onda existen múltiples modos de propagación. Del análisis de Fourier sabemos que  $\frac{\partial^n}{\partial t^n} \Rightarrow (j\omega)^n$ , por lo que podemos reescribir las ecs. anteriores como:

$$\bar{H}_2^* (\nabla \times \bar{E}_1) = -\bar{H}_2^* \frac{\partial}{\partial t} \bar{H}_1 = -j\omega \bar{H}_2^* \bar{H}_1 \quad (1.3.1)$$

$$\bar{E}_1 (\nabla \times \bar{H}_2^*) = \bar{E}_1 \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \bar{E}_2^* = -j\omega \bar{E}_1 \epsilon \bar{E}_2^* \quad (1.3.2)$$

Si restamos (1.3.1) - (1.3.2), se obtiene:

$$\bar{H}_2^* (\nabla \times \bar{E}_1) - \bar{E}_1 (\nabla \times \bar{H}_2^*) = j\omega (\bar{E}_1 \epsilon \bar{E}_2^* - \bar{H}_2^* \bar{H}_1)$$

$$\bar{H}_2^* (\nabla \times \bar{E}_1) - \bar{E}_1 (\nabla \times \bar{H}_2^*) = \nabla \cdot (\bar{E}_1 \times \bar{H}_2^*)$$

$$\nabla \cdot (\bar{E}_1 \times \bar{H}_2^*) = j\omega (\bar{E}_1 \epsilon \bar{E}_2^* - \bar{H}_2^* \bar{H}_1) \quad (a)$$

Por otro lado,

$$\vec{H}_1(\nabla \times \vec{E}_2) = -\vec{H}_1 \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}_2 = j\omega \vec{H}_1 \vec{H}_2 \quad (1.3.3)$$

$$\vec{E}_2(\nabla \times \vec{H}_1) = \vec{E}_2 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \vec{E}_1 = j\omega \vec{E}_2 \varepsilon \vec{E}_1 \quad (1.3.4)$$

y restando ec. (1.3.3) - ec. (1.3.4), se obtiene

$$\vec{H}_1(\nabla \times \vec{E}_2) - \vec{E}_2(\nabla \times \vec{H}_1) = j\omega(\vec{H}_1 \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \varepsilon \vec{E}_1)$$

$$\vec{H}_1(\nabla \times \vec{E}_2) - \vec{E}_2(\nabla \times \vec{H}_1) = \nabla \cdot (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1)$$

$$\nabla \cdot (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = j\omega(\vec{H}_1 \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \varepsilon \vec{E}_1) \quad (b)$$

### 1.3.1 Ortogonalidad de las GOWs

Sumando (a) + (b) se tiene:

$$\nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2) + \nabla \cdot (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = j\omega(\vec{E}_1 \varepsilon \vec{E}_2 - \vec{E}_2 \varepsilon \vec{E}_1) \quad (1.3.5)$$

$$\nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = j\omega(\vec{E}_1 \varepsilon \vec{E}_2 - \vec{E}_2 \varepsilon \vec{E}_1) \quad (1.3.6)$$

La ec. (1.3.6) nos proporciona la densidad de potencia en cada punto. Para obtener la potencia en toda una sección transversal se debe integrar la ec. (1.3.6) dentro de una superficie transversal de  $-\infty, +\infty$  en  $x$  e  $y$ .

$$\iint_S \nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) dx dy = \iint_S j\omega(\vec{E}_1 \varepsilon \vec{E}_2 - \vec{E}_2 \varepsilon \vec{E}_1) dx dy \quad (1.3.6a)$$

La ec. (1.3.6a) es la síntesis de la ley de la conservación de la potencia de las GOWs

Podemos analizar dos casos, uno cuando  $\varepsilon$  es escalar y otro cuando  $\varepsilon$  es un tensor.

a) Caso cuando  $\epsilon$  es escalar

Si  $\epsilon$  es escalar, es decir, el índice de refracción local del medio cambia de manera uniforme. Es posible demostrar que para este caso, las GOWs de diferente orden no interactúan.

De la ecuación (1.3.6a) se tiene que si  $\epsilon$  es escalar

$$\iint_V \nabla \cdot (\bar{E}_1 \times \bar{H}_2^* + \bar{E}_2^* \times \bar{H}_1) dx dy = 0 \quad (1.3.7)$$

si se define

$$\bar{y} = (\bar{E}_1 \times \bar{H}_2^* + \bar{E}_2^* \times \bar{H}_1) \quad (1.3.8)$$

se puede describir la ec. (1.3.7) como

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{y}) ds = 0 \quad (1.3.9)$$

y separando el operador nabla en sus componentes transversal y longitudinal se tiene

$$\int_V (\nabla_{xy} \bar{y} + \nabla_z \bar{y}) ds = 0 \quad (1.3.10)$$

$$\int_V (\nabla_{xy} \bar{y}) ds + \int_V \left( \frac{\partial}{\partial z} \bar{y} \right) ds = 0 \quad (1.3.11)$$

Se puede demostrar que  $\int_V (\nabla_{xy} \bar{y}) ds = 0$  debido a que el campo eléctrico de las GOWs en el infinito es cero. Los campos fuera de la guía de onda decaen de manera exponencial. También lo podemos demostrar mediante la transformación de Gauss - Ostrogradsky como

$$\int_V (\nabla_{xy} \bar{y}) ds = \int_V (\bar{y} \cdot \bar{n}) dl = 0$$

por lo tanto, la ec. (1.3.11) queda como

$$\int_V \left( \frac{\partial}{\partial z} \bar{y} \right) ds = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_V \bar{y} ds = 0 \quad (1.3.12)$$

---

debido a que

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &\propto e^{-j\beta_1 z}, & \bar{E}_2^* &\propto e^{j\beta_2 z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_1 &= -j\beta_1 e^{-j\beta_1 z}, & \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_2^* &= j\beta_2 e^{j\beta_2 z}\end{aligned}$$

y aplicando el teorema de Gauss, se obtiene

$$j(\beta_2 - \beta_1) \int_S (\bar{E}_1 \times \bar{H}_2^* + \bar{E}_2^* \times \bar{H}_1) ds = 0 \quad (1.3.13)$$

si las constantes de propagación para cada modo son diferentes ( $\beta_2 \neq \beta_1$ ), se tiene

$$\int_S (\bar{E}_1 \times \bar{H}_2^* + \bar{E}_2^* \times \bar{H}_1) ds = 0 \quad (c)$$

Mediante un análisis similar, es posible demostrar que

$$\int_S (\bar{E}_1 \times \bar{H}_2^* - \bar{E}_2^* \times \bar{H}_1) ds = 0 \quad (d)$$

Sumando (c) + (d) se tiene:

$$\int_S (\bar{E}_1 \times \bar{H}_2^*) ds = \int_S (\bar{E}_2^* \times \bar{H}_1) ds = 0 \quad (1.3.14)$$

*La ecuación (1.3.14) muestra que modos de diferente orden son ORTOGONALES y NO INTERACTUAN entre sí, además de que no crean flujo mutuo de energía en la dirección de propagación. Esta conclusión es válida para  $\epsilon$  escalar.*

---

b) *Caso cuando  $\epsilon$  es un tensor*

Si  $\epsilon$  es un tensor descrito como  $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$ ,

donde

$\epsilon_0$  es un tensor que describe los parámetros del material sin perturbación y

$\Delta\epsilon$  también es un tensor que describe la perturbación debida a efectos no lineales,

de la ec. (1.3.6a) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} \iint y ds = \iint \bar{E}_2 \Delta\epsilon \bar{E}_1 ds \quad (1.3.15)$$

La ec. (1.3.15) muestra que para este caso las GOWs pueden ser acopladas por medio de  $\Delta\epsilon$ . Además, como se muestra en el siguiente sub-capítulo,  $\Delta\epsilon$  puede inducir pequeños cambios en las propiedades de las GOWs, especialmente en la constante de propagación  $\beta$ .

El caso para cuando  $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$  es muy importante debido a que lo utilizaremos para la generación de algunas ecuaciones necesarias para la obtención de la NLSE en capítulos posteriores. Se considerará con mayor detalle en el capítulo 2.

#### 1.4. Teoría de acoplamiento de modos ópticos para perturbaciones pequeñas

En éste sub-capítulo se resolverá la ecuación (1.1.3) que se muestra de nuevo

$$\nabla^2 E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1.1.3)$$

pero ahora permitiremos que el medio por el cual se propagan las ondas presente una linealidad de 3er orden, de tal manera que la ecuación (1.1.2) pueda escribirse de la siguiente manera

$$P = \chi^{(1)} E + \chi^{(3)} E : E : E \quad (1.4.1)$$

entonces

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \Delta \mathcal{E} \quad (1.4.2)$$

donde

$\Delta \mathcal{E}$  esta dado por no linealidad de tercer orden ( $\chi^{(3)}$ ).

El objetivo es resolver la ecuación de Helmholtz para cuando existen varios modos acoplados dentro de una guía de onda óptica:

$$\nabla^2 E + k_0^2 \mathcal{E} E = 0 \quad (1.4.3)$$

podemos suponer que la contribución de la no linealidad es mucho menor que la parte lineal, por lo tanto

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \ll 1 \quad (1.4.4)$$

para este caso podemos emplear la teoría de perturbaciones presentando al campo electromagnético como una superposición de GOWs las cuales son soluciones para el caso sin perturbaciones. Además, suponemos que las amplitudes de las GOWs varían lentamente respecto de la longitud de onda.

Entonces, podemos representar al campo electromagnético por medio de la suma de modos TE y TM

$$E(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^N a_i^{TE}(z) E_i^{TE}(x) e^{j(\omega t - \beta_i^{TE} z)} + \sum_{j=0}^N b_j^{TM}(z) E_j^{TM}(x) e^{j(\omega t - \beta_j^{TM} z)}, \quad (1.4.5)$$

donde

$a^{TE}$  y  $b^{TM}$  son amplitudes de los modos TE y TM respectivamente que varían lentamente a lo largo de  $z$ .

sustituyendo la ec.(1.4.5) en la ec. (1.4.3) y recordando que las amplitudes varían lentamente respecto del período de la onda,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} a, b(z) \ll \frac{\partial}{\partial z} a, b(z), \quad (1.4.6)$$

y aplicando el teorema de ortogonalidad, obtenemos las siguientes ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} a(z) &= -j \frac{\omega}{16\pi} \frac{k_0}{\beta^{TE}} a(z) \Delta \varepsilon_{22} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_y^2 dx dy + j \frac{\omega}{16\pi} \frac{k_0}{\beta} b(z) \Delta \varepsilon_{21} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_x E_y dx dy e^{j\Delta \beta z} \\ \frac{\partial}{\partial z} b(z) &= -j \frac{\omega}{16\pi} \frac{k_0}{\beta^{TM}} b(z) \Delta \varepsilon_{11} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_x^2 dx dy + j \frac{\omega}{16\pi} \frac{k_0}{\beta^{TM}} a(z) \Delta \varepsilon_{12} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_x E_y dx dy e^{-j\Delta \beta z} \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

para una no linealidad tipo Kerr,  $\Delta \varepsilon_{12} = \Delta \varepsilon_{21} = 0$  y el sistema de la ec.(1.4.7) se reduce a un par de ecuaciones independientes para cada modo de propagación como:

$$\frac{\partial}{\partial z} a(z) = -j \frac{\omega}{16\pi} \frac{k_0}{\beta^{TE}} a(z) \Delta \varepsilon_{22} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_y^2 dx dy \quad (1.4.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} b(z) = -j \frac{\omega}{16\pi} \frac{k_0}{\beta^{TM}} b(z) \Delta \varepsilon_{11} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_x^2 dx dy \quad (1.4.7b)$$

que para el modo TE ( $a = a(z)$ ) se puede describir como

$$2jk_0 \frac{\partial}{\partial z} a = \gamma |a|^2 a \quad (1.4.8)$$

donde

$$\gamma |a|^2 = \frac{\omega}{8\pi} \frac{k_0^2}{\beta^{TE}} \Delta \varepsilon_{22} \int \int_{-\infty}^{\infty} E_y^2 dx dy \quad (1.4.8a)$$

de la ec. (1.4.8) se obtiene

$$a(z) = A e^{-j \frac{\gamma}{2k_0} |a|^2 z} \quad (1.4.9)$$

Para la programación de la solución de la parte no lineal de la NLSE en el sub-capítulo 3.4., haremos uso de la ec. (1.4.9).

Para la obtención de estas ecuaciones se ha supuesto que la componente del campo  $E_x$  es mucho menor que  $E_y$  y  $E_z$ . Debido a que la perturbación cambia la constante de propagación ( $\beta$ ), debemos conocer analíticamente éste cambio.

Como en el caso anterior, consideraremos la ecuación de Helmholtz de la forma

$$\nabla^2 E + k_0^2 \epsilon E = \beta^2 E \quad (1.4.10)$$

suponemos que  $\Delta \epsilon$  induce la perturbación de la constante de propagación ( $\delta\beta$ ) y campo electromagnético ( $\delta E$ ). En este caso la ec. (1.4.10) tiene la siguiente forma

$$(\nabla^2 + k_0^2 \epsilon_0 + k_0^2 \Delta \epsilon)(E + \delta E) = (\beta^2 + \delta\beta^2)(E + \delta E) \quad (1.4.11)$$

de la ec. (1.4.11) podemos eliminar los términos  $\Delta \epsilon \delta E$  y  $\delta\beta^2 \delta E$ , ya que son despreciables

$$(\nabla^2 + k_0^2 \epsilon_0) \delta E + k_0^2 \Delta \epsilon E = \beta^2 \delta E + \delta\beta^2 E \quad (1.4.12)$$

para obtener la solución de  $\delta\beta$ , presentamos el campo electromagnético por medio de la suma de los modos que son soluciones para el caso sin perturbación ( $E_m$ )

$$\delta E = \sum_m c_m E_m \quad (1.4.13)$$

Si sustituimos la ec. (1.4.13) en la ec. (1.4.12) se obtiene

$$\sum_m c_m (\beta_m^2 - \beta^2) E_m = (\delta\beta^2 - k_0^2 \Delta \epsilon) E_m \quad (1.4.14)$$

Multiplicando la ec. (1.4.14) por  $E_m^*$  e integrando en  $x$  e  $y$ , y utilizando la condición de ortogonalidad de la ec. (1.3.14)

$$\iint (\delta\beta_m^2 - k_0^2 \Delta \epsilon) E_m ds = 0 \quad (1.4.15)$$

Finalmente, de la ec. (1.4.15) se obtiene

$$\delta\beta_m^2 = \frac{\iint E_m^* k_0^2 \Delta \epsilon E_m ds}{\iint E_m^* E_m ds}$$

utilizando  $\delta\beta^2 = 2\beta\delta\beta$

$$\delta\beta_m = \frac{1}{2\beta} \frac{\iint E_m^* k_0^2 \Delta \epsilon E_m ds}{\iint E_m^* E_m ds} \quad (1.4.16)$$

---

### **Conclusiones del capítulo 1.**

En éste capítulo se describieron los conceptos básicos de la óptica no lineal. El estudio de la óptica no lineal involucra elementos de polarización no incluidos en el estudio de la óptica clásica u óptica lineal. La propagación de ondas ópticas guiadas (GOWs) dentro de películas delgadas proporciona una idea simple de la propagación de solitones tipo Kerr ya que estos sólo son estables cuando se limita el medio por el cual se propagan.

En el siguiente capítulo se describirá la propagación de solitones ópticos y se utilizará la ec. (1.4.16) para obtener la NLSE.

---

### Referencias del capítulo 1.

- [1] Boyd, Robert W. *Nonlinear Optics*. Estados Unidos, Academic Press, INC, 1992. pp. 274 – 183.
- [2] J.S. Aitchison, A.M. Weiner, Y. Silberberg, D.E. Leaird, M.K. Oliver, J.L. Jackel, and P.W.E. Smith. *Experimental observation of spatial soliton interactions*. January 1, 1991 /Vol. 16, No. 1 / OPTICS LETTERS.
- [3] Martyniuk, Alexandr. *Apuntes de Dispositivos de Microondas*. 2000.
- [4] Kolokoltsev, Oleg. *Apuntes de nuevos componentes ópticos para comunicaciones ópticas ultrarrápidas*. 2000.
- [5] Cherin, Allen. *An introduction to optical fibers*. USA, McGraw-Hill, 1983. pags. 62 – 76.
- [6] Einarsson, Göran. *Principles of lightwave communications*. Suecia, John Wiley & Sons, 1996. pp. 31 – 39.

**2. Propagación  
de pulsos y  
solitones  
ópticos**



---

## 2. Propagación de pulsos y solitones ópticos

En éste capítulo se describirán algunos de los efectos ópticos no lineales que pueden ocurrir cuando pulsos ópticos cortos se propagan en medios dispersivos no lineales. Se describe la propagación de pulsos para deducir la ecuación no lineal de Schrödinger ya que, históricamente, la obtención de la ecuación no lineal de Schrödinger se obtuvo por primera vez para solitones temporales, además, el proceso para la deducción de la NLSE es más transparente para solitones temporales. La obtención de la ecuación que rige la propagación de solitones espaciales se obtendrá en la sección 2.4.1 en donde se eliminara la dependencia del tiempo y se añadirá una dimensión espacial más que representará la difracción sufrida por el soliton a lo largo de su propagación en algún medio.

Los efectos no lineales estudiados en éste capítulo tienen, cada uno, un efecto análogo en el dominio del espacio.

El proceso no lineal mediante el cual las componentes espectrales del pulso pueden ser modificadas es el proceso llamado auto-modulación de fase (SPM) [1]. Éste proceso es de especial importancia para pulsos con picos de alta intensidad. Existen otros procesos lineales capaces de modificar la forma de los pulsos tales como la dispersión de velocidad de grupo (GVD) dentro del medio en el dominio del tiempo o la difracción en el dominio espacial. Estos procesos provocan que el pulso sufra un ensanchamiento temporal o espacial respectivamente. En general estos dos procesos ocurren simultáneamente y ambos tienden a modificar la forma de los pulsos ópticos. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, estos dos efectos contrarios pueden anularse, permitiendo la existencia de pulsos especiales conocidos como *solitones ópticos* que pueden propagarse a través de largas distancias sin cambio alguno en su forma.

## 2.1. Auto-Modulación de Fase (Self-Phase Modulation, SPM)

Es un efecto que se manifiesta debido a la dependencia del índice de refracción con respecto a la intensidad del campo aplicado en medios no lineales. La SPM es el análogo temporal del efecto conocido como auto-enfoque en el dominio del espacio.

La auto-modulación de fase (SPM) es un proceso no lineal mediante el cual la fase de un pulso óptico cambia debido a la no linealidad del índice de refracción del medio por el cual se propaga la onda.

El índice de refracción del medio cambia de la siguiente manera

$$n = n_0 + n_2 I \quad (2.1.1)$$

Para comprender mejor éste proceso de SPM, hagamos un ejemplo en el dominio del tiempo. Supongamos un pulso de la siguiente forma

$$E(z) = \tilde{A}(z, t) e^{j(\beta_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \quad (2.1.2)$$

que se propaga a través de un medio con índice de refracción

$$n(t) = n_0 + n_2 I(t) \quad (2.1.3)$$

donde

$$I(t) = \frac{n_0 c}{2\pi} |\tilde{A}(z, t)|^2 \quad (2.1.4)$$

para el análisis suponemos que el medio sólo puede cambiar la fase del pulso transmitido de la siguiente manera

$$\phi_{NL}(t) = - \frac{n_2 I(t) \omega_0 L}{c} \quad (2.1.5)$$

como resultado de la variación en el tiempo de la fase de la onda, el espectro de la onda transmitida será modificado y se ensanchará.

Para obtener una forma más intuitiva de describir el contenido espectral de la onda transmitida es útil introducir el concepto de frecuencia instantánea  $\omega(t)$  del pulso de la siguiente manera:

$$\omega(t) = \omega_0 + \delta\omega(t) \quad (2.1.6)$$

donde

$$\delta\omega(t) = \frac{d}{dt} \phi_{NL}(t) \quad (2.1.7)$$

muestra la variación de la frecuencia instantánea. El concepto de frecuencia instantánea es un concepto definido por las dos ecuaciones anteriores siempre y cuando la amplitud  $\bar{A}(t)$  varíe lentamente en comparación con el período óptico.

Se puede ejemplificar el uso de las ecuaciones de la siguiente manera. Consideremos un pulso de forma:

$$I(t) = I_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \quad (2.1.8)$$

el cambio no lineal de la fase esta dado por

$$\phi_{NL}(t) = -n_2 \frac{\omega_0}{c} L I_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \quad (2.1.9)$$

y el cambio en la frecuencia instantánea esta dado por

$$\delta\omega(t) = \frac{d}{dt} \phi_{NL}(t) = 2n_2 \frac{\omega_0}{c\tau_0} L I_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \tanh^2\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \quad (2.1.10)$$

En la figura 2.1.1 se ilustra la forma del pulso y el cambio en la frecuencia instantánea.

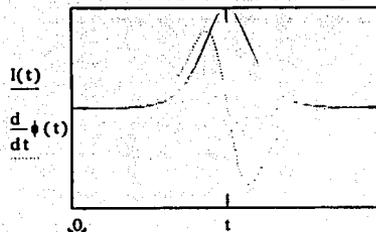


Figura 2.1.1. Forma del pulso y cambio en la frecuencia instantánea suponiendo  $n_2 > 0$  [1].

Las primeras frecuencias del pulso en entrar al medio son cambiadas a frecuencia más bajas y que las últimas frecuencias en entrar son cambiadas por altas frecuencias. La figura 2.1.2 muestra éste proceso esquemáticamente.

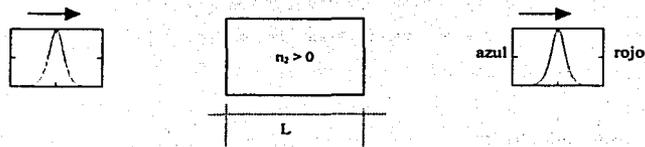


Figura 2.1.2 Esquema de la Auto-Modulación de Fase, SPM [1].

## 2.2. Ecuación de propagación de pulsos en medios no lineales (NLSE en el dominio del tiempo)

La ecuación que rige la propagación de pulsos en medios dispersivos no lineales tiene la forma (ec. 1.2.2):

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.2)$$

donde  $D$  representa el desplazamiento total del campo para ambos casos, lineal y no lineal. Suponemos un campo de la siguiente forma:

$$E(x, y, z, t) = \tilde{\lambda}(z, t) F(x, y) e^{j(\beta_0 z - \omega t)} + c.c.$$

donde

$$\beta_0 = \frac{n_0(\omega_0) \cdot \omega_0}{c}$$

Aplicando la transformada de Fourier a  $E(z, t)$  y a  $D(z, t)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{E(x, y, z, t)\} &= E(x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, z, t) e^{-j\omega t} dt \\ \mathfrak{F}\{D(x, y, z, t)\} &= D(x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} D(x, y, z, t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Las amplitudes  $E(x, y, z, \omega)$  y  $D(x, y, z, \omega)$  están relacionadas de la siguiente manera:

$$D(x, y, z, \omega) = \varepsilon(\omega) E(x, y, z, \omega) \quad (2.2.3)$$

donde  $\varepsilon(\omega)$  es la constante dieléctrica efectiva que describe las contribuciones a la respuesta para los casos lineal y no lineal.

Para obtener la solución de la ecuación (1.2.2) sustituimos las ecuaciones (2.2.2) y (2.2.3), por lo tanto

$$\frac{\partial^2 E(x, y, z, \omega)}{\partial z^2} + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} E(x, y, z, \omega) = 0 \quad (2.2.4)$$

ahora podemos escribir ésta ecuación en términos de la transformada de Fourier de  $\tilde{\lambda}(z, t)$  dada por

$$\mathfrak{F}\{\tilde{\lambda}(z, t)\} = A(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}(z, t) e^{j\omega t} dt \quad (2.2.5)$$

se tiene

$$\mathfrak{T}\{E(x, y, z, t)\} = e^{j\beta_0 z} \cdot \mathfrak{T}\{A(z, t)e^{-j\omega t}\} \cdot F(x, y) \quad (2.2.6)$$

y de la propiedad de corrimiento de frecuencia de la transformada de Fourier se obtiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\{E(x, y, z, t)\} &= e^{j\beta_0 z} \cdot A(z, \omega - \omega_0) F(x, y) \\ \therefore E(x, y, z, \omega) &= A(z, \omega - \omega_0) \cdot F(x, y) \cdot e^{j\beta_0 z} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

ésta última ecuación (2.2.7) la sustituimos en la ecuación (2.2.4); debemos recordar que estamos haciendo el análisis para amplitudes que varían lentamente respecto del período de la onda, por lo que  $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$  puede ser eliminada en el desarrollo, por lo tanto

$$\nabla_{\perp} F + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \beta^2]F = 0 \quad (2.2.7a)$$

$$2j\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \left( \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \beta_0^2 \right) A = 0 \quad (2.2.7b)$$

La ec. (2.2.7a) tiene la forma de la ecuación de Helmholtz con  $\Delta\varepsilon$  como se analizo en el capítulo 1. Esta ecuación describe las perturbaciones en  $\beta$  y la distribución transversal del campo  $F$ . La ec. (2.2.7b) describe las propiedades no lineales de propagación de las ondas ópticas guiadas (GOWs) y de la formación de solitones.

haciendo  $\tilde{\beta}^2(\omega) = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$  obtenemos

$$2j\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2)A = 0 \quad (2.2.8)$$

podemos simplificar  $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 = 2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$  y la ecuación queda como

$$\frac{\partial A(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} - j(\tilde{\beta} - \beta_0)A(z, \omega - \omega_0) = 0 \quad (2.2.9)$$

Se debe recordar que las ondas se propagan en un medio dispersivo no lineal, por lo tanto

$$\tilde{\beta} = \beta(\omega) + \Delta\beta_{NL} \quad (2.2.10)$$

donde

$\beta(\omega)$  representa la dispersión del medio y,

$\Delta\beta_{NL}$  representa los efectos no lineales

Para recordar que  $\beta(\omega)$  depende de la frecuencia y de la intensidad de la onda óptica es mejor expandir en serie de Taylor truncada alrededor de la frecuencia portadora  $\omega_0$  de la forma

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 \quad (2.2.11)$$

sabemos que  $\beta_1$  es el recíproco de la velocidad de grupo y  $\beta_2$  es una medida de la dispersión de la velocidad de grupo (GVD) y están definidas de la siguiente manera

$$\beta_1 = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{v_g(\omega_0)}, \quad \beta_2 = \left( \frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{v_g(\omega_0)} \right) = -\frac{1}{v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega} \quad (2.2.12)$$

En la figura 2.2.1 se muestra esquemática el hecho de que las longitudes de onda más largas de un pulso se propagan más rápido que las longitudes de onda más cortas cuando la dispersión de velocidad de grupo  $\beta_2 > 0$  y viceversa.

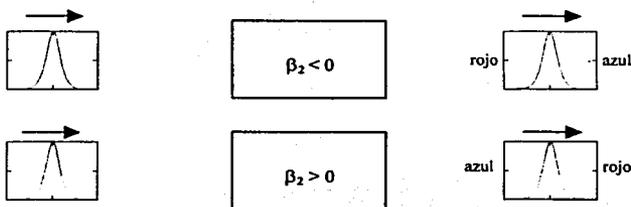


Figura 2.2.1. Esquema del alargamiento del pulso debido a GVD [1].

Ahora podemos sustituir la ecuación (2.2.10) en la ecuación (2.2.9), tenemos

$$\frac{\partial A}{\partial z} - j\Delta\beta_{NL}A - j\beta_1(\omega - \omega_0)A - j\frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 A = 0 \quad (2.2.13)$$

Se ha hecho una transformación del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, sin embargo, requerimos ésta ecuación en el dominio del tiempo, por lo tanto, aplicando la transformada inversa de Fourier [2] a cada uno de los miembros de la ecuación y recordando que

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right\} = (j\omega)^n F(\omega), \text{ se tiene}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - j\Delta\beta_{NL}A + \beta_1 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + j\frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} = 0$$

reacomodando términos se tiene

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + j\frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} - j\Delta\beta_{NL}\tilde{A} = 0 \quad (2.2.14)$$

Con frecuencia ésta ecuación es simplificada por medio de una transformación de coordenadas, en particular se introduce un retardo  $\tau$  en el tiempo mediante la siguiente sustitución

$$\tau = \frac{t}{T_0} - \frac{z}{T_0 v_r} = \frac{t - \beta_1 z}{T_0} \quad (2.2.15)$$

y se describe el pulso óptico por medio de  $\tilde{A}(z, t) = \sqrt{P_0}u(z, \tau)$ , que representa la amplitud normalizada.

Para realizar el cambio de variable se utiliza la regla de la cadena como se muestra

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{T_0} \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{T_0} \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

y análogamente  $\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{T_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$ , y por lo tanto la ecuación (2.2.14) se transforma en

$$\frac{\partial u}{\partial z} + j\frac{1}{2}\frac{\beta_2}{T_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - j\Delta\beta_{NL}u = 0 \quad (2.2.16)$$

finalmente, se expresa el término no lineal que contribuye a la constante de propagación como en la ec. (1.4.14)

$$\Delta\beta_{NL} = \frac{k_0^2}{2\beta} \frac{\iint F^* \Delta\epsilon F ds}{\iint F^* F ds}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon &\approx 2nn_2|\bar{u}|^2 \\ \Delta\beta_{NL} &= \frac{nk_0^2}{\beta} \frac{\iint F^* n_2 |\bar{u}|^2 F ds}{\iint F^* F ds} = \gamma|\bar{u}|^2 \\ \Delta\beta_{NL}P_0 &= \gamma P_0 |\bar{u}|^2 \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + j \frac{1}{2} \frac{\beta_2}{T_0^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} = j\gamma P_0 |\bar{u}|^2 \bar{u} \quad (2.2.18)$$

La ecuación (2.2.18) describe la propagación de pulsos a través de medios dispersivos no lineales. El segundo término del miembro de la izquierda de la ecuación muestra como los pulsos tienden a ensancharse debido a la dispersión de la velocidad de grupo y que el término del miembro derecho muestra como los pulsos tienden a ensancharse debido a la auto-modulación de la fase. A ésta ecuación se le conoce con el nombre de *ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE)*.

Cualquiera de los dos efectos, GVD o SPM puede dominar sobre el pulso mientras se propaga a lo largo de una guía o de una fibra óptica. Un efecto domina sobre el otro dependiendo del ancho inicial  $T_0$  y de la potencia  $P_0$  del pulso incidente. El útil introducir dos longitudes,  $L_D$  es la longitud para la cual la dispersión es significativa y  $L_{NL}$  es la longitud para la cual los efectos no lineales son significativos.

Podemos describir la ecuación (2.2.18) como

$$j \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{1}{L_{NL}} |u|^2 u \quad (2.2.19)$$

donde  $\text{sgn}(\beta_2) = \pm 1$  dependiendo del signo del parámetro de la GVD y

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}, \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (2.2.20)$$

Estas dos distancias nos permiten saber las longitudes para las cuales estos efectos son significativos para la propagación de pulsos a lo largo de fibras de longitud  $L$ .

El comportamiento del pulso durante la propagación puede clasificarse en cuatro categorías dependiendo de las magnitudes relativas entre  $L_D$ ,  $L_{NL}$  y  $L$ . *Es muy importante mencionar que un soliton puede formarse cuando  $L_D = L_{NL}$ .*

$$L \ll L_{NL} \text{ y } L \ll L_D$$

- Ninguno de los dos efectos es significativo.
- Ambos miembros de la ecuación pueden eliminarse y observar que el pulso mantiene su forma durante su propagación.
- Útil para comunicaciones ópticas.

$$L \ll L_{NL} \text{ y } L \geq L_D$$

- Último término despreciable de la ec. (2.2.19)
- Pulso gobernado por la GVD
- Efectos no lineales despreciables

$$L \ll L_D \text{ y } L \geq L_{NL}$$

- Dispersión despreciable en comparación con la no linealidades
- Pulso gobernado por la SPM que resulta en el ensanchamiento espectral del pulso

$$L \geq L_{NL} \text{ y } L \geq L_D$$

- Efectos de dispersión y no linealidades actúan de manera conjunta
- Se pueden excitar solitones para dispersión anómala ( $\beta_2 < 0$ )
- Para  $\beta_2 > 0$ , GVD y SPM se utilizan para efectos de compresión de pulsos.

Podemos realizar un análisis de la ecuación (2.2.19) mediante la separación de los efectos lineales y no lineales. Esta separación implica un análisis para cuando los efectos de dispersión son más significativos que sus contrapartes no lineales ( $\gamma = 0$ ) y para cuando las no linealidades son más significativas ( $\beta_2 = 0$ ).

Esta separación facilita la programación en computadora de la NLSE. Para la programación en computadora de la propagación de solitones dentro de una guía de onda se simulan los efectos de dispersión y los no lineales de manera alterna, es decir, se realizan los cálculos correspondientes para los efectos de dispersión y en el siguiente paso se realizan para los efectos no lineales. Los cálculos se realizan para cortes transversales con una longitud mucho menor a la longitud de onda de la onda propagada ( $L_{\text{corte transversal}} \ll \lambda$ ).

Este método es utilizado en el software "OpticScheme" y es conocido con el nombre de split-step Method. Es un método muy conocido para la simulación de la propagación de solitones debido a la efectividad en los cálculos.

#### *Análisis de la NLSE considerando efectos de dispersión ( $\gamma = 0$ )*

Para dispersión anómala, la ecuación (2.2.19) queda como

$$j \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tau^2} = 0 \quad (2.2.21)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación paraxial que gobierna la difracción de la luz y son idénticas cuando la difracción ocurre en una sola dirección transversal con  $\beta_2 = \frac{\lambda}{2\pi}$ . Por esta razón, los efectos de dispersión temporales tiene una fuerte analogía con los efectos de difracción espaciales.

La ecuación se resuelve por el método de Fourier, aplicando la transformada de Fourier a la ec. (2.2.21)

$$\frac{\partial U}{\partial z} - j \frac{1}{2} \beta_2 \omega^2 U = 0 \quad (2.2.22)$$

cuya solución es

$$U(z, \omega) = U(0, \omega) e^{j \frac{1}{2} \beta_2 \omega^2 z} \quad (2.2.23)$$

Está ec. muestra el cambio en la fase producido por la GVD en cada componente espectral del pulso de tal manera que depende de la frecuencia y de la distancia de propagación.

Los cambios en la fase no afectan el espectro del pulso pero pueden modificar su forma.

La solución en el dominio del tiempo la encontramos aplicando la transformada inversa de Fourier a la ec. (2.2.23) como se muestra a continuación

$$\bar{u}(z, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(0, \omega) e^{(j\frac{1}{2}\beta_2 \omega^2 z - j\omega \tau)} d\omega \quad (2.2.24)$$

donde  $U(0, \omega)$  es la transformada de Fourier del campo incidente en  $z = 0$  y esta dada por

$$U(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(0, \tau) e^{j\omega \tau} d\tau \quad (2.2.25)$$

Las ecs. (2.2.24) y (2.2.25) pueden usarse para pulsos de entrada de cualquier forma.

Como ejemplo se hará el análisis para un pulso Gaussiano cuyo campo incidente tiene la siguiente forma

$$\bar{u}(0, \tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2T_0^2}\right) \quad (2.2.26)$$

podemos utilizar las ecuaciones (2.2.23) a la ec. (2.2.25), además de utilizar el siguiente par de transformada de Fourier [3] para un pulso Gaussiano

$$x(t) = Ae^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \Rightarrow X(\omega) = A\tau e^{-\pi\left(\tau\frac{\omega}{2\pi}\right)^2} \quad (2.2.27)$$

por lo tanto, si manipulamos la ec. (2.2.26) para que quede de la siguiente forma

$$\bar{u}(0, \tau) = \exp\left[-\pi\left(\frac{\tau}{\sqrt{2\pi}T_0}\right)^2\right] \quad (2.2.28)$$

y aplicando la ec. (2.2.27) se obtiene

$$U(0, \omega) = \sqrt{2\pi}T_0 e^{-\frac{1}{2}\omega^2 T_0^2} \quad (2.2.29)$$

sustituyendo la ec. (2.2.29) en la ec. (2.2.23) y reordenando para obtener una forma similar a la ec. (2.2.27) se tiene

$$U(z, \omega) = \frac{\sqrt{2\pi}T_0}{\sqrt{2\pi}\sqrt{T_0^2 - j\beta_2 z}} \sqrt{2\pi}\sqrt{T_0^2 - j\beta_2 z} \cdot \exp\left[-\pi\left(\sqrt{2\pi}\sqrt{T_0^2 - j\beta_2 z}\frac{\omega}{2\pi}\right)^2\right] \quad (2.2.30)$$

y utilizando la ec. (2.2.27) de manera inversa tenemos

$$\bar{u}(z, \tau) = \frac{T_0}{\sqrt{T_0^2 - j\beta_2 z}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau^2}{T_0^2 - j\beta_2 z}\right)\right] \quad (2.2.31)$$

éste pulso gaussiano mantiene su forma durante su propagación, sin embargo, su ancho se incrementa y se convierte en

$$\tau_1 = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2} \quad (2.2.32)$$

si separamos la ec. (2.2.31) en magnitud y ángulo se tiene

$$\bar{u}(z, \tau) = |\bar{u}(z, \tau)| \cdot e^{j\phi(z, \tau)} \quad (2.2.33)$$

La figura 2.2.2 muestra el ensanchamiento de  $|\bar{u}(z, \tau)|^2$  para distancias de propagación más largas.

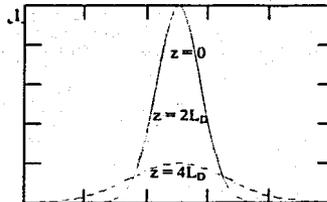


Figura 2.2.2. Dispersión inducida de un pulso Gaussiano para  $z=0$ ,  $z=2L_D$  y  $z=4L_D$  [1].

La fase del pulso queda de la siguiente manera

$$\phi(z, \tau) = -\frac{\text{sgn}(\beta_2) \left(\frac{z}{L_D}\right)}{1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2} \frac{\tau^2}{T_0^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{z}{L_D}\right) \quad (2.2.34)$$

Esta dependencia del tiempo en la fase implica que la frecuencia instantánea difiere a lo largo del pulso a partir de la frecuencia central  $\omega_0$ . La diferencia  $\delta\omega$  es la derivada de  $\phi$  respecto del tiempo y está dada por

$$\delta\omega = -\frac{\partial}{\partial t} \phi(z, \tau) = \frac{2 \operatorname{sgn}(\beta_2) \left( \frac{z}{L_D} \right) \tau}{1 + \left( \frac{z}{L_D} \right)^2} \frac{\tau}{T_0^2} \quad (2.2.35)$$

La ec. (2.2.35) muestra que la frecuencia cambia linealmente a lo largo del pulso. Este cambio se le conoce con el nombre de frecuencia chirp lineal.

### *Análisis de la NLSE considerando efectos no lineales ( $\beta_2 = 0$ )*

La parte no lineal de la ec. (2.2.19) es de la forma

$$j \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{1}{L_{NL}} |\bar{u}|^2 \bar{u} = 0 \quad (2.2.36)$$

si sustituimos la ec. (2.2.33) en la ec. (2.2.36) y además sabemos que  $\frac{\partial |\bar{u}|}{\partial z} = 0$  se obtiene

$$\frac{\partial \phi_{NL}}{\partial z} = \frac{1}{L_{NL}} |\bar{u}|^2 \quad (2.2.37)$$

y resolviendo para el cambio de fase no lineal

$$\phi_{NL} = -j \frac{1}{L_{NL}} |\bar{u}(0, \tau)|^2 z \quad (2.2.38)$$

La ec. (2.2.38) muestra que la SPM provoca que el cambio de fase dependa de la intensidad mientras que la forma del pulso  $|\bar{u}(z, \tau)|^2$  permanece sin cambios. Mientras más distancia recorra el pulso ( $z$ ), el cambio de fase también se incrementará. La dependencia del tiempo de  $\delta\omega(\tau)$ , es decir, la frecuencia instantánea puede verse como frecuencia chirp. La frecuencia chirp se induce por la SPM e incrementa su magnitud al incrementar la distancia de propagación.

---

Para la creación de un soliton es necesario que exista un balance entre efectos lineales (GVD) y efectos no lineales (SPM) en el dominio del tiempo. El caso para la creación de solitones espaciales es similar, es decir, debe haber balance entre la difracción y el auto-enfoque, efecto análogos a GVD y SPM en el espacio respectivamente.

El balance debe alcanzarse cuando  $L_{NL} = L_D$ . De la ec. (2.2.20) podemos deducir que  $P_0 = \frac{|\beta_2|}{\gamma T_0^2}$ , ecuación que nos da el umbral de potencia necesario para la formación de solitones temporales en función de la duración del pulso. Podemos observar que para pulsos cortos, la potencia necesaria para la formación de solitones temporales aumenta.

### 2.3. Formación de solitones ópticos temporales en fibras ópticas.

Hemos visto que es posible que los efectos ocasionados por la GVD sean compensados por los efectos no lineales debidos a la SPM. Bajo ciertas condiciones estos efectos pueden ser compensados completamente y los pulsos que se propagan en medios dispersivos no lineales permanecen sin cambio en su forma. A estos pulsos se les conoce como *solitones ópticos*.

En el sub-capítulo anterior obtuvimos y analizamos la ec. (2.2.19) (NLSE). Como se menciono anteriormente los solitones temporales sólo pueden crearse cuando  $L_D = L_{NL}$ .

Los solitones temporales han sido estudiados ampliamente durante los últimos años en muchos campos de la física y la ingeniería, en especial en el campo de las comunicaciones ópticas por fibras ópticas debido al gran potencial para sus aplicaciones. Aplicaciones como enlaces punto a punto a grandes distancias sin necesidad de poner repetidores entre puntos, además de aumentar considerablemente la velocidad de transmisión.

*Este sub-capítulo tiene como objetivo mostrar la región de dispersión en la cual se pueden excitar solitones en medios como fibras ópticas.*

Pulsos de forma secante hiperbólica (sech) como pulso de la forma mostrada en la ec (2.3.1), satisfacen la ecuación de propagación (2.2.19) (NLSE).

$$U(z, \tau) = u^0 \operatorname{sech} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) e^{i\kappa \tau} \quad (2.3.1a)$$

donde la amplitud  $u^0$  y el ancho del pulso  $\tau_0$  se relacionan mediante

$$|u^0|^2 = \frac{-\beta_2}{\gamma \tau_0^2} = \frac{-\beta_2 c}{2n_2 \omega \tau_0^2} \quad (2.3.1b)$$

y donde

$$\kappa = -\frac{\beta_2}{2\tau_0^2}$$

representa el cambio de fase experimentado por el pulso durante la propagación.

La condición que se muestra en la ecuación (2.3.1b) debe cumplirse para que la forma del pulso en la ecuación (2.3.1a) sea la de un pulso real, es decir,  $\beta_2$  y  $n_2$  deben tener signos opuestos, de tal manera que la intensidad  $|u_0|^2$  y el cuadrado del ancho del pulso  $\tau_0^2$  sean ambos positivos.

De hecho,  $\beta_2$  y  $\gamma$  en la ecuación no lineal de Schrödinger (2.2.19) deben tener signos contrarios de tal manera que la GVD y SPM puedan compensarse.

La expresión (2.3.1) es la solución de la NLSE para el soliton fundamental. La solución exacta para solitones de mayor orden fue encontrada por primera vez por V.E. Zakharov y A.B. Shabat en 1972. Encontraron la solución exacta para solitones de mayor orden reduciendo la NLSE a un problema de espacamiento inverso (inverse scattering problem) para ciertos operadores diferenciales lineales.

La condición en la cual  $\beta_2$  y  $\gamma$  son de signos contrarios puede escribirse como

$$\gamma \cdot \beta_2 < 0$$

condición conocida como el criterio de Lighthill.

Ésta condición la podemos encontrar en fibras ópticas. Para éste caso, la no linealidad del índice de refracción ocurre como resultado de la polarización electrónica y por tanto  $n_2$  es positivo. El parámetro  $\beta_2$  mide la dispersión de velocidad de grupo y es positiva para la luz visible, sin embargo, se hace negativa para longitudes de onda mayores aproximadamente a 1.3 [ $\mu\text{m}$ ].

En la figura 2.3.1 se muestra la zona en la cual podemos excitar solitones ópticos.

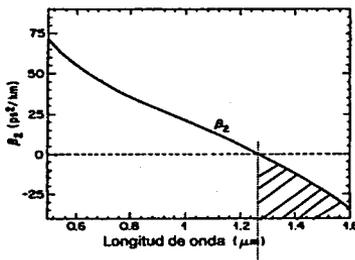


Figura 2.3.1. Zona para la creación de solitones.  
Representación gráfica de  $\beta_2$  en función de la longitud de onda [4].

---

## 2.4. Ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) para solitones espaciales

Como vimos en sub-capítulos anteriores, los solitones espaciales están controlados por el balance entre efectos de difracción y efectos no lineales así como los solitones temporales están regidos por el balance entre dispersión y no linealidades.

Hemos realizado un análisis para solitones temporales debido a la claridad con la que se pueden comprender los conceptos generales en la propagación de solitones, sin embargo, la compuerta lógica óptica propuesta en éste trabajo de tesis está basada en solitones espaciales por lo que es necesario obtener una forma de la NLSE que permita el análisis para solitones espaciales, es decir, debemos deducir la NLSE en el dominio del espacio.

Los solitones espaciales pueden excitarse en películas delgadas de GaAs y en otras estructuras de dimensiones pequeñas en las cuales la difracción es significativa. La razón por la cual los solitones espaciales se limitan a guías de ondas planas o películas delgadas es que se elimina una dimensión en el proceso. En la figura 2.4.1a se muestra una guía de onda plana de espesor  $2d$  en donde el rayo es confinado en una sola dirección y los efectos de difracción y de auto-enfoque se presentan en la dirección transversal. Los solitones espaciales dependen del equilibrio entre efectos de difracción y de las no linealidades para mantener su forma durante la propagación.

*Lo importante de limitar las dimensiones del medio en el cual los solitones espaciales se propagan, es que para estas dimensiones los rayos son estables.*

Debemos observar que para que los pulsos se dispersen se requieren que estos se propaguen en medios, sin embargo, los rayos sufren difracción incluso en el vacío. Esto significa que mientras para pulsos, la GVD juega un papel importante en las interacciones entre solitones temporales, no lo es para solitones espaciales. Así pues, para solitones temporales, las velocidades de grupo tienen que acoplarse para cualquier tipo de interacción. Esta restricción no es válida para solitones espaciales por lo que estos pueden interactuar sin importar el ángulo en que lo hagan.

A partir de la ecuación no lineal de Schrödinger en su forma completa podemos encontrar la ecuación que rige la propagación de solitones espaciales.

En éste sub-capítulo se presenta un procedimiento simple y transparente para obtener la NLSE en su forma completa [5], es decir, la NLSE en el dominio del tiempo y del espacio.

La finalidad de éste sub-capítulo es el estudio de solitones espaciales y para ello se requiere mostrar los pasos a seguir para deducir la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) en el dominio del espacio.

La figura 2.4.1 muestra el sistema de coordenadas utilizado para deducir la NLSE y para encontrar la solución para solitones espaciales fundamentales; en ella podemos observar la difracción (fenómeno análogo al de dispersión en el dominio del tiempo) que sufre el rayo al propagarse en medios dispersivos como películas delgadas.

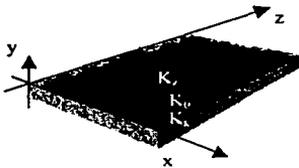


Figura 2.4.1a Sistema de coordenadas para el análisis de propagación en medios no lineales de solitones espaciales fundamentales.

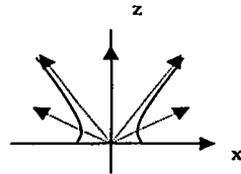


Figura 2.4.1b Difracción de la onda en la propagación

### 2.4.1. Solución de la NLSE para solitones espaciales fundamentales

Debido a que el objetivo de éste sub-capítulo es el de obtener la ecuación que rige la propagación de solitones espaciales, describiremos una manera transparente de deducir la NLSE en forma completa (en el dominio del tiempo y del espacio). A partir de ella, obtendremos la ecuación para solitones espaciales y la resolveremos considerando guías de onda delgadas.

Si consideramos una onda plana, podemos definir los siguientes parámetros:

$u = (x, z, t)$ : amplitud compleja.

$k_x, \omega, |u|^2$  son tratadas como variables independientes.

de la figura 2.4.1a vemos que

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2$$

donde  $\bar{k} = (k_x, k_z)$  (número de onda perturbado)

además, sabemos que  $k_z = f(k_x, \omega, |u|^2)$ .

También sabemos que existe una zona en donde la difracción no es significativa, es una zona cercana a la zona de excitación conocida como zona de Fresnel, por lo tanto

$$\bullet \quad k_0 = (k_{x0}, k_{z0}) = (0, k_0)$$

si se expande  $k_z$  alrededor de  $(k_{x0}, k_{z0}, \omega_0)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \Delta k_z = k_z - k_{z0} &= \left( \frac{\partial k_z}{\partial k_x} \right)_{k_0} \Delta k_x + \left( \frac{\partial k_z}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \Delta \omega + \left( \frac{\partial k_z}{\partial |u|^2} \right)_{|u|^2=0} |u|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} \right)_{k_0} \Delta k_x^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 k_z}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} \Delta \omega^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x \partial \omega} \right)_{\omega_0, k_0} \Delta k_x \Delta \omega + \dots \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial k_x}{\partial k_x}\right)_{k_x} &= -\frac{k_x}{k_x} = 0, & \left(\frac{\partial k_x}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} &= \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{v_g}, \\ \left(\frac{\partial k_x}{\partial |u|^2}\right)_{u=0} &= \left(\frac{\partial k}{\partial |u|^2}\right)_{u=0}, & \left(\frac{\partial^2 k_x}{\partial k_x^2}\right)_{k_x} &= -\frac{1}{k_x} - \frac{k_x^2}{k_x^3} = -\frac{1}{k_0}, \\ \left(\frac{\partial^2 k_x}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0} &= \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0} = \beta_2 \text{ (GVD)}, & \left(\frac{\partial^2 k_x}{\partial k_x \partial \omega}\right)_{\omega_0, k_0} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial k_x}{\partial k_x}\right) = 0 \end{aligned}$$

El análisis de la expansión de la ecuación de dispersión anterior se hizo para el punto de operación  $k_x = k_{x0} = k$ ,  $k_x = 0$  y  $\omega = \omega_0$  ( $\omega_0, k_0$ ). Éste procedimiento es parecido al procedimiento realizado para expandir en serie de Taylor las características de un dispositivo electrónico alrededor de su punto de operación.

Ahora, si sustituimos las ecs. anteriores en la ec. (2.4.1) tenemos

$$\Delta k_x - \frac{\Delta \omega}{v_g} + \frac{1}{2k_0} \Delta k_x^2 - \frac{\beta_2}{2} \Delta \omega^2 - |u|^2 \frac{\partial k}{\partial |u|^2} = 0 \quad (2.4.2)$$

Por otra parte, para obtener la NLSE completa, debemos utilizar las siguientes conversiones:

$$\Delta \omega = j \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Delta k_x = -j \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Delta k_x = -j \frac{\partial}{\partial z}$$

sustituyendo estos parámetros en la ecuación (2.4.2) tenemos

$$j \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial k}{\partial |u|^2} \right)_{u=0} |u|^2 u = 0 \quad (2.4.3)$$

ecuación conocida como la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE).

Ya que queremos obtener la ecuación para solitones espaciales, hacemos que no haya variaciones temporales  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  y debido a que se tratan de rayos continuos  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$ , por lo que la ec. (2.4.3) puede escribirse como

$$j2k_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2k_0 \left( \frac{\partial k}{\partial |u|^2} \right)_{u=0} |u|^2 u = 0 \quad (2.4.4)$$

para la obtención de la solución del soliton fundamental hacemos que

$$j \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0 \quad (2.4.5)$$

En la literatura existen artículos sobre la obtención de la solución general de la ec. (2.4.5), sin embargo, hemos decidido mostrar en éste sub-capítulo la solución para el soliton fundamental ya que es fácil de obtener y físicamente transparente.

Comenzamos por sustituir

$$u(x, z) = \bar{u}(x, z) e^{j[\theta_1(x) + \theta_2(z)]} \quad (2.4.6)$$

en la ec. (2.4.5), donde  $\bar{u}(x, z)$  es la parte real de la amplitud y  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son funciones de fase, se obtiene

$$-\bar{u} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + j \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + j \bar{u} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - \bar{u} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right)^2 + j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + j \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\bar{u}^3 = 0 \quad (2.4.7)$$

e igualando la parte real e imaginaria de la ec. (2.4.7) a cero se tiene

$$-\bar{u} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \bar{u} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 2\bar{u}^3 = 0 \quad (2.4.8a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{u} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0 \quad (2.4.8b)$$

sabemos que el perfil del soliton es constante, es decir, la distribución del campo no cambia a lo largo del eje z, por lo tanto,  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0$  y la ec. (2.4.8b) puede escribirse como

$$u \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = 0 \quad (2.4.8b')$$

y obtenemos un sistema como el que se muestra a continuación

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u^3 - \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)^2 u - \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial z}\right) u = 0 \\ u \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Para la parte imaginaria se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} u + 2 \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) &= 0 \\ u^2 \frac{\partial \theta_x}{\partial x} &= C \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

multiplicando la parte real por  $\frac{1}{u}$  y empleando el método de separación de variables se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u^3 - \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)^2 u - \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial z}\right) u = 0 \\ \frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u^2 - \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)^2 = K \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial z} = K \end{cases} \quad (2.4.11)$$

y de la ec. (2.4.10) sabemos que  $\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{C}{u^2}$ , por lo que la ec. (2.4.11) se escribe como

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u^2 - \frac{C^2}{u^4} = K \quad (2.4.12)$$

Si  $x \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0$  y  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow 0$ . Por lo que  $C = 0$  y la ec. (2.4.12) queda como

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u^2 = K \quad (2.4.13)$$

La ec. (2.4.13) se resuelve con el Método de la primera Integral

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Ku - 2u^3 \quad (2.4.14)$$

multiplicando la ec. (2.4.14) por  $2 \frac{\partial u}{\partial x}$ , se tiene

$$2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2Ku \frac{\partial u}{\partial x} - 4u^3 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4.15)$$

sabemos que

$$\begin{cases} \text{a) } \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{b) } \frac{\partial}{\partial x} [u^2] = 2u \frac{\partial u}{\partial x} \\ \text{c) } \frac{\partial}{\partial x} [u^4] = 4u^3 \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (2.4.16)$$

por lo que la ec. (2.4.15) puede describirse como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = K \frac{\partial}{\partial x} [u^2] - \frac{\partial}{\partial x} [u^4] \quad (2.4.17)$$

e integrando la ec. (2.4.17) con respecto a  $x$  se tiene

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = Ku^2 - u^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{Ku^2 - u^4}$$

$$\partial u = \sqrt{Ku^2 - u^4} \partial x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\sqrt{Ku} \sqrt{1 - \left( \frac{u}{\sqrt{K}} \right)^2}} = \partial x$$

completando la diferencial e integrando se obtiene

$$\operatorname{sech}^{-1} \left( \frac{u}{\sqrt{K}} \right) = \sqrt{K} x$$

$$u(x) = \sqrt{K} \operatorname{sech}(\sqrt{K} x) \quad (2.4.18)$$

La ecuación (2.4.18) describe la distribución transversal del soliton espacial fundamental. En la figura 2.4.1.1 se muestra el perfil de éste soliton espacial fundamental.

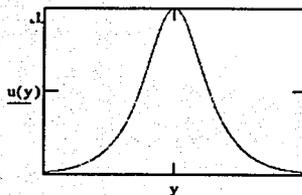


Figura 2.4.1.1 Perfil del soliton espacial fundamental.

De la ec. (2.4.11) se tiene que  $\frac{\partial \theta_x}{\partial z} = K$ , por lo que  $\theta_x(z) = Kz + \theta_{x0}$ . Sin embargo, podemos hacer  $\theta_{x0} = 0$  sin perder la generalidad.

Por lo que,

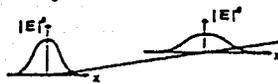
$$u(x, z) = \sqrt{K} \operatorname{sech}(\sqrt{K}x) e^{iKz} \quad (2.4.19)$$

es la forma clásica de la solución para el soliton espacial fundamental.

La forma del soliton de la ec. (2.4.19) se propaga sin cambio alguna en su forma, sin embargo, se trata sólo un elemento del conjunto de soluciones que tiene la ec. (2.4.5). Aunque los solitones de mayor orden regresan a su estado original periódicamente, no representan un ningún interés para nuestros fines ya que el soliton fundamental es el único que posee aplicaciones tecnológicas.

En la figura 2.4.1.2 se resume el efecto físico de creación de un soliton espacial. Debido a que la NLSE puede escribirse de varias formas, en la figura 2.4.1.3 se muestra otra forma de visualizar la creación de solitones espaciales para personas familiarizadas con solitones temporales (pulsos).

- o Ensanchamiento debido a la difracción



- o Auto-enfoque debido a las no linealidades



- o Ajuste de la intensidad y forma del rayo

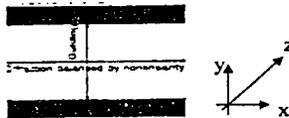
Se alcanza un balance entre efectos de difracción y no lineales



Soliton espacial

Figura 2.4.1.2 Ilustración del proceso de formación de un soliton espacial.

En la figura 2.4.1.3,  $L_D$  es la distancia de difracción, es decir, la distancia en la cual el rayo se difracta, distancia aproximadamente igual al doble de su ancho inicial.  $L_{NL}$  es el factor de la distancia en la que los efectos no lineales son significativos. La relación  $L_D/L_{NL} = 1$  establece la condición de potencia requerida para la creación del soliton espacial fundamental.



z dirección de propagación

$$\text{NLSE} \quad j \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{L_D}{L_{NL}} |u|^2 u = 0$$

donde

$$L_D = kD^2$$

$D$  = ancho del rayo

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P}$$

$\gamma$  = coeficiente no lineal

$P$  = potencia

$$Z_s = \frac{z}{2L_D} = \frac{\pi}{2kD^2}$$

periodo del soliton

Figura 2.4.1.3 NLSE para solitones espaciales

El período del soliton definido en la figura 2.4.1.3, es la distancia a la que repiten solitones de mayor orden. Es interesante notar que si nombramos  $N = 1$  al soliton fundamental,  $N = 2$  al de segundo orden y así sucesivamente se obtiene  $\frac{L_D}{L_{NL}} = N^2$ . Un medio real posee absorción con cierta atenuación  $\alpha_{dB}$  por lo que se debe definir una distancia de absorción  $L_A$ .

La interacción entre éstas tres distancias  $L_D$ ,  $L_{NL}$ ,  $L_A$  puede mostrarse en la figura 2.4.1.4 como un diagrama de cifra de mérito (figure of merit). En la figura,  $L$  es la longitud de la guía,  $W$  es el ancho de la guía,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío y  $\omega$  la velocidad angular.

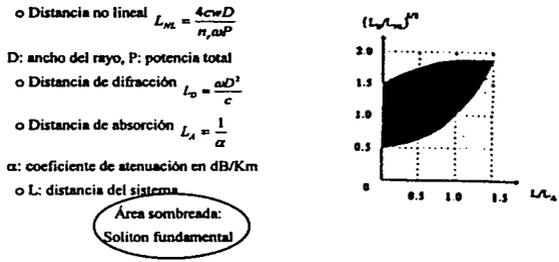


Figura 2.4.1.4 Proceso de creación del soliton espacial fundamental.

Podemos analizar que si el medio no posee absorción,  $L_A \rightarrow \infty$  y,  $L/L_A \rightarrow 0$ . Por lo que el soliton fundamental puede crearse para  $0.5 < \left(\frac{L_D}{L_{NL}}\right)^2 < 1.5$ . El área sombreada hace referencia solamente al soliton fundamental y representa lo que pasaría si aumentamos la absorción del medio. Se requerirá de aumentar la potencia para crear el soliton fundamental si  $L_A$  es finita y  $L/L_A > 0$ . La región sombreada alcanza el valor más alto en  $\left(\frac{L_D}{L_{NL}}\right)^2$  y continua aumentando hasta que las regiones sombreadas se cruzan alcanzando solamente el soliton de segundo orden ( $N = 2$ ).

Los solitones espaciales en películas delgadas de semiconductores pueden interactuar de diferentes maneras, una de las cuales es utilizada para la propuesta de compuerta lógica óptica en éste trabajo de tesis. Se trata de una interacción cuando dos solitones se hacen cruzar uno al otro emergiendo de ésta interacción con un desplazamiento espacial, mecanismo que ha sido utilizado para una conmutación óptica. Un análisis más detallado de éste tipo de interacciones entre solitones espaciales se realizará en el capítulo 4.

---

## **Conclusiones del capítulo 2.**

Aunque la compuerta lógica óptica esta basada en la interacción entre solitones espaciales tipo Kerr, se presentó un análisis completo de los efectos ópticos que ocurren cuando pulsos ópticos se propagan en medios dispersivos no lineales.

Es posible que los efectos lineales (GVD) sean compensado por los efectos no lineales (SPM) y que cuando esto ocurre, los pulsos que se propagan por estos tipos de medio se les conoce con el nombre de *solitones ópticos*.

Un análisis para solitones espaciales tipo Kerr se obtuvo a partir de la NLSE en su forma completa eliminando la dependencia del tiempo y limitando las dimensiones físicas del medio.

En el siguiente capítulo se describirá brevemente el método de propagación de rayos (BPM) utilizado para los experimentos numéricos.

---

## Referencias del capítulo 2.

- [1] Boyd, Robert W., *Nonlinear Optics*. Estados Unidos, Academic Press, INC, 1992. pp. 274 – 283.
- [2] O'Neil Peter. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. México, CECSA, 1996. pp. 260 – 271.
- [3] Reyes, Jesús. *Apuntes de Comunicaciones Analógicas*. 1998
- [4] Agrawal, Govind. *Nonlinear fiber optics*. USA, Academic Press, INC, 1995.
- [5] Boardman, A.D., Bontemps P., Koutoupes T. and Xie K. *Temporal and Spatial Solitons: an overview*. United Kingdom, Photonics and Nonlinear Science Group, University of Salford.



### **3. Método de propagación de rayos (BPM)**



---

### 3. Método de propagación de rayos (Beam Propagation Method, BPM)

El capítulo tiene como finalidad exponer el método de propagación de rayos para resolver la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE). Método que ha demostrado ser el más eficiente y rápido para la solución de la NLSE.

Se expondrán las etapas para convertir la NLSE en una ecuación simple que puede resolverse de forma numérica y poder desarrollar un programa que muestre la propagación de solitones espaciales con vectores de campo eléctrico paralelos.

Se introducirá la ecuación de Fresnel que representa la NLSE eliminando los efectos no lineales de ella. Se explicaran las aproximación realizadas para las derivadas parciales que se encuentran en la NLSE, tanto para las componentes transversales como para las componentes longitudinales bajo la aproximación de diferencias finitas y de la aproximación longitudinal con direcciones alternadas respectivamente.

Además, se mostrará la manera de resolver un sistema de ecuaciones lineales tridiagonales ya que al convertir la NLSE en una ecuación numérica nos encontramos con un sistema de éste tipo. La principal ventaja del método es la de tomar en cuenta una matriz con tres diagonales. Esto requiere de un menor número de operaciones, haciéndolo un método rápido para su desarrollo computacional, especialmente para valores grandes de  $N$ .

### 3.1. Ecuación de Fresnel y forma clásica del BPM

Es importante mencionar que el método sólo considera casos en los que la guía de onda permanece en estado estacionario, es decir, que los modos dentro de la guía no cambian su forma al propagarse a lo largo del eje  $z$ . Naturalmente, no es posible inyectar luz dentro de una guía en forma puramente modal. Es más probable que la guía se excite con exceso de energía, con una distribución Gaussiana de energía o con un rayo super-Gauss. Después de la excitación se crea un estado no estacionario que se propaga a lo largo de la guía esparciendo y ajustando la energía para crear un modo dentro de la guía. Éste modelo físico puede ser simulado pero requiere de un método que conozca el campo eléctrico  $E(z = 0, x, y)$  y en  $E(z > 0, x, y)$ . A éste método se le conoce con el nombre de método de propagación de rayos (Beam Propagation Method. BPM) y se muestra en la figura 3.1.1.

*A continuación se describe en forma breve la forma clásica del BPM conocido también como slip-step Fourier method.*

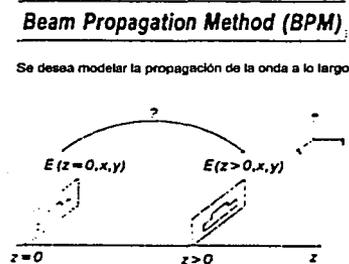


Figura 3.1.1. Esquema del BPM

EL BPM estándar está basado en la ecuación de Helmholtz.

$$\nabla^2 E + n^2 k^2 E = 0 \quad (3.1.1)$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad k = \omega/c. \quad \omega \text{ es la velocidad angular, } c \text{ es la velocidad de la luz en el vacío y}$$

$n(x,y,z)$  es la distribución del índice de refracción.

La dependencia en el tiempo en la ec. (3.1.1) es de la forma  $e^{-jn_k z}$ , donde  $t$  es el tiempo. El campo  $E$  puede descomponerse en dos partes, una parte que varía lentamente  $\bar{E}$  y otra que varía rápidamente, donde  $n_r$  está definida como el índice de refracción de referencia con el cual se pueden medir otros índices, de tal manera que

$$E = \bar{E} e^{-jn_k z} \quad (3.1.2)$$

sustituyendo ec. (3.1.2) en (3.1.1) y asumiendo que

$$\left| \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} \right| \ll 2n_r k \left| \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} \right| \ll 2n_r k \left| \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} \right| \quad (3.1.3)$$

Obtenemos la ecuación de onda (paraxial) de Fresnel

$$j2n_r k \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} = \nabla_1^2 \bar{E} + (n^2 - n_r^2) k^2 \bar{E} \quad (3.1.4)$$

donde

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Como podemos observar, la ec. de Fresnel ec. (3.1.4), coincide con la parte lineal de la NLSE (ec. (2.4.4)) para solitones espaciales.

Hasta éste punto, las limitaciones del método son las siguientes:

- La onda sólo puede propagarse en la dirección positiva de  $z$  ( $+z$ )
- El BPM no puede trabajar con cambios abruptos de  $n$  a lo largo de  $z$

El principio del BPM es que el método sólo puede controlar al rayo guiado a través de la guía y a los rayos que viajan cerca de la dirección de propagación. La solución numérica de la ec. (3.1.4) es muy interesante. Antes que nada es conveniente realizar el siguiente cambio de variable  $z \Rightarrow z = 2n_r k \xi$  para rescribir la ec. (3.1.4) como

$$j \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} = (A + A_0) \bar{E} \quad (3.1.5)$$

donde  $A = A_x + A_y$

$$A_0 = (n^2(x, y, \xi) - n_r^2) k^2$$

$$A_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2(x, y)} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$A_y = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2(x, y)} \frac{\partial}{\partial x}$$

$A_x$  y  $A_y$  ya contienen condiciones de frontera incorporadas.

La ec. (3.1.5) puede resolverse analíticamente como

$$E(\xi + \Delta\xi) = \exp\left[-j\Delta\xi A + \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} d\xi A_0(x, y, \xi)\right] E(\xi) \quad (3.1.6)$$

Es más común reescribir la ec. (3.1.6) de la siguiente forma

$$E(\xi + \Delta\xi) = \exp\left(-j\frac{1}{2}\Delta\xi A\right) \exp\left(-j\int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} d\xi A_0(x, y, \xi)\right) \exp\left(-j\frac{1}{2}\Delta\xi A\right) E(\xi) + O[(\Delta\xi)^3] \quad (3.1.7)$$

Podemos deducir que el método divide en tres partes (tres funciones exponenciales) la función de encontrar el campo en  $\xi + \Delta\xi$  a partir del campo en  $\xi$ . La belleza y elegancia del método deriva en que el primer y tercer miembro de la ec. (3.1.7) pueden calcularse de manera sencilla utilizando transformadas de Fourier. El segundo miembro puede calcularse fácilmente utilizando técnicas iterativas, incluso para guías de onda no lineales.

Debido a que el método divide en partes y utiliza la transformada de Fourier, el método es conocido también como "split-step Fourier method". Un resumen del método es mostrado en la figura 3.1.2.

■ Ecuación básica

$$i \frac{\partial E}{\partial \xi} = (A + A_0) E$$

$$A = \nabla_{\perp}^2$$

$$A_0 = (n^2 - n_c^2) k^2$$

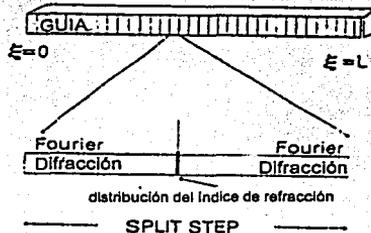


Figura 3.1.2. Demostración esquemática del Método (split-step Fourier method)



---

Los términos  $e^{-\frac{1}{2}j\omega t}$  en la ec. (3.1.7) son simplemente  $F^{-1}e^{-\frac{1}{2}j\omega t}F$  donde  $F$  y  $F^{-1}$  son la transformada y la transformada inversa de Fourier respectivamente y  $k$  es el número de onda en el dominio de la frecuencia. Éste procedimiento es simple ya que  $A(jK)$ , la transformada inversa de  $A$  puede obtenerse trivialmente y podemos aplicar la transformada rápida de Fourier.

---

### 3.2. Aproximación de diferencias finitas (*aproximación de la ecuación de onda a lo largo de la coordenada longitudinal*)

Una de las etapas más importantes al momento de resolver la NLSE es la de escoger un método de aproximación apropiado. Este método debe darnos la solución de la ecuación parabólica ec. (2.4.5) con alta estabilidad y exactitud. El método de aproximación considerado anteriormente puede aplicarse solamente para guías de onda ópticas que no presentan cambios bruscos en el índice de refracción. Además, solo puede darnos errores para guías de onda cuyos parámetros dependen de  $z$ .

En este sub-capítulo analizaremos distintos métodos de aproximación longitudinal que satisfacen las condiciones de estabilidad y exactitud requeridas.

*Caso cuando  $A$  tiene solo una derivación:*

Consideremos la ecuación parabólica tipo Fresnel en la forma de Koshi como:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + A\varphi = f, \quad \varphi = g \quad \text{tomada en } z = 0 \quad (3.2.1)$$

A continuación describiremos los pasos necesarios para obtener las ecuaciones finales. Primero consideremos el caso cuando el operador  $A_0$  no depende de  $z$ .

Los métodos de aproximación más simples, que contienen el primer orden de la exactitud son:

- *Método explícito*

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\Delta z} + A\varphi^j = f^j, \quad \varphi^0 = g \quad (3.2.2)$$

donde

$$\Delta z = z_{j+1} - z_j \quad \text{y} \quad f^j = f(z_j)$$

Recibe el nombre de *método explícito* debido a que cada nuevo valor del potencial se calcula inmediatamente a partir de cantidades ya conocidas.

- *Método implícito*

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\Delta z} + A\varphi^{j+1} = f^j, \quad \varphi^0 = g \quad (3.2.3)$$

donde  $f^j$  es tomada en  $z_{j+1}$ .

---

Si expandimos estos esquemas en una serie de Taylor, es posible demostrar que tienen el primer orden de exactitud respecto de  $z$ .

Resolviendo estos métodos respecto de  $\varphi^{j+1}$ , obtenemos

$$\varphi^{j+1} = T\varphi^j + \Delta z S f^j \quad (3.2.4)$$

donde  $T, S$  son operadores

$$T = E - \Delta z A, \quad S = E$$

para método *explícito* y,

$$T = (E - \Delta z A)^{-1}, \quad S = T$$

para método *implícito*

podemos observar que el orden de la exactitud de estos métodos es  $\Delta z$ , por lo tanto, estos métodos no pueden proveer una buena estabilidad en la solución numérica.

### Método de Crank-Nicolson

Debido a que los dos métodos anteriores no pueden ofrecer estabilidad en la solución numérica, se ha desarrollado un método alternativo que supera a los dos anteriores en términos de estabilidad. El método es conocido como método de Crank-Nicolson [1].

Consideramos el segundo orden de aproximación respecto de  $z$   $(\Delta z)^2$  del método de Crank-Nicolson

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\Delta z} + A \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = f^j, \quad \varphi^0 = g \quad (3.2.5)$$

donde

$$z_j \leq z \leq z_{j+1/2} \quad \text{y} \quad z_{j+1/2} \leq z \leq z_{j+1}$$

Como podemos observar, este esquema es una combinación de los dos esquemas anteriores (esquemas explícitos e implícitos).

Es posible dividir la ec. (3.2.5) en dos ecuaciones de tal manera que una ecuación calcule para medio paso, con esto se logra mayor estabilidad. Las dos ecuaciones quedan como:

$$\frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^j}{\Delta z/2} + A \varphi^j = 0, \quad \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+1/2}}{\Delta z/2} + A \varphi^{j+1} = 0 \quad (3.2.6)$$

ahora, suponemos que el operador  $A$  ( $A_\theta$ ) es función de  $z$ .

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\Delta z} + A^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = 0, \quad \varphi^0 = g, \quad (3.2.7)$$

En este caso para obtener aproximación de segundo orden, es necesario utilizar el operador  $A$  como:

$$A^j = A^j + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial A^j}{\partial z}$$

o

$$A^j = \frac{1}{2}(A^{j+1} + A^j).$$

### 3.3. Métodos de separación longitudinal

#### 3.3.1. Método de direcciones alternadas

Para el caso cuando el operador  $A$  consiste de dos operadores  $A = A_x + A_y$ , se requiere de la aplicación del método de direcciones alternadas [1]:

$$\frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^j}{\Delta z} + \frac{1}{2}(A_x \varphi^{j+1/2} + A_y \varphi^j) = 0, \quad (3.3.1a)$$

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+1/2}}{\Delta z} + \frac{1}{2}(A_x \varphi^{j+1/2} + A_y \varphi^{j+1}) = 0, \quad (3.3.1b)$$

donde  $j = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\varphi^0 = g$ .

Este método fue aplicado por primera vez por Peaceman, Rachford y Douglas. En este método los operadores  $A_{x,y}$  pueden aproximarse por medio del método de diferencias finitas.

Éste método puede entenderse de la siguiente manera:

Se parte de un estado inicial *conocido* del campo eléctrico en una dirección paralela al plano de la guía, es decir, conocemos la variación de la componente del campo en la dirección  $y$ . Por supuesto, se desconoce la variación del campo a todo lo largo de su propagación por la guía. El método calcula la componente transversal del campo a cierta distancia  $\Delta z$  (siguiente paso en el cálculo numérico) después de que la onda comienza su propagación por el medio. Es importante ver que el método calcula el campo de "forma alternada" para las variaciones de las componentes del campo, es decir, calcula la componente del campo en la dirección de "x" a una cierta distancia  $\Delta z$  a partir de la componente del campo en dirección "y" (paso anterior). Esto hace que el método sea estable.

La figura 3.3.1 muestra de forma esquemática la forma en que el programa calcula la componente del campo de forma alternada.

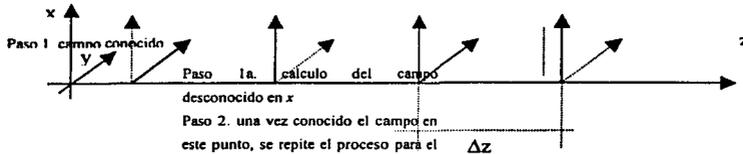


Figura 3.3.1. Esquema para cálculos en el programa.

Si eliminamos  $\varphi^{j+1/2}$ , obtenemos

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\Delta z} + A \left( \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} \right) + \frac{\Delta z^2}{4} A_x A_y \left( \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\Delta z} \right) = 0 \quad (3.3.2)$$

Como podemos observar, el esquema presenta segundo orden de exactitud respecto de z. Es posible demostrar que el método es completamente estable.

Una vez hecha la aproximación para la derivada parcial en dirección longitudinal, es necesario obtener una aproximación para el operador de Laplace.

Las aproximaciones utilizadas en nuestro programa para el operador de Laplace son las siguientes [2]:

$$\frac{\partial^2 E_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{2n^2_{i-1,j}}{h^2(n^2_{i,j} + n^2_{i-1,j})} E_{i-1,j} + \frac{2n^2_{i+1,j}}{h^2(n^2_{i,j} + n^2_{i+1,j})} E_{i+1,j} - \left[ \frac{2n^2_{i,j}}{h^2(n^2_{i,j} + n^2_{i-1,j})} + \frac{2n^2_{i,j}}{h^2(n^2_{i,j} + n^2_{i+1,j})} \right] E_{i,j}$$

$$\frac{\partial^2 E_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{E_{i,j+1}}{h^2} + \frac{E_{i,j-1}}{h^2} \quad (3.3.3)$$

### 3.4. Programación de la NLSE

En el capítulo anterior analizamos distintos métodos de aproximación para el operador a lo largo del eje  $z$  y una manera de aproximar el operador Laplaciano. Una vez que sustituimos todas las aproximaciones a la NLSE, podemos obtener la solución numérica buscada del conjunto de ecuaciones (3.4.2)

La ecuación (NLSE) completa es de la forma:

$$2ikn_r \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2(n(x, y, z)^2 - n_r^2) + \gamma|E|^2 E \quad (3.4.1)$$

En ella podemos observar tanto a efectos lineales (difracción), como efectos no lineales.

Para obtener la solución completa de la ec. (3.4.1), podemos (como en el sub-capítulo 2.2) dividir la ec. (3.4.1) en su parte lineal y no lineal de la siguiente manera

$$\begin{cases} 2ikn_r \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2(n(x, y, z)^2 - n_r^2) \\ 2ikn_r \frac{\partial E}{\partial z} = \gamma|E|^2 E \end{cases} \quad (3.4.2)$$

La parte lineal puede resolverse por medio del método de direcciones alternadas ecs. (3.3.1a,b). La parte no lineal puede obtenerse mediante la multiplicación de la solución analítica obtenida de la ec. (1.4.9) por la solución numérica obtenida en este capítulo.

El método completo resuelve de manera alternada cada uno de los efectos (lineales y no lineales). Para comprender de manera mas clara el procedimiento, es posible imaginarse un sistema de lentes convergentes y divergentes colocadas de forma alternada, es decir, a lo largo del eje de propagación del campo colocamos en un principio una lente divergente y a cierta distancia  $\Delta z$  una lente convergente.

La figura 3.4.1 muestra esquemáticamente esta idea.



Figura 3.4.1. Primer paso: efectos lineales, segundo paso: efectos no lineales.

Al sustituir las aproximaciones a la ec. (3.4.2) obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas que podemos resolver respecto del campo  $E$ .

como

$$E(z + \Delta z) = AE(z) \quad (3.4.3)$$

donde

$A$  es una matriz tridiagonal

$A$  es tridiagonal debido a que el método de Crank-Nicolson involucra tres valores desconocidos en cada paso de tiempo.

Podemos representar el método de Crank-Nicolson esquemáticamente en términos de "moléculas computacionales" como se muestra en la figura 3.4.2.

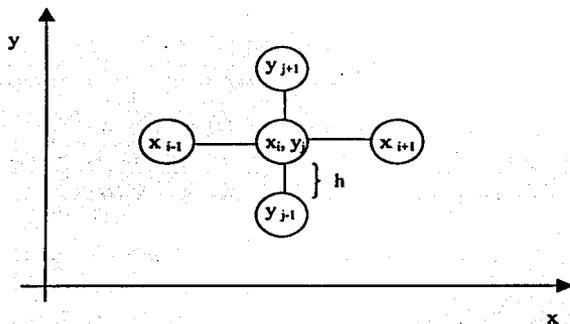


Figura 3.4.2. Esquema Crank-Nicolson

El método más eficiente para resolver este tipo de sistemas es el llamado método de Crout [1].

### 3.5. Algoritmo de reducción de Crout

Este método permite resolver de manera eficiente sistemas tridiagonales.

El algoritmo es el siguiente:

Para resolver un sistema lineal de  $n \times n$

$$\begin{array}{rcll}
 E_1: & a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & & = a_{1,n+1} \\
 E_2: & a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 & = a_{2,n+1} \\
 \vdots & & & \vdots & \vdots \\
 E_{n-1}: & & a_{n-1,n-2}x_{n-2} + & a_{n-1,n-1}x_{n-1} + & a_{n-1,n}x_n & = a_{n-1,n+1} \\
 E_n: & & & a_{n,n-1}x_{n-1} + & a_{n,n}x_n & = a_{n,n+1}
 \end{array}$$

el cual, se supone tiene una solución única:

ENTRADA la dimensión  $n$ ; los elementos de  $A$ .

SALIDA la solución  $x_1, \dots, x_n$ .

Paso 1 Tomar

$$\begin{array}{l}
 l_{11} = a_{11}; \\
 u_{12} = a_{12} / l_{11}.
 \end{array}$$

Paso 2 Para  $i = 2, \dots, n-1$  tomar

$$\begin{array}{l}
 l_{i,j-1} = a_{i,j-1}; (i\text{-ésimo renglón de } L) \\
 l_{ii} = a_{ii} - l_{i,j-1}u_{i-1,j}; \\
 u_{i,j+1} = a_{i,j+1} / l_{ii} \text{ ((} i+1 \text{)columna de } U).
 \end{array}$$

Paso 3 Tomar

$$\begin{array}{l}
 l_{n,n-1} = a_{n,n-1}; (n\text{-ésimo renglón de } L). \\
 l_{nn} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}.
 \end{array}$$

(Los pasos 4, 5 resuelven  $Lz = b$ ):

Paso 4 Tomar  $z_i = a_{i,n+1} / l_{ii}$ .

Paso 5 Para  $i = 2, \dots, n$  tomar  $z_i = \frac{1}{l_{ii}} [a_{i,n+1} - l_{i,j-1}z_{i-1}]$ .

(Los pasos 6 y 7 resuelven  $Ux = z$ ).

Paso 6 Tomar  $x_n = z_n$ .

Paso 7 Para  $i = n-1, \dots, 1$  tomar  $x_i = z_i - u_{i,j+1}x_{i+1}$ .

Paso 8 SALIDA  $x_1, \dots, x_n$ ; PARAR.

Este algoritmo requiere sólo de  $(5n - 4)$  multiplicaciones/divisiones y de  $(3n - 3)$  sumas/restas y consecuentemente tiene una ventaja computacional considerable sobre los métodos que no consideran la tridiagonalidad de la matriz.

Para mostrar el procedimiento involucrado en el algoritmo de Crout, consideremos el sistema tridiagonal de ecuaciones

$$\begin{array}{rcccc} 2x_1 - & x_2 & & & = 1 \\ -x_1 + & 2x_2 - & x_3 & & = 0 \\ & -x_2 + & 2x_3 - & x_4 & = 0 \\ & & -x_3 + & 2x_4 & = 1 \end{array}$$

cuya matriz aumentada es

$$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & & 1 \\ - & 2 & -1 & 0 \\ & - & 2 & -1 & 0 \\ & & - & 2 & 1 \end{array}$$

Siguiendo los pasos del algoritmo:

Paso 1  $l_{11} = 2;$   
 $u_{12} = a_{12}/l_{11} = -\frac{1}{2}.$

Paso 2

$i = 2$

$l_{21} = a_{21} = -1$

$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - (-1) \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2};$

$u_{23} = a_{23}/l_{22} = -\frac{1}{3/2} = -\frac{2}{3}$

$i = 3$

$l_{31} = a_{31} = -1$

$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 2 - (-1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3};$

$u_{34} = a_{34}/l_{33} = -\frac{3}{4}$

Paso 3

$l_{43} = a_{43} = -1$

$l_{44} = a_{44} - l_{43}u_{34} = 2 - (-1) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}.$

Paso 4  $z_1 = a_{13}/l_{11} = \frac{1}{2}.$

Paso 5  $z_2 = \frac{1}{l_{22}} [a_{23} - l_{21}z_1] = \frac{1}{3}$

$z_3 = \frac{1}{l_{33}} [a_{33} - l_{31}z_2] = \frac{1}{4}.$

$z_4 = \frac{1}{l_{44}} [a_{43} - l_{43}z_3] = 1$

Paso 6  $x_4 = 1.$

$x_3 = z_3 - u_{34}x_4 = 1$

Paso 7  $x_2 = z_2 - u_{23}x_3 = 1.$

$x_1 = z_1 - u_{12}x_2 = 1$

---

### **Conclusiones del capítulo 3.**

Se mostró el método utilizado para realizar los experimentos numéricos. Se expusieron las aproximaciones utilizadas para obtener una solución de la NLSE. La solución se obtuvo de una forma simplificada al separar las partes lineales y no lineales.

En el siguiente capítulo se aplicará el método en los experimentos numéricos y se mostrará su confiabilidad.

---

**Referencia del capítulo 3.**

[1] Burden, R.L. y Faires, J.D. *Análisis Numérico*. México, McGraw-Hill, 1996. pp. 373 – 388.

[2] Lee, P.C., Schulz D. and Voges E., *Three-Dimensional Finite Difference Beam Propagation Algorithms for Photonic Devices*. *Journal of Lightwave Technology* / Vol. 10 / No. 12 / December 1992.

**4. Estudio de los  
efectos de las  
interacciones entre  
solitones espaciales  
tipo Kerr**



## 4. Estudio de los efectos de las interacciones entre solitones espaciales tipo Kerr.

### 4.1. Análisis del desplazamiento y de la resolución espacial del soliton señal en la conmutación dependiendo del ángulo y de la diferencia relativa de fase entre ellos.

El programa desarrollado para la realización de las simulaciones entre solitones espaciales coherentes fue probado de manera satisfactoria para casos ya realizados en trabajos anteriores [1], es decir, para los casos cuando dos solitones son inyectados paralelos, atrayéndose o repeliéndose dependiendo de la diferencia relativa de fase entre ellos. El análisis aquí realizado se hizo por medio de la variación del ángulo entre solitones y de la variación de la diferencia relativa de fase entre ellos.

La figura 4.1.1 muestra de manera esquemática la interacción entre solitones, también muestra el desplazamiento espacial que sufren los solitones debido a la interacción y al ángulo entre ellos.

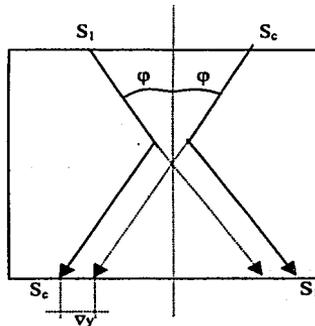


Figura 4.1.1. Esquema del desplazamiento espacial que sufren los solitones después de la interacción.

El ángulo entre solitones  $\phi$  se hizo variar desde  $0.1^\circ < \phi < 5^\circ$ , rango de ángulos de incidencia para el cual el método (BPM) es confiable. Los solitones tienen una separación inicial de  $11.8 \text{ } [\mu\text{m}]$ . Los solitones formados en el programa tienen un perfil gaussiano. Los parámetros que podemos controlar en el programa son el ancho a media potencia y la longitud de onda de los

solitones, además de poder variar el ángulo de incidencia ( $\varphi$ ) y la diferencia relativa de fase ( $\delta\phi$ ) entre solitones.

Los parámetros utilizados para el análisis fueron los siguientes:

	Soliton 1, $S_1$	Soliton control, $S_c$
Intensidad	1 [au]	1 [au]
Ancho a media potencia	3 [ $\mu\text{m}$ ]	3 [ $\mu\text{m}$ ]
Longitud de onda	1.5 [ $\mu\text{m}$ ]	1.5 [ $\mu\text{m}$ ]

La Figura 4.1.2 muestra el desplazamiento del soliton  $S_1$  para varios de casos.

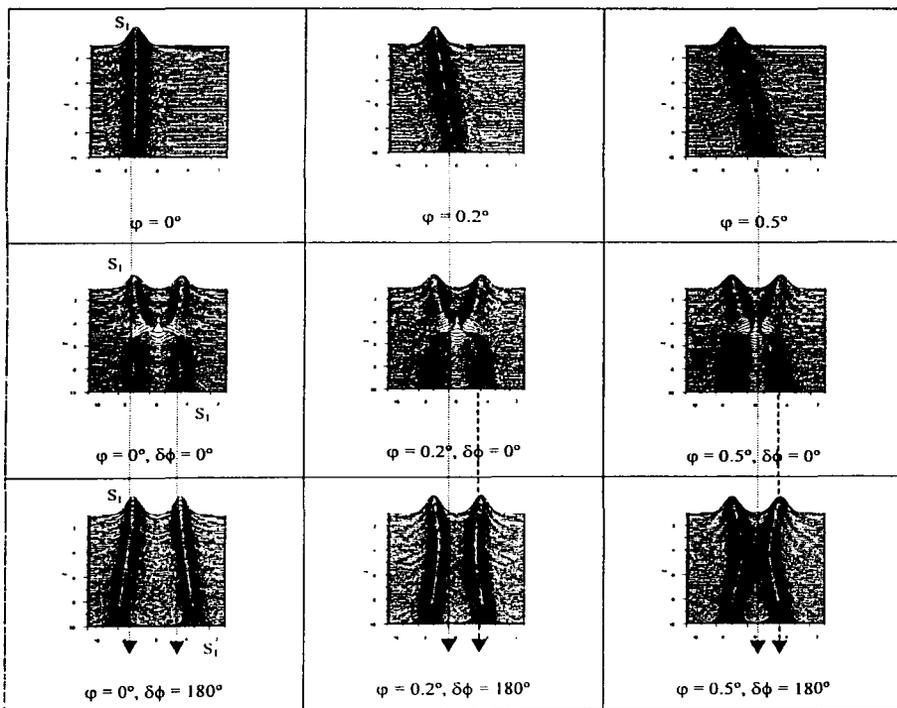


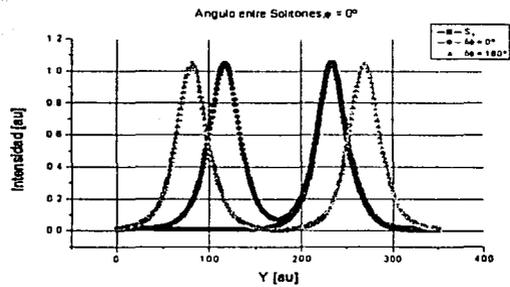
Figura 4.1.2. Desplazamiento de los solitones para diferentes valores de  $\varphi$  y  $\delta\phi$ .

---

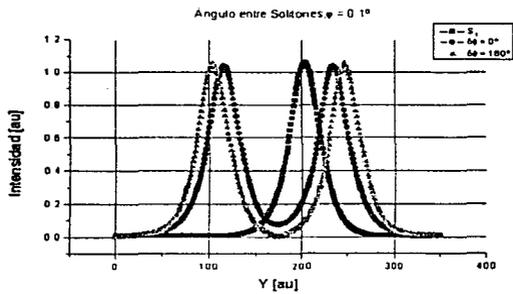
El desplazamiento espacial es la distancia ( $\nabla y$ ) que se recorre el soliton  $S_1$  a partir de su posición original sin la intervención del otro soliton ( $S_2$ ).

Como se puede observar, el desplazamiento espacial de  $S_1$  tiende a disminuir al aumentar el ángulo entre solitones para los dos casos extremos. También se puede observar que existe mayor desplazamiento espacial en los casos cuando  $\delta\phi = 180^\circ$  y  $\phi < 0.5^\circ$ .

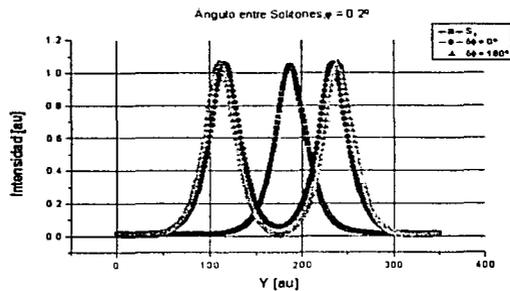
Para un análisis más preciso en la medición del desplazamiento espacial se han empleado gráficas en 2D como la que se muestra en la Figura 4.1.3. En ella podemos observar el desplazamiento espacial que sufre el soliton  $S_1$  para diferentes ángulos entre solitones.



a)

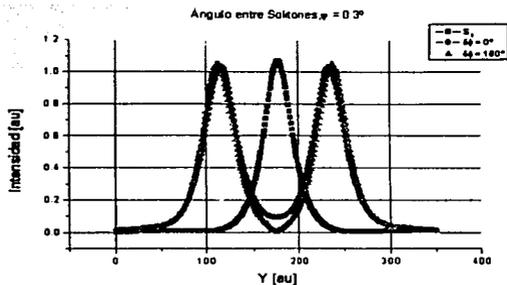


b)

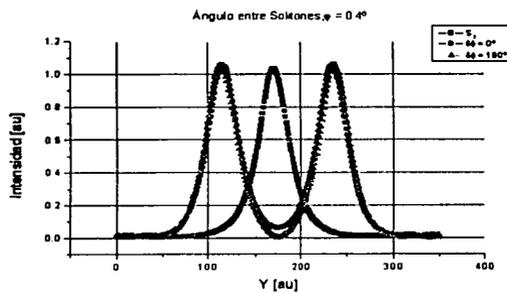


c)

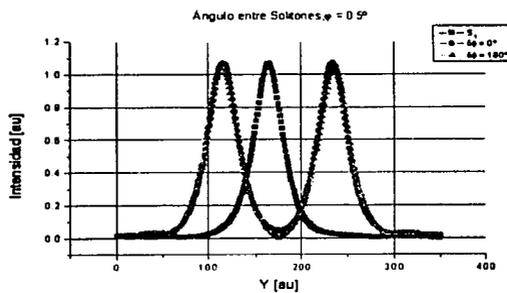
Figura 4.1.3. El perfil del soliton más oscuro muestra el desplazamiento que sufre ese soliton después de la colisión.



d)

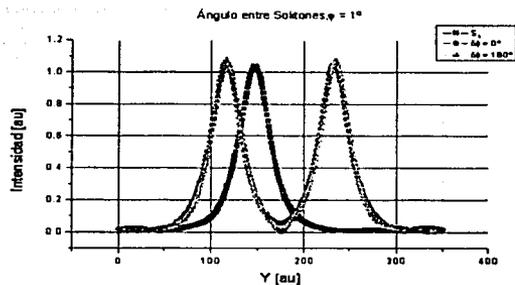


e)

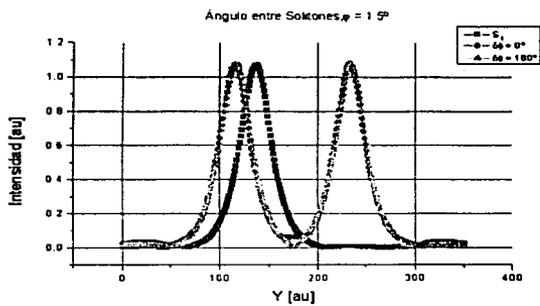


f)

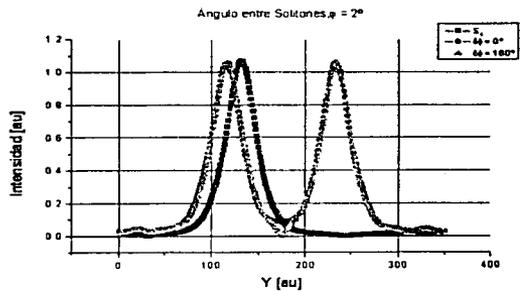
Figura 4.1.3 (continuación)



g)



h)



i)

Figura 4.1.3. (continuación)

---

Podemos observar en la figura anterior que al aumentar el ángulo entre solitones el desplazamiento espacial decrece hasta que para ángulos mayores ( $\varphi > 5^\circ$ ) el desplazamiento espacial es nulo. También es claro que a partir de  $\varphi = 0.5^\circ$ , la diferencia entre los desplazamientos es la misma para los dos casos extremos ( $\delta\phi = 0^\circ$  y  $\delta\phi = 180^\circ$ ).

El análisis de las interacciones entre solitones también se realizó para  $0^\circ < \delta\phi < 180^\circ$ , con resultados similares a los anteriores.

#### 4.2. Investigación del cambio de fase entre los solitones después de la interacción entre ellos.

Debemos recordar que la diferencia relativa de fase ( $\delta\phi$ ) entre solitones, es la diferencia relativa de fase de la amplitud compleja del campo eléctrico de cada uno de los solitones.

Para la investigación del cambio de fase de los solitones después de la interacción se agregaron algunas líneas más de código al programa que realiza las simulaciones, ya que estaba diseñado únicamente para mostrar el cambio en la amplitud de cada soliton.

La figura 4.2.1 muestra la propagación del frente de onda de un soliton. El frente de onda para cualquier soliton es plano y muy estable.



Figura 4.2.1. Frente de onda plano de un soliton espacial.  
El soliton se propaga en un medio dispersivo no lineal.

Los frentes de onda son la sucesión de puntos que poseen la misma fase y permanece plano para toda su propagación.

Las simulaciones para investigar el cambio de fase que sufren los solitones después de su interacción fueron realizadas bajo las mismas condiciones y con las mismas características que las hechas para analizar el desplazamiento espacial.

La figura 4.2.2 muestra el cambio de fase sufrido por el soliton  $S_1$  después de la interacción con el soliton control ( $S_c$ ). En esa figura podemos observar que el cambio de fase es de  $\Phi = 180^\circ$  para diferentes ángulos de incidencia.

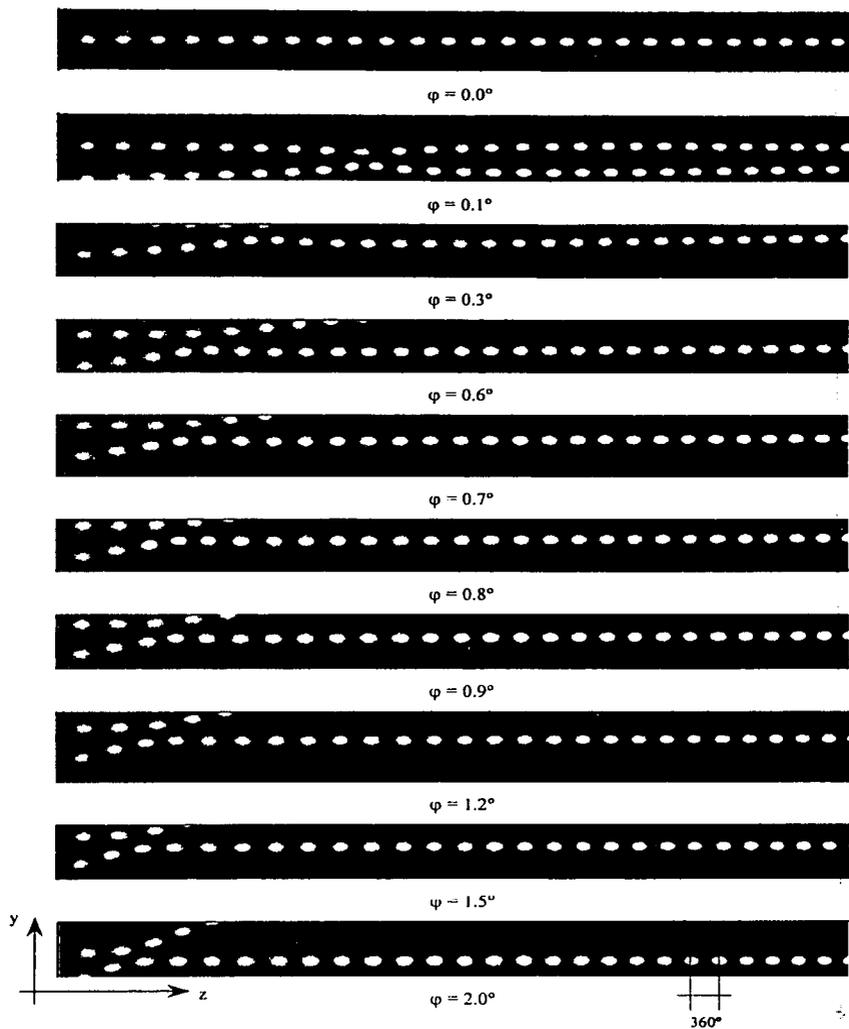


Figura 4 2.2. Cambio de fase de  $\Phi = 180^\circ$  después de la interacción para diferentes ángulos de incidencia.

Los solitones se propagan en un medio dispersivo no lineal.

La amplitud de ambos solitones es la misma.

La figura 4.2.3 muestra éste efecto de cambio de fase de  $180^\circ$  para diferentes fases relativas entre solitones.

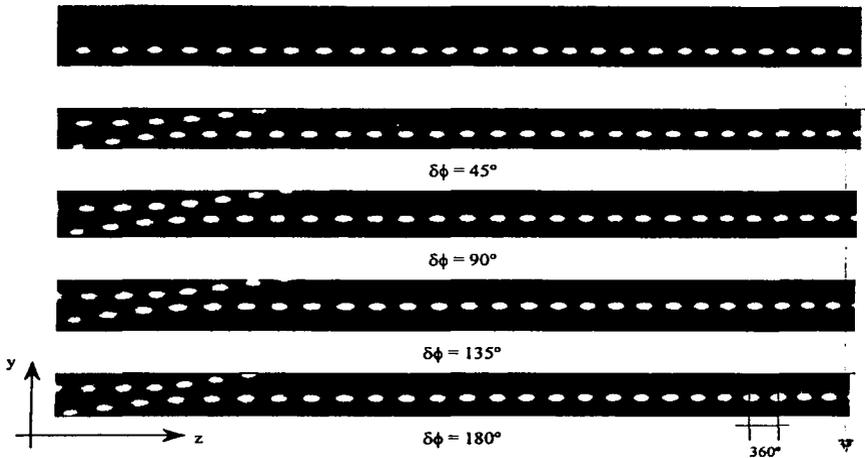


Figura 4.2.3. Cambio de fase de  $\Phi = 180^\circ$  después de la interacción para diferentes fases relativas entre solitones. Ambos solitones tiene la misma amplitud y se propagan en un medio dispersivo no lineal.

Este cambio de fase de  $180^\circ$  después de la interacción entre dos solitones elimina la dependencia de la diferencia fase entre solitones

Hemos encontrado las condiciones necesarias y suficientes con las cuales podemos obtener interacciones entre solitones espaciales con vectores de campo eléctrico paralelo independientes de la fase. Se requieren ángulos de incidencia superiores a  $1^\circ$  entre solitones, además de que se ha observado un fenómeno interesante de cambio de fase constante para diferentes diferencias relativas de fase. Una primera aplicación de éste efecto es propuesto en ésta tesis para la compuerta lógica óptica o conmutación óptica.

---

#### 4.3. Simulación de una conmutación basada en tres solitones usando las condiciones óptimas encontradas en los puntos anteriores para dos solitones.

Se ha observado que el cambio relativo de fase entre solitones después de la interacción entre ellos es constante y siempre igual a  $180^\circ$ , es decir, no depende de la diferencia de fase relativa. Con los efectos observados en los dos sub-capítulos anteriores, se ha propuesto una estructura que permita la conmutación totalmente óptica.

Las condiciones que se encontraron en los sub-capítulos anteriores son tales que, la interacción entre solitones espaciales con vectores de campo eléctrico paralelos es independiente de la diferencia relativa de fase entre ellos. Particularmente se encontró que para ángulos de incidencia mayores de  $\varphi > 1^\circ$ , la dependencia de la diferencia relativa de fase entre solitones puede despreciarse. Además, el efecto de cambio de fase de  $180^\circ$  que sufren los solitones después de la interacción nos lleva a pensar en una estructura en la que dos solitones, uno que representa la señal y otro que representa un soliton llamado de control interactúen de tal manera que la señal soliton cambie su fase  $180^\circ$  después de la interacción, sin importar la diferencia relativa de fase inicial entre ellos. Después, un tercer soliton se hace interactuar con el soliton señal de manera que estos dos solitones tengan una diferencia relativa de fase de  $0^\circ$  o de  $180^\circ$  dependiendo de la existencia o no, del soliton control.

También se pensó en una estructura en la que se pueda excitar los solitones de una manera tal que puedan estar lo suficientemente espaciados.

En el capítulo relativo a resultados y análisis de resultados se ha descrito con mayor detalle ésta estructura y toda la propuesta de conmutación óptica. En ésta etapa de la propuesta sólo se enfocó en la parte esquemática y se pensó en una forma simple de fabricación de la estructura, sin tomar en cuenta dimensiones ni forma de excitación de los solitones.

La figura 4.3.1 muestra una vista superior de la estructura. En ella se puede observar una pared que refleja el soliton  $S_2$ , esto con el fin de obtener el espacio suficiente para excitar los tres solitones. En ángulo de incidencia de  $S_2$  se a escogido de tal manera que sin la presencia del soliton control, los solitones  $S_1$  y  $S_2$  lleguen paralelos con una diferencia relativa de fase de  $0^\circ$ , ocasionando atracción entre ellos.

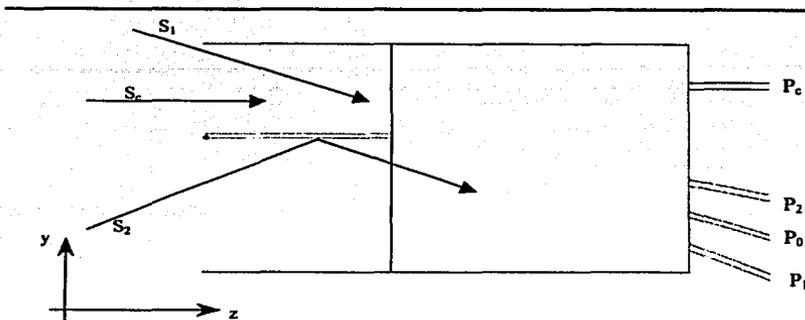


Figura 4.3.1. Vista superior de la guía de onda utilizada para la simulación de una conmutación óptica. La guía tiene las sig. dimensiones:  $Y = 60 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $Z = 900 \text{ } \mu\text{m}$ . La estructura se puede dividir en tres zonas: la zona de entrada ( $S_1$ ,  $S_c$ ,  $S_2$ ), la zona de interacción y la zona de salidas ( $P_c$ ,  $P_2$ ,  $P_0$  y  $P_1$ ).

En la figura 4.3.2 se muestra la simulación realizada para cuando el soliton control ( $S_c$ ) está ausente. Para éste caso los solitones  $S_1$  y  $S_2$  llegan paralelos y con diferencia relativa de fase igual de  $0^\circ$ , atrayéndose para converger en una guía de onda de salida. ( $P_0$ )

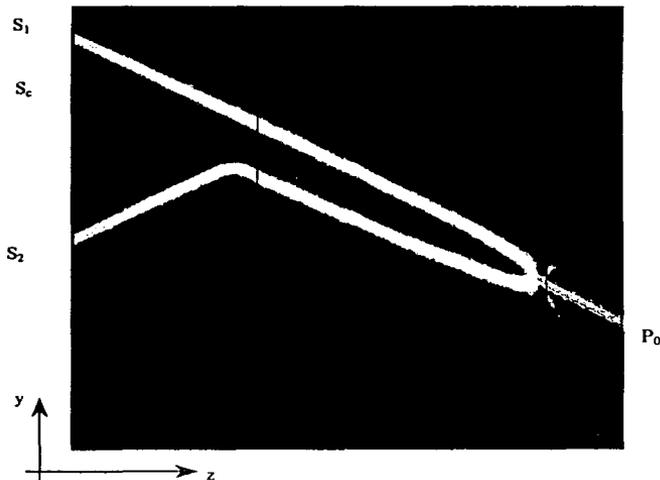


Figura 4.3.2. El soliton control ( $S_c$ ) no se excita, por lo que  $S_1$  y  $S_2$  están en fase y se atraen para obtener el "1" lógico en  $P_0$  y obtener una ganancia de 3 dB.

En la figura 4.3.3 se muestra la simulación para cuando el soliton control ( $S_c$ ) existe y es excitado con un ángulo de incidencia mayor de  $1^\circ$ . La interacción entre  $S_1$  y  $S_c$  da como resultado un cambio de fase de  $180^\circ$  en  $S_1$  y por consiguiente  $S_1$  y  $S_2$  llegan con una diferencia relativa de fase de  $180^\circ$ , causando repulsión.

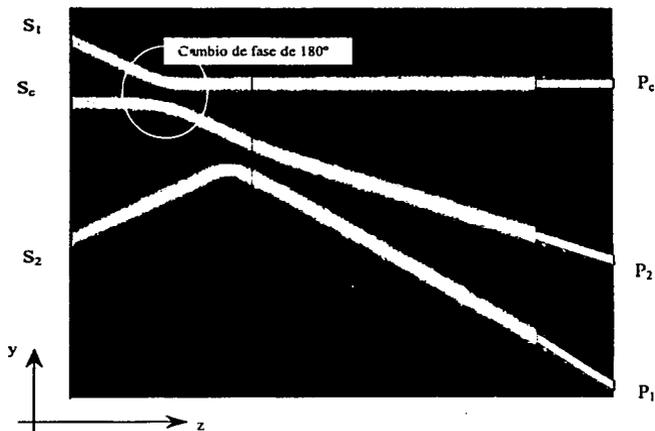


Figura 4.3.3. Existencia del soliton control ( $S_c$ ) por lo que en  $P_0$  se tiene el "0".  
La interacción entre  $S_1$  y  $S_c$  induce un cambio de fase de  $180^\circ$  provocando repulsión entre  $S_1$  y  $S_2$ .

---

#### Conclusiones del capítulo 4.

En base a los experimentos numéricos se demostró que para ángulos de incidencia  $\phi$  mayores a  $1^\circ$ , las interacciones entre solitones espaciales tipo Kerr son independientes de la diferencia relativa de fase.

Para solitones espaciales tipo Kerr con amplitudes iguales, se observó un cambio de fase igual a  $180^\circ$  después de la colisión; el cambio de fase después de la colisión es independiente de la diferencia relativa de fase inicial entre solitones.

Se simuló la compuerta lógica óptica con la intervención de tres solitones espaciales tipo Kerr aplicando las condiciones encontradas para una colisión independiente de la diferencia relativa de fase inicial.

En el siguiente capítulo se analizarán las interacciones entre solitones espaciales para el caso cuando las amplitudes de los solitones es diferente ya que se trata de un caso más pegado a la realidad en donde el soliton control ( $S_c$ ) tiene mayor amplitud que el soliton señal ( $S_s$ ).

---

#### Referencias del capítulo 4.

- [1] Stegeman G., Christodoulides N., Segev M. "*Optical Spatial Solitons: Historical Perspectives*".  
Quantum Electronics, Vol. 6, November/December 2000



## **5. Resultados de los experimentos numéricos y análisis de resultados**



## 5. Resultados de los experimentos numéricos y análisis de resultados

Las simulaciones realizadas de interacciones no lineales entre dos solitones espaciales con vectores de campo eléctrico paralelos, hechas con el programa desarrollado, nos proporcionan los siguientes resultados en cuanto al desplazamiento espacial de los solitones después de la interacción para diferentes ángulos de inyección entre los solitones.

Ángulo entre solitones [°]	Desplazamiento para $\delta\phi = 0^\circ$ [AU]	Desplazamiento para $\delta\phi = 180^\circ$ [AU]
0.1	0.69091	1
0.2	0.64545	0.82727
0.3	0.60909	0.71818
0.4	0.57273	0.64545
0.5	0.54545	0.59091
0.6	0.51818	0.54545
0.7	0.49091	0.50909
0.8	0.46364	0.48182
0.9	0.44545	0.45455
1	0.42727	0.42727
1.1	0.40909	0.40909
1.2	0.38182	0.38182
1.3	0.37273	0.36364
1.4	0.35455	0.34545
1.5	0.34545	0.32727
1.6	0.32727	0.31818
1.7	0.31818	0.3
1.8	0.3	0.29091
1.9	0.29091	0.28182
2	0.28182	0.26364
2.5	0.23636	0.22727
3	0.22727	0.19091
3.5	0.16364	0.16364
4	0.13636	0.13636
4.5	0.12727	0.11818
5	0.10909	0.1

Tabla 5.1

La figura 5.1 muestra el desplazamiento que sufre un soliton después de la interacción.

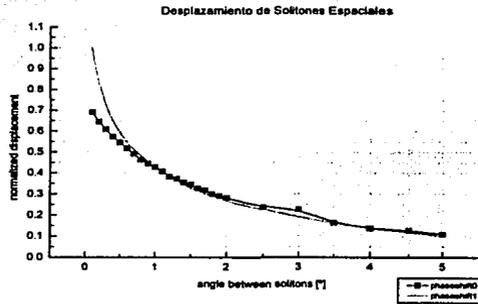


Figura 5.1. Se observa que para ángulos mayores de 1° entre solitones, el desplazamiento es prácticamente igual. La curva con cuadros representa el caso con diferencia relativa de fase inicial igual a 0°; la otra curva corresponde al caso cuando la diferencia relativa de fase es 180°

La distancia de propagación a la que se midió éste desplazamiento (distancia de medición,  $d_m$ ), fue obtenida en función de la distancia de interacción ( $d_i$ ) entre solitones con el fin de obtener resultados a una misma distancia, de tal manera que:

$$d_m = \frac{5}{2} \cdot d_i$$

Además, como se puede ver en la tabla anterior, se realizaron simulaciones de interacciones entre dos solitones para dos casos de diferencia relativa de fase, para  $\delta\phi = 0^\circ$  y para  $\delta\phi = 180^\circ$ , ya que el efecto de conmutación está basado en esos dos casos extremos. Sin embargo, también se hicieron simulaciones de interacciones entre solitones espaciales para  $\delta\phi$  entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  para conocer los efectos de éstas.

De la gráfica anterior, podemos observar que el desplazamiento espacial disminuye al aumentar el ángulo entre los solitones, además de que para ángulos mayores de 1°, el desplazamiento espacial después de la interacción es prácticamente el mismo para los dos casos extremos ( $\delta\phi = 0^\circ$ ,  $\delta\phi = 180^\circ$ ).

El análisis hecho para investigar el cambio de fase de los solitones después de la interacción mostró un efecto interesante, el cual no había sido investigado para solitones espaciales. Se encontró que existe un cambio de fase de los dos solitones después de la colisión y que éste cambio de fase es siempre igual a  $180^\circ$  ( $\Phi = 180^\circ$ ) sin importar el ángulo y la diferencia relativa de fase entre solitones.

*Este efecto es el que permite eliminar la dependencia de fase en la interacción entre solitones espaciales.*

### 5.1 Esquema de compuerta lógica óptica con solitones de amplitudes iguales.

A partir de los resultados obtenidos, de haber encontrado la manera de eliminar la dependencia de fase en las interacciones entre solitones espaciales y para demostrar éste efecto y su posible aplicación, se consideró la siguiente estructura de guía de onda plana que muestra una posible solución para la implementación de una compuerta lógica óptica basada en solitones espaciales. El dispositivo se muestra esquemáticamente (solución geométrica) en la Figura 5.1.1.

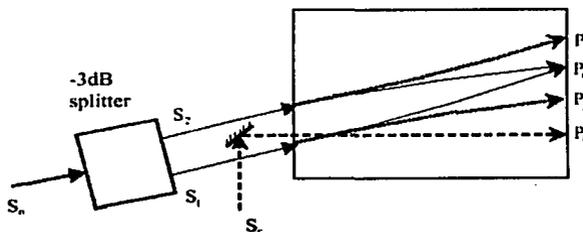


Figura 5.1.1. Esquema para la compuerta lógica óptica

El dispositivo está basado en la interacción entre dos solitones espaciales coherentes<sup>1</sup> (señales  $S_1$ ,  $S_2$  en la Fig. 5.1.1). Las señales  $S_1$  y  $S_2$  se obtienen al dividir el soliton  $S_0$  por medio de un splitter con 3 dB de pérdidas. Inicialmente,  $S_1$  y  $S_2$  tienen una dirección de propagación paralela y se escogen de tal manera que al interactuar tengan una diferencia relativa de fase de  $0^\circ$ . En esta etapa el dispositivo proporciona en  $P_0$  el "1" lógico, con una ganancia de 3 dB. La otra etapa del dispositivo proporciona el "0" lógico.

<sup>1</sup> Solitones con vectores de campo eléctrico paralelos.

Éste se obtiene con la interacción de  $S_1$  y  $S_c$ .  $S_c$  provocara, como se espera, un cambio de fase de  $180^\circ$  en  $S_1$ , por lo que ahora  $S_1$  y  $S_2$  interactúan con una diferencia relativa de fase de  $180^\circ$ , provocando repulsión mutua y ausencia de luz en  $P_o$ .

Las compuertas  $P_2$  y  $P_3$  son compuertas que reciben las señales  $S_1$  y  $S_2$  cuando  $S_c$  esta presente. Estas señales pueden ser usadas como señales de control en dispositivos conectados en cascada.  $P_c$  es una compuerta que recibe la señal de  $S_c$ .

La principal ventaja de éste esquema es que la diferencia relativa de fase para  $S_1$ , inducida después de la colisión, no depende de la diferencia de fase inicial entre  $S_c$  y  $S_1$ , ya que es siempre igual a  $180^\circ$ . Esto es cierto para un amplio rango de valores de ángulo ( $\varphi$ ) entre  $S_c$  y  $S_1$ , al menos para  $\varphi_c < \varphi < 5^\circ$ , donde  $\varphi_c \approx 0.2^\circ$  es el ángulo crítico para el cual dos solitones pueden crear una pareja de solitones que oscile.

La Figura 5.1.2 muestra la estructura en 3D de la guía de onda usada para modelar la compuerta lógica óptica mostrada esquemáticamente en la Figura 5.1.1.

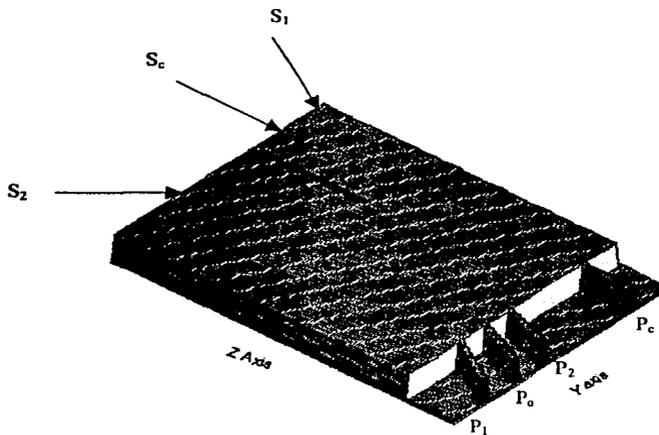


Figura 5.1.2. Estructura en 3D de la guía de onda para la compuerta lógica óptica.  
Dimensiones:  $Y = 60 \text{ } [\mu\text{m}]$  y  $Z = 900 \text{ } [\mu\text{m}]$ .

---

Para las simulaciones de la conmutación óptica por medio del BPM, se consideró una guía de onda no lineal de sulfanato paratuleno polidiacético (PDA-PTS) sobre un sustrato de SiO<sub>2</sub>/Si ( $n_1 = 1.88$ ,  $n_2 = 2.2 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{W}$  con  $\lambda = 1.5 \text{ } [\mu\text{m}]$ ). Éste material posee, hasta ahora, el más alto índice de refracción no lineal [1], [2]. El ancho y largo de la estructura son  $Y = 60 \text{ } [\mu\text{m}]$  y  $Z = 900 \text{ } [\mu\text{m}]$  respectivamente.

La zona de entrada tiene un rectángulo hueco de  $350 \times 3 \text{ } [\mu\text{m}]$  en el cual un soliton puede reflejarse, esto con la finalidad de incrementar la separación espacial entre las señales de entrada  $S_1$ ,  $S_c$  y  $S_2$  y tener la posibilidad de crear un dispositivo físicamente realizable.

La zona de salida de la estructura tiene 4 guías de ondas (rib) con una longitud de  $100 \text{ } [\mu\text{m}]$  usadas como compuertas de salida. Los ángulos de incidencia y las fases iniciales de las señales  $S_1$  y  $S_2$ , fueron elegidos de tal manera que en la zona de interacción, las señales soliton se propagaran de manera paralela con  $\delta\phi_{12} = 0^\circ$ . En las simulaciones numéricas se utilizaron rayos que presentan un perfil gaussiano que representan solitones espaciales de modo TE<sub>0</sub>, con un ancho de  $\omega_{FWHM} = 3.4 \text{ } [\mu\text{m}]^2$ . Los resultados de estas simulaciones, para un caso sin pérdidas, se presentan en la figura 5.1.3.

---

<sup>2</sup> FWHM=Full Width – Half Medium

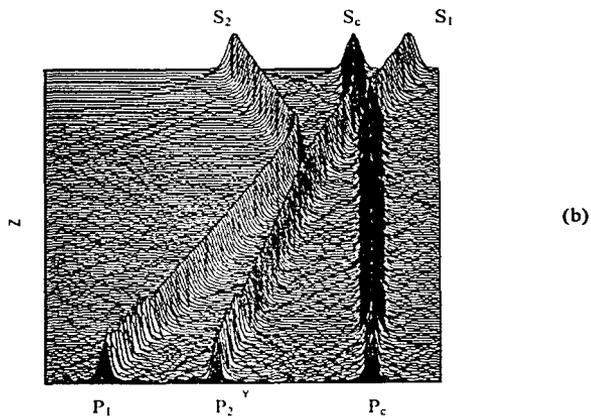
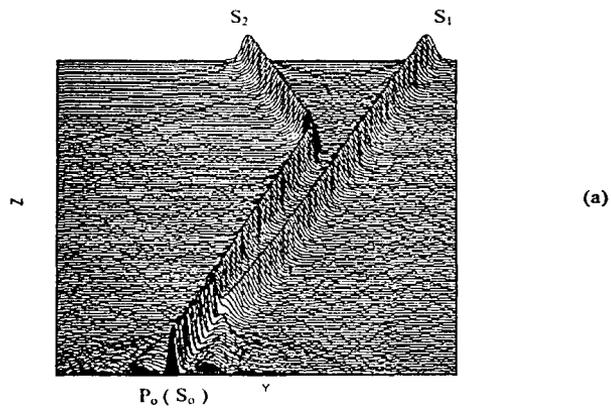


Figura 5.1.3. Propagación de los solitones en la guía de onda, 3D.

La figura muestra el perfil gaussiano de los solitones espaciales. (a) En ausencia de  $S_c$  se obtiene "1" lógico en  $P_0$ . (b) si  $S_c$  está presente se obtiene "0" en  $P_0$ .

---

Como se puede observar en la Fig. 5.1.3a, cuando el nivel lógico del soliton control  $S_c$  es "0", hay una fusión de los rayos  $S_1$  y  $S_2$  y la onda resultante, con doble intensidad en el punto de unión, se propaga hacia la compuerta de salida  $P_0$ . Como se ha supuesto que la división del haz  $S_1$  posee una atenuación de -3 dB para crear  $S_1$  y  $S_2$ , se puede deducir que la señal de salida tendrá una potencia óptica igual al de la entrada. Es esa salida la que proporciona el "1" lógico en la compuerta  $P_0$ . La Fig. 5.1.3b muestra otra etapa del dispositivo en la que el soliton control  $S_c$  induce el cambio de fase de  $180^\circ$  en el soliton  $S_1$ , resultando en una repulsión de las señales  $S_1$  y  $S_2$  para terminar su propagación en las compuertas de salida  $P_1$  y  $P_2$ . En éste caso, la compuerta  $P_0$  presenta un nivel "0" lógico.

Las salidas en las compuertas  $P_1$  y  $P_2$  pueden usarse como solitones control para etapas posteriores en cascada.

## 5.2 Esquema de compuerta lógica óptica con solitones con diferentes amplitudes.

La compuerta lógica óptica está diseñada para solitones ópticos espaciales tipo Kerr con amplitudes iguales. Sin embargo, es importante tratar de entender como se afecta el cambio de fase de los solitones después de la interacción al excitar dos solitones espaciales tipo Kerr con diferentes amplitudes, ya que es fácil imaginarse una diferencia de amplitudes entre la señal de información y la de control ( $\eta_1 \neq 1$ ). Por supuesto, se piensa en una mayor amplitud para la señal de control local ( $S_c$ ).

Hemos visto que el máximo cambio de fase se produce cuando las amplitudes de los dos solitones son iguales ( $\eta_1 = \eta_2$ ). Sin embargo, este cambio de fase depende de la relación  $\eta_2/\eta_1$  y del ángulo ( $\varphi$ ) de colisión entre solitones.

Como vimos en el sub-capítulo 4.2 (fig. 4.2.3), la colisión genera un cambio de fase de  $180^\circ$  para ambos solitones comparado con el caso para cuando el soliton se propaga sin la intervención de otro soliton. Para amplitudes iguales, el cambio de fase permanece igual a  $180^\circ$  para cualquier diferencia relativa de fase inicial entre solitones.

Análiticamente, y en concordancia con la teoría inversa de esparcimiento [3], el cambio de fase ( $\Phi$ ) inducido por la colisión entre solitones puede estimarse como

$$\Phi_s = 2(-1)^s \left( \arctan \left[ \frac{\eta_s + \eta_p}{V_s - V_p} \right] - \arctan \left[ \frac{\eta_s - \eta_p}{V_s - V_p} \right] \right) \quad (5.2.1)$$

donde

$\eta_m$  : amplitud pico normalizada;      ( $m = 1, 2$ )

$V_m$  : ángulos de propagación

$\eta_m$  y  $V_m$  son parámetros característicos de la solución fundamental:

$$\psi_m(\xi, \tau) = 2i\eta_m \sec h(2\eta_m[\tau - (\tau_0 - V_m\xi)]) \exp(i2V_m(\tau - \tau_0) + i4[V_m^2 - \eta_m^2]\xi + i\varphi_m) \quad (5.2.2)$$

donde

$\varphi_m$  : fase inicial del soliton

$\tau_0$  : coordenada inicial del centro del rayo

de la NLSE (2.4.5)

$$j \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + 2|\psi|^2 \psi = 0 \quad (2.4.5)$$

La ec. (5.2.1) es válida para estimar el cambio de fase a una distancia tal que los solitones están lo suficientemente separados uno del otro después de la colisión.

Para el problema de auto-enfoque considerado en esta tesis, las variables en las ecs. (5.2.1) y (5.2.2) están relacionadas con las variables físicas reales mediante

$$\psi = k_0 \omega_0 \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} A, \quad \tau = \frac{y}{\omega_0}, \quad \xi = \frac{z}{2k_0 \omega_0^2}$$

donde  $\omega_0 = \omega_{FWHM}/1.763$  es el parámetro de anchura del soliton;  $k_0$  y  $n_0$  son la constante lineal de propagación del modo y el índice de refracción de la película respectivamente;  $n_2$  es el coeficiente no lineal y,  $A$  es la amplitud compleja del campo eléctrico del soliton  $E_y(y, z) = A(y, z)e^{j(\omega t - k_0 z)}$ .

En la figura 5.1.4 se muestran los resultados obtenidos para solitones con  $\omega_{FWHM} = 3.4 [\mu\text{m}]$ , propagándose en una guía de onda no lineal de sulfanato paratleno polidiacetileno (PDA-PTS) sobre un sustrato de  $\text{SiO}_2/\text{Si}$  ( $n_0 = 1.88$ ,  $n_2 = 2.2 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{W}$  con  $\lambda = 1.5 [\mu\text{m}]$ ) [1], [2].

$$\Lambda_0 \approx 340 \mu$$

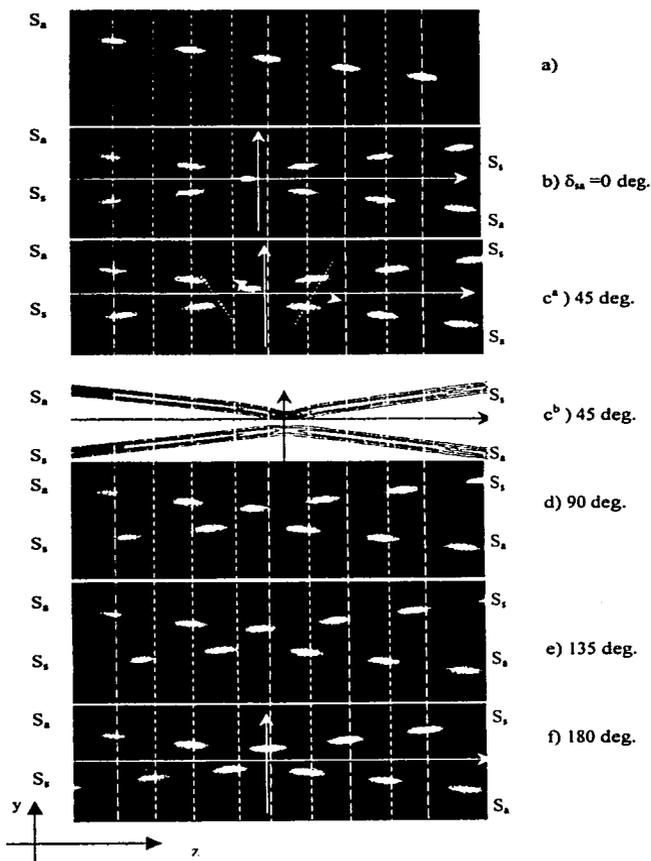


Figura 5.1.4. a) Distribución de fase sin colisión,  $S_a$   
 b-f) Cambio de fase inducido por la colisión entre solitones para diferentes diferencias de fase iniciales.

A partir de la ec. (5.2.2) y de la sustitución de  $\psi \rightarrow A$ ,  $\tau \rightarrow x$ ,  $\xi \rightarrow z$  para la obtención de la solución correspondiente de  $A(y, z)$  de la ec. (2.4.5), se pueden deducir las siguientes relaciones necesarias para las estimaciones teóricas:

- 1) El periodo de la fase del solitón esta dado por el ancho del rayo

$$\Lambda_0 = 4\pi k_0 \omega_0^2$$

- 2) el ángulo normalizado  $V_m$  puede expresarse a través del ángulo real  $\gamma_m$  mediante

$$V_m = \frac{k_0 \omega_0}{2} \tan \gamma_m$$

Para nuestras simulaciones utilizamos:

$$\omega_{FWHM} = 3.4 [\mu m] \text{ y } \gamma_2 = -\gamma_1 = \pm \gamma/2 = \pm 0.5^\circ \text{ (caso simétrico)} \Rightarrow \Lambda_0 = 321 \mu m$$

$$V_{1,2} = \pm 0.06 \text{ rad}$$

Como hemos considerado las mismas condiciones iniciales para cada solitón

$|\psi_m(\tau = \tau_0, \xi = 0)|^2 = 1$ , de la ec.(5.2.2) se puede probar que  $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$  (valores típicos de amplitud normalizada).

De la ec. (5.2.1) se puede obtener el cambio de fase teórico de  $\Phi = 177^\circ$  para ambos solitones. En consecuencia, los valores obtenidos en las simulaciones ( $\Lambda_0 \approx 340 \mu m$ ,  $\Phi \approx 180^\circ$ ), son valores aproximados a los obtenidos teóricamente.

Podemos suponer que las colisiones entre solitones espaciales tipo Kerr pueden explicarse cualitativamente con la ayuda de un simple modelo físico basado en el bien conocido hecho de que solitones tipo Kerr permanecen sin cambio después de la colisión, es decir, sin pérdida de energía.

Como se muestra en [3], la ec. (2.4.5) es integrable, es decir, tiene un sistema completo de ecuaciones de movimiento que demuestra el comportamiento conservativo del sistema de solitones tipo Kerr.

Podemos observar como ejemplo la figura 5.1.4c<sup>a</sup>,c<sup>b</sup>, en donde se refleja un caso general de colisiones entre solitones con la misma amplitud y diferencia de fase inicial  $\delta\phi \neq 0$ . La figura 5.1.4c<sup>b</sup> muestra a  $\eta_{1,2}$  y  $V_{1,2}$  sin cambios antes y después de la colisión, sin embargo, en la zona de colisión existe un intercambio de energía entre solitones ocasionado por la sobre posición de sus perfiles.

Los resultados de las simulaciones realizadas con diferentes diferencias de amplitudes se muestran en la figura 5.1.5. En estas simulaciones puede observarse la disminución del cambio de fase ( $\Phi$ ) al aumentar la diferencia de amplitudes entre solitones.

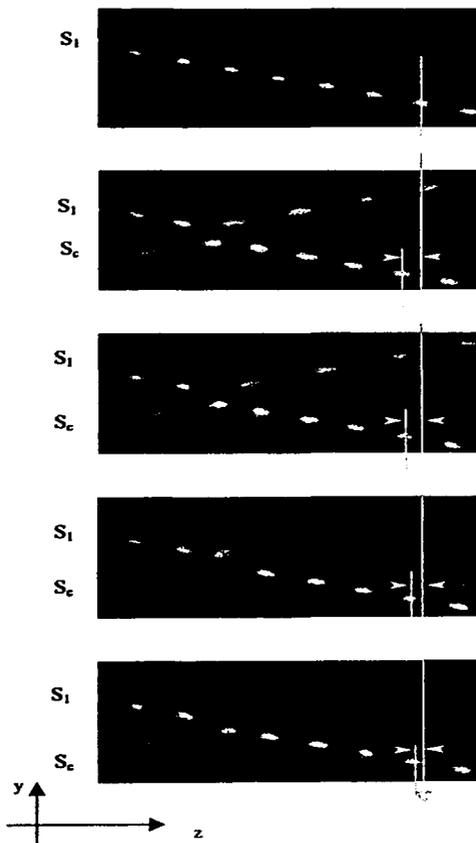


Figura 5.1.5. El cambio de fase decrece al disminuir la razón de amplitudes.

b)  $\eta_2 = 0.9\eta_1$ , c)  $\eta_2 = 0.8\eta_1$ , d)  $\eta_2 = 0.7\eta_1$ , e)  $\eta_2 = 0.6\eta_1$ .

La figura 5.1.6 muestra el cambio de fase ( $\Phi$ ) en función de  $\eta_2/\eta_1$  (con  $\eta_1 = 1/2$ ), para el caso teórico y para las simulaciones realizadas por medio del método FD-BPM. La curva formada por 5 puntos fue obtenida a partir de nuestras simulaciones (fig. 5.1.5).

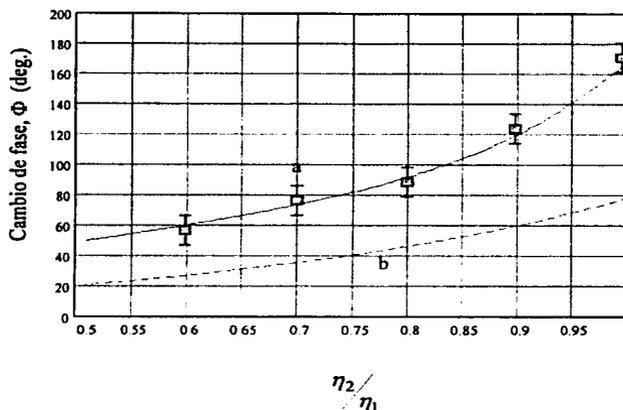


Figura 5.1.6. Decremento exponencial del cambio de fase en función de la razón de amplitudes entre solitones ópticos espaciales tipo Kerr.

En ambas curvas (a, teórica y simulaciones) de la figura 5.1.6, podemos observar un decremento exponencial del cambio de fase de  $180^\circ$  a  $40^\circ$  aproximadamente al variar la diferencia de amplitudes entre 0.5 y 1. Esto significa que para un cambio de fase específico, la relación de amplitudes ( $\eta_2/\eta_1$ ) está bien determinada. La curva teórica b de la fig. 5.1.6 muestra la disminución de la caída exponencial al aumentar el ángulo de incidencia entre solitones.

Para mostrar la validez de la curva de la figura 5.1.6, hemos desarrollado un esquema más para la realización de la compuerta lógica óptica. Éste esquema se muestra en la figura 5.1.7.

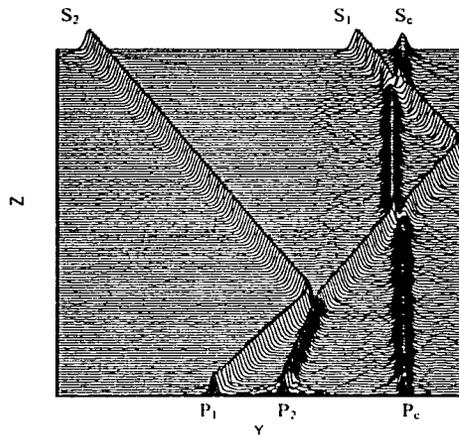
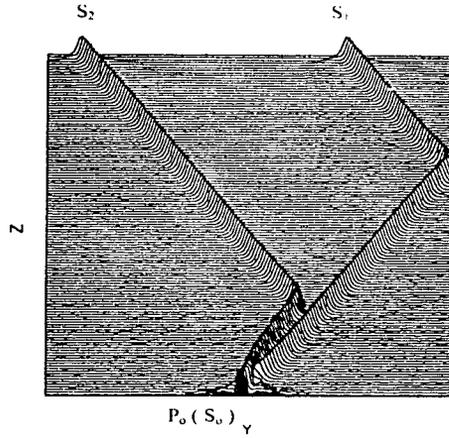


Figura 5.1.7. Doble colisión para obtener un cambio de fase de  $180^\circ$  para una diferencia de amplitudes entre solitones de 0.2  
 En éste caso suponemos que  $S_c$  es la señal (menor intensidad) y  $S_1$  es el soliton control

---

En éste esquema utilizamos la condición  $\eta_2/\eta_1 = 0.8$ , la cual provee un cambio de fase de  $90^\circ$  en cada colisión. Para obtener un cambio de fase total de  $180^\circ$ , se requieren de dos colisiones de  $90^\circ$  cada una y de la figura 5.1.6 vemos que se requiere de una diferencia de amplitudes de aproximadamente 0.2. Como podemos ver, se trata de un caso más real, ya que la señal de información es de menor intensidad que la señal de control.

Para éste caso, hemos considerado a  $S_c$  como el soliton señal y a  $S_1$  y  $S_2$  como el soliton control. Esto no afecta la forma de comprender la compuerta, por el contrario, esto permite una mayor comprensión en una situación real.

La principal ventaja de éste esquema o cualquier otro esquema con dos o más colisiones es que puede proporcionar una *amplificación* en la señal conmutada. Además, en nuestros estudios preliminares hemos encontrado que cuando se utiliza un esquema con múltiples colisiones es posible estabilizar el cambio de fase con respecto a las variaciones de  $\eta_2/\eta_1$  debido a que, como puede verse en la figura 5.1.6 curva b, es posible disminuir la caída de  $\Phi(\eta_2/\eta_1)$  por medio del incremento en el ángulo de la colisión.

---

### **Conclusiones del capítulo 5.**

**Se demostró que la colisión entre solitones espaciales tipo Kerr induce un cambio de fase después de ella. El cambio de fase depende de la diferencia de amplitudes entre solitones y decrece al aumentar la diferencia en las amplitudes. El rango del cambio de fase varía de  $180^\circ$  a  $40^\circ$  mientras la diferencia de amplitudes se reduce de 1 a 0.5.**

---

## Referencias del capítulo 5.

[1] B.L. Lawrence, M. Cha, J.U. Kang, et al. "*Large purely refractive nonlinear index of single crystal P-toluene sulphonate (PTS) at 1600 nm*". Electr. Lett. Vol. 30 / No. 5. pp. 447 – 448. 1994.

[2] M. Thakur, R.C. Frye, and B.I. Greene. "*Nonresonant absorption coefficient of single-crystal films of polydiacetylene measured by photothermal deflection spectroscopy*". Appl. Phys. Lett. Vol. 56 / No. 12. pp. 1187 – 1188. 1990.

[3] Zakharov V.E. and A.B. Shabat. "*Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*". Soviet Physics JETP, Vol. 34, No. 1, January 1972. pp 62 – 69.



---

## CONCLUSIONES GENERALES

En éste trabajo de tesis se describieron las bases teóricas de la propagación de solitones (temporales y espaciales) tipo Kerr. A partir de ello, se ha conjuntado el análisis numérico o simulación por computadora con una aplicación práctica de la propagación de solitones en un medio dispersivo no lineal.

Se demostró que la colisión entre dos solitones espaciales coherentes tipo Kerr puede inducir un cambio significativo de fase en ambos solitones. Además, se observó que el cambio máximo de fase ( $\Phi = 180^\circ$ ) después de la interacción se produce cuando las señales tienen las mismas amplitudes. El cambio de fase puede controlarse mediante la variación de la diferencia de amplitudes y del ángulo inicial entre solitones. *Es importante destacar el hecho de que el efecto de cambio de fase es insensible a la diferencia relativa de fase inicial entre solitones.*

Se encontraron las condiciones que permiten que la interacción entre solitones espaciales tipo Kerr con vectores de campo eléctrico paralelos sea independiente de la diferencia relativa de fase inicial entre ellos.

En base a los resultados obtenidos en el estudio de las interacciones entre solitones espaciales tipo Kerr, se propuso un dispositivo que proporciona una ganancia de más de 3 dB a la señal conmutada, además de que posee características aceptables para sistemas completamente ópticos en cascada. Observamos que para ángulos de incidencia mayores de  $1^\circ$  entre solitones, el desplazamiento espacial después de la interacción es prácticamente el mismo para los dos casos límite ( $\delta\phi = 0^\circ$ ,  $\delta\phi = 180^\circ$ ). Esto nos permitió elegir el ángulo de incidencia para la interacción entre solitones de tal manera que, sin importar la fase inicial de los solitones, el desplazamiento espacial después de la interacción es el mismo.

Los principales resultados del presente trabajo constituyen una parte esencial del manuscrito de nuestro artículo de investigación "*All-optical phase-independent logic elements based on the phase shift induced by coherent solitons collisions*" que en la actualidad se encuentra en revisión en la revista Journal of Lightwave Technology (se anexa la carta del editor).

124

# APENDICES

## ANEXO A. Sistema de unidades en óptica no lineal

Existen diferentes tipos de sistemas de unidades usados comúnmente en óptica no lineal. En este apéndice se describirán estos sistemas y se mostrará como convertir de un sistema a otro. Supondremos medios que responden de forma instantánea, es decir, podemos suponer que las susceptibilidades no lineales no presentan dispersión. Sin embargo, las expresiones encontradas para casos sin dispersión pueden ser útiles para medios dispersivos.

La relación entre la polarización  $\mathcal{P}$  y la intensidad de campo  $\mathcal{E}$ , en el sistema de unidades Gaussiano, está dado por

$$\mathcal{P}(t) = \chi^{(1)}\mathcal{E}(t) + \chi^{(2)}\mathcal{E}^2(t) + \chi^{(3)}\mathcal{E}^3(t) + \dots \quad (\text{A.1})$$

En el sistema de unidades Gaussiano, todos los campos  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{M}$  tienen las mismas unidades; en particular, las unidades de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{E}$  están dadas por

$$[\mathcal{P}] = [\mathcal{E}] = \frac{\text{statvolt}}{\text{cm}} = \frac{\text{statcoulomb}}{\text{cm}^2} = \left(\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}\right)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

por lo tanto, las unidades de las susceptibilidades en la ec. (A.1) son las siguientes:

$$\chi^{(1)} \text{ no tiene unidades,} \quad (\text{A.3a})$$

$$\chi^{(2)} = \left[\frac{1}{\mathcal{E}}\right] = \frac{\text{cm}}{\text{statvolt}} = \left(\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}\right)^{-1/2}, \quad (\text{A.3b})$$

$$\chi^{(3)} = \left[\frac{1}{\mathcal{E}^2}\right] = \frac{\text{cm}^2}{\text{statvolt}^2} = \left(\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}\right)^{-1}. \quad (\text{A.3c})$$

Sin embargo, las unidades de las susceptibilidades no lineales no se utilizan explícitamente en el sistema de unidades Gaussiano, se utiliza un solo estado cuyo valor está dado en unidades electrostáticas (esu).

Existen dos convenciones respecto de las unidades de la susceptibilidad en el sistema MKS. Algunos autores reemplazan la ec. (A.1) por

$$P(t) = \epsilon_0 [\chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \dots] \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \left[ \frac{F}{m} \right] \quad (\text{A.5a})$$

representa la permitividad en el espacio libre. Las unidades de  $P$  y  $E$  en el sistema MKS son

$$[P] = \frac{C}{m^2}, \quad (\text{A.5b})$$

$$[E] = \frac{V}{m}, \quad (\text{A.5c})$$

y debido a que  $F = C/V$ , las unidades de las susceptibilidades son:

$$\chi^{(1)} \text{ no tiene unidades}, \quad (\text{A.6a})$$

$$\chi^{(2)} = \left[ \frac{1}{E} \right] = \frac{m}{V}, \quad (\text{A.6b})$$

$$\chi^{(3)} = \left[ \frac{1}{E^2} \right] = \frac{m^2}{V^2}. \quad (\text{A.6c})$$

Otra convención en el sistema MKS es reemplazar la ec. (A.1) por

$$P(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \dots \quad (\text{A.7})$$

y ya que las unidades para  $P$ ,  $E$  y  $\epsilon_0$  siguen siendo las mostradas en la ec. (A.5), las dimensiones se convierten en:

$$\chi^{(1)} \text{ no tiene unidades}, \quad (\text{A.8a})$$

$$\chi^{(2)} = \frac{C}{V^2}, \quad (\text{A.8b})$$

$$\chi^{(3)} = \frac{Cm}{V^3}. \quad (\text{A.8c})$$

### Conversiones entre Sistemas.

Para encontrar una manera fácil de relacionar estos tres sistemas mencionados anteriormente, se reescribirán las ecs. (A.1), (A.4) y (A.7) de la siguiente forma:

$$P(t) = \chi^{(1)} E(t) \left[ 1 + \frac{\chi^{(2)}}{\chi^{(1)}} E^2(t) + \frac{\chi^{(3)}}{\chi^{(1)}} E^3(t) + \dots \right] \quad (\text{Gaussiano}), \quad (\text{A.1}')$$

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E(t) \left[ 1 + \frac{\chi^{(2)}}{\chi^{(1)}} E^2(t) + \frac{\chi^{(3)}}{\chi^{(1)}} E^3(t) + \dots \right] \quad (\text{MKS}), \quad (\text{A.4}')$$

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E(t) \left[ 1 + \frac{\chi^{(2)}}{\varepsilon_0 \chi^{(1)}} E^2(t) + \frac{\chi^{(3)}}{\varepsilon_0 \chi^{(1)}} E^3(t) + \dots \right] \quad (\text{MKS}), \quad (\text{A.7}')$$

Las series de potencias entre paréntesis cuadrados tienen que ser idénticas para cada una de estas ecuaciones. Sin embargo, los valores de  $E$ ,  $\chi^{(1)}$ ,  $\chi^{(2)}$  y  $\chi^{(3)}$  son distintas para cada sistema. En particular, de las ecs. (A.2) y (A.5) y sabiendo que  $1 \text{ [statvolt]} = 300 \text{ [V]}$ , se encuentra que

$$E(\text{MKS}) = 3 \times 10^4 E \quad (\text{Gaussiano}). \quad (\text{A.9})$$

Para determinar la relación entre la susceptibilidad lineal en el sistema de unidades Gaussiano y en el sistema MKS, utilizamos el hecho de que para un medio lineal  $\bar{D}$  en el sistema Gaussiano esta dado por

$$\bar{D} = E + 4\pi P = E(1 + 4\pi\chi^{(1)}), \quad (\text{A.10a})$$

y en el sistema MKS esta dado por

$$\bar{D} = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E(1 + \chi^{(1)}). \quad (\text{A.10b})$$

por lo que se encuentra que

$$\chi^{(1)}(\text{MKS}) = 4\pi\chi^{(1)}(\text{gaussiano}) \quad (\text{A.11})$$

---

Usando las ecs. (A.9) y (A.10) y recordando que las series de potencia entre paréntesis en (A.1'), (A.4') y (A.7') deben de ser iguales, se encuentra que las susceptibilidades no lineales están relacionadas de la siguiente manera:

$$\chi^{(2)}(MKS) = \frac{4\pi}{3 \times 10^4} \chi^{(2)}(\text{gaussiano}) \quad (\text{A.12})$$

$$\chi^{(2)}(MKS) = \frac{4\pi\epsilon_0}{3 \times 10^4} \chi^{(2)}(\text{gaussiano}) \quad (\text{A.13})$$

$$\chi^{(3)}(MKS) = \frac{4\pi}{(3 \times 10^4)^2} \chi^{(3)}(\text{gaussiano}) \quad (\text{A.14})$$

$$\chi^{(3)}(MKS) = \frac{4\pi\epsilon_0}{(3 \times 10^4)^2} \chi^{(3)}(\text{gaussiano}) \quad (\text{A.15})$$

---

**ANEXO B. Manuscrito del artículo sometido a revisión.**

**ALL-OPTICAL PHASE-INDEPENDENT LOGIC ELEMENTS BASED ON THE PHASE  
SHIFT INDUCED BY COHERENT SOLITON COLLISIONS**

**O.V. Kolokoltsev, R. Salas, and V. Vountesmeri**

*Centro de Instrumentos, Universidad Nacional Autónoma de México, . A.P. 70-186, CP 04510,  
CD Universitaria, D.F., México*

**Abstract-**

We demonstrate, for the first time to our knowledge, that a fast coherent collision between two Kerr spatial solitons can give rise to a significant phase shift for both interacting beams. The maximal collision-induced phase shift,  $\approx \pi$  rad., takes place when the amplitudes of the solitons are equal ( $\eta_1 = \eta_2$ ), and the length of the interaction zone is comparable with a soliton phase period. Depending on the ratio  $\eta_2/\eta_1$  and the collision angle between the solitons, the magnitude of the phase shift can be varied within a reasonable range, for example from  $180^\circ$  to  $40^\circ$ . The analysis of the effect performed by the finite-difference beam propagation method has shown that it is insensitive to the initial phase difference between the incident beams ( $\delta_i$ ), even in the case when  $\eta_1 \neq \eta_2$ . It has been demonstrated that the phenomenon can be used for all-optical three-soliton logic elements, which are capable of providing more than 3dB signal gain, and possess  $\delta_i$ - independent output characteristics.

**Corresponding Author:**

Oleg V. Kolokoltsev:  
Centro de Instrumentos,  
Universidad Nacional Autónoma de México,  
A.P. 70-186, CP 04510, CD Universitaria, Circuito Exterior, México, D.F.  
e-mail: olegk@aleph.cinstrum.unam.mx  
Fax: +525 6228620

---

A number of theoretical and experimental studies conducted in recent years on interactions between self-trapped optical wave beams, or spatial solitons, have clearly shown their significant potential for prospective ultra-fast optical communications and optical computing. Although optical beam self-trapping has been demonstrated to exist owing to a variety of nonlinear mechanisms [1,2], among them only the optical Kerr effect in nonresonant third-order materials (Kerr solitons), and two-wave parametric mixing in second-order materials (quadratic solitons) exhibit femtosecond response [3]. From the technological standpoint, however, the optical Kerr effect seems to be more attractive because no symmetry requirements exist for the nonlinear wave structures on which it is based. As is well known, the classical bright Kerr spatial soliton, which is stable only for the (1+1)-D wave beam geometry [4], represents the fundamental optical mode of the so-called self-induced waveguide channel in Kerr-type medium. It can be formed in planar nonlinear waveguides, when the beam power is sufficient to provide an exact balance between the beam self-focusing and diffraction effects [5,6]. Two coherent Kerr spatial solitons (to be considered here) can interact through either positive or negative inter-soliton forces caused by the self-phase modulation (SPM) and four-wave mixing (FWM) terms in the nonlinear Schrödinger equation (NLSE) [7-10]. The soliton interactions, proposed recently for all-optical applications, can be grouped within two basic subclasses, in which they exhibit themselves in a different manner. The first case refers to so-called slow interactions, which take place between two solitons with initially parallel trajectories and slightly overlapping profiles. These interactions strongly depend on the initial relative phase difference ( $\delta_i$ ) between incident beams, and are manifested in such well-known phenomena as soliton-soliton repulsion ( $\delta_i \approx \pi$ ), periodical spatial collapse ( $\delta_i = 0$ ) [8,9], and energy exchange inside the soliton pair ( $\delta_i \approx \pi/2$ ) [10]. The second case is associated with so-called fast interaction processes when the solitons collide at a converging angle that is comparable to, or larger than their angular spectra. In this case the solitons "pass through" each other, experiencing a slight position shift, but conserving their propagation angles and profile. In contrast to the previous case the fast interactions are phase independent. However, any optical switch based on the position shift effect requires an additional output structure of optical bent couplers [11]. Both these cases, including mutual soliton trapping [12], have been recently demonstrated to be effective for multigigabit optical signal routing, optical beam switching, and formation of soliton-based waveguides, which are able to guide and steer a weak optical signal [13-15].

As one can see from the above examples, the slow interactions possess a very rich and attractive properties for all-optical applications. However, the nonlinear elements based on the slow interaction effects may operate in a stable manner only if  $\delta_i$  is strictly fixed. Nevertheless, it is easy to image a situation when at least one of two incident beams possesses a random phase. Recently, a polarization modulator [16] and an optical dragging device [17] with multiple-cascade integrated optic schemes, developed to eliminate the influence of  $\delta_i$  on the device characteristics, have been proposed. In this work we describe a new property of the fast collisions between coherent spatial solitons, which can

open additional possibilities when developing  $\delta_r$ -independent all-optical elements. It consists of a  $\delta_r$ -independent shift in a soliton phase period ( $\Lambda_0$ ), which can be induced by the collision. In turn, this effect can be used for controlling the slow interaction processes. The fact that both the soliton envelopes, and beams acquire a phase shift after collision is well documented in the exact N-soliton solution to NLSE obtained by Zakharov and Shabat [4] (1972), and in the explicit two-soliton solution of Gordon [18] (1983). Experimental demonstration of the effect for optical fiber solitons ( $\approx 70^\circ$ -phase shift) can be found, for example, in [19, 20, 21]. However, to our knowledge, no reports on the phenomenon for spatial solitons and its applications have been presented. Here we discuss a physical model of the spatial effect, and present its possible realization in  $\delta_r$ -independent three-soliton logic gate schemes.

### Theoretical model

The numerical simulations of the collision-induced phase shift effect are illustrated in Fig.1. It shows the phase evolution of complex amplitudes of two TE<sub>0</sub>-mode equivalent spatial solitons ( $S_s$ ,  $S_a$ ) with the wavelength  $\lambda=1.5\mu$ , propagating in a planar nonlinear waveguide, and colliding in the film plane YZ, at a respectively large converging angle  $\gamma=1\text{deg}$ . In Fig.1 the axis Z coincides with the trajectory of the center of mass of the soliton pair, and the Y-axis passes through the center ( $Z_0$ ) of the interaction zone with the length  $\Delta Z = Z_{\text{out}} - Z_{\text{in}}$ , where  $Z_{\text{in}}$  and  $Z_{\text{out}}$  are determined from the condition that the distance between the soliton centers is  $\Delta y \approx 2\omega_{\text{FWHM}}$  (where  $\omega_{\text{FWHM}}$  is the full width at the half-intensity maximum of the beams). The conditions used for the simulations correspond to the fast collision regime, i.e. when  $\Delta Z \leq \Lambda_0$ . The results in Fig.1 were obtained by using the finite-difference beam propagation method (FD-BPM) applied to the (1+1)-D NLSE, which can be presented in the usual dimensionless form

$$j \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + 2|\psi|^2 \psi = 0. \quad (1)$$

As can be seen in Fig.1b (at  $Z=L$ ) the collision gives rise to the  $\approx 180^\circ$ - phase shift for both soliton beams, compared with the single soliton case shown in Fig.1a. Also, Fig.1a-f demonstrate that the phase shift for the soliton  $S_a$  (at  $Z=L$ ) remains equal to  $180^\circ$  at any  $\delta_{sa}$ , i.e. it is the same as in Fig.1c, although the initial phase of the soliton  $S_s$  is changed from 0 to  $180^\circ$ .

Analytically, as follows from soliton inverse scattering theory [4], the phase shift ( $\Phi$ ) induced by the soliton collision, in the approximation when solitons are well separated after collision, can be estimated by

$$\Phi_s = 2(-1)^s \left( \arctan \left[ \frac{\eta_s + \eta_p}{V_s - V_p} \right] - \arctan \left[ \frac{\eta_s - \eta_p}{V_s - V_p} \right] \right). \quad (2)$$

Here,  $\eta_m$  and  $V_m$  ( $m = 1, 2$ ) are, respectively, the normalized peak amplitudes of the solitons and their propagation angles, which are the characteristic parameters of the fundamental one-soliton solution to NLSE (1):

$$\psi_m(\xi, \tau) = 2i\eta_m \operatorname{sech}(2\eta_m[\tau - (\tau_0 - V_m\xi)]) \exp(i2V_m\tau + i4[V_m^2 - \eta_m^2]\xi + i\varphi_m), \quad (3)$$

where  $\varphi_m$  is the initial soliton phase, and  $\tau_0$  is the initial coordinate of the beam center. For the self focusing problem considered here, the variables in Eq(1-3) are related to the real ones as follows:  $\psi =$

$$k_0\omega_0 \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} A, \quad \tau = \frac{y}{\omega_0}, \quad \xi = \frac{z}{2k_0\omega_0^2}, \quad \text{where } \omega_0 = \omega_{\text{FWHM}}/1.763 \text{ is the soliton width parameter; } k_0, \text{ and } n_0$$

are the linear TE-wave propagation constant and the film refractive index, respectively;  $n_2$  is the nonlinear coefficient, and  $A$  is the complex amplitude of the soliton field  $E_y(y, z) = A(y, z)\exp[i(\omega t - k_0 z)]$ . The results shown in Fig.1 were obtained for the beams with  $\omega_{\text{FWHM}} \approx 3.4\mu$ , propagating in a polydiacetylene paratoluene-sulfonate (PDA-PTS) nonlinear waveguide ( $n_0 = 1.88$ ) on a  $\text{SiO}_2/\text{Si}$  substrate, which possesses the largest nonresonant  $n_2 = 2.2 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{W}$  at  $\lambda = 1.55\mu$  [22, 23].

From Eq.(3) and the corresponding solution for  $A(y, z)$ , which can be obtained from Eq.(3) by substituting  $\psi \rightarrow A$ ,  $\tau \rightarrow x$ ,  $\xi \rightarrow z$ , one can deduce the following relationships, which are necessary for the theoretical estimations.: 1) the soliton phase period  $\Lambda_0 = 4\pi k_0\omega_0^2$ , i.e. it is determined by the beam width,

and 2) the normalized angle  $V_m$  can be expressed through the real angle  $\gamma_m$  by  $V_m = \frac{k_0\omega_0}{2} \tan \gamma_m$ .

Therefore, for the given  $\omega_0$  and  $\gamma$  the theoretical  $\Lambda_0 = 321\mu$ , and the normalized propagation angles  $V_{1,2} = 0.06$  rad. (for the considered symmetrical case  $\gamma_2 = -\gamma_1 = \pm\gamma/2 = \pm 0.5^\circ$ ). Also, assuming that the initial conditions for both solitons are equivalent  $|\psi_m(\tau = \tau_0, \xi = 0)|^2 = 1$ , from Eq.(3) we can obtain the usual values for their normalized amplitudes  $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$ . For the above parameters Eq.(2) gives the theoretical

phase shift  $\Phi = 177$  deg. for both solitons. Therefore, as can be seen in Fig.1, the experimental  $\Lambda_0$  ( $\approx 340\mu$ ) and  $\Phi$  ( $\approx 180^\circ$ ) are in good agreement with the theory. It is necessary to note that in the case considered the interaction length  $\Delta Z \approx 2\omega_{\text{FWHM}}/\tan\gamma = 360\mu$  is comparable with  $\Lambda_0$ .

We suppose this phenomenon can be qualitatively explained with the help of a simple physical model based on the well-known fact that the Kerr solitons survive a collision completely unchanged. As shown in [4], Eq.(1) is integrable, i.e. it has a complete set of the motion integrals, which demonstrate the conservative character of the Kerr soliton system: the soliton power (or the soliton number)

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dy, \quad \text{the momentum } P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \frac{\partial}{\partial y} (\arg(\psi)) dy, \quad \text{and the Hamiltonian (H) are always}$$

conserved. Hence, any collisions between Kerr solitons are always fully elastic, without energy loss.

Let us now consider, for example, the result in Fig.1-c<sup>a</sup>,c<sup>b</sup> obtained for initial relative phase difference  $\delta_{sa} = 45$  deg, which reflects a general case of the collision between two equivalent solitons ( $\eta_1 = \eta_2$ ) when  $\delta_{sa} \neq 0$ . Fig.1-c<sup>b</sup> presents  $|\psi|^2$ , and illustrates the well-established fact that before and after the collision,  $\eta_{1,2}^2$  and  $V_{1,2}$  are unchanged. At the same time, however, within  $\Delta Z$  there is an energy exchange between solitons caused by strong overlapping of their Y-profiles. Mathematically, this effect is described by the FWM term in NLSE ( $\psi_1 \psi_2^*$ ), which depends on  $\delta_{sa}$ . Physically, it can be explained by the following mixed wave/particle-like approach. At the cross-section  $Z = Z_m$  the solitons can no longer be considered as independent waves. Within the overlapping area they form a mutual wave front, which can be characterized by the corresponding Poynting vector ( $\mathbf{P}^*$ ). Since  $\mathbf{P}^*$ , at  $Z = Z_m$ , is inclined toward the phase-delayed wave, it absorbs the energy localized in the overlapping area. This process, however, can take place only when  $Z_m < Z \leq Z_0$  because the conservation of the quantities N, P, and H requires equivalent reverse energy transfer within  $Z_0 < Z < Z_{out}$ , from the upper half-plane of the overlapping area ( $y > 0$ ) to the bottom one, to restore, after the collision, all initial soliton parameters, including their initial phase difference. Therefore, one can conclude that within  $\Delta Z$  the vector  $\mathbf{P}^*$  possesses the following symmetry:  $\mathbf{P}_y^*(Z_0 - \delta z) = -\mathbf{P}_y^*(Z_0 + \delta z)$ . This is equivalent to the mirror-like symmetry for the corresponding wave-fronts with respect to the Y-axis (Fig.1c<sup>a</sup>). Then, it is obvious that  $\mathbf{P}_y^* = 0$  at  $Z = Z_0$ . In turn, this is possible only if at the cross-section  $Z = Z_0$ :

$$I) \frac{\partial |\psi_{sa}|^2}{\partial z} = 0, \text{ i.e. } |\psi_{sa}|^2 \text{ has an extreme value, and}$$

II) the solitons will always arrive  $\pi$ -out of phase at any  $\delta_{sa} \neq 0$ , or in-phase in the case when  $\delta_{sa} = 0$ .

As can be seen in Fig.1-c<sup>b</sup>, this phenomenon takes place because the phase-delayed soliton, absorbing the energy, slows down, propagating from  $Z_m$  to  $Z_0$ , and, at the same time, the other one speeds up. It is evident that within  $Z_m < Z < Z_0$  the solitons  $S_a$  and  $S_s$  should acquire certain integral phase shifts  $\Delta\phi_a$  and  $\Delta\phi_s$ , respectively, which include a phase shift induced by their interaction. To estimate  $\Delta\phi_{a,s}$  let us assume that the soliton  $S_s$  has a peak at  $Z = Z_m$ . Then,  $\Delta\phi_a = \delta_{sa} + \Delta_{1x}$ , and  $\Delta\phi_s = \Delta_{2x}$ . Now, using the above conditions (I, II), which can be written in the form

$$\Delta\phi_a(Z_0 - 0) = \Delta\phi_s(Z_0 - 0) \quad \text{at } \delta_{sa} = 0,$$

and

$$\Delta\phi_a(Z_0 - 0) + \Delta\phi_s(Z_0 - 0) = (2m + 1)\pi \text{ rad.} \quad \text{at } \delta_{sa} \neq 0, \quad (4)$$

one can obtain that  $\Delta_{1x} = \Delta_{2x} = \Delta = m\pi + (\pi/2 - \delta_{sa}/2)$ . Therefore,  $\Delta\phi_a = m\pi + (\pi/2 + \delta_{sa}/2)$ , and  $\Delta\phi_s = m\pi + (\pi/2 - \delta_{sa}/2)$ . As can be seen in Fig.1-f, the condition  $\delta_{sa} = 180^\circ$  (i.e. when there is no power

exchange between the solitons) gives  $m = 1$ . Finally, taking into account the mirror-like symmetry of  $\psi$ , the integral phase difference between the  $S_x$  soliton peaks A and A\* (or  $S_x$  peaks B and B\*) shown in Fig.1-c can be presented through the combination of the phase difference between the peaks A, B and A\* (or B, A\*, and B\*):  $\delta_{aa} + 2\Delta\phi_s = 2\pi + \pi$  rad. Thus, this simple analysis confirms that the collision between two equivalent solitons can induce a ( $\approx\pi$ )-phase shift for both beams, which is  $\delta_\gamma$ -independent.

It should be noted that the effect takes place within a wide range of the collision angle  $\gamma$ , which satisfies the condition  $0.02 < (V_1 - V_2) \leq 0.2$ . This was verified numerically, for  $\gamma_c < \gamma < 3^\circ$ , where  $\gamma_c$  is the critical angle when two solitons can form a spatially oscillating soliton pair (experimental  $\gamma_c \approx 0.1^\circ$ ). Although the theory shows that within the above range of  $\gamma$  the phase shift changes from  $\approx 180^\circ$  to  $158^\circ$ , in the simulations this change was detected to be smaller.

Another important question is how the phase shift depends on the difference between the soliton amplitudes. Fig.2 shows the phase shift as a function of  $\eta_2/\eta_1$  ( at  $\eta_1 = 1/2$  ), calculated by Eq.(2), and, also, taken from the data obtained by FD-BPM, which are shown in Fig.3. Note that varying  $\eta_2$  in Eq.(2) we have to maintain  $\eta_2\omega_{02} = \text{Const}$ , which is determined by the well-known condition for the peak

intensity:  $A_0^2 = \frac{n_0}{k_0^2 \omega_0^2 n_2}$ . Both the theoretical curve, and the numerical data in Fig.2 demonstrate a

strong decrease of the phase shift, from  $\approx 180^\circ$  to  $40^\circ$ , as  $\frac{\eta_2}{\eta_1}$  changes from 1 to 0.5. This means that for a

given  $\Phi$  the ratio  $\frac{\eta_2}{\eta_1}$  has to be well stabilized. However, on the other hand, the data in Fig.2 demonstrate

that the effect can be used not only for simple binary phase controlling, but, also, for more complex phase coding of the signals. In the next Section we show that by using the condition  $\eta_2 = 0.8\eta_1$ , which

provides a  $\frac{\pi}{2}$ -phase shift for a single collision, it is possible to realize the situation when a low-intensity

signal soliton can induce a  $\pi$ -phase shift (which is usually required in optical processing devices) for a certain pump soliton by using a double collision scheme. The main advantage of this collision regime, or any multiple-collision scheme, is that it can provide significant signal gain. Moreover, such a solution can

significantly stabilize the phase shift with respect to the fluctuations of  $\frac{\eta_2}{\eta_1}$ , because, as can be seen in

Fig.2-curve b, it is possible to decrease the slope of  $\Phi(\frac{\eta_2}{\eta_1})$  by increasing the collision angle.

## Numerical simulation of phase-independent all-optical logic gate

To demonstrate the possible practical realization of the phenomenon we considered the thin-film all-optical logic element shown schematically in Fig.4. This element is based on the interaction between three coherent Kerr spatial solitons with equal amplitudes. Two of them are the pump beams  $S_a$  and  $S_b$  (Fig.4), with initially parallel propagation directions, whose inter-soliton interaction force can be switched from repulsive-type to attractive-type through the fast collision between  $S_a$  and the signal soliton  $S_s$ . It is supposed that  $S_a$  and  $S_b$  are obtained by  $-3\text{dB}$  splitting the input pump  $S_0$ . Hence, the initial relative phase difference for  $S_a$  and  $S_b$  ( $\delta_{ab}$ ) is always constant. For the scheme considered,  $\delta_{ab}$  is chosen to be equal to zero. Therefore, when the signal beam  $S_s$  is off, the pump beams  $S_a$  and  $S_b$ , with  $\delta_{ab} = 0$ , attract each other and fuse to form the output signal  $S_r$  shown in Fig.4. However, when the signal  $S_s$  is on, its fast interaction with  $S_a$ , gives rise to a  $180^\circ$ -phase shift for the soliton  $S_a$ . In this case, since  $\delta_{ab}$  is  $180^\circ$ , the soliton  $S_a$  will repel the soliton  $S_b$ , so that both solitons can be deflected to the separate output ports  $P_a$ ,  $P_b$  (Fig.4). The main advantage of this scheme is that the phase shift for signal  $S_s$  induced by the collision is insensitive to the initial phase difference between  $S_s$  and  $S_a$  ( $\delta_{sa}$ ).

Fig.5 shows the  $1\mu$ -thick PDA-PTS/SiO<sub>2</sub>/Si waveguide structure used for FD-BPM simulation of the phase-independent logic element based on the scheme presented in Fig.4. The length and the width of the structure are  $Z = 900\mu$  and  $Y = 60\mu$ , correspondingly. The input zone of the structure contains a  $300\mu \times 3\mu$  rectangular hollow, which can reflect spatial solitons, and is used in order to increase the initial spatial separation between  $S_a$ ,  $S_s$ , and  $S_b$ . The output zone of the structure has four  $100\mu$ - long rib waveguides used as output ports. The incident angles and phases of the beams  $S_a$  and  $S_b$  are chosen so that in the operation zone they propagate along parallel paths, with  $\delta_{ab} = 0$ . In the numerical model the solitons of TE<sub>0</sub>-mode were excited by three equivalent optical beams with Gaussian transversal profile, and the beam width parameter  $w = 4\mu$ . Fig.6 presents the numerical results obtained for a loss-less planar waveguide by 3-D FD-BPM, applied to (2+1)-D NLSE. As can be seen in Fig.6a, when the logic level of the signal soliton  $S_s$  is equal to zero, there is a fusion of the pump beams  $S_a$  and  $S_b$ , and the resulting wave, with doubled peak amplitude, is launched into the output port  $P_r$ . Hence, in this stage the scheme provides the logic "1" at  $P_r$ . Fig.6b shows another stage of the device, when the control soliton  $S_s$  induces the  $\pi$ -phase shift for the soliton  $S_a$ . As expected, it leads to the mutual repulsion of  $S_a$  and  $S_b$ , accompanied by their angular deflection to the output ports  $P_a$  and  $P_b$ . In this case, the output port  $P_r$  is characterized by the logic level "0". At the same time, the signals from the ports  $P_a$  and  $P_b$  can again be combined to be launched, for example, in a further logic cascade. It is important to note that the scheme provides  $3\text{dB}$ -gain of the signal  $S_s$  at the logic "1" at  $P_r$ , since it was supposed that  $S_a$  and  $S_b$  were obtained by  $-3\text{dB}$  splitting a certain initial pump with  $\eta(S_0) = 2\eta(S_s)$  (Fig.4).

The results shown in Fig.7 present another solution for the same all-optical device. In this case the device scheme is modified so that the  $180^\circ$ -phase shift for the soliton  $S_a$  is provided by the double collision between  $S_a$  and the signal  $S_s$ . This corresponds to the case when the amplitude of the signal wave  $\eta(S_s) = 0.8\eta(S_a)$ , and one collision induces  $\approx \frac{\pi}{2}$  rad. phase shift for  $S_a$ . The advantage of this scheme is that a) the signal soliton does not change its initial propagation direction because the double collision compensates its spatial shift, and b) the theoretical signal gain, taking into account that  $\eta(S_s) = 0.62\eta(S_a)$ , is 4dB.

It should be stressed that for both schemes FD-BPM analysis shows a small variation of the optical power in the ports  $P_r$ ,  $P_a$  and  $P_b$  (it lies within 3%), as the initial phase difference  $\delta_{in}$  changes over  $2\pi$  rad.

### Conclusions

It has been demonstrated that the fast collision between two coherent Kerr-type spatial solitons can induce a significant shift in the soliton phase. The maximal phase shift,  $\approx 180$  deg. for both interacting solitons, takes place when the solitons have equal amplitudes, and collide at the conditions when the length of the interaction zone is comparable with the soliton phase period ( $\Lambda_0$ ). The magnitude of the effect can be varied in a wide range of the phase angles, depending on the amplitude difference and the collision angle between the beams. For example, the phase shift changes from 180 deg. to 40 deg., as the ratio between the solitons amplitude decreases from 1 to 0.5. Also, the phase shift range narrows up to 60 deg., as the length of the interaction zone decreases to  $\Lambda_0/4$ . It should be stressed that the phenomenon is insensitive to the initial relative phase difference between the incident beams. The considered all-optical logic elements based on the phenomenon can provide more than 3dB- signal gain, and possess the characteristics acceptable for all-optical cascaded logic systems. The FD-BPM analysis of the logic elements shows that optical power switched between the device output ports is always the same at any initial phase difference between the control and signal solitons. We should like to note that the physical model of the phenomenon presented here is significantly simplified, and can describe only the interaction between two equivalent solitons. A deeper analysis of the effect and the stability parameters of the corresponding all-optical devices is required and will be presented soon.

### Acknowledgments

We gratefully acknowledge A. Grishin from the Royal Institute of Technology of Stockholm, and N. Bruce from the National University of Mexico for helpful comments. This work was supported by grant IN107100 from the DGAPA, UNAM science foundation.

---

## References

1. George I.A. Stegeman, Demetrios N. Christodoulides, and Mordechai Segev. "Optical Spatial Solitons: Historical Perspectives". IEEE J. on Select Topics in Quant. Electron. Vol. 6, No. 6, pp. 1419 – 1427. 2000.
2. A.W. Snyder. "Guiding Light into the Millennium" IEEE J. On Select Topics in Quant. Electron. Vol. 6, No. 6, pp. 1408 – 1412. 2000.
3. David F. Eaton. "Nonlinear Optical Materials". Science, Vol.253, (1991), p.p. 281-287.
4. V.E. Zakharov, and A.B. Shabat. "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media". Sov. Phys. JEPT, Vol. 34, No.1, pp. 62 – 69. 1972.
5. A. Barthelemy, S. Maneuf, and C. Froehly. "Propagation Soliton et auto-contiement de faisceaux laser par nonlinearité optique de Kerr". Opt. Comm., Vol. 55, No. 3, pp. 201–206. 1985.
6. J.S. Aitchison et al. "Observation of spatial optical solitons in a nonlinear glass waveguide". Opt. Lett. Vol. 15, No. 9, pp. 471 – 473. 1990.
7. G. I. Stegeman, and M. Segev. "Optical Spatial Solitons and Their Interactions: Universality and Diversity". Science, Vol. 286, (1999), p.p 1518-1523.
8. F. Reynaud, and A. Barthelemy. "Optically controlled Interaction between two fundamental soliton beams". Europhys. Lett. Vol. 12, No. 5, pp. 401–405. 1990.
9. J.S. Aitchison, A.M. Weiner, Y. Spilberg, D.E. Leaird, M.K. Oliver, J.L. Jackel, and P.W.E. Smith. "Experimental observation of spatial soliton interactions". Opt. Lett. Vol. 16, No. 1, pp. 15 – 17. 1991.
10. M. Shalaby, F. Reynaud, and A. Barthelemy. "Experimental observation of spatial soliton interactions with a  $\pi/2$  relative phase difference". Opt. Lett. Vol. 17, No. 11, pp. 778 – 780. 1992.
11. Tian-Tsong Shi, Sien Chi. "Nonlinear photonic switching by using the spatial soliton collision". Opt. Lett. V.15, No.20. pp.1123-1125. 1990.
12. M. Shalaby, and A. Barthelemy. "Experimental spatial soliton trapping and switching". Opt. Lett. Vol. 16, No. 19, pp. 1472 – 1474. 1991.
13. F. Garzia, C Sibilila, M. Bertolotti. "All-optical Soliton Based Router". Optics Communications, Vol.168, (1999), pp.277-285.
14. L. Friedrich, G. Stegeman, P. Millar, and J.S. Aitchison. "1x4 optical interconnect using electronically controlled angle steering of spatial solitons". IEEE Photonics Techn. Lett. Vol. 11, No. 8, pp. 988 – 990. 1999.
15. L. Lefort, and A. Barthelemy. "All-optical demultiplexing of a signal using collisions and waveguiding of spatial solitons". IEEE Photonics Techn. Lett. Vol. 9, No. 10, pp. 1364 – 1366. 1997.

- 
16. G. Cancellieri, F. Chiaraluze, E. Gambi, and P. Pierleoni. "All-Optical polarization modulator based on spatial soliton coupling". *J. of Lightwave Techn.* Vol. 14, No. 3, pp. 513 – 523. 1996.
17. F. Chiaraluze, E. Gambi, and P. Pierleoni. "A nonlinear device for optical dragging with compensation of the initial phase difference". *Electrotechnical Conference. MELECON-96, 8<sup>th</sup> Mediterranean*, Vol. 3, pp. 1497 - 1500. 1996.
18. J. P. Gordon. "Interaction forces among solitons in optical fibers". *Opt. Lett.*, Vol.8. No11, pp. 596 - 598. 1983.
19. S.R. Friberg, Susumu Machida, and Yoshihisa Yamomoto. Quantum-Nondemolition Measurement of the Photon Number of an Optical Soliton. *Phys. Rev. Lett.* Vol.69. No.22. pp.3165-3168. 1992.
20. K. Watanabe, H. Nakano, A. Honold, and Y. Yamomoto. Optical nonlinearities of excitonic self-induced-transparency solitons: Toward ultimate realization of squeezed states and quantum nondemolition measurement. *Phys. Rev. Lett.* Vol.62. No.19. pp.2257-2260. 1989.
21. S. R. Friberg, Takaaki Mukai, and Susumi Machida. Dual quantum nondemolition measurements via successive soliton collisions. *Phys. Rev. Lett.* Vol.84. No.1 pp.59-62. 2000.
22. B.L. Lawrence, M. Cha, J.U. Kang, et al. Large purely refractive nonlinear index of single crystal P-toluene sulphonate (PTS) at 1600 nm. *Electr. Lett.* Vol.30. No.5. pp.447-448. 1994.
23. M Thakur, R.C. Frye, and B.I. Greene. Nonresonant absorption coefficient of single-crystal films of polydiacetylene measured by photothermal deflection spectroscopy. *Appl. Phys. Lett.* Vol. 56. No.12. pp. 1187-1188. 1990.

**Anexo C. Copia de la carta para la revisión del manuscrito.**

Alan E. Willner  
Editor

**JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY**

A Joint IEEE/OSA Publication

12 December 2001

Dr. Oleg V. Kolokoltsev  
Universidad Nacional Autonoma de Mexico  
Centro de Instrumentos  
A.P. 70-186, CP 04510  
CD Universitaria, Circuito Exterior  
Mexico, D.F.

Manuscript title: "All-Optical Phase-Independent Logic Elements Based on the Phase Shift Induced Coherent Soliton Collisions"

Manuscript Length: approximately 7 pages

Dear Dr. Kolokoltsev:

Thank you for submitting your manuscript to the *Journal of Lightwave Technology*. I will contact you following the review of this paper, which has been assigned #5377, received 12 December 2001.

Authors' photographs and biographies are optional. If you wish to provide them, please be sure to include the biographies on your disk.

Please note that for all papers published in *J-LT*, there are voluntary page charges of \$110.00 per page for each page up to eight pages. For each page in excess of eight pages, there are mandatory overlength charges of \$260.00 per page. We have recently noted a significant decrease in authors' willingness to pay voluntary page charges. The outstanding reputation and high quality of *J-LT* depends in part on the collection of these charges. Please by all means attempt to have the voluntary page charges paid.

Sincerely,



Journal of Lightwave Technology • J-LT Editorial Office  
445 Hoos Lane • P.O. Box 1331 • Piscataway NJ 08855-1331, USA  
Phone 732.562.6829 • Fax 732.581.1138 • www.ieee.org

