20

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DENDROIDES Y LA PROPIEDAD DE KELLEY

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMATICA

P R E S E N T A:

ARACELI GUZMÁN TRISTÁN

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA

CODIRECTOR DE TESIS:
M.en C. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA

MÉXICO, D.F. 2002

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Dendroides y La Propiedad de Kelley"

realizado por Araceli Guzmán Tristán

con número de cuenta 9429998-2, quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Co-Director Propietario	M. en C. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla	
Propietario	Dr. Janusz Jerzy Charatonik	
Suplente	Dra. Isabel Puga Espinosa	
Suplente	Mat. Víctor Neumann Lara	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

DENDROIDES Y LA PROPIEDAD DE KELLEY

ARACELI GUZMAN

PARA ELHOIM

Quiero agradecer a todas las personas que me han ayudado tan solo con el hecho de estar a mi lado:

Principalmente agradezco a Vero y Alejandro la amistad, la disposición, la paciencia, el apoyo y toda la dedicación que han tenido conmigo.

A mi ma', mi pa' y mis hermanas Lurdes, Ale y Esme por todo el amor y la confianza que han puesto en mi aún sin explicaciones. A July por ser tan tierna y traviesa y a todos los que se me quedan en San Luis.

A mis amigos Dalia, Alexandra y Paul por darme todos esos extraños viernes y por escucharme tanto.

A Elho por enseñarme todo lo que cree, por recibir todo lo que le doy y por todos los distintos días que vivimos con Bilbo.

A Ana, Enrique, Any y Olen por darme una segunda familia.

Por último agradezco a mis amigos del instituto por compartir todo lo que cuesta e implica el querer ser Matemáticos.

Índice General

Introducción 1

Preliminares 5

1. Propiedades básicas de los Dendroides 11
2. Descomponibilidad 19
3. Arcos Maximales en Dendroides 29
4. Propiedad del Punto Fijo 35
5. Dendroides con la Propiedad de Kelley 39
6. Ejemplos importantes de Dendroides 61

Referencias 67

INTRODUCCIÓN

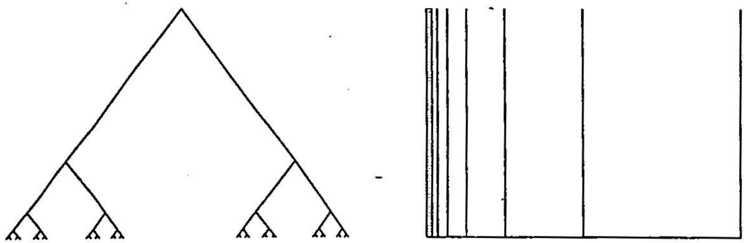
Un *continuo* es un espacio topológico, métrico, compacto, conexo y no vacío. Un subespacio de un continuo que también es continuo se llama *subcontinuo*.

En esta tesis trabajaremos con cierto tipo de continuos llamados dendroides, los cuales cumplen con muchas propiedades interesantes en la Teoría de Continuos.

Una idea aproximada de dendroide es la siguiente:

Un *dendroide* es un continuo tal que él y todos sus subcontinuos cumplen que siempre hay una y sólo una forma de viajar de un punto a otro.

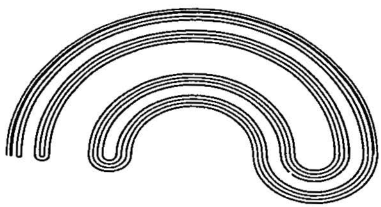
Tenemos como ejemplo los siguientes dendroides.



La idea original de esta tesis consistía en elaborar una monografía sobre dendroides, es por ello que en los primeros cuatro capítulos nos concentramos en demostrar sus propiedades más importantes.

En el Capítulo 1 daremos algunas propiedades básicas de estos espacios, por ejemplo veremos que no contienen curvas cerradas, que son únicamente arcoconexos y que todos sus subcontinuos son a la vez dendroides.

En el Capítulo 2 veremos que todo dendroide se puede ver como unión de dos de sus subcontinuos propios, lo cual no sucede por ejemplo con el siguiente continuo:



En el Capítulo 3 mostraremos que si damos una cadena creciente de arcos en un dendroide, siempre existe un arco que contiene a todos los de la cadena y que no está propiamente contenido en ningún arco.

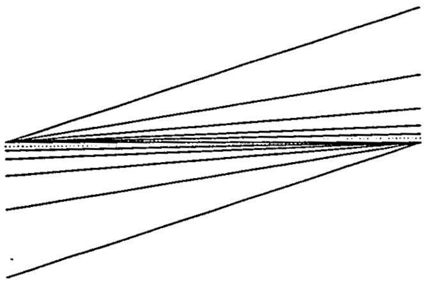
En el Capítulo 4 veremos que toda función continua de un dendroide en sí mismo deja un punto fijo.

Cabe mencionar que los capítulos 2, 3 y 4 resultan ser muy similares a los capítulos 7, 4 y 2 de [11], [10] y [8], respectivamente.

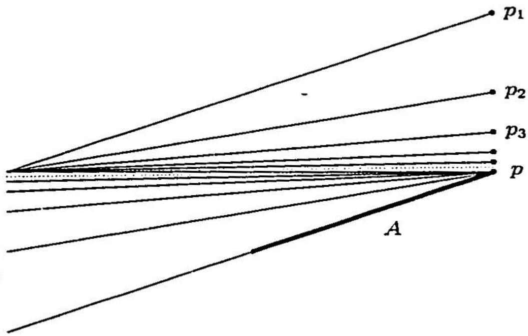
Se dice que un continuo X tiene la *propiedad de Kelley* si para cada punto $p \in X$, cada subcontinuo A de X tal que $p \in A$ y cada sucesión en X, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a p, se tiene que existe una sucesión de subcontinuos de X, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a A y tal que $p_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Decimos además que un dendroide X es *suave* si existe un punto $p \in X$ tal que para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a un punto $x \in X$, la sucesión de los arcos que unen a p con cada x_n es convergente y converge al arco que une a p con x.

En la página 258 de su libro de Hiperespacios [12], S.B. Nadler, Jr. en el ejemplo (5.10) asegura que el dendroide



tiene la propiedad de Kelley. A primera vista, uno pensaría que Nadler está en lo correcto. Sin embargo, si tomamos el punto p, la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y el continuo A como en el siguiente dibujo



podemos darnos cuenta que esta afirmación es falsa. Este hecho fue observado por Czuba quien probó algo todavía más fuerte, a saber:

(1) *Si un dendroide tiene la Propiedad de Kelley, entonces es suave.*

Este teorema ocupa el capítulo 5 de nuestro trabajo. Si usted compara las 20 hojas necesarias para la prueba y las 2 hojas que usó Czuba podría pensar que la diferencia sólo se debe a que en esta tesis, hemos hecho un desarrollo más completo. Sin embargo, esto no es así. Aunque la afirmación de Czuba es cierta, algunos pasos de su demostración son incompletos y otro de plano falso (la afirmación del renglón 25 de la página 3 de [2], en donde afirma que X debe contener una copia de la curva del $sen(\frac{1}{x})$).

Por estas razones, en este trabajo tuvimos que tomar sólo algunas de las ideas de Czuba y entonces construir una demostración completa y bien justificada de la afirmación (1).

De esta manera, el capítulo 5 es la parte más importante y original de este trabajo.

Por último, en el Capítulo 6 encontramos algunos ejemplos de dendroides especiales por sus propiedades.

PRELIMINARES

En esta parte del trabajo daremos los conocimientos necesarios para abordar el estudio de las propiedades a las que nos dedicaremos en cada uno de los siguientes capítulos.

Los resultados que aquí se exponen no incluyen una demostración de los mismos, ya que éstas alargarían el trabajo y nos alejarían de nuestros propósitos. Cada uno de ellos puede consulterse en [6] con mayor desarrollo.

Comenzamos con algunas definiciones.

Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo.

Los hiperespacios de un continuo X con los que trabajaremos se definen por:

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}$$

y

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

A estos espacios se les da una métrica definida de la siguiente manera:

Dados $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$ definimos:

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \varepsilon\}$$

donde d es la métrica del continuo X.

Es fácil comprobar que $N(\varepsilon, A) = \bigcup\{B_\varepsilon(a) : a \in A\}$ y, entonces $N(\varepsilon, A)$ es abierto en X.

La métrica de Hausdorff para 2^X se define entonces por:

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en 2^X definimos:

$$\liminf A_n = \{x \in X : \text{para toda } \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para casi toda } n \text{ (todas salvo un número finito)}\}$$

y

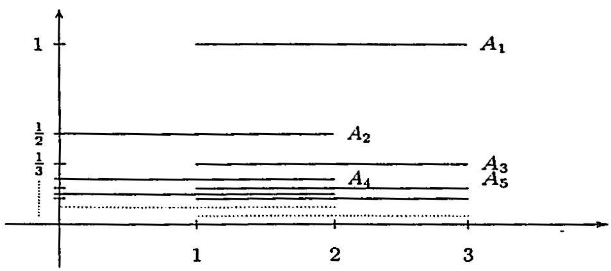
$$\limsup A_n = \{x \in X : \text{para toda } \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una infinidad de números } n\}.$$

Por ejemplo:

Para $n \in \mathbb{N}$, hacemos

$$A_n = \begin{cases} [0,2] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ par,} \\ [1,3] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Entonces $\liminf A_n = [1,2] \times \{0\}$ y $\limsup A_n = [0,3] \times \{0\}$.



0.1. Puede demostrarse (cap. 2, [6]) que una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en 2^X converge con la métrica de Hausdorff a un $A \in 2^X$ si y sólo si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$. Cuando esto sucede lo denotamos por $A_n \to A$.

También se puede ver que el límite cumple las siguientes propiedades.

Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en 2^X, tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$, entonces:

0.2. $(A_n \cup B_n) \to A \cup B$

0.3. Si $A_n \subset B_n$ para una infinidad de números n, entonces $A \subset B$

0.4. Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para una infinidad de números n, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

0.5. Un resultado importante del hiperespacio $(2^X, H)$ es que es completo, compacto y arcoconexo. No sólo eso, sino que además si nos restringimos al hiperespacio $(C(X), H)$, éste también resulta ser completo, compacto y arcoconexo.

Las funciones de Whitney son una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X y constituyen una herramienta muy importante para estudiar la estructura de los hiperespacios.

0.6. Una *función de Whitney* es una función continua $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ tal que:

(1) $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$ y

(2) Si $A \subset B \neq A$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Se ha demostrado que éstas funciones existen (cap. 4, [6]). Gracias a ellas podemos definir otro tipo de arcos en 2^X:

Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subset B \neq A$. Un *arco ordenado* de A a B en 2^X es una función continua $\alpha\colon [0,1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A, \alpha(1) = B$ y si $s < t$, entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t) \neq \alpha(s)$.

La existencia de arcos ordenados entre cualesquiera dos elementos de 2^X está determinada por el siguiente teorema (cap. 5, [6]):

Sean $A, B \in 2^X$, tales que $A \subset B \neq A$. Entonces existe un arco ordenado en 2^X de A a B si y sólo si toda componente de B intersecta a A.

0.7. Además si hablamos de dos elementos $A, B \in C(X)$ tales que $A \subset B \neq A$. Entonces siempre existe un arco ordenado en $C(X)$ de A a B (cap. 5, [6]).

Por último, enunciamos los siguientes resultados de los que haremos cita más adelante.

Lema 0.8. De los golpes en la Frontera (cap. 5, [6]). *Si X es un continuo, U es un subconjunto abierto propio y no vacío de X y D es una componente conexa de $\overline{U}$. Entonces $D \cap Fr(U) \neq \emptyset$.*

Lema 0.9 (cap. 1.1, [11]). *Todo continuo X es segundo numerable.*

Lema 0.10 (cap. 1.3, [11]). *Sean X un continuo y Z un subcontinuo de X. Si $X \setminus Z = A \cup B$, donde A y B son abiertos ajenos en X, entonces $Z \cup A$ y $Z \dot{\cup} B$ son subcontinuos de X.*

Lema 0.11 (cap. 1.5, [11]). *Sea X un continuo. Si D es un subcontinuo propio de X, entonces existe un subcontinuo propio C de X tal que $C \neq D$ y $D \subset C$.*

Teorema 0.12 (Teorema 3.11, [4]). *Si un espacio S es conexo en pequeño en todo punto, entonces es localmente conexo.*

Teorema 0.13 (Teorema 4.2, [3]). *Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de cada subconjunto abierto son abiertas en X.*

Teorema 0.14 (Teorema 3.15, [4]). *Sea X un continuo localmente conexo, entonces X es arcoconexo.*

Teorema 0.15 (Teorema 3.16, [4]). *Todo conjunto abierto conexo en un continuo localmente conexo es arcoconexo.*

Lema 0.16 (Corolario 8.15, [7]). *Sean X un espacio métrico completo y $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos cerrados de X tales que $X = \bigcup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces alguna F_n tiene un punto interior.*

1. Propiedades básicas de los Dendroides

Definición 1.1. Sean X un espacio topológico, Y un conjunto arbitrario y $p: X \to Y$ una función suprayectiva. Se define la *topología de identificación en Y determinada por p*, como $\{U \subset Y : p^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$ y se denota por $\tau(p)$.

Definición 1.2. Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función continua y suprayectiva $f: X \to Y$ es una *identificación* si la topología de Y es igual a la topología de identificación determinada por f.

Lema 1.3. *Sean (X, β) y (Y, τ) dos espacios topológicos. Si $f: X \to Y$ es una función continua, cerrada y suprayectiva; entonces f es una identificación.*

Demostración. Debemos demostrar que $\tau = \tau(f)$.

$\subseteq$) Sea $U \in \tau$. Como f es continua tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Entonces $U \in \tau(f)$. Por lo tanto, $\tau \subseteq \tau(f)$.

$\supseteq$) Sea $U \in \tau(f)$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X, por lo que $X \backslash f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \backslash U)$ es cerrado en X. Además como f es cerrada y suprayectiva tenemos que $f(f^{-1}(Y \backslash U)) = Y \backslash U$ es cerrado en Y. Por lo tanto, U es abierto en Y; es decir, $U \in \tau$.

$\square$

Lema 1.4. *Sea $f: X \to Y$ una identificación entre espacios topológicos X y Y. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Sea $U \subset Y$ un conjunto abierto. Por el Teorema 0.13 basta demostrar que las componenetes conexas de U son abiertas en X. Sea K una componente conexa de U, entonces $K \subseteq U$. Tomamos un punto $x \in f^{-1}(K)$. Como f es continua, tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Además como $K \subseteq U$ podemos concluir que $x \in f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(U)$. Sea C_x la componenete conexa de x en el abierto $f^{-1}(U)$. Como X es localmente conexo, tenemos que C_x es abierto en X. Además como C_x es conexo y f continua, llegamos a que $f(C_x)$ es un conexo que contiene a $f(x)$ y tal que $f(C_x) \subseteq U$. Por lo que $f(x) \in K \cap f(C_x)$. Como K es una componenete de U, tenemos que $f(C_x) \subseteq K$, y como f es suprayectiva concluimos que $x \in C_x \subset f^{-1}(K)$. Por lo tanto $f^{-1}(K)$ es abierto en X. Como f es una identificación, concluimos que K es abierto. □

Corolario 1.5. *Sean X y Y continuos y $f: X \to Y$ una función continua y suprayectiva, si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Sea U un subconjunto cerrado de X. Como X es compacto, entonces U es compacto. Por la continuidad de f tenemos que $f(U)$ es compacto en Y. Además Y es de Hausdorff, entonces $f(U)$ es cerrado en Y. Como U fue un subconjunto cerrado arbitrario en X podemos concluir que f es una función cerrada. Por el Lema 1.5 tenemos que f es una identificación y por el Lema 1.4 llegamos a que Y es localmente conexo. □

Lema 1.6. *Sea X un continuo, entonces X es conexo por trayectorias si y sólo si X es arcoconexo.*

Demostración. $\Leftarrow$) Si X es arcoconexo, en particular es conexo por trayectorias.

$\Rightarrow$) Sean p, q dos puntos distintos en X. Como X es conexo por trayectorias, existe una función continua $f\colon [0,1] \to X$ tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$. Por continuidad de f tenemos que $f([0,1])$ es un subconjunto compacto y conexo de X; es decir, $f([0,1])$ es un subcontinuo de X. Como $[0,1]$ es un espacio localmente conexo podemos concluir por el Corolario 1.5 que $f([0,1])$ es localmente conexo. Así, por el Teorema 0.14, $f([0,1])$ es arcoconexo. Como $\{p, q\} \in f([0,1])$, entonces existe un arco $\alpha\colon [0,1] \to f([0,1]) \subset X$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Además, p y q fueron puntos arbitrarios en X, entonces X es arcoconexo.

□

Definición 1.7. Un continuo X es *unicoherente*, si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Se dice también que X es *hereditariamente unicoherente* si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

Definición 1.8. Un continuo X es un *dendroide* si es conexo por trayectorias y hereditariamente unicoherente.

Veamos ahora algunas propiedades importantes de los dendroides.

Lema 1.9. *Todo dendroide es arcoconexo.*

Demostración. Sea X un dendroide, entonces X es un continuo conexo por trayectorias y por el Lema 1.6, X es arcoconexo. □

Lema 1.10. *Si X es un dendroide, entonces X no contiene curvas cerradas simples.*

Demostración. Supongamos que X contiene una curva cerrada simple A; es decir, A es la imagen de un homeomorfismo $h: S^1 \to X$. Entonces, A es un subcontinuo de X. Sean $p, q \in A$ puntos distintos, entonces $h^{-1}(p), h^{-1}(q) \in S^1$ y son puntos distintos, estos dividen a S^1 en dos subarcos B y C que comienzan en $h^{-1}(p)$ y terminan en $h^{-1}(q)$; es decir, $S^1 = B \cup C$. Como h es homeomorfismo, podemos concluir que $A = h(S^1) = h(B) \cup h(C)$ donde $h(B)$ y $h(C)$ son subcontinuos de A. Sabemos que X es un dendroide, entonces es hereditariamente unicoherente, por lo que A es unicoherente y $h(B) \cap h(C)$ es conexo. Por otra parte, $B \cap C = \{h^{-1}(p), h^{-1}(q)\}$ implica que $h(B) \cap h(C) = \{p, q\}$ lo cual es disconexo y nos lleva a una contradicción. Por lo tanto X no contiene curvas cerradas simples. □

Lema 1.11. *Si X es un dendroide y $\{a, b\} \in X$, con $a \neq b$, entonces existe un único arco en X que los une, el cual vamos a denotar por ab.*

Demostración. La existencia de un arco que une a con b se sigue del Lema 1.9.

Supongamos ahora que existen dos arcos distintos de a a b que llamaremos A_1 y A_2. Entonces, $\{a, b\} \subset A_1$ y $\{a, b\} \subset A_2$. Por tanto $\{a, b\} \subset A_1 \cap A_2$ y entonces, $A_1 \cup A_2 \in C(X)$. Como X es hereditariamente unicoherente y $A_1 \cup A_2 \in C(X)$ se sigue que $A_1 \cap A_2 \in C(X)$. Además, $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, entonces $A_1 \cap A_2$ es un subarco de A_1 que contiene a los puntos $\{a, b\}$, así que $A_1 \cap A_2 = A_1$. Del mismo modo podemos probar que $A_1 \cap A_2 = A_2$. Entonces, $A_1 = A_2$ lo cual es una contradicción; por lo tanto existe un único arco que une a con b. □

Lema 1.12. *Sean X un dendroide y p, q dos puntos distintos en X. Entonces $pq = \bigcap\{A \in C(X) : \{p, q\} \in A\}$.*

Demostración. $\supseteq$) Tenemos que pq es un subcontinuo de X que contiene a $\{p,q\}$. Entonces, $pq \in \{A \in C(X) : \{p,q\} \in A\}$, por lo tanto $\bigcap\{A \in C(X) : \{p,q\} \in A\} \subseteq pq$.

$\subseteq$) Para cada $A \in C(X)$ tal que $\{p,q\} \in A$ se tiene que $\{p,q\} \in A \cap pq$, entonces $A \cup pq \in C(X)$. Como X es hereditariamente unicoherente podemos concluir que $A \cap pq \in C(X)$. Entonces $A \cap pq$ es un subarco de pq el cual contiene a $\{p,q\}$, de modo que $A \cap pq = pq$. Entonces $pq \subseteq A$ para toda $A \in C(X)$ tal que $\{p,q\} \in A$. Por lo tanto, $pq \subseteq \bigcap\{A \in C(X) : \{p,q\} \in A\}$. □

Lema 1.13. *Sea X un dendroide y $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de subcontinuos de X. Entonces $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ es compacto y conexo.*

Demostración. Como cada A_α es un subcontinuo de X en particular es cerrado, así que $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ es cerrado. Además $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq X$ y X es compacto, entonces $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ es compacto.

Por otra parte, llamemos $A = \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ y veamos que:

(1) Si $A = \emptyset$, entonces A es conexo.

(2) Si $A = \{p\}$ para algún punto $p \in X$, tenemos que A es conexo.

(3) Si A consta de al menos dos puntos. Sean $\{p,q\} \in A$ con $p \neq q$. Entonces $\{p,q\} \in A_\alpha$ para toda $\alpha \in J$. Por el Lema 1.12 tenemos que $pq \subseteq \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in J\}$. Como p,q fueron puntos arbitrarios en A podemos concluir que A es arcoconexo. Por lo tanto, $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ es conexo.

□

Lema 1.14. *Todo subcontinuo de un dendroide X es un dendroide.*

Demostración. Sea A un subcontinuo de X. Para ver que A es un dendroide basta ver que A es conexo por trayectorias, ya que A es por definición un continuo hereditariamente unicoherente. Sean entonces $\{p,q\}$ dos puntos distintos en A. Dado que A es un subcontinuo de X y contiene a $\{p,q\}$, tenemos que $A \in \{B \in C(X) : \{p,q\} \in B\}$. Además, por el Lema 1.12 podemos concluir que $pq = \bigcap\{B \in C(X) : \{p,q\} \in B\} \subset A$; es decir, A es conexo por trayectorias. Por lo tanto A es un dendroide. □

Definición 1.15. Un continuo X se llama *hereditariamente arcoconexo* si todos sus subcontinuos son arcoconexos.

Lema 1.16. *Un continuo X es un dendroide si y sólo si dados dos puntos en X existe un único arco que los une y X es hereditariamente arcoconexo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si X es un dendroide por el Lema 1.11 se tiene que dados dos puntos en X existe un único arco que los une. Además por el Lema 1.14 sabemos que todos los subcontinuos de X son dendroides así que X es hereditariamente arcoconexo.

$\Leftarrow$) Como X es un continuo arcoconexo, basta ver que X es hereditariamente unicoherente. Para esto, sea A un subcontinuo de X tal que $A = B \cup C$ donde B y C son subcontinuos de X.

Veamos que $C \cap B$ es conexo:

(1) Si $C \cap B = \emptyset$, entonces $C \cap B$ es conexo.
(2) Si $C \cap B = \{p\}$ para algún punto p en X, entonces $C \cap B$ es conexo.
(3) Si $C \cap B$ contiene al menos dos puntos. Sean $\{p,q\}$ dos puntos distintos en $C \cap B$. Por hipotésis existe un único arco D que une p con q. Además

X también es hereditariamente arcoconexo, entonces B y C son arcoconexos. Como $\{p, q\} \in B$, entonces $D \subset B$ y analogamente $D \subset C$. Por lo que $D \subset B \cap C$; es decir, $B \cap C$ es arcoconexo, y entonces conexo.

Por lo tanto X es hereditariamente unicoherente. Entonces, X es un dendroide.

□

Definición 1.17. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

Teorema 1.18. *Un espacio topológico X es una dendrita si y sólo si X es un dendroide localmente conexo.*

Demostración. $\Leftarrow$) Si X es un dendroide localmente conexo, entonces por el Lema 1.10 tenemos que X no contiene curvas cerradas simples. Por lo tanto X es dendrita.

$\Rightarrow$) Si X es dendrita, entonces X es un continuo localmente conexo y por el Teorema 0.14 tenemos que X es arcoconexo. Basta demostrar entonces, que X es hereditariamente unicoherente.

Sean A y B subcontinuos de X y supongamos que $A \cap B$ es disconexo. Como $A \cap B$ es cerrado en X, entonces existen dos cerrados H y K tales que $A \cap B = H \cup K$ y $H \cap K = \emptyset$. Como X es un espacio normal, podemos concluir que existen dos abiertos U y V en X tales que $H \subset U$, $K \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces $A \cap (X \setminus (U \cup V))$ y $B \cap (X \setminus (U \cup V))$ son compactos en X. Además $A \cap (X \setminus (U \cup V)) \cap B = (A \cap B) \setminus (U \cup V) = \emptyset$. Así que, de nuevo por la normalidad de X podemos concluir que existen dos abiertos W y Z tales que $(A \setminus (U \cup V)) \subset W$, $(B \setminus (U \cup V)) \subset Z$ y $W \cap Z = \emptyset$. Tenemos entonces que $U \cup V \cup W$ es abierto y $A \subset U \cup V \cup W$. Sea G la componenete conexa de

$U \cup V \cup W$ que contiene a A. Como X es localmente conexo podemos concluir que G es abierto y así, por el Lema 0.15, G es arcoconexo.

Análogamente tenemos que si F es la componente conexa de $U \cup V \cup Z$ que contiene a B, entonces F es arcoconexo. Sean p un punto en H y q un punto en K. Como $H \cap K = \emptyset$ tenemos que $p \neq q$. Como $p \in H \subset A \subset G$ y $q \in K \subset A \subset G$, entonces existe un arco $A_1 \subset G$ que une p con q. Luego como $p \in H \subset B \subset F$ y $q \in K \subset B \subset F$, entonces existe un arco $A_2 \subset F$ que une p con q.

Si tuvieramos que $A_1 = A_2$, tendríamos que $A_1 = A_2 \subset G \cap F \subset (U \cup V \cup W) \cap (U \cup V \cup Z) \subset U \cup V$; pero $U \cup V$ es disconexo, así que $A_1 = A_2 \subset U$ ó $A_1 = A_2 \subset V$, pero $p \in H \cap A_1 \subset U \cap A_1$ y $q \in K \cap A_1 \subset V \cap A_1$, lo cual es una contradicción. Por lo que $A_1 \neq A_2$.

Como A_1 y A_2 son arcos distintos que comienzan y terminan en los mismos puntos concluimos que $A_1 \cup A_2$ contiene una curva cerrada simple, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A \cap B$ es conexo. Entonces X es un dendroide.

□

2. Descomponibilidad

En este capítulo analizaremos la propiedad que tienen todos los dendroides de ser *descomponibles* lo cual definimos como:

Definición 2.1. Un continuo X se llama *descomponible* si contiene dos subcontinuos propios A y B tales que $X = A \cup B$.

Un continuo es *indescomponible* si no es descomponible.

Lema 2.2. *Un continuo X es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos propios tienen interior vacío.*

Demostración. $\Leftarrow$) Supongamos que todos los subcontinuos propios de X tienen interior vacío y que X es descomponible. Entonces, existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Por lo que $X \backslash B \subsetneq A$. Como B es un subconjunto propio de X tenemos que $X \backslash B$ es abierto y no vacío; lo cual implica que $\emptyset \neq X \backslash B \subset A^{\circ}$. Por lo que A es un subcontinuo propio de X que tiene interior no vacío, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, X es indescomponible.

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que X posee un subcontinuo propio A cuyo interior es no vacío. Se tienen los siguientes casos:

(1) $X \backslash A$ es conexo.

En este caso tenemos que $\overline{X \backslash A} \in C(X)$. Como A° es un abierto no vacío que está contenido en A podemos concluir que $A^{\circ} \cap \overline{X \backslash A} = \emptyset$. Por lo que A y $\overline{X \backslash A}$ son subcontinuos propios de X que cumplen que $X = A \cup \overline{X \backslash A}$. Por lo tanto, X es descomponible.

(2) $X \backslash A$ es disconexo.

Entonces, existen subconjuntos H y K abiertos, ajenos y no vacíos de X tales que $X \setminus A = H \cup K$. Por el Lema 0.10 tenemos que $A \cup H$ y $A \cup K$ son subcontinuos propios de X, y además $X = (X \setminus A) \cup A = (H \cup K) \cup A = (A \cup H) \cup (A \cup K)$.

En ambos casos llegamos a que X es descomponible, lo cual es una contradicción. Por lo tanto todos los subcontinuos propios de X tienen interior vacío.

□

Definición 2.3. Sea X un continuo y p un punto en X, definimos la *composante de p en X* como el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que existe algún subcontinuo propio de X que contiene a p y a x.

Lema 2.4. *Sea K una composante de algún punto p en un continuo X. Entonces K es un subconjunto denso y conexo de X.*

Demostración. Es claro que K es la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a p, por lo que K es unión de conexos con el punto p en común, entonces K es conexo.

Supongamos ahora que K no es denso en X; es decir $\overline{K} \neq X$. Entonces $\overline{K}$ es un subcontinuo propio y no vacío (contiene a p) de X. Por el Lema 0.11 sabemos que existe un subcontinuo propio H de X tal que $K \subset H$ y $K \neq H$. Entonces H es un subcontinuo propio de X que contiene a p, por lo que $H \subset K$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto K es denso en X.

□

Lema 2.5. *Si X es un continuo descomponible, entonces X es composante de alguno de sus puntos.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos propios (y no vacíos) de X tales que $X = A \cup B$.

Si tuvieramos que $A \cap B = \emptyset$ tendríamos que X es disconexo, lo cual es absurdo. Por lo tanto $A \cap B \neq \emptyset$.

Sea pues $x \in A \cap B$ y K la composante de x. Como A y B son subcontinuos propios de X que contienen a x, podemos concluir que $A \subset K$ y $B \subset K$, de donde $X = A \cup B \subset K$. Por lo tanto $K = X$. Así que X es la composante de x. □

Definición 2.6. Si X es un continuo y $\{p, q\} \subset X$, decimos que X es *irreducible con respecto a p y q* si no existe ningún subcontinuo propio de X que contenga a ambos puntos.

Lema 2.7. *Sean X un continuo y p un punto en X. Entonces X es irreducible respecto a p y algún otro elemento de X si y sólo si la composante de p es un subconjunto propio.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si X es irreducible con respecto a p y q, entonces no existe ningún subcontinuo propio de X que contenga a $\{p, q\}$; es decir, q no está en la composante de p. Por lo que la composante de p es un subconjunto propio de X.

$\Leftarrow$) Si la composante de p es un subconjunto propio de X, entonces existe $q \in X$ tal que q no está en la composante de p. Entonces q no está en la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a p; es decir, no existe ningún subcontinuo propio de X que contiene a $\{p, q\}$. □

Corolario 2.8. *Si un continuo X es irreducible con respecto a $\{p, q\}$, entonces las composantes de p y q son subconjuntos propios de X y distintos entre sí.*

Demostración. Por el Lema 2.7 sabemos que las composantes de p y q son subconjuntos propios de X.

Si sus composantes fueran iguales tendríamos en particular que p estaría en la composante de q. Por lo que existiría un subcontinuo propio K de X que contiene a $\{p, q\}$. Lo cual no es posible ya que X es irreducible con respecto a $\{p, q\}$. Por lo tanto, sus composantes son subconjuntos propios y distintos entre sí. □

Corolario 2.9. *Si X es un continuo descomponible y no irreducible, entonces X posee exactamente una composante.*

Demostración. Por el Lema 2.5 sabemos que X es composante de alguno de sus puntos. Como X no es irreducible, por el Lema 2.7 concluimos que X no posee composantes propias. Por lo tanto, X mismo es su única composante. □

Lema 2.10. *Si X es un continuo descomponible e irreducible, entonces X posee exactamente 3 composantes.*

Demostración. Sea X un continuo descomponible e irreducible respecto a $\{p, q\}$. Por el Lema 2.5 tenemos que X es composante de alguno de sus puntos y del Corolario 2.8 obtenemos que las composantes de p y q son subconjuntos propios de X y distintos entre sí.

Tenemos entonces 3 composantes de X distintas entre sí. Mostraremos que no puede haber más.

Sea r un punto arbitrario en X y K su composante. Supongamos que $K \neq X$. Entonces existe $y \in X \backslash K$. Como X es descomponible, existen dos subcontinuos propios A y B tales que $X = A \cup B$. Ninguno de estos subcontinuos puede contener a ambos p y q, ya que X es irreducible respecto a este par, por lo que podemos asumir que $p \in A$ y $q \in B$. Supongamos además que $r \in A$. Dado que A es subcontinuo propio de X y contiene a r, tenemos que $A \subset K$ y como $p \in A$, entonces $p \in K$.

Supongamos por un momento que K también contiene a q. Entonces existe un subcontinuo propio D que contiene a r y a q. Además recordemos que $\{p, r\} \subset A$. Como $y \notin K$, ningún subcontinuo propio de X contiene a $\{r, y\}$, por lo que $y \notin A$ y $y \notin D$. Entonces $r \in A \cap D$, $y \notin A \cup D$ y $\{p, q\} \subset A \cup D$, lo cual quiere decir que $A \cup D$ es un subcontinuo de X que contiene a p y q, pero esto es una contradicción, ya que X es irreducible respecto a tal par de puntos. Por lo que $q \notin K$.

Demostraremos entonces que K es la composante de p.

$\subseteq$) Sea $x \in K$. Entonces existe un subcontinuo propio F de X tal que $\{r, x\} \subset F$ (K es la composante de r). En particular, como $q \notin K$, tenemos que $q \notin F$. Entonces $r \in A \cap F$, $q \notin A \cup F$ y $\{x, p\} \subset A \cup F$, por lo que $A \cup F$ es un subcontinuo propio de X que contiene a x y p. Por lo tanto x pertenece a la composante de p.

$\supseteq$) Sea x un elemento de la composante de p. Entonces existe un subcontinuo propio H de X tal que $\{x, p\} \subset H$. Como X es irreducible respecto a $\{p, q\}$ tenemos que $q \notin H$. Por lo tanto $p \in H \cap A$, $q \notin H \cup A$ y $\{x, r\} \subset H \cup A$, lo cual quiere decir que $H \cup A$ es un subcontinuo propio de X que contiene a x y a r, por lo que $x \in K$.

De las dos contenciones anteriores concluimos que K es precisamente la composante de p.

Por lo tanto no existen más composantes de las 3 que teníamos y entonces X tiene exactamente 3 composantes. □

Lema 2.11. *Si $p \in X$ y K es la composante de p, entonces existe una colección numerable $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subcontinuos propios de X tales que $K = \bigcup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. Por el Lema 0.9 sabemos que X posee una base numerable $\{V_1, V_2, \ldots\}$ con $V_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $U_n = V_n \setminus \{p\}$ y F_n la componente conexa de $X \setminus U_n$ que contiene a p y hacemos $F = \bigcup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Como cada $X \setminus U_n$ es cerrado y contiene a p, es claro que F_n es un subcontinuo de X que contiene a p para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $F \subseteq K$.

Veamos ahora que $K \subseteq F$.

Sea $x \in K$. Entonces, existe un subcontinuo propio H de X que contiene a $\{x, p\}$. Como $X \setminus H$ es abierto y no vacío, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V_m \subset X \setminus H$. Entonces, $p \notin V_m$ y por lo tanto $U_m = V_m$.

También es claro que $H \subset X \setminus U_m$, y dado que H es conexo y contiene a p se sigue que $H \subset F_m$. Así que $x \in F_m \subseteq \bigcup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Por lo tanto $K = \bigcup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Corolario 2.12. *Si X es un continuo indescomponible, entonces la colección de composantes de X es más que numerable.*

Demostración. Supongamos que X tiene sólo una cantidad numerable de composantes. Como X es indescomponible por el Lema 2.2 todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío. Por el Lema 2.11 tenemos que toda composante es unión numerable de subcontinuos propios de X.

Como X es unión de todas sus composantes, podemos concluir que X es una unión numerable de subcontinuos con interior vacío, lo cual no es posible (0.16). Por lo tanto, la colección de composantes de X es más que numerable. □

Lema 2.13. *Si X es un continuo indescomponible y K es una composante, entonces K es composante de cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sean K la composante de p y $x \in K$. Entonces existe un subconjunto propio H_0 de X que contiene a p y a x.

Ahora, si y está en la composante de x, existe un subcontinuo propio H de X que contiene a $\{x, y\}$, y entonces tenemos que $x \in H \cap H_0$. Esto y el hecho de que X sea indescomponible implican que $H \cup H_0$ es un subcontinuo propio que contiene a p, de donde, $H \cup H_0 \subset K$. Por lo tanto $y \in H \subset K$ y con esto demostramos que x está en K, así que la composante de x está contenida en K.

Por otro lado, si $y \in K$, existe un subcontinuo propio H_y de X que contiene a p y a y. Entonces por argumentos similares tenemos que $H_y \cup H_0$ es un subcontinuo propio de X, además es claro que contiene a x y a y. Esto implica que y está contenido en la composante de x.

De los dos párrafos anteriores se sigue que K es composante de x. □

Lema 2.14. *Si X es un continuo indescomponible, sus composantes son ajenas dos a dos.*

Demostración. Sean K_1 y K_2 composantes de p_1 y p_2, respectivamente, y tales que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Entonces, existe $y \in K_1 \cap K_2$, y por el Lema 2.13 tenemos que cada uno de los conjuntos K_1 y K_2 es la composante de y. Por lo tanto $K_1 = K_2$.

Así que dadas dos composantes distintas éstas deben ser ajenas. □

Lema 2.15. *Un continuo X es indescomponible si y sólo si posee un subconjunto $\{a, b, c\}$ tal que X es irreducible respecto a cada par de elementos de tal conjunto.*

Demostración. $\Leftarrow$) Sean $\{a, b, c\}$ como en el enunciado del lema. Supongamos que X es descomponible; es decir, existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Como $\{a, b, c\} \subset A \cup B$, forzosamente uno de los dos subcontinuos contiene a dos de los tres elementos (principio de las casillas). Pero tal hecho significa que X no es irreducible respecto a tal par de elementos, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto X es indescomponible.

$\Rightarrow$) Sea X un continuo indescomponible. Por los Lemas 2.11 y 2.14 podemos tomar tres composantes K_1, K_2 y K_3 de X, las cuales son ajenas dos a dos.

Sean a, b y c tales que K_1 es composante de a, K_2 lo es de b y K_3 lo es de c. Como son ajenas, es claro de la definición de composante que ningún subcontinuo propio contiene a dos de tales tres elementos, por lo que tenemos que X es irreducible respecto a cada par de elementos de $\{a, b, c\}$. □

Corolario 2.16. *Si X es un dendroide, entonces X es descomponible.*

Demostración. Supongamos que nuestro dendroide X es indescomponible. Entonces por el Corolario 2.12 tenemos que X posee una cantidad no numerable de composantes y por el Lema 2.14 estas composantes son ajenas dos a dos.

Sean p y q dos puntos en distintas composantes. Como X es arcoconexo, tenemos que existe un arco $A \subset X$ que une p con q. Pero X es irreducible respecto a este par de puntos, por lo que A no puede ser un subcontinuo propio de X. Entonces $X = A$; es decir, X es un arco el cual es descomponible y nos lleva a una contradicción. Por lo tanto X es descomponible. $\square$

3. Arcos Maximales en Dendroides

En este capítulo veremos que en todos los dendroides existen arcos maximales.

Lema 3.1. *Sea X un dendroide, B un subcontinuo de X y a un punto. Entonces existe un único punto $b \in B$ tal que $ab \cap B = \{b\}$ y además b tiene la propiedad de que $b \in ay$ para todo $y \in B$.*

Demostración. Para cada punto $y \in B$, consideremos el arco ay. Como $y \in B$ y X es dendroide, $ay \cap B$ es un subarco de ay.

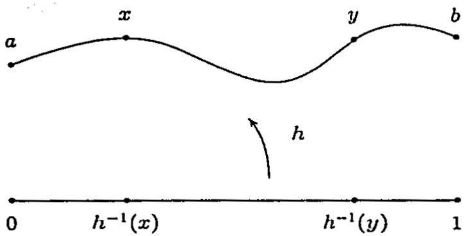
Tenemos entonces que $ay \cap B = by$ para un único punto $b \in B$, por lo que $ab \cap B = \{b\}$.

Consideremos ahora $y' \in B$, $y' \neq y$, y el arco ay'. Por lo que acabamos de mostrar existe un punto $b' \in B \cap ay'$ tal que $ab' \cap B = \{b'\}$. Entonces $(ab \cup ab') \cap B = \{b, b'\}$. Como X es un dendroide, esta intersección debe ser conexa, por lo que $b = b'$, de donde $b \in ay'$.

De este modo hemos mostrado que $b \in az$ para toda $z \in B$. $\square$

Cuando hablamos de un arco ab en X, sabemos que nos referimos a la imagen del intervalo $[0, 1]$ bajo algún homeomorfismo h tal que $h(0) = a$ y $h(1) = b$. Dado que en el intervalo $[0, 1]$ tenemos un orden $\leq$, podemos inducir este orden al arco ab mediante el homeomorfismo h de la siguiente forma.

Si $x, y \in ab$, decimos que $x \leq y$ en ab si $h^{-1}(x) \leq h^{-1}(y)$ en el intervalo $[0, 1]$. Análogamente, podemos decir que $x < y$, $x > y$ ó $x \geq y$ cuando sus imágenes bajo h^{-1} respetan estos órdenes.



Definición 3.2. Sea X un dendroide, se dice que un arco α contenido en X es un *arco maximal* si α no está contenido propiamente en ningún otro arco de X.

Teorema 3.3. (Teorema de Reducción de Brouwer). *Sea Y un espacio segundo numerable y $\mathcal{K}$ una familia no vacía de subconjuntos cerrados de Y con la propiedad de que para cada sucesión creciente $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ de elementos de $\mathcal{K}$, existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K_n \subset K$ para toda $n \geq 0$. Entonces $\mathcal{K}$ contiene un elemento maximal en $\mathcal{K}$; es decir, un elemento de $\mathcal{K}$ que no está contenido en ningún otro elemento de $\mathcal{K}$.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \geq 1\}$ una base numerable para la topología de Y. Fijamos $K_0 \in \mathcal{K}$. Elegimos $K_1 \in \mathcal{K}$ con las siguientes propiedades (suponiendo que existe):

(1) $K_0 \subset K_1$

(2) $K_1 \cap U_1 \neq \emptyset$.

Si estas propiedades no se cumplen para ninguna $K \in \mathcal{K}$, entonces hacemos $K_1 = K_0$.

De manera inductiva, elegimos $K_{n+1} \in \mathcal{K}$ (suponiendo que existe) tal que:

(1) $K_n \subset K_{n+1}$ y

(2) $K_{n+1} \cap U_{n+1} \neq \emptyset$.

Si estas propiedades no se cumplen para ninguna $K \in \mathcal{K}$, entonces hacemos $K_{n+1} = K_n$. Con esto terminamos la construcción de la sucesión creciente

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$$

Por hipótesis tenemos que existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K_n \subset K$ para toda $n \geq 0$.

Veremos que K es un elemento maximal en $\mathcal{K}$.

Para esto, supongamos que existe $K' \in \mathcal{K}$ tal que $K \subseteq K'$ y $K \neq K'$. Tomemos un elemento x tal que $x \in K' \backslash K$. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_m \subset Y \backslash K$.

Como $K_m \subset K$, entonces $K_m \cap U_m = \emptyset$.

Por otra parte, $K_{m-1} \subset K'$ y $K' \cap U_m \neq \emptyset$. De acuerdo con la definición de K_m, teníamos que haber tomado a K_m con la propiedad de que $K_m \cap U_m \neq \emptyset$. Esto es una contradicción y por lo tanto K es un elemento maximal de $\mathcal{K}$. $\square$

Teorema 3.4. *Sea X un dendroide, entonces:*

(1) *Para toda sucesión creciente de arcos $\{a_n b_n\}_{n=0}^{\infty}$ en X, existe un arco ab tal que $a_n b_n \subset ab$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y*

(2) *Dado un arco α en X, existe un arco maximal $\gamma \subset X$, tal que $\alpha \subset \gamma$.*

Demostración. Nos concentraremos en probar (2), la demostración de (1) estará claramente implícita en lo que haremos.

Sea $\alpha = a_0 b_0$ un arco en X. Vamos a aplicar el Teorema de Reducción de Brouwer a la familia $\mathcal{K} = \{\beta : \beta \text{ es un arco en } X \text{ y } \alpha \subset \beta\}$. Para esto, tomemos una sucesión creciente

$$a_0 b_0 \subset a_1 c_1 \subset a_2 c_2 \subset \dots;$$

de elementos de $\mathcal{K}$. Tenemos que probar que existe un elemento de $\mathcal{K}$ que contiene a todos estos arcos.

Elegimos una $a \in a_0b_0 \setminus \{a_0, b_0\}$.

Primero veremos que existe un arco ab tal que $ac_k \subset ab$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Como X es compacto, la sucesión $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a un punto $b \in X$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \overline{\bigcup\{b_nb_m : m > n\}}$. Claramente B_n es conexo y compacto, por tanto B_n es un subcontinuo de X.

Por el Lema 1.14 sabemos que B_n es un dendroide, entonces por el Corolario 2.16 B_n se puede escribir en la forma: $B_n = A_n \cup C_n$, donde A_n y C_n son subcontinuos propios de B_n. Como $\{b_m : m > n\} \subset A_n \cup C_n$, podemos suponer que $\{m \in \mathbb{N} : b_m \in C_n\}$ es infinito.

Veremos entonces que $b_n \in A_n \setminus C_n$.

Supongamos por el contrario que $b_n \in C_n$. Dada $x \in \bigcup\{b_nb_m : m > n\}$, tenemos que $x \in b_nb_m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Como $\{k \in \mathbb{N} : b_k \in C_n\}$ es infinito, entonces existe $m' > m \in \mathbb{N}$ tal que $b_{m'} \in C_n$. Como C_n es arcoconexo (Lema 1.14), entonces $b_nb_{m'} \subset C_n$, como $b_nb_m \subset b_nb_{m'}$, entonces $x \in b_nb_m \subset C_n$. Hemos probado que $\bigcup\{b_nb_k : k > n\} \subset C_n$ y como C_n es cerrado, concluimos que $C_n = B_n$. Esto es una contradicción que nace de suponer que $b_n \in C_n$. Por lo tanto, $b_n \in A_n \setminus C_n$.

Por el Lema 3.1 existe $p \in C_n$ tal que $b_np \cap C_n = \{p\}$ y $p \in b_ny$ para toda $y \in C_n$.

Veremos ahora que $B_n = b_np \cup C_n$.

Sea $x \in \bigcup\{b_nb_m : m > n\}$. Como $\{m \in \mathbb{N} : b_m \in C_n\}$ es infinito, $x \in b_nb_m$ para alguna $b_m \in C_n$, por la forma en que elegimos a p, $p \in b_nb_m$. Entonces, $x \in$

$b_n p \cup pb_m$. De manera que $x \in b_n p \cup C_n$. Por tanto $\bigcup\{b_n b_m : m > n\} \subset b_n p \cup C_n$ y, como este conjunto es cerrado, podemos concluir que $B_n = b_n p \cup C_n$.

Como $\{m \in \mathbb{N} : b_m \in C_n\}$ es infinito y C_n es cerrado, entonces $b \in C_n$.

Por el Lema 3.1 existe $q \in B_n$ tal que $aq \cap B_n = \{q\}$ y $q \in ay$ para toda $y \in B_n$.

Aseguramos que $q = b_n$.

Tomemos $m > n$ tal que $b_m \in C_n$. Tomamos el orden natural del arco ab_m que cumple con que $a < b_m$.

Por hipótesis, $ab_n \subset ab_m$. Así que $b_n \in B_n$, $q \in ab_n$. Por la elección de p, tenemos que $p \in b_n b_m$. Por tanto, $a \leq q \leq b_n < p \leq b_m$. Si ocurre que $q \in C_n$, entonces $b_n \in qb_m \subset C_n$. Esto es una contradicción pues ya habíamos probado que $b_n \notin C_n$. Por tanto $q \notin C_n$. Como $q \in B_n = b_n p \cup C_n$, entonces $q \in b_n p$. Esto prueba que $b_n \leq q$. Por tanto, $b_n = q$.

Ya que $b \in B_n$, por la propiedad que define a q, concluimos que $b_n = q \in ab$.

Hemos probado entonces que $b_n \in ab$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $ab_n \subset ab$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Dada $k \in \mathbb{N}$, existe una $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > k$ y $c_m = b_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces $ac_k \subset ac_m = ab_n \subset ab$. Esto muestra que $ac_k \subset ab$ para toda $k \in \mathbb{N}$. De manera análoga existe $g \in X$ tal que $a_k a \subset ga$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Queremos ver que el arco gb contiene a todos los arcos $a_k c_k$.

Primero veremos que $a \in gb$. Para esto, basta mostrar que $ga \cap ab = \{a\}$. Supongamos por el contrario, que existe un punto $x \in ga \cap ab \setminus \{a\}$. Entonces $xa \subset ga \cap ab$. Como $a_0 \in ga - \{a\}$ y $b_0 \in ab \setminus \{a\}$, entonces existe un punto $y \in ax \cap a_0 a \cap ab_0 \setminus \{a\}$. Esto es una contradicción puesto que $a_0 a \cap ab_0 = \{a\}$. Con esto hemos probado que $a \in gb$.

Entonces $ac_k \subset ab \subset gb$ y $a_k a \subset ga \subset gb$. Por tanto $a_k c_k \subset gb$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Como X es un espacio separable, podemos aplicar el Teorema de Reducción de Brouwer (Teorema 3.3) a la familia $\mathcal{K}$, entonces $\mathcal{K}$ contiene un elemento maximal γ. □

Corolario 3.5. *Sea X un dendroide, dados $a, b \in X$, existe un arco maximal γ tal que $a, b \in \gamma$.*

Demostración. Si $a \neq b$, entonces este corolario es consecuencia directa del Teorema 3.4.

Si $a = b$, entonces tomemos $c \in X - \{a\}$. De esta manera, el arco deseado se puede encontrar aplicando el Teorema 3.4 al arco ac. □

4. Propiedad del Punto Fijo

Definición 4.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X *tiene la propiedad del punto fijo* si para toda función continua $f: X \to X$ se tiene que existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Teorema 4.2. *Sea X un dendroide. Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Supongamos que X no tiene la propiedad del punto fijo; es decir, existe una función continua $f: X \to X$ tal que $f(x) \neq x$ para todo punto $x \in X$.

Definimos $h: X \to \mathbb{R}$ por: $h(x) = d(x, f(x))$ donde d es la métrica del espacio X. Entonces h es continua. Como X es compacto, h alcanza su mínimo en algún punto $x_0 \in X$. Supongamos que $h(x_0) = 2\varepsilon$. Entonces

$$d(x, f(x)) \geq 2\varepsilon \quad \text{para toda } x \in X. \tag{1}$$

Afirmación: Existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cumplen las siguientes condiciones:

(1n) Para cada $i < n$, $d(a_i, a_{i+1}) = \frac{\varepsilon}{2}$.

(2n) Para cada $i < n$ si $p \in a_i a_{i+1}$ y $a_i \neq p \neq a_{i+1}$, entonces $d(a_i, p) < \frac{\varepsilon}{2}$.

(3n) $a_1 a_n = \bigcup\{a_i a_{i+1} : i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\}$.

(4n) Si $n > 1$, entonces $a_n \in a_1 f(a_n)$ y $a_1 \neq a_n \neq f(a_n)$.

Demostración. Por inducción sobre n.

Para $n = 1$, sea $a_1 \in X$ entonces las condiciones (1n), (2n),(3n), (4n) se cumplen por vacuidad.

Supongamos que se cumplen las condiciones para n.

Demostraremos entonces las condiciones para el caso $n + 1$.

Sea $g\colon a_n f(a_n) \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = d(a_n, x)$. Entonces g es una función continua definida en el compacto $a_n f(a_n)$. Como $g(a_n) = 0$ y $g(f(a_n)) \geq \varepsilon$ tenemos que, por el Teorema del Valor Intermedio, existe un punto $z \in a_n f(a_n)$ tal que $g(z) = \frac{\varepsilon}{2}$. Tomamos entonces el primer punto en el orden natural del arco $a_n f(a_n)$, yendo de a_n a $f(a_n)$, con esa propiedad y lo llamamos a_{n+1}.

Veamos que a_{n+1} cumple con las propiedades requeridas. Primero observemos que a_{n+1} cumple que:

(6) $a_{n+1} \in a_n f(a_n)$ y $a_n \neq a_{n+1} \neq f(a_n)$.

(7) $d(a_n, a_{n+1}) = \frac{\varepsilon}{2}$.

(8) Si $p \in a_n a_{n+1}$ y $a_n \neq p \neq a_{n+1}$, entonces $d(a_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tenemos entonces que:

$(1(n+1))$ Para cada $i < n+1$, $d(a_i, a_{i+1}) = \frac{\varepsilon}{2}$.

$(2(n+1))$ Para cada $i < n+1$, si $p \in a_i a_{i+1}$ y $a_i \neq p \neq a_{i+1}$, entonces $d(a_i, p) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Además de (6) y $(4n)$ se sigue que:

(9) $a_1 a_n \cap a_n a_{n+1} = \{a_n\}$.

Por lo que $(3(n+1))$ se cumple.

Luego, por (1) y por (8) tenemos que para todo $p \in a_n a_{n+1}$, $d(a_n, f(p)) \geq d(p, f(p)) - d(a_n, p) > \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $a_n a_{n+1} \cap f(a_n a_{n+1}) = \emptyset$. Como $f(a_n) f(a_{n+1}) \subset f(a_n a_{n+1})$, se tiene que

(10) $a_n a_{n+1} \cap f(a_n) f(a_{n+1}) = \emptyset$.

Consideremos el arco $a_1 f(a_{n+1})$. Por (6) tenemos que $a_{n+1} \in a_n f(a_n)$ y por $(4n)$ tenemos $a_{n+1} \in a_n f(a_n) \subset a_1 f(a_n) \subset a_1 f(a_{n+1}) \cup f(a_{n+1}) f(a_n)$. Si $a_{n+1} \notin a_1 f(a_{n+1})$ tendríamos que $a_{n+1} \in f(a_n) f(a_{n+1})$, lo que contradice (10). Por lo tanto se satisface $(4(n+1))$ y la afirmación se cumple.

Formamos entonces la siguiente sucesión de arcos

$$a_1a_2 \subset a_1a_3 \subset a_1a_4 \subset \dots$$

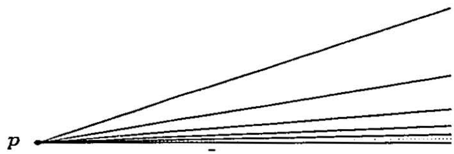
para la cual, por el Teorema 3.4 existe un arco $ab \subset X$ tal que $a_1a_n \subset ab$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observemos el arco a_1b. Como $a_1a_2 \subset a_1a_3 \subset a_1a_4 \subset \dots$ y todos ellos están contenidos en a_1b, si consideramos el orden natural en a_1b, donde $a_1 < b$, tenemos que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$. De manera que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe converger a un punto $a_0 \in ab$. Esto contradice $(1n)$. Por lo tanto X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

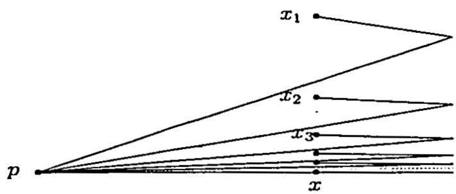
5. Dendroides con la Propiedad de Kelley

Definición 5.1. Un dendroide X es *suave en el punto* p si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, convergente a un punto x en X, la sucesión de los arcos $\{px_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a px en $C(X)$. Un dendroide X es *suave* si es suave en alguno de sus puntos.

Por ejemplo, el siguiente dendroide es suave en p.

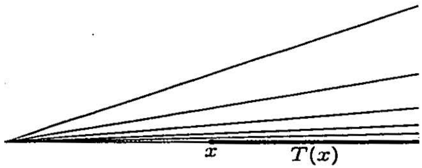


Sin embargo, transformando un poco este dendroide obtenemos el siguiente dendroide que no es suave en p, tomando la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$.



Definición 5.2. Sea x un punto de un continuo X, definimos $T(x)$ como el conjunto de puntos $y \in X$ tales que cada subcontinuo de X el cual tiene a y en su interior, también contiene a x.

Por ejemplo, en el siguiente dendroide tenemos que:



Definición 5.3. Un continuo X *tiene la propiedad de Kelley* si para cada $p \in X$, cada subcontinuo A de X tal que $p \in A$ y cada sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim p_n = p$, se tiene que existe una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X, que converge a A y tal que $p_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

En la Seccion 6 encontramos un ejemplo de un dendroide que no tiene la propiedad de Kelley.

Definición 5.4. Sean ab un arco en el continuo X y U_1, U_2,...,U_m una sucesión finita de subconjuntos de X. Decimos que *ab es del tipo* $(U_1,U_2,\ldots,U_m)$ y escribimos $ab \in (U_1,U_2,\ldots U_m)$ si existe una sucesión finita de puntos $a_1,a_2,\ldots,a_m$ en X que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $a_n \in ab \cap U_n$, para toda $n \in \{1,2,\ldots,m\}$

(2) $a < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < b$ en el orden natural del arco ab.

Lema 5.5. *Para cada par de puntos x, y de un dendroide X tenemos que $y \in T(x)$ si y sólo si existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que* $\lim y_n = y$ *y* $x \in \lim y_n y$.

Demostración. $\Rightarrow$) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n = \overline{(\bigcup\{yz : z \in B_{\frac{1}{n}}(y)\})}$. Como $\bigcup\{yz : z \in B_{\frac{1}{n}}(y)\}$ es una unión de conexos con el punto común y, tenemos que K_n es un continuo. Dado que $y \in B_{\frac{1}{n}}(y) \subset K_n^\circ$ y $y \in T(x)$, entonces $x \in K_n$. En particular $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap (\bigcup\{yz : z \in B_{\frac{1}{n}}(y)\}) \neq \emptyset$. Así que existe $z_n \in B_{\frac{1}{n}}(y)$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap yz_n \neq \emptyset$. Como $C(X)$ es compacto (ver 0.5), podemos extraer una subsucesión convergente $\{yz_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{yz_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ya que $B_{\frac{1}{n_k}}(x) \cap yz_{n_k} \neq \emptyset$, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x \in \liminf yz_{n_k} = \lim yz_{n_k}$ (ver 0.1). Como $z_{n_k} \in B_{\frac{1}{n_k}}(y)$ para todo k, tenemos que $\lim z_{n_k} = y$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a y tal que $x \in \lim y_n y$. Sea $K \in C(X)$ tal que $y \in K^\circ$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n > N$, se tiene que $y_n \in K$. Como X es dendroide y K es un subcontinuo, entonces K es también un dendroide, además K contiene a $\{y_n, y\}$ para toda $n > N$. Entonces $y_n y \subset K$ para toda $n > N$. De donde $x \in \lim y_n y \subset K$. □

Lema 5.6. *Para todo punto x en un continuo X se tiene que $T(x)$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. (1) Veamos que $T(x)$ es cerrado:

Sea $y \in Fr(T(x))$. Para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que $B_\varepsilon(y) \cap T(x) \neq \emptyset$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a y y tal que $y_n \in T(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea K un subcontinuo de X tal que $y \in K^\circ$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$ se tiene que $y_n \in K^\circ$, y como $y_n \in T(x)$, se concluye que $x \in K$. Por lo tanto $y \in T(x)$ y $T(x)$ es cerrado.

(2) Demostraremos que $T(x)$ es conexo:

Supongamos que $T(x)$ no es conexo, entonces existen cerrados ajenos y no vacíos H y K en X tales que $T(x) = H \cup K$. Como $x \in T(x)$, entonces $x \in H$ ó $x \in K$, supongamos que $x \in H$. Como X es un espacio métrico, tenemos que X es normal, por lo que existen dos abiertos ajenos U y V en X tales que $H \subset U$, $K \subset V$. Para cada $w \in Fr(V)$ se tiene que $w \notin T(x)$, entonces existe un continuo C_w tal que $w \in C_w^\circ$ y $x \notin C_w$. Como X es compacto y $Fr(V)$ es cerrado, entonces $Fr(V)$ es compacto, además $\{C_w^\circ : w \in Fr(V)\}$ es una cubierta abierta de $Fr(V)$, entonces existe una subcubierta finita $\{C_{w_1}^\circ, C_{w_2}^\circ, \ldots, C_{w_n}^\circ\}$. Sea $E = V \cup C_{w_1} \cup \ldots \cup C_{w_n} = \overline{V} \cup C_{w_1} \cup \ldots \cup C_{w_n}$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea E_i la componente conexa de E que contiene a C_{w_i}. Aseguramos que $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$. Es claro que $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \subset E$ y $C_{w_1} \cup \ldots \cup C_{w_n} \subset E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$. Sean $v \in V$ y Z_v la componente conexa de V que contiene a v. Por el Teorema de *los golpes en la frontera* (0.8), $\overline{Z_v} \cap Fr(V) \neq \emptyset$. Como $Fr(V) \subset \bigcup\{C_{w_i}^\circ : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$, entonces $Z_v \cap C_{w_i} \neq \emptyset$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Así que $Z_v \cup C_{w_i}$ es conexo y está contenido en E. Por lo tanto $Z_v \subset E_i$. Por tanto $\overline{V} \subset E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$. De manera que $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$. Esto muestra que E tiene a lo más n componentes.

Sean $C_1, C_2, \ldots, C_s$ las componentes conexas de E donde $s \leq n$. Sea $y \in K \subset V$, entonces $y \in C_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Definimos $W = V \cap (X \backslash C_1) \cap (X \backslash C_2) \cap \ldots \cap (X \backslash C_{i-1}) \cap (X \backslash C_{i+1}) \cap \ldots \cap (X \backslash C_s)$. Sea $w \in W$, entonces $w \in V \subset C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_s$ y $w \notin (C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup \ldots \cup C_s)$, por lo que $w \in C_i$. De donde $W \subset C_i$ y $y \in W$. Como W es intersección finita de abiertos, entonces W es abierto, de donde, $y \in W \subset C_i^\circ$ y como $y \in T(x)$, podemos concluir que $x \in C_i \subset E$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $T(x)$ es conexo.

Así que $T(x)$ es un subcontinuo de X. □

Observemos que $x \in T(x)$ para todos los puntos x en un dendroide X. Vimos además que todos los subcontinuos de los dendroides son dendroides. Por lo que $T(x)$ es, en particular, arcoconexo. Por lo tanto $xw \subseteq T(x)$ para todos los puntos $w \in T(x)$.

Definición 5.7. Decimos que un dendroide X *tiene la propiedad* (*) si para cada par de puntos x y y de X, tenemos que si $T(x) \cap xy \neq \{x\}$, entonces $y \in T(x)$ (y como $T(x)$ es un subcontinuo y $x \in T(x)$, tenemos que $xy \subset T(x)$).

Lema 5.8. *Si un dendroide X tiene la propiedad de Kelley, entonces tiene la propiedad (*).*

Demostración. Sean $\{x, y\} \in X$ dos puntos tales que $T(x) \cap xy \neq \{x\}$, entonces existe un punto $z \in X$ tal que $z \neq x$ y $z \in T(x) \cap xy$. Por el Lema 5.5 existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a z y tal que $x \in \lim z_n z$. Como X tiene la propiedad de Kelley y $z \in zy$ podemos concluir que existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim B_n = zy$ y $z_n \in B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $K \in C(X)$ tal que $y \in K^{\circ}$. Como $y \in K^{\circ}$ y $\lim B_n = zy$, entonces (ver 0.1) existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N_1$ se tiene que $B_n \cap K^{\circ} \neq \emptyset$. Así que, para toda $n > N_1$ tenemos que $B_n \cup K \in C(X)$, por lo que $\overline{\bigcup\{B_n : n > N_1\}} \cup K$ es un subcontinuo de X. Como $y \in K$, entonces $\overline{\bigcup\{B_n : n > N_1\}} \cup K \cup zy$ es un subcontinuo de X. Además, para cada $m > N_1$, tenemos que $z, z_m \in \overline{\bigcup\{B_n : n > N_1\}} \cup K \cup zy$, entonces $zz_m \subset \overline{\bigcup\{B_n : n > N_1\}} \cup K \cup zy$ para toda $m > N_1$.

Como $x \neq z$ y $z \in xy$ podemos concluir que $x \notin zy$, por lo que existe $\eta > 0$ tal que $x \notin \overline{N(\eta, zy)}$. Además, $\lim B_n = zy$, entonces existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N_2$ se tiene que $B_n \subset N(\eta, zy)$. Entonces $\bigcup\{B_n : n > N_2\} \subset N(\eta, zy)$.

Por lo que, $\overline{\bigcup\{B_n : n > N_2\}} \subset \overline{N(\eta, zy)}$, y como $x \notin \overline{N(\eta, zy)}$, entonces $x \notin \overline{\bigcup\{B_n : n > N_2\}}$.

Sea $N = max\{N_1, N_2\}$, entonces para toda $m > N$ tenemos que $zz_m \subset \overline{\bigcup\{B_n : n > N\}} \cup K \cup zy$ y que $x \notin \overline{\bigcup\{B_n : n > N\}}$. Como $x \in \lim z_m z$, podemos concluir que $x \in \overline{\bigcup\{B_n : n > N\}} \cup K \cup zy$, pero $x \notin \overline{\bigcup\{B_n : n > N\}}$ y $x \notin zy$, por lo tanto $x \in K$. Así que, $y \in T(x)$ y entonces, X tiene la propiedad (*).

□

Teorema 5.9. *Sea X un dendroide. Entonces X es una dendrita si y sólo si para cada par de puntos x, y en X tenemos que $T(x) \cap xy = \{x\}$ y $T(y) \cap xy = \{y\}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $x, y \in X$ y supongamos que existe $z \neq y$ tal que $z \in T(y) \cap xy$ (el caso $z \neq x$ se resuelve simétricamente). Como $z \neq y$ se tiene que existe un abierto U en X tal que $z \in U$ y $y \notin \overline{U}$. Además como X es localmente conexo existe un abierto y conexo V tal que $z \in V$ y $\overline{V} \subset \overline{U}$. Tenemos entonces que $\overline{V}$ es un subcontinuo de X con z en su interior y como $z \in T(y)$, entonces $y \in \overline{V} \subset \overline{U}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $T(x) \cap xy = \{x\}$ y $T(y) \cap xy = \{y\}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que X no es dendrita, entonces X no es conexo en pequeño en alguno de sus puntos (ver 0.12), supongamos que ese punto es x. Tenemos entonces que existe un abierto U en X tal que para todo conexo K con $x \in K \subset U$ se tiene que $x \notin K^\circ$. Sea K la componente conexa de U que tiene a x, entonces $x \notin K^\circ$. Como $K \subset K^\circ \cup Fr(K)$, concluimos que $x \in Fr(K)$. Así que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap (X \setminus K)$. Notemos que $\lim x_n = x$. Como U es abierto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_n \in U$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además como $C(X)$ es compacto (ver 0.5), también podemos suponer que la sucesión de arcos $\{x_n x\}_{n=1}^{\infty}$ converge a algún elemento de $C(X)$.

Veamos que $x_n x \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para esto, supongamos que $x_n x \cap (X \setminus U) = \emptyset$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n x \subset U$. Como K es la componente conexa de x en U y $x \in x_n x \subset U$, entonces $x_n x \subset K$. Así que $x_n \in K$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x_n x \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $z_n \in x_n x \cap (X \setminus U)$. Como $X \setminus U$ es compacto, podemos suponer que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a algún punto $z \in X \setminus U$. Como $x \in U$, entonces $x \neq z$ y $z \in \lim x_n x \cap (X \setminus U) \subset \lim x_n x$, de donde, por el Lema 5.5 se tiene que $x \in T(z)$. Además por el Lema 5.6, $T(z)$ es un subcontinuo de X que contiene a x y a z, por lo que por el Lema 1.14, tenemos que $xz \subset T(z)$. Tenemos entonces que $\{z\} \neq xz \subset xz \cap T(z)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es dendrita. □

Teorema 5.10. *Si X es una dendrita, entonces X es suave en todos sus puntos.*

Demostración. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $\lim a_n = a$. Demostraremos que $\lim ba_n = ba$ para todo $b \in X$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo K de X tal que $a \in K \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ y como $\lim a_n = a$, podemos concluir que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$ se tiene que $a_n \in K$. Además $a \in K$, entonces $ab \cap K \neq \emptyset$. De donde, $ab \cup K$ es conexo. Así que $ab \cup \overline{K}$ es un subcontinuo de X. Sea $n > N$. Como $a_n, b \in ab \cup \overline{K}$, entonces $a_n b \subset ab \cup \overline{K} \subset N(\varepsilon, ab)$. Además, como $a_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ y $a_n \in K$, entonces $K \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \subset B_{\varepsilon}(a_n)$ y $K \cap a_n b \neq \emptyset$. Así que, $\overline{K} \cup a_n b$ es un continuo tal que $a, b \in \overline{K} \cup a_n b$. Entonces $ab \subset \overline{K} \cup a_n b \subset N(2\varepsilon, a_n b)$. Por lo tanto, $H(ab, a_n b) < 2\varepsilon$ para toda $n > N$. De donde $a_n b$ converge a ab. □

Lema 5.11. *Un dendroide X es suave si y sólo si para cada par de puntos x,y en X, tenemos que $T(x) \cap xy = \{x\}$ ó $T(y) \cap xy = \{y\}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que X es suave en el punto $p \in X$ y que $xy \cap T(x) \neq \{x\}$ y $xy \cap T(y) \neq \{y\}$. Notemos que $x \neq y$. Sea $z \in T(x)$, entonces por el Lema 5.5 existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim z_n = z$ y $x \in \lim z_n z$. Como X es suave en p, tenemos que $\lim pz_n = pz$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $z_n z \subset z_n p \cup pz$ y $\lim(z_n p \cup pz) = pz$ (ver 0.2), de donde:

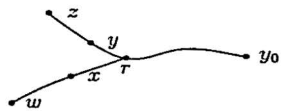
$$(2) \qquad x \in \lim z_n z \subset pz, \quad \text{para toda } z \in T(x).$$

Análogamente podemos concluir que $y \in pw$ para toda $w \in T(y)$. De aquí se obtiene que $T(x) \cap px = \{x\}$ y $T(y) \cap py = \{y\}$. Sea r el único punto en X tal que $yr \cap px = \{r\} = xr \cap py$. Entonces $xy = xr \cup ry$. Como $x \in xr \subset px$ podemos concluir que $\{x\} \neq xy \cap T(x) = (xr \cup ry) \cap T(x) = (xr \cap T(x)) \cup (ry \cap T(x)) = \{x\} \cup (yr \cap T(x))$. Además $y \in ry \subset py$, entonces $\{y\} \neq xy \cap T(y) = (xr \cup ry) \cap T(y) = (xr \cap T(y)) \cup (ry \cap T(y)) = \{y\} \cup (xr \cap T(y))$. Así, llegamos a que $yr \cap T(x) \neq \emptyset$ y $xr \cap T(y) \neq \emptyset$. Por lo que existe $z \in yr \cap T(x)$. Como $z \in T(x)$ y $z \in yr \subset py$, entonces por (2) tenemos que $x \in pz \subset py$. Análogamente llegamos a que $y \in px$. De donde $x = y$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $T(x) \cap xy = \{x\}$ ó $T(y) \cap xy = \{y\}$.

$\Leftarrow$) Si tuvieramos que $xy \cap T(x) = \{x\}$ y $xy \cap T(y) = \{y\}$ para todos los puntos $x, y \in X$. Por el Teorema 5.9, tendríamos que X es una dendrita y, por el Teorema 5.10, X es suave en todos sus puntos. Supongamos entonces que existen $x_0, y_0 \in X$ tales que $x_0 y_0 \cap T(x_0) \neq \{x_0\}$. Definimos $A = \{x \in X : xy_0 \cap T(x) \neq \{x\}\}$.

Afirmación. Si $z, w \in A$, entonces $wy_0 \subseteq zy_0$ ó $zy_0 \subset wy_0$.

Demostración. Supongamos que $w, z \in A$ y que $wy_0 \not\subset zy_0$ y $zy_0 \not\subset wy_0$, entonces $w \notin zy_0$. Sea $r \in X$ el único punto tal que $wr \cap zy_0 = \{r\} = zr \cap wy_0$. Entonces $wz = wr \cup rz$. Como $w \in A$, entonces $wy_0 \cap T(w) \neq \{w\}$, por lo que existe $x \neq w$ tal que $x \in wy_0 \cap T(w)$. Como $z \in A$, existe $y \neq z$ tal que $y \in zy_0 \cap T(z)$. Así que, $xw \subset wy_0 \cap T(w)$ y $zy \subset zy_0 \cap T(z)$. De manera que xw y rw son subarcos no degenerados de y_0w. Entonces $\{w\} \neq xw \cap wr \subset (wy_0 \cap T(w)) \cap wr \subset T(w) \cap wr \subset T(w) \cap wz$. Similarmente, $\{z\} \neq yz \cap zr \subset (T(z) \cap zy_0) \cap zr \subset T(z) \cap zr \subset T(z) \cap zw$. De donde, $T(w) \cap wz \neq \{w\}$ y $T(z) \cap zw \neq \{z\}$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto la afirmación es cierta.



Sean $\mu\colon C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney (ver 0.3) y $f\colon A \to [0,1]$ dada por $f(x) = \mu(xy_0)$. Sea $t_0 = \sup\{f(x) : x \in A\}$. Entonces existe una sucesión creciente $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a t_0 y tal que $x_n \in A$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Dado que para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x_n, x_{n+1} \in A$, entonces por la Afirmación anterior tenemos que $x_ny_0 \subseteq x_{n+1}y_0$ ó $x_{n+1}y_0 \subset x_ny_0$. Si tuvieramos que $x_{n+1}y_0 \subsetneq x_ny_0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ tendríamos que $f(x_{n+1}) = \mu(x_{n+1}y_0) < \mu(x_ny_0) = f(x_n)$. Pero la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente, por lo que $f(x_{n+1}) \geq f(x_n)$. Esto muestra que $x_ny_0 \subseteq x_{n+1}y_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Tenemos entonces una cadena

$$x_1y_0 \subseteq x_2y_0 \subseteq x_3y_0 \subseteq \ldots$$

Por el Teorema 3.4 sabemos que existe un arco maximal $ab \subset X$ tal que $x_ny_0 \subset ab$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

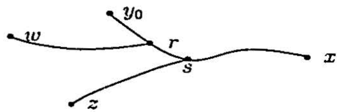
Así que, tomando el orden inducido por el intervalo $[0,1]$ en el arco ab tenemos que $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$. Entonces, tenemos una sucesión decreciente en un arco, de manera que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a algún punto $x \in ab$, $x_n y_0 \subset xy_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $\lim x_n y_0 = xy_0$ y $t_0 = \lim t_n = \lim \mu(x_n y_0) = \mu(xy_0)$.

Veamos que $A \subset xy_0$. Sea $z \in A$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $zy_0 \subset x_n y_0$ ó $x_n y_0 \subset zy_0$. Si tuvieramos que $x_n y_0 \subset zy_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tendríamos que $f(x_n) = \mu(x_n y_0) \leq \mu(zy_0) = f(z)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $t_0 \leq f(z)$. Pero por definición de t_0, $f(z) \leq t_0$. De manera que $f(z) = t_0$. Es decir, $\mu(zy_0) = t_0$. Ya que $x_n y_0 \subset zy_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $xy_0 = \lim x_n y_0 \subset zy_0$. Así que $xy_0 \subset zy_0$ y $\mu(xy_0) = \mu(zy_0)$. Por tanto $xy_0 = zy_0$. Así que $z \in xy_0$. Por otra parte, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $zy_0 \subseteq x_n y_0$, como $x_n y_0 \subseteq xy_0$, tenemos que $zy_0 \subseteq xy_0$ y entonces, $z \in xy_0$. Por lo tanto $A \subset xy_0$.

Mostraremos que x es un punto de suavidad de X.

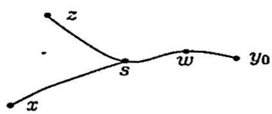
Supongamos que x no es un punto de suavidad, entonces existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a algún punto z en X y tal que $\lim xz_n \neq xz$. Como $C(X)$ es compacto (ver 0.5), podemos suponer que la sucesión $\{zz_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a algún subcontinuo de X. Además $xz \subset \lim xz_n \neq xz$, entonces existe un punto $w \in \lim xz_n$ tal que $w \notin xz$, así que $w \neq z$. Como $xz_n \subset xz \cup zz_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $w \in \lim xz_n \subset zx \cup \lim zz_n$ y $w \notin zx$, entonces $w \in \lim zz_n$ y por el Lema 5.5, $z \in T(w)$. De donde, $wz \subset T(w)$.

Sea s el único punto en X tal que $y_0 s \cap zx = \{s\} = zs \cap xy_0$. Entonces $y_0 s \cup zx$ es un subcontinuo de X. Demostraremos que $w \in xy_0$. Para esto, supongamos que $w \notin xy_0$. Sea $r \in X$ el único punto tal que $wr \cap (y_0 s \cup zx) = \{r\}$. Entonces $wz = wr \cup rz$. Si $r = w$, tendríamos que $w \in y_0 s \cup zx$, pero $w \notin zx$ y $w \notin xy_0 \supset y_0 s$, por lo tanto $r \neq w$. Concluimos entonces que $\{w\} \neq wr \subset wz$. Como $wz \subset T(w)$ y $wr \subset wy_0$, entonces $\{w\} \neq wr = wr \cap wz \subset wy_0 \cap T(w)$, por lo que $w \in A$. Pero $A \subset xy_0$, por lo que $w \in xy_0$, contrario a nuestra hipotésis. Por lo tanto $w \in xy_0$.



Además como $w \notin zx$ y $w \in xy_0 = xs \cup sy_0 \subset zx \cup sy_0$, entonces $w \in sy_0$. De donde, $s \notin wy_0$. Pero $s \in xy_0$ y $xy_0 = xw \cup wy_0$. Entonces $s \in xw$.

Como $w \in xy_0$ y $s \in xw$, tenemos que $w \in sy_0$, así que $ws \cap xz = \{s\}$. Entonces $s \in wz$.



Sea $\varepsilon > 0$ tal que $s, w \notin B_\varepsilon(x)$. Entonces existe $a \in A \subset xy_0$ tal que $a \in B_\varepsilon(x)$. Obtenemos entonces $x < a < s < w < y_0$ en el arco xy_0 y $T(a) \cap ay_0 \neq \{a\}$. Como $zw \subset T(w)$ y $sw \subset zw$, entonces $s \in T(w)$. Por lo que $sw \subset T(w) \cap xw$. Además $a \in A$, entonces existe $q \neq a$ tal que $q \in ay_0 \cap T(a)$, de donde $aq \subset ay_0 \cap T(a)$. Como $a < q \leq y_0$ y $a < w < y_0$, podemos suponer que $q < w$, de manera que $q \in T(a) \cap aw \setminus \{a\}$. Por tanto $T(a) \cap aw \neq \{a\}$. Por otra parte, $s \in T(w) \cap aw \setminus \{w\}$, así que $T(w) \cap aw \neq \{w\}$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto x es un punto de suavidad en X y entonces X es suave. $\square$

Lema 5.12. *Sean X un dendroide y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en X tales que $\lim w_n = w$ y $\lim x_n = x$, supongamos además que $y \in \lim w_n x_n$ y $y \neq w$. Entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a y tal que $y_n \in w_n x_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n \colon w_n x_n \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(z) = d(z, y)$. Como $w_n x_n$ es compacto, concluimos que f_n alcanza su mínimo en algún punto $y_n \in w_n x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que $\lim y_n = y$.

Sea $\varepsilon > 0$, por hipótesis tenemos que $y \in \lim w_n x_n$, entonces (ver 0.1) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n > N$, se tiene que $w_n x_n \cap B_\varepsilon(y) \neq \emptyset$. Sea $n > N$, entonces existe $z_n \in w_n x_n \cap B_\varepsilon(y)$, por la minimalidad de f_n en y_n tenemos que $d(y, y_n) \leq d(z_n, y) < \varepsilon$, entonces $y_n \in B_\varepsilon(y)$ para cada $n > N$. Por lo tanto $\lim y_n = y$ lo cual concluye la prueba. $\square$

Lema 5.13. *Sean $y \neq w$ puntos en un dendroide X y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a w. Supongamos que $w_n \notin yw$ para ninguna $n \in \mathbb{N}$ y que $y \in \lim w w_n$. Entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a y, tal que $y_n \in w_n w$ y $y_n w_n \cap yw = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por el lema anterior, tomando la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ como la sucesión constante $\{w\}$, tenemos que existe una sucesión $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a y y tal que $y'_n \in w_n w$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean

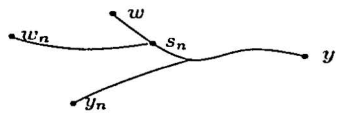
$$A = \{n \in \mathbb{N} : y'_n \notin wy\}$$

y

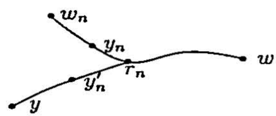
$$B = \{n \in \mathbb{N} : y'_n \in wy\},$$

entonces $A \cup B = \mathbb{N}$. Definimos la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ como:

caso 1: $n \in A$. Sea $y_n = y'_n$. Veamos que, en este caso $y_n w_n \cap yw = \emptyset$. Para esto supongamos que $y_n w_n \cap yw \neq \emptyset$, entonces existe un único punto $s_n \in X$ tal que $w_n s_n \cap yw = \{s_n\}$. Así que, $y_n \in w_n w = w_n s_n \cup s_n w \subset w_n s_n \cup yw$. Pero $y_n \notin yw$, entonces $y_n \in w_n s_n \setminus \{s_n\}$, lo cual implica que $w_n y_n \cap yw = \emptyset$ contrario a lo que supusimos. Por lo tanto $y_n w_n \cap yw = \emptyset$.



caso 2: $n \in B$. Sea r_n el único punto en X tal que $r_n w_n \cap wy = \{r_n\}$. Como $w_n \notin yw$, $w_n \neq r_n$. Sea y_n tal que $y_n \in (B_{\frac{1}{n}}(r_n) \cap r_n w_n)\setminus\{r_n\}$. Como $w_n r_n \cap wy = \{r_n\}$, entonces $y_n \in w_n r_n \setminus \{r_n\} \subset X\setminus wy$, así que $y_n w_n \cap yw = \emptyset$.



Ya hemos formado entonces una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, veamos que $\lim y_n = y$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como wy es un arco, existe $z \in wy\setminus\{w, y\}$ tal que diámetro $(yz) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $y \notin zw$.

Ya que $\lim y'_n = y$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m > M$, $y'_m \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$, $y'_m \notin zw$ y $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $n > M$ y $n \in A$, entonces $y_n = y'_n$, de manera que $y_n \in B_\varepsilon(y)$.

Si $n > M$ y $n \in B$, entonces $w_n w = w_n r_n \cup r_n w$ y $y'_n \notin w_n r_n \setminus \{r_n\}$, por lo que $y'_n \in r_n w$. Tenemos entonces que $r_n \in yy'_n$. Además $y'_n \notin zw$, así que

$y_n' \in yz$. De modo que $r_n \in yy_n' \subset yz$. Como diámetro $(yz) < \frac{\varepsilon}{2}$, tenemos que $d(r_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Y como $d(r_n, y_n) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, concluimos que $d(y, y_n) < \varepsilon$.

En cualquier caso, $d(y, y_n) < \varepsilon$, si $n > M$. Por lo tanto $\lim y_n = y$.

□

Lema 5.14. *Sean x, y, z puntos en un dendroide X tales que $z \in xy$. Supongamos además que*

$$xz \in (U_1, U_2, \ldots, U_n)$$

$$y$$

$$zy \in (U_{n+1}, U_{n+2}, \ldots, U_s).$$

Entonces $xy \in (U_1, U_2, \ldots, U_s)$.

Demostración. Tenemos que $xz \cap zy = \{z\}$. Entonces $xy = xz \cup zy$. Como $zx \in (U_1, U_2, \ldots, U_n)$, entonces existen puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en X tales que $a_i \in U_i \cap xz$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $x < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < z$, en el orden del arco xz. Luego, como $zy \in (U_n, U_{n+1}, \ldots, U_s)$, existen puntos $b_n, b_{n+1}, \ldots, b_s$ en X tales que $b_i \in U_i \cap xz$ para toda $i \in \{n, n+1, \ldots, s\}$ y $z < b_n < b_{n+1} < \ldots < b_s < y$, en el orden del arco zy.

Tomamos el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_{n+1}, \ldots, b_s\} \subset xz$ y observamos que $a_i \in U_i \cap xz \subset U_i \cap xy$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y que $b_i \in U_i \cap xz \subset U_i \cap xy$ para toda $i \in \{n+1, \ldots, s\}$, además como $xz \cap zy = \{z\}$ se tiene que $x < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < z < b_n < b_{n+1} < \ldots < b_s < y$, por lo tanto $xy \in (U_1, U_2, \ldots, U_s)$. □

Lema 5.15. *Sean $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en un dendroide X que convergen a y y w, respectivamente y sean $U_1,U_2,\ldots,U_m$ abiertos en X tales que $yw \in (U_1,U_2,\ldots,U_m)$. Entonces existen dos subsucesiones $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, respectivamente, tales que $y_{n_k}w_{n_k} \in (U_1,U_2,\ldots,U_m)$ para toda $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Fijémonos en la sucesión de arcos $\{y_nw_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$. Dado que $C(X)$ es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que esta sucesión es convergente a algún elemento de $C(X)$. Como $y = \lim y_n$ y $w = \lim w_n$, tenemos que $yw \subset \lim y_nw_n$.

Procedemos por inducción en m.

Si $m = 1$. En este caso tenemos que $yw \in (U_1)$. Así que existe $a \in yw \cap U_1$ tal que $y < a < w$. Por lo que $a \in yw \subset \lim y_nw_n$. Por el Lema 5.12 concluimos que existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a a tal que $a_n \in y_nw_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, U_1 es abierto y $a \in U_1$, así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $a_n \in U_1 \cap y_nw_n$. Por lo tanto, la subsucesión $\{y_nw_n\}_{n=N}^{\infty}$ de $\{y_nw_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple que $y_nw_n \in (U_1)$ para toda $n \geq N$. Hemos demostrado entonces el caso $m = 1$.

Supongamos el resultado cierto para m.

Demostraremos entonces que también es cierto para $m + 1$.

En este caso tenemos que $yw \in (U_1, U_2, \ldots, U_{m+1})$. Así que para toda $i \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$, existe $a_i \in yw \cap U_i$ tal que $y < a_1 < a_2 < \ldots < a_{m+1} < w$. En particular tenemos que $ya_{m+1} \in (U_1, U_2, \ldots, U_m)$. Como $a_{m+1} \in yw \subset \lim y_nw_n$, por el Lema 5.12 concluimos que existe una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a a_{m+1} tal que $b_n \in y_nw_n \setminus \{w_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así que, aplicando la hipótesis de inducción al arco ya_{m+1} obtenemos que existe una subsucesión $\{y_{n_k}b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{y_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_{n_k}b_{n_k} \in (U_1, U_2, \ldots, U_m)$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, U_{m+1} es abierto y $a_{m+1} \in U_{m+1}$, por lo que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq K$ se tiene que $b_{n_k} \in U_{m+1}$. Entonces $b_{n_k}w_{n_k} \in (U_{m+1})$ para toda $k \geq K$.

Tomemos $k \geq K$. Entonces $y_{n_k}b_{n_k} \in (U_1, U_2, \ldots, U_m)$ y $b_{n_k}w_{n_k} \in (U_{m+1})$. Como $b_{n_k} \in y_{n_k}w_{n_k}$, por el Lema 5.18 podemos concluir que $y_{n_k}w_{n_k} \in (U_1, U_2, \ldots, U_{m+1})$.

Por lo tanto, la subsucesión $\{y_{n_k}w_{n_k}\}_{k=K}^{\infty}$ de $\{y_n w_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple que $y_{n_k}w_{n_k} \in (U_1, U_2, \ldots, U_{m+1})$ para toda $k \geq K$. Lo cual concluye la prueba.

$\square$

Corolario 5.16. *Sean $x \neq y$ puntos en un dendroide X y supongamos que $y \in T(x)$ y que $xy \in (U_1, U_2, \ldots, U_m)$ para algunos abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_m$ de X. Entonces existen dos sucesiones $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que convergen a y y x, respectivamente, y que son tales que $x_n \in y_n y$, $x_n y_n \cap xy = \emptyset$ y $x_n y_n \in (U_1, U_2, \ldots, U_m)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Dado que $y \in T(x)$, por el Lema 5.5 existe una sucesión $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a y tal que $x \in \lim y'_n y$. Si existieran una infinidad de números n_k tales que $y'_{n_k} \in xy$, entonces $\lim y'_{n_k} y = \{y\}$, lo cual es una contradicción. Entonces, podemos suponer que $y'_n \notin xy$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 5.13 existe una sucesión $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x tal que $x'_n \in y'_n y$ y $x'_n y'_n \cap xy = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $xy \in (U_1, U_2, \ldots, U_m)$, entonces por el Lema 5.15 existen dos subsucesiones $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$, respectivamente, tales que $x_{n_k}y_{n_k} \in (U_1, U_2, \ldots, U_m)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces definimos $y_k = y_{n_k}$ y $x_k = x_{n_k}$, formando así las sucesiones $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ que tienen las propiedades que requerimos. $\square$

Lema 5.17. *Sean X un dendroide, $z \neq x \in X$ y $U_1, U_2, \ldots, U_m$ abiertos en X tales que $zx \in (U_1, U_2, \ldots, U_m)$, entonces existe una vecindad Z de z tal que para todo $v \in Z$ se tiene que $vx \in (U_1, U_2, \ldots, U_m)$.*

Demostración. Supongamos que para toda vecindad V de z existe un punto z_v en X tal que $z_v x \notin (U_1, U_2, \ldots, U_m)$. Entonces existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a z tal que $z_n x \notin (U_1, U_2, \ldots, U_m)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Aplicamos el Lema 5.15 a la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, y a la sucesión constante x y obtenemos una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $z_{n_k} x \in (U_1, U_2, \ldots, U_m)$ para toda $k \in \mathbb{N}$ obteniendo una contradicción con la elección de z_{n_k}. Esto prueba la existencia de la vecindad Z. □

Teorema 5.18. *Si un dendroide X tiene la propiedad (*), entonces X es suave.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que X no es suave. Por el Lema 5.11, existen $x, y \in X$ tales que $T(x) \cap xy \neq \{x\}$ y $T(y) \cap xy \neq \{y\}$. Como X tiene la propiedad (*), $y \in T(x)$ y $x \in T(y)$. Ya que $T(x)$ y $T(y)$ son subcontinuos de X, tenemos que $xy \subset T(x) \cap T(y)$. Sean U y V abiertos de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

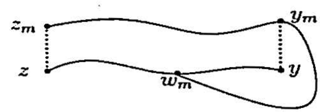
Probaremos primero la siguiente afirmación.

Afirmación. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $z \in X$ es tal que $zx \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ $(2n+1$ veces) para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $r \in X$ tal que $d(r, z) < \varepsilon$ y $rx \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ $(2n+3$ veces).

Para demostrar la afirmación, supongamos que $zx \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ $(2n+1$ veces). Analizamos dos casos.

Caso 1. $zx \cap xy = \{x\}$.

En este caso tenemos que $zx \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ $(2n+1$ veces) y que $xy \in (V)$, entonces, por el Lema 5.18, tenemos que $zy \in (U, V, U, V, \ldots, U, V)$ ($2n+2$ veces). Como $zy = zx \cup xy$, concluimos que $T(y) \cap yz = T(y) \cap (zx \cup xy) = (T(y) \cap zx) \cup (T(y) \cap xy) \neq \{y\}$. Entonces, por la propiedad (*), $z \in T(y)$. Por el Corolario 5.16 existen dos sucesiones $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ que convergen a z y y, respectivamente, tales que $y_m \in z_m z$, $y_m z_m \cap zy = \emptyset$ y $z_m y_m \in (U, V, U, \ldots, U, V)$ ($2n+2$ veces) para toda $m \in \mathbb{N}$.



Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea w_m el único punto en X tal que $z_m w_m \cap yz = \{w_m\}$. Entonces $z_m z = z_m w_m \cup w_m z$. Como $z_m y_m \subset X \setminus zy$ y $y_m \in z_m z$, tenemos que $z_m y_m \subset z_m w_m$. Pero $z_m x = z_m w_m \cup w_m x$. De manera que $z_m y_m \subset z_m x$. Como $y_m x \in (U)$, entonces $z_m x \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ ($2n+3$ veces) para toda $m \in \mathbb{N}$.

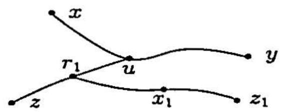
Como $\lim z_m = z$, podemos elegir $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_m, z) < \varepsilon$. Hacemos $r = z_m$. Entonces $d(r, z) < \varepsilon$ y $rx \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ ($2n+3$ veces). Esto concluye la prueba del primer caso.

Caso 2. $zx \cap xy \neq \{x\}$.

En este caso $\{x\}$ es un subcontinuo propio de $zx \cap xy$ que a su vez está contenido en $zx \cap T(x)$. De manera que $zx \cap T(x) \neq \{x\}$. Como X tiene la propiedad (*), obtenemos que $z \in T(x)$. Por el Corolario 5.16 existen dos sucesiones $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ que convergen a z y a x, respectivamente, tales que $x_m \in z_m z$, $x_m z_m \cap xz = \emptyset$ y $x_m z_m \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ ($2n+1$ veces) para toda $m \in \mathbb{N}$.

Sea u el único punto en X tal que $zu \cap xy = \{u\}$. Entonces $x \neq u$ y $x \notin uy$. Como $\lim x_m = x$ y $\lim z_m = z$, podemos suponer que $x_m \notin uy$ y $d(z, z_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $m \in \mathbb{N}$.

Como $u \in zu \cap xy$, $zu \cup xy \in C(X)$, por lo que podemos considerar a r_1, como el único punto de X tal que $z_1r_1 \cap (zu \cup xy) = \{r_1\}$. Como z_1z es un arco que empieza en z_1 e intersecta al continuo $zu \cup xy$, $r_1 \in z_1z$. Ya que, también $x_1 \in z_1z$, tenemos que $z_1 \leq r_1 \leq x_1 \leq z$ ó $z_1 \leq x_1 \leq r_1 \leq z$ (en el arco z_1z). En el primer caso, como $z_1x_1 \cap zx = \emptyset$ y $r_1 \in zu \cup xy = zx \cup uy$, obtenemos que $r_1 \in uy$. Así que $x_1 \in r_1z \subset r_1u \cup uz \subset r_1u \cup xz$. Pero $x_1 \notin xz$, así que $x_1 \in r_1u \subset yu$, lo cual contradice la suposición que hicimos en el párrafo anterior. Por tanto, $z_1 \leq x_1 \leq r_1 \leq z$.



Ya que $z_1r_1 \cap (zx \cup uy) = \{r_1\}$, tenemos que $x_1 \in z_1y$. Como $z_1x_1 \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ ($2n+1$ veces) y $x_1y \in (V)$, obtenemos que $z_1y \in (U, V, U, V, \ldots, U, V)$ ($2n + 2$ veces).

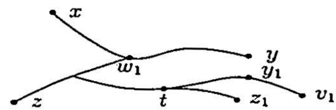
Sea $w_1 \in xy$ tal que $z_1w_1 \cap xy = \{w_1\}$.

Si $w_1 = y$, entonces $z_1x = z_1y \cup yx$. Como $z_1y \in (U, V, U, V, \ldots, U, V)$ ($2n+2$ veces) y $yx \in (U)$, entonces $z_1x \in (U, V, U, V, \ldots, U, V, U)$ ($2n+3$ veces). Ya que $d(z_1, z) < \varepsilon$, si hacemos $r = z_1$ habremos terminado. Supongamos entonces que $w_1 \neq y$.

Como $z_1y = z_1w_1 \cup w_1y$, tenemos que $z_1y \cap T(y) \supset w_1y \cap xy \neq \{y\}$. Como X tiene la propiedad (*), tenemos que $z_1 \in T(y)$. Por el Corolario 5.16, existen dos sucesiones $\{v_s\}_{s=1}^{\infty}$ y $\{y_s\}_{s=1}^{\infty}$ que convergen a z_1 y a y, respectivamente, y que cumplen que $y_s \in z_1v_s$, $v_sy_s \cap z_1y = \emptyset$ y $v_sy_s \in (U, V, U, V, \ldots, U, V)$ ($2n+2$ veces).

Como $w_1 \in xy$, $w_1 \neq y$ y $\lim y_s = y$, podemos suponer que $y_s \notin xw_1$ para toda $s \in \mathbb{N}$. Además podemos pedir que $d(v_s, z_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $s \in \mathbb{N}$.

Sea $t \in X$ tal que $v_1 t \cap (z_1 w_1 \cup xy) = \{t\}$.



Ya que $y_1 \in v_1 z_1 = v_1 t \cup t z_1$, tenemos que $y_1 \in t z_1$ ó $y_1 \in v_1 t$. En el primer caso, $y_1 \in t z_1 \subset z_1 w_1 \cup xy = z_1 y \cup x w_1$, lo cual es imposible pues $y_1 \notin z_1 y$ y $y_1 \notin x w_1$. Por tanto, $y_1 \in v_1 t$. Como $v_1 x = v_1 t \cup t x$, tenemos que $y_1 \in v_1 x$. Así que $v_1 x = v_1 y_1 \cup y_1 x$. Como $v_1 y_1 \in (U, V, U, V, \ldots, U, V)$ $(2n+2$ veces$)$ y $y_1 x \in (U)$, concluimos que $v_1 x \in (U, V, U, V, \ldots, U, V, U)$ $(2n+3$ veces$)$. Como además $d(v_1, z) \leq d(v_1, z_1) + d(z_1, z) < \varepsilon$, hacemos $r = v_1$ y terminamos la prueba de la afirmación.

Como tenemos que $x \in T(y)$, entonces por el Lema 5.5 existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x tal que $y \in \lim x_n x$. Como $x \in U$ y $y \in V$, existen $N_1 \in \mathbb{N}$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que para toda $n > max\{N_1, N_2\}$ se tiene que $x_n x \cap V \neq \emptyset$ y $x_n \in U$. Sea $n > max\{N_1, N_2\}$, entonces $x_n \in U$ y existe $w \in x_n x \cap V$, entonces $x_n < w < x$, por lo que $x_n x \in (U, V, U)$.

Vamos a construir inductivamente, sucesiones $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números positivos y puntos de X, respectivamente, tales que:

$$\overline{B_{\varepsilon_{n+1}}(r_{n+1})} \subset B_{\varepsilon_n}(r_n) \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

y

$$\text{para toda } z \in B_{\varepsilon_n}(r_n),\ zx \in (U, V, U, V, \ldots, U)\ (2n+1 \text{ veces}).$$

Hacemos $r_1 = x_n$. Por el Lema 5.17 existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para toda $z \in B_{\varepsilon_1}(r_1)$, $zx \in (U, V, U)$.

Supongamos que ya hemos construido $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ y $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Como $r_n x \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ ($2n+1$ veces), por la afirmación que probamos, existe $r_{n+1} \in X$ tal que $d(r_n, r_{n+1}) < \varepsilon_n$ y $r_{n+1}x \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ ($2n+3$ veces). Por el Lema 5.17 existe ε_{n+1} tal que $\overline{B_{\varepsilon_{n+1}}(r_{n+1})} \subset B_{\varepsilon_n}(r_n)$ y $zx \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ ($2n+3$ veces) para toda $z \in B_{\varepsilon_{n+1}}(r_{n+1})$.

Esto termina la construcción de $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$.

La sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a algún punto $r \in X$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión de los arcos $\{xr_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ también es convergente y que converge a algún subcontinuo A de X, entonces $\{x, r\} \in A$. Como $\ldots \subset \overline{B_{\varepsilon_n}(r_n)} \subset \overline{B_{\varepsilon_{n-1}}(r_{n-1})} \ldots \subset B_{\varepsilon_1}(r_1)$, entonces $r \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{\varepsilon_i}(r_i)$. De donde, $rx \in (U, V, U, V, U, \ldots, U)$ ($2n+1$ veces) para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean $\varepsilon = H(\overline{U}, \overline{V}) > 0$ y $f\colon [0,1] \to rx \subset X$ un homeomorfismo. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $s, t \in [0,1]$ con $|s-t| < \delta$ se tiene que $d(f(s), f(t)) < \varepsilon$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \delta$ y sean $s_0 = 0$, $s_1 = \frac{1}{m}, \ldots, s_{m-1} = \frac{m-1}{m}$, $s_m = \frac{m}{m} = 1$. Como $rx \in (U, V, U, V, \ldots, U)$ ($2m+1$ veces), existen $t_1, t_2, \ldots, t_{2m+1} \in [0,1]$ tales que $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{2m+1} < 1$, $f(t_i) \in U$ si i es impar y $f(t_i) \in V$ si i es par. Ya que $2m+1 > m$, hay más puntos t_i que intervalos $[0, \frac{1}{m}], [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}], \ldots, [\frac{m-1}{m}, \frac{m}{m}]$. Entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, 2m\}$ tal que $t_j, t_{j+1} \in [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}]$ para alguna $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Entonces el arco $f(t_j)f(t_{j+1})$ intersecta tanto a U como a V y, por la elección de δ, el arco $f(t_j)f(t_{j+1})$ tiene diámetro menor que ε. Esto contradice la elección de ε y prueba que X es suave. □

Corolario 5.19. *Si un dendroide X tiene la propiedad de Kelley, entonces X es suave.*

Demostración. Dado que X tiene la propiedad de Kelley entonces por el Lema 5.8, X tiene la propiedad (*). Entonces, por el teorema anterior, X es suave. $\square$

6. Ejemplos importantes de Dendroides

En este capítulo veremos ejemplos de algunos dendroides que resultan de interés en la teoría de continuos. Comenzaremos con varias definiciones.

Definición 6.1. Un punto p en un continuo X se llama *punto terminal de* X si cada vez que p está en un arco $A \subset X$, entonces p es un punto extremo de A, es decir, $A = pq$ para algún punto $q \in X$.

Definición 6.2. Un punto p en un continuo X se llama *punto de ramificación de* X si existen tres arcos distintos A, B y C en X tales que $A \cap B = \{p\}$, $A \cap C = \{p\}$ y $B \cap C = \{p\}$.

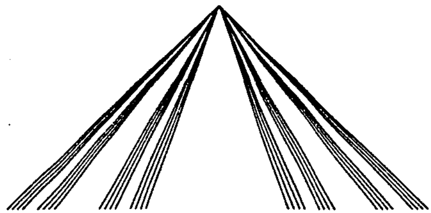
Definición 6.3. Un continuo X se dice que es *contraíble* si existen una función continua $H\colon X \times [0,1] \to X$ y un punto $p \in X$ tal que

$$H(x,0) = x \text{ para toda } x \in X$$

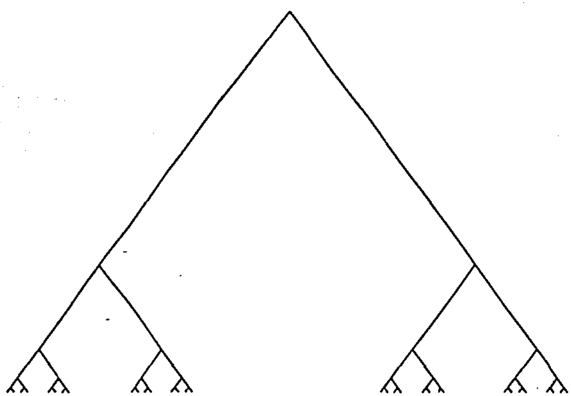
y

$$H(x,1) = p \text{ para toda } x \in X.$$

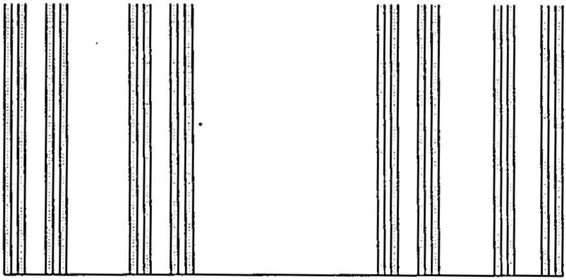
Vayamos ahora sí a los ejemplos:



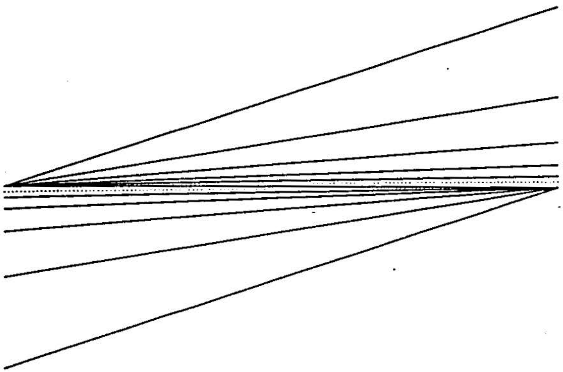
Dendroide con una cantidad no numerable
de puntos terminales.



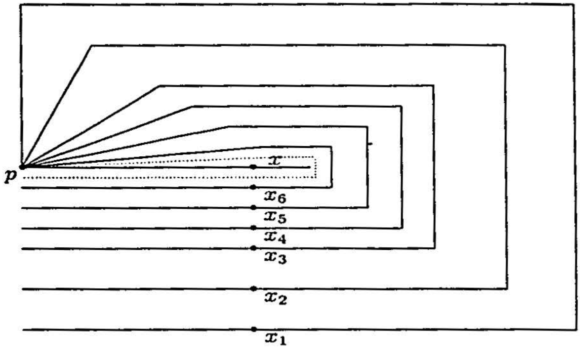
Dendrita con una cantidad no numerable
de puntos terminales.



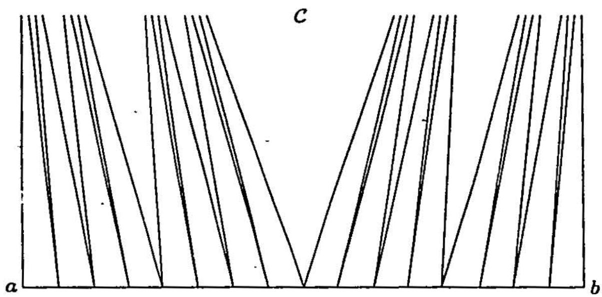
Dendroide con una cantidad no numerable
de puntos de ramificación.



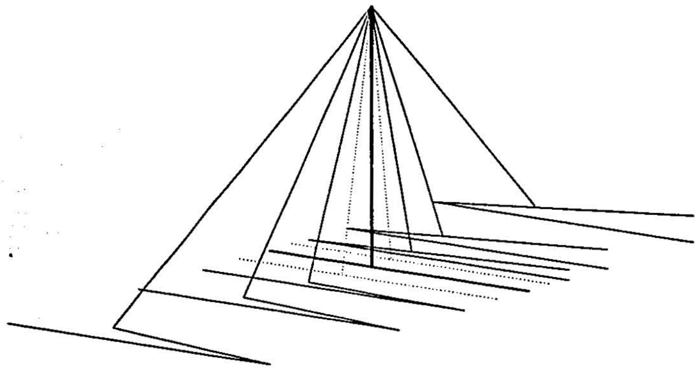
Un dendroide que no es contraíble además de
no tener la propiedad de Kelley.



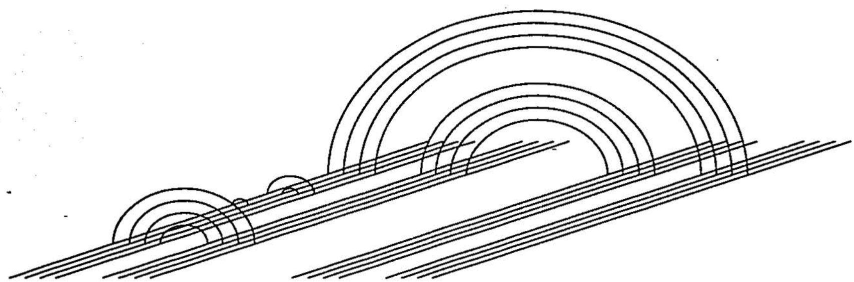
Un dendroide que no es suave en p.



Dendroide tal que todo punto en el arco $ab\setminus\{a,b\}$
es punto de ramificación.



Dendroide Contraíble. (ver [9])



Dendroide tal que para toda $\varepsilon > 0$ existen $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y $H(A, X), H(B, X) < \varepsilon$. (ver [5])

67

Referencias

[1] J. Charatonik, *On acyclic curves. A survey of results and problems*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **(3)** 1 (1995), 1-39.

[2] S. Czuba, *On dendroids with Kelley/s property*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 727-730.

[3] J. Dugundji,*Topology*, Allyn and Bacon, 1989.

[4] J. Hocking, *Topology*, Addison Wesley, 1961.

[5] A. Illanes, *Finite Union of Shore Sets*. Por aparecer en Rend. Circ. Mat. Palermo.

[6] A. Illanes, *Notas de Hiperespacios*, Notas de clase, IMATE, UNAM, 1990.

[7] G. Jameson, *Topology and Normed Spaces*, Chapman and Hall, 1974.

[8] S. Macías, *La estructura de los Dendroides Suaves*, SMM, 1993.

[9] T. Maćkowiak, *Contractible and nonselectible dendroids*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **33** (1985), 321-324.

[10] V. Martínez, *El Hiperespacio de Continuos con la topología producto*, Tesis de Licenciatura, UNAM, 1998.

[11] A. Mercado, *Propiedades Topológicas de Continuos*, Tesis de Licenciatura, UAC, 1998.

[12] S. Nadler, Jr.,*Hyperspaces of sets*, Marcel Dekler, New York, 1978.