

03060  
11



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

INSTITUTO DE GEOFÍSICA

**ANÁLISIS TIEMPO-FRECUENCIA APLICADO AL ANÁLISIS Y  
PROCESAMIENTO DE DATOS SÍSMICOS DE REFLEXIÓN.**

**TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS (GEOFÍSICA)**

**PRESENTA  
MARIO MANUEL LOZADA ZUMAETA**

**DIRECTOR DE TESIS  
DR. OSCAR CAMPOS ENRÍQUEZ**

**ENERO 2002**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## SUMARIO

INDICE.	II
RESUMEN.	IV
RECONOCIMIENTOS.	VI
LISTA DE FIGURAS.	VII
LISTA DE TABLAS.	XI
1. INTRODUCCION.	1
2. LOCALIZACIÓN TIEMPO-FRECUENCIA.	5
2.1. Principio de incertidumbre de Heisenberg.	6
2.1.2. Condición de soporte compacto.	8
3. ANÁLISIS DE FOURIER.	
3.1. Transformada de Fourier 'rápida' ventaneada.	10
3.1.1. Elección de la 'ventana' de Fourier.	14
3.2. Propiedades y Espectogramas.	18
4. ANÁLISIS Y SÍNTESIS EN EL DOMINIO ONDICULAR.	26
4.1. Transformada Ondicular.	26
4.2. Ondícula de Haar.	29
4.2.1. Plano tiempo-frecuencia.	32
4.3. Ondícula de Daubechies.	32

4.4. Algoritmo de cálculo.	35
4.5. Análisis de Multiresolución.	36
5. APLICACIONES SÍSMICAS.	44
5.1. Como una herramienta de filtrado.	47
5.2. Atributos sísmicos en el espacio de multiresolución.	57
6. MULTIRESOLUCIÓN UNI Y BIDIMENSIONAL APLICADA A LA DELIMITACIÓN DE UN YACIMIENTO DE GAS.	62
6.1. Introducción.	62
6.2. Geología regional.	64
6.3. Análisis sísmico.	72
6.4. Análisis de Multiresolución.	82
6.5. Conclusiones.	99
7. CONCLUSIONES GENERALES.	101
8. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA.	103
9. ANEXOS.	
8.1 Glosario.	108
8.2 Principio de Incertidumbre de Gabor.	116

## RESUMEN

La transformada ondicular constituye una herramienta de análisis y procesamiento de señales transitorias e imágenes desarrollada en las dos últimas décadas. Inicialmente en este estudio, precisando sus características, se presenta de una manera consistente y orientada con las aplicaciones de sismica de reflexión, las transformadas de Fourier 'ventaneada' y ondicular respectivamente. Posteriormente se procede, aplicar esta última transformada a señales sísmicas sintéticas y reales. Más específicamente, a datos sísmicos de reflexión tanto sintéticos y de campo, se les aplicaron las técnicas propias del análisis ondicular uni y bidimensional. El análisis y evaluación de datos reales se da en el marco de la caracterización estática de un yacimiento de gas, tanto en la fase de pre-desarrollo (delimitación del yacimiento) como de desarrollo inicial, (planeación de pozos de localización). Se aplicó tanto el análisis y síntesis ondicular en el dominio de la transformada ondicular como el análisis de multiresolución (MRA), con el objetivo de determinar los atributos sísmicos convencionales y del atributo relacionado con las variaciones de las amplitudes sísmicas en función de la distancia (AVO). Basados en el análisis sistemático y evaluación de la información acondicionada previamente, fueron posible de una manera concluyente y local identificar y correlacionar ciertos eventos sísmicos a lo largo de una ventana sísmica de análisis. De esta manera fue posible contribuir, a la precisión de la extensión lateral y características del yacimiento de gas en un área en la que se localizan pozos productores e improductivos con registro litológico de producción. Esta aplicación permitió establecer la importancia relativa de la transformada ondicular como herramienta de análisis y síntesis de datos sísmicos de reflexión en las etapas de procesamiento e interpretación.

Del análisis, de los resultados obtenidos en la experimentación numérica, se logró establecer la utilidad de la transformada ondicular 1-D y 2-D. Se establece su validez y su carácter de herramienta complementaria en el análisis y procesamiento de datos sísmicos de reflexión. Las aplicaciones de la transformada ondicular y del análisis de multiresolución, aquí desarrollados, son una contribución al uso de la transformada ondicular en el procesamiento de datos sísmicos de reflexión. Transformada ondicular

que incluye líneas de investigación en compresión de datos, filtrado de ondas de tubo, análisis de señales, inversión de atributos sísmicos (AVO), calibración de registros geofísicos de pozo con la litología, fluidos e información sísmica (escalamiento), e interpretación estratigráfica, y en términos más restringidos aún, en aplicaciones relacionadas con los métodos potenciales (gravimetría y magnetometría).

## RECONOCIMIENTOS

Es necesario dejar constancia explícita, que sin las directrices impartidas y generoso desprendimiento del Dr. Oscar Campos Enríquez, la culminación formal de los aspectos relevantes de este trabajo no se hubieran logrado; así como también, la disponibilidad en todo momento oportuna e incondicional del Dr. Gerardo Ronquillo Jarillo. Mi sincero agradecimiento a las personas que de una u otra manera a través de una interacción continua motivaron y contribuyeron al desarrollo de este trabajo, a los investigadores integrantes del Comité del Jurado evaluador, doctores William L. Bandy, René Chávez Segura, Gorgonio García Molina, Tomás González Morán, Gerardo Ronquillo Jarillo y Jaime Urrutia Fucugauchi, los cuales favorecieron la versión final de este trabajo. Mi reconocimiento especial al Instituto Mexicano del Petróleo en cuyo Programa de Yacimientos Naturalmente Fracturados el autor actualmente está adscrito y en cuyas instalaciones parcialmente se desarrolló esta investigación en el marco del proyecto de caracterización estática de yacimientos naturalmente fracturados, D.01341.

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 3.1: La función ventana o de peso  $g(u)$  . p.14
- Figura 3.2 Densidad espectral de energía  $\hat{g}(\omega)$  característica de la ventana  $g(u)$  . p.16
- Figura 3.3: Función chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$  . p.19
- Figura 3.4: Versión localizada  $f_4(u)$  . p.19
- Figura 3.5: Versión localizada  $f_6(u)$  . p.19
- Figura 3.6: Versión localizada  $f_4(u) + f_6(u)$  . p.19
- Figura 3.7: Versión localizada  $f_2(u) + f_4(u) + f_8(u)$  . p.19
- Figura 3.8: Versión localizada  $f_2(u) + f_4(u) + f_6(u) + f_8(u)$  . p.19
- Figura 3.9: Gráfica de  $g_{6,4}(u)$  . p.19
- Figura 3.10: Gráfica de  $g_{4,4}(u)$  . p.28
- Figura 3.11: Gráfica de  $g_{2,4}(u) + g_{7,6}(u)$  . p.19
- Figura 3.12: Gráfica de  $g_{5,4}(u) + g_{7,6}(u)$  . p.19
- Figura 3.13: Gráfica de  $g_{6,4}(u) + g_{7,6}(u)$  . p.19
- Figura 3.14: Gráfica de  $g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{4,8}(u)$  . p.19
- Figura 3.15: Gráfica de  $g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{5,8}(u)$  . p.19
- Figura 4.1: Ondícula a distintos desplazamientos y escalamientos. p.28
- Figura 4.2: Ondícula de Haar (ondícula madre):  $h_0(x)$  . p.29
- Figura 4.3: Función de escalamiento de Haar (ondícula padre),  $h_{-1}(x)$  . p.30
- Figura 4.4: Ondículas  $[h_{1,0}(x) + h_{1,1}(x)]$  . p.30
- Figura 4.5: Combinación lineal de funciones de escalamiento:  $h_{1,0} = h_{-1} + h_0$  . p.31
- Figura 4.6: Combinación lineal de funciones de escalamiento:  $h_{1,1} = h_{-1} - h_0$  . p.31
- Figura 4.7: Característica del plano tiempo-frecuencia. p.32
- Figura 4.8: Función de escalamiento (ondícula padre)  $\phi(x)$  y ondícula (ondícula madre)  $\varphi(x)$  de la base Daubechies de cuarto orden. p.34
- Figura 4.9: Función de escalamiento (ondícula padre)  $\phi(x)$  y ondícula (ondícula madre)  $\varphi(x)$  de la base Daubechies de vigésimo orden. p.34
- Figura 4.10: Espectro de Fourier de las bases ondiculares de Daubechies de cuarto orden D4 y vigésimo orden D20 respectivamente. p.34
- Figura 4.11: Representación esquemática del algoritmo de cálculo de la transformada ondicular rápida. p.35
- Figura 4.12: Análisis de Multiresolución: Los subespacios  $W_j$  corresponde al complemento ortogonal de  $V_j$  . p.39
- Figura 4.13: Función Chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$  descompuesta en siete niveles de resolución. p.40



- Figura 4.14: Función típicamente discontinua descompuesta en siete niveles de resolución. p.40
- Figura 4.15: Función típicamente discontinua descompuesta en siete niveles de resolución. p.40
- Figura 4.16: Función escalón descompuesta en cinco niveles de resolución. p.40
- Figura 4.17: Funciones bases asociadas STFT (Transformada de Fourier ventaneada) y WFT (transformada de ondícula). p.41
- Figura 4.18: Función  $f(x)$ .  $\{f(x) = x, 0 \leq 0 < 0.5; f(x) = (x-1), 0.5 \leq x < 1\}$ . p.42
- Figura 4.19: Función  $f(x)$  y síntesis de Fourier truncada hasta el término 17. p.42
- Figura 4.20: Distribución de coeficientes de Fourier. p.42
- Figura 4.21: Función  $f(x)$  y su síntesis ondicular truncada hasta el término 17. p.43
- Figura 4.22: Distribución de coeficientes ondiculares. p.43
- Figura 5.1: Perturbación sísmica y su espectro de Fourier. p.44
- Figura 5.2: Densidad espectral (plano tiempo-frecuencia). p.44
- Figura 5.3: Sección sísmica sintética a profundidad. p.46
- Figura 5.4: Proyección de la sección sísmica sintética a profundidad en el sub-espacio de nivel de resolución 3. p.46
- Figura 5.5: Traza sísmica y su descomposición en siete niveles de resolución. p.47
- Figura 5.6: Señal sísmica y su descomposición a los niveles de resolución 1, 2 y 4. p.48
- Figura 5.7: Descomposición de los datos de la señal sísmica de la Figura 5.6 a los niveles de resolución 5, 8 y 10. p.48
- Figura 5.8: Secuencia de procesamiento de datos. p.49
- Figura 5.9: MRA: Sección sísmica apilada (post-stack). p.51
- Figura 5.10: MRA: Descomposición de los datos al nivel de resolución 1. p.51
- Figura 5.11: MRA: Descomposición de los datos al nivel de resolución 4. p.51
- Figura 5.12: MRA: Sección sísmica pre-apilada (pre-stack). p.52
- Figura 5.13: MRA: Descomposición de los datos al nivel de resolución 1. p.52
- Figura 5.14: MRA: Descomposición de los datos al nivel de resolución 4. p.52
- Figura 5.15: Señal senoidal (parte inferior), ruido blanco gaussiano (parte intermedia), señal senoidal más ruido gaussiano blanco (parte superior). p.54
- Figura 5.16: Señal senoidal más ruido gaussiano antes y después del filtrado adaptivo (wavelets packet). Relacionada con la parte inferior y superior de la Figura 5.15 respectivamente. p.54
- Figura 5.17: Densidad espectral de la señal senoidal más ruido blanco gaussiano antes y después del filtrado adaptivo (wavelet packet). Relacionada con la parte superior e inferior de la Figura 5.15 y con la Figura 5.16 respectivamente. p.54
- Figura 5.18: Transitorio sísmico antes y después del filtrado adaptivo (wavelet packet). p.55
- Figura 5.19: Transitorio sísmico antes y después del filtrado adaptivo (wavelet packet). Relacionada con la parte superior e inferior de la Figura 5.18 respectivamente. p.55
- Figura 5.20: Densidad espectral del transitorio sísmico inicial y después del filtrado adaptivo (wavelet packet). Relacionada con la parte inferior y superior de la Figura 5.18 respectivamente y con la Figura 5.19. p.55
- Figura 5.21: Serie de tiempo original y señal filtrada (wavelet packet). p.56

Figura 5.23: Sección sísmica original 'post stack'. p.58

Figura 5.24: MRA: Descomposición de los datos al nivel 3 de resolución. Amplitud de la envolvente. p.59

Figura 5.25: MRA: Descomposición de los datos al nivel 4 de resolución. Amplitud de la envolvente. p.59

Figura 5.26: MRA: Descomposición de los datos al nivel 5 de resolución. Amplitud de la envolvente. p.60

Figura 5.27: MRA: Descomposición de los datos al nivel 7 de resolución. Amplitud de la envolvente. p.60

Figura 5.28: MRA: Descomposición de los datos al nivel 1 de resolución. Sección de ángulo de emergencia. Rango limitado de apilamiento 0-15 Grados. p.61

Figura 5.29: MRA: Descomposición de los datos al nivel 2 de resolución. Sección de ángulo de emergencia. Rango limitado de apilamiento 0-15 Grados. p.61

Figura 6.1: Localización de la Cuenca de Burgos. p.65

Figura 6.2: Sección esquemática de la Cuenca de Burgos (sedimentación y fallas de crecimiento). p.66

Figura 6.3: Paleografía del Terciario. p.67

Figura 6.4: Amplitud envolvente (regional) al tiempo de configuración de 1780 ms. p.74

Figura 6.5: Fase instantánea (regional) al tiempo de configuración de 1780 ms. p.74

Figura 6.6: Amplitud envolvente (local) al tiempo de configuración de 1780 ms. p.74

Figura 6.7: Sección sísmica J-J'. Línea sísmica que cruza las anomalías A y B. p.75

Figura 6.8: Ventana sísmica de análisis del CDP 629 al CDP 560 y al tiempo de 1600 a 1900 ms. p.76

Figura 6.9: Amplitud envolvente y distribución de amplitud envolvente anómalas. (anomalías II, I, III, IV, V, VI y localización de pozos 1, 3 y 2). p.79

Figura 6.10: Fase instantánea en la ventana sísmica de análisis. p.79

Figura 6.11: Frecuencia instantánea en la ventana sísmica de análisis. p.80

Figura 6.12: Atributo sísmico AVO de onda P por G. p.80

Figura 6.13: Atributo sísmico AVO de onda P más G. p.81

Figura 6.14: Factor de fluido. (Smith-Gidlow). p.81

Figura 6.15: MRA unidimensional. Descomposición de datos al nivel 1 de resolución. Fase instantánea. p.87

Figura 6.16: MRA unidimensional. Descomposición de datos al nivel 3 de resolución. Amplitud envolvente. p.88

Figura 6.17: MRA unidimensional. Descomposición de datos al nivel 5 de resolución. Amplitud envolvente. p.89

Figura 6.18: MRA unidimensional. Descomposición de datos al nivel 5 de resolución. Fase instantánea. p.90

Figura 6.19: MRA unidimensional. Descomposición de datos al nivel 5 de resolución. Frecuencia instantánea. p.91

Figura 6.20: MRA bidimensional Descomposición de los datos al nivel 2 de resolución. Fase instantánea. p.92

Figura 6.21: MRA bidimensional Descomposición de los datos al nivel 3 de resolución. Fase instantánea. p.93

Figura 6.22: MRA bidimensional. Descomposición de los datos al nivel 4 de resolución. Fase instantánea. p.94

Figura 6.23: MRA bidimensional. Descomposición de datos al nivel 5 de resolución.  
Fase instantánea. p.95

Figura 6.24: MRA bidimensional. Descomposición de datos al nivel 5 de resolución.  
Frecuencia instantánea. p.96

Figura 6.25: MRA bidimensional. Descomposición de datos al nivel 6 de resolución.  
Frecuencia instantánea. p.97

Figura 6.26: MRA bidimensional. Descomposición de los datos al nivel 7 de resolución.  
Amplitud envolvente. p.98

## **LISTA DE TABLAS**

Tabla 3.1: Parámetros característicos asociados a algunas ventanas clásicas: Rectangular, Hamming, Gausiana, Hanning y Blackman. p.16

Tabla 5.1: Análisis de Multiresolución: Bandas de frecuencias del eje temporal a diferentes escalas. p.50

Tabla 5.2: Análisis de Multiresolución: Bandas de número de onda en el eje espacial a diferentes escalas. p.50

## 1. INTRODUCCIÓN.

La transformada ondicular ha despertado la atención de geofísicos en particular e ingenieros y matemáticos en general. Constituye una poderosa herramienta en disciplinas asociadas al análisis de señales transitorias y en el procesamiento digital de imágenes (Strang, 1989; Cody, 1992; Kayser, 1994; Foufoula-Georgiou and Kumar, 1994; Strang, 1995).

Aportes matemáticos significativos relacionados a las técnicas ondiculares, análisis multiresolutivos y metodologías relacionadas, se hacen desde en la década de los años 80. Grossman y Morlet (1984) presentaron la teoría matemática de la descomposición y Goupillaud et al. (1984) aplicaron la transformada ondicular a señales sísmicas. Posteriormente se generó un continuo y renovado desarrollo de la representación ondicular como herramienta de análisis de señales. Meyer (1993) comprobó que la mayor parte de las herramientas del análisis de Fourier pueden ser implantadas y aplicadas con la Transformación Ondicular; Daubechies (1988, 1989, 1990, 1993), contribuyó con los fundamentos que permiten la construcción de bases orto-normales discretas.

La mayor parte de las aplicaciones iniciales en terrenos de la geofísica se relacionaron al análisis de la traza compleja y al mejoramiento de la relación señal ruido de datos sísmicos. Morlet et al. (1982) utilizaron una forma de transformada ondicular conocida como transformada ondicular continua (CWT), cercanamente emparentada con la transformación de Gabor. La descomposición CWT de datos en todas sus escalas en cada posición del espacio, originaba una gran cantidad de datos redundantes.

Considerablemente más eficiente, principalmente desarrollada por la comunidad involucrada con el procesamiento de señales, resultó la transformada ondicular discreta (DWT) basada en la codificación en subbandas. La conexión entre ondículas y codificación en sub bandas fue puesta en evidencia por Mallat (1989).

La DWT ha sido utilizada extensivamente durante los últimos 10 años en gran número de diversos campos. Sus aplicaciones incluyen 'denoising' de datos, compresión de imágenes y video, detección de eventos característicos, algoritmos numéricos eficientes y solución de ecuaciones diferenciales parciales. Una revisión de algunos estudios recientes está dado en Meyer (1993). Las aplicaciones geofísicas están principalmente relacionadas con el procesamiento de datos sísmicos. Entre los trabajos sísmicos recientes se incluyen aplicaciones de la DWT en el análisis de buzamientos de eventos en secciones sísmicas (Cohen and Chen, 1993), caracterización de trazas sísmicas (Grubb and Walden, 1997), y la descomposición tiempo-frecuencia de datos sísmicos (Chakraborty and Okaya, 1995).

Recientemente, algunos autores han aplicado las técnicas ondulares en el procesamiento de datos potenciales. Estas aplicaciones incluyen la solución de problemas inversos de escalas considerables (Li and Oldenburg, 1997) y la interpretación de perfiles (Chapin, 1997; Chapin and Mosher, 1997), en la reducción y análisis de datos magnetométricos (Ridsdill-Smith and Dentith, 1999).

El rango de aplicaciones sísmicas de la Transformación Ondicular incluye el diseño de algoritmos de compresión de datos del orden de 100:1, mediante la organización de los mismos en sub bandas a escalas y contenidos temporales y espaciales diferentes (Donoho et al., 1995); problemas de inversión tomográfica sísmica unidimensional (Xin-Gong and Ulrych, 1995); en la determinación de propiedades de escalamiento local (caracterización estructural de heterogeneidades) a partir de medidas en pozos (Xiao-Ping et al., 1995); problemas de extrapolación del campo ondular en el dominio ondicular en migración después del apilado (Wu and McMechan, 1995); la estimación de la función de transferencia propia de las heterogeneidades y atenuación superficial que actúan como filtros pasa bajos a partir de datos de VSP (Xiao-Ping et al., 1995); la representación eficiente y estable de los propagadores primarios de algunas técnicas comunes de migración a profundidad (Dressing and Wapenaar, 1995) y en la fase de pre-procesamiento se ha aplicado la transformada ondicular en procesos de filtrado antes y después del apilado (Faqui et al., 1995; Deighan and Watts, 1997).

Una presentación directa de la teoría ondicular está basada en el álgebra matricial. El tratamiento algebraico-matricial de la teoría ondicular la aproxima al concepto de bancos de filtros introducido del campo procesamiento digital de imágenes, Una descripción completa y suficientemente clara tanto de bancos de filtros como de la teoría ondicular puede encontrarse en Strang y Nguyen (1996). Para una presentación detallada de la teoría ondicular podemos referirnos al artículo de revisión de Jawerth and Sweldens (1994) que describe el análisis ondicular de funciones continuas en el marco de los conceptos de multiresolución.

El análisis de ondícula se ha convertido en una herramienta utilizada frecuentemente para analizar variaciones localizadas de espectros de potencia que eventualmente pueden estar presentes en una serie de tiempo. Al descomponer una serie temporal en el espacio tiempo-frecuencia, es posible determinar tanto la variabilidad de los modos dominantes así como la forma como estos modos varían en el tiempo. La transformada ondicular es utilizada para analizar series de tiempo que contienen espectros de potencias no estacionarias a numerosas y diversas frecuencias.

Como puede concluirse de esta breve introducción, el desarrollo y los campos de aplicación de la transformada ondicular, particularmente en geofísica aplicada, ha sido, y actualmente es creciente. En la primera fase de este trabajo se presentan los aspectos básicos relacionados con la transformada de ondícula con especial orientación hacia la geofísica y con énfasis a la sísmica de exploración. Una segunda fase de esta tarea se dio en el diseño e implantación de códigos FORTRAN, exprofesamente desarrollados, y la experimentación numérica correspondiente. Finalmente se procedió a su aplicación en sísmica de reflexión, como herramienta de filtrado, estimación de atributos sísmicos en el marco del análisis de multiresolución y en la caracterización estática de un yacimiento de gas.

En la primera parte de esta tesis se dan de manera directa y resumida algunos aspectos relacionados con el fundamento sobre el que se ha desarrollado la transformada ondicular. En esta primera parte se introduce el concepto de localización tiempo-frecuencia; se indican las limitaciones de la transformada de Fourier; se introduce la transformada de Fourier

ventaneada y a continuación la transformada ondicular. Esta primera parte incluye a los capítulos 2, 3 y 4.

En la segunda parte (Capítulos 5 y 6) se presentarán las aplicaciones, de esta herramienta relativamente nueva y poderosa, al análisis y procesamiento de datos de sísmica de reflexión.

Se presentará de una manera orientada el análisis tiempo-frecuencia y se aplicará la transformada ondicular 1-D y 2-D, como herramienta de procesamiento, análisis y evaluación de datos sísmicos de reflexión. Inicialmente se contrastarán el método de Fourier 'ventaneado' y de transformada ondicular y finalmente se presentarán los resultados de las aplicaciones sísmicas (Capítulo 5). Las aplicaciones sísmicas incluyen estimación de atributos convencionales y de AVO en el espacio de multiresolución en apoyo en la caracterización local de un yacimiento de gas (Capítulo 6).



## 2. LOCALIZACIÓN TIEMPO FRECUENCIA.

La transformada de Fourier de una función o señal estacionaria puede verse como una combinación lineal de senos y cosenos, esto es en términos de funciones armónicas. Estas funciones base tienen un soporte infinito en el dominio del tiempo y una localización perfecta en el dominio de las frecuencias, por consiguiente las funciones senosoidales están muy bien localizadas en el dominio de las frecuencias pero no lo están en el dominio del tiempo, ya que su soporte es de longitud infinita como consecuencia de su periodicidad. La transformada de Fourier proporciona la representación en el dominio de las frecuencias (número de onda) de procesos temporales, de señales o funciones que están definidas exclusivamente en el tiempo (espacio) (Bracewel, 1965).

El análisis de Fourier proporciona información en el dominio de las frecuencias que únicamente puede ser obtenida de la duración completa de la señal. No proporciona información relacionada a las variaciones locales en el tiempo y requiere que la señal sea estacionaria. La representación de Fourier descompone funciones de una variable espacial o temporal en funciones armónicas, componentes armónicas, ondas individuales o componentes periódicas, cuyas longitudes de onda en principio tienen todos los valores posibles.

La magnitud del espectro de una señal, a una frecuencia particular, se obtiene de la distribución de amplitudes presentes en el intervalo total de existencia de la señal o durante uno o algunos periodos seleccionados. En contraposición, la transformada ondicular, tiene la característica de efectuar la descomposición local tiempo-frecuencia y permite estimar las variaciones dependientes del tiempo de las frecuencias instantáneas contenidas en señales no estacionarias, señales que quedan expresadas como una combinación lineal de ondículas.

Para representar el comportamiento en frecuencia de una señal local en el tiempo, la señal deberá analizarse con funciones que estén localizadas tanto en el tiempo como en la frecuencia, que serán de soporte compacto tanto en el tiempo como en el dominio de las frecuencias. La localización tiempo-frecuencia está limitada por el principio de incertidumbre

de Heisenberg y por la condición de que señales de energía finita deberán ser de soporte compacto tanto en el dominio del tiempo como en el de las frecuencias.

## 2.1. Principio de incertidumbre de Heisenberg

Cualquier análisis aplicado a datos no estacionarios, requiere consideraciones relacionadas a la resolución en el tiempo y en la frecuencia. En forma intuitiva podemos establecer que una ventana de análisis pequeña es menos efectiva que una grande, ya que esta última separará en forma menos espaciada a la distribución de frecuencias. La estimación de las frecuencias que pueden ser resueltas en el registro de una serie de tiempo puede efectuarse considerando el principio de incertidumbre de Heisenberg.

La desviación estándar,  $\sigma_t$ , en el dominio del tiempo y la desviación estándar,  $\sigma_\omega$ , en el dominio de la frecuencia de cierta función del tiempo,  $f$ , definida en  $L^2$ , satisface la siguiente desigualdad (Landau and Lifschitz, 1977). Siendo  $L^2(R)$  el espacio de funciones integrables de energía finita

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{4\pi}$$

Donde,  $\sigma_t$ , es la incertidumbre en el tiempo y,  $\sigma_\omega$ , la incertidumbre simultánea en las frecuencias. Esta relación indica los límites entre la resolución en el dominio del tiempo  $t$  y en el dominio de las frecuencias  $\omega$ . El acoplamiento entre los dominios temporal y de frecuencias tiene como valor posible una magnitud inferior a  $(1/4\pi)$ . De la desigualdad se establece que es imposible definir  $t$  y  $\omega$  simultáneamente de una forma exacta sino únicamente con cierta incertidumbre. En el caso límite de una senoide,  $\sigma_\omega$  es nula en tanto que  $\sigma_t$  es infinita.

Todas las funciones, incluyendo las ventanas, obedecen el principio de incertidumbre, el cual en términos muy generales sostiene que una perfecta localización en el dominio del tiempo y en el dominio de las frecuencias son mutuamente excluyentes. La medida precisa del tiempo y de la frecuencia son fundamentalmente incompatibles, ya que la frecuencia físicamente no puede medirse instantáneamente.

Si una función del tiempo,  $g(t)$ , es no nula fuera de un pequeño intervalo de tiempo de longitud  $T$ , y su transformada de Fourier es de magnitud relativamente pequeña fuera de una banda de frecuencia de ancho  $\Omega$ , entonces una inecuación del tipo  $(\Omega T) \geq c$  deberá satisfacerse para alguna constante positiva  $c \approx 1$ . El valor preciso de  $c$  dependerá de cómo se hayan medido los anchos  $T$  y  $\Omega$  de la señal en el tiempo y en la frecuencia respectivamente.

Lo anteriormente expresado puede sintetizarse definiendo una función  $g(u)$  que deberá ser una función que se anula fuera del intervalo comprendido entre  $-T \leq u \leq 0$ , tal que  $g(u) \subset [-T, 0]$ . Deberá ser una función de peso, o una ventana, la cual se utilizará en la "localización" de cierta señal  $f(u)$  en el tiempo  $u$ .

Si además, siguiendo a Kaiser, 1992, suponemos que la función de peso o ventana  $g(u)$  está normalizada, esto es  $\|g(u)\| = 1$ , entonces se puede interpretar  $|g(t)|^2$  como la distribución en el tiempo de los pesos de la ventana y  $|g(\omega)|^2$  como la distribución de los pesos en el dominio de las frecuencias. Tendremos que  $|g(t)|^2 = |g(\omega)|^2 = 1$ .

Los 'centros de gravedad' de la ventana en el dominio del tiempo y en el de las frecuencias están dados, por

$$t_0 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt t |g(t)|^2 ,$$

y

$$\omega_0 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega |g(\omega)|^2 .$$

Una manera de definir  $T$  y  $\Omega$  es por medio de la desviación estándar  $\sigma_t$  y  $\sigma_\omega$  respectivamente, tendremos

$$\sigma_t^2 = T^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt (t - t_0)^2 |g(t)|^2 ,$$

y

$$\sigma_{\omega}^2 = \Omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\omega - \omega_0)^2 |g(\omega)|^2$$

Aplicando las dos últimas relaciones a una ventana del tipo gaussiana,  $g(t)$ , en la que se ha escogido una constante arbitraria,  $a$ , obtenemos:

$$g(t) \equiv (2a)^{1/4} e^{-\pi a t^2},$$

y

$$\hat{g}(\omega) \equiv \left(\frac{2}{a}\right)^{1/4} e^{-\pi \omega^2 / a}$$

teniéndose que  $\|g(t)\|^2 = 1$ , y finalmente

$$t_0 = \omega_0 = 0,$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{4\pi a}},$$

y

$$\Omega = \sqrt{\frac{a}{4\pi}}$$

Con estos resultados, podemos comprobar que  $4\pi \Omega T = 4\pi \sigma_t \sigma_{\omega} \geq 1$

### 2.1.2. Condición de soporte compacto.

Las ondículas son funciones oscilantes definidas en un rango finito de la variable independiente, esto es son de soporte compacto.

Si  $f$  es no nula en el caso de ser de soporte compacto, su transformada de Fourier no puede ser nula en todo el intervalo de frecuencias  $\omega$ . Similarmente si la transformada de Fourier es de soporte compacto, no tendrá valores nulos en el tiempo. Una ondícula puede pensarse como una ventana de ancho variable.

Dada la restricción de Heisenberg, es imposible tener funciones definidas en  $L^2$  que sean de soporte compacto tanto en el dominio del tiempo como en el dominio Fourier. No existe análisis de frecuencia instantánea para señales de energía finita. No existen funciones de energía finita las cuales sean de soporte compacto tanto en el dominio del tiempo como en el de las frecuencias.

### 3. ANÁLISIS DE FOURIER.

#### 3.1. Transformada de Fourier 'rápida' ventaneada

La transformada de Fourier de tiempos cortos (STFT), referida también como Transformada de Fourier ventaneada (WFT), fue introducida por Gabor (1946), analizando una señal con una ventana de Gauss modulada, intentando así, superar la indeterminación en el tiempo propia del análisis de Fourier convencional. El análisis de funciones o señales aplicando la transformada de Fourier no proporciona información temporal debido al soporte infinito en el dominio temporal de sus funciones base, por lo que únicamente características globales son adecuadamente representadas.

Una posible solución al problema de la indeterminación en el tiempo del análisis de Fourier, es analizar un segmento de la señal con la ayuda de una ventana. La transformada de Fourier de esta versión ventaneada de la señal proporciona predominantemente el contenido de frecuencias de la señal en el segmento de la función determinada por la localización de la ventana. La transformada de Fourier ventaneada corresponde a un compromiso entre la representación de una señal en el dominio del tiempo y en el dominio de las frecuencias, es una herramienta apropiada para el análisis de señales no estacionarias en contraposición de la transformada de Fourier convencional.

Siguiendo a Kaiser, 1992, la transformada de Fourier ventaneada (WFT) es una herramienta de análisis que permite extraer información local-frecuencia de una señal. La transformada de Fourier ventaneada se efectúa desplazando una ventana o función de peso de longitud  $T$  sobre una serie de tiempo de longitud temporal total  $(N\delta t)$  a sucesivos intervalos de tiempo  $\delta t$ . Por consiguiente, en cada posición de la ventana obtendremos información en el dominio de las frecuencias en el rango de frecuencias comprendido entre  $(T^{-1})$  y  $(2\delta t)^{-1}$  y se analizarán un número de frecuencias igual a  $(T/\delta t)$ . La ventana o función de peso, que aísla un segmento de la señal temporal de longitud  $(N\delta t)$  y muestreo  $\delta t$  en el tiempo, puede ser una función tal

como una ‘caja rectangular’ (sin alisamiento), o una ventanana de Gauss u otra (Hamming, Hanning, Blackman).

La transformada WFT aproximadamente localiza, al instante  $u$  y a la frecuencia lineal  $\omega$  una señal  $f(u)$  del tiempo  $u$ , aplicando una ventana  $g(u)$  que puede considerarse que inicialmente se desplaza en el tiempo  $g(u-t)$ , y posteriormente modulada  $g_{\omega,t}(u) = e^{+i2\pi\omega t} g(u-t)$ , se desplaza en la frecuencia.

El análisis de una señal temporal  $f(u)$ , en el marco de la transformada WFT (Kaiser, 1992), deberá proporcionar información respecto a la densidad espectral  $\hat{f}(\omega, t)$  de  $f(u)$  simultáneamente en el dominio de las frecuencias  $\omega$  y en el dominio del tiempo  $u$ . La función  $\hat{f}(\omega, t)$  dependerá tanto de la frecuencia  $\omega$  como del tiempo  $t$ . Para un valor determinado del tiempo  $t_0$ ,  $\hat{f}(\omega, t)$  representará el espectro de  $f(u)$  al instante  $t_0$ . Ya que por ser de naturaleza causal no puede analizarse la señal temporal  $f(u)$  antes de estar definida, los valores de  $f(u)$  que únicamente pueden ser considerados en la estimación de  $\hat{f}(\omega, t)$  serán aquellos que satisfacen la condición  $u \leq t$ . Además, existirá un intervalo de tiempo (memoria finita)  $T > 0$  tal que sólo los valores de  $f(u)$  cuando  $u \geq (t-T)$  influirán el cálculo de  $\hat{f}(\omega, t)$  para el tiempo  $t$ . Esto es,  $\hat{f}(\omega, t)$  únicamente dependerá de  $f(u)$  en el intervalo  $(t-T) \leq u \leq t$ . Por otra parte, los valores de  $f(u)$  cercanos a los límites de su intervalo de definición, esto es  $u \cong (t-T)$  y  $u \cong t$  tendrán mucho menor influencia en la estimación de  $\hat{f}(\omega, t)$  que los valores centrales de  $f(u)$  en el intervalo de definición  $(t-T) \leq u \leq t$ .

Lo anterior puede ser sintetizado definiendo una función de peso o ventana  $g(u)$  que se utilizará en la “localización” de la señal  $f(u)$  en el tiempo  $u$ . Esta función de peso o ventana  $g(u)$  deberá ser nula fuera del intervalo comprendido entre  $-T \leq u \leq 0$ , tal que  $g(u) \subset [-T, 0]$ . Para cada  $t \in R$ , definiremos

$$f_t(u) = g(u-t) f(u),$$

donde la función  $f_t(u)$  satisface  $f_t(u) \subset [(t-T), 0]$ . Puede pensarse que la función  $f_t(u)$  es una versión localizada de  $f(u)$  que depende de los valores de  $f(u)$  comprendidos en el intervalo  $(t-T) \leq u \leq t$ . Si  $g(u)$  es continua, los valores de  $f_t(u)$  próximos a  $u \cong (t-T)$  y  $u \cong t$  serán de magnitud relativa pequeña. Esto significa que la localización en tiempo lograda por  $f_t(u)$  es más bien alisada y no de variación abrupta en los límites de la ventana  $g(u)$ . Definimos la transformada de Fourier ventaneada (WFT) de  $f(u)$  como la transformada de Fourier de:

$$\hat{f}(\omega, t) \equiv \hat{f}_t(\omega) = \int du e^{-i2\pi\omega t} f_t(u),$$

y

$$\hat{f}(\omega, t) = \hat{f}_t(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-i2\pi\omega u} g(u-t) f(u).$$

Los valores de  $\hat{f}(\omega, t)$  dependen de los valores de la función  $f(u)$  en el intervalo  $(t-T) \leq u \leq t$  y si la función de peso  $g(u)$  es continua los pesos serán, como ya se mencionó, de magnitud relativamente pequeña al principio y final del intervalo  $(t-T) \leq u \leq t$ . Si definimos,

$$g_{\omega, t}(u) \equiv e^{+i2\pi\omega u} g(u-t),$$

tendremos que  $\|g_{\omega, t}\| = \|g(u)\|$  y que  $g_{\omega, t}(u)$  también pertenece a  $L^2(R)$ , y que la WFT puede ser expresada como el producto interior de  $f(u)$  con  $g_{\omega, t}(u)$ ,

$$\hat{f}(\omega, t) = \langle g_{\omega, t}, f \rangle.$$



Por lo que podemos interpretar a  $g_{\omega, t}(u)$  como una ‘nota musical’ que oscila como función del tiempo  $u$  a la frecuencia lineal de  $\omega$  respecto a la envolvente definida por  $|g(u-t)|$ .

La transformada ventaneada de Fourier es completamente simétrica en los dos dominios,

$$\hat{f}(\omega, t) = \langle g_{\omega, t}, f \rangle = \langle \hat{g}_{\omega, t}, \hat{f} \rangle$$

$$\hat{f}(\omega, t) = \langle \hat{g}_{\omega, t}, \hat{f} \rangle = e^{-2\pi i \omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{2\pi i v t} \bar{g}(v - \omega) \hat{f}(v),$$

siendo  $\bar{g}(v - \omega) \equiv \overline{g(v - \omega)}$ ,

$$\hat{f}(\omega, t) \equiv \hat{f}_t(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-2\pi i \omega u} g(u-t) f(u)$$

La variable del tiempo  $u$  se reemplaza por la variable de la frecuencia  $v$  y la ventana  $g(u-t)$  por la ventana en frecuencia  $\bar{g}(v - \omega)$ .

En el dominio de las frecuencias, el producto de la versión desplazada de la función ventanana,  $\bar{g}(v - \omega)$ ,  $g(v - \omega)$  con la función  $\hat{f}(v)$ , localiza a  $\hat{f}(v)$ , a la frecuencia  $\omega$ , esto es,  $\hat{f}_\omega(v) \equiv \bar{g}(v - \omega) \hat{f}(v)$ . Al evaluar la transformada inversa de Fourier, de  $\hat{f}_\omega(v) \equiv \bar{g}(v - \omega) \hat{f}(v)$ , el producto por el factor  $e^{-2\pi i \omega t}$ , nos indicará que la versión trasladada  $\bar{g}(v - \omega)$  de la ventana  $g(v)$  por  $\omega$ , está modulada en el dominio de las frecuencias.

Un ejemplo de la función de peso o ventana utilizada en la ‘localización’ de la función  $f(u)$  al instante  $u$  es,

$$g(u) = \begin{cases} (1 + \cos(\pi u)) & \text{para } -1 \leq u \leq +1 \\ 0 & \text{para } -1 > u > +1 \end{cases},$$

y cuya gráfica se muestra en la Figura 3.1.

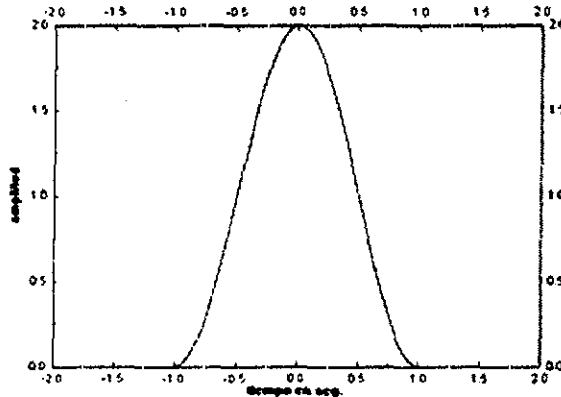


Figura 3.1: La función ventana o de peso  $g(u)$ .

$g(u)$  está centrada respecto a  $u = 0$  por lo que no es causal en tanto que  $g(u - (-1))$  si lo es.

### 3.1.1. Elección de la 'ventana' de Fourier.

Las propiedades de la densidad espectral de energía  $\hat{f}(\omega, t)^2 = |f_t(\omega)|^2$  de las versiones localizadas de  $f(u)$ ,  $f_t(u) = g(u-t)f(u)$ , queda completamente definida por la características de la ventana elegida  $g(u)$ , o más completa y precisamente por el espectro de Fourier  $\hat{g}(\omega)$  de la ventana o función de peso  $g(u)$ .

La transformada de Fourier ventaneada, reemplaza a la transformada de Fourier convencional, por el producto de una senoide  $e^{+i2\pi\omega t}$  y una ventana simétrica  $g(u)$  de energía finita localizada en el tiempo. Se puede considerar que la transformada de Fourier de las 'notas'  $g_{\omega, t}(u) = [e^{+i2\pi\omega t} g(u-t)]$ , es obtenidas por una traslación en el tiempo de la ventana  $g(u)$  simétrica de energía finita,  $g(u-t)$ , y una modulación en frecuencia  $e^{+i2\pi\omega t}$  de la ventana

original  $g(u-t)$ . Una 'nota'  $g_{\omega_0}(u)$  tiene la frecuencia central  $\omega_0$  y es simétrica con respecto al tiempo  $u_0$ ; su despliegue, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia es constante, como puede observarse en cada una de las figuras 3.9 a 3.15.

Las características del espectro  $\bar{g}(\omega)$  de la ventana o función de peso,  $g(u)$ , permiten definir en el dominio de las frecuencias, tres parámetros principales o característicos,  $\Delta\omega$ ,  $A$ , y  $p$ , (Chaplais, 1999; Blackman and Tukey, 1958). Parámetros, en base de los cuales se evalúa el comportamiento de una función  $g(u)$ . Los parámetros principales  $\Delta\omega$  y  $A$ , se ilustran en la Figura 3.2, donde podemos observar además, que el espectro de Fourier  $\bar{g}(\omega)$  de la ventana  $g(u)$  concentra su energía alrededor del valor 0.

1. El ancho de banda cuadrático medio,  $\Delta\omega$ , está definido, tal que se satisfaga la siguiente condición,

$$\frac{\bar{g}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}{\bar{g}(0)^2} = \frac{1}{2}$$

Si  $\Delta\omega$  es comparativamente pequeño, la energía de la ventana estará concentrada alrededor de 0.

2. La amplitud máxima,  $A$ , del primer lóbulo lateral,

$$A = 10 \log_{10} \frac{\bar{g}(\Omega)^2}{\bar{g}(0)^2},$$

donde  $A$  es la amplitud máxima perteneciente a su primer lóbulo y está dado en decibeles. Los lóbulos laterales crean 'sombras' a los lados de la frecuencia central, quedando determinada la transformada de Fourier de una ventana dada  $g(u)$  por la magnitud y distribución de los primeros lóbulos laterales.

3. El exponente del polinomio  $p$ , el cual describe el decaimiento de de la transformada de Fourier,  $\bar{g}(\omega)$ , de la ventana  $g(u)$ , a las altas frecuencias. Por otra parte aceptamos que el

exponente máximo del polinomio que describe el decaimiento de la ventana a altas frecuencias, obedece la siguiente relación:

$$\hat{g}(\omega) = O(\omega^{-p-1})$$

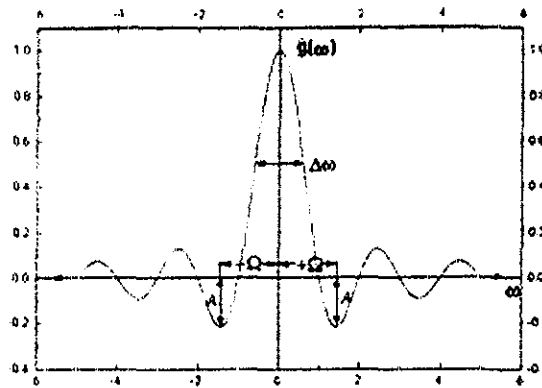


Figura 3.2: Densidad Espectral de energía de la ventana  $g(u)$ ,  $\hat{g}(\omega)$ , y parámetros característicos  $\Delta\omega$  y  $A$ .

A continuación, en la Tabla 3.1, presentamos los valores normalizados respecto a  $g(0)$  de los parámetros  $\Delta\omega$ ,  $A$ , y  $p$ , asociados a las ventanas clásicas, de los parámetros  $\Delta\omega$ ,  $A$ , y  $p$ .

Nombre	$g(u)$	$\Delta\omega$	$A$	$p$
Rectangular	1	0.89	-13 db	0
Hamming	$0.54 + 0.46 \cos(2\pi u)$	1.36	-43 db	0
Gausiana	$\exp(-18u^2)$	1.55	-55 db	0
Hanning	$\cos^2(\pi u)$	1.44	-32 db	2
Blackman	$0.42 + 0.5 \cos(2\pi u) + 0.08 \cos(4\pi u)$	1.68	-58 db	2

Tabla 3.1: Parámetros característicos asociados a algunas ventanas clásicas: Rectangular, Hamming, Gausiana, Hanning y Blackman.

Para ilustrar las características de la transformada de Fourier ventaneada nos referiremos a los resultados obtenidos al aplicarla a la denominada función o señal chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$ . Una señal chirp es una onda senosoidal en la cual la frecuencia se incrementa linealmente con el

tiempo. La frecuencia instantánea  $\omega_{inst}(u)$  de  $f(u) = \sin(\pi u^2)$ , puede definirse como la derivada de la fase:  $2\pi \omega_{inst}(u) = \partial_u(\pi u^2) = 2\pi u$ .

El análisis de Fourier convencional no manifiesta el hecho de que la función chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$ , tiene una frecuencia instantánea  $\omega_{inst}(u)$  muy bien definida con un espectro extendido en un amplio rango de frecuencias. La señal chirp es utilizada en algunos tipos de radar y como fuente sísmica (sweep signal) en el método sísmico *VIBROSEIS<sup>TM</sup>*. Método sísmico en el cual un vibrador es utilizado como fuente de energía para generar un tren de ondas controladas. Una vibración senosoidal con una frecuencia continuamente variable es aplicado durante un periodo típicamente de por lo menos de 7 segundos de duración (Crawford et al., 1960).

En la Figura 3.3 (parte superior) se muestra la gráfica de la función chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$  en el dominio  $0 \leq u \leq 30$  seg, a un intervalo de muestreo de 0.01 seg, en la cual la frecuencia se incrementa linealmente de 0 a 30 Hz y cuya frecuencia de Nyquist es de 50 Hz. La forma irregular de la envolvente de la señal muestreada se origina en la interferencia de la señal de entrada con la salida regular del convertidor analógico digital; el espectro de fase  $\phi(\omega)$  y la densidad espectral de energía (espectro)  $f^2(\omega)^2$  están dados en las partes intermedia e inferior. Como se observa, el espectro  $f^2(\omega)^2$  se despliega en un rango continuo de frecuencias.

A continuación, en una secuencia de ilustraciones referidas entre las Figuras 3.4 y 3.15, se ilustran los aspectos sobresalientes de la transformada de Fourier ventaneada lograda considerando como función de entrada la función chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$ , definida en el dominio  $0 \leq u \leq 10$  seg y su densidad espectral de energía  $|\hat{f}(\omega)|^2$  definida en  $0 \leq \omega \leq 10$  Hz. La señal  $f(u)$  característicamente varía continuamente con la frecuencia y en algunos casos la

<sup>TM</sup> Marca registrada Conoco, Inc

frecuencia varía en forma lineal con el tiempo. Cabe indicar que la función chirp  $f(u)$  característicamente tiene una frecuencia instantánea  $\omega_{inst}(u)$  definida como la derivada de su fase:  $2\pi\omega_{inst} = \partial_u(\pi u^2) = 2\pi u$ . El análisis de Fourier convencional no manifiesta que la función  $f(u)$  tiene una frecuencia instantánea  $\omega_{inst}(u)$  muy bien definida.

### 3.2. Propiedades y Espectrogramas.

La transformada WFT localiza una señal simultáneamente en el dominio del tiempo y en el de las frecuencias, por decirlo así, 'observando' la señal a través de una ventana que se desplaza inicialmente en el dominio del tiempo y posteriormente en el de las frecuencias (modulada en el tiempo). Las dos operaciones consecutivas de desplazamiento de la ventana en el tiempo y luego en la frecuencia originan las denominadas "notas"  $g_{\omega, t}(u)$ . La señal será reconstruida en el tiempo.

La señal será reconstruida como una superposición de tales "notas", con los coeficientes de WFT  $\hat{f}(\omega, t)$  como coeficientes que sintetizarán a la función temporal  $f(u)$ .

Consecuentemente, características de la señal  $f(u)$  relacionada a intervalos de tiempo  $\Delta t$  más pequeños que los valores de  $T$  ( $\Delta t < T$ ) no estarán adecuadamente localizadas en el tiempo y sólo podrá obtenerse esta localización como resultado de fenómenos de interferencia constructiva y destructiva entre las 'notas'  $g_{\omega, t}(u)$  por lo que deberemos considerar gran número de notas  $g_{\omega, t}(u)$  para estimar la densidad espectral  $\hat{f}(\omega, t)$  en el dominio de las frecuencias. Similarmente, cualquier característica de la señal a intervalos de tiempo mayores que  $T$  ( $\Delta t > T$ ) estarán redundantemente localizados en el tiempo  $t$  y se requerirá como en el caso anterior, de numerosas notas  $g_{\omega, t}(u)$  para la estimación de  $\hat{f}(\omega, t)$  y caracterización en el tiempo (Kaiser, 1994).

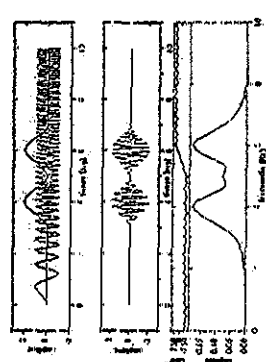


Figura 3.3

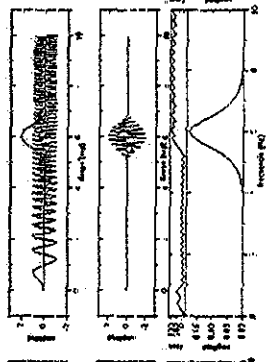


Figura 3.4

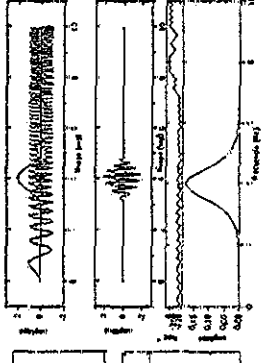


Figura 3.5

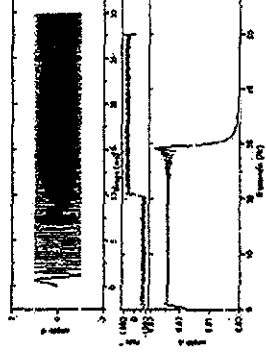


Figura 3.6

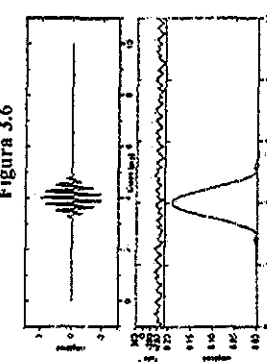


Figura 3.7

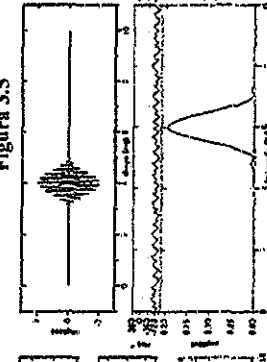


Figura 3.8

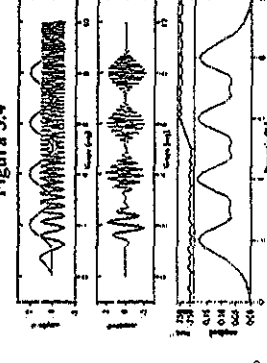


Figura 3.9

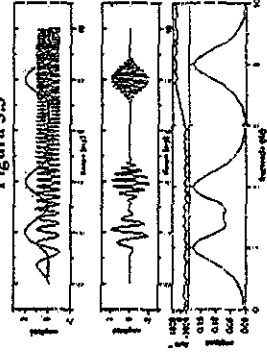


Figura 3.10

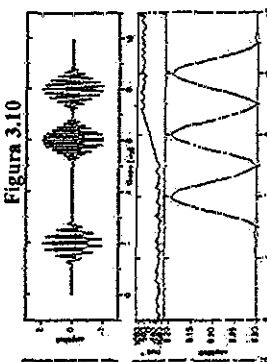


Figura 3.11

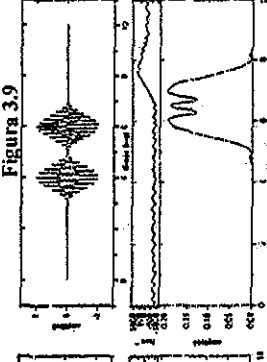


Figura 3.12

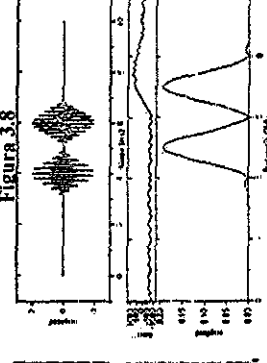


Figura 3.13

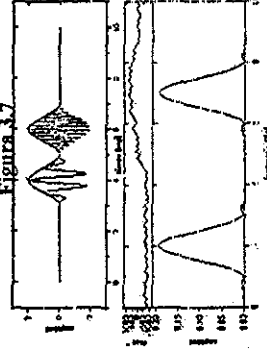


Figura 3.14



Figura 3.15

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

**Figura 3.3:** Función chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$ . La señal chirp es una señal o función senoidal con incremento lineal de frecuencia en función del tiempo.  $f(u)$  está definida en el dominio  $[0 \leq u \leq 30]$ , intervalo de muestreo  $\Delta t = 0.01$  seg, frecuencia de Nyquist 50 Hz e incremento lineal de frecuencia (30 Hz). La forma irregular de la envolvente es originada por el proceso de muestreo de la señal original continua senoidal de amplitud constante. La frecuencia instantánea  $\omega_{inst}$  de  $f(u)$  está muy bien definida respecto a un intervalo largo de tiempo, por lo que el espectro o densidad espectral de energía  $|\hat{f}(\omega, t)|^2$  de  $f(u) = \sin(\pi u^2)$  se extenderá en un amplio rango de frecuencias. Dada la variación lineal de la frecuencia con el tiempo, el espectro manifestará una amplia variación.

**Figura 3.4:** Versión localizada  $f_4(u) = [g(u-4)f(u)]$  de la función chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$  definida en el dominio  $[0 \leq u \leq 10]$ ; siendo la ventana o función de peso  $g(u) = [1 + \cos(\pi u)]$  definida en el dominio  $[-1 \leq u \leq +1]$ . Espectro o densidad espectral de energía  $|\hat{f}(\omega, t)|^2$  de  $f_4(u) = [g(u-4)f(u)]$ . La señal localizada  $f_4(u) = [g(u-4)f(u)]$  se encuentra adecuadamente definida a la frecuencia instantánea  $\omega_{inst}$  de 4 Hz.

**Figura 3.5:** Versión localizada de  $f_6(u) = [g(u-6)f(u)]$  de la función chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$  definida en el dominio  $[0 \leq u \leq 10]$ ; siendo la ventana o función de peso  $g(u) = [1 + \cos(\pi u)]$  definida en el dominio  $[-1 \leq u \leq +1]$ . Espectro o densidad espectral de energía  $|\hat{f}(\omega, t)|^2$  de  $f_6(u) = [g(u-6)f(u)]$ .

La señal localizada  $f_6(u) = [g(u-6)f(u)]$  se encuentra adecuadamente definida a la frecuencia instantánea  $\omega_{inst}$  de 6 Hz.



**Figura 3.6:** Versión localizada de  $f_4(u) + f_6(u) = g(u-4)f(u) + g(u-6)f(u)$  de la función chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$  definida en el dominio  $[0 \leq u \leq 10]$ ; siendo  $g(u) = [1 + \cos(\pi u)]$  definida en el dominio  $(-1 \leq u \leq +1)$ .

Espectro o densidad espectral de energía  $\hat{f}(\omega, t)^2$  de  $[f_4(u) + f_6(u)]$ . Las señales localizadas  $[f_4(u) + f_6(u)]$  están muy bien definidas a las frecuencias instantáneas  $\omega_{insf}$  de 4 y de 6 Hz, por lo que quedan localizadas tanto en el tiempo  $t$  como en la frecuencia lineal  $\omega$ .

**Figura 3.7:** Versión localizada,

$f_2(u) + f_4(u) + f_8(u) = [g(u-2)f(u) + g(u-4)f(u) + g(u-8)f(u)]$ , de la función chirp  $f(u) = \sin(\pi u^2)$  definida en el dominio  $[0 \leq u \leq 10]$ ; función de localización o ventana  $g(u) = [1 + \cos(\pi u)]$  definida en el dominio  $(-1 \leq u \leq +1)$ .

Densidad espectral de energía  $\hat{f}(\omega, t)^2$  de  $[f_2(u) + f_4(u) + f_8(u)]$ . Las señales localizadas  $[f_2(u) + f_4(u) + f_8(u)]$  están muy bien definidas respectivamente a las frecuencias instantáneas  $\omega_{insf}$  de 2, 4 y 8 Hz.

**Figura 3.8:** Versión localizada  $[f_2(u) + f_4(u) + f_6(u) + f_8(u)]$  de la función  $f(u) = \sin(\pi u^2)$  definida en el dominio  $[0 \leq u \leq 10]$ ; función de localización ventana o de peso  $g(u) = [1 + \cos(\pi u)]$  definida en el dominio  $(-1 \leq u \leq +1)$ .

$f_2(u) + f_4(u) + f_6(u) + f_8(u) = [g(u-2)f(u) + g(u-4)f(u) + g(u-6)f(u) + g(u-8)f(u)]$ ; Densidad espectral de energía  $[\hat{f}(\omega, t)]^2$  de  $[f_2(u) + f_4(u) + f_6(u) + f_8(u)]$ . Las señales localizadas están muy bien definidas a las frecuencias instantáneas  $\omega_{insf}$  de 2, 4, 6 y 8 Hz respectivamente.

**Figura 3.9:** Gráfica de  $g_{6,4}(u)$ .

$g_{6,4}(u) = REAL[e^{+2\pi(6)u}]g(u-4) = [\cos(2\pi(6)u)g(u-4)]$ ;  $g_{6,4}(u)$  oscila a la frecuencia  $\omega = 6$  Hz respecto a la envolvente  $g(u-4)$ . Densidad espectral de energía  $\hat{f}_4(\omega)^2 = \hat{f}(\omega, 4)^2$  de  $g_{6,4}(u)$ . Se aprecia claramente que el pulso queda resuelto a la frecuencia instantánea  $\omega_{inst}$  de 6 Hz.

**Figura 3.10:** Gráfica de  $g_{4,4}(u)$ .

$g_{4,4}(u) = REAL[e^{+2\pi(4)u}]g(u-4) = [\cos(2\pi(4)u)g(u-4)]$ .  $g_{4,4}(u)$  oscila a la frecuencia  $\omega = 4$  Hz respecto a la envolvente  $g(u-4)$ . Densidad espectral de energía  $\hat{f}_4(\omega)^2 = \hat{f}(\omega, 4)^2$  de  $g_{4,4}(u)$ , donde se aprecia que el pulso queda claramente resuelto a la frecuencia instantánea  $\omega_{inst}$  de 4 Hz.

**Figura 3.11:** Gráfica de  $g_{2,4}(u) + g_{7,6}(u)$ .

$g_{2,4}(u) + g_{7,6}(u) = REAL[e^{+2\pi(2)u}]g(u-4) + REAL[e^{+2\pi(7)u}]g(u-6) = [\cos(2\pi(2)u)g(u-4) + \cos(2\pi(7)u)g(u-6)]$ .  $g_{2,4}(u) + g_{7,6}(u)$  oscila a la frecuencia de  $\omega$  de 2 Hz respecto a la envolvente  $g(u-4)$  y a  $\omega$  de 7 Hz respecto a la envolvente  $g(u-6)$ . Densidad espectral de energía  $\hat{f}(\omega, t)^2$  de la nota  $g_{2,4}(u) + g_{7,6}(u)$ .

Densidad espectral de energía  $\hat{f}(\omega, t)^2$  donde se observa que claramente los pulsos quedan respectivamente resueltos a la frecuencias instantáneas  $\omega_{inst}$  de 2 y 7 Hz respectivamente a una resolución  $\Delta\omega \geq 2$  Hz.

**Figura 3.12:** Gráfica de  $g_{5,4}(u) + g_{7,6}(u)$ .

$g_{5,4}(u) + g_{7,6}(u) = REAL[e^{+2\pi(5)u}]g(u-4) + REAL[e^{+2\pi(7)u}]g(u-6) = [\cos(2\pi(5)u)g(u-4) + \cos(2\pi(7)u)g(u-6)] \cdot g_{5,4}(u) + g_{7,6}(u)$  oscila a la frecuencia  $\omega$  de 5 Hz respecto a la envolvente  $g(u-4)$  y de 7 Hz respecto a la envolvente  $g(u-6)$ . Densidad espectral de energía  $|\hat{f}(\omega, t)|^2$  de la nota compuesta  $g_{5,4}(u) + g_{7,6}(u)$ .

Densidad espectral de energía  $\hat{f}(\omega, t)^2$  en la que se observa que los pulsos claramente quedan resuelto a las frecuencias instantáneas  $\omega_{inst}$  de 2 y 7 Hz respectivamente a la resolución de  $\Delta\omega = 2$  Hz.

**Figura 3.13:** Gráfica de  $g_{6,4}(u) + g_{7,6}(u)$ .

$g_{6,4}(u) + g_{7,6}(u) = REAL[e^{+2\pi(6)u}]g(u-4) + REAL[e^{+2\pi(7)u}]g(u-6) = [\cos(2\pi(6)u)g(u-4) + \cos(2\pi(7)u)g(u-6)] \cdot g_{6,4}(u) + g_{7,6}(u)$  oscila a la frecuencia  $\omega$  de 6 Hz respecto a la envolvente  $g(u-4)$  y de 7 Hz respecto a la envolvente  $g(u-6)$ . Densidad espectral de energía  $|\hat{f}(\omega, t)|^2$  de la nota compuesta  $g_{6,4}(u) + g_{7,6}(u)$ . Se observa que definitivamente no se pueden definir los pulsos  $[g_{6,4}(u) + g_{7,6}(u)]$  dada la resolución de  $\Delta\omega = 1$  Hz.

**Figura 3.14:** Gráfica de  $g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{4,8}(u)$ .

$g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{6,8}(u) = REAL[e^{+2\pi(4)u}]g(u-2) + REAL[e^{+2\pi(6)u}]g(u-6) + REAL[e^{+2\pi(8)u}]g(u-8)$ .  
 $g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{6,8}(u) = [\cos(2\pi(4)u)g(u-2) + \cos(2\pi(6)u)g(u-6) + \cos(2\pi(8)u)g(u-8)] \cdot g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{6,8}(u)$  oscila a la frecuencia lineal  $\omega$  de 4 Hz respecto a la envolvente  $g(u-2)$ , a 8 Hz respecto a la envolvente  $g(u-6)$  y a 6 Hz respecto a la envolvente  $g(u-8)$ .

Densidad espectral de energía  $|\hat{f}(\omega, t)|^2$  de  $[g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{6,8}(u)]$  donde se aprecia que  $g_{4,2}(u)$ ,  $g_{8,6}(u)$  y  $g_{6,8}(u)$  quedan adecuadamente resueltos ya que la resolución relativa de los mismos es de  $\Delta\omega = 2$  Hz.

**Figura 3.15:** Gráfica de  $g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{5,8}(u)$ .

$$g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{5,8}(u) = \text{REAL}[e^{+2\pi(4)u}]g(u-2) + \text{REAL}[e^{+2\pi(8)u}]g(u-6) + \text{REAL}[e^{+2\pi(5)u}]g(u-8)].$$

$g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{5,8}(u) = [\cos(2\pi(4)u)g(u-2) + \cos(2\pi(8)u)g(u-6) + \cos(2\pi(5)u)g(u-8)] \cdot g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{5,8}(u)$  oscila a la frecuencia  $\omega$  de 4 Hz respecto a la envolvente  $g(u-2)$ , a 8 Hz respecto a la envolvente  $g(u-6)$  y a 5 Hz respecto a la envolvente  $g(u-8)$ .

Densidad espectral de energía  $|\hat{f}(\omega, t)|^2$  de  $[g_{4,2}(u) + g_{8,6}(u) + g_{5,8}(u)]$  en la que se aprecia que  $g_{4,2}(u)$  y  $g_{5,8}(u)$  no quedan resueltos adecuadamente ya que la resolución relativa de los mismos  $\Delta\omega = 1$  Hz, en tanto que  $g_{4,2}(u)$  o  $g_{5,8}(u)$  respecto a  $g_{8,6}(u)$  están perfectamente resueltos ya que la resolución relativa entre los mismos es  $\Delta\omega \geq 2$  Hz.

Esto hace de la WFT una herramienta relativamente ineficiente en el análisis de comportamientos temporales regulares cuya variación sea muy rápida o muy lenta con respecto a la longitud temporal  $T$  de la ventana.

La WFT es un método impreciso e ineficiente en la localización tiempo-frecuencia, ya que impone una escala  $T$  definitiva en el análisis de la función  $f(u)$  en el dominio de las frecuencias. La imprecisión surge del fenómeno de alías que se origina entre las componentes de altas ( $\Delta t < T$ ) y bajas frecuencias ( $\Delta t > T$ ) que no están comprendidas en el rango de frecuencias de la ventana ( $1/T$ ). La ineficiencia es debida al hecho de que para cada intervalo de desplazamiento de tiempo  $\delta t$  el número de frecuencias analizadas ( $T/2\delta t$ ) es independiente del tamaño de la ventana  $T$  y de la frecuencia dominante de la señal. Por otra parte, numerosos tamaños  $T$  de la ventana deberán usualmente analizarse para determinar la más apropiada. Cabe indicar también, que una escala de análisis predeterminado por la longitud de la ventana  $T$  no puede ser apropiado en el caso de contar con un amplio rango de frecuencia dominantes en la señal temporal  $f(u)$ . Un método de localización tiempo-frecuencia necesariamente deberá ser independiente de la escala, tal como el que surge al considerar la transformada o representación ondicular. La transformada de ondícula resuelve los inconvenientes o limitaciones anteriores reemplazando el proceso de modulación con el de escalamiento para efectuar la localización en el dominio de las frecuencias (Torrence, and Compo, 1998).

En el siguiente capítulo, capítulo 4, se desarrollará los aspectos básicos de la transformada o representación ondicular e ilustrará, en el plano tiempo-frecuencia (escala), la distribución de las bases asociadas con la transformada de Fourier ventaneada y ondicular; y para un análisis comparativo el análisis y síntesis Fourier y Ondicular de la función  $f(x) = x, 0 \leq x \leq 0.5; f(x) = (x-1), 0.5 \leq x \leq 1$ .

## 4. ANÁLISIS Y SÍNTESIS EN EL DOMINIO ONDICULAR.

### 4.1. Transformada Ondicular.

En la representación ondicular se selecciona una ondícula particular única y se utilizan las versiones escaladas y comprimidas de esta ondícula u ondita (ondelette). La ondícula es un señal transitoria, cuya amplitud decae rápidamente a las bajas frecuencias y que particularmente está adaptada para el análisis de funciones, señales u operadores que tengan grandes concentraciones de componentes de altas frecuencias superpuestas a componentes relativamente de bajas frecuencias.

La propiedad extraordinaria propia del análisis ondicular consiste en su capacidad de analizar partes diferentes de una señal a diferentes escalas. Una función o señal con oscilaciones rápidas o discontinuidades severas en regiones localizadas, puede ser eficientemente aproximada por una combinación lineal que considere un número limitado de ondículas. Esta propiedad de las ondículas ha permitido aplicaciones comparativamente bien logradas dentro del campo del procesamiento de señales e imágenes. Comparativamente, el desarrollo de Fourier requeriría un número considerable de funciones bases para aproximar adecuadamente tal función o señal.

Un desarrollo ondicular en particular pertenece a una familia de transformaciones con propiedades matemáticas determinadas. En el dominio ondicular, las señales, funciones, operadores e imágenes, son sintetizados por ondículas de diferentes escalas y traslaciones. Las bases ondiculares se diseñan de tal manera que están localizadas tanto en el tiempo (espacio) como en el dominio de la frecuencia (número de onda).

Las ondículas son de soporte compacto cuando únicamente están definidas en un dominio corto y limitado. Si el soporte es infinito, la transformada correspondiente que se le asocie,

comprenderá un número infinito de términos. Un ejemplo familiar de funciones bases de soporte extendido está relacionada a la transformada de Fourier y que son del tipo  $e^{ikx}$ .

La transformada ondicular subdivide el plano tiempo-frecuencia en regiones de ancho variable en el dominio del tiempo y el de frecuencias (Figura 4.17), característica que hace que la transformada ondicular esté adaptada para el estudio de datos con variaciones locales severas. De una manera general la transformada ondicular analiza o representa una señal por medio de ventanas de diferentes duraciones y escala.

De una forma general, una transformación ondicular completa y ortogonal  $h_{a,b}(x)$ , está conformada por una serie de funciones obtenidas de una función generatriz única,  $h_0(x)$ ,

$$h_{a,b}(x) = \sqrt{|a|} h_0\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Los parámetros  $a$  y  $b$  representan los índices relacionados respectivamente a las dilataciones y traslaciones de la función generatriz  $h_0(x)$ .

Considerando cierta función integrable  $f(x)$ ;  $h_{a,b}(x)$  permite obtener las amplitudes  $c_{a,b}$  de  $f(x)$ :

$$c_{a,b} = \int dx f(x) h_{a,b}(x).$$

En particular, se elige como expresión de  $h_{a,b}(x)$  asociada a la escala  $j$  y a la traslación  $k$ , a

$$h_{j,k}(x) = 2^{-j} h_0(2^j x - k),$$

con dominio de definición  $[k 2^{-j}, (k+1) 2^{-j}]$  para cada una de funciones anteriores.

La función  $h_{j,k}(x)$  conforma una base ortonormal para la descomposición de  $f(x)$ , la que satisfecerá,

$$\langle h_{j,k}(x) | h_{l,m}(x) \rangle = \int h_{j,k}(x) h_{l,m}(x) dx = \delta_{j,l} \delta_{k,m} ,$$

Donde  $j$  y  $k$  son parámetros arbitrarios que se relacionan respectivamente a las dilataciones y traslaciones que experimentará la función generatriz original  $h_0(x)$ . Un cambio en el índice  $k$ , desplaza el centro de la función generatriz original  $h_0(x)$  en múltiplos de la longitud fundamental de escala  $j$ . Correspondientemente la densidad espectral estará distribuida en un plano cuyas coordenadas son el índice de escalamiento  $j$  (stretching) y  $k$  índice de traslación (shift).

En la Figura 4.1 se ilustran las características de una ondícula, cuya forma queda determinada por los parámetros de escalamiento  $j$  y de desplazamiento  $k$ . En general las oscilaciones de  $h_{j,k}(x)$  son de magnitud comparativamente pequeñas, si  $j < 1$  o de magnitud considerable, en el caso de que  $j > 1$ . Así tenemos ondículas en rangos de bajas a altas frecuencias respectivamente (*índice j*). Las ondículas son trasladadas o desplazadas proporcionalmente a su duración (*índice k*).

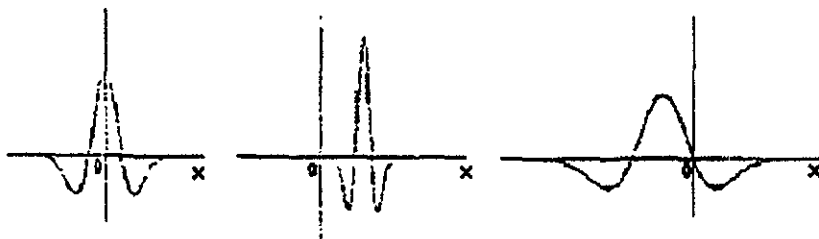


Figura 4.1: Ondícula a distintos desplazamientos y escalamientos.



## 4.2. Ondícula de Haar.

A continuación, siguiendo a Daubechies, 1988, presentamos los aspectos relevantes del conjunto de bases de Haar. La familia de ondículas, ortogonales, completas y simétricas respecto al origen está constituido por las ondículas de Haar, que están definidas por:

$$h_0(x) = \begin{cases} +1 & x \in [0, 1/2) \\ -1 & x \in [1/2, 1) \\ 0 & x \notin [0, 1) \end{cases}$$

y que queda ilustrada en la Figura 4.2.

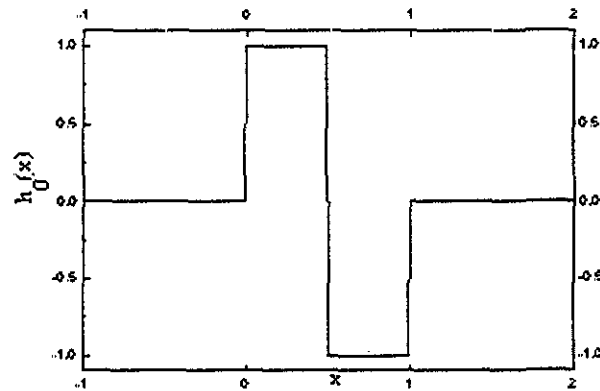


Figura 4.2: Ondícula de Haar (ondícula madre):  $h_0(x)$

Las bases  $[h_0(x); h_{1,0}(x); h_{1,1}(x)]$  se generan a partir de un pulso cuadrado simple definido en el intervalo  $[0, 1)$ ; el fundamento de las bases  $[h_0(x); h_{1,0}(x); h_{1,1}(x)]$  descansa en el pulso unitario  $h_{-1}(x)$ . Una base ondicular de este tipo se denomina función de escalamiento (ondícula padre). Las ondículas  $h_{1,0}(x)$  y  $h_{1,1}(x)$  representan todas las traslaciones ortogonales posibles de las compresiones de la ondícula  $h_0(x)$  (ondícula madre). La representación de  $h_{-1}(x)$  se da en la Figura 4.3 y las de las bases  $[h_{1,0}(x); h_{1,1}(x)]$  en la Figura 4.4.

Una función continua  $f(x)$ , en el dominio de definición, quedará sintetizada por la serie,

$$f(x) = \langle fh_{-1} \rangle_{h_{-1}} + \langle fh_0 \rangle_{h_0} + \langle fh_{0,1} \rangle_{h_{0,1}} + \langle fh_{1,0} \rangle_{h_{1,0}} + \dots$$

$$f(x) = a_{-1}h_{-1} + a_0h_0 + \sum_{j,k} a_{2^j+k-1}h_{j,k}(x)$$

serie que converge uniformemente a  $f(x)$  en el intervalo  $[0,1)$ , donde los coeficientes  $(a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$  son generados por la ondícula  $h_0(x)$ . Por lo tanto,  $f(x)$ , puede ser aproximada con un grado de precisión arbitraria por una combinación lineal finita de ondículas de Haar. En este argumento reside implícitamente el concepto de multiresolución (Daubechies, 1993).

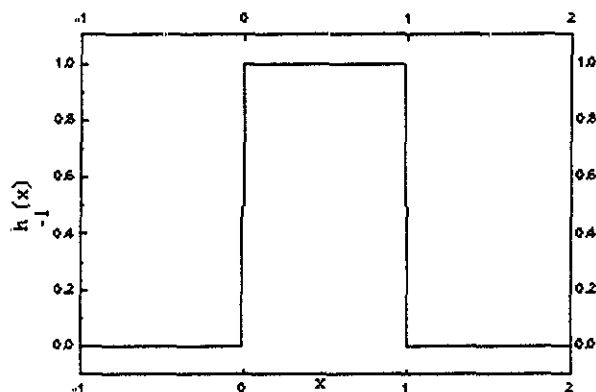


Figura 4.3: Función de escalamiento de Haar (ondícula padre),  $h_{-1}(x)$ .

$$h_{-1}(x) = \begin{cases} +1 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \notin [0, 1) \end{cases}$$

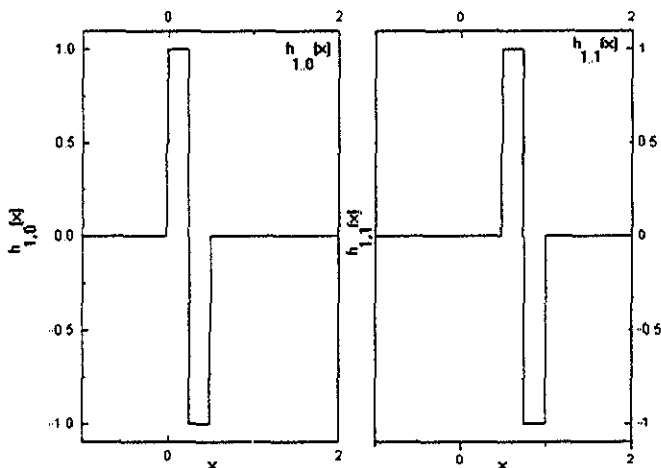


Figura 4.4: Ondículas  $[h_{1,0}(x) + h_{1,1}(x)]$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Una representación ondicular en general, y en particular con ondículas de Haar, es posible porque la función de escalamiento al nivel de resolución  $k$  es siempre una combinación lineal de una función de escalamiento y una ondícula a un nivel de resolución  $(k - 1)$  (Figuras 4.5 y 4.6)

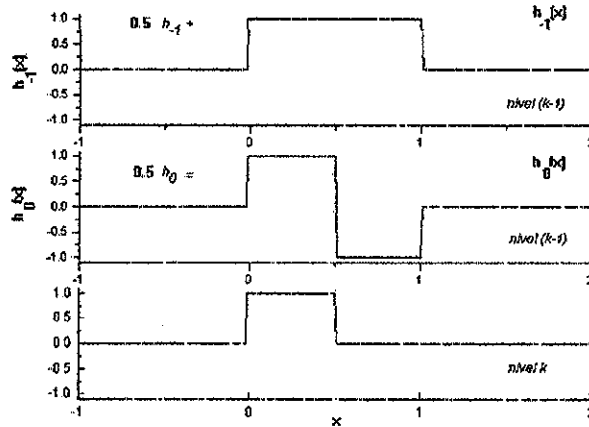


Figura 4.5: Combinación lineal de funciones de escalamiento:  $h_{1,0} = h_{-1} + h_0$ . La función de escalamiento  $h_{1,0}$  al nivel de resolución  $k$  es siempre una combinación lineal de una función de escalamiento  $h_{-1}$  y una ondícula  $h_0$  de un nivel de resolución  $(k - 1)$ .

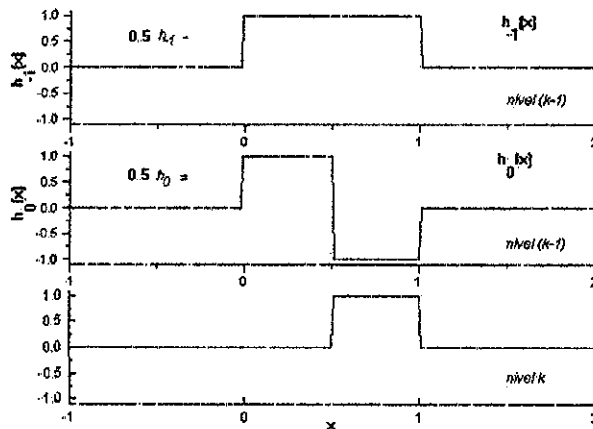


Figura 4.6: Combinación lineal de funciones de escalamiento:  $h_{1,0} = h_{-1} - h_0$ . La función de escalamiento  $h_{1,0}$  al nivel de resolución  $k$  es siempre una combinación lineal de una función de escalamiento  $h_{-1}$  y una ondícula  $h_0$  de un nivel de resolución  $(k - 1)$

#### 4.2.1. Plano tiempo-frecuencia.

Reformulando la expresión  $h_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} h_0(2^j x - k)$  y expresandola en la forma,  $h_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} h_0[2^j(x - \frac{k}{2^j})]$ , podemos deducir que el intervalo de traslación es  $(\frac{k}{2^j})$ . Esto permite afirmar por ejemplo, que cuando la escala (frecuencia) se duplica, el intervalo de traslación entre ondículas se reduce a la mitad. A grandes valores de  $j(j \gg 1)$  se asocia un escalamiento elevado, pequeños intervalos y altas frecuencias; a pequeños valores de  $j(j \ll 1)$ , el escalamiento es reducido, los intervalos grandes y bajas las frecuencias.

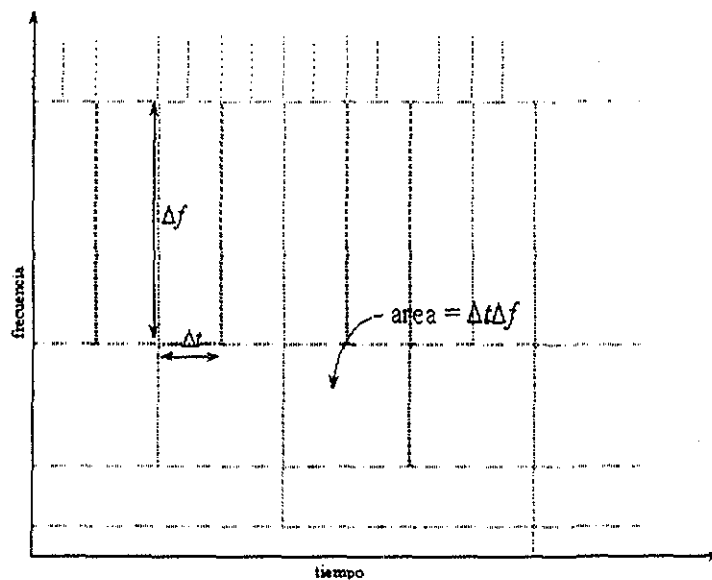


Figura 4.7: Característica del plano tiempo-frecuencia.

En la Figura 4.7 se ilustra esquemáticamente el denominado plano tiempo- frecuencia (tiempo-escala).

#### 4.3. Ondícula de Daubechies.

Como ya se mencionó, una función base senosoidal está completamente localizada en el dominio de las frecuencia no así en sus coordenadas temporales (espaciales) que son de

naturaleza global. Situación que en general impone una restricción severa al análisis de Fourier cuando éste se relaciona a señales de soporte compacto o transitorios. Una base ondicular sin embargo, aproximadamente se localiza tanto en el dominio de la frecuencia como en el espacial. Además de esta característica de las variables conjugadas tiempo-frecuencia, todas las funciones base son mutuamente ortogonales y normalizadas. En la formulación de Daubechies, todas éstas propiedades son determinadas a través de un proceso recursivo. La función de escalamiento y la función ondícula o simplemente ondícula están definidas recursivamente por la utilización de la denominada ecuación de dilatación (Daubechies, 1989).

En general una familia de ondículas puede ser completa o incompleta. Las ondículas de Daubechies son de soporte compacto, ortogonales, completas y asimétricas.

La ecuación de dilatación de escalamiento 2, es

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \phi(2x - 1),$$

donde  $\phi(x)$  es conocida como función de escalamiento (ondícula padre), a partir de la cual se construye la base ondicular, en forma similar como a partir de  $h_{-1}(x)$  se construye la base de Haar,  $N$  representa el orden del sistema y  $c_k$  son los coeficientes del filtro. La base Daubechies de orden  $N$  usualmente es denotada por  $DN$ . La función de escalamiento está normalizada, de manera que se satisface  $\int \phi(x) dx = 1$ .

Las ondículas Daubechies están localizadas en el dominio temporal y aproximadamente en el dominio de la frecuencia. La ondícula  $\varphi(x)$  (ondícula madre) está definida en términos de la función de escalamiento  $\phi(x)$ ; y la expresión que relaciona la ondícula  $\varphi(x)$  con la función de escalamiento  $\phi(x)$ , es

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k c_{N-1-k} \phi(2x - k).$$

A continuación, en cada una de las figuras 4.8 y 4.9 para sistemas de orden  $N=4$  y  $N=16$  se ilustra la función de escalamiento  $\phi(x)$  y ondícula Daubechies asociada  $\psi(x)$ ,  $D4$  y  $D20$  respectivamente, y en la Figura 4.10 la transformada de Fourier de la función de escalamiento  $\phi(x)$  correspondiente a  $D4$  y  $D20$  respectivamente.

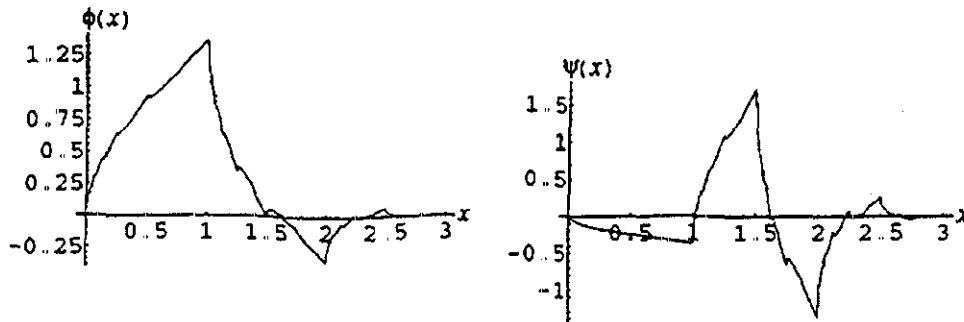


Figura 4.8: Función de escalamiento (ondícula padre)  $\phi(x)$  y ondícula (ondícula madre)  $\psi(x)$  de la base Daubechies de cuarto orden,  $D4$ .

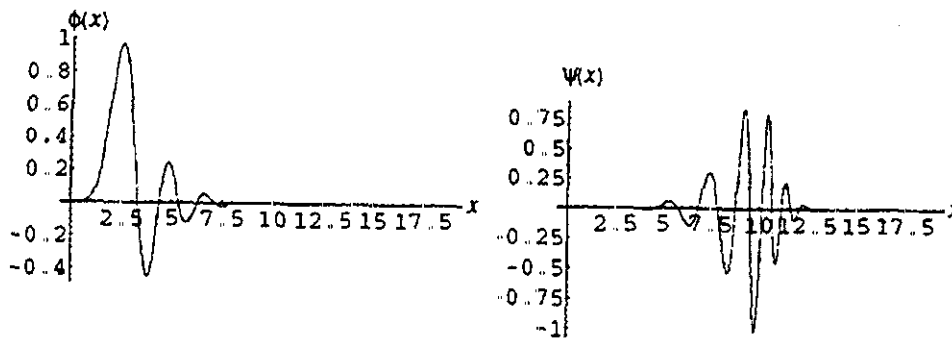


Figura 4.9: Función de escalamiento (ondícula padre)  $\phi(x)$  y ondícula (ondícula madre)  $\psi(x)$  de la base Daubechies de vigésimo orden,  $D20$ .

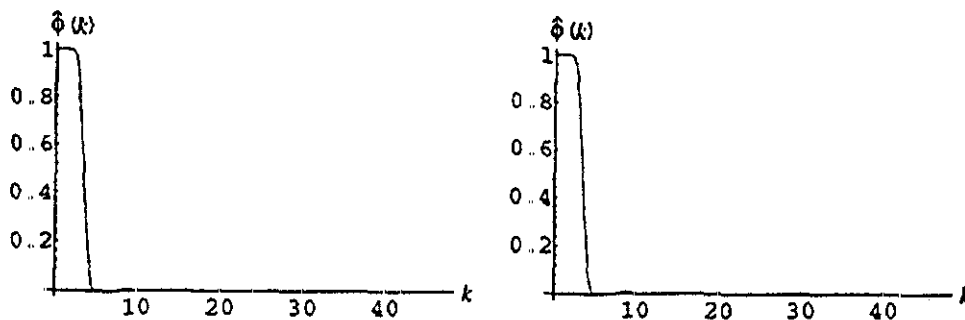


Figura 4.10: Espectro de Fourier de las bases ondulares de Daubechies de cuarto orden  $D4$  y vigésimo orden  $D20$  respectivamente.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

#### 4.4. Algoritmo de cálculo.

El algoritmo para el cálculo numérico de la transformada discreta ondicular es muy similar al algoritmo de la transformada rápida de Fourier. Puede representarse como una permutación de los elementos del vector de datos por una operación matricial (Press, et. al, 1991). Cuando este proceso es efectuado, obtenemos la correspondiente transformada. La FFT elimina la redundancia que existe entre las transformada discreta de Fourier. En tanto que la TDF de longitud  $N$  requiere  $N^2$  multiplicaciones y adiciones, la FFT únicamente requiere  $N \log_2 N$ . Las transformada ondicular rápida es mucho más eficiente que la FFT ( $N$  potencia entera de 2). Una transformada ondicular rápida de longitud  $N$ , requiere aproximadamente  $N$  operaciones.

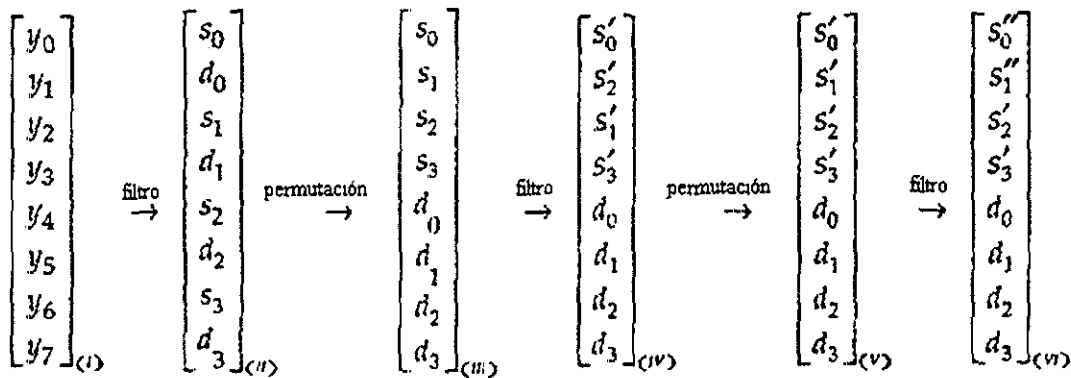


Figura 4.11: Representación esquemática del algoritmo de cálculo de la Transformada Ondicular Rápida. La operación consiste en la aplicación en forma recursiva de un filtro seguido de una permutación.

En la Figura 4.11 se incluye una representación esquemática del algoritmo de cálculo de la transformada discreta ondicular. Las operaciones necesarias consisten de aplicaciones recursivas de filtros de los denominados de cuadratura especular (Quadrature mirror filter QMF), seguido por una permutación. Figura en la cual la columna (6) corresponde a los coeficientes  $(a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$  del análisis ondicular (Press et al., 1991; Cody, 1992).

#### 4.5. Análisis de multiresolución.

Como se mencionó el análisis ondicular es una disciplina matemática relativamente reciente que en la década pasada ha generado considerable interés tanto en matemáticas puras como aplicadas. La propiedad extraordinaria propia del análisis ondicular consiste en su capacidad de analizar partes diferentes de una señal a diferentes escalas. Una función o señal con oscilaciones rápidas o discontinuidades severas en regiones localizadas, puede ser eficientemente aproximadas por una combinación lineal que considere un número limitado de ondículas. Comparativamente, el desarrollo de Fourier requerirá un número considerable de funciones bases para aproximar adecuadamente tal función o señal. Esta propiedad de las ondículas ha permitido aplicaciones comparativamente bien logradas dentro del campo del procesamiento de señales e imágenes. El primer paso en la representación ondicular consiste en la selección de una ondícula única y utilización de sus versiones escaladas y desplazadas. A continuación las señales e imágenes son sintetizadas por ondículas a escalas y traslaciones diferentes.

La implantación numérica de la transformada ondicular, se denomina esquema de descomposición de multiresolución. Por definición la señal o imagen original tiene una resolución 1, los detalles a resoluciones consecutivas de más alta resolución pueden obtenerse de manera interactiva. La reconstrucción de la señal original es efectuada por el proceso inverso denominado reconstrucción de multiresolución.

Las técnicas de multiresolución han sido desarrolladas durante los años recientes. Técnicas que conforman una poderosa herramienta de representación de datos. Por medio de éstas técnicas una imagen puede ser descompuesta en un conjunto de imágenes (o escalas), cada una de las cuales contendrá únicamente estructuras de un tamaño determinado. La calidad de los resultados obtenidos por los métodos propios del análisis de multiresolución es consecuencia de que permite un mejor entendimiento de la forma como la información se distribuye en una imagen y como el ruido de una señal o imagen puede ser adecuadamente atenuado.



En relación al marco general anterior presentaremos algunos aspectos del análisis multiresolutivo aplicado a datos sísmicos de reflexión tanto antes de apilar como después de apilar. Previamente se presentan en forma directa y esquemática algunos de los conceptos asociados a la transformada ondicular y al análisis de multiresolución; y se presentan los resultados obtenidos en las aplicaciones.

El análisis de multiresolución (MRA) proporciona el marco natural para la teoría ondicular. Es una construcción matemática que caracteriza a las ondículas de una manera general. El análisis multiresolutivo permite compenetrarse en los fundamentos de la teoría ondicular así como de sus algoritmos importantes. Sintetiza la señal original por adición sucesiva de detalles, esto es, por sucesivos refinamientos.

El espacio de funciones básico apropiado para el análisis matemático de señales es el espacio de funciones cuadrado integrables complejo valuadas en la línea de números reales  $R$ ,  $L^2(R)$ . En este espacio se define un producto interno el cual lo convierte en un espacio de Hilbert. Dada las funciones  $f$  y  $g$  en  $L^2(R)$ , el producto interno está definido como,  $(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} dx$ ; donde  $\overline{g(x)}$  es el complejo conjugado de  $g(x)$ . Algunas veces se usa el termino 'señal de energía finita' para cualquier elemento de  $L^2(R)$ , y más generalmente, se utiliza la palabra energía para denotar el cuadrado de la norma de tales funciones en  $L^2$ .

El aspecto básico del MRA es el de poder expresar una función o señal arbitraria a varios niveles de detalle. Puede el MRA fundamentarse por una serie de axiomas, siendo uno de los importantes,  $\{0\} \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset \dots \subset L^2(R)$ . Axioma que introduce una secuencia de espacios de aproximación anidados  $V_j$  en  $L^2(R)$ , tal que la unión y la intesección de los espacios anidados  $V_j$  es igual a  $L^2(R)$  y  $\{0\}$  respectivamente. Las proyecciones de una función  $f \in L^2(R)$  sobre  $V_j$  son aproximaciones de la función  $f$  que convergen a  $f$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .

El espacio  $V_0$  tiene una base ortogonal consistente de una translación entera de una cierta función  $\phi$  (función escala o ondícula padre). Finalmente, el espacio está relacionado por el requerimiento que una función  $f$  se mueve de  $V_j$  a  $V_{j-1}$  cuando se re-escala por un factor de 2.

Dado el conjunto de subespacios anidados que satisfacen  $\{0\} \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$ , se define  $W_j$ , que deberá ser el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ , esto es  $V_j \perp W_j$  y  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ . Denotando  $\oplus$  suma directa.

Considerando ahora dos espacios  $V_{j_0}$  y  $V_j$ , donde  $j > j_0$ , y aplicando  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$  en forma recursiva, obtenemos,

$$V_j = V_{j_0} \oplus \left( \bigoplus_{j=j_0}^{j-\infty} W_j \right)$$

De modo que una función  $f$  cualquiera, puede ser expresada en el espacio  $V_j$ , como una combinación lineal de funciones en  $V_{j_0}$  y  $W_j$ ;  $j_0, j_0 + 1, \dots, j-1$ , por lo que puede analizarse separadamente a diferentes escalas. El análisis de multiresolución tiene este nombre precisamente por esta característica de separación de escalas.

En el límite,  $V_j = V_{j_0} \oplus \left( \bigoplus_{j=j_0}^{j-\infty} W_j \right)$  cuando  $j_0 \rightarrow -\infty$  y  $j_0 \rightarrow +\infty$  se obtiene,  $\left( \bigoplus_{j=-\infty}^{j=+\infty} W_j \right) = L^2(\mathbb{R})$ , en tanto que  $W_j$  sean mutuamente ortogonales.

Los conceptos del MRA fueron iniciados por Meyer (1992) y Mallat (1989) y proporcionan el marco natural para el entendimiento de las bases ondiculares. Información completa y sistemáticamente desarrollada sobre bases ondiculares de soporte compacto y ortogonales podrá encontrarse en Daubechies (1990), Jawerth and Sweldens (1994) y Keyser (1994).

En la Figura 4.12 se ilustra esquemáticamente el análisis de multiresolución.

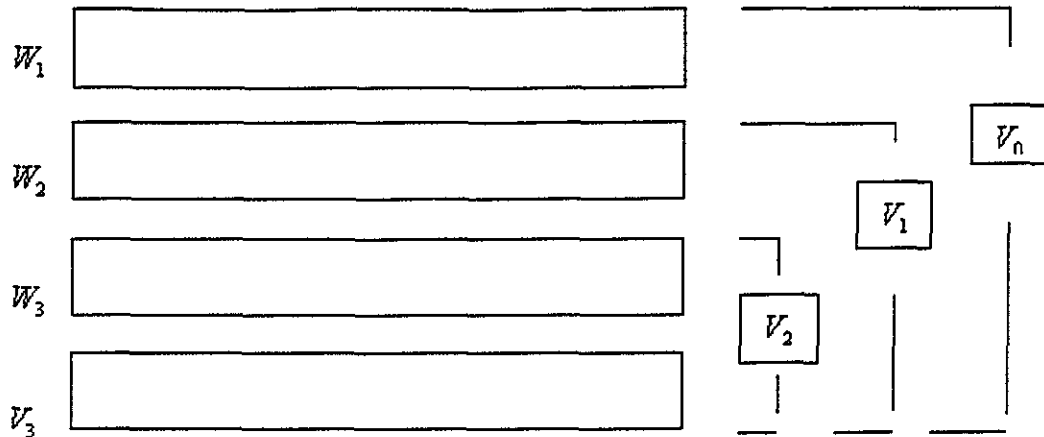


Figura 4.12: Análisis de multiresolución: Secuencia de subespacios  $V_j$ . Los subespacios  $W_j$  corresponde al complemento ortogonal de  $V_j$ .  $W_j$  es el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j-1}$ . El subespacio  $V_0$  es el de mayor resolución o resolución más fina de los datos, y  $V_0 = V_3 \oplus W_3 \oplus W_2 \oplus W_1$ .

En la Figura 4:13 se ilustra la descomposición de la función chirp  $f(x) = \sin(\pi x^2)$  a siete niveles de resolución .

Entre los hechos importantes relacionados a la aproximación ondicular, citaremos: La alta resolución de discontinuidades, como una consecuencia del hecho de que los coeficientes ondiculares de mayor magnitud ocurren a las escalas más finas. El contenido local de altas frecuencias en las discontinuidades se representan en forma más eficiente que con el desarrollo de Fourier.

El hecho de que los errores se presenten en las vecindades de las discontinuidades es consecuencia de las características de “localización” de las ondículas. El comportamiento local de una función dada afectará únicamente la magnitud de las ondículas cercanas a la localización. En las Figuras 4.14, 4.15 y 4.16 ilustramos estas características del análisis de multiresolución.

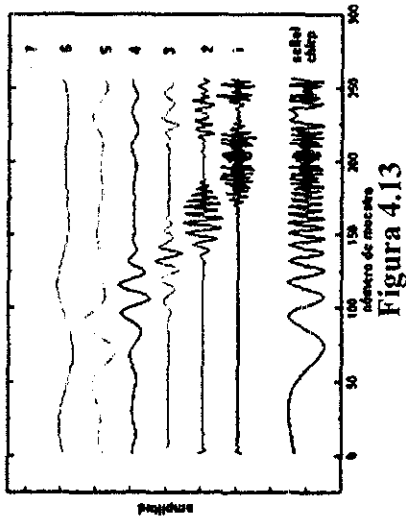


Figura 4.13

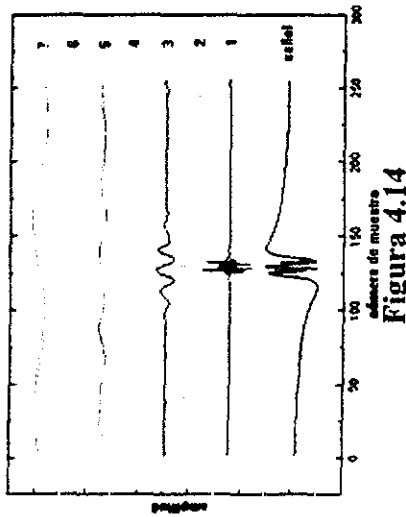


Figura 4.14

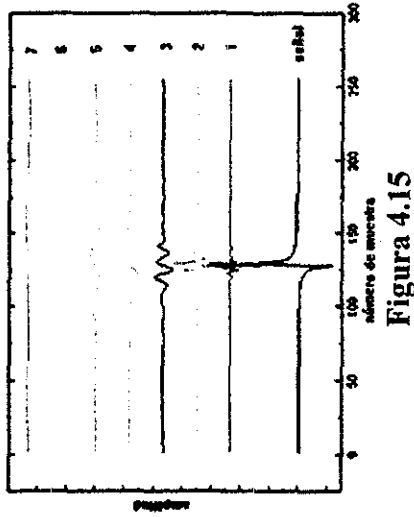


Figura 4.15

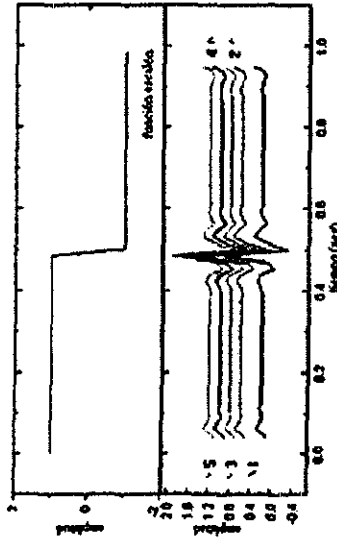


Figura 4.16

Figura 4.13: Función chip  $f(x) = \sin(\pi x^2)$  descompuesta en siete niveles de resolución.  
 Figura 4.14: Función típicamente discontinua descompuesta en siete niveles de resolución.  
 Figura 4.25: Función típicamente discontinua descompuesta en siete niveles de resolución.  
 Figura 4.26: Función escalón descompuesta en cinco niveles de resolución.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Las ilustraciones que se incluyen a continuación, nos permiten observar en el plano tiempo-frecuencia, la distribución de bases, relacionadas a la trasformada de Fourier ventaneada y ondicular respectivamente (Figura 4.17), como también, comparar de una manera objetiva las características de síntesis y análisis de Fourier (Figuras 4.19 y 4.20) y ondicular (Figuras 4.21 y 4.22) respectivamente, aplicados a la función  $f(x) = x, 0 \leq x \leq 0.5; f(x) = (x-1), 0.5 \leq x \leq 1$ , ilustrada en la Figura 4.18.

En la Figura 4.16 ilustramos la representación esquemática en el plano tiempo-frecuencia de las funciones bases asociadas a la trasformada de Fourier ventaneada y las asociadas a la transformada de ondícula.

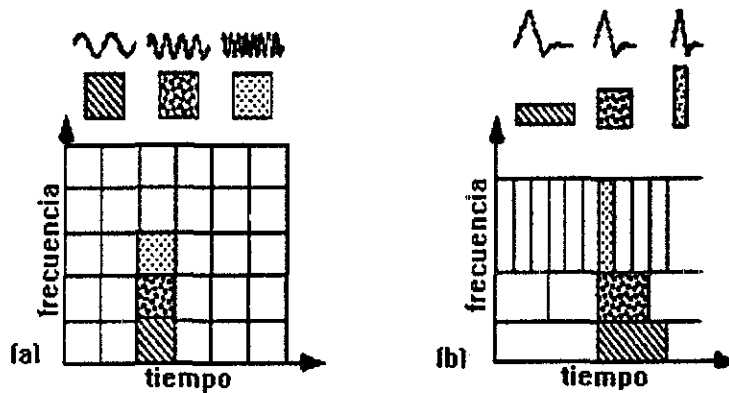


Figura: 4.17 Funciones bases asociadas a (a) la STFT (Trasnsformada de Fourier ventaneada) y a (b) la WFT (Transformada de Ondícula).

En la Figura 4.18 se ilustra la gráfica de la función definida como:  $f(x) = x, 0 \leq x \leq 0.5; f(x) = (x-1), 0.5 \leq x \leq 1$ ; en la Figura 4.19 la función  $f(x)$  y la síntesis de Fourier truncada hasta el término 17; en la Figura 4.20 la gráfica de la distribución de coeficientes obtenidos del análisis Fourier de la función  $f(x)$ ; similarmente la Figura 4.21 presenta la síntesis ondicular de la función  $f(x)$  considerando 17 coeficientes obtenidos mediante el análisis ondicular y finalmente la Figura 4.22 la distribución de coeficientes

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

ondiculares  $f(x)$ . Cabe indicar la casi total aproximación entre la función original de la función original  $f(x)$  respecto a la síntesis ondicular en contraposición a la síntesis de Fourier.

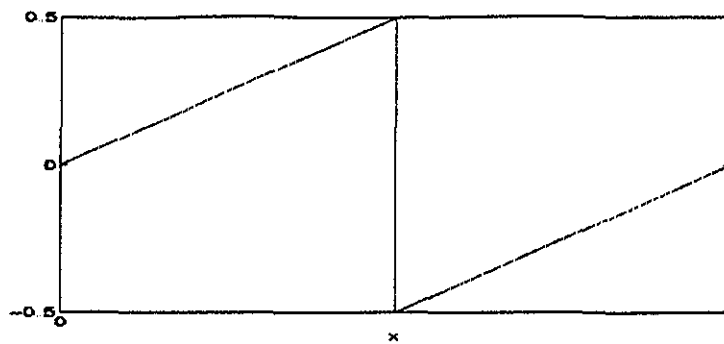


Figura 4.18: Función  $f(x)$ .

$$\{f(x) = x, 0 \leq x < 0.5; f(x) = (x-1), 0.5 \leq x < 1\}$$

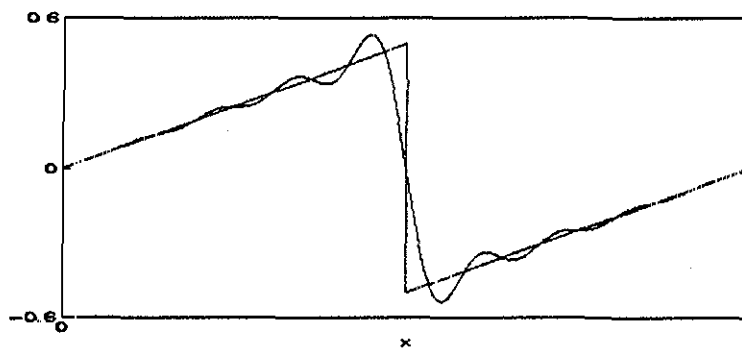


Figura 4.19: Función  $f(x)$  y síntesis de Fourier truncada hasta el término 17.

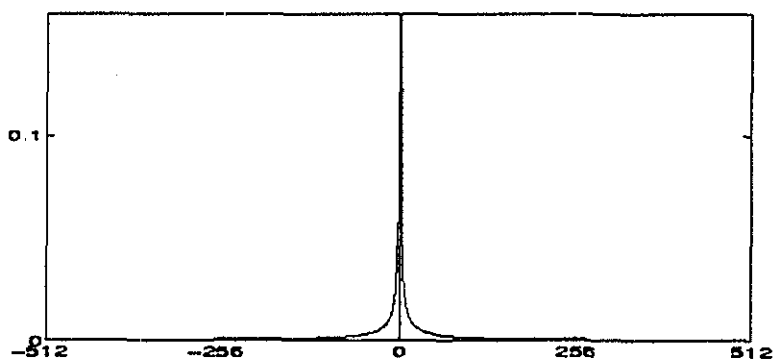


Figura 4.20: Distribución de coeficientes de Fourier.

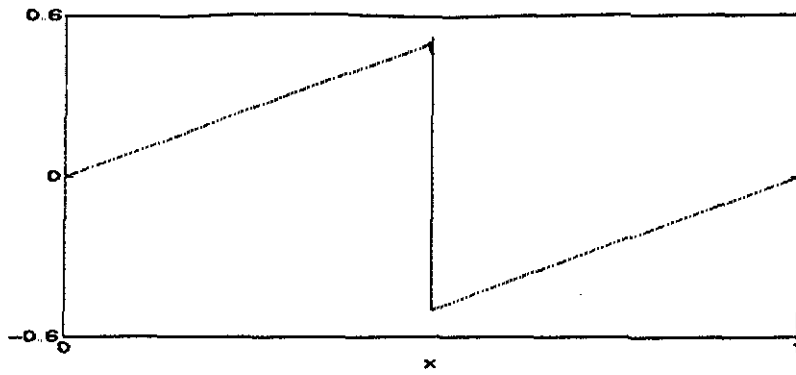


Figura 4.21: Función  $f(x)$  y su síntesis ondicular truncada hasta el término 17.

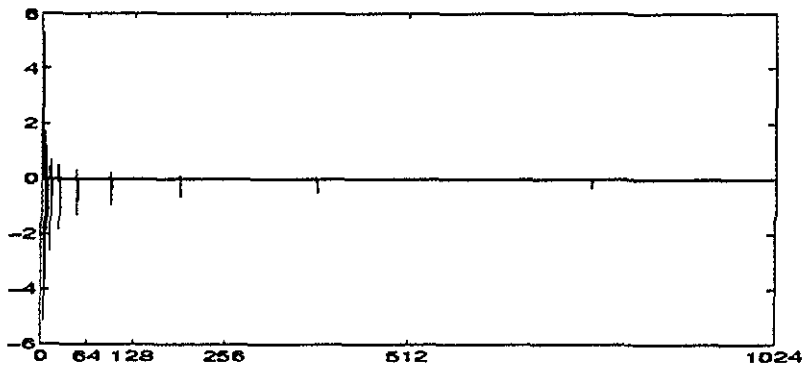


Figura 4.22: Distribución de coeficientes ondulares.

## 5. APLICACIONES SÍSMICAS

En la Figura 5.1 se ilustra una perturbación sísmica y su correspondiente espectro de amplitud. Esta figura nos permite observar algunas características sobresalientes. No tiene una escala respecto a la cual esta función esté definida. Esto es debido a que coeficientes significativos ocurren a muchas frecuencias.

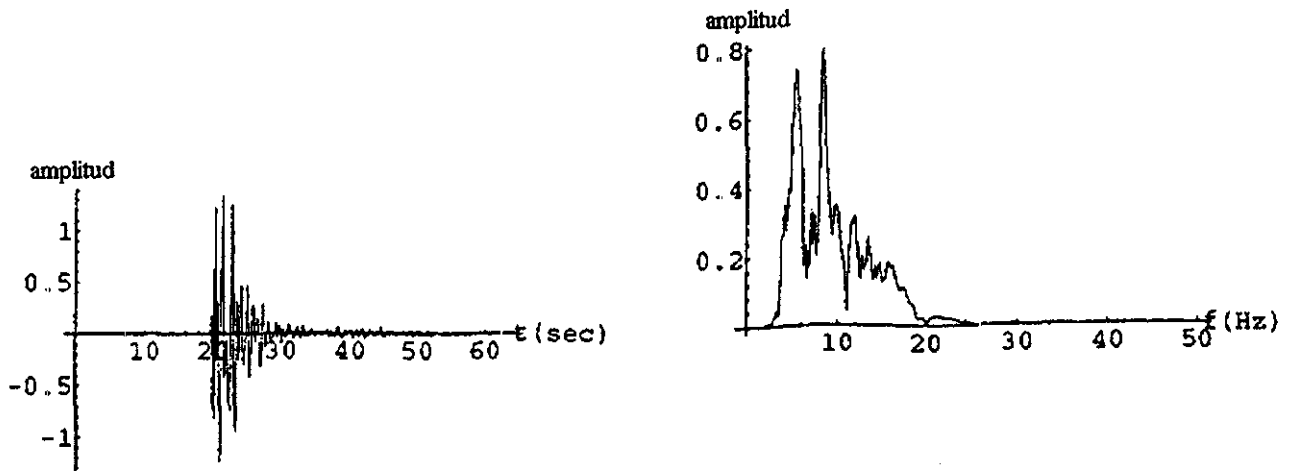


Figura 5.1: Perturbación sísmica y su espectro de Fourier

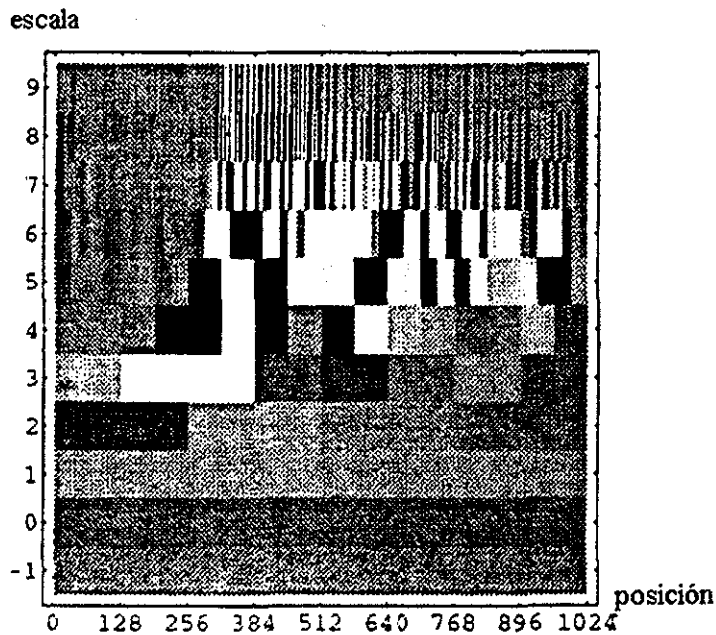


Figura 5.2: Densidad espectral (plano tiempo-frecuencia).



La transformada de Fourier revela el espectro de una función, pero no es posible relacionar ciertas frecuencias con localizaciones específicas de la función original.

En la Figura 5.2 se ilustra la densidad espectral en el plano tiempo-frecuencia de la transformada ondicular del pulso sísmico cuyo espectro de Fourier se ilustran en la Figura 5.1.

Los coeficientes ondiculares se muestran en la gráfica de densidad espectral en el plano tiempo-frecuencia. El eje vertical representa la escala o resolución de la descomposición. Es análogo a la frecuencia. Por ejemplo, un valor de nueve en el eje vertical se refiere a una escala de resolución de  $2^{-9}$  de la longitud total del conjunto de datos o números de datos. El eje horizontal representa la localización espacial. En este caso, el conjunto es muestreado a 1024 puntos, de aquí que sean 1024 posibles localizaciones. Los coeficientes se presentan en una escala en tonalidades de grises; los negros corresponden a magnitudes menores que las tonalidades claras. Cada bloque representa un coeficiente ondicular del desarrollo. Notamos, que a resoluciones bajas los bloques son sensiblemente más grandes.

La gráfica de densidad espectral muestra que las altas frecuencias están predominantemente presentes a pequeñas traslaciones espaciales (respecto al origen) y los términos de baja frecuencia a grandes traslaciones espaciales. Sin embargo ésta información no está contenida en el espectro de Fourier.

Con este ejemplo vemos objetivamente como la transformada ondicular nos proporciona una representación intermedia de una función, en la cual tanto la información espectral como temporal (espacial) están disponibles. El análisis se efectúa con las versiones dilatadas y trasladadas de las funciones base.

Reconsiderando la ecuación  $h_{a,b}(x) = a h_0\left(\frac{(x-b)}{a}\right)$ , introducida en el Capítulo 4, y en base

a las consideraciones anteriores podemos observar que las traslación están cubiertas por el parámetro  $b$  y las dilataciones por el parámetro  $a$ . Para pequeños valores de  $a$  ( $a < 1$ ) la

ondícula es una versión expandida de la función  $\phi_{a,b}(x)$ , que permite analizar los aspectos de las bajas frecuencias en cierta posición en el tiempo  $b$ . Para grandes valores de  $a$  ( $a > 1$ ), la ondícula es una versión comprimida de la función  $\phi_{a,b}(x)$ , por lo cual permite analizar los aspectos de bajas frecuencias alrededor de la localización  $b$ . El parámetro de dilatación  $a$  permite amplificar los aspectos de altas frecuencias locales.

En las Figuras 5.3 y 5.4 respectivamente, se presenta una sección sísmica sintética a profundidad y su correspondiente proyección en el sub-espacio de nivel de resolución 3. La capacidad de representación del contenido de altas frecuencias queda ilustrado. En la Figura 5.5 presentamos una traza sísmica con su representación ondicular en 7 niveles de resolución.

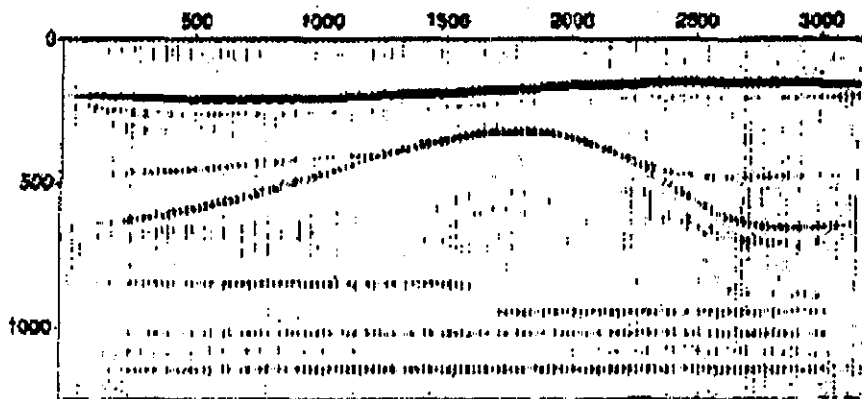


Figura 5.3: Sección sísmica sintética a profundidad

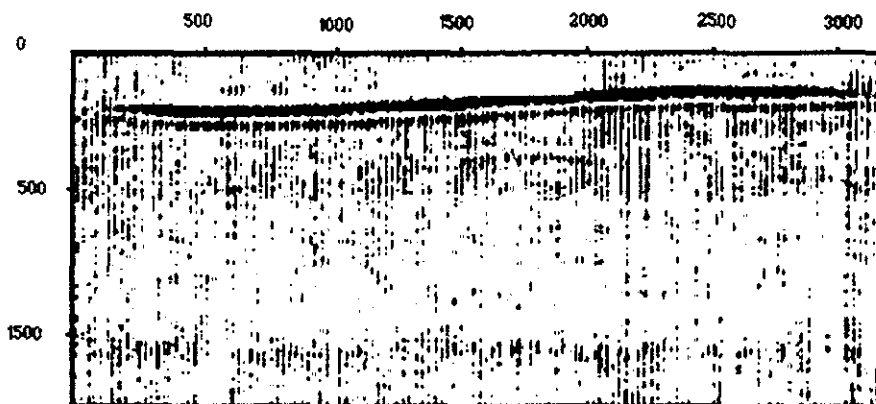


Figura 5.4: Proyección de la sección sísmica sintética a profundidad en el sub-espacio de nivel de resolución 3.

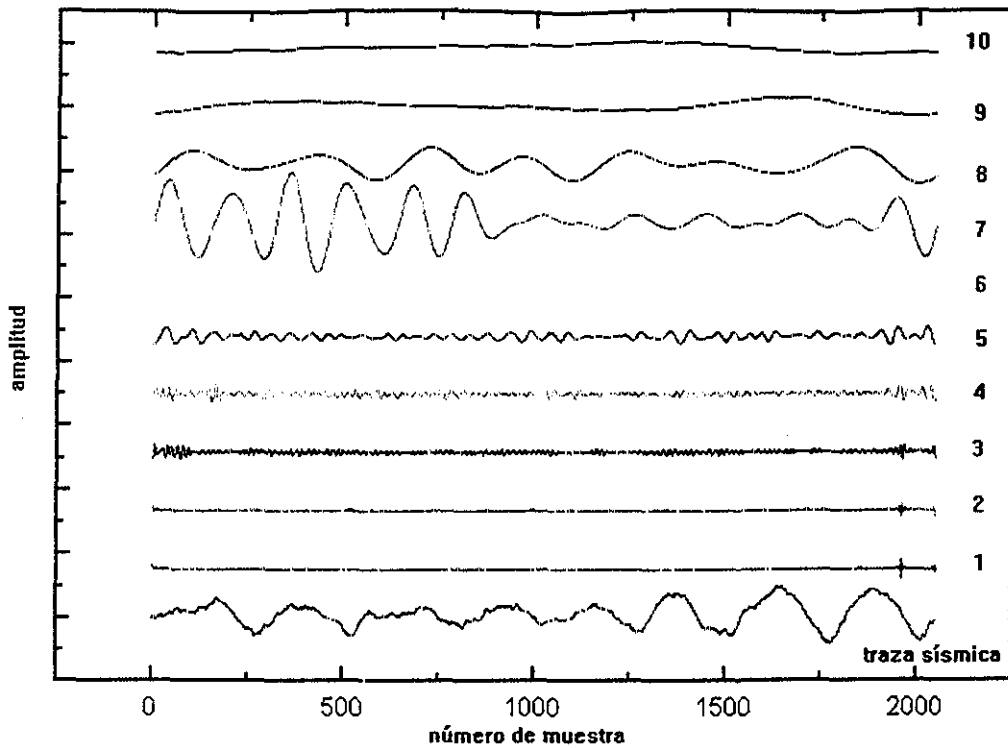


Figura 5.5: Traza sísmica y su descomposición en siete niveles de resolución.

La Figura 5.6 nos muestra la representación gráfica de una perturbación sísmica y su descomposición en los niveles de resolución 1, 2 y 4 respectivamente. La Figura 5.7 presenta las descomposiciones correspondientes a los niveles 5, 8 y 10 respectivamente.

#### 5.1. Como una herramienta de filtrado.

La aplicación de la transformada ondicular y del análisis de multiresolución en el pre-procesamiento y análisis de datos sísmico de reflexión cubre diversas aplicaciones. El antecedente directo de esta parte del trabajo está relacionado a Faqui et al. (1995) quien aplicó la transformada ondicular en procesos de filtrado antes y después del apilado, como también en la representación de la señal sísmica en el dominio tiempo-frecuencia y en los trabajos de Cohen et al., (1993), así como también de Lozada y Ronquillo (1997a, 1997b).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

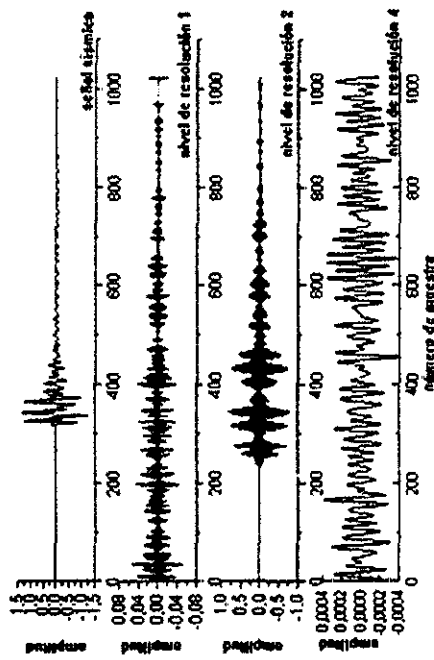


Figura 5.6

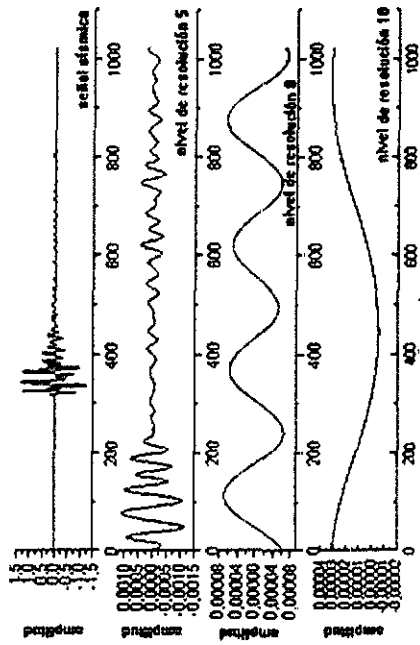


Figura 5.7

Figura 5.6: Señal sísmica y su descomposición a los niveles de resolución 1, 2 y 4.  
 Figura 5.7: Descomposición de los datos de la señal sísmica de la Figura 5.6 a los niveles de Resolución 5, 8 y 10.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Inicialmente, de una sección sísmica apilada obtenida de una secuencia especial de procesamiento se obtuvieron secciones sísmicas en tiempo aplicando conceptos propios del análisis de multiresolución en el dominio de la transformada ondicular. La secuencia especial de procesado incluyó entre otros procesos usuales, reconstrucción geométrica, divergencia esférica, corrección estática y dinámica, compensación de amplitud consistente con la superficie, filtro Q inverso (Figura 5.8).

Las secciones sísmicas temporales apiladas selectivamente de acuerdo al ancho de banda de interés permitieron sintetizar distintas salidas con diversos y específicos anchos de banda, con relaciones de señal ruido máximo y óptimo. Para la estimación del contenido de frecuencias del ancho de banda requerido, se requirió la evaluación de las características de la información temporal original.

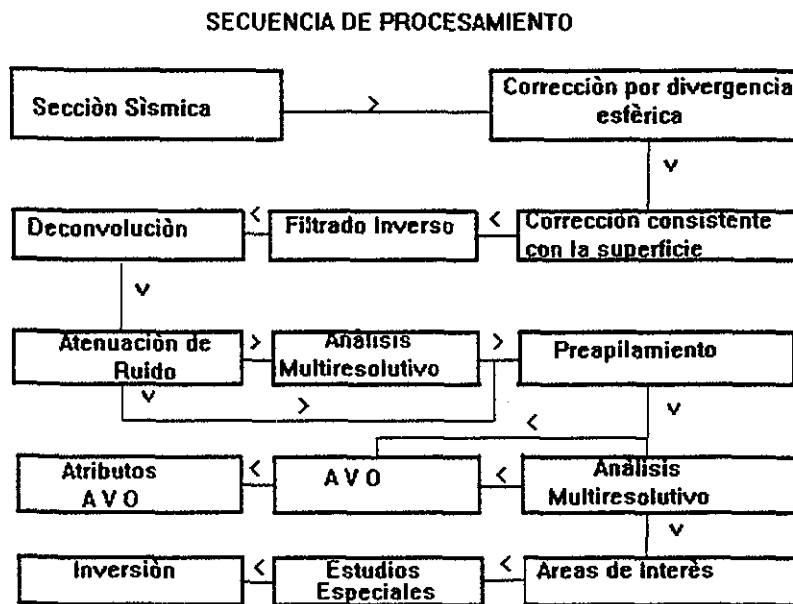


Figura 5.8: Secuencia de procesamiento de datos.

A continuación se presenta una serie de ejemplos de aplicación de la transformada ondicular y del análisis de multiresolución a datos de reflexión sísmica.

En la Figura 5.9 se presenta una ventana perteneciente a una sección sísmica apilada y en la Figura 5.10 consecuencia de la aplicación del análisis de multiresolución, la misma ventana sísmica al nivel de resolución 1. En la Figura 5.11 se muestra la descomposición de los datos al nivel de resolución 4. La Figura 5.12 ilustra algunos registros sísmicos (puntos de tiro). En las Figuras 5.13 y 5.14 se da la descomposición de estos datos a los niveles de resolución 1 y 4 respectivamente.

En la Tabla 5.1 se indica como se distribuyen las diversas bandas de frecuencia y los números de onda a las diferentes escalas y en la Tabla 5.2: Análisis de Multiresolución: Bandas de número de ondas asociadas a las diferentes escalas (eje del espacio) .

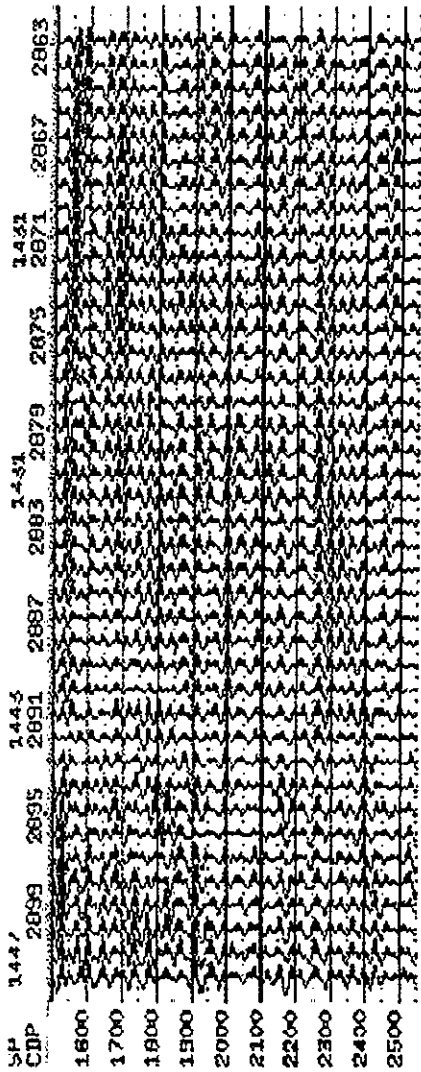
Nivel de escalamiento	Muestreo	No de muestras	Banda de frecuencias en Hz
Escala 0	4 ms	1024	0 - 125
Escala 1	8 ms	512	62 - 125
Escala 2	16 ms	256	31 - 62
Escala 3	32 ms	128	16 - 31
Escala 4	64 ms	64	8 - 16
Escala 5	128 ms	32	4 - 8
Escala 6	256 ms	16	2 - 4

Tabla 5.1: Análisis de Multiresolución: Bandas de Frecuencias asociadas a las diferentes escalas (eje del tiempo)

Nivel de escalamiento	Intervalo de traza	No de traza	Banda número de onda $Km^{-1}$
Escala 0	30 m	128	0 - 16
Escala 1	60 m	64	8 - 16
Escala 2	120 m	32	4 - 8
Escala 3	240 m	16	2 - 4
Escala 4	480 m	8	1 - 2
Escala 5	960 m	4	0.5 - 1
Escala 6	960 m	4	0 - 0.5

Tabla 5.2: Análisis de Multiresolución: Bandas de número de ondas asociadas a las diferentes escalas (eje del espacio)

**MRA: SECCIÓN SÍSMICA APILADA (POST-STACK)**

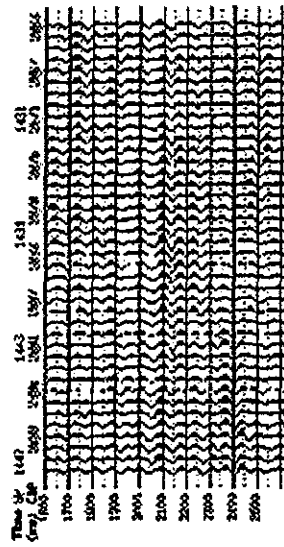


**SECUENCIA DE PROCESAMIENTO APLICADO:** Divergencia esférica, Transformada Radon, Compensación de Amplitud, Deconvolución consistente con la superficie, Análisis de velocidades, Corrección Estática y Corrección NMO.

Rango de tiempo: 1500 - 2554 ms  
 Rango de trazas : 2863 - 2902  
**Figura 5.9**

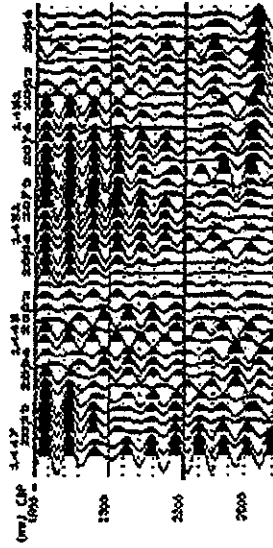


MRA: Descomposición de los datos al nivel de resolución 1



**Figura 5.10**

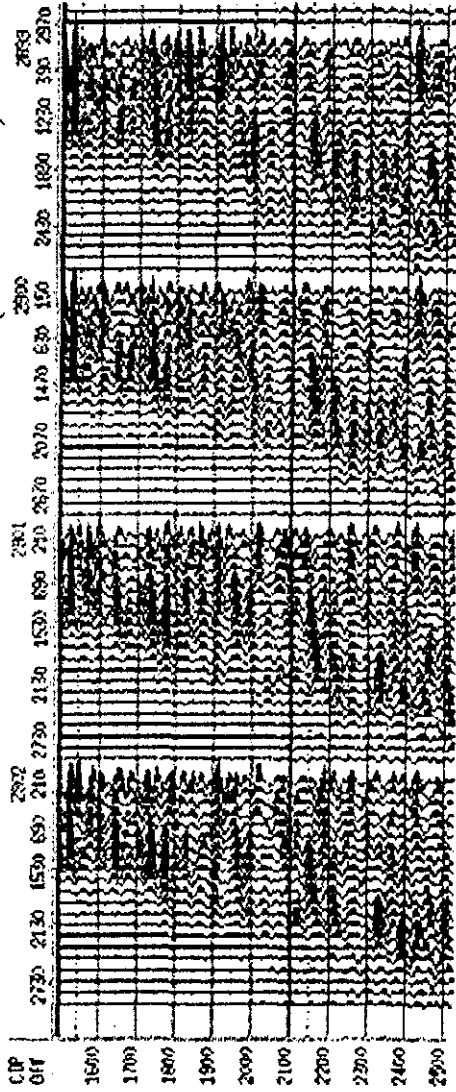
MRA: Descomposición de los datos al nivel de resolución 4



**Figura 5.11**

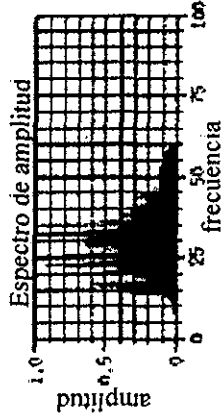
TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

**MRA: SECCIÓN SÍSMICA PRE-APILADA (PRE-STACK)**

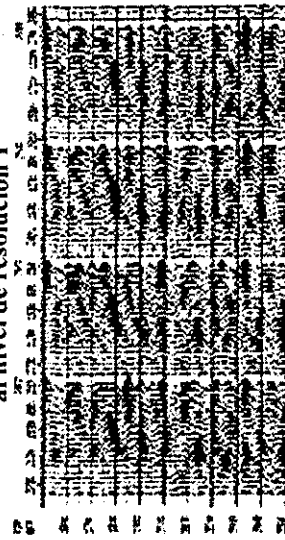


Rango de tiempo: 1500 - 2520 ms  
 Rango de trazas : 2899 - 2902

**Figura 5.12**

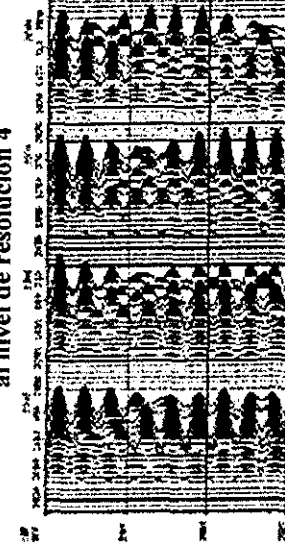


MRA: Descomposición de los datos  
 al nivel de resolución 1



**Figura 5.13**

MRA: Descomposición de los datos  
 al nivel de resolución 4



**Figura 5.14**

**TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN**



A continuación, en un conjunto de tres grupos de figuras, ilustramos la aplicación de la transformada ondicular como herramienta de filtrado de datos, más precisamente de la aplicación de un algoritmo, generalización del algoritmo convencional (piramidal) asociado con la transformada ondicular rápida (Figura 4.11), denominado paquete de ondículas (wavelet packet). El algoritmo rápido asociado al análisis por paquetes de ondículas, permite efectuar un ventaneo de Fourier adaptivo directamente en el dominio del tiempo como consecuencia de sucesivas operaciones de filtrado en diferentes regiones del dominio de las frecuencias, Coifman, 1992.

En las Figuras 5.15, 5.16 y 5.17 presentamos una secuencia de 3 ilustraciones que ilustran la aplicación de la transformada de ondícula en el filtrado de datos. En la primera (Figura 5.15) una señal senoidal, ruido blanco y la suma de ambos; en la segunda (Figura 5.16) la superposición de dos gráficas una de las cuales corresponde a la suma de la señal senoidal y del ruido blanco aditivo y la gráfica de la señal filtrada, y finalmente en la tercera (Figura 5.17) los espectros correspondiente antes y después del filtrado.

En la Figura 5.18 se presenta un transitorio sísmico y el resultado obtenido después de su filtrado. En la Figura 5.19 se muestra las superposiciones de las señales de entradas y de salida después del filtrado en el dominio ondicular. La Figura 5.20 presenta los correspondientes espectros antes y después del filtrado.

En la Figura 5.21 presentamos la gráfica de la superposición de una traza original y de la traza filtrada en tanto que en la Figura 5.22 muestra los espectros correspondientes de la señal original y del espectro resultante después del filtrado.

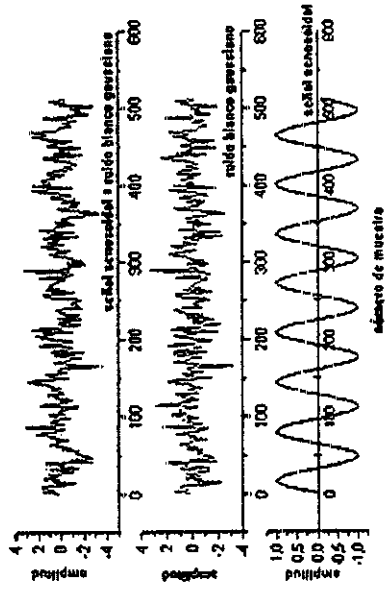


Figura 5.15

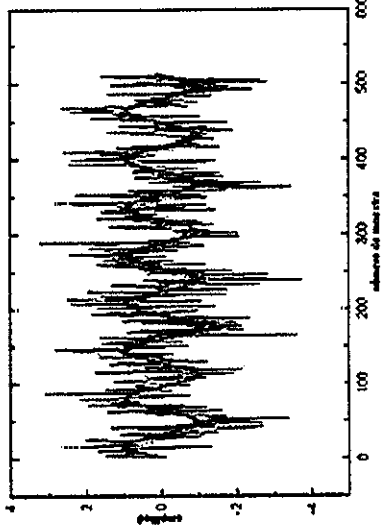


Figura 5.16

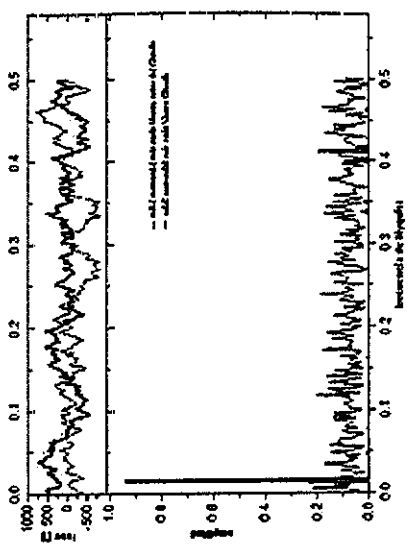


Figura 5.17

Figura 5.15: Señal senosoidal (parte inferior), ruido blanco gaussiano (parte intermedia), señal senosoidal más ruido gaussiano blanco (parte superior).

Figura 5.16: Señal senosoidal más ruido gaussiano antes y después del filtrado adaptivo (wavelets packet). Relacionada con la parte inferior y superior respectivamente de la Figura 5.15.

Figura 5.17: Densidad espectral y espectro de fase de la señal senosoidal más ruido blanco gaussiano antes y después del filtrado adaptivo (wavelet packet). Relacionada con la parte superior e inferior respectivamente de la Figura 5.15 y con la Figura 5.16.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

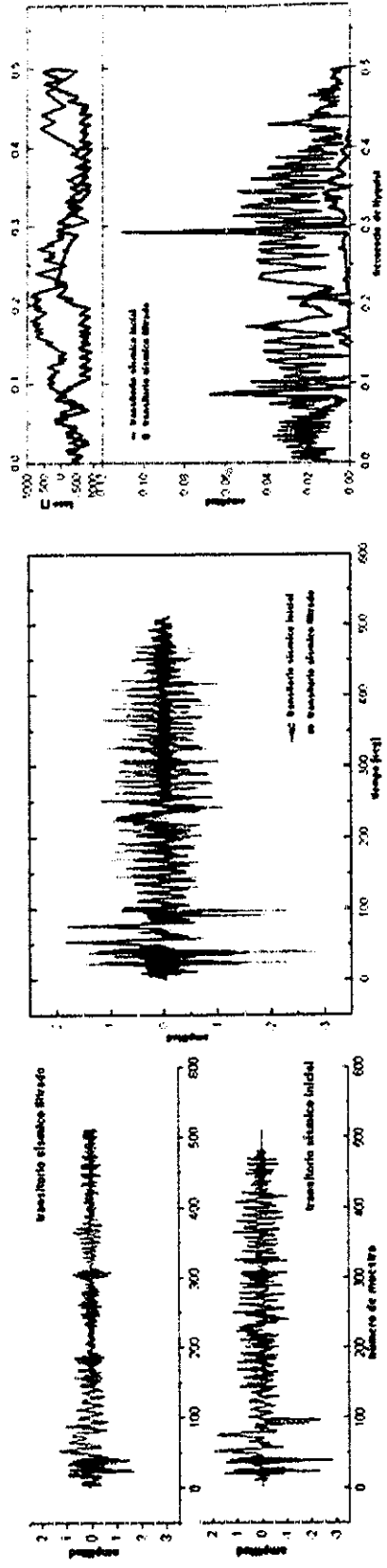


Figura 5.18

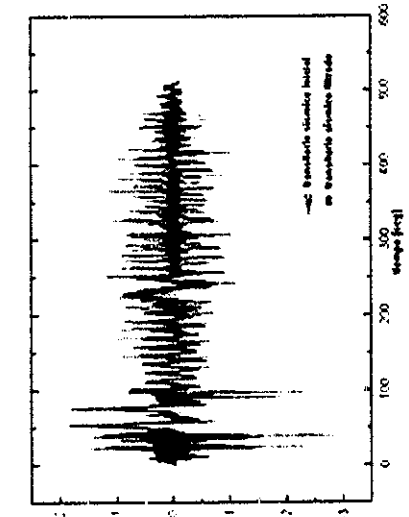


Figura 5.19

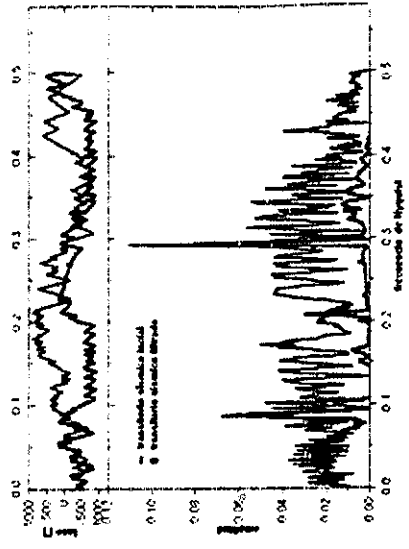
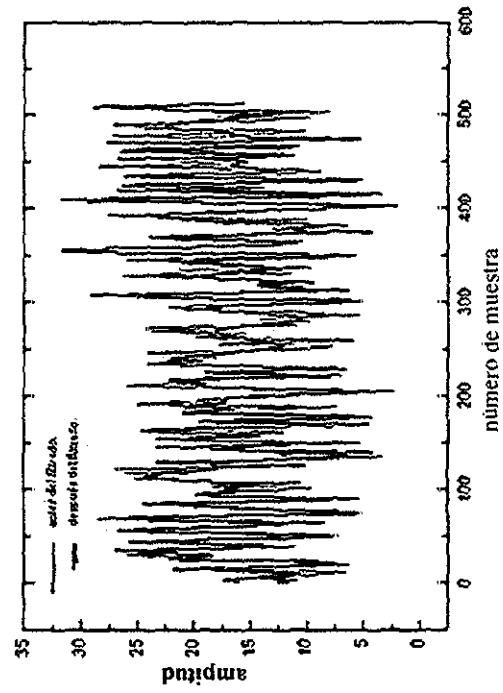


Figura 5.20

Figura 5.18: Transitorio sísmico antes y después del filtrado adaptivo (wavelet packet).  
 Figura 5.19: Transitorio sísmico antes y después del filtrado adaptivo (wavelet packet). Relacionada con la parte superior e inferior respectivamente de la Figura 5.18.  
 Figura 5.20: Densidad espectral de fase del transitorio sísmico inicial y después del filtrado adaptivo (wavelet packet). Relacionada con la parte inferior y superior respectivamente de la Figura 5.18 y con la Figura 5.19.

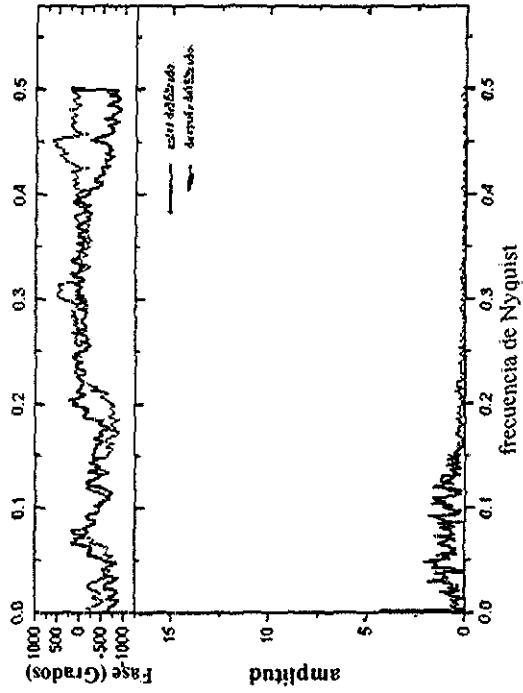
TESIS CON FALLA DE ORIGEN

**Serie de tiempo antes y después del filtrado**



**Figura 5.21**

**Espectro de Amplitud y Espectro de Fase**



**Figura 5.22**

**Figura 5.21:** Serie de tiempo original y señal filtrada (wavelet packet).

**Figura 5.22:** Espectro de amplitud y de fase asociada a la Figura 5.21.

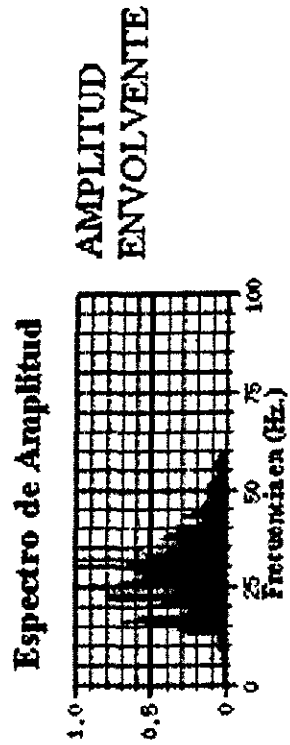
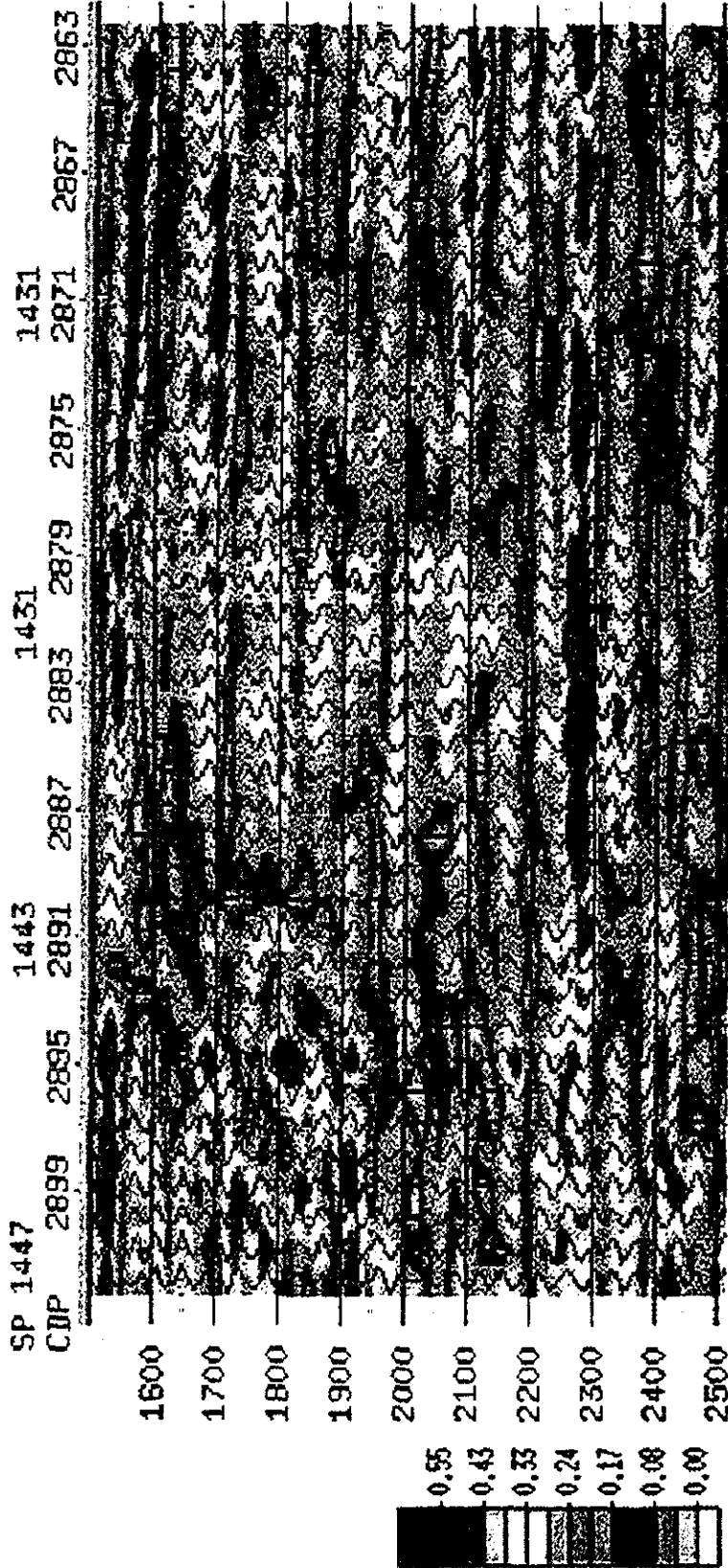
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 5.2. Atributos sísmicos en el espacio de multiresolución.

Las técnicas sísmicas están en continuo desarrollo. Algunos de estos avances actualmente se orientan a obtener una descripción petrofísica de las rocas (litología, facies, porosidad, fluidos, etc.) basado en los registros de ondas P y S, y en las herramientas de inversión. Entre estas técnicas podemos citar las relacionadas a los atributos sísmicos clásicos (amplitud envolvente, fase instantánea, frecuencia instantánea, polaridad aparente) (Taner et al., 1979) y no convencionales o especiales (AVO). A partir de datos sísmicos se estiman parámetros elásticos de las rocas del subsuelo los cuales son determinantes en la detección y caracterización de reservorios (Shuey, 1985; Side et al., 1999).

De la información sísmica que se presenta en la Figura 5.23, perteneciente a una ventana de tiempo de una sección sísmica apilada, y como ilustraciones de la aplicación del análisis de multiresolución relacionado a la estimación de atributos sísmicos, presentamos en las Figuras 5.24, 5.25, 5.26, 5.27 la amplitud envolvente estimada para los niveles de resolución 3, 4, 5, 7 respectivamente de la descomposición ondicular correspondiente. En las Figura 5.28 y 5.29 se dan las secciones de ángulo de emergencia en el rango de  $0^\circ$  a  $15^\circ$  de la descomposición de los datos a los niveles de resolución 1 y 2 respectivamente

# Sección sísmica original 'Post Stack'



Rango de trazas : 2863 to 2902  
Rango de tiempo: 1500 to 2554 ms

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 5.23

MRA: Descomposición de los datos al nivel 3 de resolución MRA: Descomposición de los datos al nivel 4 de resolución

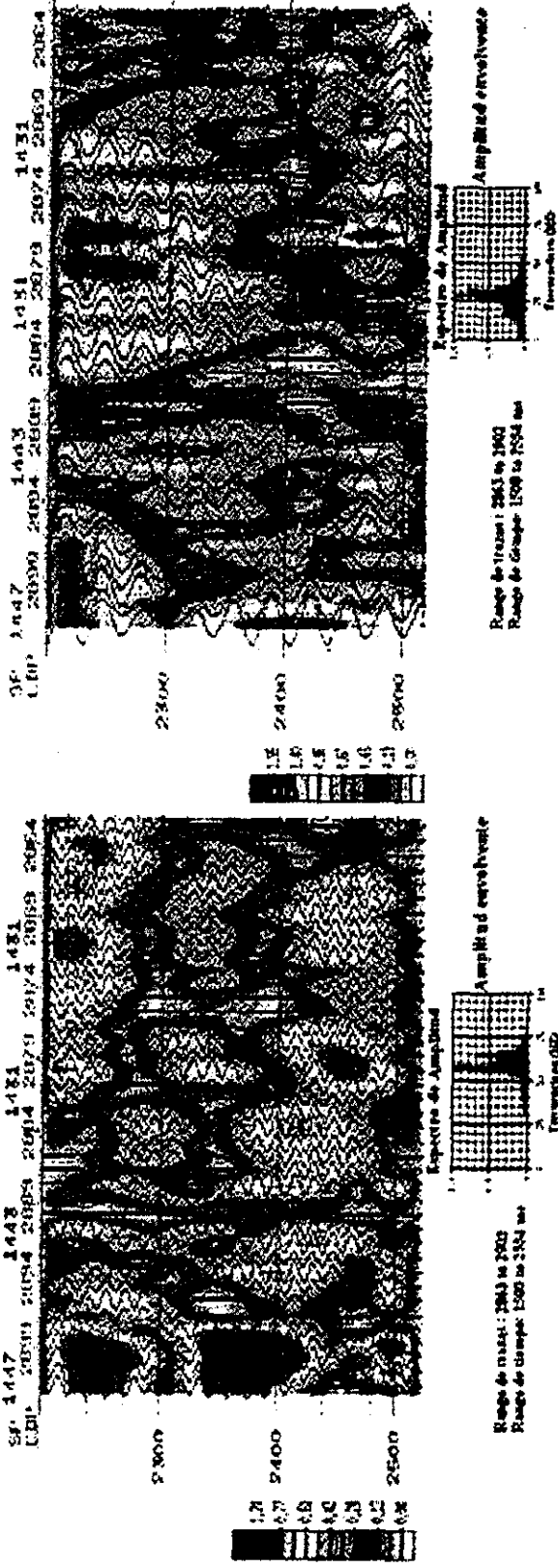


Figura 5.24

Figura 5.24: MRA: Descomposición de los datos al nivel 3 de resolución. Amplitud envolvente.

Figura 5.25: MRA: Descomposición de los datos al nivel 4 de resolución. Amplitud envolvente.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

MRA. Descomposición de los datos al nivel 5 de resolución. MRA. Descomposición de los datos al nivel 7 de resolución.

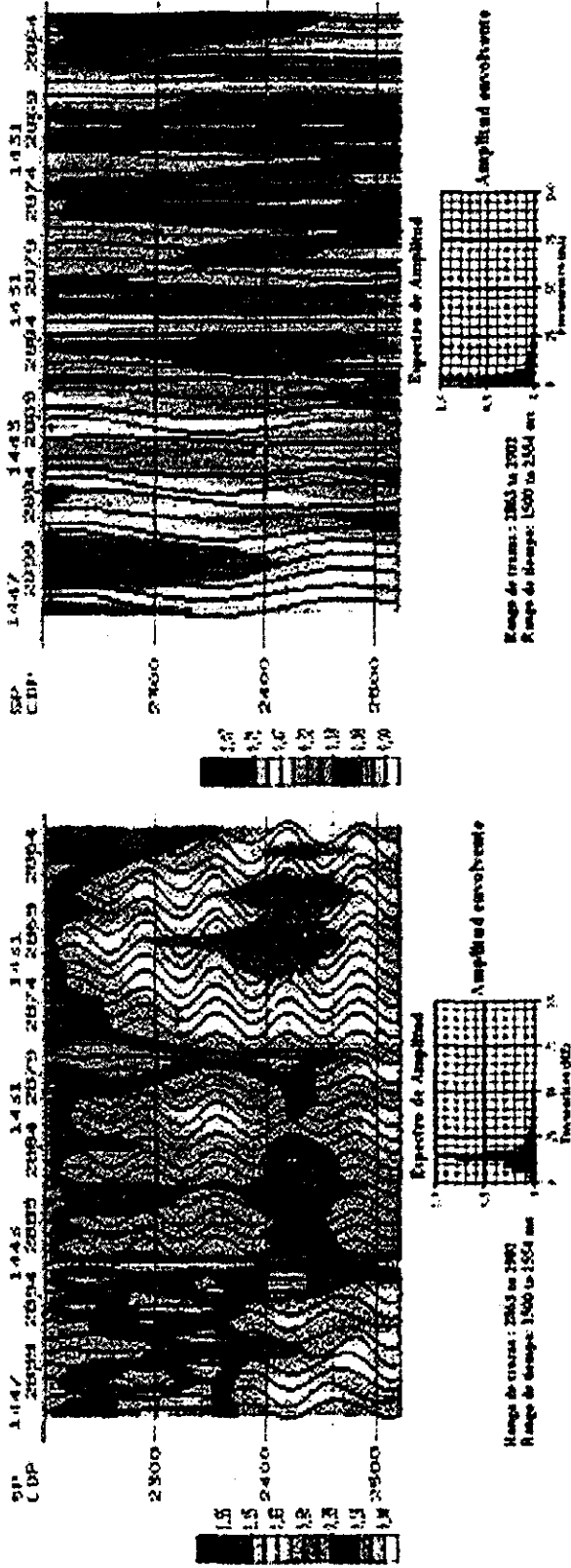


Figura 5.26

Figura 5.27

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 5.26: MRA. Descomposición de los datos al nivel 5 de resolución. Amplitud envolvente.

Figura 5.27: MRA. Descomposición de los datos al nivel 7 de resolución. Amplitud envolvente.



MRA: Descomposición de los datos al nivel de resolución 1 MRA: Descomposición de los datos al nivel de resolución 2  
 Sección de ángulo de emergencia Sección de ángulo de emergencia

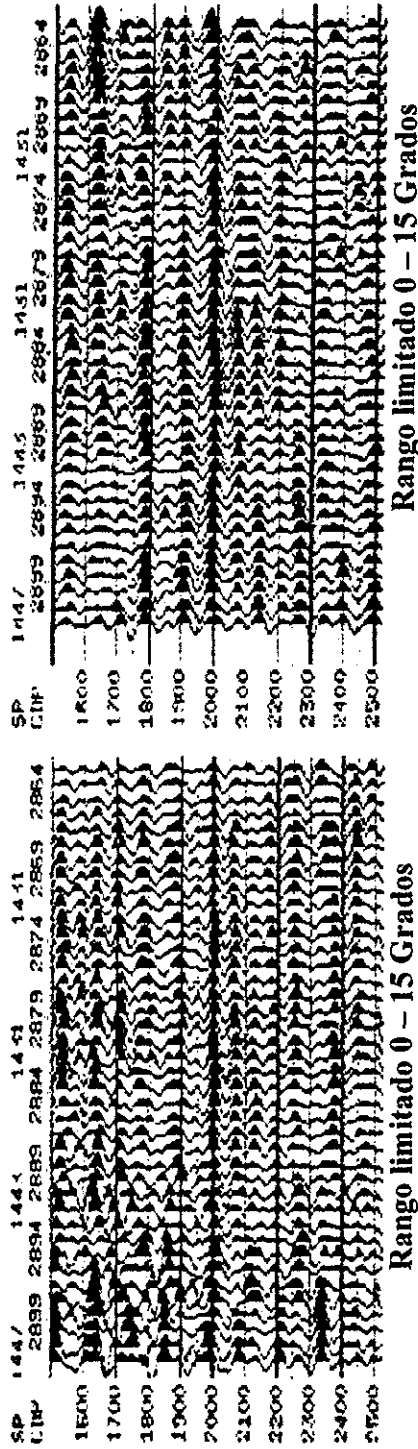


Figura 5.28: Descomposición de los datos al nivel 1 de resolución. Sección de ángulo de emergencia. Rango limitado de apilamiento de 0 -15 Grados.  
 Figura 5.29: Descomposición de los datos al nivel 2 de resolución. Sección de ángulo de emergencia. Rango limitado de apilamiento de 0 -15 Grados.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## 6. MULTIRESOLUCIÓN UNIBIDIMENSIONAL Y BIDIMENSIONAL APLICADA A LA DELIMITACIÓN DE UN YACIMIENTO DE GAS.

### 6.1 Introducción.

Esta investigación es parte de un estudio cuyo objetivo principal fue el de delimitar y caracterizar estáticamente un yacimiento de gas. En particular, como una contribución al objetivo general del estudio, se estableció, aplicó y por los resultados, validó, una técnica o metodología no convencional (Transformada de ondícula y Análisis de multiresolución) como una herramienta complementaria de análisis y evaluación de datos sísmicos. Se hizo énfasis en el empleo de atributos sísmicos obtenidos a partir de los resultados de la aplicación del análisis de multiresolución y en la fase de interpretación y evaluación de datos, se utilizó integrada y complementariamente con los atributos sísmicos obtenidos convencionalmente. Se hizo uso del análisis de multiresolución como herramienta de análisis de datos sísmicos de reflexión.

Con la ayuda de los diferentes atributos sísmicos obtenidos con la transformada ondicular tanto 1-D como 2-D integrados con la información de registros de pozo y de los diferentes modelos sustentados tanto por información geológica como sísmica se delimitó el yacimiento de gas.

En este estudio no se presenta detalles exhaustivos de esta delimitación. El trabajo se ha limitado a un análisis comparativo e integrado entre los atributos sísmicos obtenidos por el método convencional y de los obtenidos haciendo consideraciones del análisis de multiresolución 1-D y 2-D.

Del análisis e interpretación de las secciones sísmicas del área de estudio, se obtuvo, tanto a escala regional como local o de detalle, la distribución de los atributos sísmicos clásicos: amplitud envolvente (intensidad de reflexión), fase instantánea, frecuencia instantánea, polaridad aparente y mapas de configuración de amplitudes a diversos tiempos (time-slice).

Como se mencionó, los atributos sísmicos clásicos, esto es, la amplitud envolvente, frecuencia instantánea, fase instantánea, y atributos sísmicos especiales tales como AVO y AVA tanto de traza cercana como lejana, se estimaron por el método convencional (traza compleja y transformada de Hilbert) así como a partir de los resultados de la aplicación del análisis de multiresolución respectivo.

El análisis de multiresolución se realizó en ventanas sísmicas seleccionadas, aplicando tanto la transformada ondicular unidimensional (1D) y bidimensional (2D) utilizando ondículas de diversos ordenes y familias (Daubechies, Morlet, Coiflet). Así, se obtuvieron las descomposiciones de los datos de la ventana de análisis a distintos niveles de resoluciones. Fue de estos diferentes niveles de multiresolución tanto 1D y 2D de los cuales se obtuvieron los distintos atributos sísmicos.

Los datos sísmicos utilizados provienen de un yacimiento de hidrocarburos de la Cuenca del Noroeste de la República Mexicana con límites estratigráficos de producción definidos en el Paleoceno y Eoceno.

Este estudio es una muestra de que como el análisis de multiresolución en la actualidad está siendo incorporado como una herramienta significativamente importante en el análisis, evaluación e interpretación sísmica. Cabe reiterar, que el análisis de multiresolución analiza una señal original en particular, por adición sucesiva de detalles, esto es, por sucesivos refinamientos y está formulado en base del estudio de bases ondiculares ortogonales de soporte compacto.

## 6.2. Geología Regional

La provincia petrolera de la Cuenca de Burgos se localiza al noreste de la República Mexicana (Figura 6.1). La Cuenca de Burgos comprende el estado de Tamaulipas y parcialmente a los de Nuevo León y Coahuila. La cuenca de Burgos está limitada al norte y sur por el Río Bravo y el

paralelo 24° 30' respectivamente, al poniente la limita el contacto Cretácico Superior-Terciario, extendiéndose hasta el litoral del Golfo de México. Comprende aproximadamente 45000 kilómetros cuadrados.



Figura 6.1: Localización de la Cuenca de Burgos<sup>1</sup>.

La Cuenca de Burgos estructural y estratigráficamente es una continuación del Geosinclinal del Golfo de México. Se identifica como Antiguo Golfo de México a una zona negativa que durante el Jurásico Tardío, Cretácico Temprano, Medio, Tardío y gran parte del Terciario ocupó lo que en la actualidad es el denominado Golfo de México y que también además cubrió lo que es la Planicie Costera del Golfo y las partes surorientales de Norteamérica. La historia geológica de la Cuenca de Burgos está vinculada con la tectónica de la Sierra Madre Oriental.

En el Mesozoico, se tenía una cuenca marina somera, localizada en el margen oriental del geosinclinal mexicano, con amplias plataformas que recibieron depósitos de calizas, lutitas y areniscas durante el Jurásico y Cretácico. Durante la Revolución Laramídica (fines del Cretácico, principios del Terciario), se formó la Sierra Madre Oriental que expuso y favoreció la erosión de sedimentos paleozoicos y mesozoicos; simultáneamente el frente oriental de la cordillera se sumergía originando cuencas relativamente pequeñas (entre otras la Cuenca de Burgos) paralelas al cinturón tectónico. Durante el Terciario, la emersión del continente

<sup>1</sup>Schlumberger Offshore Services.

y progradación de la línea de costa propició el aporte de sedimentación terrígenas a la Cuenca de Burgos. Esta sedimentación de terrígenos propia de ambiente deposicional característicamente regresivo con rápidos intervalos transgresivos, ambiente salobre a batial y con fallas de crecimiento, originó alternancias de lutitas y areniscas del Paleoceno al Reciente, de rumbo NNO-SSE. Los terrígenos más recientes y de mayor potencia se encuentran hacia el oriente y presentan espesores máximos del orden de los 10000 m (Figura 6.2).

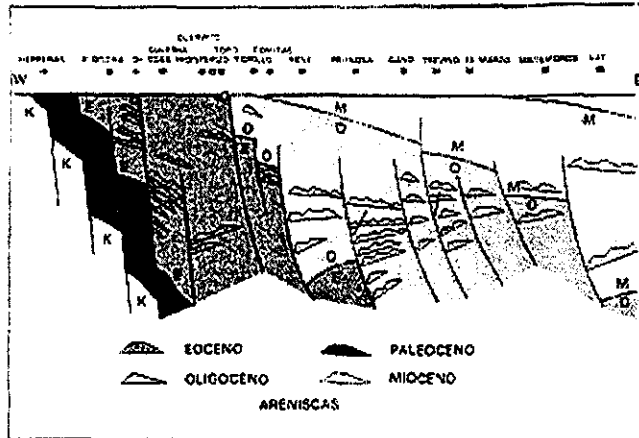


Figura 6.2: Sección esquemática de la Cuenca de Burgos (sedimentación y fallas de crecimiento)<sup>1</sup>.

Las formaciones del Terciario buzcan hacia el este, con deformaciones de poca intensidad formando terrazas estructurales y anticlinales relativamente pequeños de rumbo NNO-SSE.

Las formaciones están afectadas por fallas postdeposicionales y por un gran número de fallas de crecimiento de traza sinuosa de gran longitud y rumbo aproximado norte-sur, que conforman un juego de bloques subparalelos con caída hacia la cuenca.

Los campos productores (gas y destilados principalmente y en mucho menor proporción aceite) provienen de cuerpos arenosos del Terciario, del Paleoceno al Mioceno, a rumbo de las formaciones e idealmente paralelos a antiguas líneas de costa.

<sup>1</sup>Schlumberger Offshore Services.

Los campos productores están dispuestos formando franjas de acuerdo a la disposición de las formaciones productoras, según que las arenas productoras sean del Paleoceno, Eoceno, Oligoceno o Mioceno (Figura 6.3).

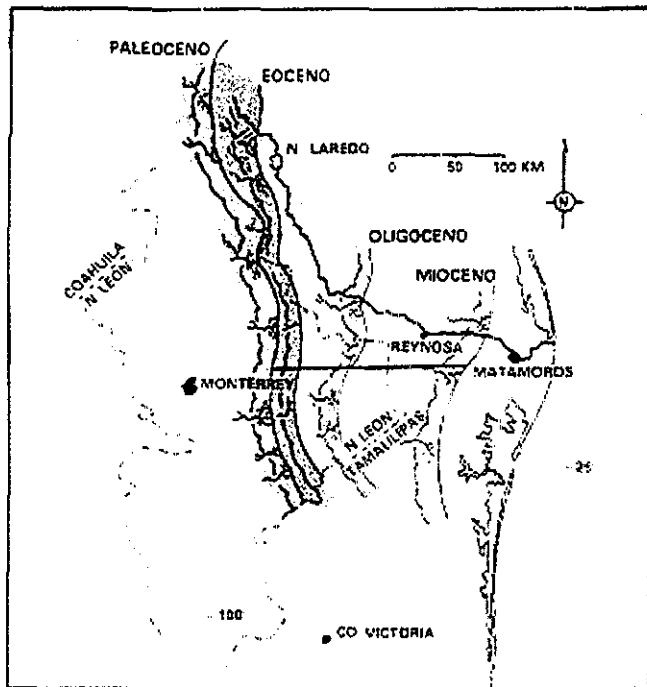


Figura 6.3: Paleografía del Terciario<sup>1</sup>

Los cuerpos arenosos productores de las franjas productoras conforman sistemas de barras, arenas de canal o frentes deltaicos.

Otros están asociados a fallas de crecimiento, arenas basales o alguna línea de costa. Las fallas más frecuentes son normales, forman una serie de bloques (fosas y pilares) que origina yacimientos complejos y que en la gran mayoría de los casos en la Cuenca de Burgos son de tipo combinado estratigráfico-estructural.

Estudios sistemáticos de los procesos tectónicos y eustáticos globales, análisis sísmicos y el

<sup>1</sup>Schlumberger Offshore Services.

estudio de las características de los sedimentos resultantes, progresivamente han permitido ir estableciendo los aspectos fundamentales de la historia sedimentológica, en términos de ciclos tectónicos globales, regionales y locales, profundidades, edades y características de las secuencias sedimentarias de los depósitos sedimentarios. Cada secuencia sedimentaria manifiesta ciclos de oscilación de naturaleza transgresiva y regresiva con litofacies propias y adaptables a cada cuenca.

La estimación indirecta e integrada de las profundidades de los depósitos sedimentarios nos permite postular modelos o patrones sedimentarios característicos consistentes. Estos modelos o patrones sedimentarios nos conducen finalmente al establecimiento de los sistemas de depósitos sedimentarios que permiten comprender la evolución de las secuencias estratigráficas. De la integración de diversas fuentes de información geológica-geofísica, se han establecido en un marco general, los siguientes sistemas de deposición sedimentaria:

1. Sistemas de nivel bajo, correspondiendo a variaciones rápidas del nivel medio del mar y con patrones sedimentarios característicos, tales como los abanicos de piso de cuenca, abanicos de talud, turbiditas imbricadas, cañones submarinos, complejos progradantes con sistemas fluviales-deltáicos y valles de incisión.
2. Sistemas transgresivos o retrogradantes por corresponder a una transgresión marina hasta la superficie denominada de máxima inundación; se manifiesta como una retrogradación de la línea de costa y tienen en términos generales incomparables sistemas de arenas por su selección y porosidad, sistemas fluviales y deltáicos.
3. Sistemas de nivel alto. Comparativamente de extensión y de distribución longitudinal considerable. Característicos de una regresión lenta, progresiva y estabilidad relativa del nivel medio del mar, lo que origina un prisma de progradación de magnitud considerablemente mayor a los que surgen en el sistema de nivel bajo. Presentan sistemas fluviales-deltáicos de sistemas arenosos sin sellos adecuados y fácilmente erosionables por el sistema suprayacente.

Además de los sistemas de deposición anteriores (sistema de nivel bajo, transgresivos o retrogradantes y de nivel alto) y de sus patrones sedimentarios característicos, los depósitos sedimentarios asociados a los sistemas sedimentarios de plataforma, dada su complejidad tectónica y sus características, necesariamente deberán tenerse en cuenta como sistema de deposición relevante en nuestro caso. En la Cuenca de Burgos particularmente, los depósitos sedimentarios presentan dos patrones sedimentarios característicos y regulares, uno es de plataforma de tipo normal y el otro de fallas de crecimiento, siendo esta última la de mayores y mejores desarrollos de arenas y de desarrollos sedimentarios extensos (65 %).

La correlación de procesos tectónicos y eustáticos globales, aspectos sísmicos y sedimentarios resultantes, han permitido específicamente en la Cuenca de Burgos inferir los sistemas tectónico de deposición (Valencia, 1986; Calderón Barrera et al., 1996). Dentro de las secuencias sedimentarias podemos tipificar dos sistemas de depósito sedimentario, uno de dominio tectónico y el otro dominio sedimentológico; el primero relacionado a variaciones relativas de carácter global del nivel medio del mar y el segundo de carácter local.

Secuencia del tipo uno: Son aquellas que por la magnitud del tectonismo involucrado son de carácter global, asociadas a variaciones rápidas y de gran magnitud del nivel medio del mar. Con gran exposición, tasas de erosión elevadas y sedimentación considerable; con depósitos sedimentarios de ambientes batiales a someros, así como salobres o continentales. Las trampas de naturaleza arenosa son de potencia considerable y de mucho mayor extensión comparativa. Los modelos sedimentarios que comprenden incluyen abanicos de piso de cuenca, abanicos de talud, bloques caídos, cuñas turbidíticas, sistemas deltaicos, barras de barrera o islas, sistemas fluviales y lagunares y dunas de playa. Patrones sedimentarios que en principio son potencialmente trampas adecuadas y cuyo sello está asociado a cuñas del sistema transgresivo que coinciden con la superficie de máxima inundación.



En los proyectos de exploración se tiene un interés particular en los sistemas transgresivos, ya que este sistema presenta un sello inmediato en los depósitos arenosos, con un alto contenido de materia orgánica; conforman importantes yacimientos con excelentes porosidades y permeabilidades, ya que se encuentra en el dominio del nivel base de las olas y presenta una gran selección granular en ambientes de nerítico interno a medio, esto en modelos sedimentarios cercanos a facies costeras, deltáicas y fluviales.

El sistema de nivel alto presentan grandes extensiones de los modelos sedimentarios que desarrollan, por tener una regresión de dimensiones mayores que la correspondientes a los del nivel bajo, con una estabilidad relativa del nivel del mar, en donde se crea un gran prisma progradante, donde tenemos los sistemas fluviales y deltas bien desarrollados. Estos tienen muy poco sello y a veces es terminado por una erosión posterior presentando migración de hidrocarburos. Sus arenas son de mayor riesgo, con poco sello lateral, y sin mucha materia orgánica.

Secuencia de tipo dos. Se presentan con mayor frecuencia que las secuencias sedimentarias del tipo uno, pero son de menor importancia económica. Desde el punto de vista sedimentológico, presentan los mismos patrones sedimentarios característicos, pero con menor desarrollo.

La erosión presente en los sistemas sedimentarios de plataforma no es comparativamente abrupta, es más bien paulatina, lo que hace que algunos sistemas sedimentarios no se encuentren presentes, como los abanicos de talud y de piso de cuenca. La tasa de deposición sedimentaria está más relacionada con la plataforma existente; no se tiene evidencias de dominio de aporte sedimentario, más bien predominan las corrientes marinas, por lo que éstos sistemas tendrán extensión lateral con amplitud vertical menor, la cuña de progradación es menor.

En los sistemas dominantes de las secuencias del tipo dos para el sistema de nivel bajo tendremos algunas veces la existencia de cuñas turbidíticas como resultado de los últimos aportes de naturaleza arenosa, siguiendo con el sistema de progradación, los sistemas deltáicos

que son regularmente los que dominan por encontrarse dentro de la estabilidad momentánea del nivel base de olas, con sistemas fluviales y costeros.

Los principales sistemas de trampas de objetivo económico son los sistemas de nivel bajo, que presentan los modelos de abanicos de piso, siendo estos los más importantes ya que en los registros conocidos son los mejores productores debido a que sus arenas tienen excelentes porosidades y permeabilidades.

Como consecuencia del análisis, evaluación e integración de la información geológica y geofísica regional es posible zonificar la cuenca en tres estilos de fallamiento característicos, cronoestratigráficamente asociados a los periodos Paleoceno, Eoceno, Oligoceno y Mioceno.

La deformación estructural y estilos de fallamientos presentes en la cuenca de Burgos se estableció en base de una correlación sísmica regional. Secciones sísmicas de rumbo NE-SW, permiten una correlación y clasificación de fallas, y finalmente la zonificación de la cuenca en tres estilos de fallamiento de occidente a oriente:

- fallamiento vertical relacionado directamente al bajo aporte de sedimentos y basamento rígido (columna mesozoica).
- Fallamiento listrico de expansión originado por un alto volumen del aporte sedimentario, cambio de echado del basamento mesozoico o relacionado a masas dómicas de arcilla.
- Fallamiento vertical debido a la interacción de diapiros arcillosos.

Generalizadamente la cuenca descansa en rocas mesozoicas, su producción se encuentra en intervalos de profundidad entre 2700 y 3000 metros, y cuyo origen tectónico es posterior a la orogenia Laramídica.

### 6.3. Análisis sísmico.

Para la localización y análisis de las anomalías de interés, se utilizaron 13 líneas sísmicas de diferentes rumbos (Figura 6.4), representaciones en planta (time-slice) de los atributos sísmicos clásicos (amplitud envolvente, fase instantánea, frecuencia instantánea, polaridad aparente) estimados a los tiempos de reflexión de 1.7, 1.72, 1.74, 1.76 y 1.78 seg, así como datos de registros geofísicos de pozo (Ronquillo et al., 1997a, 1997b; Lozada y Ronquillo, 1997).

En las Figuras 6.4 y 6.5 se presentan para el área de estudio las configuraciones de carácter regional de los atributos sísmicos de amplitud envolvente y de fase instantánea respectivamente. La Figura 6.6 presenta la configuración de la amplitud envolvente para la parte sur de la zona de estudio. Estas configuraciones corresponden al tiempo 1780 ms.

En la Figura 6.7 se presenta la línea sísmica J-J' (ver su posición en Figura 6.6) que atraviesa la zona de estudio y en la Figura 6.8 la ventana sísmica analizada. Ventana comprendida entre los CDPs 629-560, y en el intervalo de tiempo de los 1600 a los 1900 ms.

Se localizaron, con base al análisis de los atributos sísmicos representados en planta, 7, 5, 4, 4, y 4 anomalías de interés en los tiempos anteriormente indicados.

En la configuración correspondiente al tiempo 1700 ms observamos siete anomalías de interés, con rangos de amplitud de 1.62 a 2.16, y con polaridades aparentes de -2000 a -3500. Al tiempo 1720 ms se interpretaron cinco anomalías con amplitudes del orden de 1.62 a 2.16, con fases instantáneas, para dos anomalías, de -90; de -90 a -135 para la tercera, y la cuarta -45 y para la última de 0 a 45 grados. El rango de polaridad aparente de estas anomalías es de -2000 a -3000. Para el tiempo 1740 ms se definieron cuatro anomalías de interés con amplitudes del orden de 1.62 a 2.16 con fases instantáneas de 0 a 45 y -90 a -45 grados. Con polaridades relativas de 0 a -3500. Para el tiempo 1760 ms se interpretan cuatro anomalías

con amplitudes de 1.62 a 2.52. Una anomalía con una fase instantánea de 90, dos anomalías con fases de 0 a 45, y la última con fases de -135 a -45 grados. La polaridad relativa varía entre -2000 y -3000. Al tiempo 1780 ms (Figuras 6.4 y 6.5) se analizaron cuatro anomalías con amplitudes entre 2.16 y 2.52, y fases instantáneas de 0 a 45 en dos anomalías, -45, +90 y entre -180 y -135 grados respectivamente en las otras tres.

Se seleccionó una anomalía regional de rumbo NE e identificada como X de la distribución en planta (time-slice) de las anomalías de los diversos atributos (Figura 6.4). Anomalía que al tiempo de configuración de 1700 ms en término medio tiene una magnitud del orden de 1000 a 2000. Al tiempo 1760 ms localmente esta anomalía se descomponen en las anomalías A y B con amplitudes envolventes del orden 5000 y -3000 en tanto que a 1780 ms el orden de magnitud de la amplitud envolvente es de 2000 y 3000 respectivamente. Estas anomalías se correlacionan con la litología, e información de registros geofísicos de pozo.

Estas anomalías se repiten en los diferentes tiempos analizados en la ventana de 1700 a 1800 ms. Para esta ventana se obtuvieron planos de la amplitud en detalle para los tiempos 1700, 1760 y 1780 ms.

En particular en la línea J-J' se observa una zona anómala comparativamente contrastante de las trazas de amplitud envolvente. Esta zona anómala se asocia a las anomalías A y B. Las anomalías A y B están aproximadamente circunscritas entre los CDPs 618 y 604 y en la ventana temporal de 1600 a 1800 ms. Las anomalías más representativas se localizan entre los CDPs 618 y 606. Entre los CDPs 616 y 614 tenemos la anomalía A; y del CDPs 612 a 606, la anomalía B, ambas en la ventana de tiempo entre 1600 a 1800 ms. Se observa que las anomalías seleccionadas A y B se manifiestan a diferentes niveles de la escala del tiempo en la ventana comprendida entre 1600 a 1800 ms.

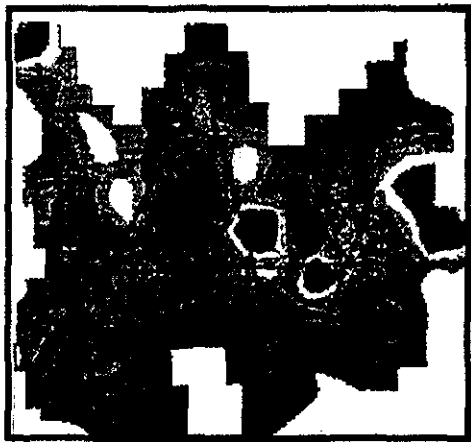


Figura 6.4

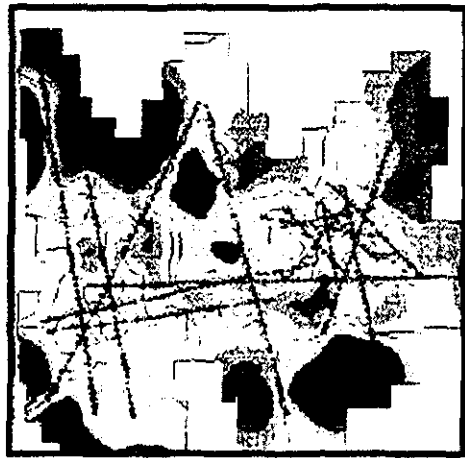


Figura 6.5

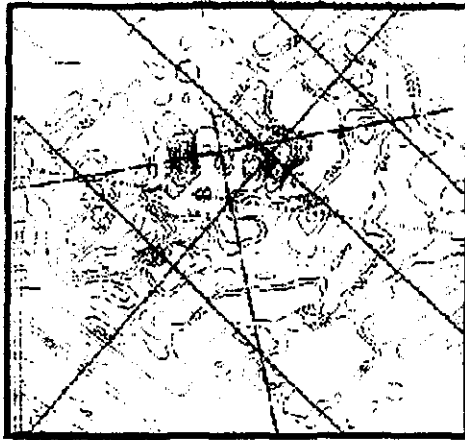


Figura 6.6

Figura 6.4: Amplitud envolvente (regional) al tiempo de configuración de 1780 ms.

Figura 6.5: Fase instantánea (regional) al tiempo de configuración de 1780 ms.

Figura 6.6: Amplitud envolvente (local) al tiempo de configuración de 1780 ms.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

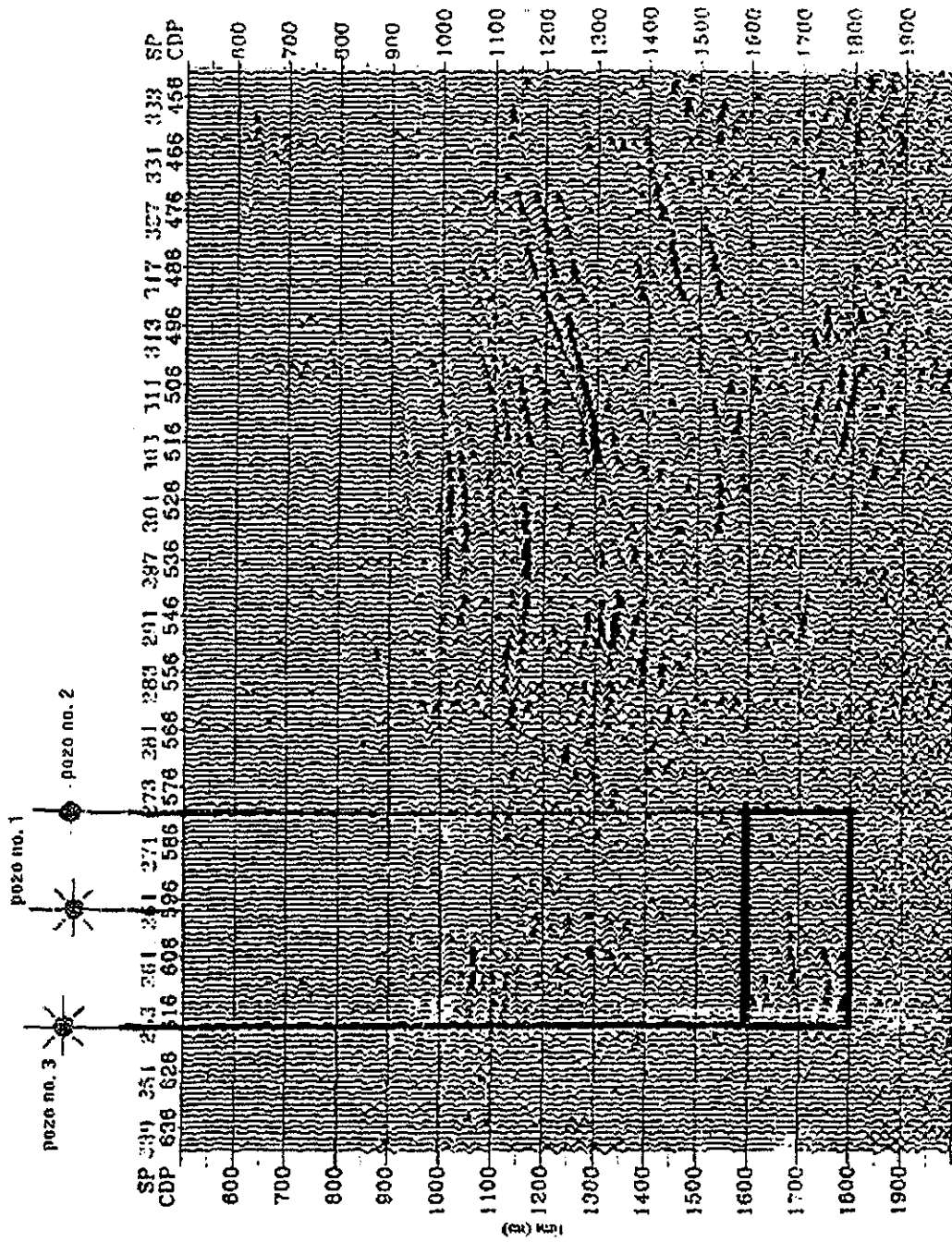
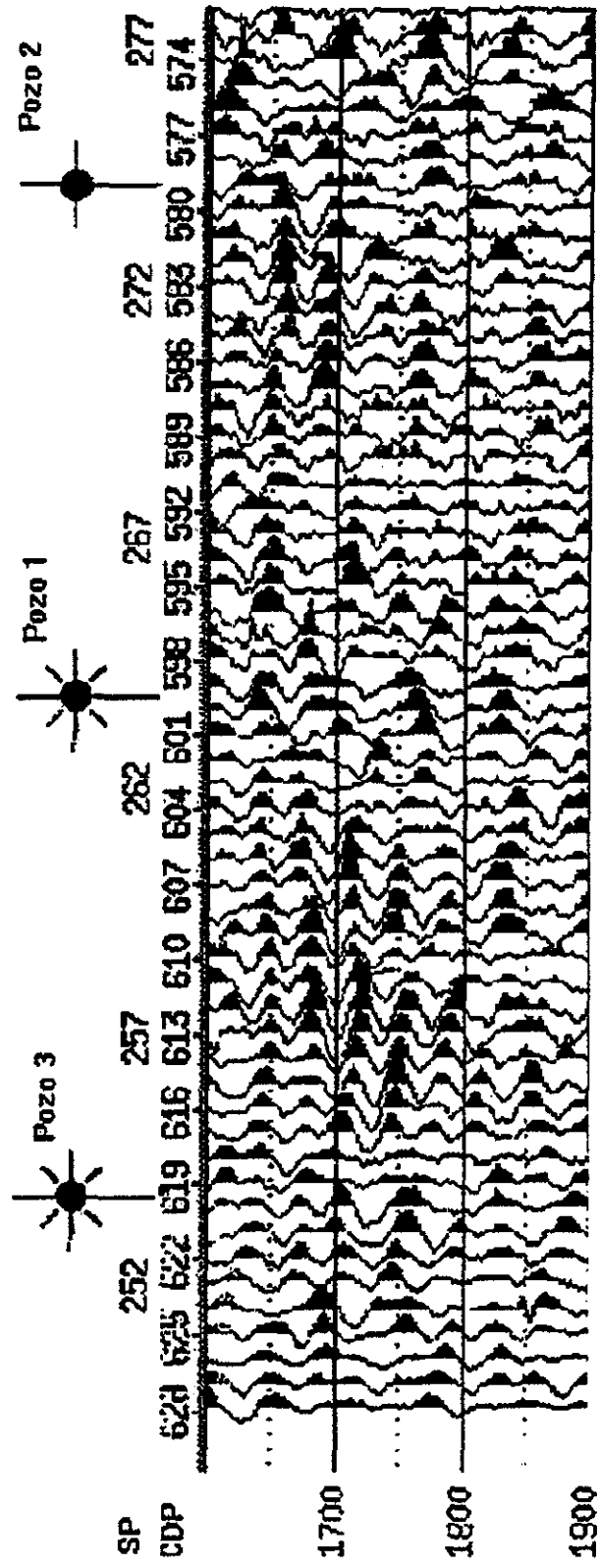
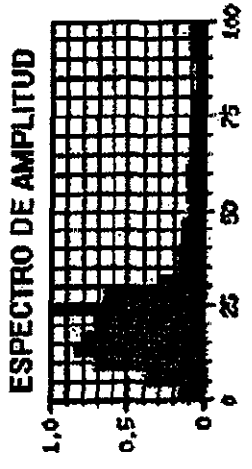


Figura 6.7: Sección sísmica J-J'  
 Línea sísmica que cruza las anomalías A y B

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN



SECUENCIAS DE PROCESAMIENTO APLICADO A DATOS REALES: DISPERSIÓN GEOMÉTRICA, FILTRADO INVERSO Q, COMPENSACIÓN DE AMPLITUD, ANÁLISIS DE VELOCIDAD, CORRECCIÓN ESTÁTICA Y NMÓ.



RANGO DE TRAZAS : 565 a 628  
RANGO DE TIEMPO : 1600 a 1850 ms.

Figura 6.8: Ventana sísmica de análisis del CDP 628 al CDP 565 y al tiempo de 1600 a 1900 ms.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

En la Figura 6.9 se muestra, de la ventana sísmica de análisis (CDPs 628 y CDP 565; de 1600 a 1900 ms), el atributo sísmico de amplitud envolvente y las distribuciones de las amplitudes envolventes relativamente anómalas. Esta Figura presenta la localización de los pozos productores 3, y 1 y también el pozo improductivo 2. En base a esta información se han subdividido las anomalías A y B en las anomalías III, IV, V, VI, I, y II. En el pozo productor de gas en arenas no. 3 (CDP 619; 1700 a 1800 ms) la amplitud envolvente es del orden de 0.65 a 1.05 (anomalía no. III); en el pozo productor no 1 (CDP 599; 1660 a 1690 ms) la variación de la amplitud envolvente está en el rango 0.54 a 1.05 (anomalía I); y en el pozo improductivo no. 2 (CDP 580; 1600 a 1800 ms) (anomalía II) la amplitud envolvente varía entre 0.13 a 0.37, por lo que relativamente es un mínimo respecto a las correspondientes variaciones de los pozos 3 y 1.

Pueden discriminarse las siguientes anomalías: no. IV (CDPs 616 y CDP 604 y de 1600 a 1820 ms) con una magnitud del orden entre 0.54 a 1.69; la no V (CDPs 612 y 609 y de 1580 a 1780 ms) con una magnitud del orden entre 0.58 a 1.69; y la anomalía no. VI (CDPs 607 y 606 y de 1660 a 1780 ms) y amplitud entre 0.54 a 1.69.

Los pozos productores no. 3 (CDP 619) y no. 1 (CDP 599) en arenas con gas se asocian a una (anomalía III y anomalía I) amplitud envolvente de baja magnitud relativa en tanto que la anomalía II (CDP 580) está asociada al pozo no. 2 improductivo en lutitas y las anomalías IV, V y VI manifiestan amplitudes relativas altas.

Por otra parte, para la misma ventana de análisis, se obtuvieron adicionalmente los atributos convencionales de fase instantánea y frecuencia instantánea. En las Figuras 6.10 y 6.11 se presentan con carácter ilustrativo la fase instantánea y frecuencia instantánea. En la Figura 6.10 se presenta la gráfica de la fase instantánea en la ventana sísmica de análisis del CDP 628 al CDP 565 y entre 1600 y 1900 ms. Figura en la que observamos que las trazas de fases instantáneas no nos permiten definir ninguna anomalía. En la Figura 6.11 se presenta la gráfica de las trazas de frecuencia instantánea para la misma ventana. En el pozo no. 3 productor en



arenas con gas (CDP 619; de 1700 a 1800 ms) se observa que la magnitud de traza de frecuencia instantánea varía entre 20 a 38 Hz. En tanto que en el pozo no.1 productor (CDP 599; de 1700 a 1800 ms) entre 24 a 96 Hz.

En la Figura 6.10 se presenta la gráfica del atributo sísmico AVO de onda P\*G para la ventana que estamos analizando. Con el atributo de AVO, P\*G (gradiente) manifiesta en las anomalías números IV, V, VI, I, II magnitudes comprendidas en el rango de -2.52 a 1.29; los valores negativos entre -2.52 a -1.29 y los positivos entre 0 y 1.29. Únicamente la anomalía no. III es positiva y del orden de magnitud de 0.65.

En la Figura 5.11 se presenta la gráfica del atributo sísmico AVO de onda P más G. La anomalía I, IV, V y VI son las más representativas. Tienen una distribución de valores comprendidos en el rango de -2.57 a 2.57, específicamente los valores positivos y negativos entre los rangos -1.29 a -2.57 y 0.65 a 2.57 respectivamente. En la anomalía II el rango de variación es de -1.89 a -0.65 y 0.30 a 1.89. En la anomalía III el orden de variación está entre -0.65 a 0.65. En la Figura 6.12 se presenta el denominado factor de fluido (Smith and Gidlow, 1987). Las amplitudes relativas en las anomalías I, IV, V y VI varían en los rangos de -0.65 a 1.29 y de 0.65 a 1.89 y en la anomalía II se tiene un valor representativo comparativamente más bajo del orden de 0.65 con valores aislados de -1.29. En la anomalía III la amplitud relativa del orden de 0.65.

Por otra parte, para la misma ventana de análisis, se estimaron los mismos atributos de los resultados del análisis de multiresolución. A continuación presentamos los resultados del análisis de multiresolución así como los atributos obtenidos respectivamente.

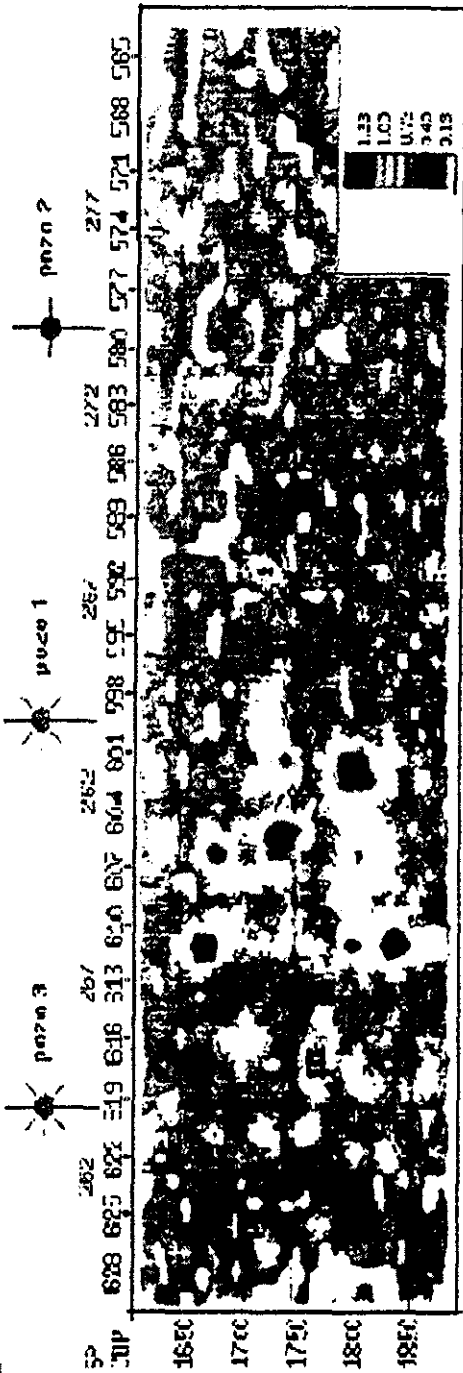


Figura 6.9: Amplitud envolvente y distribución de amplitudes de anomalías (anomalías II, III, IV, V, VI). Localización de pozos no. 3 (CDP 619), pozo no. 1 (CDP 599) y pozo no. 2 (CDP 580). Ventana sísmica de análisis del CDP 628 al CDP 565 y al tiempo 1600 a 1900 ms.

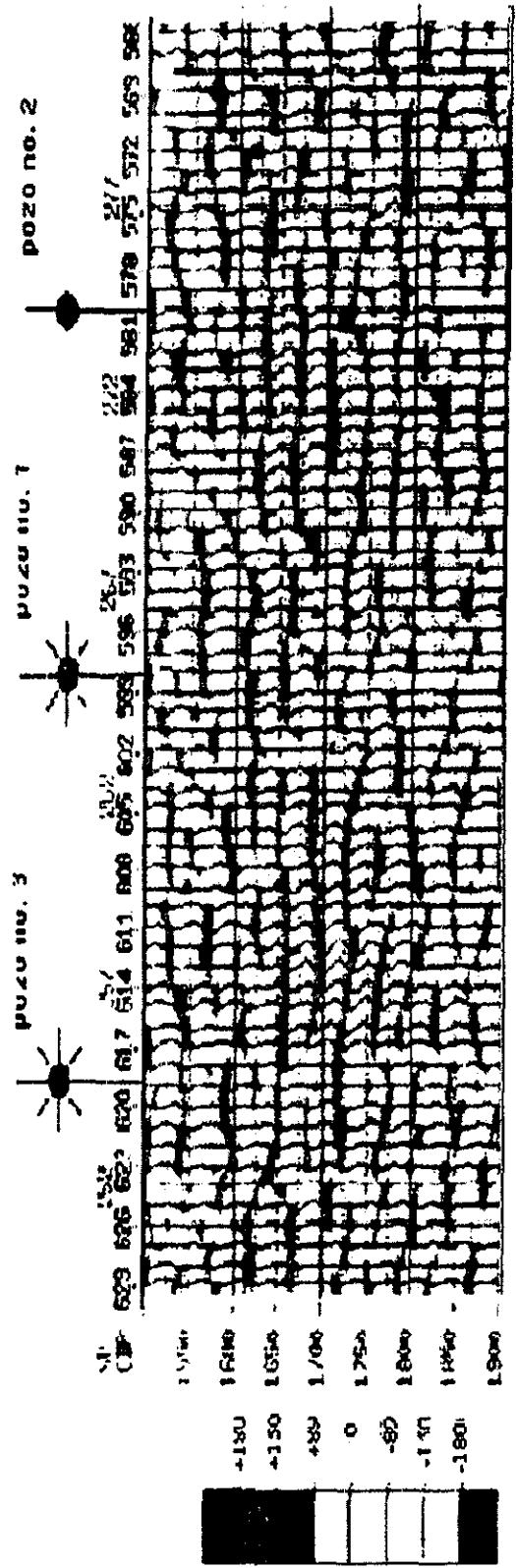


Figura 6.10: Fase instantánea en la ventana sísmica de análisis del CDP 628 al CDP 565 y al tiempo de 1600 a 1900 ms

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

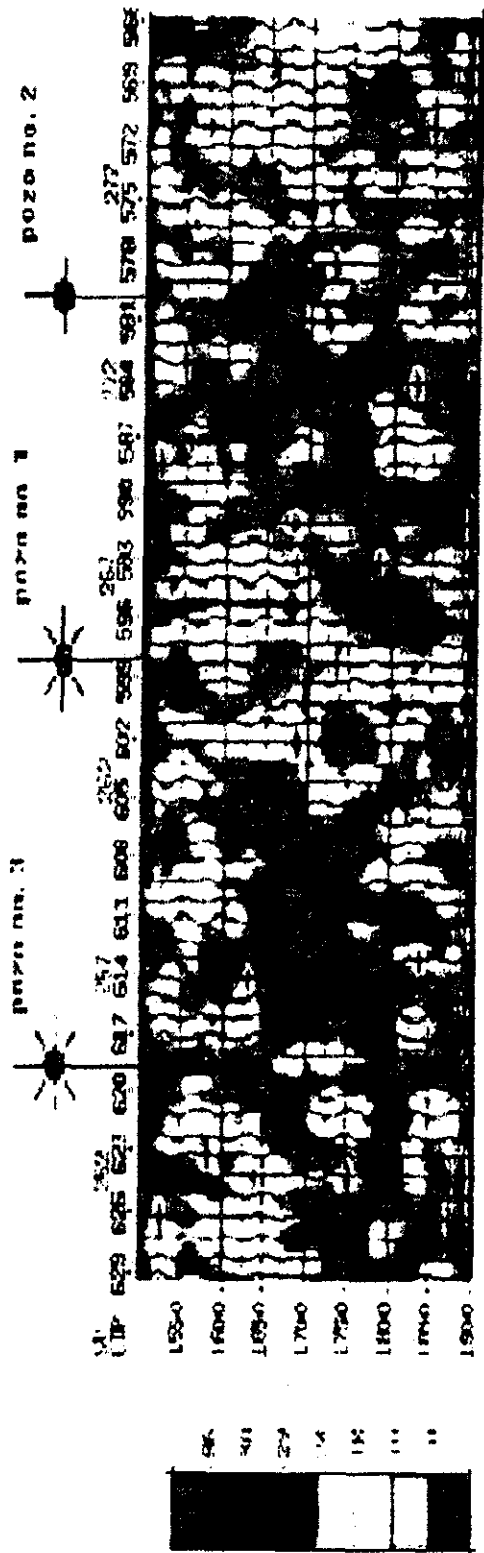


Figura 6.11: Frecuencia instantánea en la ventana sísmica de análisis del CDP 628 al CDP 565 y al tiempo de 1600 a 1900 ms.

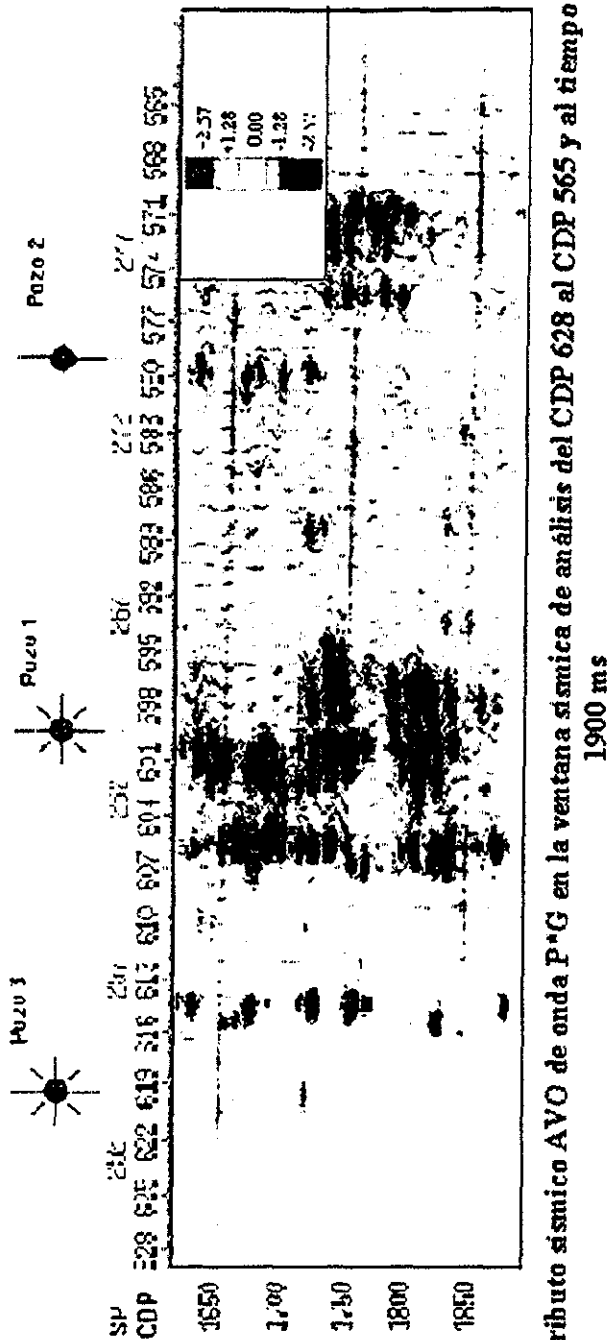


Figura 6.12: Atributo sísmico AVO de onda P\*G en la ventana sísmica de análisis del CDP 628 al CDP 565 y al tiempo de 1600 a 1900 ms

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

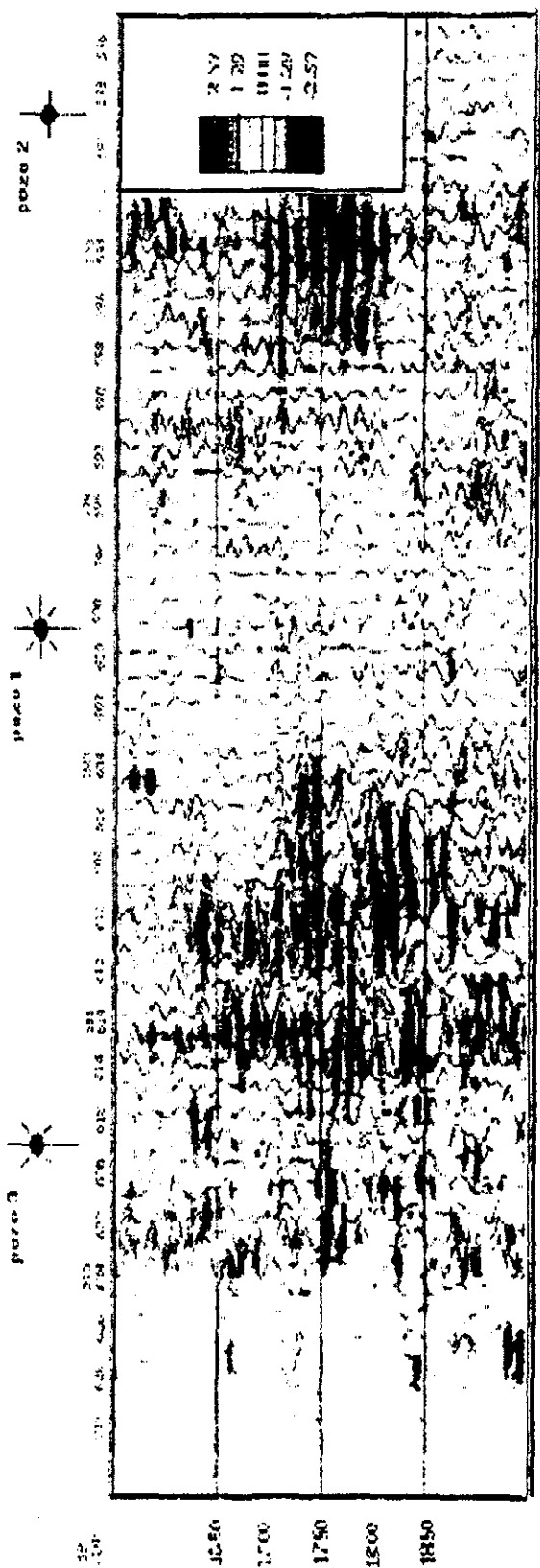


Figura 6.13: Atributo sísmico AVO de onda P más G de la ventana sísmica de análisis del CDP 628 al CDP 565 y al Tiempo 1600 a 1900 ms

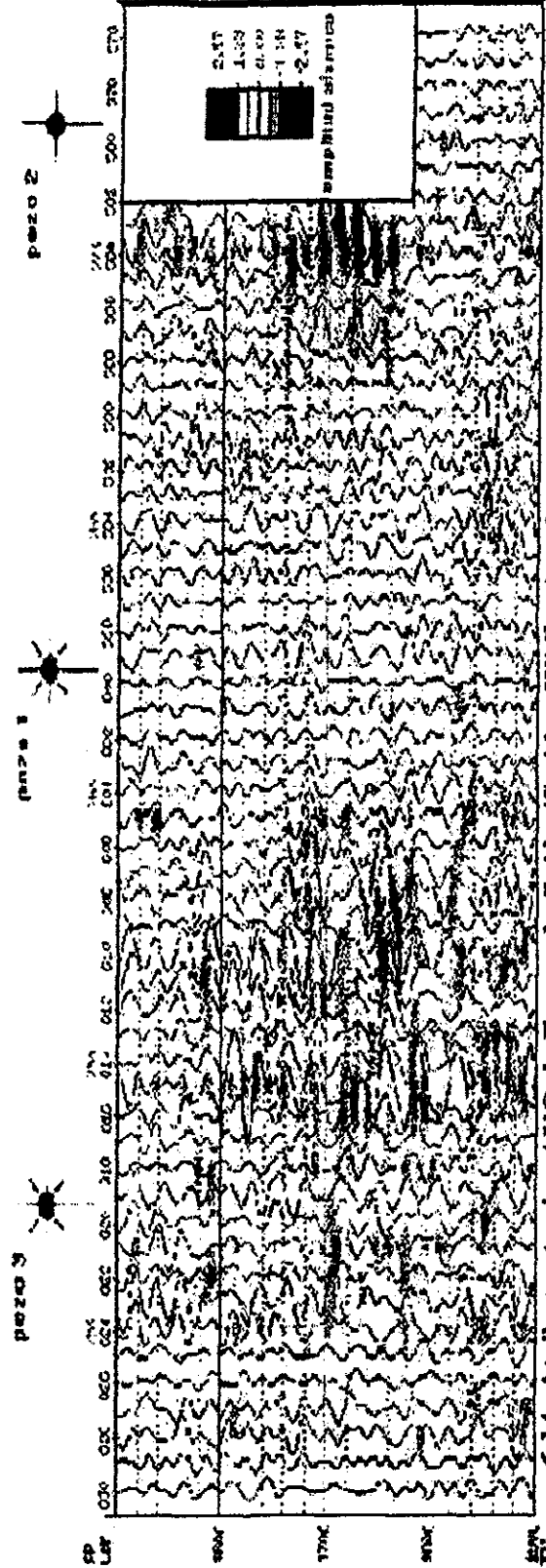


Figura 6.14: Atributo sísmico AVO de Factor de fluido (Smith y Widlow) en la ventana sísmica de análisis del CDP 628 al CDP 565 y al tiempo 1600 a 1900 ms.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

#### 6.4. Análisis de Multiresolución.

En el análisis y evaluación de los atributos sísmicos, el análisis de multiresolución tiene un papel relevante en la evaluación e interpretación de los datos sísmicos. En nuestro caso, primero se descomponen los datos de las secciones sísmicas o ventanas sísmicas de análisis, en distintos niveles de resolución. Descomposición efectuada aplicando la transformada ondicular discreta unidimensional (1-D) y bidimensional (2-D). Para este fin se desarrolló e implantó un sistema de análisis en lenguaje de programación FORTRAN teniendo como núcleo la transformada ondicular (1-D y 2-D).

Desde la introducción, los atributos sísmicos de la traza compleja (amplitud envolvente, fase instantánea, frecuencia instantánea) se han convertido en una poderosa herramienta de interpretación cualitativa y que actualmente se ha reconocido su posibilidad de predecir propiedades de las rocas. Cabe indicar que en un marco general, que la amplitud envolvente se relaciona con la energía de los eventos sísmicos y por lo tanto enfatizan las magnitudes de los coeficientes de reflexión. La amplitud envolvente se utiliza para identificar las unidades estratigráficas y su correlación (a través de fallas) como también permite detectar la distribución de anomalías de amplitud encontradas alrededor de fallas, depósitos de gas y acñamientos (pinch out). La fase instantánea es independiente de la amplitud y enfatiza continuidades, formas estructurales y estratigráficas. La frecuencia instantánea delinea con carácter más precisos los eventos esbozados por las trazas de fase instantánea, y por lo tanto los límites de las unidades sedimentarias y estructurales tales como fallas, arrecifes, cambios de facies y algunas veces características de frecuencia natural de algunas unidades.

En nuestro caso, a la línea sísmica que pasa por la anomalía B, inicialmente, se le realizó un procesamiento sísmico especial que conserva la amplitud verdadera, aplicando la compensación de amplitud consistente con la superficie, deconvolución consistente con la superficie, filtrado con transformada Radon, correcciones estáticas y dinámicas y estáticas residuales. Posteriormente se aplicó la transformada ondicular rápida en 1-D y 2-D, obteniendo diferentes niveles de resolución (del nivel 1 a 10). Se puede apreciar que en los primeros

niveles de resolución se tiene un contenido de altas frecuencias. En forma secuencial en los niveles más altos (5, 6, 7, 8, 9 10) el contenido de la información tiende a las bajas frecuencias.

Para los diversos niveles de resolución se obtuvieron los diferentes atributos sísmicos clásicos. A continuación presentamos un conjunto de gráficas que ilustran las características de los atributos sísmicos obtenidos del análisis de multiresolución uni y bidimensional.

Del análisis de multiresolución unidimensional incluimos las Figuras 6.15 a 6.19.

En la Figura 6.15 las trazas de fase instantánea al nivel de resolución 1 se manifiestan en un rango de 0 a 90 grados y aisladamente entre 90 a 180 grados. En particular alrededor del pozo productor 3 (CDP 619) podemos definir posibles horizontes o tendencias que no se observan en la Figura 6.18 (fase instantánea obtenida por métodos convencionales).

En la Figura 6.16 las trazas de amplitud envolvente, al nivel de resolución 3, presenta una distribución de máximos entre 1.19 y 1.75 aproximadamente coincidentes con las anomalías IV, V y VI de la Figura 6.9. Comparativamente la anomalía asociadas con los pozos productores 3 y 1 son relativamente de magnitud más bajas que las correspondiente al pozo improductivo 2.

En la Figura 6.17 las trazas de amplitud envolvente, al nivel de resolución 5, verticalmente manifiestan una alternancia de valores paralelos al eje del tiempo; en los pozo productores 3 y 1 tienen una variación de 0.15 a 0.28. En tanto que verticalmente y paralelo al eje del tiempo el pozo improductivo 2 se tienen valores de 0.30 a 0.45.

En la Figura 6.18 se observa en las trazas de fase instantánea, al nivel de resolución 5, cierta homogeneidad centrada en la parte media de la ventana de análisis y asociado al pozo productivo 1 en arenas con gas, con un rango respectivo de variación comprendido de -151 a 151 grados. Esta zona define una secuencia de unidades contrastantes y perfectamente

delineadas respecto a la fase instantánea clásica presentada en la Figura 6.10. En esta figura se puede observar la continuidad de las diferentes unidades u horizontes en la ventana de análisis, en contraste a la representación de las trazas de fase instantánea de la Figura 6.10 (fase instantánea obtenidas por métodos convencionales (transformada de Hilbert))...

En la Figura 6.19 las trazas de frecuencia instantánea, al nivel de resolución 5, presentan posibles contrastes de carácter local; se hacen evidentes entre los CDPs 613 a 610 y de 1670 a 1740 ms (entre los pozos productores 3 y 1) asociables a las anomalías IV, V y VI de la Figura 6.9. Existe cierta homogeneidad vertical en los pozos productores 3 y 1; un rango de variación comprendido entre 14 y 18 en contraste con el comportamiento en las proximidades del pozo improductivo 2 en el que se observa variaciones relativas de más baja magnitud (variaciones comprendidas de 0 a 16 Hz).

Del análisis de multiresolución bidimensional incluimos las Figuras 6.20 a 6.26.

En la Figura 6.20, las trazas de fase instantánea al nivel de resolución 2 manifiestan una zona anómala entre los CDPs 624 y 621 y de 1830 a 1870 ms, y entre los CDPs 601 y 571 y de 1600 a 1874 ms. Zonas anómalas con una continuidad no muy bien definidas pero en general bosquejando ciertos patrones identificables.

En la Figura 6.21, al nivel de resolución 3, se observa una distribución de anomalías que van progresivamente delineando posibles unidades correlacionables con unidades estratigráficas. La variación presente está comprendida entre -150 y 150 grados. Esta figura nos indica que en base a un análisis 2-D se obtiene a niveles de resolución comparativamente más altos una resolución mayor en contraste con el logrado en el caso del análisis 1-D.

En la Figura 6.22, las trazas de fase instantánea, al nivel de resolución 5, perfilan las unidades presentes, las cuales se van precisando. También se identifica cierta tendencia hacia un espesor homogéneo mayor. Las variaciones están comprendidas entre -150 y 150 grados.

En la Figura 6.23, observamos que a este nivel de resolución 5, las unidades han sido delineadas con continuidad con respecto a la Figura 6.22 y con relación a la versión 1-D comparable (Figura 6.18). Se presenta un espesor relativamente uniforme e interfases claramente identificables. Las variaciones están comprendidas entre -150 y 150 grados. Se definen unidades que pudieran ser correlacionadas como unidades físicamente homogéneas a esta resolución. Vemos que a resoluciones a niveles mayores nos es posible definir características sísmicas comunes a un grupo de unidades geológicas, en tanto que a niveles menores se logran identificar aspectos locales (arrecifes, diferencias de facies, etc.) dentro de las características homogéneas comunes.

En la Figura 6.24, las trazas de frecuencia instantánea al nivel de resolución 5 nos permite presenta ciertas unidades y tendencias en forma más continua, que con el análisis convencional (Figura 6.11). Entre los CDPs 595 y 591 de 1820 a 1865 ms, con una variación 23 a 33 Hz y un mínimo relativamente superficial entre los CDPs 627 y 611 y de 1525 a 1750 ms relacionado con el pozo productor 3, cuya variación es de 0 a 9 Hz. Esta información correlaciona en una proporción mayor con el patrón que presenta la fase instantánea (Figuras 6.22, 6.21) y que no puede apreciarse en el atributo sísmico obtenido convencionalmente (transformada de Hilbert), que está ilustrado en la Figura 6.11.

En la Figura 6.25, al nivel 5 y para las trazas de frecuencia instantánea, se puede observar un mínimo verticalmente por debajo de pozo productor 3, entre los CDPs 629 y 615 y de 1750 a 1850 ms. Con valores entre -1 a 6; y máximos relativos entre 9 a 15 a distintos niveles del tiempo.

En la Figura 6.26, al nivel de resolución 7 y para las trazas de amplitud envolvente, en la proximidad a los pozos productores 3 y 1 característicamente se observa una variación relativa de 0.07 a 0.10 en tanto que en el pozo improductivo 2 se manifiesta un mínimo entre 0.01 y



0.03. Esta figura se correlaciona con el atributo convencional respectivo (Figura 6.9). Vemos que nos proporciona una imagen suavizada.

Del análisis comparativo de las Figuras 6.9 a 6.26, se puede observar que los atributos sísmicos obtenidos con el método convencional (Figuras 6.9 a 6.14) y aquellos obtenidos en base al análisis de multiresolución (Figuras 6.15 a 6.26), que éstos últimos, aportan información cualitativa relativa de mejor calidad que los primeros. En términos generales la complementariedad de ambos permite una evaluación cualitativa y correlacionable mucho más consistente de la ventana de análisis considerada.

Con la ayuda de los diferentes atributos sísmicos obtenidos con la transformada ondicular tanto 1-D como 2-D integrados con la información de registros de pozo y de los diferentes modelos sustentados tanto por información geológica como sísmica se delimitó el yacimiento de gas. En este estudio no se presenta detalles exhaustivos de esta delimitación. El trabajo se ha limitado a un análisis comparativo e integrado entre los atributos sísmicos obtenidos por el método convencional y de los obtenidos haciendo consideraciones del análisis de multiresolución 1-D y 2-D.

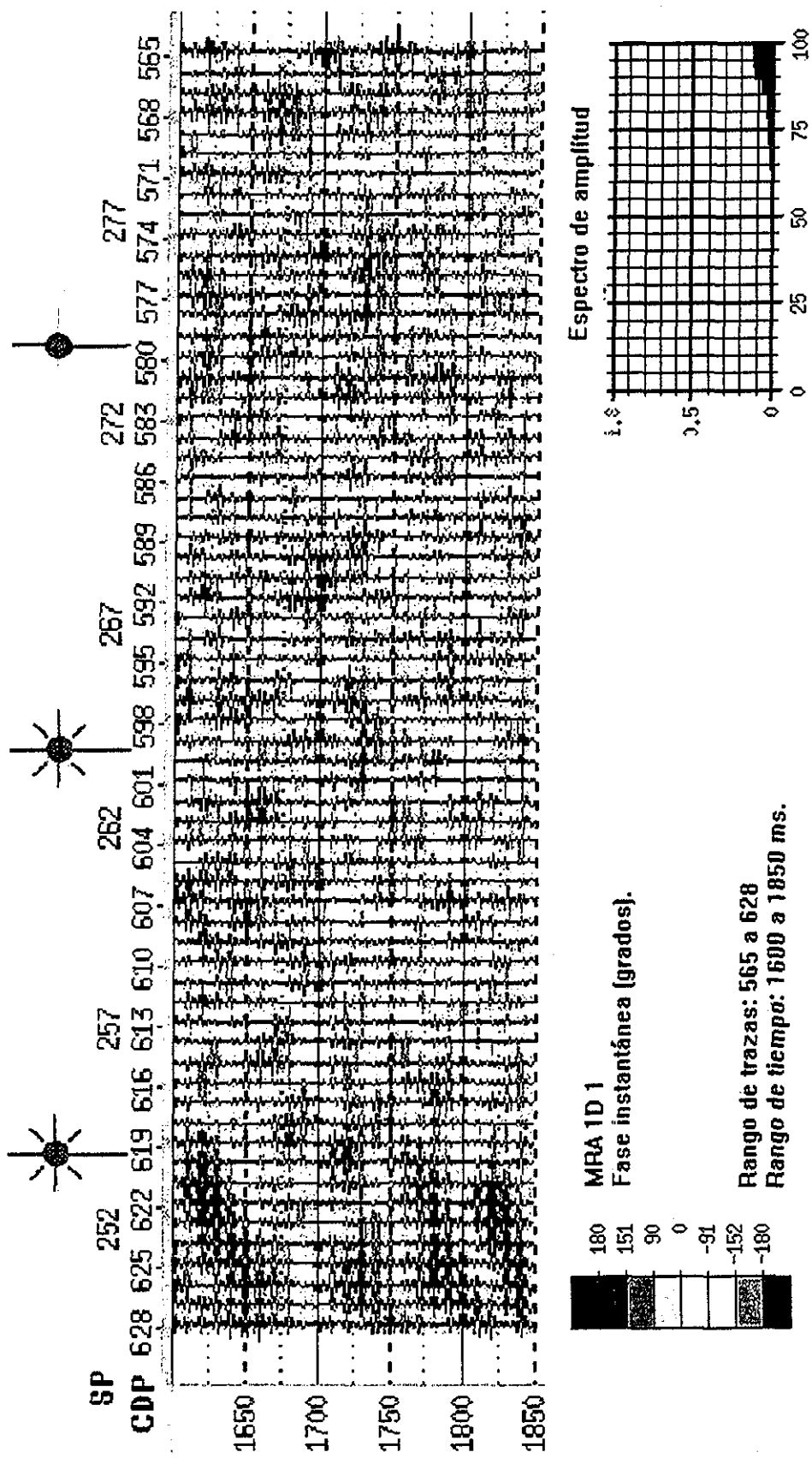


Figura 6.15: MRA unidimensional. Descomposición de datos al nivel 1 de resolución. Fase instantánea.

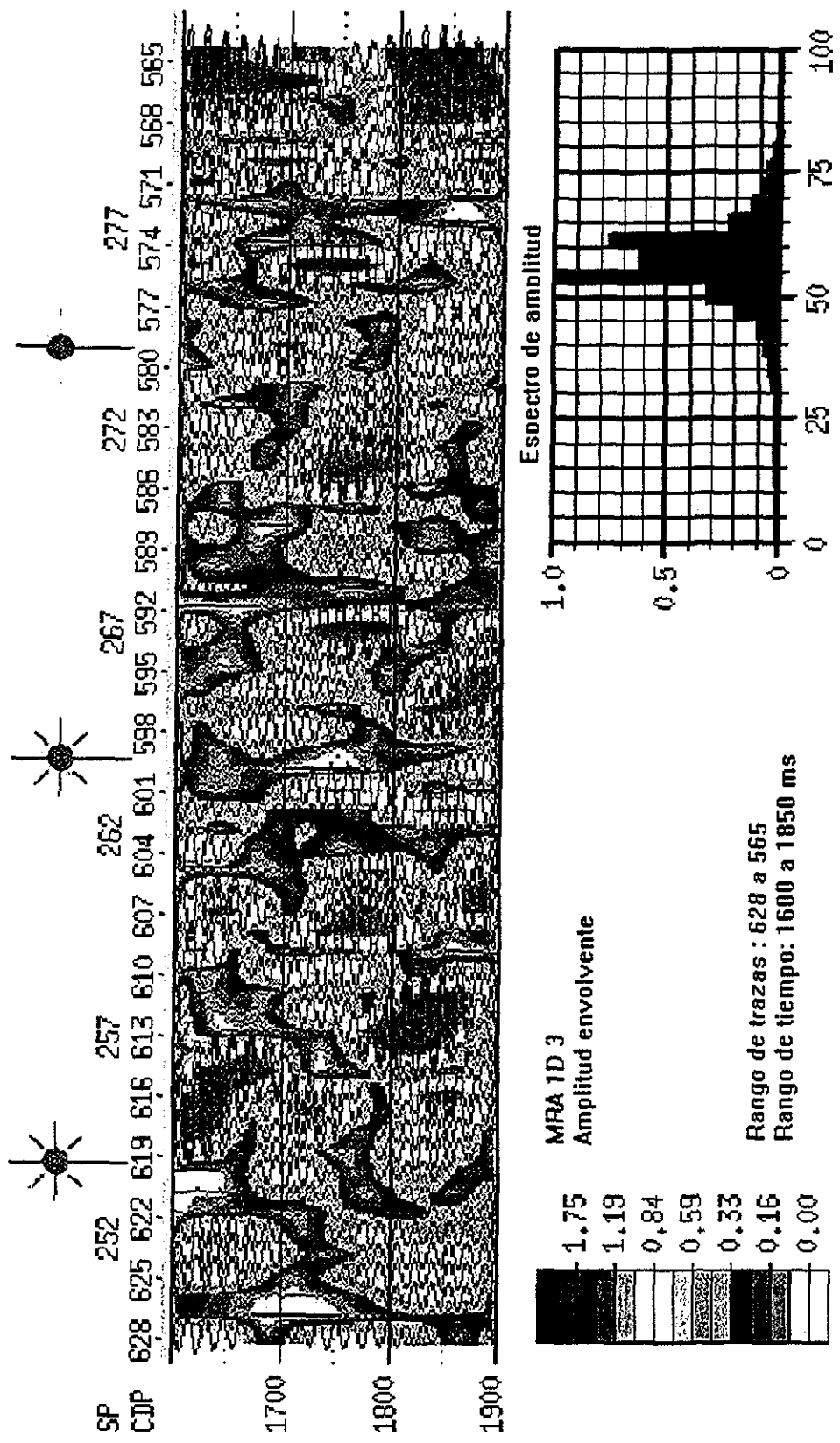


Figura 6.16: MRA unidimensional. Descomposición de datos al nivel 3 de resolución. Amplitud envolvente.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

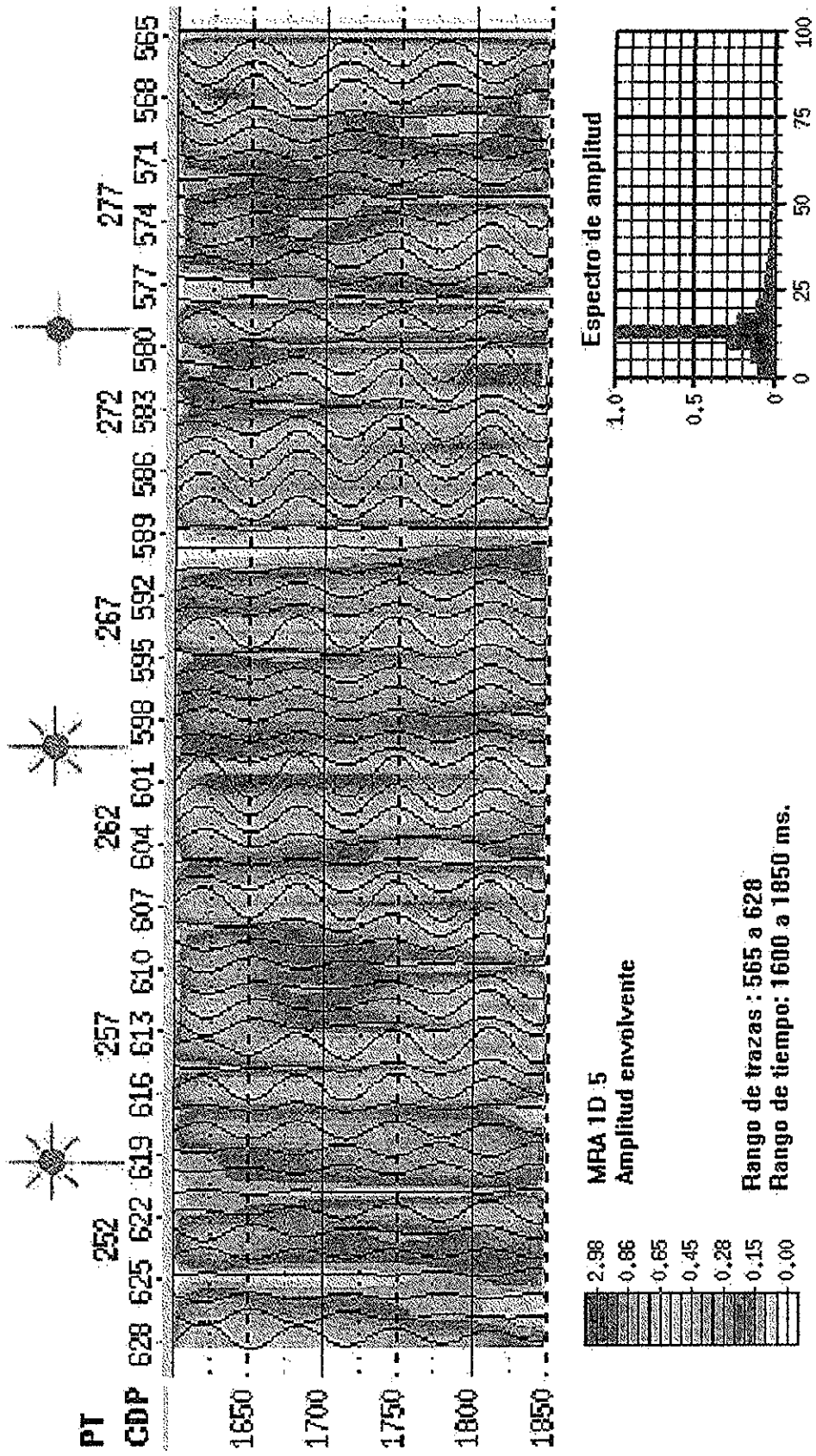


Figura 6.17: MRA unidimensional. Descomposición de datos al nivel 5 de resolución. Amplitud envolvente.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

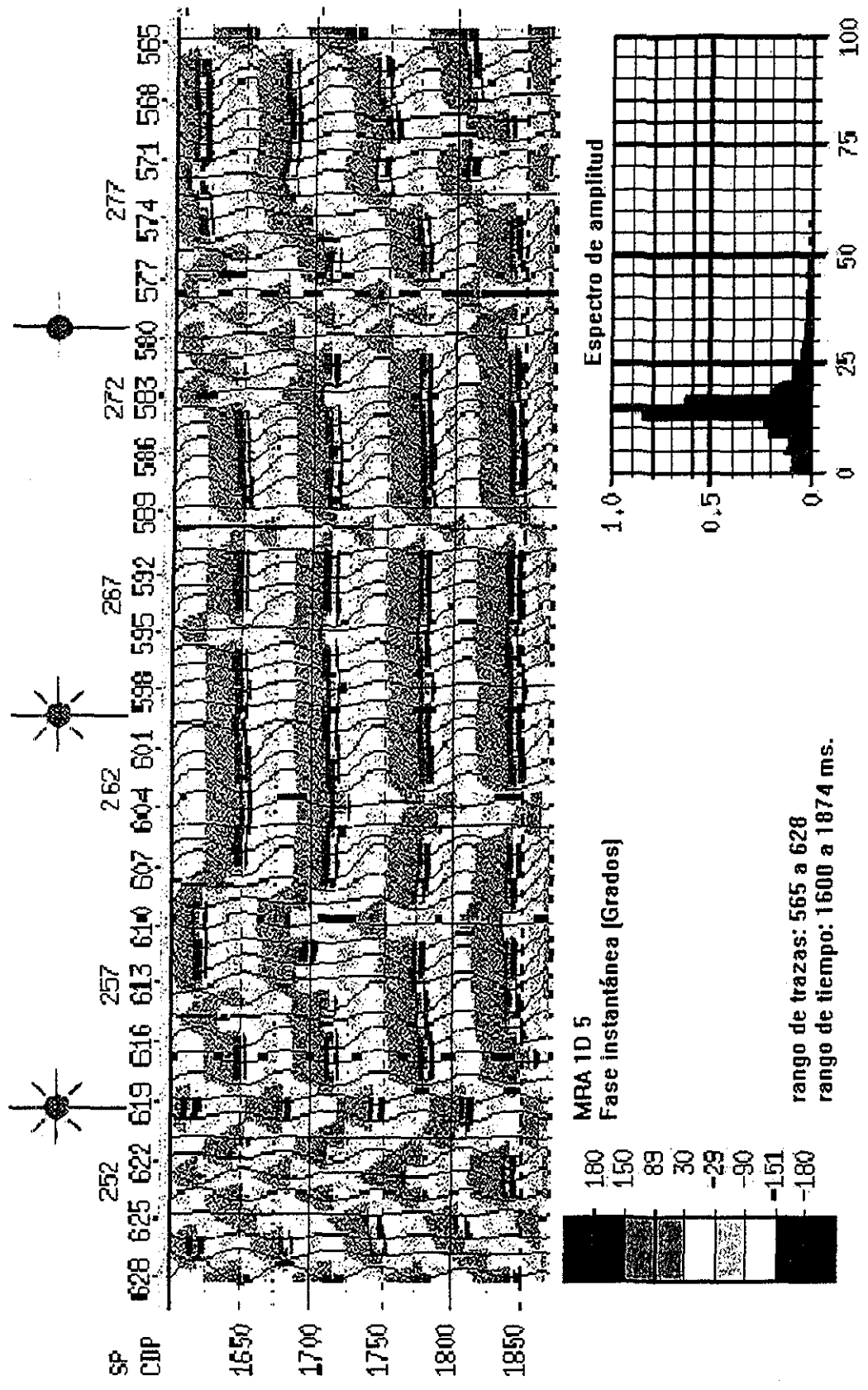


Figura 6.18: MRA unidimensional. Descomposición de datos al nivel 5 de resolución. Fase instantánea.

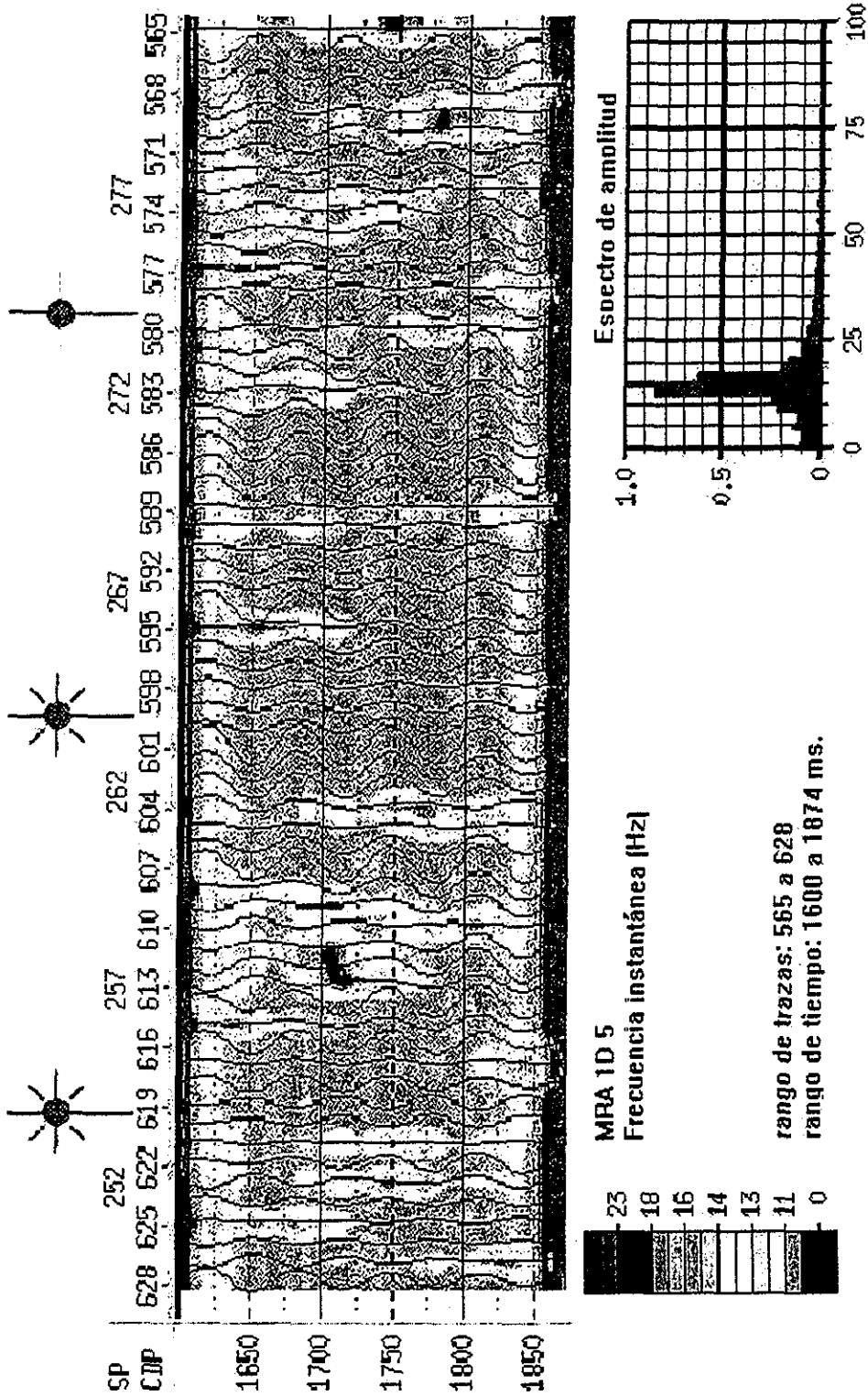


Figura 6.19: MRA Unidimensional. Descomposición de datos al nivel 5 de resolución. Frecuencia instantánea.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

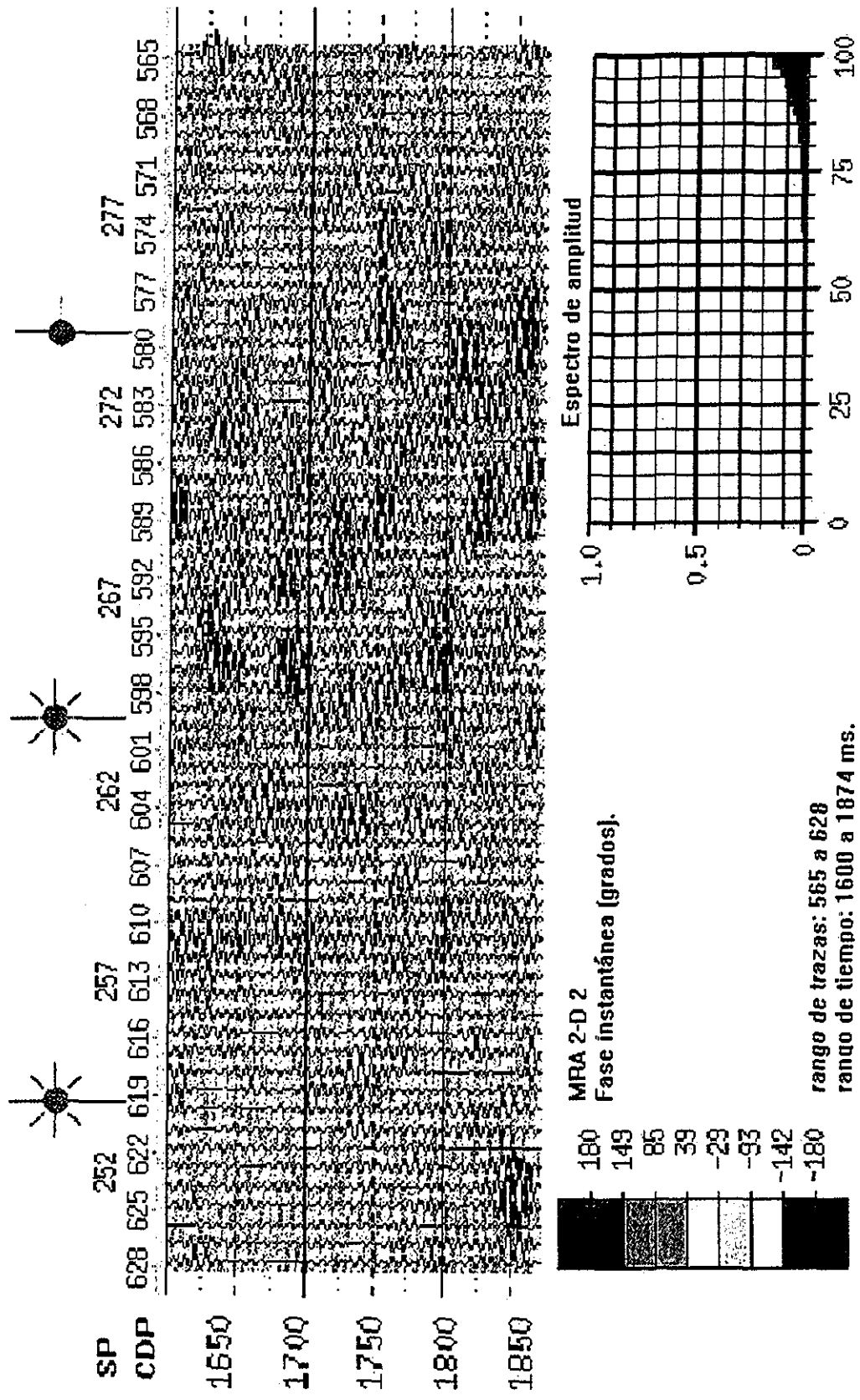


Figura 6.20: MRA bidimensional. Descomposición de los datos al nivel 2 de resolución. Fase instantánea.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

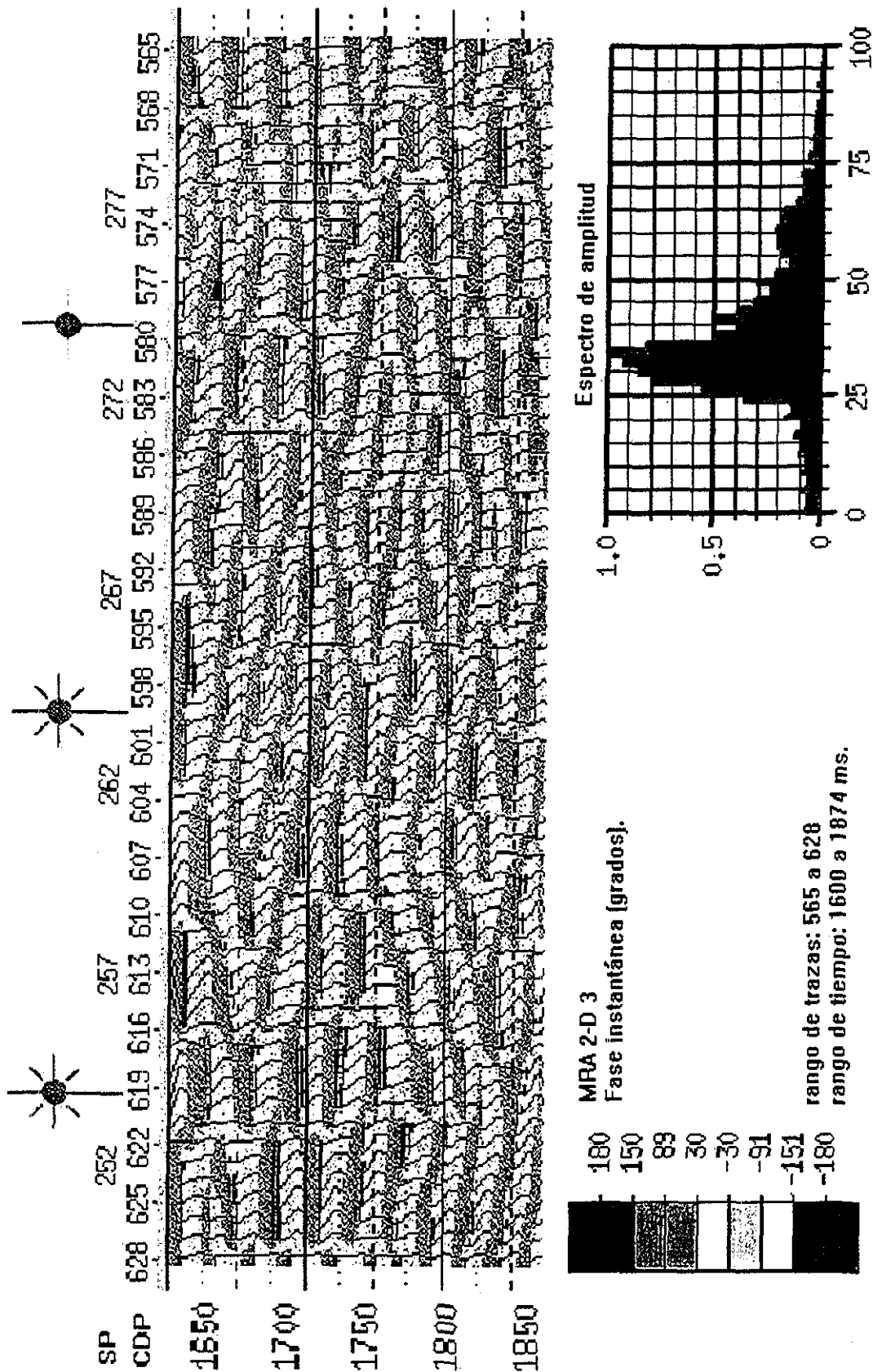


Figura 6.21: MRA bidimensional. Descomposición de los datos al nivel 3 de resolución. Fase instantánea.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



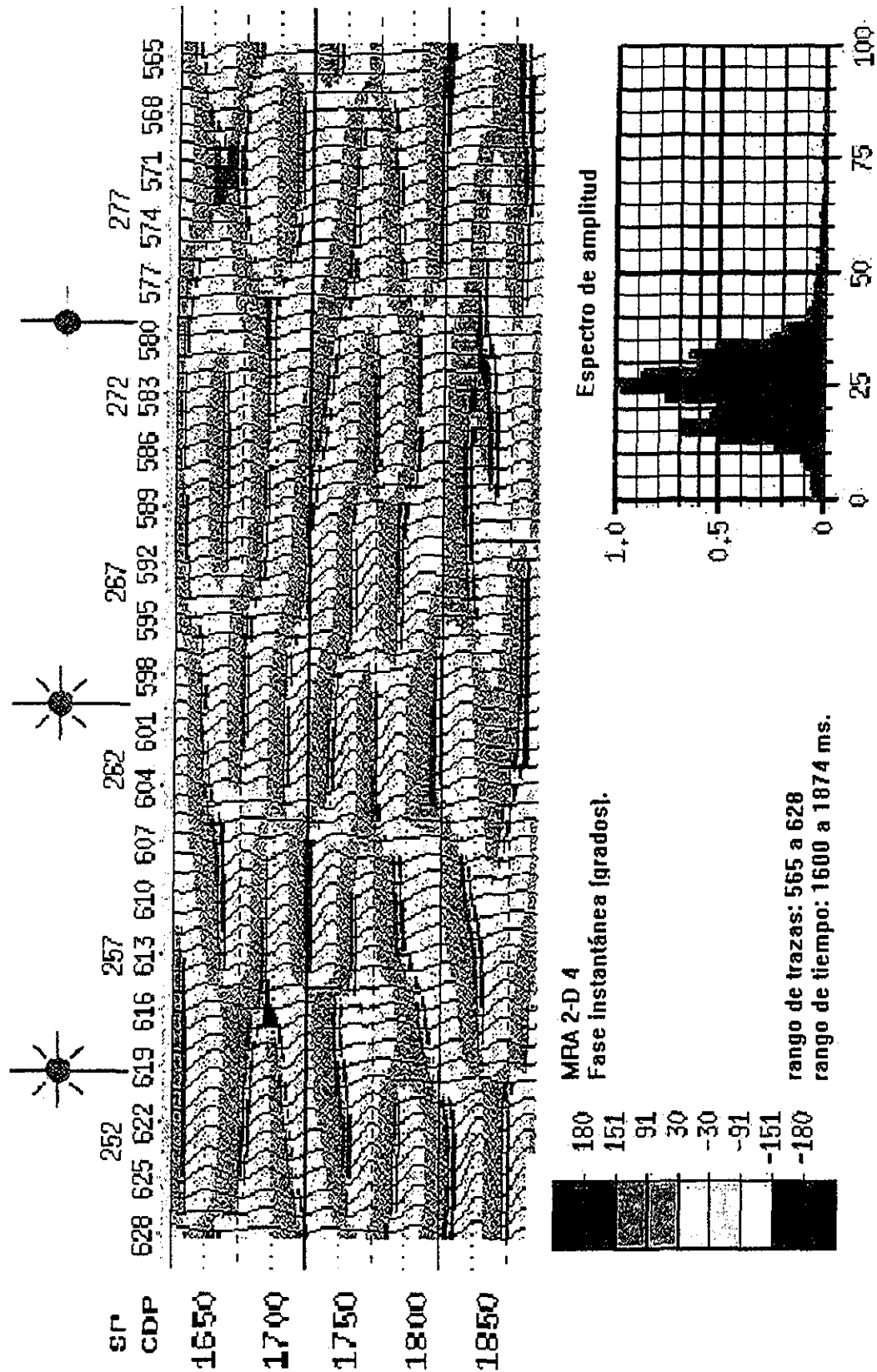


Figura 6.22: MRA bidimensional. Descomposición de los datos al nivel 4 de resolución. Fase instantánea.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

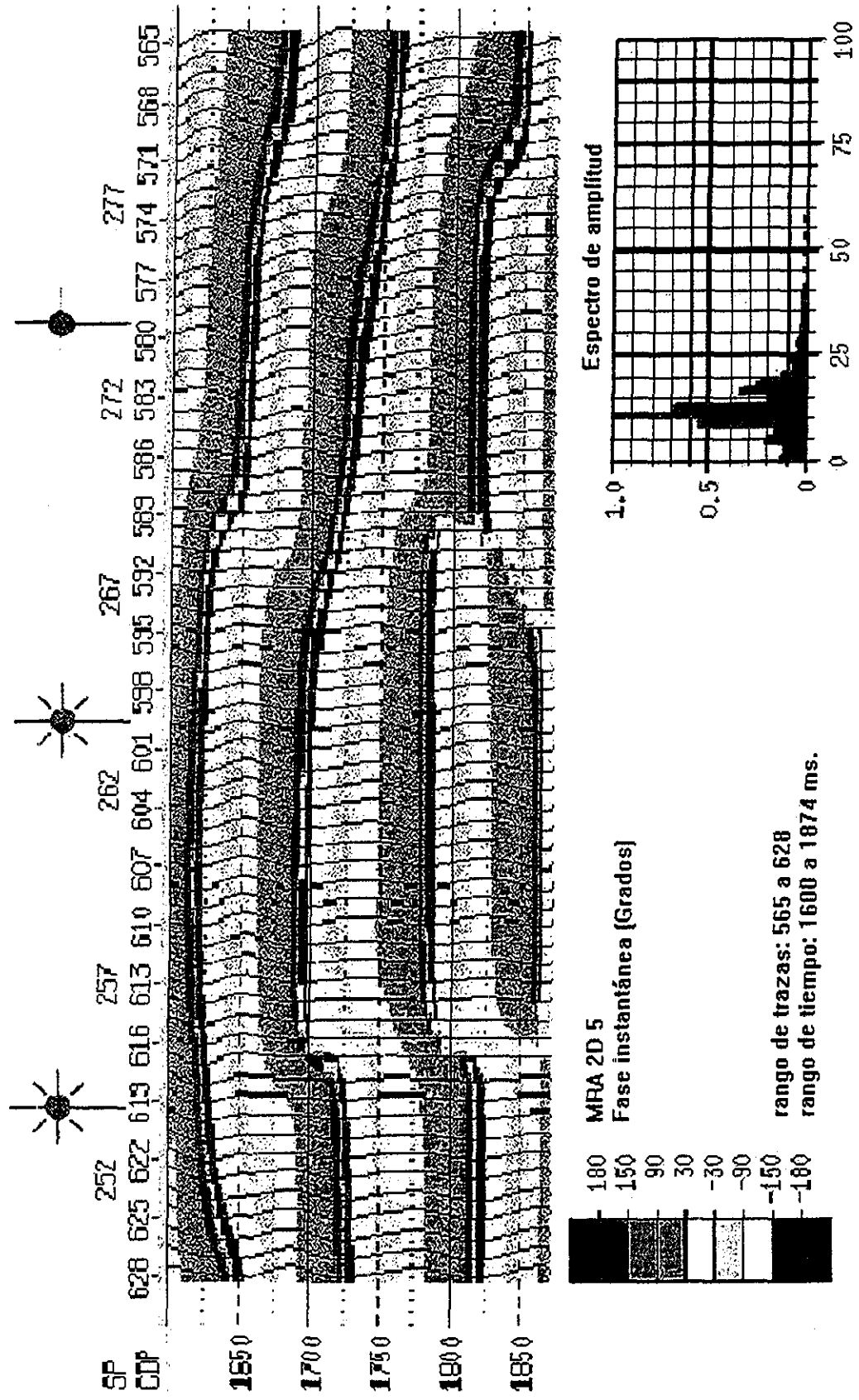


Figura 6.23: MRA bidimensional. Descomposición de datos al nivel 5 de resolución. Fase instantánea.

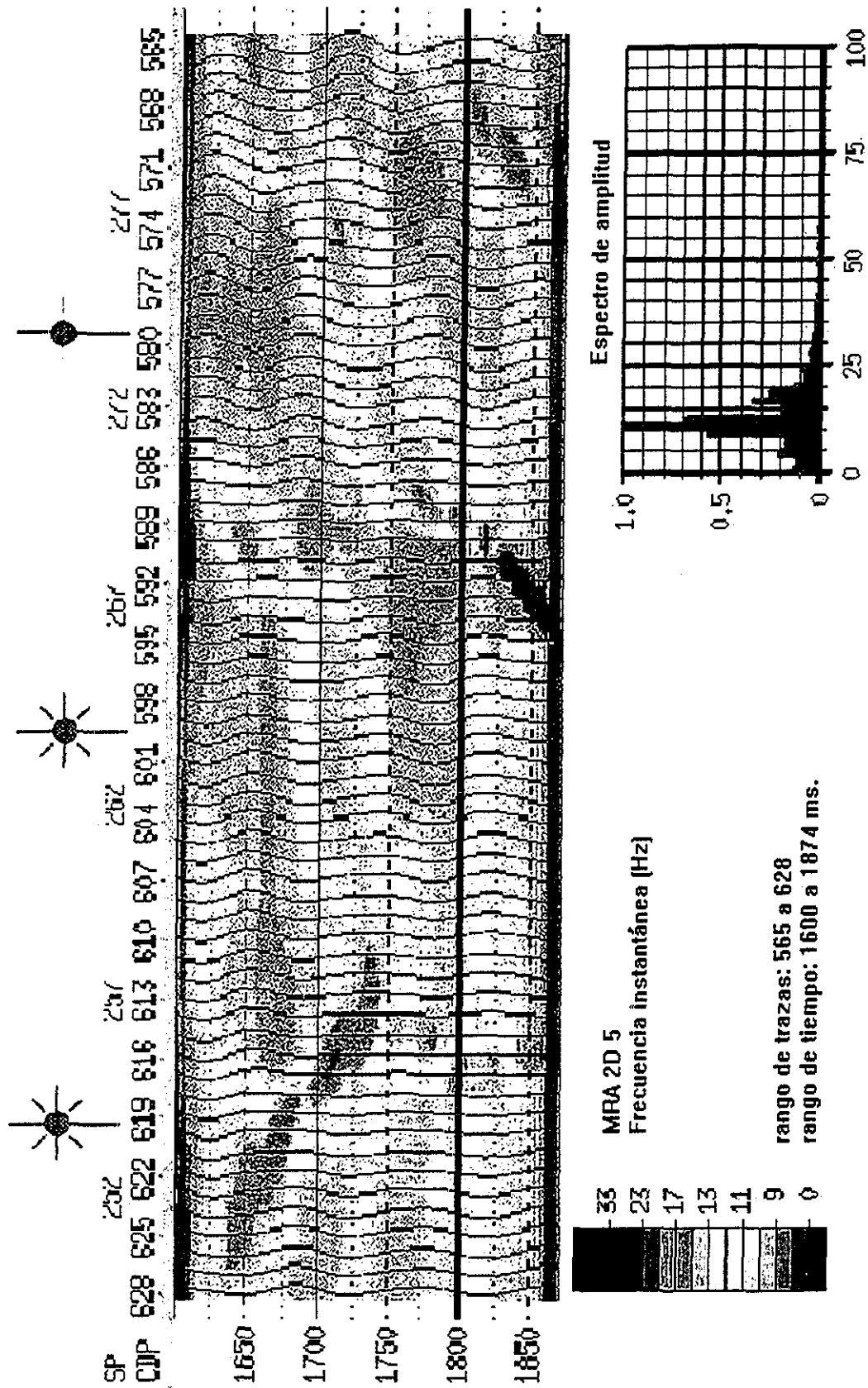


Figura 6.24: MRA bidimensional. Descomposición de datos al nivel 5 de resolución. Frecuencia instantánea.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

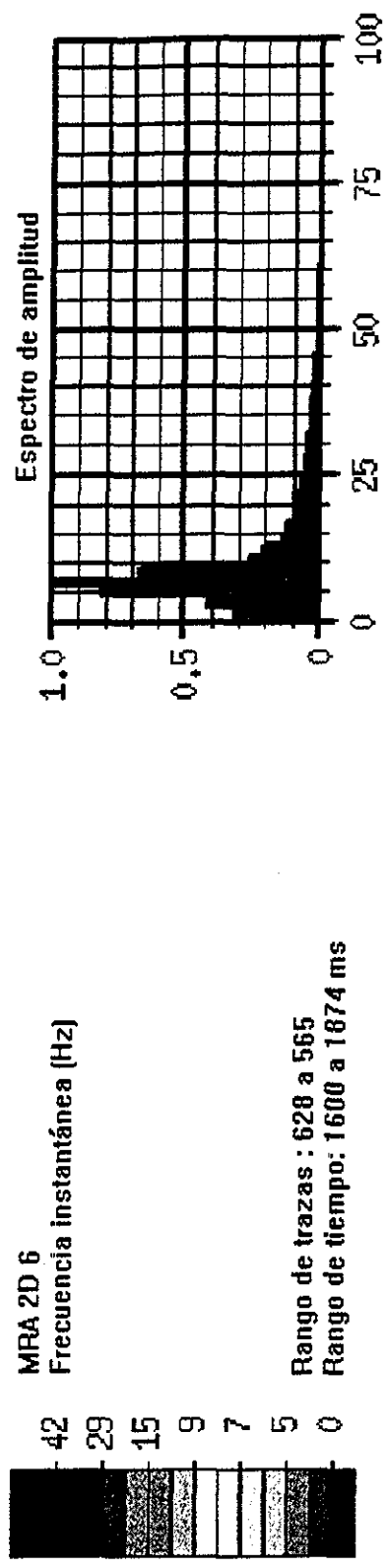
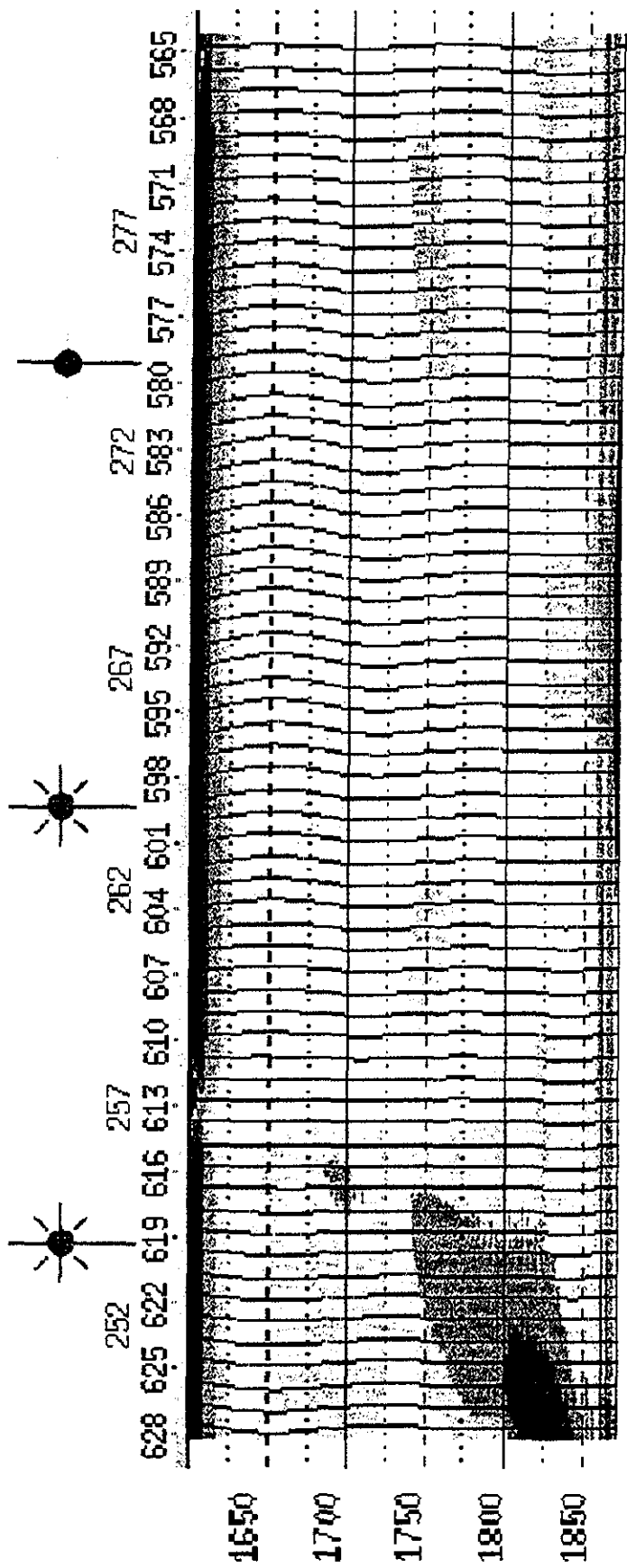
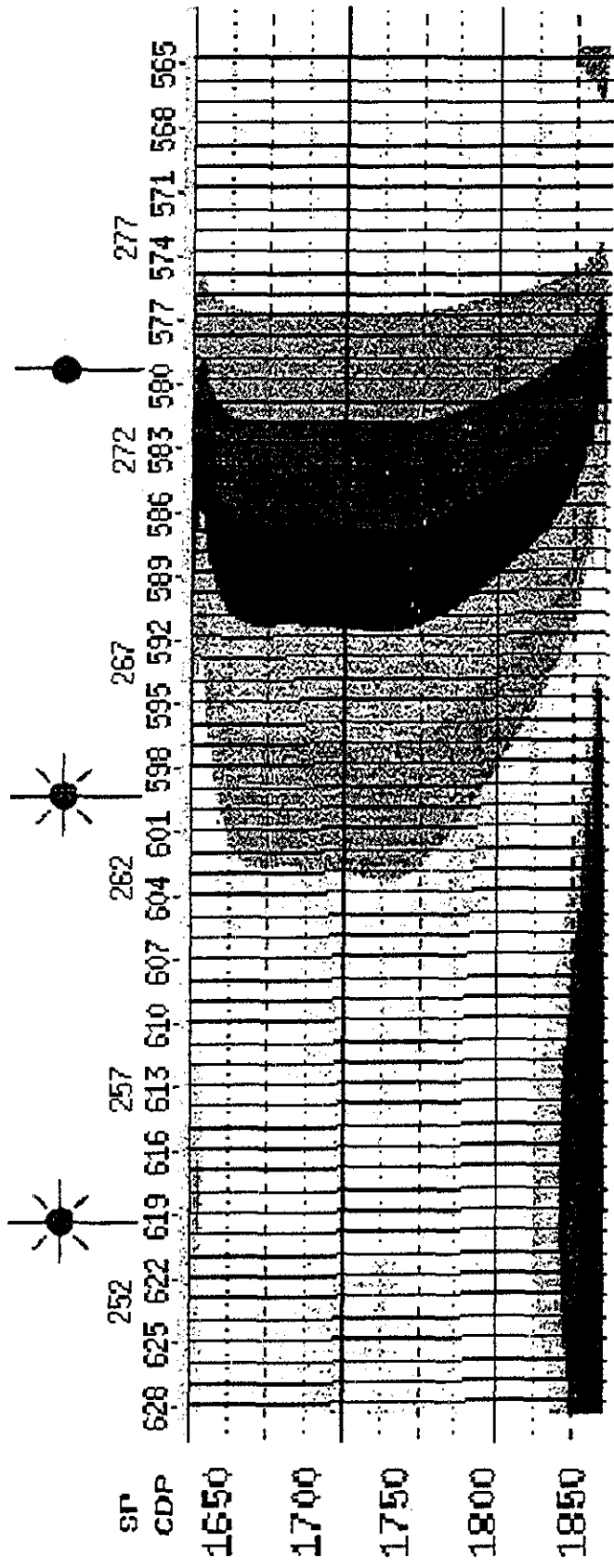
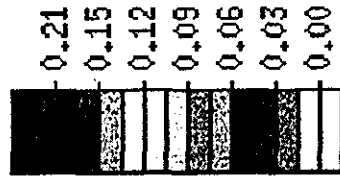


Figura 6.25: MRA bidimensional. Descomposición de datos al nivel 6 de resolución. Frecuencia instantánea.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



MRA 2D 7  
Amplitud envolvente



rango de trazas: 565 a 628  
rango de tiempo: 1600 a 1874 ms.

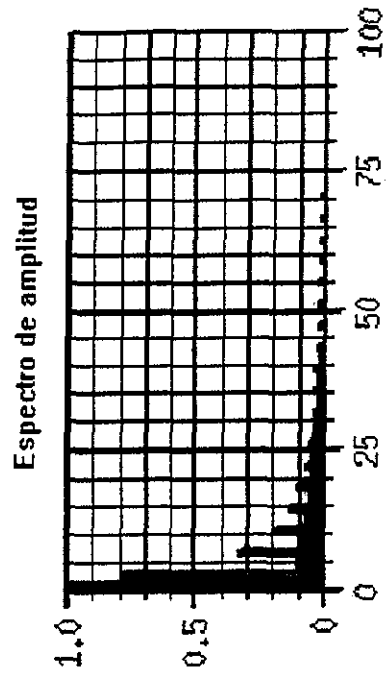


Figura 6.26: MRA bidimensional. Descomposición de los datos al nivel 7 de resolución. Amplitud envolvente.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## ..5. Conclusiones.

Del análisis comparativo de las Figuras 6.9 a 6.26, se puede observar que de entre los atributos sísmicos obtenidos con el método convencional (Figuras 6.9 a 6.14) y aquellos obtenidos en base al análisis de multiresolución (Figuras 6.15 a 6.26), éstos últimos, aportan información cualitativa relativa de mejor calidad que los primeros. En términos generales la complementariedad de ambos permite una evaluación cualitativa y correlacionable mucho más consistente de la ventana de análisis considerada.

Un cuidadoso acondicionamiento de la señal sísmica se hace necesario ya que la preservación de las amplitudes es predeterminante en la determinación de los atributos sísmicos.

Los atributos sísmicos obtenidos a partir de los resultados de la aplicación del análisis de multiresolución en el contexto de la transformada de ondícula bidimensional principalmente, contrastan y proporcionan mayores elementos útiles en la caracterización propuesta en comparación con los atributos sísmicos obtenidos convencionalmente (transformada de Hilbert).

Particularmente el análisis de multiresolución y los atributos sísmicos relacionados obtenidos en los niveles, tres y cuatro, ayudan significativamente a delimitar con más precisión las zonas productoras.

Con la ayuda de los diferentes atributos sísmicos obtenidos con la transformada ondicular tanto 1-D como 2-D integrados con la información de registros de pozo y de los diferentes modelos sustentados tanto por información geológica como sísmica se delimitó el yacimiento de gas. En este estudio no se han presentado los detalles exhaustivos de esta delimitación. El trabajo se ha limitado a un análisis comparativo e integrado entre los atributos sísmicos obtenidos por el método convencional y de los obtenidos haciendo consideraciones del análisis de multiresolución 1-D y 2-D.

La información estratigráfica y geológica en general y calibración de las secciones sísmicas con información los registros geofísicos de pozo, evitan variaciones drásticas y significativas en la evaluación e interpretación de los datos.

El análisis sísmico efectuado, permite establecer con respecto al pozo productor número 1 (CDP 598) y de 1700 ms a 1800 ms y entre los CDPs 623 y 695 los límites probables del yacimiento de gas, con su espesor máximo en el CDP 618 con una presencia máxima de registro en el tiempo entre 1750 ms a 1800 ms y posible extrangulamiento hacia el CDP 605 y practico desaparecimiento en la posición del pozo improductivo número 3 (CDP 580).

El modelado sísmico acústico bidimensional, incorporó los aspectos determinantes que caracterizan la geometría del yacimiento, reproduciendo los eventos sobresalientes presentes en la información sísmica de campo.

Los resultados experimentales obtenidos en el marco de este trabajo, establecen que la transformada ondicular 1-D y 2-D es una herramienta poderosa para el análisis de multiresolución y el procesamiento de datos sísmicos, así como la interpretación de los atributos sísmicos de los diferentes niveles de multiresolución.

Del presente estudio, puede concluirse que el análisis de multiresolución, y por lo mismo la transformada de ondícula conforma una herramienta versátil, complementaria en la evaluación de datos sísmicos, localización de zonas de interés económico y delimitación de yacimientos de gas. En este contexto, en particular, el análisis de multiresolución en las fases de preprocesamiento, análisis, cálculo y correlación de atributos sísmicos, se presenta como una herramienta poderosa de procesamiento y análisis de datos sísmicos tanto en la delimitación de yacimientos como en su caracterización. El análisis de multiresolución y su complementación en el análisis y evaluación de datos sísmicos, con técnicas de análisis y procesamieanto sísmico, son técnicas altamente recomendables.

## 7. CONCLUSIONES GENERALES.

La transformada de Fourier es una herramienta adecuada al análisis de señales característicamente periódicas, pero críticamente inadecuada en el caso de transitorios, particularmente si se requiere una localización precisa. La transformada de Fourier supone que periodicidad y duración infinita de los datos, lo que la hace una herramienta limitada en el análisis de datos no estacionarios. La transformada de Fourier está basada en ondas senosoidales y cosenosoidales que son ineficientes para representar datos no alisados.

La representación ondicular consiste de la selección de una ondícula particular y la utilización de las versiones comprimidas de esta única 'onda' para efectuar el análisis. Una ondícula es una señal transitoria que decae rápidamente a las muy bajas frecuencias.

La ventaja principal de la transformada ondicular radica en que es una transformada de dos parámetros (la energía de la señal que es analizada se distribuye en un plano cuyas coordenadas son  $a$  (índice de escalamiento) y  $b$  (índice de traslación), en contraposición a la transformada de Fourier que es de un sólo parámetro.

En el marco del análisis de multiresolución, implícitamente contenido en la transformada ondicular, las posibilidades de discriminar eventos sísmicos a diversas escalas, favorece el análisis y evaluación de datos sísmicos.

Las ondículas o representación ondicular tiene su propio campo de aplicación en el procesamiento digital de señales e imágenes. Puede utilizarse independiente o complementariamente a los métodos tradicionales del análisis de Fourier.

La transformada de ondícula, particularmente está muy bien adaptada para el análisis de funciones, señales u operadores con alta concentración de altas frecuencias superpuestas a componentes de baja frecuencia de magnitud relativa alta.



Se requiere evaluar las características de la información temporal (espacial) original, previa a la aplicación de la transformada ondicular para la determinación del contenido de frecuencias requerido en el dominio de la transformación .

Dado que las señales sísmicas en general son de carácter transitorio y oscilatorio por naturaleza, pueden ser eficientemente representarse por bases ondiculares.

En el marco de la presentación de este trabajo, queda documentado e ilustrado, que los desarrollos matemáticos involucrados con la transformada ondicular, predeterminan una nueva herramienta de procesamiento, análisis y evaluación de datos sísmicos, cuyo campo de aplicaciones se diversifica por los distintos métodos geofísicos y particularmente impactará en futura evolución de la tecnología sísmica de reflexión.

## 8. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA.

- Boschetti, F., Hornby, P., and Horowitz, F.G., 2001, Wavelet based inversion of gravity data, *Exploration Geophysics*, 32, 48-55.
- Beylkin, G., Coifman, R. and Rokhlin, V.F., 1991, Fast wavelet transform and numerical algorithms, *Comm. Pure Appl. Math.*, 64, 141-184.
- Blackman, R., B., and Tukey, J., W., 1958, *The Measurement of Power Spectra*, Dover Publications, Inc., New York, p.178.
- Bodine, J.H., 1986, Waveform analysis with seismic attributes, *Oil & Gas Journal*, June 1986, 59-63.
- Calderón Barrera, J. A., García Esparza, J., Martínez Sierra, R., 1996, Potencial remanente de la cuenca de Burgos, VII Simposium de Geofísica y Exposición, Veracruz'96, AMGE, Resúmenes Extensos, 211-218.
- Cody, M. A., 1992, The Fast Wavelet Transform, *Dr. Dobb's Magazine*. Apr92, 14.
- Cohen, J.K. and Chen, T., 1993, Fundamentals of the wavelet transform for seismic data processing, Tech. Rep. CWP-130, Center for Wave Phenomena, Colorado School of Mines.
- Coifman, R.R., and Donoho, D., 1995, Time-invariant wavelet denoising, in Antoniadis, A., and Oppenheim, G., Eds., *Wavelets and statistics*, Springer-Verlag Lecture Notes in Statistics, 103, 125-150.
- Coifman, R., Meyer, Y., Quake, S., Wickerhauser, M. V., 1992, *Signal Processing and Compression with Wavelet Packets*, Proceedings, Toulouse.
- Chapais, F., 1999, Some Results on the Time-Scale Modelization of Nonlinear Systems Using Wavelets, *Centre Automatique et Systemes, Ecole des Mines de Paris*, pp. 1-10.
- Chapin, D., 1997, Wavelete transforms: A new paradigm for interpreting gravity and magnetics data: 67<sup>th</sup> Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 486-489.
- Chui, C. K., 1992, *An introduction to Wavelets*, Academic Press.
- Chui, C. K., (ed.), 1992, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press.
- Chapin, D., and Mosher, C., 1997, Method and apparatus for identifying geological structures using wavelet analysis of potential fields: U.S. Patent 5 673 191.
- Chakraborty, A., and Okaya, D., 1995, Frequency-time decomposition of seismic data using wavelet-based methods, *Geophysics*, 60, 1906-1916.

- Crawford, J.M., Doty, W.E.N. and Lee, M. R., 1960, Continuous signal seismograph, *Geophysics*, 25, 95-105.
- Daubechies, I., 1990, The wavelet transform time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 36, 961-1004.
- Daubechies, I., 1993, Wavelet Transforms and Orthonormal Wavelet Bases, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Volume 47.
- Daubechies, I., 1989, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, a CBMS Study Institute of Applied Mathematics Publication, Philadelphia, 61, pp. 357.
- Daubechies, I., 1988, Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41, 909-996.
- Deighan, A. and Watts, D., 1997, Ground roll suppression using the wavelet transform. *Geophysics*, 62, 1896-1903.
- Dessing, F. J. and Wapenaar, C.P.A., 1995, Efficient migration with one way operators in the wavelet transform domain, 65<sup>th</sup> Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1240-1243.
- Dessing, F. J., 1997, A wavelet transform approach to seismic processing, PH.D thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- Donoho, D. L., Ergas, R. A. and Villasenor, J. D., 1995, High-performance seismic trace compression, 65<sup>th</sup> Ann. Intern. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 160-163.
- Donoho, D. L., 1993, Nonlinear wavelet methods for recovery of signals, densities, and spectra from indirect or noisy data, *Proceedings of symposia in applied mathematics*, 47, p173
- Emery, D., and Meyers, K., 1996, *Sequence Stratigraphy*, Blackwell Science Publications Inc.
- Faqui, L., Nurul Kabir, M. M. and Verschuur, D. J., 1995, Seismic processing using the wavelet transform and the Radon transform, *Journal of seismic exploration*, 4, 375-390.
- Foufoula-Georgiou, E. and Kumar, P., (Eds.), 1994, *Wavelets in Geophysics*, Academic Press, New York, 372 p.
- Gabor, D., 1946, Theory of communication, *J. Inst. Elect. Eng. (London)*, 93, 429-457.
- Grossman, A. and Morlet, J., 1984, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 15, 723.

- Goupillaud, P., Grossmann, A., and Morlet, J., 1984, Cycle-octave and related transforms in seismic analysis, *Geoexploration*, 23, 85-102
- Grubb, H., and Walden, A., 1997, Characterizing seismic time series using the discrete wavelet transform, *Geophys. Prosp.*, 45, 183-205.
- Hornby, P., Boschetti, F., and Horowitz, F.G., 1999, Analysis of Potential Field Data in the Wavelet Domain, *Geophysical Journal International*, 137, 175-196.
- Jawerth, B. and Sweldens, W., 1994, An overview of wavelet based multiresolution analyses, *SIAM Review*, 36, 377-412
- Kayser, G., 1994, *A Friendly Guide to Wavelets* (Birkhauser), Boston.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M., 1977, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 46-48.
- Kumar, P., and Foufola-Georgiou, E., 1997, Wavelet Analysis for Geophysical Applications, *Reviews of Geophysics*, 35, 385-412.
- Li, Y., and Oldenburg, D., 1997, Fast inversion of large scale magnetic data using wavelets, *67<sup>th</sup> Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys.*, Expanded Abstracts, 160-164.
- Lozada Zumaeta M., y Ronquillo Jarillo, G., 1997a, Aplicaciones de la Transformada Ondicular en la determinación de atributos sísmicos en sismología de Reflexión. Resúmenes de la Reunión Anual de la UGM, Puerto Vallarta, Jalisco, México. EG-13, 211-212.
- Lozada Zumaeta, M., y Ronquillo Jarillo, G., 1997b, Maximización de la relación señal/ruido en el dominio de la transformada ondicular. Resúmenes de la Reunión Anual de la UGM, Puerto Vallarta, Jalisco, México. EG-20, 214-215.
- Lozada Zumaeta M., Ronquillo Jarillo G., 1997c, Wavelet Transform and Seismic Attribute, *International Geoscience Conference, Moscow*, Expanded Abstracts, A3.7
- Mallat, S., 1989, A theory for multiresolution signal decomposition, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 11, 674-693.
- Meyer, Y., 1993, *Wavelets: Algorithms and applications*, 2<sup>nd</sup> Ed.: Soc. Ind. Appli. Math. (SIAM), Philadelphia.
- Meyer, Y., 1992, *Wavelets and Operators*, Cambridge University, Cambridge, Translated by D.H. Salinger.
- Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E., and Giard, D., 1982, Wave propagation and sampling theory--part I: Complex signal an scattering in multilayered media, *Geophysics*, 47, 203-221.

- Nettel, S., 1998, Wave Physics, Oscillations-Solitons-Chaos, Springer, pp. 1 – 30
- Press, W. H., Teukolsky, S., Vetterling, W. and Flannery, B., 1992, Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 584-599.
- Ridsdill-Smith, T. A., Dentith, M. C. 1999, The wavelet transform in aeromagnetic processing, *Geophysics*, 64, 1003-1013.
- Rioul, O., Vetterli, M., 1991, Wavelets and signal processing, *IEEE Signal Processing Magazine* 8, 14-38
- Ronquillo Jarillo, G. y Lozada Zumaeta, M., 1997, Atributos sísmicos y análisis de multiresolución aplicado a la delimitación de un yacimiento de Gas. Resúmenes de la Reunión Anual de la UGM, Puerto Vallarta, Jalisco, México
- Ronquillo Jarillo, G., Lozada Zumaeta, M., Navarro Rodríguez, M., and Alzaga Ruiz, H. 1997, Seismic Attribute Applied to a Gas Reservoir in Sand, International Geoscience Conference Moscow, A3.8.
- Shuey, R. T., 1985, A simplification of Zoeppritz, *Geophysics*, 50, 609-614 (and errata on p.1522).
- Santiago J., Carrillo J., Martell, B., 1984, Geología Petrolera de México, i-7, i-14, Schlumberger Offshore Services, p. 270.*
- Side J., Gambois G., and C Vuillermoz, 1999, Shear-wave velocity and density estimation from PS-wave AVO analysis: Application to an OBS dataset from the North Sea, *Geophysics*, 65, 1446-1454.
- Smith, G.C., and Gidlow, P.M., 1987, Weighted stacking for rock property estimation and detection of gas, *Geophys. Prosp.*, 35, 993-1014
- Strang, G., and Nguyen, I., 1996, Wavelets and filter banks, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA, p. 490
- Strang, G., 1994, 1994, Wavelets, *American Scientist* 82, 250-255.
- Strang, G., 1989, Wavelets and Dilation Equations: A Brief Introduction. *SIAM Review*, 32, 614-627
- Taner, M. T., Koehler, F. and Sheriff, R. E., 1979, Complex trace analysis, *Geophysics*, 44, 1041-1063.
- Torrence, C., and Compo, G. P., 1998, A practical guide to wavelet analysis, *Bulletin of the American Meteorological Society*, p. 61

Valencia Rosas, E. F., 1986, Estratigrafía de Secuencias en la "Cuenca de Burgos", VII Simposium de Geofísica y Exposición, Veracruz'96, AMGE, Resúmenes Extensos, 143-148.

Xin-Gong, L. and Ulrych, T. J., 1995, Tomography via wavelet transform constraints, University of British Columbia, 65<sup>th</sup> Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1070-1073.

Xiao-Ping, L, Zuhlsdorff, L. and Liebhardt, G., 1995, Eliminating the effects of the surface weathered layer by using an inverse transfer function, 65<sup>th</sup> Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1342-1245.

Xiao-Ping, L, 1995, Characterization of heterogeneities from sonic velocity measurements using the wavelet transform, 65<sup>th</sup> Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 488-491.

Wu, Y. and McMechan, G. A., 1995, Wavefield extrapolation in the wavelet domain with application to poststack migration, 65<sup>th</sup> Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1236-1239.

## 9. ANEXOS.

### 9.1 Glosario

Análisis f-k. Análisis frecuencia-número de onda que permite discriminar un tipo de datos de un conjunto de datos en el dominio de la frecuencia-número de onda. Utilizado para examinar la dirección y velocidad aparente de las ondas sísmicas.

Análisis de secuencias sísmicas. Definen secuencias deposicionales separadamente por la localización de sus fronteras, usualmente de las evidencias sísmicas de las discordancias.

Alias: Ambigüedad resultante del proceso de muestreo.

Amplitud: máxima desviación de una onda respecto al valor promedio.

Anomalía de amplitud: incremento local o decrecimiento de las amplitudes de las reflexiones sísmicas, especialmente si es atribuible a la acumulación de hidrocarburos. Las anomalías de amplitudes pueden ser causadas por afocamiento geométrico, afocamiento de velocidades, interferencias, errores de procesamiento, u otras razones. Algunas veces denominadas 'puntos brillantes' (bright spot) (incrementos de amplitud) o dim spot (si decrece).

AVO : amplitud versus offset inversión.

La parte sobresaliente del análisis sísmico, incluyendo todos los aspectos que comprende la adquisición sísmica, procesamiento e interpretación, puede resumirse a la siguiente proposición: Dadas las amplitudes y tiempos de arribo de un conjunto de trazas sísmicas, determinar la litología. Inicialmente, el intérprete de datos sísmicos, simplemente mapeaban las estructuras. Después, se pudo tener la habilidad de mapear trampas estratigráficas, tales como los acñamientos (pinchouts) y finalmente a mediados de los años 79's se pudo verdaderamente extraer información litológica, utilizando la técnica de análisis de los 'bright-spot' e inversión sísmica después del apilado (post-stack). Sin

embargo estas técnicas se redujeron a las amplitudes después del apilado (post-stack). En el año 1984, *Ostrander*<sup>1</sup>, propuso utilizar amplitudes pre-stack (antes del apilado) para obtener información respecto a la litología, y esta técnica ha sido conocida como AVO (variaciones de amplitudes con el offset o simplemente amplitudes versus offset). Es una herramienta directa de la predicción de hidrocarburos (gas).

AVO, áreas o técnicas, comprenden: 1) reconocimiento AVO a) análisis de gradiente; b) apilamiento de rango limitado; c) selección de un evento sísmico (pick) y despliegue; 2) modelado AVO a) trazado de rayos; b) ecuación de onda completa; 3) inversión AVO a) estrato único; b) múltiples estratos

Atenuación: Una reducción en amplitud o energía causada por las características físicas del medio transmisor o sistema. Usualmente incluye los efectos geométricos tales como el decrecimiento en amplitud de una onda con el incremento de la distancia respecto a la fuente.

Banda: Un rango de frecuencias tales como aquellas que son pasadas (pasa banda) o rechazadas (banda-rechazo) por un filtro.

Atributo: Una medida inferida de los datos sísmicos, tal como envolvente de amplitud ('intensidad de reflexión'), fase instantánea, frecuencia instantánea, polaridad, velocidad, etc.

Atributo sísmico: Toda magnitud medida, calculada o inferida de las trazas sísmicas directa o indirectamente participan en la evaluación de datos sísmicos de reflexión. Otra forma diferente de describir la información contenida en las trazas sísmicas, pueden ser velocidades, amplitudes, tiempos de reflexión, buzamiento en tiempo (time dip), azimuth, polaridad aparente, intensidad y heterogeneidad de reflexión, impedancia acústica.

Atributos sísmicos comunes ó clásicos: Traza real; traza transformada de Hilbert; traza envolvente (intensidad de reflexión); traza ángulo de fase; traza de frecuencia instantánea.



Traza real: Traza original  $S(t)$ .

Traza transformada de Hilbert: La traza original  $S(t)$  rotada  $90^\circ$ ,  $H[S(t)]$

Traza envolvente: Longitud del vector  $A(t)$

Traza ángulo de fase: Angulo del vector respecto a una dirección de referencia  $\Phi[A(t)]$ .

Traza frecuencia instantánea: Tasa respecto al tiempo del angulo de rotación del vector  
 $\frac{d\phi[A(t)]}{dt}$

Canal: Un serie única de dispositivos interconectados a través de los cuáles puede fluir información de una fuente hacia su registro.

Dispersión: Variación de la velocidad con la frecuencia. La dispersión distorsiona la forma de un tren de onda; picos y valles avanzan hacia (o se resagan) al comienzo de la onda a medida como ella avanza. El concepto de velocidad de grupo  $U$  es distinto de la velocidad de fase  $V$ . Donde  $\lambda$  = longitud de onda;  $v$  = es la frecuencia.

$$U = d v / d (1/\lambda )$$

La dispersión de ondas internas es muy pequeña en la mayoría de las circunstancias, pero las ondas superficiales pueden estar sometidas a una apreciable dispersión en la presencia de estratos o capas superficiales.

Distorsión: Un cambio indeseado en la forma de onda, como opuesto a los cambios deseados en la forma de onda semejantes a aquellos obtenidos por modulación.

Elasticidad: La habilidad de restitución de la forma original después de cesar el esfuerzo distorsionaste. La restitución de la forma es completa y esencialmente instantáneo más que gradual.

Escalamiento: cambio de amplitudes por la multiplicación por una constante.

Espacio f-k Un dominio en el cual las variables independientes son la frecuencia  $f$  y el número de onda  $k$ , el resultado de una transformada de Fourier bidimensional de un registro sísmico o de una sección sísmica. El análisis de datos sísmicos algunas veces es invocado como gráficas f-k en el cual la densidad de energía dentro de un intervalo de tiempo es graficado y contorneado respecto a bases de frecuencia versus número de onda. Algunas veces utilizado para el diseño de filtros de velocidades.

Estratigrafía sísmica: método que determina la naturaleza de la historia geológica de las rocas sedimentarias y su ambiente deposicional de las evidencias sísmicas.

Evento: Comportamiento de un conjunto de trazas las cuales indican el arribo sísmico de nueva energía sísmica, denotando por un cambio sistemático de fase o amplitud en los registros sísmicos

Factor de atenuación: Si la amplitud de una onda plana es reducida por un factor  $e^{-\alpha x}$  cuando se propaga una distancia  $x$  metros, la atenuación es el factor  $\alpha$ .

Filtro de velocidades. Discriminación en base de la velocidad aparente o (dip moveout). Los arribos coherentes con velocidades aparentes cercanas son atenuados. También se llaman filtros de velocidades aparentes, filtros  $f_a$ ,  $d_i$  filtre, f-k filter, y la base de la discriminación es la velocidad de apilamiento como la utilizada en el apilamiento punto medio de reflejo común.

Filtro alías. Un filtro utilizado antes de muestrear y remover las frecuencias indeseadas, las cuales pueden después del muestreo originar el fenómeno de alias. Un filtro antialías deberá tener una fase lineal como respuesta y cercanamente una respuesta de amplitud plana en una señal de pasabanda y deberá decrecer rápidamente fuera de esta banda para proporcionar alta atenuación encima de la frecuencia de Nyquist.

Filtro: Una parte de un sistema que discrimina parte de la información que está contenida en el mismo. La discriminación es usualmente efectuada en base de la frecuencia, aunque otras bases tales como la longitud de onda, coherencia o amplitud también pueden ser utilizadas. Filtrado lineal es denominado convolución. Un filtro lineal puede ser caracterizado por una respuesta impulsiva o usualmente por su función de transferencia características en el dominio de las frecuencias (respuesta en amplitud y fase) como función de la frecuencia.

Filtrado: Atenuación de ciertas componentes de una señal basado en alguna propiedad medible. Usualmente implica que la propiedad medible es la frecuencia. Puede efectuarse en forma analógica y numéricamente.

Funciones de banda limitada: Una función cuya transformada de Fourier se anula (o es muy pequeña) fuera de alguna banda finita de frecuencias.

Función de error: La función de error  $erf(t)$  es

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-y^2} dy$$

Para datos que tienen una distribución Gaussiana, la probabilidad que el error este comprendido entre  $\pm a$ ,  $erf(ha)$ , donde  $h$  equivale al índice de precisión.

Indicadores de hidrocarburos: Una medida la cual indica la presencia o ausencia de una acumulación de hidrocarburos. Los indicadores incluyen el incremento local de amplitudes (bright spot) o decrecimiento (dim spot), cambios de fase, cambios de frecuencia, eventos horizontales por contacto de gas-agua, gas-aceite o aceite-agua (flat-spot), velocidades bajas que lateralmente son equivalentes a sedimentos, un decrecimiento en amplitud por debajo de la acumulación (shadow zone).

Límite de resolución: para reflectores sísmicos discretos, la separación mínima para la cual puede involucrarse más de dos interfaces. El criterio de límite de resolución de Rayleigh es de  $\lambda/4$  donde  $\lambda$  es la longitud de onda dominante, y el límite de Widess es  $\lambda/8$ .

Ondícula: Un pulso sísmico usualmente consistente de un único o algunos ciclos. Ondícula base es la forma de reflexión en el dominio del tiempo de un reflector positivo a incidencia normal.

Ondícula de Rikers: Una ondícula de fase cero, segunda derivada de la función de error.

Traza compleja: Representación en forma de un número complejo  $F(t)$  de una serie de tiempo  $f(t)$ .

$$F(t) = f(t) + jf_{\perp}(t) = A(t) e^{j\gamma(t)}$$

Donde  $f_{\perp}(t)$  es la serie de cuadratura,  $A(t)$  es la amplitud de la envolvente de la traza (también denominada intensidad de reflexión), y  $\gamma(t)$  es la fase instantánea. La frecuencia instantánea es  $d\gamma(t)/dt$ . Es utilizada para determinar los atributos de datos sísmicos.

Offset: Distancia desde la fuente puntual a un geófono, o más precisamente al centro de un grupo de geófonos; a menos que un grupo de geófono particular sea especificado, la distancia al centro del grupo de geófonos más próximo.

Punto medio común (common midpoint): Que tiene el mismo punto medio entre la fuente y receptor. También denominado punto de reflejo común (common-depth-point) y punto de reflejo común (common-reflection point)

Reflectores explotantes: un esquema de modelado directo en el cual las superficies del modelo se suponen explotan simultáneamente al tiempo cero con una intensidad

proporcional a sus reflectividades; las velocidades son consideradas a la mitad para que el tiempo de tránsito a la superficie se convierte en tiempo de tránsito doble y sea coincidentes con los pares fuente-receptor localizados en superficie. Una forma de modelado de la teoría de onda.

Resolución: La habilidad para separar dos características que están muy próximas o que se presentan conjuntamente. La separación mínima de dos cuerpos antes de que pierdan sus identidades individuales en una mapa o sección

Transformada de Fourier Discreta: Una transformada de Fourier calculada para una ondícula respecto a un intervalo finito en las que los valores están dados únicamente para la frecuencia fundamental (recíproco del intervalo) y sus armónicos.

Transformada de Hilbert: Operador de rotación de 90 grados. Si la traza real original  $S(t)$  es una senoide, la traza transformada de Hilbert es una onda cosenoidal,  $H[\sin(2\pi f t + \phi)] = \cos(2\pi f t + \phi)$ .

Transformada de Hilbert: Dada una  $h(t)$  la cual no es singular al tiempo  $t = 0$  y la cual es una respuesta causal tal que  $h(t) = 0$  para  $t \leq 0$ . La transformada Fourier de  $h(t)$  es:

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

Donde es ( $\omega$  = frecuencia angular)  $H(\omega)$  tiene una propiedad especial identificada como transformada Hilbert, expresada por

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} R(\omega) * \left(\frac{1}{\omega}\right)$$

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\gamma) d\gamma}{\omega - \gamma}$$

y

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} X(\omega) * \left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(y) dy}{\omega - y},$$

Donde  $P$  denota el valor principal de Cauchy en las discontinuidades. Si  $H(\omega)$  se anula para valores de  $\omega < 0$ ; la transformada de Fourier de  $h(t) + jx(t)$ , tiene  $h(t)$  y  $x(t)$  formando un par de transformada de Hilbert;  $h(t)$  y  $x(t)$  tienen el mismo espectro de amplitudes pero difieren en la fase por 90 grados.  $h(t) + jx(t)$  se denomina señal analítica  $h(t)$ ;  $x(t)$  es la señal de cuadratura correspondiente a  $h(t)$ . Algunas veces se utiliza como análisis de traza compleja.

Traza analítica: La traza real y la traza transformada de Hilbert combinadas forman la traza analítica,  $H[S(t)] = S(t) + iH[S(t)]$ . La traza analítica describe un número complejo que cambia con el tiempo. Puede ser vista como un vector que cambia con el tiempo. En términos de coordenadas cartesianas  $A[S(t)] = S(t) + iH[S(t)]$  y en términos de coordenadas polares  $A[S(t)] = A \exp\{i\phi[A]\}$ .

Sintonía: Muchos eventos significativos son debidos a la interferencia de reflexiones entre el tope y el fondo de las formaciones. El espesor de sintonía es un parámetro crítico para la resolución. El tiempo de sintonía es aproximadamente igual a la mitad del periodo de la ondícula básica. El espesor de sintonía esta relacionado directamente con los atributos sísmicos.

<sup>1</sup>Ostrander, W., J., 1984, Plane-wave reflection coefficients for gas sands at nonnormal angles-of-incidence: Geophysics, 49, 1637-1648.

9.2 Principio de Incertidumbre de Gabor.

## 9.2 Principio de Incertidumbre de Gabor.

El principio de incertidumbre de Gabor (1946) corresponde al límite de representación de cualquier señal, en el principio de incertidumbre de Gabor, implícitamente está contenido el principio de incertidumbre de Heisenberg. El principio de incertidumbre de Gabor es aplicado a señales arbitrarias y su base se encuentran conceptos de la mecánica cuántica. Intuitivamente puede plantearse, que tan grande podrá ser  $\Delta t$  para garantizar que es posible distinguir frecuencias del orden de  $\Delta f$ . Lo anterior podrá estar garantizado si el intervalo de frecuencia  $f$  y  $f + \Delta f$  por lo menos difieren en una unidad. Esto es,

$$(f + \Delta f) * \Delta t - f \Delta t \geq 1$$

Este es el principio de incertidumbre de Gabor; nos indica que el producto de las incertidumbres en frecuencia por el tiempo excederá cierta constante fija, y que la precisión con la que se puede determinar una de las variables limita la mejor precisión posible de la otra.

Observar que tenemos  $\Delta t \geq 1/\Delta f$  que es necesariamente una frecuencia discriminante diferente de  $\Delta f$ . Por otra parte, si medimos a una frecuencia  $f$  durante el intervalo  $\Delta t$ , luego la frecuencia podrá ser tan baja como  $f - 1/\Delta t$  o tan alta como  $f + 1/\Delta t$ . Por lo tanto, el principio de incertidumbre alrededor de la frecuencia  $f$  es  $\Delta f \geq 2/\Delta t$ , quedando en este caso la inecuación del principio de incertidumbre como,  $\Delta f \Delta t \geq 2$ . La constante depende de la magnitud medida y la manera como esta magnitud ha sido medida, su valor no es un inconveniente desde que la conclusión es la misma: existe un límite inferior respecto al producto de las incertidumbres en los dominios del tiempo y frecuencia.

Las implicaciones del principio de Gabor son relativamente fáciles de entender en el espacio de Fourier donde la abscisa refleja el dominio del tiempo y la ordenada el dominio de las frecuencias. El principio de Gabor afirma que la dispersión o incertidumbre las medidas en el tiempo y la frecuencia deberán definir un rectángulo en el espacio Fourier

cuya área es 1. Podemos decrecer  $\Delta t$  y localizar mucho mejor cierta señal en el dominio del tiempo, o decrecer  $\Delta f$ , y localiza mejor en la frecuencia, pero no se podrá localizar en una forma de perfección arbitraria e ilimitada en ambos dominios simultáneamente.