



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

**CAOS EN REDES NEURONALES**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
M A T E M A T I C A  
P R E S E N T A

**CAMILLE/STEPHAN-OTTO ATTOLINI**



DIRECTOR DE TESIS: **EDMUNDO JAVIER PAEZ CARDENAS**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

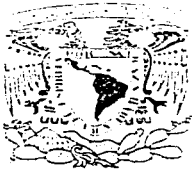


**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

CAOS EN REDES NEURONALES

realizado por CAMILLE STEPHAN-OTTO ATTOLINI

con número de cuenta 9756677-9, quién cubrió los créditos de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. JAVIER PAEZ CARDENAS
Propietario	DR. PEDRO MIRAMONTES VIDAL
Propietario	DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA
Suplente	DR. ERNESTO ROSALES GONZALEZ
Suplente	DR. FAUSTINO SANCHEZ GARDUÑO

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. en C. Alejandro

FACULTAD DE CIENCIAS  
BARRIO MOQUEGUA

TELÉFONO: 228

# Caos en redes neuronales

Camille Stephan-Otto Attolini

11 de diciembre de 2001

# Contenido

<b>Dedicatoria</b>	<b>3</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>4</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 Redes Neuronales . . . . .	7
1.2 Aspectos biológicos . . . . .	8
1.3 Introducción de modelos . . . . .	9
<b>2 Introducción matemática</b>	<b>12</b>
<b>3 Bifurcaciones</b>	<b>17</b>
3.1 Bifurcaciones locales . . . . .	17
3.1.1 Formas normales . . . . .	19
3.1.2 Redes de una sola neurona . . . . .	21
3.1.3 Redes neuronales de dos neuronas . . . . .	25
3.1.4 Resonancias . . . . .	30
3.1.5 Redes neuronales feedforward . . . . .	37
<b>4 Caos en redes neuronales</b>	<b>45</b>
4.1 Introducción al Caos . . . . .	45
4.2 Doblamiento de periodo y redes neuronales. . . . .	46
4.3 Kneading theory y caos en familias unimodales . . . . .	54
4.4 Un ejemplo . . . . .	61
<b>Apéndice 1</b>	<b>64</b>
<b>Apéndice 2</b>	<b>68</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>

# Dedicatoria

A Christian, Amalia y Erwin, por quererme y enseñarme tanto.

A Nani y a Oma las abuelas queridas.

Por orden de aparición: a Ricardo, Marta y sus hijas. A Gonza. A Elías, Jonás y María. A Rosa María y Leonardo. A Alexandra, Santi, Eire, Diana, Dani, Paloma, Bere y María. A los hijos de Páez.

A Isa por estar en (casi) toda la carrera.

A Martín y Alex que me mostraron por primera vez las matemáticas.

A las chicas cordobesas, todas ellas. A Paula.

A los Tutis: Mónica, Leo, Juan, Juan Eli, Susana, Xristiana, Marcelo, Alf, Andrés, Mina y Nat. Sin ustedes estos meses no hubieran sido lo mismo.

A Nathalie.

A mi familia, de sangre y no.

Grazie.

# Agradecimientos

Al Dr. Javier Páez, por todo lo que me enseñó en estos años, de matemáticas y todo lo demás.

A los sinodales Laura Ortiz, Ernesto Rosales, Faustino Sánchez y Pedro Miramontes. Por su paciencia, trabajo y sugerencias. Esta tesis es mucho mejor gracias a ustedes.

A todos mis maestros.

# Introducción

Este trabajo trata sobre sistemas dinámicos, caos y redes neuronales. Estas últimas son utilizadas como una herramienta para introducir las nociones principales de los sistemas dinámicos y el caos. Para mostrar sus características de una manera sencilla nos apoyamos en imágenes que hacen clara la existencia de puntos fijos, órbitas periódicas, bifurcaciones e incluso de comportamientos caóticos.

Como introducción se presentan los modelos de neuronas más utilizados así como las razones por las cuales se utiliza uno en particular para la tesis. Las nociones básicas de sistemas dinámicos, específicamente los de tiempo discreto, son explicadas en el primer capítulo; con ello que quedan establecidos las bases para comenzar con los primeros resultados.

Uno de los elementos más importantes en la teoría de los sistemas dinámicos son las bifurcaciones. Básicamente una bifurcación es un cambio cualitativo en el comportamiento de un sistema. Existen bifurcaciones globales y locales, en este trabajo estudiamos sólo las locales, las cuales tienen que ver con puntos fijos y órbitas periódicas. Teniendo una familia de funciones que dependen de un parámetro es interesante saber qué puntos periódicos existen para cada valor del parámetro y cómo varían al mover este. Los resultados que se tienen hasta ahora en esta teoría solamente se pueden aplicar a redes de muy pocas neuronas, menores que 3, o a aquellas con estructuras muy simples. El tipo de redes con las que trabajamos se explican en el capítulo de preeliminares.

La manera más común de ilustrar las bifurcaciones es por medio de diagramas de bifurcación. En estos se muestran los puntos fijos antes de la bifurcación y en lo que se convierten después de la bifurcación. En la tesis, además de este tipo de diagramas, mostramos los espacios fase de varios sistemas en los cuales se ejemplifican los diferentes tipos de bifurcaciones. En este sentido, se presenta un teorema que clasifica las posibles bifurcaciones para sistemas de dos dimensiones, gran parte del segundo capítulo se dedica a ejemplificar con diferentes redes cada uno de los tipos.

El tercer capítulo de la tesis muestra una manera de estudiar el caos. Cuando se trabaja con sistemas de los reales en los reales, podemos utilizar una teoría llamada "Kneading theory", la cual relaciona los mapeos de una familia parametrizada con sucesiones infinitas de tres símbolos. La idea es seguir la órbita del punto máximo del mapeo y asignarle a cada iteración una letra, dependiendo de si su valor se encuentra de lado izquierdo, derecho o en el mismo valor máximo. Cuando el sistema tiene un punto fijo o periódico atractor, la sucesión de letras debe reflejar esto convirtiéndose eventualmente en periódica también. Algunos resultados aseguran la existencia de



periodos de cualquier orden en las sucesiones, esto, traducido a los mapeos, significa que moviendo el parámetro también se obtendrán puntos periódicos en las funciones. Una manera conocida de asegurar la existencia de caos es por medio de cadenas de bifurcaciones. Esta es la manera como mostramos que en mapeos del intervalo en el intervalo se presentan comportamientos caóticos. Algunas redes de dos neuronas se comportan de manera similar a los sistemas del intervalo en él mismo, de aquí que para esas redes aseguramos la existencia de caos.

Este trabajo busca ser una herramienta para estudiar los sistemas dinámicos de forma clara y ejemplificada por las redes. El objetivo es mostrar gráficamente, apoyado por la teoría, los comportamientos de sistemas de tiempo discreto y su evolución hasta convertirse en sistemas caóticos.

# Capítulo 1

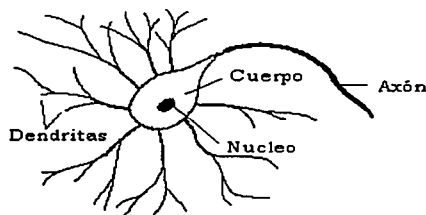
## Preliminares

### 1.1 Redes Neuronales

El estudio de las redes neuronales comenzó hace aproximadamente 60 años con la aparición de los primeros modelos matemáticos de las neuronas. El hecho de que el campo de las redes neuronales sea interdisciplinario, tuvo como consecuencia que en los primeros años el avance fuera mínimo debido a la falta de grupos que conjuntaran científicos de todas las ramas [Grossberg, 1987]. Física, medicina o matemáticas son sólo algunas de las áreas involucradas en este estudio. En el intento de conocer el cerebro y comprender su funcionamiento los científicos se encontraron con aplicaciones que han significado avances en otras disciplinas.

El cerebro es un complejo regido por las leyes de la física y la química; reacciones e interacciones logran lo que para nosotros es todavía un misterio: el pensamiento, el control del cuerpo y la consciencia de ser capaces de pensar.

La unidad básica funcional del sistema nervioso es la neurona. A grandes rasgos estas células constan del cuerpo, axón, dendritas y sinapsis.



Esquema de una neurona

Podemos pensar en las neuronas como pequeñas unidades de cálculo, capaces de recibir, procesar y transmitir información. La forma en que la neurona logra esto depende de un sistema muy complejo de fenómenos físicos, eléctricos y reacciones químicas. Para entender el funcionamiento global del sistema nervioso, necesitamos también tomar en cuenta cómo están organizadas las neuronas.

En la siguiente sección estudiamos con más detalle la fisiología de la neurona y la manera en que recibe, genera y transmite información.

## 1.2 Aspectos biológicos

Las neuronas transmiten información por medio del intercambio de sustancias químicas. Las partes principales encargadas de lograr esto son la membrana del axón y las sinapsis. Nuestro cuerpo está formado en gran parte por agua distribuida en las células y en el espacio entre estas. Algunas de las sales ahí disueltas se separan en iones positivos y negativos que pueden variar la carga de las células y de su entorno. La membrana de la célula tiene la propiedad de ser semi permeable, es decir que a través de ella sólo pueden pasar algunos iones. Este fenómeno está regulado por los canales iónicos: macromoléculas que permiten el paso de algunos tipos de sales con una carga determinada.

En estado de reposo la neurona tiene carga negativa con respecto al exterior; cuando esto se altera, es decir, cuando el potencial del interior rebasa cierto umbral, se abren algunos de los canales dejando entrar iones positivos que aumentan de forma brusca la carga de la neurona. Este cambio provoca a su vez que se abran otros canales que dejan salir iones positivos restaurándose la polarización negativa del interior.

Al cambio de polaridad se le llama despolarización y esta es la base de la generación y transmisión de información entre las neuronas. Con la apertura de canales iónicos se provoca que los canales contiguos se abran, haciendo viajar a la despolarización a través del axón, a este fenómeno se le conoce como potencial de acción. Al final del axón se encuentran las sinapsis, dentro de las cuales existen algunas vesículas con químicos llamados neurotransmisores. Estos químicos son arrojados al interior de la neurona receptora, alterando la polaridad de esta y preparándola para una despolarización.

El intercambio de información entre dos neuronas se lleva al cabo en las sinapsis. Cuando un impulso eléctrico llega a una sinapsis esta se fusiona con la membrana de la neurona receptora y deja salir los neurotransmisores. Si los iones recibidos son positivos estos preparan a la célula para un potencial de acción y la neurona es excitada; si los iones son negativos entonces la célula necesitará cambiar más su potencial para lograr una despolarización, de manera que la neurona es inhibida por la acción de los transmisores.

Los iones que entran en la neurona, cambian su carga con respecto al exterior. Cuando cierto umbral es alcanzado se dispara un potencial de acción y provoca que se transmita un impulso a las neuronas adyacentes. La neurona procesa esta información calculando la combinación de todos los impulsos recibidos: si se sobrepasa el umbral, la neurona se activa y envía un impulso; si el valor crítico no es alcanzado, la neurona permanece en estado de reposo.

El que la neurona sólo pueda estar en dos estados no implica que las funciones que puede realizar son simples. La complejidad de las funciones que lleva al cabo el sistema nervioso, depende en gran parte de la manera en que estén conectadas las neuronas y no de la forma en que actúan individualmente.

Para disparar un potencial de acción se deben tomar en cuenta muchas variables como son el número de compuertas iónicas que se abren con la despolarización o el tipo de neurotransmisores que son intercambiados en las sinapsis. Al modelar el funcionamiento de la neurona se busca reproducir las características principales con

las herramientas matemáticas disponibles. El objetivo de un modelo consiste en lograr un equilibrio entre las características reales rescatadas del sistema y la posibilidad de trabajar con ellas desde un punto de vista matemático.

A continuación se presentan algunos de los modelos más importantes y los diferentes aspectos que representan de una neurona.

### 1.3 Introducción de modelos

Los modelos matemáticos buscan reproducir comportamientos de los sistemas que modelan. En el caso de las redes muy difícil reproducir el comportamiento incluso de una sola neurona, por lo que hay que rescatar las características más importantes para obtener un modelo que se pueda abordar con las herramientas matemáticas con las que contamos actualmente.

Los modelos varían dependiendo de quién y con qué propósito sean hechos. Un enfoque más fisiológico tratará de que dichos modelos se comporten lo más parecido posible a la neurona real, mientras que un enfoque matemático desprecia muchos detalles en aras de conseguir ecuaciones a las cuales se pueda aplicar la teoría ya conocida.

La capacidad de una neurona de procesar información se representa en el modelo por medio de una función real. Las variables representan los estados de las neuronas. El estado de reposo corresponde a valores negativos o cero y los valores positivos corresponden al estado activo. La información transmitida por la neurona depende del estado en que se encuentra: la variable independiente significa la información que se recibe de otras neuronas, mientras que la variable dependiente representa el estado de la neurona una vez procesada la información.

El intercambio de información se puede ver afectado por varios factores de forma que se pierda nitidez en el proceso. Para modelar esto se utilizan "pesos" entre las neuronas: a cada par de neuronas y a cada dirección de intercambio de información se asigna un número que hace más o menos eficiente el paso de los impulsos.

Tomando esto en cuenta, un primer modelo surge de utilizar una función de salto como función de activación, es decir, como la función que determina cómo debe ser tratada la información recibida. La función de salto puede tomar sólo dos valores: el cero representa una neurona apagada o en su estado normal, mientras que el 1 significa el estado excitado. El valor donde se da el salto se considera el umbral tras el cual la neurona se ve activada.

McCulloch y Pitts [Grossberg, 1988] propusieron un modelo con una función de activación parecida a la función de salto:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Mientras la neurona se mantenga por debajo del umbral, en este caso el 0, envía impulsos inhibitorios; si el estado de la neurona es excitado, es decir con valores

positivos, la información enviada es de excitación. Si la neurona toma el valor 0, las neuronas no reciben ningún impulso.

Llamemos  $x_i(t)$  al estado de la neurona  $i$  en el tiempo  $t$ ,  $w_{ij}$  al peso entre las neuronas  $i$  y  $j$ , y  $B_i$  al umbral para la neurona  $i$ . La ecuación que define el estado de cada neurona al tiempo  $t + 1$  para el caso de un sistema de  $n$  neuronas resulta:

$$x_i(t + 1) = \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j(t) - B_i\right)$$

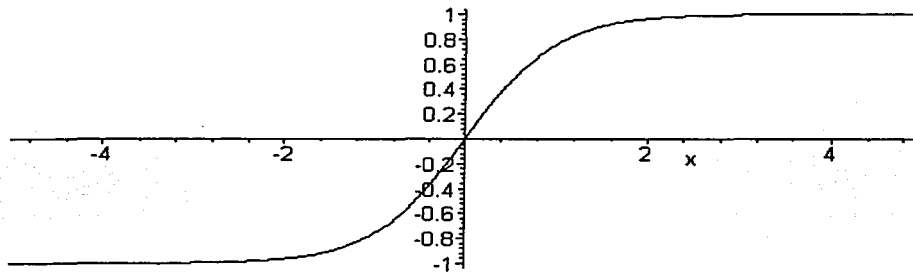
Dentro de la función  $\text{sgn}$  se suman los estados de cada neurona multiplicados por el peso correspondiente. La función es valuada en el resultado obteniéndose así el estado de la neurona actualizado.

En este modelo se supone que todas las neuronas están conectadas entre sí aunque si el peso entre ellas es 0, la información transmitida es nula. Con la función de salto se logra reproducir la manera en que la neurona cambia bruscamente su polaridad, sin embargo se pierde mucha información debido a que mientras no se pase el umbral, las neuronas receptoras reciben impulsos constantes o no reciben impulso alguno.

Para tratar con este inconveniente se propone un modelo con función de activación lineal. En este caso se logra recuperar más información de la neurona emisora y se tiene la ventaja de contar con una gran herramienta matemática que ayuda al análisis de las redes.

En 1973, Grossberg [Grossberg, 1987] propuso utilizar una función sigmoideal por su capacidad de "...surrpimir ruido, normalizar y despreciar actividades menores al umbral...", esta afirmación dio paso a un gran número de modelos que utilizan estas funciones.

La característica principal de estas funciones es su forma de "S", para los modelos es importante que valgan 0 en el origen y que sean acotadas en su dominio. Un ejemplo de una función sigmoideal es la  $\tanh(x)$ , esta función vale 0 en el origen y se pega asintóticamente a -1 cuando  $x$  decrece y al 1 cuando  $x$  crece.



La  $\tanh$  tiene la propiedad de diferenciar entre estímulos grandes y pequeños con mayor nitidez: para entradas de norma grande, los valores de la función se parecen mucho al 1 o al -1. Para estímulos pequeños la función toma valores cercanos al cero. Esta característica asegura que sólo cuando la neurona reciba suficientes impulsos,

su actividad se verá afectada de forma importante. También que los estados de cada neurona se encuentran acotados entre el 1 y el -1. Algunos resultados sobre esta función se pueden encontrar en el Apéndice 2 de esta tesis.

En nuestro trabajo utilizamos un modelo propuesto por Xin Wang en 1994 [Wang, 1994] en el cual se supone que todas las neuronas están conectadas entre sí, que la función de activación es una función sigmoïdal (para nosotros la función  $\tanh$ ) y que ésta es la misma para todas las neuronas.

La ecuación que determina el funcionamiento de las redes que estudiamos es

$$x_i(t+1) = f_\mu\left(\sum_{j=1}^n x_j(t)w_{ij}\right)$$

Donde  $w_{ij}$  y  $x_i$  significan lo mismo que en el modelo anterior. Este sistema es de tiempo discreto, esto quiere decir que las neuronas tardan en actualizar su estado una unidad de tiempo. Los pesos entre las neuronas toman valores reales, y si un peso vale 0 significa que entre esas neuronas no hay comunicación. La función  $f_\mu(x)$  es la función  $\tanh(\mu x)$  con la que definimos una familia parametrizada de funciones que dependen del parámetro  $\mu$ . Este parámetro es muy importante en el análisis de las redes ya que nos permite variar la derivada de la función de activación en el origen. Con esto logramos cambiar el comportamiento de una red sin tener que modificar los pesos entre las neuronas o la función de activación que las define.

Antes de pasar a las definiciones matemáticas, expresamos la ecuación que define la actividad de la red en forma vectorial. Los pesos entre las neuronas definen la matriz  $W$  donde cada entrada  $w_{ij}$  representa el peso entre la neurona  $i$  y la  $j$ . Si  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  entonces la ecuación para el estado de la red en el tiempo  $t+1$  es

$$X(t+1) = f_\mu(WX(t))$$

Donde a  $W = [w_{ij}]$  la llamamos matriz de conexión.

En el siguiente capítulo presentamos algunas de las herramientas matemáticas que necesitamos para el análisis de las redes.

## Capítulo 2

# Introducción matemática

La teoría matemática que usaremos para estudiar las redes neuronales son los sistemas dinámicos. En este capítulo presentamos las definiciones principales y algunos resultados que serán necesarios más adelante.

**Definición 1** *Un sistema dinámico real es una tripleta  $D = (X, T, \varphi)$  donde a  $X$  se lo conoce como espacio de estados o espacio de fases,  $T$  es el dominio temporal y  $\varphi$  es una función de  $X \times T$  en  $X$ , tal que*

- (i)  $X$  es no vacío,
- (ii)  $T = \mathbb{R}$  o bien  $T = \mathbb{N}$  y
- (iii) para toda  $x \in X$  y todo  $t \in T$ ,

$$\varphi(x, 0) = x \quad \text{y} \quad \varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, s + t) \quad \text{para toda } x \in X \text{ y } s, t \in T$$

Un sistema dinámico con  $T = \mathbb{R}$  se llama de tiempo continuo (CT) mientras que uno con  $T = \mathbb{N}$  se llama de tiempo discreto (DT). Podemos suponer que el espacio de posibles estados de las neuronas, representado por los reales en nuestro modelo, es acotado, por lo que  $X \subset \mathbb{R}^n$  es acotado en nuestro sistema.

Se puede obtener un sistema dinámico de tiempo continuo por medio de una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

donde  $F$  cumple las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias; en este caso  $\varphi$  se define como  $\varphi(x, t) = x(t)$  donde  $x(t)$  es la solución de (2.1) que satisface la condición inicial  $x(0) = x_0$ .

Para obtener un sistema en tiempo discreto, basta con una función  $f : X \rightarrow X$ ; en este caso definimos  $\varphi$  por medio de iteraciones de esta función, es decir

$$\varphi(x, k) = f^k(x), \quad \text{con } f^0(x) = Id(x) = x \quad (2.2)$$

Definido así, es fácil probar que este sistema cumple con todas las hipótesis para ser un sistema dinámico. Las condiciones (i) y (ii) son inmediatas, para probar (iii) basta ver que  $\varphi(x, 0) = x$  (por definición) y que

$$\varphi(\varphi(x, t), s) = f^s(\varphi(x, t)) = f^s(f^t(x)) = f^{s+t}(x) = \varphi(x, s + t).$$

En este trabajo usamos sistemas de tiempo discreto, por lo que a partir de aquí nos referimos a un sistema dinámico como uno de tiempo discreto a menos que se especifique algo diferente.

Gran parte del estudio de los sistemas se destina a conocer el futuro de una condición inicial. En este sentido hay dos conceptos importantes por definir. Para un sistema dinámico  $D = (X, T, \varphi)$  y para cada  $x \in X$  podemos definir una transformación  $\varphi_x : T \rightarrow X$  como  $\varphi_x(t) = \varphi(x, t)$  y para cada  $t \in T$  la transformación  $\varphi^t : X \rightarrow X$  con  $\varphi^t(x) = \varphi(x, t)$ . La primera de estas transformaciones se llama la trayectoria para el estado inicial  $x$  y la segunda el flujo del sistema en el tiempo  $t$ . El conjunto de estados dados por  $\Gamma(x) = \{\varphi_x(t) \mid t \in T\}$  se llama la órbita de  $x$ . El comportamiento de las trayectorias del sistema nos dice qué pasa con los puntos al avanzar el tiempo. Es importante saber cuándo estas se acercan a un punto fijo, a una curva determinada o se alejan de su condición inicial.

Se llama punto de acumulación de la trayectoria de  $x$ ,  $\varphi_x(t) = x(t)$ , a un punto que satisface  $p = \lim_{t_k} x(t_k)$  para alguna sucesión  $\{t_k\} \rightarrow \infty$ . El conjunto de puntos de acumulación de una trayectoria  $\varphi_x(t)$  se llama conjunto límite de  $x$ , y se denota por  $\omega(x)$ . Este conjunto es importante ya que nos dice hacia donde se dirige la trayectoria de la condición inicial  $x$ . Algunas propiedades de  $\omega(x)$  son:  $\omega(x)$  es no vacío, es cerrado, acotado, conexo e invariante. [Devaney, 1986]

Además de los conjuntos límite de cada punto, nos preguntamos cuándo un conjunto determinado atrae o repele puntos del sistema. Un conjunto invariante bajo una función  $f$  es aquel para el cual la órbita de sus puntos se queda contenido en él mismo. Las definiciones siguientes tratan con conjuntos que atraen o repelen puntos cercanos a ellos:

**Definición 2** Sea  $A$  un conjunto cerrado e invariante de  $X$  bajo la función  $\varphi$ . A se llama asintóticamente estable (o  $A$  es un atractor) si existe una vecindad  $U$  de  $A$  tal que el conjunto límite de cualquier punto  $x \in U$  es un subconjunto de  $A$ .

**Definición 3** Si, por otro lado, para cualquier vecindad  $U$  de  $A$  el conjunto límite de cualquier estado  $x \in U - A$  tiene intersección vacía con  $A$  entonces el conjunto se llama asintóticamente inestable.

**Definición 4** Si un conjunto  $A$  cerrado e invariante de  $X$  bajo  $\varphi$  no es ni asintóticamente estable ni inestable, se dice que  $A$  es silla. El conjunto límite de un conjunto  $A$  es la unión de los conjuntos límite de los puntos en  $A$ . A la unión de los conjuntos cuyo conjunto límite está contenido en  $A$  se le llama la cuenca de atracción de  $A$ , denotado por  $B(A)$ .

El tipo de estabilidad de  $A$  se puede caracterizar por medio de su cuenca de atracción. Si  $B(A)$  contiene alguna vecindad de  $A$  entonces  $A$  es asintóticamente estable, en este caso, si  $B(A)$  es todo el espacio fase se dice que  $A$  es un atractor global, si no es así se llama localmente estable. El hecho de que  $B(A)$  contenga una vecindad de  $A$  asegura que se cumple la definición de conjunto asintóticamente estable. Si  $B(A)$  sólo contiene a  $A$  entonces es asintóticamente inestable ya que



cualquier punto no contenido en  $A$  tiene su conjunto límite fuera de  $A$ . Si ninguna de estas dos condiciones se cumple,  $A$  es silla.

Hay conjuntos invariantes que son muy importantes por la información que nos brindan sobre el sistema. Uno de estos conjuntos son los puntos fijos o puntos de equilibrio:

**Definición 5** Una trayectoria  $\varphi_x(t)$  es estacionaria si  $\varphi_x(t) = x$  para toda  $t \in T$ . En este caso el estado  $x$  se llama un punto de equilibrio o un punto fijo del sistema.

**Lema 1** Un punto  $x$  es de equilibrio si y sólo si  $F(x) = 0$  en un sistema de tiempo continuo y  $f(x) = x$  para tiempo discreto.

**Demostración** Supongamos que  $x$  es un punto de equilibrio, entonces  $\varphi_x(t) = x$  para toda  $t \in T$ , es decir que  $\frac{d\varphi(x,t)}{dt} = 0$  para toda  $t$ , pero  $\frac{d\varphi(x,t)}{dt} = F(x)$  por lo tanto  $F(x) = 0$ . Si ahora suponemos que  $F(x) = 0$  tenemos que  $\frac{d\varphi(x,t)}{dt} = 0$  lo cual implica que  $\varphi(x, t) = x + c$  para toda  $t \in T$  con  $c$  una constante. Sabemos por la definición de sistema dinámico que  $\varphi(x, 0) = x$  y por la condición anterior que  $\varphi(x, 0) = x + c$  por lo que  $x + c = x$  lo cual implica que  $c = 0$  llegando a que  $\varphi(x, t) = x$  para toda  $t \in T$ .

Ahora bien, si  $\varphi_x(k) = x$  para toda  $k \in T = \mathbb{N}$  esto quiere decir que  $f^k(x) = \varphi(x, k) = x$  para toda  $k$ , en particular para  $k = 1$   $f(x) = x$ . Ahora bien, si  $f(x) = x$  entonces  $f^2(x) = f(f(x)) = f(x) = x$ ,  $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x) = x$  y así sucesivamente  $f^k(x) = f(f^{k-1}(x)) = f(x) = x$  para toda  $k \in T$  de donde  $\varphi(x, k) = f^k(x) = x$  por lo que  $x$  es un punto de equilibrio. ■

Una manera de asegurar la existencia de puntos fijos es cuando  $X$  es un espacio compacto y  $f$  una función que contrae. El teorema del punto fijo de Brouwer dice que para  $\bar{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$  y  $g : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$  una función continua, entonces  $g$  tiene al menos un punto fijo en  $\bar{D}$ . Aplicando este teorema a  $f$  en los sistemas de tiempo discreto obtenemos directamente la existencia de un punto de equilibrio.

Los puntos fijos son de gran importancia cuando se estudia el comportamiento de una transformación. La manera como las órbitas de los demás puntos se acercan o alejan de estos es el centro de atención de nuestro análisis y servirá para hacer una primera clasificación dentro de los sistemas.

Además de los puntos estables podemos definir otros conjuntos invariantes llamados puntos periódicos. Estos puntos cumplen lo siguiente:

$$f^k(x) = x \text{ para alguna } k.$$

En este caso  $k$  es el periodo del punto y al conjunto  $\{f^i(x) : i = 1..k\}$  se le llama la órbita periódica de  $x$ . Es claro que cualquier resultado válido para puntos periódicos se puede aplicar a puntos de equilibrio, ya que estos son un caso particular de los primeros. Es posible caracterizar el tipo de estabilidad de puntos periódicos, y en particular de puntos fijos, por medio de la derivada de la función que define el sistema.

**Definición 6** Sea  $x$  un punto periódico de  $f$  de periodo  $k$ , entonces

- Si  $|(f^k)'(x)| = 1$ ,  $x$  se llama no-hiperbólico

- Si  $|(f^k)'(x)| \neq 1$ ,  $x$  se llama hiperbólico

**Lema 2** Sea  $p$  un punto fijo hiperbólico con  $|f'(p)| < 1$ . Entonces existe un intervalo abierto al rededor de  $p$  tal que si  $x \in U$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$$

**Demostración** Ya que  $f$  es de clase  $C^1$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|f'(x)| < A < 1$  para  $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ . Sea  $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ , por el teorema del valor medio aplicado al intervalo  $[p, x]$  (o al  $[x, p]$ ),  $\exists y \in (p, x)$  tal que

$$f'(y) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Como  $y \in (p, x) \subset [p - \epsilon, p + \epsilon]$  entonces  $|f'(y)| < A < 1$ , de forma que

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(y)| |x - p| < A |x - p| < |x - p| < \epsilon$$

Esto quiere decir que  $f(x)$  se encuentra también en el intervalo  $[p - \epsilon, p + \epsilon]$  por lo que podemos aplicar el mismo razonamiento otra vez, es decir: como  $f(x) \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$  entonces  $|f'(f(x))| < A$ , multiplicando por  $|f'(x)|$  en ambos lados obtenemos

$$|(f^2(x))'| = |f'(f(x)) \cdot f'(x)| < |f'(f(x))| |f'(x)| < |f'(x)| A^2 < A^2$$

Así que, por el teorema del valor medio en el intervalo  $[x, p]$ ,

$$|f^2(x) - p| = |f^2(x) - f^2(p)| = |(f^2(y))'| |x - p| < A^2 |x - p|$$

Siguiendo este proceso llegamos a que

$$|f^n(x) - p| \leq A^n |x - p|$$

lo cual implica que  $f^n(x) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . ■

Con una demostración análoga se puede mostrar que

**Lema 3** Sea  $p$  un punto fijo hiperbólico con  $|f'(p)| > 1$ . Entonces existe un intervalo abierto  $U$  al rededor de  $p$ , que no contiene a  $p$ , tal que si  $x \in U$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) \neq p$$

Cuando  $|f'(p)| = 1$ , es decir que  $p$  es no-hiperbólico, no existe ningún intervalo al rededor de  $p$  que asegure que sus puntos se acercan o alejan de  $p$ . En este caso  $\{p\}$  es un conjunto silla.

Los puntos periódicos se pueden clasificar de una manera muy parecida.

**Lema 4** Decimos que un punto periódico  $p$  de periodo  $k$  es atractor si existe un intervalo abierto  $U$  al rededor de  $p$  tal que si  $x \in U$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$$

**Demostración** Definamos la función  $h(x) = f^k(x)$ , entonces  $h(p) = f^k(p) = p$  es decir que  $p$  es un punto fijo de la función  $h$ . Como  $|h'(p)| = |(f^k(p))'| < 1$  tenemos por el lema anterior que  $p$  es un atractor, es decir que existe un intervalo  $U$  alrededor de  $p$  tal que

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} h^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{kn}(x) \text{ para toda } x \in U$$

por lo tanto  $p$  es un punto periódico atractor. ■

Condiciones parecidas a estas se pueden dar para dos y más dimensiones, en el siguiente capítulo se estudian con detalle para el caso de dos dimensiones.

Si bien los sistemas se diferencian por las características topológicas y el tipo de sus atractores son de poca importancia detalles como el tamaño o la localización. Para poder agruparlos en conjuntos que compartan las características más importantes definimos la conjugación topológica.

**Definición 7** Sean  $f : A \rightarrow A$  y  $g : B \rightarrow B$  dos mapeos. Se dice que  $f$  y  $g$  son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo  $h : A \rightarrow B$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ . El homeomorfismo  $h$  se llama una conjugación topológica.

Los mapeos conjugados son equivalentes en el sentido de su dinámica. Por ejemplo, un punto fijo  $p$  de  $f$  se identifica con un punto fijo  $h(p)$  en  $g$ , de igual manera los puntos periódicos están en correspondencia uno a uno entre los dos mapeos. Las principales características que definen a un mapeo son transmitidas a todos sus conjugados de donde podemos considerar sólo las clases que resultan de esta clasificación y pensar a dos mapeos conjugados como si fueran el mismo.

Una vez que conocemos la manera de clasificar a los sistemas por sus conjuntos atractores, podemos preguntarnos qué pasa con familias de mapeos parametrizados. Una familia que depende de un parámetro se define por medio de una función  $f : X \times \Delta \rightarrow X$ , donde para cada  $\mu \in \Delta$  definimos  $f_\mu : X \rightarrow X$  tal que  $f_\mu(x) = f(x, \mu)$ . Para nosotros  $\Delta \subset \mathbb{R}$  y  $f$  dependerá continuamente de  $\mu$ . La importancia de estas familias es el cambio cualitativo que puedan tener los conjuntos límite de cada mapeo conforme varía el parámetro. Llamaremos estructura de órbitas a la estructura cualitativa de los flujos de un mapeo, es decir a la forma que tienen sus atractores, puntos fijos, conjuntos invariantes, etc. El cambio de esta estructura se llama bifurcación y puede darse a nivel global o local. Las bifurcaciones locales tratan con puntos fijos o periódicos que cambian su estabilidad, es en este tipo de bifurcación que enfocaremos nuestro estudio.

Al punto que cambia su estabilidad después de una bifurcación se le llama punto de bifurcación, mientras que el valor del parámetro para el cual ocurrió el cambio se le llama valor de bifurcación. Sabemos que la naturaleza de los puntos fijos o periódicos depende de la derivada en ese punto, podríamos decir que el valor crítico en el cual esperamos un cambio en el comportamiento del mapeo es cuando  $|(f^n)'(x)| = 1$ , ya que mientras se mantenga por debajo o por arriba de este valor el tipo de estabilidad se conserva. En pocas palabras, son los puntos no-hiperbólicos los que esperamos tengan un comportamiento más interesante y donde ocurran las bifurcaciones. Los resultados en este sentido para dimensiones mayores a uno se estudian en el siguiente capítulo dedicado a redes neuronales y bifurcaciones.

# Capítulo 3

## Bifurcaciones

### 3.1 Bifurcaciones locales

En este capítulo comenzamos con las definiciones de hiperbolicidad, atractor, repulsor, etc., para mapeos de varias dimensiones. El cambio principal es que ahora las condiciones para que existan bifurcaciones dependen de los valores propios de la matriz derivada y no del módulo de la derivada, como en el caso de una dimensión. Una herramienta muy importante para estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos son las formas normales. Daremos una pequeña introducción a esta teoría para usarla después en el estudio de bifurcaciones en las redes. El tipo de redes que analizamos son redes de una y dos neuronas, para un número mayor de neuronas pedimos ciertas condiciones a la matriz de conexión de forma que sea posible un estudio detallado.

**Definición 8** *Un punto fijo  $p$  de  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  se llama hiperbólico si los valores propios de la matriz derivada  $Df(p)$  son de módulo distinto de 1. Si  $p$  es un punto de periodo  $n$ ,  $p$  se llama hiperbólico si la matriz derivada de  $f^n$ ,  $Df^n(p)$  es tal que todos sus valores propios son de módulo distinto de 1.*

La linealización de una función en un punto es la función lineal definida por su matriz derivada. Ya que estudiaremos los valores propios de matrices derivadas en diferentes puntos de una órbita, cabe aclarar que estos cumplen la siguiente propiedad:

**Observación 1** *Si  $p$  es un punto de periodo  $n$  de  $f$  los valores propios de  $Df^n$  son los mismos a lo largo de toda la órbita de  $p$ , ya que  $f^n \circ f^k = f^k \circ f^n$ . En efecto, por la regla de la cadena*

$$Df^n(f^k(p)) \cdot Df^k(p) = Df^k(f^n(p)) \cdot Df^n(p)$$

de donde si  $f^n(p) = p$ , obtenemos

$$(Df^k(p))^{-1} \cdot Df^n(f^k(p)) \cdot Df^k(p) = Df^n(p)$$

como los valores propios de matrices conjugadas son los mismos,  $Df^n(f^k(p))$  y  $Df^n(p)$  tienen los mismos valores propios para toda  $k$ .

Este resultado asegura que sin importar qué punto de la órbita estudiemos, los resultados son los mismos. En el siguiente lema clasificamos el tipo de estabilidad de puntos periódicos según los valores propios de la matriz derivada de la función  $f$ :

**Lema 5** Sea  $f^n(p) = p$

- Si todos los valores propios de  $Df^n(p)$  son de módulo menor que 1 entonces  $p$  es un punto periódico, atractor o sumidero.
- Si todos los valores propios de  $Df^n(p)$  son de módulo mayor que 1 entonces  $p$  es una fuente o repulsor.
- $p$  es silla si al menos un valor propio de  $Df^n(p)$  es de módulo mayor que 1 y otro menor que 1.

Una demostración de este lema se puede hacer utilizando el Teorema de Hartman-Grobman [Arnold, 1983] el cual dice que un difeomorfismo local con parte lineal igual a la matriz  $A$  (con valores propios de norma distinta de 1) en un punto fijo, es topológicamente equivalente a la transformación lineal  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en una vecindad suficientemente pequeña. De aquí que si los valores propios de  $Df^n(p)$  son de módulo menor que 1 entonces localmente el mapeo se comporta como su parte lineal. Además sabemos que una transformación lineal con valores propios de norma menor que 1 contrae, de manera que los puntos fijos con estas características serán atractores. El caso para puntos repulsores es análogo.

Para que exista una bifurcación, al menos un valor propio de la matriz derivada debe ser de módulo 1, es decir que el punto sea no hiperbólico. Cuando el mapeo es de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  los valores propios se encuentran en pares conjugados, por lo que, de ser el punto no hiperbólico, ambos resultan de módulo 1 al mismo tiempo.

Para el estudio de las bifurcaciones en redes neuronales, usaremos un modelo simplificado que supone las entradas de estímulos externos igual a cero y las funciones de activación de todas las neuronas idénticas. Bajo estos supuestos la ecuación que resulta se escribe

$$x_i(t+1) = g_\mu\left(\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j(t)\right), i = 1, \dots, n$$

o en forma vectorial

$$x(t+1) = g_\mu(Wx(t)) := f_\mu(x(t))$$

La función sigmoideal  $g_\mu$  se puede escoger de manera que sea impar en el intervalo  $[-1, 1]$  con lo que el origen es un punto fijo de  $f_\mu$  que no depende del parámetro  $\mu$ . El mapeo  $f_\mu$  en el origen tiene la matriz jacobiana

$$Df_\mu(0) = \mu W$$

así que las posibles bifurcaciones en el origen están determinadas por la matriz de conexión  $W$ . Los valores propios de  $Df_\mu(0)$ , en general números complejos, son

$$\lambda_k(\mu) = \mu\alpha_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

donde las  $\alpha_k$ 's son los valores propios de  $W$ . Esto es claro ya que si  $Wx = \alpha_k x$ , multiplicando esta igualdad por  $\mu$  de ambos lados obtenemos  $\mu Wx = \mu \alpha_k x$  es decir, que los valores propios de la matriz  $\mu W$  son exactamente  $\mu \alpha_k$  para cada  $k$ .

Si  $\alpha_k \neq 0$  entonces los valores propios de  $Df_\mu(0)$  tienen la propiedad de que:

$$\frac{d}{d\mu} |\lambda_k| = |\alpha_k| > 0$$

conocida como la condición de Hopf. Esta propiedad asegura que al mover  $\mu$ , por poco que sea,  $\lambda_k$  se ve afectada también. Si en algún momento los valores propios son de norma igual a 1, entonces la condición de Hopf asegura que al mover el parámetro cambiará el tipo de estabilidad del punto: los valores propios pasarán de ser de norma mayor que uno a menor que 1, o viceversa, asegurando distintos comportamientos.

### 3.1.1 Formas normales

El propósito de calcular formas normales es eliminar términos no lineales de funciones polinomiales para facilitar el análisis de sus propiedades. Para ésto se construyen sucesiones de transformaciones que eliminen sucesivamente los términos de orden  $r$  para  $r \geq 2$ . Para aplicar este procedimiento a cualquier función, así no sea polinomial, se utiliza el desarrollo de Taylor. [Arnold, 1983; Arrowsmith, 1990]

Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo, i.e.  $f$  es una biyección y tanto  $f$  como  $f^{-1}$  son diferenciables, cuyo desarrollo de Taylor alrededor del 0 es

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) + \dots + f_k(\mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}\|^{k+1})$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $f_k$  es un polinomio real en  $n$  variables de grado  $k$  y  $f_1(\mathbf{x}) = Df(0)\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ . Ahora bien, para cada  $r \geq 2$  buscamos una transformación de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + k_r(\mathbf{y}) = K(\mathbf{y})$$

Donde  $k_r$  es un polinomio de grado  $r$ . Supongamos que

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + f_r(\mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}\|^{r+1})$$

Entonces, si  $K$  transforma a  $f$  en  $\tilde{f}$ , tenemos que

$$\tilde{f}(\mathbf{y}) = K^{-1}(f(K(\mathbf{y})))$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{x}) &= K^{-1}(f(\mathbf{y} + k_r(\mathbf{y}))) = \\ &= K^{-1}(A\mathbf{y} + Ak_r(\mathbf{y}) + f_r(\mathbf{y}) + O(\|\mathbf{y}\|^{r+1})) = \\ &= A\mathbf{y} + Ak_r(\mathbf{y}) + f_r(\mathbf{y}) - k_r(A\mathbf{y}) + O(\|\mathbf{y}\|^{r+1}) \end{aligned}$$

de manera que si escogemos  $k_r(\mathbf{y})$  tal que

$$k_r(A\mathbf{y}) - Ak_r(\mathbf{y}) = f_r(\mathbf{y})$$

entonces

$$\tilde{f}(x) = Ay + O(\|y\|^{r+1})$$

Logrando quitar los términos de orden  $r$  de  $f$ . La ecuación

$$k_r(Ay) - Ak_r(y) = f_r(y)$$

es la ecuación homológica asociada a  $A$ . Para resolver esta ecuación se encuentran ciertas condiciones sobre los eigenvalores de  $A$ . Si llamamos  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  a los eigenvalores de  $A$  para que exista una solución de la ecuación homológica se necesita que

$$\lambda^m \neq \lambda_r$$

con  $\lambda = \lambda^{m_1} \lambda^{m_2} \dots \lambda^{m_n}$ ,  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  y  $\sum_i m_i = r$ .

En los casos en que se cumple la igualdad para alguna  $i$  se dice que el conjunto  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  es *resonante* de orden  $i$ . Estos casos son sumamente importantes en el estudio de las bifurcaciones. En particular, para el caso de dos neuronas, el tipo de bifurcación quedará determinado por los eigenvalores de la matriz de conexión y las resonancias que éstos impliquen.

Se puede probar [Arnold, 1983] que  $f$  se puede reducir a la forma

$$Jx + \sum_{r=2}^N w_r(y) + O(\|y\|^{N+1})$$

Donde  $w_r$  es un término resonante de orden  $r$  en el sentido de que  $\lambda^m = \lambda_r$ . La expresión anterior se llama la *forma normal de  $f$* .

Un buen ejemplo de cómo se encuentran las formas normales es haciéndolo para una dimensión. Supongamos que tenemos una función polinomial (siempre se puede utilizar el desarrollo de Taylor)

$$f(x) = a_1 x + a_2(x) + a_3(x) + \dots$$

donde  $a_1 \neq 0$ . Proponemos una transformación de la forma

$$x = y + k_2 y^2 = K_2(y)$$

con  $k_2 \in \mathbb{R}$ , y cuya inversa es

$$y = x - k_2 x^2 + \dots = K_2^{-1}(x)$$

de manera que al conjugar  $f$  con  $K_2$  obtenemos

$$\begin{aligned} (K_2(f(K_2^{-1}))(x) &= K_2(a_1(x - k_2 x^2) + a_2(x - k_2 x^2)^2 + a_3(x - k_2 x^2)^3 + \dots) \\ &= a_1(x - k_2 x^2) + a_2(x - k_2 x^2)^2 + a_3(x - k_2 x^2)^3 + \dots \\ &\quad + k_2(a_1(x - k_2 x^2) + a_2(x - k_2 x^2)^2 + a_3(x - k_2 x^2)^3 + \dots)^2 \\ &= a_1 x + (a_2 - a_1 k_2 + k_2 a_1^2) x^2 + O(|x|^3) \end{aligned}$$

Si lo que queremos es desaparecer los términos de orden 2, entonces los coeficientes deben cumplir

$$a_2 - a_1 k_2 + k_2 a_1^2 = 0$$

es decir

$$k_2 = \frac{-a_2}{a_1^2 - a_1} = \frac{-a_2}{a_1(a_1 - 1)} \text{ siempre que } a_1 \neq 1$$

Con las ecuaciones homológicas para los demás órdenes se puede ver que la condición sobre el coeficiente de  $x$  para tener una resonancia de orden  $r$  es la siguiente

$$a_1^r = a_1$$

de forma que los únicos valores con resonancias de  $a_1$  son cuando  $a_1 = \pm 1$ . Si  $a_1 = 1$  tenemos que  $a_1^r = a_1$  para cualquier  $r \in \mathbb{N}$ , esto quiere decir que no hay términos de ningún orden que se puedan eliminar. Si  $a_1 = -1$  entonces  $a_1^r = -1$  si  $r$  es impar, de aquí que existen resonancias en todos los órdenes impares, mientras que los términos de orden par se pueden eliminar.

Con el uso de las formas normales se llegó a los resultados sobre bifurcaciones que enunciamos a continuación [Wang, 1994].

Empezamos con el estudio de redes con pocas neuronas. El caso de una y dos neuronas, nos llevarán a resultados precisos en la descripción de las bifurcaciones. Para redes con mayor número de neuronas los resultados abarcan sólo algunos tipos de redes, sin embargo dan una buena idea de su comportamiento.

### 3.1.2 Redes de una sola neurona

En el caso de una sola neurona la matriz de conexión se reduce a

$$W = a$$

esto quiere decir que la neurona está conectada con ella misma y el peso de esta conexión es  $a$ . En este caso la función que describe el comportamiento de la red es

$$f_\mu(x) = g_\mu(ax) = \tanh(\mu ax)$$

Cuando  $a > 0$  la neurona se excita mientras que si  $a < 0$  la neurona se autoinhibe. A fin de obtener la dinámica a la que se da lugar, calculamos la derivada de  $f_\mu$

$$f'_\mu(x) = (\tanh(\mu ax))' = \tanh'(\mu ax) \cdot \mu a$$

que, evaluada en el origen, resulta

$$f'_\mu(0) = \mu a$$

El único punto fijo de esta red es el origen, para encontrar los valores de bifurcación de este sistema necesitamos saber cuándo la derivada en este punto tiene valor absoluto 1. Tenemos que

$$|\mu a| = 1 \Rightarrow |\mu| = \frac{1}{|a|}$$



por lo tanto  $\mu_0 = \pm \frac{1}{a}$  es un valor de bifurcación. Ahora bien, la segunda derivada  $f''_\mu(0) = 0$  y la tercera derivada  $f'''_\mu(0) = -2\mu^3$  por lo que el mapeo  $f_\mu$  se puede aproximar con su desarrollo de Taylor alrededor del cero por

$$a\mu x - \frac{2}{3}\mu^3 x^3 + O(|x|^4)$$

Como ya vimos en el estudio de las formas normales, para el caso de dimensión 1 sólo podemos despreciar los términos de órdenes pares cuando  $a = -1$ . Examinando el desarrollo de Taylor de la función que nos interesa, podemos ver que estos términos se anulan cuando se desarrolla alrededor del 0, de manera que la forma normal en este caso coincide con el desarrollo de Taylor.

El siguiente teorema describe el comportamiento de estas redes.

**Teorema 1 (Wang, 94)** *Para la red de una sola neurona el sistema presenta dos valores de bifurcación para cada valor de  $a$ ,  $\mu_0 = \pm \frac{1}{a}$ , estas bifurcaciones son de alguno de estos dos tipos:*

- i) *mientras  $\mu$  pasa el valor de bifurcación, el origen cambia su estabilidad de estable a inestable y aparecen dos puntos estables más  $x_\mu$  y  $-x_\mu$ , a esta bifurcación se le llama bifurcación de pitchfork o de tenedor;*
- ii) *cuando  $\mu$  pasa el punto de bifurcación, el origen pierde su estabilidad y aparece una órbita periódica de periodo 2,  $\{x_\mu, -x_\mu\}$ , a esta se le llama bifurcación por doblamiento de periodo.*

**Demostración** El desarrollo de Taylor de la función que define el comportamiento de la red de una neurona es

$$f_\mu(x) = a\mu x - \frac{1}{3}\mu^3 x^3 + O(|x|^4)$$

Sin pérdida de generalidad podemos fijar  $a = 1$  para tratar el caso de  $a$  positiva, y  $a = -1$  cuando es negativa. En el primer caso, y despreciando los términos del orden de  $|x|^4$ <sup>1</sup>, la función se reduce a

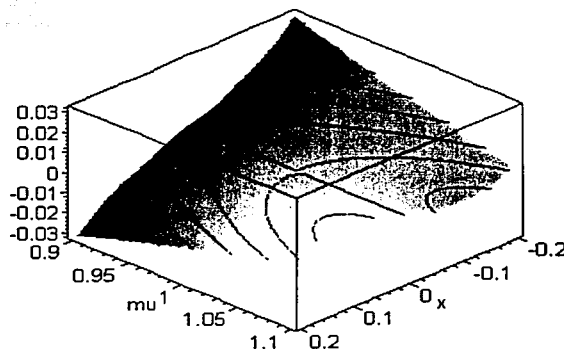
$$f_\mu(x) = \mu x - \frac{1}{3}\mu^3 x^3$$

Para encontrar los puntos fijos de este mapeo basta encontrar los ceros de la función:

$$h_1(x, \mu) = \left(\mu x - \frac{1}{3}\mu^3 x^3\right) - x$$

La gráfica de esta función, al variar  $x$  y  $\mu$ , se presenta a continuación:

<sup>1</sup> Ver las razones por las que se desprecian los términos de orden 4 y mayores en el apéndice sobre la función tanh.

Gráfica de la función  $h_1(x, \mu)$ 

Claramente  $x = 0$  es una solución independiente del parámetro  $\mu$ , para cualquier valor de  $\mu$  negativo existe una vecindad del cero lo suficientemente pequeña de manera que no hay más puntos fijos que el origen.

Si  $\mu > 1$  aparecen dos puntos fijos  $x_\mu = \sqrt{\frac{3(\mu-1)}{\mu^3}}$  y  $-x_\mu = -\sqrt{\frac{3(\mu-1)}{\mu^3}}$ , de forma que en el punto de bifurcación  $\mu_0 = 1$ , la bifurcación es de pitchfork. Ahora bien, la derivada de la función  $f_\mu$  en cero es  $\mu$ , por lo que si bien cuando  $\mu$  es menor que 1 el origen es un equilibrio estable, al pasar el punto de bifurcación  $\mu_0 = 1$  este punto se vuelve inestable. Ahora, si calculamos la derivada de  $f_\mu$  tenemos que:

$$f'_\mu(x) = \mu - \mu^3 x^2$$

que evaluada en los puntos de bifurcación

$$f'_\mu(\pm x_\mu) = \mu - \mu^3 \left( \pm \sqrt{\frac{3(\mu-1)}{\mu^3}} \right)^2 = -2\mu + 3$$

por lo tanto para  $\mu > 1$

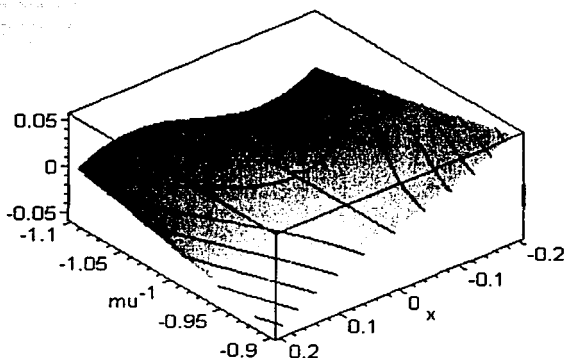
$$f'_\mu(\pm x_\mu) = -2\mu + 3 < -2 + 3 = 1$$

por lo que los puntos  $x_\mu$  y  $-x_\mu$  son puntos de equilibrio estables.

Para el punto de bifurcación  $\mu_0 = -1$  analizamos los puntos de equilibrio de la segunda iterada de la función. Un punto fijo de la segunda iteración de una función significan puntos de periodo 2 en la función original. Para el caso de  $f_\mu(x)$  debemos encontrar los ceros de

$$h_2(x, \mu) = (\mu(\mu x - 2\mu^3 x^3) - 2\mu^3(\mu x - 2\mu^3 x^3)^3) - x$$

cuya gráfica es

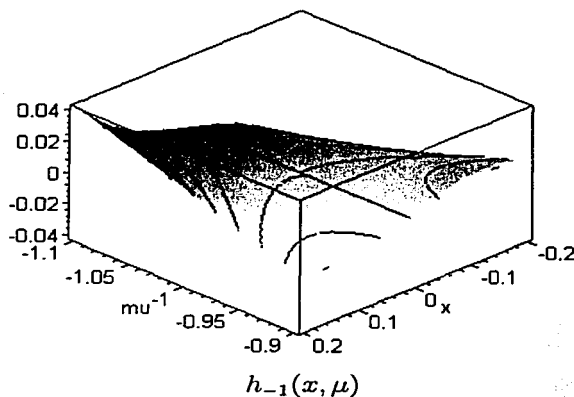
Gráfica de la función  $h_2(x, \mu)$ 

Claramente el cero y los puntos de equilibrio de la función  $f_\mu$  para  $\mu > 1$  se conservan en la iterada, sin embargo surgen nuevos puntos fijos cuando  $\mu < -1$ . Esto quiere decir que en el mapeo original,  $f_\mu$ , aparece una órbita periódica de periodo dos para  $\mu = -1$  y se conserva para cada valor de  $\mu < -1$ .

Ahora bien, para el caso  $a = -1$  tenemos el mismo comportamiento pero con una bifurcación de pitchfork en  $\mu_0 = -1$  y una de doblamiento de periodo en  $\mu_0 = 1$ . La función que nos interesa ahora es

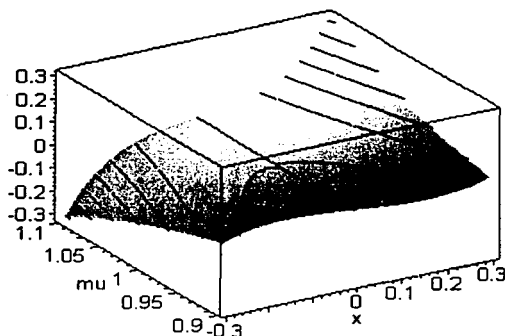
$$h_{-1}(x, \mu) = -\mu x - 2\mu^3 x^3 - x$$

y su gráfica es:



Los ceros de esta función muestran que mientras  $\mu$  decrece y pasa el  $-1$  nacen dos puntos fijos más además del cero. La intersección de la superficie con el plano  $z = 0$  representa la manera en que se distribuyen los ceros de la función. En  $\mu = 1$  la

bifurcación es de doblamiento de periodo como lo muestra la siguiente gráfica, en la cual se representa la segunda iterada de  $f_\mu$  alrededor del 1.



Gráfica de  $(f_\mu)^2 - x$

En este teorema quedan estudiadas todas las posibles bifurcaciones locales, para asegurar que no existen más basta probar que no hay puntos de otro periodo además de 2. Una demostración de esto se encuentra en el Apéndice 1, en el cual se muestra que no existen punto de periodo  $n$  para  $n > 2$ . ■

En el cuadro siguiente se resumen las cuatro bifurcaciones que ocurren, el valor del parámetro que las provoca y el tipo que son.

	$a < 0$	$a > 0$
$\mu = \frac{1}{a}$	pitchfork	pitchfork
$\mu = -\frac{1}{a}$	doblamiento	doblamiento

Este tipo de análisis en el que se encuentran explícitamente los puntos fijos del sistema al mover  $\mu$ , se puede hacer en cualquier red de dos neuronas y para algunos casos particulares de tres o más. Sin embargo para redes mayores se utilizan las formas normales queya mencionamos.

### 3.1.3 Redes neuronales de dos neuronas

En el caso de la red con dos neuronas la matriz de conexión que utilizamos es:

$$W = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Donde  $a, b$  son reales distintos de cero. Esta matriz representa dos neuronas idénticas, con mismos pesos sobre sí mismas y mismos pesos pero de signo contrario sobre la otra. El mapeo que define el comportamiento de la red se convierte en:

$$f_\mu(x, y) = (g_\mu(ax - by), g_\mu(bx + ay)), x, y \in [-1, 1]$$

La matriz derivada de este mapeo en el origen es  $Df_\mu(0,0) = \mu W$  y sus eigenvalores son

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \mu(a \pm ib)$$

Para que existan bifurcaciones debemos encontrar los valores de  $\mu$  para los cuales  $\|\lambda(\mu_0)\| = 1$  de manera que

$$|\mu_0| = \frac{1}{\|a \pm ib\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

es un punto de bifurcación. Notemos que la condición de Hopf se cumple para cualquier valor de  $\mu > 0$  ya que

$$\frac{d}{d\mu} \|\lambda(\mu)\|_{\mu=\mu_0} = \frac{d}{d\mu} \|\mu(a \pm ib)\| = \frac{d}{d\mu} \mu \|a \pm ib\| = \|a \pm ib\| > 0$$

Dependiendo de los valores de  $a$  y  $b$  habrá distintos tipos de bifurcaciones, por ejemplo la de Hopf, resonancias fuertes y débiles, etc.

### Bifurcación de Hopf

Existe un teorema que clasifica y define las condiciones para los distintos tipos de bifurcaciones. Dependiendo de los valores propios de la matriz derivada en algún punto fijo, pueden surgir o desaparecer puntos periódicos o cambiar la estabilidad del punto de equilibrio. El teorema se divide en la bifurcación de Hopf, resonancias débiles y resonancias fuertes. Cada parte la trataremos por separado y ejemplificaremos por medio de una red.

**Teorema 2** (*Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf para mapeos*) [Wang, 1994]  
Sea  $f_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una familia de mapeos con una familia de puntos fijos  $x_\mu$  para valores de  $\mu$  en un intervalo alrededor del valor de bifurcación  $\mu_0$  tal que

i)  $Df_\mu(x_\mu)$  tiene valores propios  $\lambda(\mu)$  y  $\bar{\lambda}(\mu)$  no reales

ii)  $(\lambda(\mu))^i \neq 1$  para  $i = 1, 2, 3, 4$

iii)  $\frac{d}{d\mu} |\lambda(\mu)|_{\mu=\mu_0} > 0$

Entonces en una vecindad pequeña  $C$  de  $\mu_0$  existe un cambio de coordenadas suave tal que el mapeo  $f_\mu$  tiene la forma normal<sup>2</sup>

$$f_\mu(z) = \lambda(\mu)z + \alpha(\mu)z^2\bar{z} + O(|z|^4), z \in \mathbb{C}$$

- Si  $\alpha(\mu_0) \neq 0$  existe una curva simple cerrada al rededor del punto fijo  $x_\mu$  para  $\mu > \mu_0$  invariante bajo  $f_\mu$  tal que la curva se deforma homotópicamente al punto  $x_{\mu_0}$  cuando  $\mu \rightarrow \mu_0$ .

<sup>2</sup>Dependiendo de las condiciones que cumpla alguna función, se puede asegurar que diferentes características de ésta se ven reflejadas en su forma normal. Podemos tener, por ejemplo, formas normales topológicas, diferenciables, diferenciables hasta cierto grado o solamente formales. En este caso, y en todos los teoremas que aquí mencionamos, se trata de formas normales diferenciables.

- Si  $\alpha(\mu_0) < 0$  la curva es atractora en una vecindad de  $x_\mu$  y  $x_\mu$  cambia su estabilidad de estable a inestable cuando  $\mu$  pasa a  $\mu_0$  de manera creciente.
- Si la desigualdad en la condición iii) (condición de Hopf) es invertida entonces para  $\alpha(\mu_0) > 0$  la curva se vuelve repulsora y el punto fijo atractor para  $\mu > \mu_0$ .

Cuando los eigenvalores de la matriz derivada  $Df_\mu(x_\mu)$  cruzan el círculo unitario en raíces racionales de la unidad se dice que sucede una resonancia. Dependiendo del valor de  $q$  para el cual  $(\lambda(\mu))^q = 1$  las resonancias se clasifican como resonancias fuertes, en los casos  $q = 1, 2, 3$  y  $4$ , y resonancias débiles cuando  $q \geq 5$ .

Entonces si  $a$  y  $b$  son tales que  $\theta = \arctan(b/a) \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi/3, \pm\pi/2$ , esperamos que ocurra una bifurcación de Hopf supercrítica. El nombre supercrítica se utiliza cuando el ciclo invariante aparece después del valor de bifurcación. Según el teorema, las condiciones que se deben cumplir para que se dé esta bifurcación son las siguientes:

- La matriz jacobiana en el origen debe tener eigenvalores conjugados no reales
- Los eigenvalores deben cumplir que  $\lambda(\mu)^k \neq 1$  para  $k = 1, 2, 3, 4$ .
- El valor  $\alpha(\mu_0)$  en la forma normal

$$f_\mu(z) = \lambda(\mu)z + \alpha(\mu)z^2\bar{z} + O(|z|^4), z \in \mathbb{C}$$

debe ser distinto de cero.

Los eigenvalores de la matriz derivada son  $\lambda_{1,2}(\mu) = \mu(a \pm ib)$ , los cuales son conjugados no reales. Para que ocurra una bifurcación de Hopf suponemos que  $\lambda(\mu)^k \neq 1$  para  $k = 1, 2, 3, 4$ . Para llegar a la forma normal del mapeo es necesario obtener su desarrollo de Taylor hasta tercer grado al rededor del cero. Dado que las segundas parciales se anulan en el cero, el desarrollo se reduce, en cada una de sus componentes, a:

$$\begin{aligned} g_\mu(ax - by) &\simeq \mu ax - \mu by - \frac{1}{3}\mu^3 a^3 x^3 + \mu^3 a^2 x^2 by - \mu^3 a x b^2 y^2 + \frac{1}{3}\mu^3 b^3 y^3 := f_1(x, y) \\ g_\mu(bx + ay) &\simeq \mu bx + \mu ay - \frac{1}{3}\mu^3 b^3 x^3 - \mu^3 a y b^2 x^2 - \mu^3 b y a^2 y^2 - \frac{1}{3}\mu^3 a^3 y^3 := f_2(x, y) \end{aligned}$$

Ahora bien, haciendo el cambio de variable  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ,  $y = \frac{z-\bar{z}}{i2}$  obtenemos

$$f_\mu(z) = \lambda(\mu)z + \sum_{2 \leq p+q \leq 3} \xi_{pq} z^p \bar{z}^q + O(|z|^4)$$

Los coeficientes de esta forma normal son los que determinan cómo se comportará la función  $f_\mu(z)$ , por lo que es importante calcularlos. Los cálculos que hay que realizar para encontrarlos son largos y resultan de poca importancia en este trabajo, sin embargo escribimos algunos de los pasos que hay que hacer y el resultado al que llegamos para cada coeficiente.

Los coeficientes  $\xi_{pq}$  en la ecuación anterior están definidos como:

$$\begin{aligned}\xi_{20} &= \frac{1}{8} [(f_1)_{xx} - (f_1)_{yy} + 2(f_2)_{xy} + i((f_2)_{xx} - (f_2)_{yy} - 2(f_1)_{xy})] \\ \xi_{11} &= \frac{1}{4} [(f_1)_{xx} + (f_1)_{yy} + i((f_2)_{xx} + (f_2)_{yy})] \\ \xi_{02} &= \frac{1}{8} [(f_1)_{xx} - (f_1)_{yy} - 2(f_2)_{xy} + i((f_2)_{xx} - (f_2)_{yy} + 2(f_1)_{xy})] \\ \xi_{21} &= \frac{1}{16} [(f_1)_{xxx} + (f_1)_{xyy} + (f_2)_{xxy} + (f_2)_{yyx} + i((f_2)_{xxx} + (f_2)_{xyy} - (f_1)_{xxy} - (f_1)_{yyx})] \\ Y f_{xy} &= \frac{\partial f}{\partial y \partial x}.\end{aligned}$$

En el caso que estamos estudiando nos interesan las parciales evaluadas en el  $(0, 0)$ , por lo que el coeficiente  $\alpha(\mu)$  resulta ser

$$\alpha(\mu_0) = \operatorname{Re} \left[ \frac{(1-2\lambda)\bar{\lambda}}{1-\lambda} \xi_{11} \xi_{20} \right] - \frac{1}{2} |\xi_{11}|^2 - |\xi_{20}|^2 + \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \xi_{21})$$

Las segundas parciales de  $f_1$  y  $f_2$  se anulan en el cero, así que  $\xi_{11} = \xi_{20} = 0$  de aquí que

$$\alpha(\mu_0) = \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \xi_{21})$$

Para calcular  $\xi_{21}$  necesitamos:

$$(f_1)_{xxx} = -2\mu^3 a^3, (f_1)_{xyy} = -2\mu^3 b^2 a, (f_2)_{xxy} = -2\mu^3 a b^2, (f_2)_{yyx} = -2\mu^3 a^3, (f_2)_{xxx} = -2\mu^3 b^3,$$

$$(f_2)_{xyy} = -2\mu^3 a^3 b, (f_1)_{xxy} = 2\mu^3 b a^2, (f_1)_{yyx} = 2\mu^3 b^3$$

De forma que

$$\begin{aligned}\xi_{21} &= -\frac{1}{4}\mu^3 a^3 - \frac{1}{8}\mu^3 b^2 a - \frac{1}{8}\mu^3 a b^2 - \frac{i}{4}\mu^3 b^3 - \frac{i}{4}\mu^3 b a^2 = -\frac{1}{4}\mu^3 [a^3 + a b^2 + i(b^3 + b a^2)] = \\ &= -\frac{1}{4}\mu^3 [a(a^2 + b^2) + i(b(b^2 + a^2))] = -\frac{1}{4}\mu^3 [a + ib] = -\frac{1}{4}\mu^3 \lambda\end{aligned}$$

Entonces

$$\alpha(\mu_0) = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}(-\frac{1}{4}\mu_0^3 \lambda)) = -\frac{\|\lambda\|^2}{4} \mu_0^3$$

Como  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \neq 0$ ,  $\alpha(\mu_0) \neq 0$  con lo que las hipótesis del teorema se cumplen y tenemos dos resultados posibles:

Para  $\mu > \mu_0$  existe una curva simple cerrada, un ciclo límite al rededor del origen, el cual es invariante bajo  $f_\mu$  y se encoje hacia el origen mientras  $\mu \rightarrow \mu_0$ .

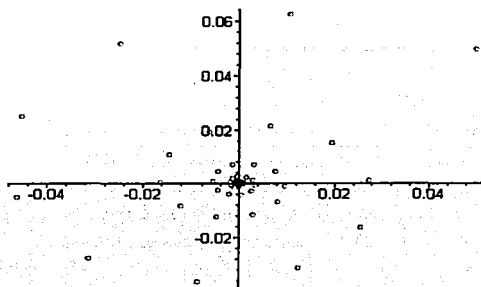
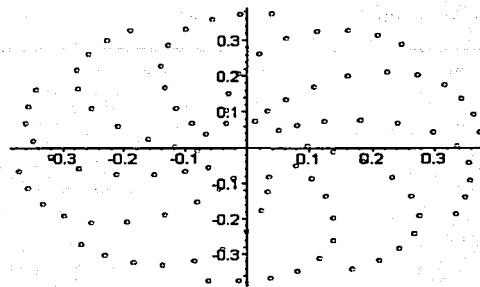
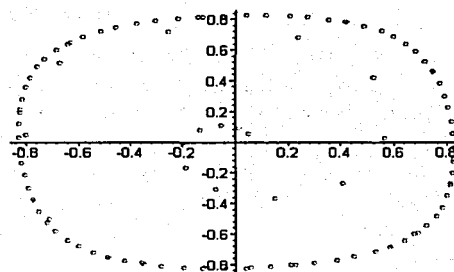
Si además  $\alpha(\mu_0) < 0$  la curva es un atractor en una vecindad del origen y este cambia su estabilidad de estable a inestable cuando  $\mu$  pasa a  $\mu_0$  de manera creciente.

De esta forma vemos que para cada par de valores de  $a$  y  $b$  que cumplen con la condición  $\lambda(\mu)^k \neq 1$  para  $k = 1, 2, 3, 4$  existen dos puntos de bifurcación  $\mu_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  en los cuales si  $\mu_0 > 0$  la bifurcación es de Hopf supercrítica y si  $\mu_0 < 0$  entonces es subcrítica.

Como se ve en el caso de redes de dos neuronas, los cálculos para llegar a las formas normales suelen ser muy complicados. Para tres o más neuronas no existen teoremas que clasifiquen las posibles bifurcaciones.

Como ejemplo tratamos el caso en que  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{2}$  y  $\mu$  varía entre 0.52 y 0.75. El valor de bifurcación en este caso es  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Las gráficas que se muestra a continuación es el espacio de fases para el mapeo  $f_\mu$  para distintos valores de  $\mu$ . Se tomó como

valor inicial el punto  $(0.05, 0.05)$  y se graficaron 100 iteraciones de la función para cada gráfica. Cuando  $\mu$  es menor que el valor de bifurcación (gráfica a) la condición inicial es atraída por el punto fijo en el origen. En las gráficas b y c, se puede ver un ciclo invariante atractor alrededor del origen hacia el cual es atraída la órbita de la condición inicial.

a.  $\mu = 0.52$ b.  $\mu = 0.6$ c.  $\mu = 0.75$ 

A pesar de no encontrar puntos periódicos después de la bifurcación, el ciclo invariante que surge con la bifurcación de Hopf puede parecer una órbita periódica debido a la distribución de los puntos sobre ella. Sin embargo, como veremos a continuación, las órbitas periódicas se consiguen cuando los valores propios de la matriz son raíces racionales de la unidad. El "periodo" de los supuestos puntos periódicos en el ciclo invariante depende de los valores de  $a$  y  $b$  y de la raíz de la unidad a la que más se parezcan los valores propios de la matriz de conexión. Lo que ocurre es que las iteraciones de la función se pegan en algunos lugares donde las parciales son casi cero, los espacios que se ven entre un punto donde se "acumulan" y el siguiente, surgen porque las parciales son de norma mayor a cero, con lo que las iteraciones se separan más una de otra ya que la función en ese punto crece más rápido que si tuviera parciales cercanas al cero. De esta manera se hacen grupos de puntos que pudieran parecerse a los espacios fase de sistemas periódicos.



### 3.1.4 Resonancias

Las resonancias surgen cuando la condición  $\lambda(\mu)^k \neq 1$  para  $k = 1, 2, 3, 4$  no se cumple para alguno de estos enteros. En la demostración del teorema de Hopf, cuando se asegura que el mapeo se puede llevar a la forma normal que nos dará el comportamiento de la red, es necesario asumir esta condición. Como veremos a continuación, al fallar esta hipótesis puede suceder que aparezcan órbitas periódicas en lugar del ciclo invariante predichas por el teorema.

El tratamiento de las resonancias se vuelve muy complicado y hay muchos casos que aun no se han encontrado resultados precisos. Una manera de estudiarlas es por medio de aproximaciones por sistemas de ecuaciones diferenciales. A partir de lo que conocemos de estos se puede inferir, bajo ciertas hipótesis, el comportamiento de los mapeos en presencia de resonancias. Una pequeña introducción a esta teoría se encuentra en el Apéndice 2 de esta tesis.

El caso para resonancias de orden 1 y 2 se vuelve muy sencillo en nuestro estudio debido a las características de la matriz de conexión. Los demás casos serán tratados utilizando resultados que no probaremos aquí.

#### Resonancias fuertes de orden 1 y 2

Las resonancias fuertes aparecen cuando  $\lambda(\mu)^k = 1$  para  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , en particular para las de orden 1 implica que  $\lambda(\mu) = \mu(a + ib) = 1$  es decir que  $b = 0$  y  $\mu a = 1$ , lo cual implica que  $\mu = \frac{1}{a}$ . Ahora la matriz se convierte en

$$W = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Esto significa que el peso de la conexión entre las dos neuronas es 0, o sea que actúan de manera independiente e igual que el sistema de una sola neurona. Así, la función

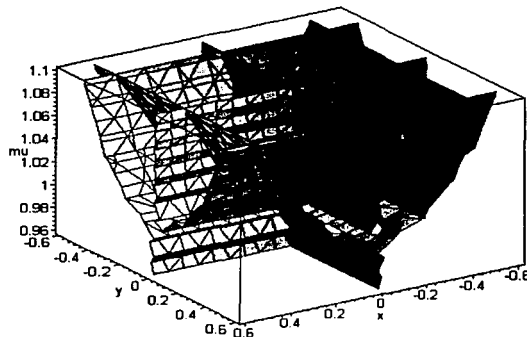
$$f_{\mu}(x, y) = (g_{\mu}(ax), g_{\mu}(ay))$$

es simplemente la combinación de dos funciones que dependen de una sola neurona y que actúan en cada una de las coordenadas. El único punto de bifurcación es el origen, el valor de  $\mu$  en el que sucede la bifurcación es  $\mu_0 = \frac{1}{a}$  y el tipo de bifurcación, pitchfork o de doblamiento de periodo, depende del signo de  $a$ .

Gracias a que las funciones son desacopladas, podemos asegurar que en estas redes se repite el comportamiento de las redes de una neurona.

En la siguiente gráfica las superficies representan a las funciones que definen el comportamiento de cada una de las neuronas. Los puntos de intersección son justamente los puntos de equilibrio que surgen después de la bifurcación para cada valor

de  $\mu > \mu_0$ . Para hacer la siguiente gráfica se tomó  $a = 1$ .

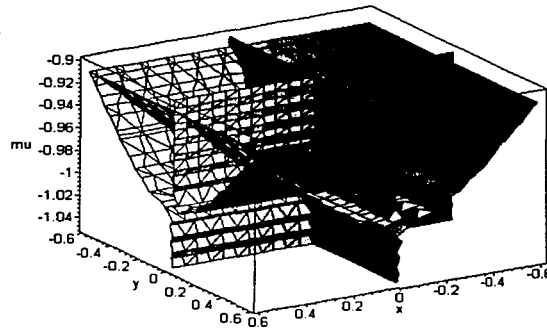


Para valores de  $\mu$  menores que 1, la única intersección es en el  $(0, 0)$ .

Al pasar el valor de bifurcación aparecen 8 nuevos puntos de equilibrio para cada valor de  $\mu$ .

De igual manera, para la resonancia de orden 2,  $\lambda(\mu)^2 = 1 \Rightarrow \mu^2(a + ib)^2 = 1$ , es decir que  $\mu^2(a^2 - b^2 + i2ab) = 1$ . Para que esto ocurra es necesario que  $a = 0$  o  $b = 0$  para que el término multiplicado por  $i$  se haga cero. Si  $a = 0$  tenemos que  $\mu^2(ib)^2 = -\mu^2b^2 = 1$  pero esto sólo se cumple cuando  $\mu$  es puramente imaginario, por lo tanto  $b$  debe ser cero,  $a$  distinto de cero y entonces nos encontramos en la misma situación que con la resonancia de orden 1.

Las superficies de la siguiente gráfica representan el comportamiento de las segundas iteradas de las funciones para cada neurona, los puntos fijos, es decir, las intersecciones de estas superficies, se interpretan como puntos de periodo dos en las funciones originales.



Los puntos de intersección de las superficies significan puntos de periodo dos en la función original.

### Resonancia de orden 3

Cuando los eigenvalores de la matriz derivada cumplen  $\lambda(\mu)^3 = 1$  se tienen resonancias de orden 3. Cuando  $a < 0$ ,  $b/a = \pm\sqrt{3}$  los eigenvalores de la función son

$$\lambda(\mu_0), \bar{\lambda}(\mu_0) = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

El mapeo para cualquier punto cercano al origen se comporta casi como una rotación de  $2\pi/3$ , es decir que si encontramos puntos periódicos, esperamos que sean de periodo 3. Los teoremas para las resonancias suelen ser de tipo aproximado, hay muchos casos que quedan sin estudiar por lo que no siempre se conoce el comportamiento exacto de las redes. En este caso sabemos que existen ciclos invariantes alrededor del punto de equilibrio después de la bifurcación, sin embargo no siempre podremos encontrar puntos periódicos dentro de estos.

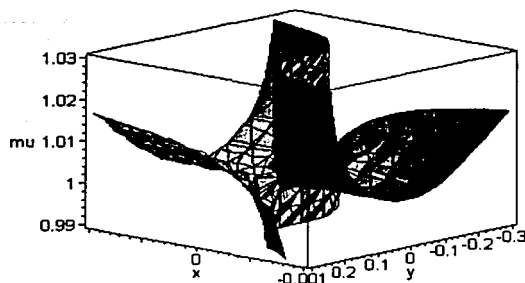
Como ejemplo proponemos una red con la siguiente matriz de conexión:

$$W = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

El mapeo que define la red es:

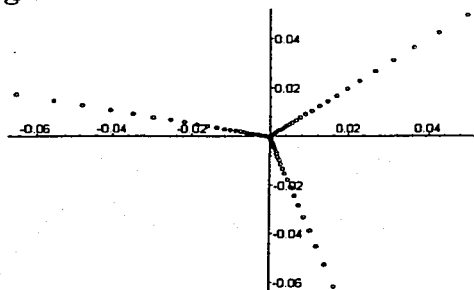
$$f_{\mu}(x, y) = \left( \tanh\left(\mu\left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right), \tanh\left(\mu\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \right)$$

Haciendo los cálculos necesarios se puede ver que para la función y su primera iteración no existen más puntos fijos que el  $(0, 0)$  sin embargo la segunda iteración presenta una bifurcación en  $\mu_0 = 1$ . Para ver esto graficamos los puntos fijos de la segunda iterada para la neurona  $x$  variando  $\mu$ :

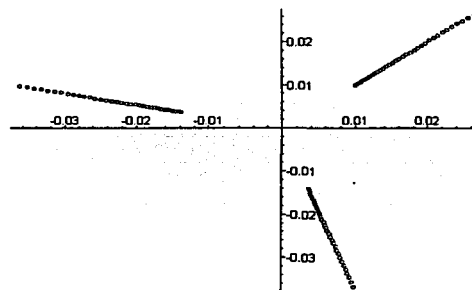


La gráfica para la neurona  $y$  es la reflejada de esta. Este es uno de los casos en los que en el círculo invariante que surge después de la bifurcación encontramos puntos de periodo 3.

La bifurcación también puede verse mediante las órbitas de puntos cercanos al origen antes y después del valor de bifurcación. Con la matriz de conexión que utilizamos arriba calculamos las órbitas de algunos puntos y resultaron las siguientes gráficas:

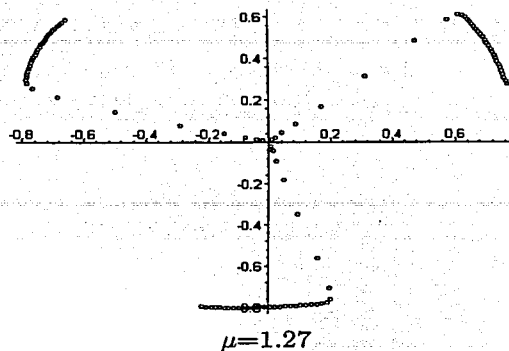


$\mu=0.95$



$\mu=1.01$

En estas gráficas se puede observar como antes de la bifurcación el origen es un punto fijo atractor, al pasar el valor de bifurcación, en este caso 1, surge el ciclo invariante. Es clara también la tendencia a conservar el periodo 3 que estaba pronosticado del estudio de puntos fijos de la tercera iteración.



Es importante resaltar que la órbita en esta última gráfica tiende hacia el ciclo invariante y no hacia el origen.

Al igual que otras resonancias existe una excepción al teorema de Hopf para orden 3:

**Teorema 3 (Wang, 94)** Sea  $f_\mu$  una familia de mapeos en  $\mathbb{R}^2$  de clase  $C^k$  con  $k \geq 4$  tal que tiene una familia de puntos fijos  $x_\mu$  y existe  $\mu_0$  tal que la matriz derivada de  $f_\mu$  en el punto fijo  $x_{\mu_0}$ ,  $Df_{\mu_0}(x_{\mu_0})$  tiene dos valores propios conjugados  $\lambda(\mu_0)$  y  $\bar{\lambda}(\mu_0)$  con  $\lambda(\mu_0) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , y que cumple la condición de Hopf. Entonces después de trasladar el punto fijo  $x_{\mu_0}$  al origen, el mapeo puede ser escrito en la forma normal

$$f_\mu(z) = \lambda(\mu)z + \alpha(\mu)z^2\bar{z} + \beta(\mu)\bar{z}^2 + O(|z|^4), z \in \mathbb{C}, \lambda(\mu_0) = e^{2\pi i/3}$$

- Si  $\beta(\mu_0) \neq 0$  entonces para  $\mu > \mu_0$  muy cerca de  $\mu_0$  existe una familia de órbitas periódicas de período 3 bifurcándose desde el punto fijo  $x_{\mu_0}$  y el punto fijo  $x_\mu$ , el cual es estable para  $\mu < \mu_0$  e inestable cuando  $\mu > \mu_0$ .
- Si  $\beta(\mu_0) = 0$  y  $\arg(\dot{\lambda}(\mu_0)) \neq \arg(\alpha(\mu_0)\bar{\lambda}(\mu_0)) \pmod{\pi}$ , entonces no existen órbitas periódicas de período 3, pero aparecen ciclos invariantes en la misma forma como ocurre en la bifurcación de Hopf, estos ciclos son atractores si  $\mu > \mu_0$  y repulsores si  $\mu < \mu_0$ .
- Si  $\beta(\mu_0) = 0$  y  $\arg(\dot{\lambda}(\mu_0)) = \arg(\alpha(\mu_0)\bar{\lambda}(\mu_0)) \pmod{\pi}$ , para  $\mu$  cercanas a  $\mu_0$ , existe una familia de puntos periódicos de periodo 3 que se bifurca desde el punto fijo  $x_{\mu_0}$ , y un punto fijo  $x_\mu$  estable para  $\mu < \mu_0$  e inestable para  $\mu > \mu_0$ .

De este teorema tenemos que  $\beta(\mu_0) = 0$ , para la red que estamos estudiando, es decir que no existen términos de orden 2. La otra condición es que  $\arg(\dot{\lambda}(\mu_0)) \neq \arg(\alpha(\mu_0)\bar{\lambda}(\mu_0)) \pmod{\pi}$ , donde

$$\dot{\lambda}(\mu_0) = \frac{d}{d\mu}\lambda(\mu) \Big|_{\mu=\mu_0} = \frac{d}{d\mu}\mu(a+ib) \Big|_{\mu=\mu_0} = a+ib$$

de modo que  $\arg(\lambda(\mu_0)) = \arg(a + ib) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{cases}$  y  $\arg(\alpha(\mu_0)\bar{\lambda}(\mu_0)) = \arg\left(\frac{i}{4} \frac{a+ib}{|a+ib|}\right)$ .  $\frac{a-ib}{|a+ib|} = \arg(i/4) = \pi/2$ , de manera que se cumplen las condiciones para que existan órbitas de periodo 3 al pasar el valor de bifurcación.

#### Resonancia de orden 4

Las resonancias de orden 4 aparecen cuando  $\lambda(\mu)^4 = 1$ ; esto implica que  $a = 0$  y  $b \neq 0$ . La matriz de conexión se convierte en

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores de la matriz son  $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \pm \mu i b$  y el valor de bifurcación  $|\mu_0| = \frac{1}{|b|}$ . Para este caso se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 4** Sea  $f_\mu$  una familia de mapeos en  $\mathbb{R}^2$  de clase  $C^k$  con  $k \geq 3$  tal que tiene una familia de puntos fijos  $x_\mu$  y existe  $\mu_0$  tal que la matriz derivada de  $f_\mu$  en el punto fijo  $x_{\mu_0}$ ,  $Df_{\mu_0}(x_{\mu_0})$  tiene dos valores propios conjugados  $\lambda(\mu_0) = i$  y  $\bar{\lambda}(\mu_0) = -i$ . Entonces existe un cambio de coordenadas suave tal que el mapeo  $f_\mu$  puede escribirse como

$$f_\mu(z) = \lambda(\mu)z + \alpha(\mu)z^2\bar{z} + \beta(\mu)\bar{z}^3 + O(|z|^5), z \in \mathbb{C}, \lambda(\mu_0) = i$$

Si  $\beta(\mu_0) \neq 0$  y  $|\alpha(\mu_0)| < 1$ , entonces surgen dos familias de órbitas de período 4 bifurcándose a partir del punto fijo  $x_{\mu_0}$ . Si  $|\alpha(\mu_0)| > |\beta(\mu_0)|$  las dos familias se bifurcan del mismo lado de  $\mu > \mu_0$ , en este caso si  $\text{Im}(\alpha(\mu_0)) < 0$  una órbita es sumidero y la otra es silla, mientras que si  $\text{Im}(\alpha(\mu_0)) > 0$  una es una órbita silla y la otra una fuente. Si  $|\alpha(\mu_0)| < |\beta(\mu_0)|$  las dos familias se bifurcan en lados opuestos a  $\mu > \mu_0$  y ambas son silla.

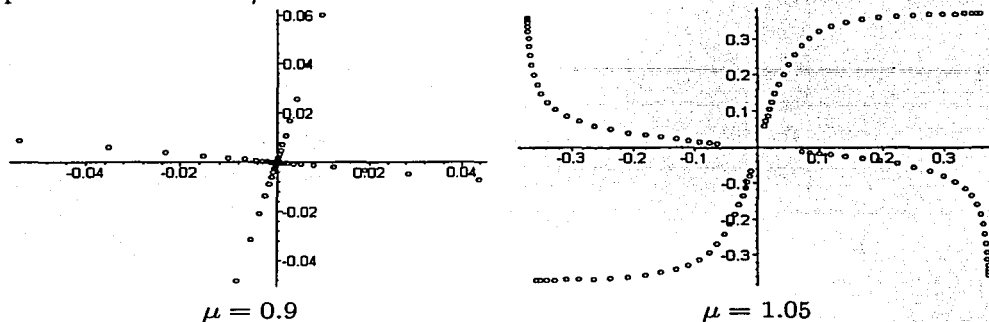
Para poder aplicar este teorema tenemos que encontrar los coeficientes  $\alpha(\mu_0), \beta(\mu_0)$  para cada valor de bifurcación. Ya que las segundas parciales de la función se anulan todas en el origen tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha(\mu_0) &= \gamma_{21} = -i\xi_{21} = i\frac{1}{4}\mu_0^3(a+ib) = i\frac{1}{4}\frac{1}{|b|^3}ib = -\frac{1}{4}\frac{b}{|b|^3} \\ \beta(\mu_0) &= \gamma_{03} = -i\xi_{03} = \frac{i}{12}\frac{1}{|b|^3}b^3 \end{aligned}$$

Vemos que  $|\alpha(\mu_0)| = \frac{1}{4b^2} < 1 \Leftrightarrow |b| > \frac{1}{2}$  y que  $\beta(\mu_0) \neq 0$  ya que  $b \neq 0$ . Bajo estas condiciones sabemos que deben surgir dos familias de órbitas periódicas de periodo 4 cuando el parámetro pasa el punto de bifurcación. Debido a que los coeficientes  $\alpha(\mu_0)$  y  $\beta(\mu_0)$  no dependen del signo de  $b$  entonces las bifurcaciones en los dos valores de bifurcación son simétricas. También del teorema sabemos que si  $|\alpha(\mu_0)| > |\beta(\mu_0)|$ , es decir que  $b^2 < 3$  las dos familias se bifurcan del mismo lado de  $\mu$ , es decir, ambas son supercríticas o subcríticas. Si la desigualdad se invierte entonces se bifurcan de distintos lados. El comportamiento de los casos que faltan sólo se puede estudiar por

medio de simulaciones. Ya que  $\text{Im}(\alpha(\mu_0)) = 0$  no se puede deducir nada del tipo de estabilidad de las órbitas.

Un ejemplo de este tipo de resonancia es con  $b = 1$ ,  $a = 0$  y  $\mu$  variando entre 0.9 y 1.05. Las gráficas a continuación representan la órbita del valor inicial  $(0.01, 0.06)$  para cada valor de  $\mu$ :



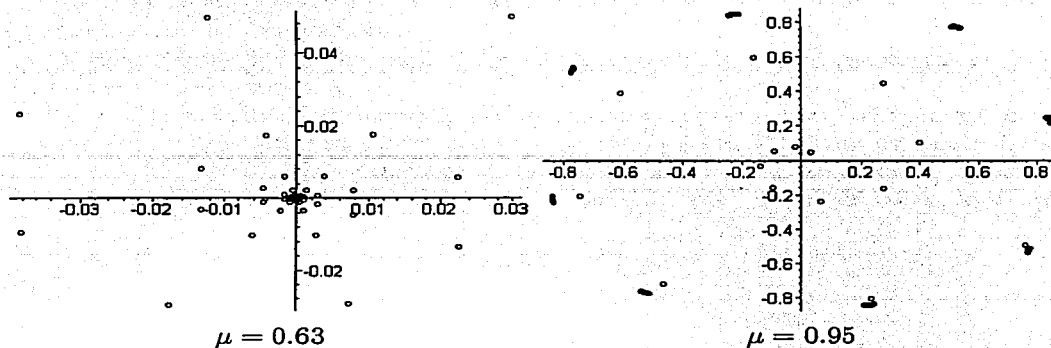
En la primer gráfica se puede observar cómo el origen es un punto fijo atractor. Al pasar  $\mu$  el valor de bifurcación se aprecia el surgimiento de puntos periódicos de periodo 4 hacia los cuales tiende la órbita del punto inicial.

### Resonancias débiles

Las resonancias débiles ocurren cuando los eigenvalores de la matriz derivada cruzan el círculo unitario en alguna raíz del 1 distinta de 1, 2, 3 o 4. Generalmente el resultado de estas bifurcaciones es el surgimiento de órbitas periódicas en el círculo invariante que se genera con una bifurcación de Hopf. Ya que los cálculos para llevar las funciones que definen a las redes a su forma normal son muy complicados, ilustraremos el comportamiento de una resonancia débil con un ejemplo.

Supongamos que  $a = 1$  y  $b = 1$ , de manera que los eigenvalores de la matriz son raíces octavas de la unidad,  $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = 1 \pm i$ , y el valor de bifurcación  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ya que los eigenvalores son raíces octavas de la unidad esperamos ver una órbita periódica de periodo 8 en el círculo invariante generado por Hopf. Dependiendo de la raíz que tengamos será el periodo de las órbitas que surjan. En el caso de orden 8 el

espacio de fases resulta:



En estas imágenes se observa claramente cómo la órbita de la condición inicial se pega a una órbita periódica de periodo 8.

### 3.1.5 Redes neuronales feedforward

Las redes neuronales feedforward son aquellas cuya matriz es de la forma

$$\begin{pmatrix} w_{11} & 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & w_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

lo cual quiere decir que cada neurona influye en todas las siguientes pero no en las anteriores, la red está conectada como cascada. Para el estudio de estas redes probaremos que no pueden tener puntos de periodo mayor a 2 y que las posibles bifurcaciones están relacionadas con estos puntos.

**Lema 6** *En una red neuronal feedforward no existen puntos de periodo mayor o igual a 3.*

**Demostración** Para esta prueba utilizaremos el teorema de Sharkovsky<sup>3</sup>, el cual dice que si en un sistema se encuentran puntos de periodo  $n$  entonces se pueden encontrar todos los de periodo siguiente en el ordenamiento de Sharkovsky. El orden de Sharkovsky es el siguiente:

$$3, 5, 7, \dots, 2k+1, \dots, 2 \times 3, 2 \times 5, \dots, 2 \times (2k+1), \dots, 2^m(2k+1), \dots, 2^j, 2^{j-1}, \dots, 16, 8, 4, 2, 1.$$

Para la prueba bastaría probar que no existen puntos de periodo 4, de manera que si existiera un punto de periodo 3, o mayor, el teorema de Sharkovsky implicaría que hay alguno de periodo 4.

<sup>3</sup>El enunciado del Teorema de Sharkovsky se puede encontrar en la página 40 de esta tesis.



La prueba se hará por inducción sobre el número de neuronas  $n$ :

$n = 1$ , es el caso de la red con una sola neurona, para una prueba detallada ver el Apéndice 2 sobre la función  $\tanh$ .

La hipótesis de inducción supone que cualquier red con  $n - 1$  neuronas no tiene puntos de periodo mayor a 2.

Para el paso inductivo debemos probar que no importa cómo se comporten las demás neuronas, la última neurona  $x_n$  tiene periodo a lo más 2. Para esto calculamos la derivada de la segunda iterada en la  $n - \text{ésima}$  neurona. Llamemos  $x_j^{(1)}$  al estado de la  $j - \text{ésima}$  neurona después de aplicar la función una vez; sabemos entonces que

$$x_n^{(1)} = g_\mu \left( \sum_{j=1}^n w_{nj} x_j \right)$$

al aplicar una vez más la función obtenemos

$$x_n^{(2)} = g_\mu \left( \sum_{j=1}^n w_{nj} x_j^{(1)} \right) = g_\mu \left( \sum_{j=1}^{n-1} w_{nj} x_j^{(1)} + w_{nn} x_n^{(1)} \right) = g_\mu \left( \sum_{j=1}^{n-1} w_{nj} x_j^{(1)} + w_{nn} g_\mu \left( \sum_{j=1}^n w_{nj} x_j \right) \right)$$

de forma que la derivada de esta función con respecto a  $x_n$  es

$$g'_\mu \left( \sum_{j=1}^{n-1} w_{nj} x_j^{(1)} + w_{nn} g_\mu \left( \sum_{j=1}^n w_{nj} x_j \right) \right) w_{nn} g'_\mu \left( \sum_{j=1}^n w_{nj} x_j \right) w_{nn}$$

Ahora bien, como  $g'_\mu$  tiene el signo de  $\mu$  en cualquier punto, la expresión de arriba es siempre positiva para  $\mu$ 's positivas. Esto quiere decir que la segunda iterada de la función en la  $n - \text{ésima}$  neurona es estrictamente creciente, lo cual implica que sólo admite a lo más puntos fijos y ninguno de periodo 2 o más. Los puntos fijos de la segunda iterada representan puntos de periodo dos o puntos fijos en el mapeo original probando lo que se había propuesto.

Una vez que tenemos este resultado el lema queda demostrado si la subred de  $n - 1$  neuronas no tiene más que puntos de periodo 2 y la última neurona (que no afecta a las anteriores por el tipo de red que estamos estudiando) tampoco puede tener este tipo de comportamiento, entonces la red completa de  $n$  neuronas no puede tener más que periodo 2. ■

**Lema 7** Las posibles bifurcaciones en puntos fijos de las redes feedforward son resonancias de orden 1 o 2.

**Demostración** La matriz derivada de las redes feedforward en un punto fijo  $x^*$  es de la forma

$$Df_\mu(x^*) = g'_\mu(Wx^*)W$$

donde

$$g'_\mu(Wx^*) = \begin{pmatrix} g'_\mu(\sum_{j=1}^1 w_{1j} x_j^*) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g'_\mu(\sum_{j=1}^2 w_{2j} x_j^*) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & g'_\mu(\sum_{j=1}^n w_{nj} x_j^*) \end{pmatrix}$$

Claramente el producto de esta matriz por  $W$  es una matriz triangular baja por lo tanto los valores propios son los valores de la diagonal, de forma que

$$\lambda_k(\mu) = g'_\mu \left( \sum_{j=1}^k w_{kj} x_j^* \right) w_{kk}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

los cuales son todos reales. Ahora bien, para que  $x^*$  sea un punto de bifurcación es necesario que los valores propios de la matriz en ese punto sean de módulo 1, es decir que las únicas dos posibilidades es que  $\lambda_k(\mu) = \pm 1$  para cada  $k$ . Como ya vimos en el caso de dos neuronas, estos valores propios corresponden a resonancias de orden 1 y 2. ■

El hecho de que los valores propios sean 1 o -1, quiere decir que cerca del punto de equilibrio  $x^*$  sólo pueden surgir puntos fijos o de periodo 2, ya que el mapeo funciona a grandes rasgos como una rotación de  $2\pi$  o de  $\pi$ . En particular, en el origen, se da una cadena de bifurcaciones cuando  $\mu$  atraviesa cada uno de los valores  $\frac{1}{w_{ii}}$ .

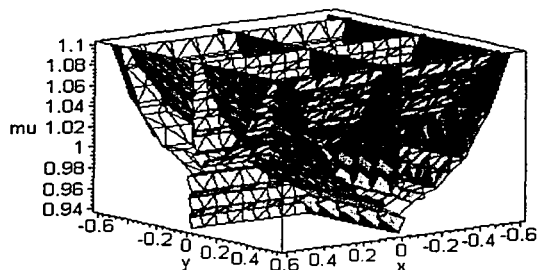
Dado que  $\lambda_k(\mu) = g'_\mu \left( \sum_{j=1}^k w_{kj} x_j^* \right) w_{kk}$  y que  $g'_\mu(0) = \mu$ , entonces la condición para que existan bifurcaciones en el origen es que  $\mu = \frac{1}{w_{ii}}$ . Si todos los pesos son distintos en valor absoluto, entonces cada una de las bifurcaciones será pitchfork o doblamiento de periodo para la  $i$ -ésima neurona. Si hay más de una neurona que se bifurque para el mismo valor de  $\mu$  lo que obtenemos son combinaciones del mismo tipo de bifurcaciones.

Una cascada de bifurcación se da cuando aparecen bifurcaciones para distintos valores del parámetro. En los siguientes ejemplos se muestran dos tipos de cascada en redes de dos neuronas. El primero se trata de una red con matriz diagonal y pesos diferentes para cada neurona con sí misma. En el segundo se incluye el efecto de la primer neurona sobre la segunda de forma que la matriz es triangular.

Sea

$$W = \begin{pmatrix} 1.05 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces la función que define el comportamiento de la neurona  $x$  es  $\tanh(\mu \cdot 1.05x)$  mientras que la segunda neurona actúa según  $\tanh(\mu y)$ . La siguiente gráfica muestra las dos bifurcaciones que ocurren, una en  $\mu = \frac{1}{1.05} \approx 0.95$  y la otra en  $\mu = 1$ .

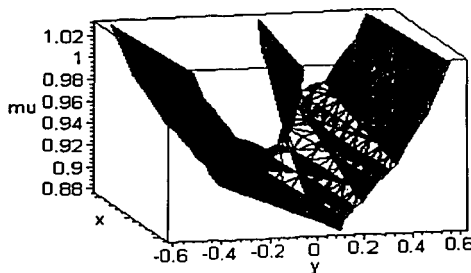


Gráfica de la cascada de bifurcaciones para  
dos neuronas independientes con pesos distintos.

El segundo ejemplo es mucho más interesante ya que la bifurcación en la segunda neurona depende también del comportamiento de la primera. Dada la forma de las matrices para redes feedforward, la primera neurona sigue siendo independiente mientras la segunda varía mientras cambian las dos. En este caso

$$W = \begin{pmatrix} 1.05 & 0 \\ 0.01 & 1.09 \end{pmatrix}$$

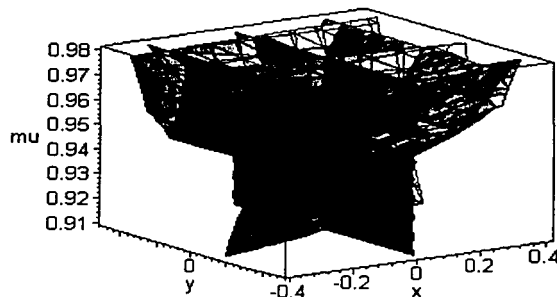
El comportamiento de la neurona  $x$  está dado por la misma función del ejemplo anterior mientras que la neurona  $y$  está definida por  $\tanh(\mu(0.01x + 1.09y))$ . Es importante notar que en las neuronas independientes las superficies que se observan son cilíndricas en el sentido de que no cambian en uno de los ejes. Si bien antes todo punto con  $y = 0$  era un punto fijo, ahora, debido a la acción de la primera neurona sobre la segunda, solamente el  $(0, 0)$  es fijo y los demás se corren dependiendo del valor de  $x$ . En la primera gráfica se muestra el comportamiento de la segunda neurona después de la bifurcación. A pesar de que no es tan clara como en el ejemplo anterior, se puede ver que después del punto de bifurcación hay tres valores para los cuales  $y$  es fija.



Bifurcación de la segunda neurona en  
una red feedforward de dos neuronas

Si ahora combinamos las bifurcaciones obtenemos una cascada como en el caso anterior. Los valores de bifurcación son los inversos de los valores propios de la matriz, que en este caso coinciden con la diagonal y por tanto con los pesos de cada neurona

con ella misma.



Un detalle que hay que notar es que el peso de la primera neurona sobre la segunda debe ser muy pequeño para que existan bifurcaciones, esto se puede ver haciendo las simulaciones para matrices que no lo cumplan. De cierta manera, si la influencia de la primera neurona es muy grande, domina el comportamiento de ésta “estirando” la gráfica de la neurona  $y$  y evitando que surjan nuevos puntos fijos.

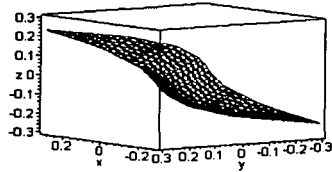
Para redes con más neuronas esperamos comportamientos similares cada vez que  $\mu$  pase por el inverso de un valor de la diagonal. Para las bifurcaciones de doblamiento de periodo pasa lo mismo, de forma que las posibles bifurcaciones globales son combinaciones de pitchfork y doblamiento de periodo tomando en cuenta que dos o más neuronas se pueden bifurcar al mismo tiempo si sus pesos son iguales.

Para el caso de tres neuronas es posible ver las bifurcaciones graficando la superficie que define los puntos fijos de cada neurona para algunas  $\mu$  al rededor del valor de bifurcación. Consideremos la matriz de conexión

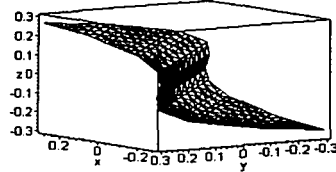
$$W = \begin{pmatrix} 1.025 & 0 & 0 \\ 0 & 1.05 & 0 \\ 0.01 & 0.01 & 1 \end{pmatrix}$$

de forma que la función que determina a la tercera neurona es  $\tanh(\mu(0.01x+0.01y+z))$ . Las tercias para las cuales la función deja fijo el valor de  $z$  son superficies en el espacio de estados de la red. En las siguientes imágenes se muestra esta superficie para  $\mu = .993$ ,  $\mu = 1.003$  y  $\mu = 1.007$ . Lo que se debe notar es que después del valor de bifurcación (en este caso es 1, el valor de la diagonal en el tercer renglón) para cada pareja  $(x, y)$  existen tres valores de  $z$  para los cuales la función deja fija esta

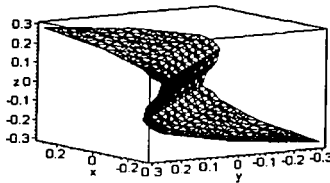
entrada.



$$\mu = .993$$

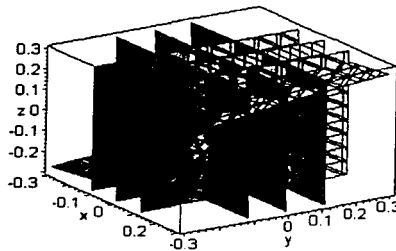


$$\mu = 1.003$$



$$\mu = 1.007$$

Aún cuando esta bifurcación es sólo en la tercer neurona, esperamos ver un comportamiento parecido en toda la red; la siguiente es la gráfica formada por las superficies que representan los puntos fijos para cada neurona. Las intersecciones de las tres superficies son puntos fijos para toda la red; aunque son difíciles de reconocer, hay ejes en los que la bifurcación que encontramos para la tercer neurona significa una bifurcación para toda la red.



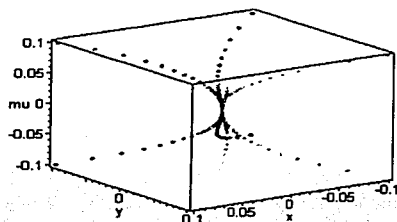
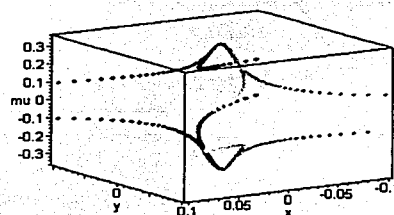
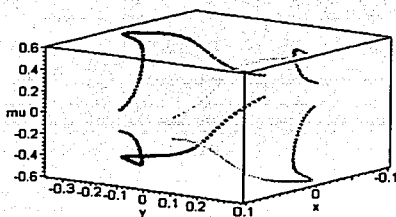
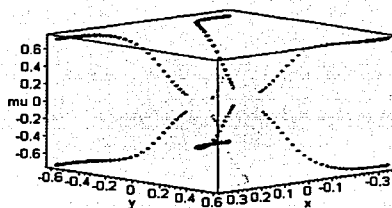
Puntos fijos para cada neurona

Otra manera de ver estas bifurcaciones es en el espacio fase del sistema. En este caso lo que veremos es que al pasar los valores de bifurcación sugen nuevos puntos atractores. En la primer bifurcación aparecen 2 atractores, después 4 y al pasar el último valor se pueden ver 8 puntos atractores. Como ya habíamos visto, los valores

de bifurcación para cada neurona son los inversos de los valores en la diagonal. Para ejemplificar tomamos la matriz de conexión

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -0.01 & -1.1 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & -1.2 \end{pmatrix}$$

Los valores de bifurcación que tomamos son  $-\frac{1}{w_{11}} = 1$ ,  $-\frac{1}{w_{22}} = 0.909$  y  $-\frac{1}{w_{33}} = 0.83$ . Para las siguientes gráficas se tomaron las primeras 100 iteraciones de la función para cada condición inicial. Las condiciones iniciales son  $\{(\pm 0.01, \pm 0.01, \pm 0.01)\}$  y los valores de  $\mu = \{0.75, 0.87, 0.95, 1.05\}$

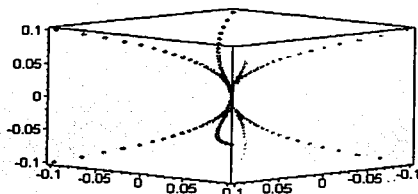
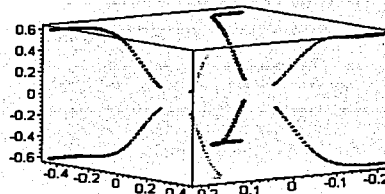
 $\mu = 0.75$  $\mu = 0.87$  $\mu = 0.95$  $\mu = 1.05$ 

En la primera figura se ve como los ocho puntos iniciales tienden al origen, siendo este el único punto fijo atractor. Cuando  $\mu$  ha pasado el primer valor de bifurcación los puntos de los cuadrantes superiores tienden a un sólo punto y los de los inferiores a otro. El sentido de las órbitas es desde la parte exterior del cubo hacia el eje  $z$ , pegándose ahí a dos puntos atractores. Cuando la segunda neurona se ha bifurcado aparecen dos puntos atractores más, siendo ahora 4 puntos atractores. Cuando se pasa el último valor de bifurcación cada condición inicial se pega a un atractor diferente teniendo con esto 8 puntos fijos, uno en cada cuadrante.

El otro tipo de bifurcación que se encuentra en estos sistemas es el de doblamiento de periodo. Para este, de un punto fijo antes de la bifurcación, obtenemos un punto fijo y una órbita periodica de periodo 2. Para ejemplificar esto utilizamos la red con

matriz de conexión  $W = - \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0.01 & 1.6 & 0 \\ 0.01 & 0.01 & 1.7 \end{pmatrix}$  y graficamos la órbita de puntos

cercanos al origen. El valor de bifurcación para la tercer neurona es el 0.588 (ya sabemos que el inverso de los valores en la diagonal es el valor de bifurcación) por lo que utilizamos  $\mu = 0.55$  y  $\mu = 0.68$ . Obtuvimos lo siguiente:

 $\mu = 0.55$  $\mu = 0.68$ 

A pesar de que estas gráficas se parecen mucho a las anteriores, la diferencia reside en que para cada valor inicial, su órbita oscila entre dos puntos de periodo 2. Cada vez que se pasa un valor de bifurcación, aparece una órbita de periodo 2, aquí sólo mostramos el punto atractor inicial y las cuatro órbitas periódicas que aparecen después del último valor de bifurcación.

# Capítulo 4

## Caos en redes neuronales

### 4.1 Introducción al Caos

El caos es una teoría que ha sido estudiada y utilizada en muchas ramas del conocimiento. De una especialidad a otra encontramos distintas definiciones para el mismo concepto y difícilmente lograremos conjuntar todas en una misma.

A pesar de esto hay características que permanecen en todas las formas de definir el caos. Sensibilidad a condiciones iniciales, órbitas acotadas, puntos periódicos de todos los periodos o bifurcaciones, son algunos elementos presentes siempre que se habla de caos. Muchos sistemas que se comportan de esta manera surgen de la física: la actividad meteorológica, la caída del agua desde una llave o el movimiento de un fluido turbulento tienen características comunes que nos han hecho pensar en una teoría que los englobe, explicando lo que una vez se tomó como comportamientos aleatorios y que ahora se muestra como un campo de estudio mucho más amplio e interesante.

Comúnmente se pensaba que sistemas determinísticos tendrían comportamientos totalmente predecibles. Sin embargo, se han encontrado casos que no solamente son impredecibles si no que su comportamiento puede ser tan variado que se confunda con el azar o con un sistema que sólo presente algunas órbitas periódicas.

Desde el aspecto matemático se han formulado algunas definiciones que sirven como base para las demás variantes. Una de ellas es la definición dada por Devaney:

**Definición 9** Sea  $V$  un conjunto y  $f : V \rightarrow V$ . Se dice que  $f$  es caótica en  $V$  si

1.  $f$  tiene sensibilidad a condiciones iniciales.
2.  $f$  es topológicamente transitiva.
3. los puntos periódicos de  $f$  son densos en  $V$ .

Lo que encontramos en esta definición es que para que un sistema dinámico se considere caótico debe tener elementos periódicos, de hecho deben existir puntos periódicos de todos los periodos. Otra característica es la sensibilidad a condiciones iniciales, lo cual quiere decir que una diferencia entre dos puntos, no importa cuan



pequeña sea, lleva a resultados tan distintos como se quiera al avanzar el sistema. La tercer condición dada por Devaney es que para cualquier par de conjuntos, la imagen bajo iteraciones de  $f$  de uno eventualmente tocará al otro, esto significa que la imagen de cualquier conjunto es densa sobre el codominio, con lo que aseguramos que el mapeo o función que define al sistema no se puede separar en dos o más que no sean caóticos.

Algunas diferencias entre esta definición y otras usadas con frecuencia<sup>1</sup> es el requisito de que los puntos periódicos sean densos en el dominio, muchas veces se pide solamente la existencia de una órbita para cada periodo.

Demostrar que un sistema dinámico es caótico no es nada fácil, las hipótesis que se deben cumplir rara vez se pueden mostrar directamente analizando una función. La manera común de asegurar la existencia de caos es demostrar que el sistema a estudiar es equivalente a uno en el cual se sabe que existe caos, es decir: si dos sistemas se parecen "suficientemente" en su estructura y uno de ellos se sabe que es caótico, entonces podemos decir que ambos se comportarán de la misma forma.

Un tipo de funciones ampliamente estudiadas son las funciones reales; se ha probado que por medio de cadenas de bifurcaciones se llega a sistemas caóticos. El estudio de las funciones del intervalo en sí mismo tienen muchas ventajas por la facilidad con que se encuentran y demuestran resultados. El camino que tomaremos en este trabajo es a través de las funciones unimodales y la demostración de que estas, y los sistemas equivalentes a ellas, presentan caos.

## 4.2 Doblamiento de periodo y redes neuronales.

El caos a partir de doblamiento de periodo está muy bien estudiado para mapeos del intervalo en él mismo. En el caso de las redes, ninguna red de una sola neurona puede presentar comportamiento caótico (hemos visto ya que no existen puntos de periodo 4 en ninguna de estas redes y, por lo tanto, sólo puede existir periodo 2). Sin embargo, a partir de dos neuronas podemos esperar un comportamiento caótico. El principal problema es la falta de resultados generales que nos indiquen la presencia de caos para mapeos de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  para  $n \geq 2$ .

La manera de abordar este problema será estudiar un tipo de redes para las cuales el mapeo que las define puede ser visto esencialmente como un mapeo del intervalo en el intervalo. Llevaremos, por medio de conjugaciones topológicas, algunos mapeos que describen a las redes de dos neuronas, a familias de mapeos unimodales que presentan caos.

Consideremos una red definida para cada neurona por la función

$$x_i(t+1) = g_\mu \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(t) + J_i \right), \quad t = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

<sup>1</sup>Por ejemplo, la definición dada por Carl Robinson [Robinson, 99] es la siguiente:

Un mapeo  $f$  en un espacio métrico  $X$  es caótico en un conjunto invariante  $Y$  si  $i)$   $f$  es transitivo en  $Y$  y  $ii)$   $f$  tiene sensibilidad a cambios en las condiciones iniciales en  $Y$ .

para la cual tomamos la matriz de conexión  $W$  como

$$W = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} \text{ para } a, b, k \text{ números reales no cero} \quad (4.2)$$

La forma de esta matriz se puede interpretar como una red que refuerza los procesos que se llevan a cabo en cada neurona, ya que las funciones de activación en cada neurona son idénticas, la matriz 4.2 hace que la influencia de cada neurona en la otra sea la misma excepto por un factor constante. Ésto hace pensar tanto en refuerzo de un comportamiento como en redundancia de información.

El fin de utilizar esta matriz en particular es poder llevarla a una familia topológicamente conjugada de mapeos unimodales de manera que podamos utilizar los resultados que de estos se conocen. El siguiente lema es la liga entre el mapeo de dos dimensiones de la red con uno conjugado de sólo una dimensión y para enunciarlo necesitamos la siguiente definición.

**Definición 10** Sean  $f : X_1 \rightarrow Y_1$  y  $g : X_2 \rightarrow Y_2$  dos funciones. Se dice que  $f$  y  $g$  son topológicamente equivalentes si existen  $h_1 : X_2 \rightarrow X_1$  y  $h_2 : Y_2 \rightarrow Y_1$  homeomorfismos en sus imágenes tales que en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & Y_1 \\ h_1 \uparrow & & \uparrow h_2 \\ X_2 & \xrightarrow{g} & Y_2 \end{array}$$

se cumple la igualdad

$$g = h_2^{-1} \circ f \circ h_1$$

Después de esta definición enunciamos el lema:

**Lema 8** Sea  $F : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ , con  $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}$  un mapeo definido por

$$F(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_1))$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  dependen solamente de la primera variable y  $X_1$  es un compacto. Si  $f_2$  es un homeomorfismo entre  $X_1$  y  $f_2(X_1)$  entonces  $F$  restringido a  $X = F(X_1 \times X_2)$  es topológicamente conjugado a  $f_1$ .

**Proof.** Definamos la función  $h_1 : X_1 \rightarrow X_1 \times X_2$  como  $h_1(x) = (f_1(x), f_2(x))$  y  $h_2 : X_1 \rightarrow X_1 \times X_2$  como  $h_2(x) = (x, f_2(x))$ . La función  $h_1$  resulta ser un homeomorfismo sobre su imagen ya que es inyectiva (por la inyectividad de  $f_2$ ) y  $X_1$  es un compacto.

De igual manera,  $h_2$  es un homeomorfismo ya que  $f_2$  es un homeomorfismo. Además, en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \xrightarrow{F} & X_1 \times X_2 \\ \uparrow h_1 & & \uparrow h_2 \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \end{array}$$

se cumple que

$$(h_2^{-1} \circ F \circ h_1)(x) = h_2^{-1}(F(f_1(x), f_2(x))) = h_2^{-1}(f_1(f_1(x)), f_2(f_1(x))) = f_2^{-1}(f_2(f_1(x))) = f_1(x)$$

con lo que queda demostrado el lema. ■

Otro lema que necesitamos para llegar a lo que queremos es el siguiente:

**Lema 9** Sea  $f_\mu : I^2 \rightarrow I^2$  el mapeo definido en 4.1 con la matriz de conexión 4.2 entonces  $f_\mu$  restringida a  $f_\mu(I)$  es topológicamente conjugada al mapeo de dimensión uno  $f_\mu^{(1)}(x) : [s, t] \rightarrow [s, t]$  definido por

$$f_\mu^{(1)}(x) = g_\mu(ax) + kg_\mu(bx)$$

donde  $s = \min\{x + ky : x, y \in I\}$  y  $t = \max\{x + ky : x, y \in I\}$

**Proof.** Reescribamos  $W$  como el producto de una matriz triangular inferior  $L$  y una matriz no singular  $U$

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W = LU$$

sea  $X = \{x + ky : x, y \in I\}$  y consideremos el mapeo  $F_\mu : X \times I \rightarrow X \times I$  que resulta de conjugar a  $f_\mu$  con  $U$  y  $U^{-1}$  de forma que obtenemos

$$F_\mu = U \circ f_\mu \circ U^{-1} = U \circ g_\mu \circ W \circ U^{-1} = U \circ g_\mu \circ L$$

Ahora bien,  $L(x, y) = (ax, by)$  y  $g_\mu(L(x, y)) = (\tanh(\mu ax), \tanh(\mu bx))$  por lo tanto

$$U(g_\mu(L(x, y))) = (\tanh(\mu ax) + k \tanh(\mu bx), \tanh(\mu bx))$$

Entonces  $F_\mu(x, y) = (\tanh(\mu ax) + k \tanh(\mu bx), \tanh(\mu bx))$ , y por el lema anterior  $F_\mu$  es topológicamente conjugado a  $\tanh(\mu ax) + k \tanh(\mu bx)$  la cual coincide con  $f_\mu^{(1)}$ , ya que  $\tanh(\mu bx)$  es un homeomorfismo en su imagen. Por último, como  $f_\mu \sim F_\mu \sim f_\mu^{(1)}$  entonces  $f_\mu$  es topológicamente conjugado al mapeo de una dimensión  $f_\mu^{(1)}$ . ■

El siguiente paso es demostrar que la familia de mapeos  $f_\mu^{(1)}$  es  $S$ -unimodal. Ahora diremos qué es una familia unimodal, para eso necesitamos dos definiciones:

**Definición 11** Un mapeo unimodal es una función  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que

i)  $f$  es continua

ii)  $f(0) = f(1) = 0$

iii)  $f$  tiene un único punto máximo local  $c \in (0, 1)$

Más aún,

iv) Si  $f$  es de clase  $C^1$  con  $f'(x) \neq 0$  si  $x \neq c$  entonces  $f$  se llama  $C^1$ -unimodal.

La teoría que desarrollaremos en la siguiente sección se aplica a un conjunto de funciones más pequeño, para definir las introduzcamos el siguiente concepto:

**Definición 12** La derivada Schwarziana de una función  $f \in C^3$  está definida por

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2$$

siempre que  $f' \neq 0$ .

Usando las definiciones anteriores podemos dar la siguiente definición:

**Definición 13**  $f$  es  $S$ -unimodal si

- $f$  es  $C^1$ -unimodal
- $Sf < 0$  para toda  $x \neq c$

En el siguiente teorema demostramos que el mapeo que define a algunas redes de dos neuronas es equivalente (topológicamente conjugado) a un mapeo de una dimensión en la cual existe caos. Primero demostraremos la conjugación topológica entre las funciones  $f_\mu$  y  $F_\mu$  definidas abajo, para toda  $\mu$ , y después que la familia  $F_\mu$  es  $S$ -unimodal.

**Teorema 5** [Wang, 94] Consideremos la familia de mapeos  $f_\mu$  con la matriz de conexión

$$W = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$$

con  $b < a < 0$ . Si  $a$  y  $b$  son tales que la función

$$f_\mu^{(1)}(x) = \tanh(\mu ax) - \tanh(\mu bx)$$

tiene derivada schwarziana negativa para  $\mu = 1$  y  $x > 0$ , entonces  $f_\mu$  restringida a  $I^2 = I \times I$  es topológicamente conjugada al mapeo  $S$ -unimodal  $F_\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  donde

$$F_\mu = \begin{cases} h \circ f_\mu^{(1)} \circ h^{-1}(x) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

para  $h = \frac{x}{1+x}$  y para toda  $\mu$ .

**Proof.** Dado lo largo de esta demostración, la partiremos en dos partes. En la primera damos algunas propiedades de la función  $f_\mu^{(1)}$  las cuales servirán para mostrar, en la segunda parte, que la familia  $F_\mu$  es  $S$ -unimodal.

Primera parte:

Por el Lema 9 sabemos que  $f_\mu$  es topológicamente conjugado a  $f_\mu^{(1)}$ , para fines de la demostración tomaremos la extensión de este mapeo en  $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  con  $f_\mu^{(1)}(\pm\infty) = 0$ .<sup>2</sup> La familia de mapeos  $f_\mu^{(1)}$  tiene las siguientes propiedades para toda  $\mu > 0$ :

(a)  $f_\mu^{(1)}$  es impar:

$$\begin{aligned} f_\mu^{(1)}(-x) &= \tanh(-\mu ax) - \tanh(-\mu bx) = -\tanh(\mu ax) - (-\tanh(\mu bx)) \\ &= -(\tanh(\mu ax) - \tanh(\mu bx)) = -f_\mu^{(1)}(x) \end{aligned}$$

$$(b) f_\mu^{(1)}(x) \begin{cases} < 0 & \text{si } x < 0 \\ = 0 & \text{si } x = 0 \\ > 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}; f_\mu^{(1)}(x) \rightarrow 0 \text{ si } x \rightarrow \pm\infty.$$

(c)  $f_\mu^{(1)}(x)$  tiene uno y sólo un punto crítico para  $x > 0$ . (Esto implica que tiene dos puntos críticos en los reales extendidos dada la imparidad de la función). Para demostrar este punto, primero probamos que existe al menos un punto crítico y después, que éste es único. La derivada de la función  $f_\mu^{(1)}$  es

$$(f_\mu^{(1)}(x))' = \mu(a(1 - \tanh^2(\mu ax)) - b(1 - \tanh^2(\mu bx))) := \mu(h_a(x) - h_b(x))$$

por lo que los puntos críticos son los ceros de esta función. Estamos buscando los puntos para los cuales  $h_a(x) = h_b(x)$ . Sabemos que  $h_a(0) = a > b = h_b(0)$  por lo que es suficiente probar que en algún otro punto la desigualdad se invierte. Este otro punto es el 1, ya que

$$\begin{aligned} b < a < 0 &\Rightarrow \mu a < \mu b < 0 \Rightarrow -1 < \tanh(\mu b) < \tanh(\mu a) < 0 \Rightarrow 0 < \tanh^2(\mu a) < \tanh^2(\mu b) < \\ &\Rightarrow 1 - \tanh^2(\mu b) < 1 - \tanh^2(\mu a) \end{aligned}$$

además,  $0 < b/a < 1$  por lo tanto

$$\frac{b}{a}(1 - \tanh^2(\mu b)) < \frac{b}{a}(1 - \tanh^2(\mu a)) < 1 - \tanh^2(\mu a)$$

entonces

$$h_a(1) = a(1 - \tanh^2(\mu a)) < b(1 - \tanh^2(\mu b)) = h_b(1), \text{ ya que } a < 0$$

como  $h_a(x) - h_b(x)$  es una función continua, por el teorema del valor intermedio debe existir un punto donde  $h_a(x_1) - h_b(x_1) = 0$ , es decir donde  $(f_\mu^{(1)})'(x_1) = 0$ .

Ahora supongamos que existe  $x_2 \neq x_1$  tal que  $(f_\mu^{(1)})'(x_2) = 0$ , esto significaría que

$$a(1 - \tanh^2(\mu ax_1)) = b(1 - \tanh^2(\mu bx_1)) \text{ y } a(1 - \tanh^2(\mu ax_2)) = b(1 - \tanh^2(\mu bx_2))$$

<sup>2</sup>La manera de extender esta función es natural ya que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_\mu^{(1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh(\mu x) - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh(\mu bx) = \pm 1 \mp 1 = 0$

multiplicando la primer expresión por la segunda obtenemos

$$ab((1 - \tanh^2(\mu ax_1))(1 - \tanh^2(\mu bx_2))) = ab((1 - \tanh^2(\mu bx_1))(1 - \tanh^2(\mu ax_2)))$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{1 - \tanh^2(\mu ax_1)}{1 - \tanh^2(\mu bx_1)} = \frac{1 - \tanh^2(\mu ax_2)}{1 - \tanh^2(\mu bx_2)}$$

Consideremos la función  $k(x) = \frac{1 - \tanh^2(\mu ax)}{1 - \tanh^2(\mu bx)}$ , el signo de su derivada depende de la expresión

$$2\mu(1 - \tanh^2(\mu ax))(-\tanh(\mu ax)a + \tanh(\mu bx)b)$$

la cual es siempre negativa:  $b < a < 0$  implica que

$$\tanh(\mu ax) > \tanh(\mu bx)$$

y como  $a/b > 1$

$$\frac{a}{b} \tanh(\mu ax) > \frac{a}{b} \tanh(\mu bx) > \tanh(\mu bx)$$

es decir que

$$b \tanh(\mu bx) - a \tanh(\mu ax) < 0, \text{ para toda } x > 0$$

De manera que la función  $k(x)$  es estrictamente decreciente en los positivos, lo cual es una contradicción con el hecho de que existan dos valores diferentes,  $x_1$  y  $x_2$ , tales que compartan la misma imagen bajo  $k$ .

Esto demuestra que  $f_\mu^{(1)}$  tiene uno y sólo un valor crítico en los reales positivos.

(d) Por hipótesis, en  $\mu = 1$ ,  $f_\mu^{(1)}$  es de clase  $C^3$  y tiene derivada Schwarziana para toda  $x > 0$ . Veremos que esto implica que  $Sf_\mu^{(1)}(x) < 0$  para toda  $\mu > 0$  y para toda  $x > 0$ . Recordemos la definición de  $g_\mu(ax) = g(\mu ax) = \tanh(\mu ax)$  y reescribamos  $f_\mu^{(1)}(x) = g(\mu ax) - g(\mu bx)$ . Por la regla de la cadena,  $(f_\mu^{(1)})'(x) = \mu(g'(\mu ax) - g'(\mu bx))$ , análogamente

$$\begin{aligned} (f_\mu^{(1)})''(x) &= \mu^2(g''(\mu ax) - g''(\mu bx)) \\ (f_\mu^{(1)})'''(x) &= \mu^3(g'''(\mu ax) - g'''(\mu bx)) \end{aligned}$$

de manera que la derivada Schwarziana de  $f_\mu^{(1)}(x)$  es

$$\begin{aligned} Sf_\mu^{(1)}(x) &= \frac{(f_\mu^{(1)})'''(x)}{(f_\mu^{(1)})'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{(f_\mu^{(1)})''(x)}{(f_\mu^{(1)})'(x)} \right)^2 = \frac{\mu^3(g'''(\mu ax) - g'''(\mu bx))}{\mu(g'(\mu ax) - g'(\mu bx))} - \frac{3}{2} \left( \frac{\mu^2(g''(\mu ax) - g''(\mu bx))}{\mu(g'(\mu ax) - g'(\mu bx))} \right)^2 \\ &= \mu^2 \left[ \frac{g'''(\mu ax) - g'''(\mu bx)}{g'(\mu ax) - g'(\mu bx)} - \frac{3}{2} \left( \frac{g''(\mu ax) - g''(\mu bx)}{g'(\mu ax) - g'(\mu bx)} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que  $Sf_1^{(1)}(y) < 0$  para toda  $y > 0$ , haciendo el cambio de variable  $y = \mu x$ , obtenemos

$$Sf_\mu^{(1)}(x) = \mu^2 Sf_1^{(1)}(y) < 0 \text{ para toda } x \text{ donde } (f_\mu^{(1)})'(x) \neq 0 \text{ y para toda } \mu$$

Con lo que queda probado lo que queríamos.

De las propiedades (a) y (b) se tiene que las funciones  $f_\mu^{(1)}|_{(0,\infty)}$  y  $f_\mu^{(1)}|_{(-\infty,0)}$  son topológicamente conjugadas. De ahora en adelante sólo tomaremos en cuenta la función sobre los reales positivos extendidos (a la cual llamaremos igualmente  $f_\mu^{(1)}(x)$ ) teniendo en mente que todo lo que probemos para esa es equivalente a lo que pasa en los negativos.

Segunda parte:

Ahora demosntremos que la familia de funciones

$$F_\mu(x) = \begin{cases} h \circ f_\mu^{(1)} \circ h^{-1}(x) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

es  $S$ -unimodal en el intervalo  $[0, 1]$  para  $\mu \in (0, \infty)$ :

(i)  $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$  para toda  $\mu$ . Es claro ya que  $h^{-1}(0) = 0$  y  $h^{-1}(1) = \infty$ .

(ii) Cada  $F_\mu$  tiene un sólo punto crítico  $c_\mu$  equivalente al punto crítico de  $f_\mu^{(1)}$ . La derivada de  $F_\mu$  es

$$F'_\mu(x) = h'(f_\mu^{(1)}(h^{-1}(x))) \cdot f_\mu^{(1)'}(h^{-1}(x)) \cdot h^{-1'}(x) = \frac{1}{(1 + f_\mu^{(1)}(\frac{x}{1-x}))^2} \cdot f_\mu^{(1)'}(\frac{x}{1-x}) \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

lo cual es cero sólo donde  $f_\mu^{(1)'}(x)$  es cero, es decir, en  $c_\mu^* = h(c_\mu) = \frac{c_\mu}{1+c_\mu}$  donde  $c_\mu$  es el punto crítico de  $f_\mu^{(1)}$ . Además,  $F'_\mu(x) = 0$  si y sólo si  $f_\mu^{(1)'}(x) = 0$  por lo tanto la existencia y unicidad del punto crítico de  $F_\mu$  quedan determinadas por aquellas de  $f_\mu^{(1)}$ .

(iii) La función  $F_\mu(x)$  valuada en  $h(c_\mu)$ , es decir la imagen de los puntos máximos de  $f_\mu^{(1)}$  bajo  $h$ , vale lo mismo para toda  $\mu > 0$ . Es claro que los puntos donde  $f_\mu^{(1)}$  tiene su valor máximo dependen de  $\mu$ , por lo que podemos definir la función  $c(\mu) = c_\mu^*$ , de aquí resulta que lo que hay que demostrar es que la función

$$F_\mu(c(\mu)) = h \circ f_\mu^{(1)} \circ h^{-1}(c(\mu))$$

es constante. Para esto basta con mostrar que  $f_\mu^{(1)}(c(\mu))$  es constante como función de  $\mu$ , es decir que su derivada con respecto y para toda  $\mu$  es cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu}(f_\mu^{(1)}(c(\mu))) &= \frac{d}{d\mu}(\tanh(\mu ac(\mu)) - \tanh(\mu bc(\mu))) = \tanh'(\mu ac(\mu)) \\ &\quad - \tanh'(\mu bc(\mu)) [bc(\mu) + \mu bc'(\mu)] = c(\mu) [\tanh'(\mu ac(\mu)) \cdot a - \tanh'(\mu bc(\mu)) \cdot b] + \\ \mu c'(\mu) [\tanh'(\mu ac(\mu)) \cdot a - \tanh'(\mu bc(\mu)) \cdot b] &= 0 \end{aligned}$$

ya que  $f_\mu^{(1)'}(c_\mu) = \tanh'(\mu ac(\mu)) \cdot a - \tanh'(\mu bc(\mu)) \cdot b = 0$ . Por lo tanto el valor de la función  $F_\mu$  en  $c_\mu^*$  no depende de  $\mu$ , en la definición de la sección anterior pedíamos que este valor fuera 1, sin embargo los resultados son válidos a pesar de que  $F_\mu(c_\mu^*) = \text{cte.} \neq 1$ .

(iv)  $F_\mu$  son de clase  $C^3$

(v) Todas las  $F_\mu$  tienen derivada Schwarziana negativa. La derivada Schwarziana de una composición se puede calcular con

$$S(\phi \circ \psi) = S\phi(\psi)\psi'^2 + S\psi^3$$

de forma que la derivada schwarziana de  $F_\mu$  es

$$SF_\mu = Sh(f_\mu^{(1)} \circ h^{-1}) \cdot (f_\mu^{(1)} \circ h^{-1})'^2 + Sf_\mu^{(1)}(h^{-1}) \cdot (h^{-1})'^2 + Sh^{-1}$$

Ahora bien, la derivada schwarziana de  $h$  y  $h^{-1}$  es cero para toda  $x$ , es fácil ver que

$$Sh = \frac{\frac{6}{(x+1)^4}}{\frac{1}{(x+1)^2}} - \frac{3}{2} \left( \frac{\frac{-2}{(x+1)^3}}{\frac{1}{(x+1)^2}} \right)^2 = \frac{6}{(x+1)^2} - \frac{3}{2} \frac{4}{(x+1)^2} = 0$$

Entonces  $SF_\mu = Sf_\mu^{(1)}(h^{-1}) \cdot (h^{-1})'^2 < 0$  para toda  $x$  excepto en  $c_\mu$

El caso de  $x = 1$  lo tratamos con límites dada la definición de  $h$  para este valor. Sabemos que  $h^{-1}(1) = \infty$  y también que  $Sf_\mu^{(1)}(h^{-1})(1)$  es negativo, esto se deduce de la continuidad de  $f_\mu^{(1)}$  y del hecho de que su Schwarziana es negativa para todos los valores positivos de la función. Entonces  $SF_\mu(1) = Sf_\mu^{(1)}(h^{-1}) \cdot (h^{-1})'^2(1) \rightarrow -\infty$ . ■

Una vez comprobadas las condiciones para que esta familia sea  $S$ -unimodal falta probar que el mapeo asociado a la red que nos interesa cumple con las hipótesis del teorema.

**Corolario 1** Para una red de dos neuronas con función de activación  $g_\mu(x) = \tanh(\mu x)$  y

$$W = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} \text{ donde}$$

i)  $b < a < 0$  y  $d = b/a \geq 2$   
 ii)  $a > b > 0$  y  $d = b/a \leq 1/2$

se tiene que la conclusión del teorema anterior es válida.

<sup>3</sup>Esta fórmula se deriva de lo siguiente:

ya que

$$(\phi \circ \psi)' = \phi'(\psi)\psi', (\phi \circ \psi)'' = \phi''(\psi)\psi'^2 + \phi'(\psi)\psi'', (\phi \circ \psi)''' = \phi'''(\psi)\psi'^3 + 3\phi''(\psi)\psi''\psi' + \phi'(\psi)\psi'''$$

tenemos que

$$\frac{(\phi \circ \psi)'''}{(\phi \circ \psi)'} = \frac{\phi'''(\psi)\psi'^2}{\phi'(\psi)} + \frac{3\phi''(\psi)\psi''}{\phi'(\psi)} + \frac{\psi'''}{\psi'} \text{ y } \frac{3}{2} \left( \frac{(\phi \circ \psi)''}{(\phi \circ \psi)'} \right)^2 = \frac{3}{2} \frac{\phi''(\psi)^2\psi'^2}{\phi'(\psi)^2} + 3 \frac{\phi''(\psi)\psi''}{\phi'(\psi)} + \frac{3}{2} \frac{\psi''^2}{\psi'^2}$$

y entonces

$$S(\phi \circ \psi) = \frac{(\phi \circ \psi)'''}{(\phi \circ \psi)'} - \frac{3}{2} \left( \frac{(\phi \circ \psi)''}{(\phi \circ \psi)'} \right)^2 = \psi'^2 \left( \frac{\phi'''(\psi)}{\phi'(\psi)} - \frac{3}{2} \left( \frac{\phi''(\psi)\psi''}{\phi'(\psi)^2} \right)^2 \right) + \left( \frac{\psi'''}{\psi'} - \frac{3}{2} \left( \frac{\psi''}{\psi'} \right)^2 \right) = S\phi(\psi)\psi'^2 + S\psi$$



**Proof.** Primero veamos que los mapeos que cumplen con la condición *i*) y los que cumplen con *ii*) son topológicamente equivalentes, bajo la conjugación  $h(x, y) = (y, x)$ , lo cual significa renombrar las dos neuronas que forman la red. Para hacer la demostración tomaremos un mapeo que cumpla con *i*).

Necesitamos probar que para  $\mu = 1$

$$f_1^{(1)}(x) = \tanh(ax) - \tanh(bx)$$

tiene derivada schwarziana negativa para toda  $x > 0$ . De la definición de la función  $\tanh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{1 - e^{-2ax}}{1 + e^{-2ax}}$  tenemos que  $f_\mu^{(1)}$  en  $[0, \infty)$  puede escribirse como la composición de dos funciones  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  y  $\phi : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  donde

$$\psi(x) = e^{-2ax} \text{ y } \phi(x) = \frac{1-x}{1+x} - \frac{1-x^d}{1+x^d} \text{ con } d = b/a$$

Por la propiedad de la derivada schwarziana para composiciones basta probar que tanto  $S\psi < 0$  como  $S\phi < 0$  para concluir que  $Sf_1^{(1)} < 0$ . Entonces

$$S\psi(x) = \frac{-8a^3 e^{-2ax}}{-2ae^{-2ax}} - \frac{3}{2} \left( \frac{4a^2 e^{-2ax}}{-2ae^{-2ax}} \right)^2 = 4a^2 - 6a^2 = -2a^2 < 0$$

La demostración de que  $S\phi < 0$  es mucho más complicada que esto, basta con ver las primeras derivadas de esta función

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \frac{-2}{(1+x)^2} - \frac{2dx^{d-1}}{(1+x^d)^2} \\ \phi''(x) &= \frac{4(x+d)^3 - 2d(d-1)x^{d-2}(1+x^d)(1+x)^3 + (2dx^{d-1})(1+x)^3}{(1+x)^3(1+x^d)^3} \\ \phi'''(x) &= \frac{-12(1+x)^4 - 2d(d-1)(1+x)^4 [d - 2x^{d-3} - 2dx^{2d-3}] + 8(1+x)^4(d-1)d^2x^{2d-2} - 1}{(1+x)^4(1+x^d)^4} \end{aligned}$$

para darse cuenta de lo larga que es la demostración. Básicamente se deben desarrollar todos los términos y analizar los coeficientes de las diferentes potencias de  $x$ .

De la hipótesis  $d \geq 2$  y de que  $\phi$  está definida sólo para  $x \geq 1$  obtenemos lo que necesitamos. Los detalles de la demostración son tediosos y no aportan nada importante al resultado.

Así queda demostrado que  $Sf_1^{(1)} < 0$  para toda  $x > 0$  y para toda  $\mu \geq 0$ , y por lo tanto que la familia en cuestión es una familia  $S$ -unimodal. ■

Una vez que sabemos que algunas redes se comportan de manera similar a una familia de funciones unimodales, lo que hace falta es demostrar que en estas hay presencia de caos. La teoría para estudiar esto se llama Kneading theory y veremos algunos resultados necesarios para concluir lo que buscamos.

### 4.3 Kneading theory y caos en familias unimodales

El estudio de mapeos del intervalo en sí mismo es a la vez interesante y completo. Utilizando el espacio de las sucesiones de  $D$ 's,  $Z$ 's y  $C$ 's podemos reconocer caos

en este tipo de mapeos y asegurar la existencia de órbitas periódicas para ciertos periodos.

El mapeo de algunas redes puede ser llevado por medio de conjugaciones topológicas a funciones en el espacio de las sucesiones por lo que el estudio de estas se vuelve una herramienta muy útil para reconocer caos en las redes. Si bien este no es lugar para desarrollar toda la teoría, mencionaremos a grandes rasgos los resultados que derivan en la existencia de puntos periódicos de una infinidad de periodos y sensibilidad en las condiciones iniciales. Las referencias principales son Devaney y Collet-Eckmann.

La importancia de las funciones unimodales reside en que podemos poner en correspondencia uno a uno (bajo ciertas hipótesis extras) cada uno de los puntos del intervalo  $[0, 1]$  con una sucesión de  $D$ 's,  $Z$ 's y  $C$ 's que refleja la acción de la función  $f$  sobre ese punto.

Definimos el itinerario de un punto (siempre con respecto a una función unimodal  $f$ ), como

$$I(x) = s_0 s_1 \dots s_n \dots \text{ donde } s_i = \begin{cases} Z & \text{si } f^i(x) < c \\ C & \text{si } f^i(x) = c \\ D & \text{si } f^i(x) > c \end{cases}$$

dondo  $c$  es el punto crítico de  $f$ .

Claramente a cada  $x \in I$  se asocia uno y sólo un itinerario, mientras que, y esto será importante a lo largo de nuestro estudio, no siempre a cada sucesión le corresponde una sola  $x$  en el intervalo.

Para trabajar con sucesiones es necesario definir algunas propiedades de este espacio:

**Definición 1** Una sucesión finita se llama par (impar) si el número de  $D$ 's que contiene es par (impar).

Notemos que esta definición tiene importancia cuando se le asocia al itinerario de un punto ya que por la regla de la cadena la derivada de la  $n$ -ésima iteración de  $f$  es  $Df^n(x) = f'(f^{n-1}(x))f'(f^{n-2}(x))\dots f'(x)$ , de forma que si  $f^k(x) \neq 0$  para toda  $k \leq n$  el signo de la derivada de  $f^n$  depende del número de  $D$ 's que tenga el itinerario de  $x$  hasta el  $n$ -ésimo término. (Para probar esto basta recordar que  $f$  es estrictamente creciente a la derecha de  $c$  y decreciente a la izquierda.)

Podemos definir un orden en los itinerarios que refleja parcialmente el orden del intervalo en el sentido de que

$$x < y \Rightarrow I(x) \leq I(y) \text{ e } I(x) < I(y) \Rightarrow x < y.$$

**Definición 14** Sean  $A = a_1 a_2 \dots$  y  $B = b_1 b_2 \dots$  dos itinerarios y sea  $m$  el primer índice tal que  $a_m \neq b_m$  entonces diremos que  $A < B$  si pasa cualquiera de las siguientes condiciones

- $a_0 a_1 a_2 \dots a_{m-1}$  es par y  $a_m < b_m$ , donde  $Z < C < D$
- $a_0 a_1 a_2 \dots a_{m-1}$  es impar y  $a_m > b_m$

Si ninguna de estas condiciones se cumple diremos que  $A > B$ .

Al itinerario de  $f(c)$  le llamaremos la *kneading sequence* y la denotaremos por  $K_f$ . Notemos que si una sucesión  $A$  contiene alguna  $C$  entonces su futuro está determinado por la órbita de  $c$ , de manera que si  $A$  tiene alguna  $C$  entonces debe tener la forma  $BCK_f^4$  para alguna sucesión  $B$  que no contiene  $C$ . Diremos que una sucesión es *admisibile* si tiene esta forma o si está formada por  $D$ 's y  $Z$ 's solamente.

El teorema principal en este sentido nos dice cuándo la función  $I(x)$  es suprayectiva en el intervalo. Con más detalle:

**Teorema 6** *Sea  $f$  una función unimodal y supóngase que  $A$  es una sucesión admisible que satisface*

$$I(f(1)) < A < \tilde{K}_f \text{ con } \tilde{K}_f = \begin{cases} K_f & \text{si } K_f \text{ no contiene } C \\ (BZ)^\infty & \text{si } K_f = (BC)^\infty \text{ y } B \text{ par} \\ (BD)^\infty & \text{si } K_f = (BC)^\infty \text{ y } B \text{ impar} \end{cases}$$

entonces  $A$  aparece como el itinerario de alguna  $x \in I$ .

En general podemos esperar que cualquier sucesión admisible corresponda al itinerario de algún punto con excepción de algunas justo por debajo de la kneading sequence. Debido a que el orden definido en las sucesiones refleja parcialmente el del intervalo, el mayor itinerario que podemos obtener es el de  $f(c)$ , es decir la kneading sequence de  $f$ , de igual manera el menor es el de la iteración de  $f(c)$ , o sea  $I(f^2(c))$ .

La relación entre órbitas periódicas y sus itinerarios es la clave para los resultados que se pueden obtener de esta teoría. La mayor parte de estos son válidos para mapeos unimodales, sin embargo es para los mapeos  $S$ -unimodales para los cuales tenemos los resultados más interesantes.

Los primeros resultados importantes para estas funciones relacionan los itinerarios con el comportamiento de la función en ese punto.

**Lema 10**  $I(x)$  es eventualmente periódica<sup>5</sup> si y sólo si  $f^n(x)$  converge a una órbita periódica.

El periodo de la órbita a la cual converge  $f^n(x)$  depende de la periodicidad de  $I(x)$ , si  $I(x) = AB^\infty$  con  $B$  de longitud  $p$  entonces el periodo de la órbita a la cual tiende el futuro de  $x$  es de periodo  $p$  si  $B$  es par, o  $p$  o  $2p$  si  $B$  es impar. Más aún

**Lema 11** Si  $f$  es  $S$ -unimodal y tiene algún itinerario de período  $p$ , entonces tiene una órbita periódica de período  $p$ .

<sup>4</sup>Notación: i) Sean  $A = a_0a_1\dots a_m$  y  $B = b_0b_1\dots$  dos sucesiones, entonces:  $AB = a_0a_1a_2\dots a_m b_0b_1b_2\dots$

ii) Si  $B$  es finita, entonces

$AB^\infty$  significa agregar a  $A$  un número infinito de  $B$ 's, mientras que si el símbolo de  $^\infty$  está fuera del paréntesis, entonces  $(AB)^\infty$  quiere decir repetir la sucesión  $AB$  un número infinito de veces.

<sup>5</sup>Una sucesión  $A$  es eventualmente periódica si  $A = BC^\infty$  con  $B \neq C$ .

Del hecho de que la función  $x \mapsto I(x)$  sea sobre y de los lemas anteriores podemos sacar dos conclusiones importantes:

**Teorema 7 (Sharkowsky)** *Si  $f$  tiene una órbita periódica de período  $k$  entonces tiene órbitas periódicas de todos los períodos que sigan a  $k$  en el siguiente orden*

$$3, 5, 7, \dots, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \dots, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, \dots, 2^3, 2^2, 2, 1.$$

La consecuencia inmediata de este teorema nos da una condición que asegura caos (topológico, es decir la existencia de una infinidad de períodos). Para un mapeo que tenga un punto periódico de período distinto a una potencia de 2 entonces existe (al menos) una infinidad de períodos.

Para los mapeos  $S$ -unimodales la existencia de sensibilidad a condiciones iniciales queda representada de manera muy clara en el siguiente resultado

**Teorema 8** *Si  $K_f$  es no periódica entonces  $x < y \Rightarrow I(x) < I(y)$*

Como habíamos visto el orden del intervalo se refleja parcialmente en el de la sucesiones, sin embargo cuando pedimos la derivada schwarziana negativa el orden se preserva estrictamente. Esta propiedad asegura que para cualquiera dos puntos su órbita será separada para alguna iteración lo suficientemente grande: para que los itinerarios sean diferentes debe existir un índice para el cual las letras difieran, es decir que las iteraciones caigan en lados contrarios del cero, asegurando así que serán separadas por alguna cantidad positiva.

Todos los resultados hasta ahora han tratado con un sólo mapeo relacionando puntos con sucesiones. En la siguiente sección abordamos familias de funciones que dependen continuamente de un parámetro y hacemos notar que la sucesión que más información aporta acerca de una función es  $K_f$ . Estudiando el orden de las sucesiones y su comportamiento al variar el parámetro llegaremos a la conclusión de que existe una infinidad de bifurcaciones de doblamiento de período y, a partir de esto, caos.

**Definición 15** *Una sucesión  $A$  es maximal si*

- $A$  es admisible
- $\sigma^n(A) < A$ , donde  $\sigma(a_0 a_1 a_2 \dots) = a_1 a_2 \dots$  y  $\sigma^n = \sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma$  ( $n$  veces)

El teorema principal de esta sección es el siguiente:

**Teorema 9** *Para una familia de funciones  $S$ -unimodales  $f_\mu$  que dependan continuamente de  $\mu^6$ , toda sucesión maximal  $K$  tal que*

$$K_{f_{\mu_0}} \leq K \leq K_{f_{\mu_1}}$$

*ocurre como la kneading sequence de  $f_\mu$  para alguna  $\mu$  entre  $\mu_0$  y  $\mu_1$ .*

---

<sup>6</sup>La continuidad en este caso es la dada por la norma del máximo. La idea es que para dos  $\mu$ 's crecenas las funciones se parezcan mucho.

De aquí y con lo que estudiamos sobre órbitas e itinerarios podemos deducir que:

- Si un mapeo tiene un punto fijo estable para  $\mu_0$  y un punto periódico estable de periodo  $k$  para  $\mu_0^* > \mu_0$  entonces existen  $\mu$ 's intermedias para las cuales los mapeos correspondientes tienen órbitas periódicas de periodos menores a  $k$  en el orden de Sharkowsky. Si  $k$  no es potencia de 2 entonces tenemos una infinidad de  $\mu$ 's con órbitas periódicas estables.
- Es claro que entre cualquier par de sucesiones periódicas existen una infinidad de sucesiones no periódicas, lo cual implica sensibilidad a condiciones iniciales.

En pocas palabras lo que dice este teorema es que  $K_{f_\mu}$  no puede saltar ninguna sucesión maximal mientras  $\mu$  varía, de forma que si conocemos bien el orden de las sucesiones podemos saber cómo se comportan los mapeos correspondientes.

Es importante hacer notar que todos los teoremas que hemos planteado suponen la existencia de al menos una órbita periódica, lo cual implica grandes dificultades para probar las hipótesis. Si bien encontrar un punto periódico o un parámetro para el cual  $K_{f_\mu}$  tenga órbitas estables es muy complicado lo que hemos conseguido es cambiar este problema por la existencia de sucesiones bien identificadas que pueden ser implicadas por otras que estén antes en el orden que les hemos dado.

Para el último resultado sobre familias unimodales necesitamos definir el *intercambio de intervalos*:

**Definición 16** Decimos que un mapeo  $f$  intercambia intervalos si existen  $J_0, J_1$  con  $0 \in J_0$  tales que  $f(J_0) = J_1$  y  $f(J_1) \subset J_0$ .

Para tener este tipo de mapeos es suficiente que ocurran las siguientes condiciones:

- Existe  $W \neq f^2(c)$  tal que  $f(W) = f^3(c)$ , es decir que exista una segunda preimagen de  $f^3(c)$  y que

$$f^2(c) < W < f^3(c) < f(c)$$

- Equivalentemente,  $f^2(c) < c$  y

$$f^3(c) > f^4(c)$$

Del segundo grupo de condiciones podemos ver que los mapeos con condiciones extremas entre los que intercambian intervalos son aquellos en que

$$f^2(c) = c \text{ y } f^3(c) = f^4(c)$$

Cuando la órbita de  $f(c)$  regresa a  $c$  tenemos un punto periódico superestable de periodo 2, de aquí que los mapeos que están en la frontera son los que cumplen esta propiedad. Además para que  $f^3(c) = f^4(c)$  es necesario que  $c$  caiga en un punto fijo en la segunda iteración. Lo que ocurra entre estos mapeos extremos estará determinado por ellos y por el hecho de que haya intercambio de intervalos.

Claramente un mapeo que intercambia intervalos mapea  $J_0$  en  $J_0$  con su segunda iteración,  $(f \circ f)(J_0) \subset J_0$ , de forma que si rescalamos  $f \circ f$  para que  $c$  vaya en el  $f(c)$  e invertimos (reflejamos respecto al eje  $x$ ) el nuevo mapeo pertenece a las funciones  $S$ -unimodales; a este procedimiento le llamamos doblamiento.

Ahora bien, si  $f$  intercambia intervalos entonces todas las iteraciones impares de  $c$  pertenecen a  $J_1$ , es decir que el itinerario de  $c$ , la kneading sequence es de la forma

$$K_f = DI_0DI_1DI_2D\dots \text{ para } I_k \in \{Z, C, D\}$$

Además, si llamamos  $(f \circ f)^*$  al rescalamiento de  $f \circ f$ , su kneading sequence será

$$K_{(f \circ f)^*} = \hat{I}_0\hat{I}_1\hat{I}_2\dots \text{ donde } \hat{I}_k = \begin{cases} D & \text{si } I_k = Z \\ C & \text{si } I_k = C \\ Z & \text{si } I_k = D \end{cases}$$

ya que al invertir la función los signos de todas las iteraciones cambiaron y por lo tanto se intercambian  $D$ 's por  $Z$ 's y viceversa, mientras que las  $D$ 's intermedias se pierden al fijarnos solamente en iteraciones pares.

Es decir que si  $f$  intercambia intervalos,  $K_{(f \circ f)^*} = I \Rightarrow K_f = D * I$ , donde definimos el operador  $*$  para una sucesión finita  $A$  que no contenga  $C$  e  $I = I_0I_1I_2\dots$ , como:

$$A * I = \begin{cases} AI_0AI_1AI_2\dots & \text{si } A \text{ es par} \\ A\hat{I}_0A\hat{I}_1A\hat{I}_2\dots & \text{si } A \text{ es impar} \end{cases}$$

Inversamente, si  $K_f = D * I$  para alguna  $I$  entonces  $f$  intercambia intervalos y si  $D * I$  tiene alguna propiedad (por ejemplo ser periódica) esa propiedad es heredada a  $K_{(f \circ f)^*}$ .

La operación  $*$  preserva el orden:

Sean  $A = a_0a_1a_2\dots < B = b_0b_1b_2\dots$ , con  $a_0a_1\dots a_{m-1} = b_0b_1\dots b_{m-1}$

- Si  $a_0a_1\dots a_{m-1}$  es par entonces  $a_m < b_m$  y

$$D * A = D\hat{a}_0D\hat{a}_1\dots D\hat{a}_{m-1}D\hat{a}_mD\dots$$

$$D * B = D\hat{b}_0D\hat{b}_1\dots D\hat{b}_{m-1}D\hat{b}_mD\dots$$

como  $a_0a_1\dots a_{m-1} = b_0b_1\dots b_{m-1}$  entonces  $D\hat{a}_0D\hat{a}_1\dots D\hat{a}_{m-1} = D\hat{b}_0D\hat{b}_1\dots D\hat{b}_{m-1}$ , aquí tenemos de nuevo dos posibilidades:

- Si  $m$  es par, el operador  $*$  agregó un número impar de  $D$ 's a  $a_0a_1\dots a_{m-1}$ , ya que esta cadena era par, la resultante será impar y como  $a_m < b_m$  entonces  $\hat{a}_m > \hat{b}_m$  por lo que  $D * A < D * B$ .
- Si  $m$  es impar, al aplicar el operador agregamos un número par de  $D$ 's, lo cual da como resultado que  $D\hat{a}_0D\hat{a}_1\dots D\hat{a}_{m-1}D$  sea impar y como  $\hat{a}_m > \hat{b}_m$  que  $D * A < D * B$ .

- El caso  $a_0a_1\dots a_{m-1}$  impar se muestra análogamente.

Otra propiedad de este operador es que manda sucesiones maximales en maximales (lo cual es inmediato después de lo que acabamos de probar) y que es uno a uno sobre su imagen. En el siguiente lema se establece que la imagen de este operador aplicado a las maximales es sobre:

**Lema 12** *Para  $A, B, X$  maximales tales que  $D * A < X < D * B$  tenemos que  $\exists Y$  tal que  $X = D * Y$  y  $Y$  maximal.*

Si llamamos  $M_1 = \{D * I : I \text{ maximal}\}$  este es un intervalo de sucesiones maximales con extremos

$$(DC)^\infty = D * C^\infty < D * (DZ^\infty) = DZD^\infty$$

las cuales corresponden a una órbita periódica superestable de período 2 y a que la órbita de  $c$  caiga en un punto fijo en la segunda iteración.

Ahora bien, como  $(f \circ f)|_{J_0} \in S$ -unimodales podemos preguntarnos cuándo intercambia intervalos. Por lo que vimos para  $f$  la condición en este caso sería que  $K_{(f \circ f)} = D * D * I$  para alguna  $I$  maximal. De aquí que, igual que antes, existe  $M_2 = \{D * D * I : I \text{ maximal}\}$  el cual tiene por extremos

$$\begin{aligned} D * D * C &= D * (DC)^\infty = DZDCDZDC\dots = (DZDC)(DZDC)\dots = \\ &= (DZDC)^\infty, \text{ y} \\ D * D * (DZ^\infty) &= D * DZD^\infty = DZD(DZ)^\infty \end{aligned}$$

Es claro que  $M_2 \subset M_1$ , de forma que si definimos

$$M_n = \{ \underbrace{(D * D * \dots * D)}_{n \text{ veces}} * I : I \text{ maximal} \}$$

tendremos que  $M_n \subset M_{n-1} \subset \dots \subset M_1 \subset M_0$ . El hecho de que  $K_f \in M_n$  implica que  $f^{2^n}|_{J_0^n}$  intercambia intervalos (con  $J_0^n$  el intervalo que intercambia esa iteración de  $f$ ) además, los extremos de  $M_n$  son  $(D*)^n C^\infty$  y  $(D*)^n (DZ^\infty)$ . Entonces tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 10** *Sea  $f_\mu$  una familia de mapeos  $S$ -unimodales con kneading sequence  $(DC)^\infty$  en  $\mu_1$  y  $DZD^\infty$  en  $\mu_1' > \mu_1$ . entonces existen*

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_3^* < \mu_2^* < \mu_1^*$$

tales que

- $f_{\mu_n}$  tiene un ciclo superestable de período  $2^n$
- $f_{\mu_n^*}$  es tal que la órbita de  $c$  cae en un ciclo inestable de período  $2^{n-1}$

Existen también  $\bar{\mu}_n$ , con  $\mu_{n+1}^* < \bar{\mu}_n < \mu_n^*$  tales que  $f_{\bar{\mu}_n}$  tiene kneading sequence  $(D*)^n (DZC)^\infty$  es decir que  $f$  tiene un ciclo superestable de período  $3 \cdot 2^n$ .

Esta cadena de valores en  $\mu$  es lo que se llama una sucesión infinita de doblamiento de período la cual presenta caos en distintas formas.

Los pocos ejemplos para los que se sabe que las hipótesis se cumplen han sido de mucha ayuda para entender el doblamiento de período a caos y sus consecuencias. El mapeo cuadrático ha sido ampliamente estudiado y los resultados encontrados en esa familia suelen extenderse a familias de mapeos del intervalo en sí mismo aún a pesar de no comprobar las hipótesis. A continuación damos un ejemplo de una red que presenta caos y algunas de las características por las cuales se puede observar esto.

## 4.4 Un ejemplo

Para este ejemplo usaremos una red con matriz de conexión

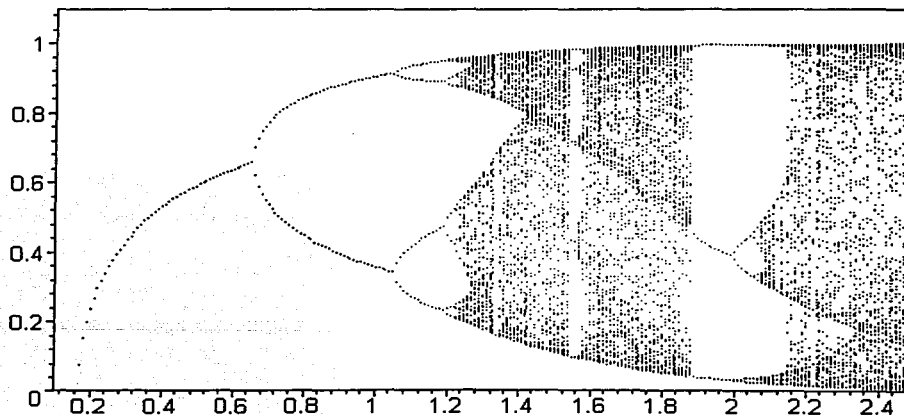
$$W = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

para la cual sabemos que valen los teoremas que hemos visto y por lo tanto en la cual esperamos encontrar caos. La manera en que hemos abordado el problema de reconocer el caos es por medio de cadenas de bifurcaciones, por lo tanto haremos el diagrama de bifurcación de la familia de funciones definida por

$$f_{\mu}(x, y) = (\tanh(\mu(-x + y)), \tanh(\mu(-3x + 3y)))$$

Para hacer el diagrama de bifurcación de un sistema es necesario encontrar las órbitas periódicas para cada coordenada o neurona y para cada valor de  $\mu$ . Para esto escogeremos 300 valores de  $\mu$  entre 0 y 3, igualmente espaciados, e iteraremos la función  $f_{\mu}$  1000 veces para cada uno de estos valores. Pensando en que las órbitas que estamos buscando son atractoras, es de esperarse que después de 900 iteraciones los puntos están lo bastante cerca de estas. Graficando el valor de las últimas 100 iteraciones en un eje para cada  $\mu$  y en el otro el valor de esta, se podrá observar cómo al variar  $\mu$ , las órbitas se dibujan según van apareciendo.

La gráfica que se obtuvo para la primer neurona es la siguiente:

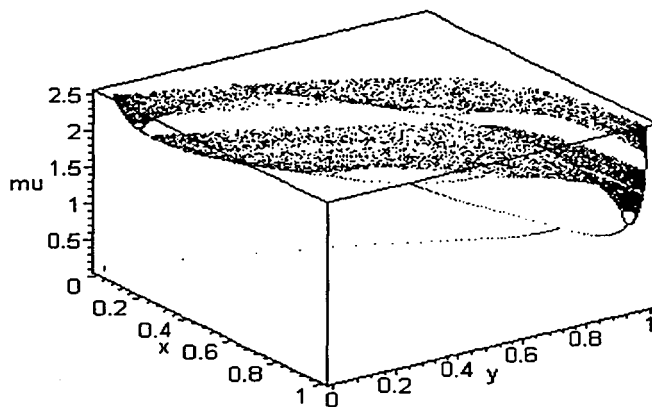




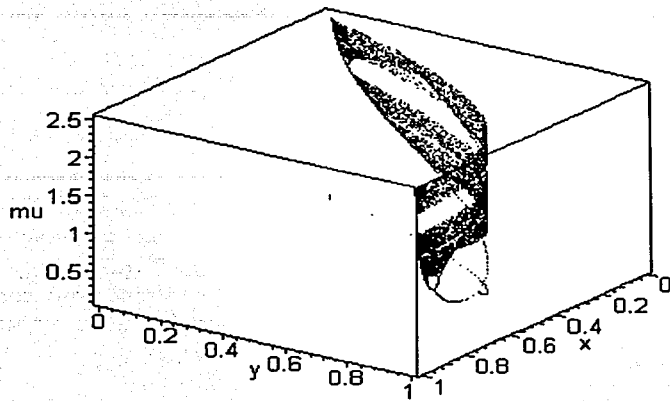
Los puntos periódicos de la primera neurona contra los valores de  $\mu \in [0, 2.5]$

el eje  $x$  representa a  $\mu$  mientras que en el otro los valores de la neurona. A cada valor de  $\mu$  se le asigna la posición de los puntos de la órbita periódica que le corresponde. Como ya habíamos visto, una bifurcación se da cuando cambia el periodo de la órbita atractora. Para los primeros valores de  $\mu$  existe un punto fijo, aproximadamente en 0.6 ocurre la primera bifurcación, apareciendo dos puntos de periodo 2. La siguiente bifurcación da lugar a periodo 4 y así sucesivamente. Aproximadamente en 1.6, y más claramente en 1.9, aparece lo que se llama ventana de orden. En estas ventanas se vuelve a periodos de orden pequeños, la primera que observamos es de orden 5 y la segunda de 3.

En la siguiente imagen se puede ver un diagrama similar pero con las dos neuronas graficadas al mismo tiempo. En este caso, los puntos de la gráfica son puntos periódicos para toda la red, es decir, para las dos neuronas a la vez. En el eje  $z$  ahora se grafica a  $\mu$  y en los otros dos a las variables que representan a cada una de las neuronas.



En la siguiente vista del mismo diagrama se puede apreciar que todos los puntos graficados se encuentran en una curva del plano  $XY$ . Sin importar que  $\mu$  se tome, los puntos quedan contenidos en una misma curva. Esto hace pensar que para los puntos periódicos de la red, cada una de las variables se puede poner en función de la otra.



# Apéndice 1. La función tanh

La función sigmoïdal que se utiliza a lo largo de la tesis para fines de simplificar las demostraciones es tanh. Las propiedades que aquí se describen también las comparten otras funciones sigmoïdales.

La función tanh está definida por exponenciales como

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

de donde la tanh está acotada en valor absoluto por 1.

Así mismo la función es impar,

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-(e^{-x} - e^x)}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \tanh(-x)$$

La derivada de tanh(x) es

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

ya que  $\tanh^2(x) + \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1$ , de donde se concluye que la función es estrictamente creciente. Además

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-2x}} - \frac{1}{1 + e^{2x}} = 0 - 1 = -1$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1$$

Para el estudio de la red de una sola neurona hay que calcular la derivada de la composición  $\tanh'(\mu ax)$  la cual es

$$\tanh'(\mu ax) = \frac{\mu a}{\cosh^2(\mu ax)} = \mu a(1 - \tanh^2(\mu ax))$$

La derivada de las iteraciones tiene la misma forma, por ejemplo, la derivada de la segunda iterada es

$$\tanh'(\mu a \tanh(\mu ax)) = \mu^2 a^2 (1 - \tanh^2(\mu a \tanh(\mu ax)))(1 - \tanh^2(\mu ax))$$

Como tanh es creciente y  $\tanh(0) = 0$  entonces  $\tanh^2(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0]$  y creciente en  $[0, \infty)$  además de estar acotada por 1 y -1, por todo esto  $1 - \tanh^2(x)$  es

creciente para los negativos y decreciente en los positivos por lo cual las derivadas en los positivos son decrecientes mientras que en los negativos son crecientes. Esto quiere decir que si la derivada en el cero de la función es  $\mu a$ ,  $\mu^2 a^2$  para la segunda iteración y, en general,  $\mu^k a^k$  para la  $k$ -ésima iteración entonces la derivada en cualquier otro punto será menor que estos valores. Este resultado es muy importante ya que nos dice que las iteraciones de la función pueden tener a lo más tres puntos fijos. Es claro que el origen es un punto fijo, ahora bien, dependiendo de la derivada de la función en el cero es posible que la función cruce a la identidad en otros dos puntos, pero sólo en estos. Para aclarar este punto definamos una nueva función

$$h_k(x) = f_\mu^k(x) - x$$

de manera que los ceros de  $h_k$  son los puntos fijos de la  $k$ -ésima iteración. Sabemos que  $h_k(0) = 0$ , así que para obtener nuevos ceros de la función  $h_k$  su derivada debe valer cero en algún punto. Derivando con respecto a  $x$  obtenemos

$$h_k'(x) = (f_\mu^k(x))' - 1$$

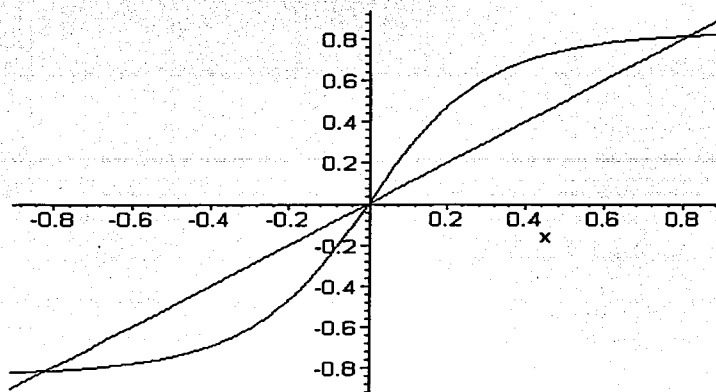
la cual vale cero sólo cuando  $(f_\mu^k(x))' = 1$ . Como ya probamos, la derivada de  $f_\mu^k(x)$  va por debajo de la derivada en cero, así que la única posibilidad de que valga 1 en algún punto distinto del origen es que  $(f_\mu^k(0))' > 1$  y esto sólo pasará en dos puntos simétricos con respecto al origen, por lo tanto a lo más tendremos 3 puntos fijos de  $f_\mu^k(x)$ .

Una vez probado esto demostraremos que la red de una sola neurona no puede tener puntos periódicos de periodo mayor que 2. Para esto se usará el teorema de Sharkóvsky, por lo cual basta probar que no hay puntos periódicos de periodo 4.

Supongamos que  $f_\mu^4(x_0) = x_0$  para alguna  $x_0$  y que  $f_\mu^2(x_0) \neq x_0$ <sup>7</sup>, esto quiere decir que  $(f_\mu^4(0))' > 1$  o sea que  $1 < (f_\mu^4(0))' = \mu^4 a^4 < \mu^2 a^2 = (f_\mu^2(0))'$ . Ahora bien, ya que  $h_2(0) = 0$  y  $h_2'(0) = (f_\mu^2(0))' - 1 > 0$  entonces existe  $y > 0$  tal que  $h_2(y) > 0$ , también, como  $f_\mu^2(x) < 1$  para toda  $x$ ,  $h_2(x) < 1 - x$  o sea que para  $x > 1$ ,  $h_2(x) < 0$ . Por la continuidad de  $h_2$  y el teorema del valor intermedio tenemos que existe  $0 < z < 1$  tal que  $h_2(z) = f_\mu^2(z) - z = 0$  o lo que es lo mismo  $f_\mu^2(z) = z$ . Por hipótesis  $f_\mu^2(x) \neq x$ , entonces  $z \neq x$  pero si  $f_\mu^2(z) = z$  entonces también  $f_\mu^4(z) = z$  lo cual es una contradicción con el hecho de que las iteradas de la función  $f_\mu$  tiene a lo

<sup>7</sup> Esto es para asegurar que el punto es de periodo 4 y no un punto fijo o de periodo 2.

más tres puntos fijos y que son funciones impares.



Gráfica de la segunda iterada de la función  $f_{1.4}(x)$  con  $a = 1$ .

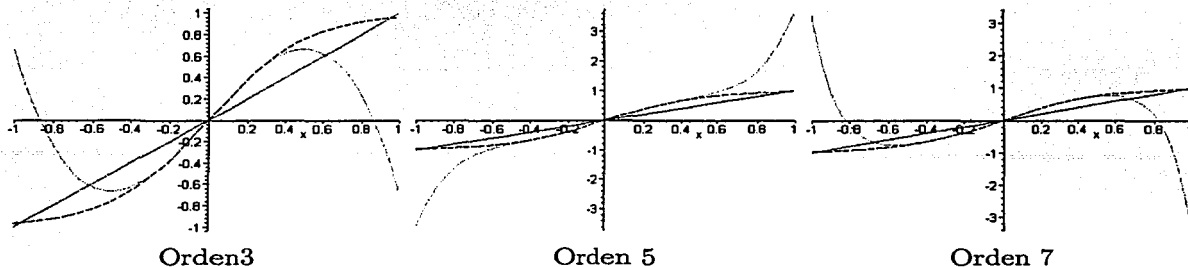
En esta gráfica se ve claramente cómo si la derivada de la segunda iteración es mayor que 1 (en este caso 1.4) la función necesariamente cruzará a la identidad.

Según el teorema de Sharkovsky, cualquier periodo distinto de 2 implica puntos de periodo 4, por lo tanto la red de una neurona no tiene puntos periódicos de periodo mayor que 2.

Un aspecto de esta función que necesitamos para algunas demostraciones es hasta qué grado tomaremos el desarrollo de Taylor de  $\tanh$ . Sabemos que al rededor del origen el desarrollo se aproxima tanto como queramos a la función dependiendo del orden en que cortemos la serie que lo define. Para el estudio que nos interesa veremos que basta con tomar los términos de  $x$  hasta orden 3. Lo que buscamos al estudiar bifurcaciones es cuántos puntos fijos o periódicos hay en un sistema. Una manera de encontrar puntos fijos es observando la intersección de la curva que define la función con la recta identidad en el caso de una dimensión. Ya que una demostración rigurosa de esto se sale del propósito de esta tesis, daremos una razón que parece convincente para el caso de una neurona.

En las siguientes gráficas se comparan las funciones  $\tanh$ , el desarrollo de Taylor

de  $\tanh$  hasta orden 3, el de orden 5, 7 y la identidad.<sup>8</sup>



La línea a rayas (roja) es la función  $\tanh$ , la línea punteada (azul) es el desarrollo de Taylor y la identidad es una línea continua (violeta). Es claro que cerca del origen las dos curvas definidas por los desarrollos de Taylor se parecen mucho a la gráfica original. Mientras más grande es el grado del desarrollo de Taylor más se tarda su gráfica en despegarse de la original. Lo que nos interesa es cuántas veces cruzan a la identidad. Si bien el caso de orden 5 sólo la cruza en el origen, los de orden 3 y 7 lo hacen dos veces al igual que la función  $\tanh$ . A pesar de que el desarrollo de orden 7 se parece mucho más, esperamos un comportamiento parecido para el de orden 3, y es por esto que escogimos cortar ahí la serie y facilitar los cálculos de las demostraciones.

<sup>8</sup> Utilizamos sólo desarrollos de orden impar, ya que los términos con exponente par son todos cero.

## Apéndice 2. Aproximación por flujos

El método de aproximación por flujo para conocer el comportamiento de algunos mapeos se basa en encontrar ecuaciones diferenciales en tiempo continuo tales que sus soluciones, cuando se evalúan en el tiempo unitario, se parecen hasta cierto orden a la función que define al sistema en diferencias. Para esto es necesaria la siguiente definición:

**Definición 17** Se dice que el mapeo  $f_\mu$  se aproxima hasta orden  $k$  por el sistema  $\dot{x} = F(x)$  si la expansión de Taylor del mapeo coincide con aquella de  $\varphi^1(x)$  hasta los términos de orden  $k$ , donde  $\varphi^t(x)$  es una solución del sistema  $\dot{x} = F(x)$ .

Para encontrar el desarrollo de Taylor de  $\varphi^1(x)$  usamos iteraciones de Picard. En general, para encontrar el desarrollo de una solución de cualquier sistema  $\dot{x} = F(x)$  se define la sucesión:

$$x_1(t) = e^{\Lambda t}x, \quad x_{n+1}(t) = e^{\Lambda t}x + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t-s)}\mathcal{F}(x_n(s))ds$$

donde  $e^{\Lambda t}x$  es la solución del sistema lineal con condición inicial  $x$  y  $\mathcal{F}$  son los términos de orden mayor o igual a 2 de  $F$ . Esta sucesión converge a la solución del sistema con condición inicial  $x_0$ . En el caso de la aproximación por flujo supondremos que la función  $F(x)$  es polinomial y, para simplificar los cálculos, que va de los reales en los reales. Entonces, si  $F(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$  el desarrollo de sus soluciones con condición inicial  $x$  son:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{\alpha t} \\x_2(t) &= e^{\alpha t}x + \int_0^t e^{\alpha(t-s)}\beta(e^{\alpha s})^2 ds = e^{\alpha t}x + \frac{\beta x^2 e^{\alpha t}(e^{\alpha t} - 1)}{\alpha} \\x_3(t) &= e^{\alpha t}x + \int_0^t e^{\alpha(t-s)}(\beta(x_2(t))^2 + \gamma(x_2(t))^3) ds\end{aligned}$$

En este paso obtenemos los coeficientes para  $x$ ,  $x^2$  y  $x^3$ , los cálculos para obtener  $x_n$ ,  $n > 2$ , son muy laboriosos y no ilustran nada importante. Una vez que se tienen los coeficientes para una función polinomial general, lo que falta es resolver el sistema que resulta de igualar los coeficientes de este desarrollo evaluado en  $t = 1$  con aquellos del desarrollo de Taylor de la función que define el mapeo.

Como ejemplo tomaremos la función que utilizamos en el caso de redes con una sola neurona. El sistema original en diferencias es:

$$f(x) = \tanh(a\mu x)$$

cuyo desarrollo de Taylor, tomando  $a = 1$ , es:

$$f(x) = \mu x - 2\mu^3 x^3 + O(|x|^4)$$

En lugar de obtener todos los coeficientes en un sólo sistema, hayamos primero los correspondientes a  $x$  y  $x^2$  y después lo hacemos para  $x^3$ . De la segunda iterada de Picard, valuada en  $t = 1$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} e^\alpha &= \mu \\ \frac{\beta e^\alpha (e^\alpha - 1)}{\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos:

$$\alpha = \ln(\mu) \text{ y } \beta = 0$$

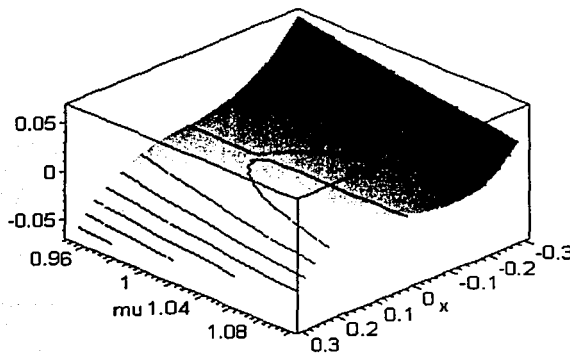
Ahora bien, la tercera iterada de Picard resulta ser

$$x_3(t) = e^{\alpha t} x + \frac{1}{2} \frac{\gamma x^3 e^{\alpha t} (e^{2\alpha t} - 1)}{\alpha}$$

de donde

$$\gamma = -4 \frac{\mu^2 \ln(\mu)}{\mu^2 - 1}$$

Entonces el sistema  $\dot{x} = F(x) = \ln(\mu)x - 4 \frac{\mu^2 \ln(\mu)}{\mu^2 - 1} x^3$  aproxima al sistema original hasta orden 3. Al analizar este nuevo sistema tenemos que para  $\mu < 1$  existe un sólo punto de equilibrio que es el origen. Cuando  $\mu > 1$  aparecen dos nuevos puntos de equilibrio de donde concluimos que en el valor  $\mu = 1$  tenemos una bifurcación de Pitchfork, tal como lo habíamos visto en el sistema en diferencias.



Gráfica de la función  $F(x) = \ln(\mu)x - 4 \frac{\mu^2 \ln(\mu)}{\mu^2 - 1} x^3$



A pesar de que este método se basa en aproximaciones es muy útil en el estudio de funciones que no cumplen las hipótesis de los teoremas ya conocidos. Para los casos de resonancias de orden 2 y 3 en redes de 2 neuronas es la única manera que se ha encontrado para abordarlos, los cálculos son sumamente complicados por lo que tomaremos resultados ya estudiados y los aplicaremos directamente a las redes. [Wang, 1994]

# Bibliografía

- [1] Arnold, V.I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag New York Inc., Nueva York, 1983.
- [2] Arrowsmith, D.R. y Place, M. *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990
- [3] Carpenter, Gail A., Neural Network Models for Pattern Recognition and Associative Memory. *Neural Networks*, 1(2):243-257, 1989.
- [4] Collet, Pierre y Jean-Pierre Eckmann. *Iterated maps in the interval as dynamical systems*, Birkhauser, Basel, 1980.
- [5] Devaney, R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., 1986.
- [6] Crick, Francis. *La Búsqueda Científica del Alma*. Editorial Debate, S.A.. Madrid, 2000.
- [7] Gleick, James. *Caos*. Editorial Seix Barral, S.A. Barcelona, 1994.
- [8] Grossberg, Stephen. The complementary brain: unifying brain dynamics and modularity. *Trends in Cognitive Sciences*, 4(6):233-245, 2000.
- [9] Grossberg, Stephen. Nonlinear neural networks: principles, mechanisms and architectures. *Neural Networks*, 1(1):17-61, 1988.
- [10] Hale J. y Koçak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag New York, Inc., Nueva York, 1991.
- [11] Holmgren, Richard. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer-Verlag. Nueva York, 1996.
- [12] Iooss, George. *Bifurcations of maps and applications*, North Holland, Amsterdam, 1979.
- [13] Jaffe, A. and Ruelle, D., editors. *Iterated Map on the interval as Dynamical Systems*, volume 1 of *Progress in Physics*. Birkhauser, 1981.
- [14] Spivak Michel. *Calculus*. Reverté Ediciones, S.A. de C.V. México, 1996.

- [15] Robinson, Carl. *Dynamical Systems*. CRC Press, Estados Unidos, 1999.
- [16] Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill International Editions, 1976.
- [17] Wang, Xin. *Discrete-Time Neural Networks as Dynamical Systems*. Faculty of Graduate School, University of California, 1994.
- [18] Wang, Xin y Edward K. Blum, "Dynamics and Bifurcations in Neural Networks", en *Handbook of Neural Networks*, editor M. Arbib.