37

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

300313

"INICIACION AL ALGEBRA, PROPUESTA DIDACTICA PARA EL NIVEL MEDIO SUPERIOR"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

PRESENTA:

FEDERICO GONZALEZ MORENO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. PATRICIA E. BALDERAS CAÑAS

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
2001
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Iniciación al Álgebra. Propuesta Didáctica para el Nivel Medio Superior"

realizado por **FEDERICO GONZÁLEZ MORENO**

con número de cuenta **6000130-8** , quién cubrió los créditos de la carrera de **Actuaría**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	**Dra. Patricia E. Balderas Cañas**	
Propietario	**Dr. Carlos Hernández Garciadiego**	
Propietario	**M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza**	
Suplente	**M. en C. Emma Lam Osnaya**	
Suplente	**M. en C. Alejandro Bravo Mojica**	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz

Este trabajo lo dedico a quienes siempre me impulsaron para lograrlo

A MIS ALUMNOS

AL COLEGIO DE BACHILLERES

A MIS ASESORES

A MIS HIJOS

A MIS COMPAÑERAS

A MIS PADRES

A MIS HERMANOS

A MIS COMPAÑEROS DE TRABAJO

Muchas gracias por la disposición siempre paciente y agradable para asesorar y revisar este trabajo y por quienes siento gran admiración y respeto

PATRICIA E. BALDERAS, PILAR MARTINEZ
Y CARLOS HERNANDEZ

Gracias también a mi compañera SARA NASDIRA ESPINOZA VÁZQUEZ por su buen agrado para la captura de este trabajo.

ÍNDICE

I. MODELO EDUCATIVO DEL COLEGIO DE BACHILLERES

1. Objetivos Generales
2. Estructura Académica
3. Plan de Estudios
4. Programa de Estudios
5. Perfil del Egresado
6. Concepción Pedagógica

II. MODELO DIDÁCTICO PARA LA ELABORACIÓN DE MATERIALES

1. Bases Pedagógicas
2. Fases de Aprendizaje
3. Elementos Didácticos de los Materiales

III. INICIACIÓN AL ÁLGEBRA. PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Propósito
Introducción
Cuestionamiento Guía

1. Notación Exponencial
2. Orígenes de los Sistemas de Numeración
3. Los Números Naturales
4. Los Números Enteros
5. Los Números Racionales
6. La Recta Numérica
7. Los Números Decimales
8. Reglas del Punto Decimal
9. Notación científica
10. Los Números Irracionales
11. Los Números reales
12. Leyes de exponentes y radicales
13. Razones y Proporciones

IV. CONTEXTO MATEMÁTICO

1. Divisibilidad
2. Combinación Lineal
3. Principio del Buen Orden
4. Máximo Común Divisor
5. Algoritmo de Euclides
6. Mínimo Común Múltiplo

V. SUGERENCIAS METODOLÓGICAS PARA EL MANEJO DE LA PROPUESTA

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFÍA

PRÓLOGO

El trabajo que he desarrollado en el Colegio de Bachilleres y en secundarias me ha dado la oportunidad de conocer algunos problemas que se tienen en el Sistema Educativo Nacional:

La reprobación y la deserción.

El Colegio de Bachilleres como una institución importante dentro del nivel medio superior no ha escapado a esta problemática y sobra decir que con base en los datos arrojados por las estadísticas de informe al final de cada semestre, sobresale la reprobación de Matemáticas de primer semestre.

Esta asignatura se compone de tres unidades:

Aritmética: "Una introducción al Álgebra"; Lenguaje Algebraico: "Operatividad" y Ecuaciones: "Modelos Generalizados", de las cuales es importante decir que la primera constituye el aprendizaje de las habilidades básicas a partir de las cuales se desarrollan las habilidades superiores.

Se sabe que la causa de los problemas ya citados de reprobación y de deserción son múltiples, y que muchas de ellas son ajenas a las influencias de la Institución, también es posible decir que dentro de aquellos factores que sí pueden ser influidos de manera directa y significativa por la educación escolar se encuentran:

- Las habilidades básicas que el alumno debe tener y sobre las cuales se organizan y desarrollan habilidades superiores, entre ellas se encuentran las verbales, las de razonamiento procedimental y las simbólicas, definidas estas últimas como la capacidad para representar mentalmente transformaciones del objeto del conocimiento; ellas se manifiestan y desarrollan principalmente a través de las ejecuciones de actividades concretas.

- Las aplicaciones del plan de estudio a través de una correcta interpretación de los programas de asignatura por parte de los profesores. Dicha interpretación habrá de fundamentarse principalmente en el conocimiento y manejo del enfoque del programa, a efecto de que desempeñen sus labores cotidianas de planeación, operación y valorización de los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación.

- Por otro lado se encuentran los materiales de apoyo a los cursos, los cuales deben ser elaborados a partir del sustento **teórico-metodológico** del modelo educativo del Colegio de Bachilleres.

Durante mi desempeño docente he detectado las siguientes situaciones:

a) La necesidad de que el alumno posea habilidades básicas

b) Atención a los aspectos de planeación, operación y valoración de los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación.

c) Requerimiento de materiales de apoyo con el enfoque adecuado de los nuevos programas ya que estos fueron actualizados de 1991 a 1994.

A partir del reconocimiento de la problemática anterior me aboqué a elaborar esta propuesta mediante la cual se intenta confirmar, adecuar o modificar las habilidades básicas del alumno, además de apoyar el trabajo docente con un material que tenga el enfoque del Colegio de Bachilleres

I. MODELO EDUCATIVO DEL COLEGIO DE BACHILLERES.

El Colegio de bachilleres fue creado por decreto presidencial en el año 1973 como una institución de enseñanza media superior y, cuya finalidad es la de proporcionar educación en el ciclo de bachillerato para continuar estudios en las instituciones de enseñanza superior y capacitarlos para facilitar su incorporación en actividades socialmente productivas.

El modelo educativo del Colegio de Bachilleres es el conjunto de normas, valores, concepciones teóricas y lineamientos que definen la estructura curricular, organizativa y metodológica que en lo social, científico y pedagógico, dan identidad y dirección a la práctica Educativa de la institución. En él se expresan los objetivos y fines del Colegio, la estructura académica, el plan y los programas de estudio, el perfil del egresado y la concepción pedagógica del Colegio de Bachilleres.

1. OBJETIVOS GENERALES DEL COLEGIO DE BACHILLERES.

Los objetivos generales del Colegio de Bachilleres establecen la intencionalidad educativa de la institución y de ellos se derivan planteamientos cada vez más específicos, los que a su vez definen el modelo educativo y norman su concepción pedagógica. De acuerdo con sus Estatutos Generales[1], el Colegio de Bachilleres se propone los siguientes objetivos:

a) Desarrollar la capacidad intelectual del alumno, mediante la obtención y aplicación de conocimientos.

El estudiante podrá desarrollar su capacidad intelectual en el ejercicio y la aplicación permanente de las habilidades lógicas y metodológicas necesarias, tanto para la búsqueda activa y crítica de información, como para la operación constructiva de contenidos básicos de diversas disciplinas que le darán posibilidades de acceder a niveles superiores en los diversos campos del conocimiento. Asimismo, integrará estos contenidos en el análisis y comprensión de problemáticas contemporáneas que lo afectan como sujeto social y como miembro de una comunidad determinada, en la búsqueda de posibles soluciones que favorezcan el desarrollo y en la transformación de su medio natural y social.

b) Conceder la misma importancia a la enseñanza que al aprendizaje.

De este objetivo se desprende una perspectiva sobre el desarrollo del proceso de **enseñanza-aprendizaje**, en donde profesores y estudiantes son corresponsales de dicho proceso, lo que implica compartir la interacción educativa y establecer una relación basada en la cooperación y la comunicación, en donde el profesor orienta y promueve la actividad en la construcción del conocimiento, considerando la participación de los estudiantes.

[1] **Colegio de Bachilleres, Estatutos Generales, pág. 11**

c) **Crear en el alumno una conciencia crítica que le permita adoptar una actitud responsable ante la sociedad.**

La conciencia crítica sólo puede ser desarrollada a través de la crítica, por ello el proceso de **enseñanza-aprendizaje** debe efectuarse en un ambiente de libertad y respeto mutuo, que abra espacios para que la formación se dé como un ejercicio permanente de reflexión en los diversos campos del conocimiento - en un contexto de comprensión de la realidad como un todo complejo y multideterminado - lo que generará en los estudiantes la necesidad de conocer y participar en la solución de algunos de los problemas de su medio.

d) **Proporcionar al alumno capacitación y adiestramiento en una técnica o especialidad determinada.**

Este objetivo expresa la intención de que el estudiante cuente, con una formación que le permita valorar la importancia del trabajo, experimentar la responsabilidad que éste implica y conocer las condiciones en que se desarrolla. Así mismo, esta formación debe brindar a los estudiantes los elementos suficientes para que, si así lo requieren, puedan desempeñarse en procesos de trabajo específicos.

2. ESTRUCTURA ACADÉMICA DEL COLEGIO DE BACHILLERES.

Para lograr sus objetivos, el Colegio cuenta con una organización **académico-administrativa,** en donde la estructura académica esta formada por, las Áreas de formación Propedéutica, de Capacitación para el Trabajo y Paraescolar, cuya operación se apoya en un conjunto de servicios académicos como son Orientación Escolar, Laboratorios, Bibliotecas, Etc.

a) Área de Formación Propedéutica.

Esta área de conocimiento esta compuesta por materias y asignaturas que recogen el conocimiento universal generado por las ciencias y las humanidades, cuya finalidad es proporcionar que el alumno desarrolle las habilidades lógicas y metodológicas necesarias para la producción de conocimientos y que, a partir de ellos, se apropie constructivamente de los conocimientos básicos correspondientes a los campos de las Matemáticas, las Ciencias Naturales, las Ciencias **Histórico-Sociales**, la Metodología y la Filosofía, y el Lenguaje y la Comunicación; para que con ello asuma una postura crítica ante el conocimiento y una actitud responsable y participativa en la comprensión y solución de algunos problemas de su entorno natural y social, además de tener la posibilidad de incorporarse a alguna de las carreras profesionales que se imparten en las Instituciones de Educación Superior.

b) Área de Capacitación para el Trabajo.

Ella está formada por un conjunto de capacitaciones cuyo objetivo es proporcionar al estudiante los conocimientos, habilidades y actitudes que le posibiliten el desempeño de procesos de trabajo en una área específica, con lo cual se desea atender tanto necesidades individuales de los estudiantes como necesidades del desarrollo socioeconómico del país.

c) Área de formación Paraescolar.

Ésta se constituye por actividades agrupadas en tres subáreas:

Educación Artística (Artes Plásticas, Danza, Música y Teatro), Educación Física (deportes y actividades recreativas) y Acción Social (actividades de servicios a la comunidad interna y externa). Su finalidad es contribuir a la formación integral de los estudiantes con actividades que tiendan a favorecer su desarrollo cognoscitivo, afectivo y psicomotriz, permitiéndoles su participación en los campos del arte, los deportes y la comunicación.

3. PLAN DE ESTUDIOS DEL COLEGIO DE BACHILLERES.

El plan de estudios del Colegio de Bachilleres es el instrumento normativo que se deriva de las estructuras académicas y concreta los objetivos institucionales en programas de estudio y los estructura para su enseñanza, convirtiéndose así en el instrumento rector y en el eje de las operaciones del proceso de **enseñanza-aprendizaje,** ya que determina y norma los contenidos a enseñar, su ubicación, secuencia, distribución, dosificación, carga horaria, objetivos de aprendizaje y el enfoque metodológico con que se abordará las actividades de enseñanza, entre otras cosas.

El plan de estudios del Colegio de Bachilleres está integrado por las Áreas de formación Propedéutica y de Capacitación para el Trabajo.

a) Área de Formación Propedéutica.

El Área Propedéutica está organizada en cinco campos de conocimiento, los cuales son una ordenación convencional que agrupa saberes o quehaceres que comparten entre si determinadas características. Cada uno de dichos campos está regido por una intención que delimita su campo, establece los criterios de organización de sus contenidos, delinea las posibles variedades de su enseñanza y define la razón de ser del mismo. Paralelamente, el Área Propedéutica se divide en dos núcleos: uno básico u obligatorio y el otro complementario u optativo.

El núcleo básico u obligatorio está constituido por aquellas materias que cumplen una función esencial en la formación de todo estudiante de bachillerato, ya que presentan la metodología básica del conocimiento científico de la naturaleza y la sociedad, de la lengua y de las Matemáticas, o porque contienen los elementos informativos de estas mismas áreas de conocimiento.

El núcleo complementario u optativo está integrado por un conjunto de materias optativas de entre las cuales cada estudiante debe elegir tres, que cursará en los semestres 5to. y 6to. - cuya función es ampliar o profundizar los aprendizajes logrados en el núcleo básico, aplicándolos y relacionándolos con conocimientos nuevos o planteando de manera diferente los ya expuestos, con lo cual se completa la formación Propedéutica general.

Los campos del conocimiento, buscan romper la visión parcializada y enciclopédica del conocimiento y ofrecer al estudiante una perspectiva integral, que organiza a las diversas disciplinas a partir de sus elementos comunes y les permite reconocer las semejanzas y diferencias, las fronteras, las problemáticas compartidas y los campos de aplicación de las mismas.

Los campos del conocimiento se organizan en agrupaciones más específicas que son las materias. Una materia es un conjunto de contenidos correspondientes a un área de conocimiento ubicado en alguno de los dos núcleos y que está organizado para ser enseñado en dos o mas cursos semestrales, denominados asignaturas.

Las materias están regidas por una intención desagregada de la intención del campo de conocimiento en el que se inserta y un enfoque. Cada asignatura se rige por una intención derivada de la intención de la materia. Así mismo se rige por el enfoque de la materia, especificando lo pertinente a los contenidos incluidos en la asignatura.

b) Área de Capacitación para el Trabajo.

Esta área ofrece al estudiante una serie de capacitaciones, cuya finalidad es proporcionar conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que posibiliten su formación para el desempeño en procesos de trabajo útiles individual y socialmente, atendiendo principalmente tanto a sectores industriales y de servicios como a los de servicio público y privado o de tipo social.

c) Área de formación Paraescolar.

Esta área tiene por objetivo complementar la formación integral de los estudiantes con actividades que tiendan a favorecer el desarrollo afectivo y motriz del alumno, permitiéndole se exprese en los campos del arte y los deportes, así como relacionarse activamente con su comunidad por medio de la acción social. Ella está subdividida en : Educación Artística (Artes Plásticas, Danza, Música y Teatro), Educación Física (Deportes y Actividades Recreativas) y Acción social (Actividades de Servicio a la Comunidad).

4. PROGRAMA DE ESTUDIO DEL COLEGIO DE BACHILLERES.

El programa de estudio es el instrumento que a partir de la intencionalidad educativa de la institución **(perspectiva teórico-metodológica y pedagógica)** informa a los profesores sobre los contenidos y aprendizajes a lograr por el estudiante, ordenándolos en unidades, temas y subtemas; orientándolo además en las actividades académicas tales como: Estrategias y sugerencias didácticas, lineamientos de evaluación y bibliografía. De esta forma dicho programa constituye para el profesor la base para planear, operar y evaluar sus actividades académicas.

El programa esta integrado por:

a) Un Marco de Referencia.

En él se manifiestan las finalidades educativas del bachillerato que ofrece el Colegio las cuales dan sentido y justificación a la enseñanza de la asignatura; así mismo se determina la perspectiva general de enseñanza y aprendizaje que orientará al programa. El Marco de Referencia está constituido por los siguientes elementos:

Ubicación: Es la que describe el lugar que ocupa la asignatura al interior del plan de estudios y su función principal es establecer su relación con las demás asignaturas del área, así como con otras del plan de estudios.

Intención: Determina los grandes bloques de contenido (lo que se tratará en cada asignatura), define las metas a las que se desea llegar con su enseñanza, explica la razón de ser, sentido y función que la materia tiene respecto al área de conocimiento o capacitación específica a la que pertenece y a la estructura general del plan de estudios como totalidad, así como la utilidad que le reportará al estudiante en su vida diaria y, en particular en su desarrollo escolar.

Enfoque: Es la perspectiva teórica metodológica y pedagógica desde la cual se estructuran los contenidos delimitados por la intención con el propósito de ser enseñados, estableciendo de está manera su enseñanza y las formas de apropiación que los estudiantes tendrán para con la misma.

Así, el enfoque organiza a los contenidos para su enseñanza, respetando la estructura propia de la disciplina a la que corresponden, en congruencia con una concepción teórica-metodológica definida.

b) Base del Programa.

Esta base presenta los contenidos de las asignaturas por medio de los objetivos de operación que aparecen desagregados en unidades, temas y subtemas. Ellos expresan los conceptos, principios, métodos, habilidades o actividades delimitándolos por la intención y estructurados por el enfoque, precisando límites de amplitud y profundidad dentro de los que dichos contenidos deberán ser abordados. Los objetivos se conforman señalando el "Qué", el "Cómo", y el "Para qué" de la enseñanza, en donde:

El **"Qué"** expresa el contenido a enseñar y hace referencia a los aprendizajes que el alumno debe alcanzar a partir del mismo.

El **"Cómo"** se refiere a las acciones que el estudiante realizará para interactuar con el contenido.

El **"Para qué"** indica las relaciones entre los aprendizajes a desarrollar en distintos niveles al interior de la asignatura y/o en otras asignaturas, así como la utilidad o aplicaciones que le reportará al estudiante.

d) Elementos de Instrumentación.

Esta sección del programa proporciona sugerencias en lo que se refiere a aspectos operativos como las estrategias didácticas, la evaluación del aprendizaje y la bibliografía, además de brindar orientación sobre las posibles trayectorias en la organización de los contenidos para su enseñanza. Los elementos de instrumentación incluyen:

Estrategias Didácticas: Se presentan en los objetivos de operación y se refieren a las actividades que podrían desarrollar alumnos y profesores de acuerdo con la intención de la asignatura.

Lineamientos de Evaluación: Se refiere a la forma en que los profesores reunidos en academias pueden planear la evaluación en sus distintas modalidades (diagnóstica, formativa y sumativa), tomando en cuenta las normas generales que regulan la evaluación del aprendizaje en el Colegio de Bachilleres (lo que se evalúa y la forma como se evalúa deberán ser congruentes con lo que se enseña y la forma como se enseña).

Bibliografía: Esta constituida por la relación de libros, artículos de libros, revistas, apuntes, periódicos, etc. que son necesarios para apoyar el logro de los objetivos del programa, los cuales se presentan al final de cada unidad.

Retícula: Es un diagrama que muestra los contenidos y sus relaciones tomando en cuenta para su arreglo dos criterios: La desagregación y secuenciación.

La **desagregación** es un proceso deductivo que desglosa los contenidos hasta identificar sus componentes elementales.

La **Secuenciación** se refiere al orden sucesivo en que se verán los contenidos apoyándose en criterios tales como: ir de menor a mayor grado de dificultad, partir de conocimientos previos de los estudiantes para integrarlos en etapas posteriores, de problemas a conceptos, etc.

La retícula contiene, además, tres niveles fundamentales de estructuración como forma organizativa:

La macroretícula (unidades), la mesoretícula (temas) y la microretícula (subtemas).

La relación de servicio entre contenidos se identifican por medio de fechas en la retícula y la carga horaria se refiere a la asignatura de las horas-clase de un semestre a los contenidos del programa.

5. PERFIL DEL EGRESADO DEL COLEGIO DE BACHILLERES.

Tomando en cuenta las finalidades del Colegio como institución de enseñanza media superior y las características de los alumnos que atiende, abre la perspectiva de tres campos en los que debe desempeñarse el egresado: La educación superior, el mundo del trabajo y la vida cotidiana.

a) Para integrarse a la educación superior, el egresado debe:

Dominar los contenido temáticos definidos como básicos de la formación universitaria y de la profesión por estudiar.

Tener habilidades de razonamiento lógico (de análisis, de síntesis, de contrastación y de aplicación del conocimiento) que le permitan interactuar con situaciones problemáticas.

Utilizar adecuadamente la metodología científica, y los lenguajes del español y las matemáticas.

Contar con la capacidad de abstracción y simbolización.

Tener hábitos y estrategias que le permitan comprender la lectura y expresarse correctamente en forma oral y escrita.

Aplicar sus habilidades motoras al aprender el manejo de instrumental científico o técnico.

Tener una actitud de investigación de compromiso y participación en la solución de problemas escolares y de la sociedad.

Tomar una decisión vocacional sustentada en un análisis crítico sobre sus gustos, inquietudes y deseos personales.

b) Su integración al mundo del trabajo requiere:

Poseer el sentido de la responsabilidad social y económica que implica la realización de un trabajo.

Contar con los conocimientos, habilidades y actitudes que le permitan organizarse en diferente forma para la realización de un trabajo.

Tener la motivación necesaria para esforzarse al hacer mejor su trabajo y seguir ampliando sus conocimientos.

Aplicar los conocimientos, métodos, técnicas y procedimientos aprendidos, en el ámbito laboral.

c) Su integración en la vida cotidiana requiere:

Analizar, valorar y discriminar la diversidad de mensajes informativos que le presenta el medio.

Tener una actitud reflexiva y crítica hacia sí mismo, la sociedad, la naturaleza, la ciencia y la cultura, fundarse en conocimientos filosóficos que le permitan comprender y explicar la realidad, así como valorar la manifestación artística y deportiva.

Aplicar los conocimientos adquiridos en la compresión y solución de problemas de su vida cotidiana.

Contar con los elementos que le permitan enfrentar los riesgos propios de su edad, tales como el alcoholismo, la farmacodependencia, los embarazos no deseados, etc.

6. CONCEPCIÓN PEDAGÓGICA DEL COLEGIO DE BACHILLERES.

Tomando en cuenta los avances generados por las principales teorías en relación con la práctica educativa y de acuerdo con sus finalidades y posturas filosóficas el Colegio considera el aprendizaje como un proceso continuo de construcción del conocimiento y a la enseñanza como un conjunto de acciones que favorecen dicho proceso. Dicha construcción del conocimiento debe entenderse como una permanente búsqueda de explicación de la realidad, a través de la interacción entre el sujeto y el objeto; y como consecuencia tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

Conocer el nivel de desarrollo cognoscitivo del estudiante y partir de él para planear actividades que apoyen su transición hacia un nivel superior, (propiciar situaciones para cuya solución no le sean suficiente las operaciones y estructuras cognoscitivas que posee, ante lo cual el estudiante va a sufrir un desequilibrio, que le someterá a un proceso de **asimilación-acomodación** que permanecerá hasta encontrarse otra situación desequilibrante.) (Piaget, 1973).

Propiciar condiciones sociales que le permitan progresar hacia un máximo desarrollo. (Vigotky, 1987).

Ofrecer materiales que proporcionen aprendizajes significativos para lo cual habrán de cumplirse dos condiciones: Los contenidos deben estar convenientemente organizados siguiendo una secuencia lógica-psicológica apropiada, es decir, organizados, interrelacionados y jerarquizados, respetando niveles de inclusividad, abstracción y generalización. Que el alumno posea los antecedentes ideativos necesarios para aprender los contenidos ofrecidos. (Ausubel, 1963).

Recomendar las actividades internas del estudiante por lo cual es necesario tener en cuenta procesos tales como: la atención, la memoria, el pensamiento, la imaginación y el lenguaje. (Cagne, 1985).

Tomar en cuenta las propuestas instruccionales que propicien el desarrollo de estudiantes independientes, creativos y eficientes solucionadores de problemas. (Castañeda y López, 1990).

El Colegio de Bachilleres propone su propia concepción pedagógica para la instrumentación de la práctica educativa basada en los cinco componentes siguientes:

a) Problematización.

La construcción del conocimiento puede identificarse al plantear un problema para cuya solución el estudiante utilice sus conocimientos, con lo cual podrá reconocer que son insuficientes y crear así un desequilibrio entre sus saberes y los propuestos por el problema.

Al planear la situación problema, se debe considerar dos dimensiones importantes y buscar su interrelación: por una parte los contenidos a partir de los cuales el estudiante puede cuestionar sus conocimientos previos; por otro lado la especificidad individual del estudiante (sus expectativas e inquietudes, sus intereses y sus necesidades); y su especificidad social en la que esta inmerso.

b) Organización Lógica e Instrumental.

Se refiere a un conjunto de condiciones y acciones lógicas e instrumentales propiciadas por el profesor, para facilitar la interacción del estudiante con el objeto; con lo cual reafirmará, modificará o reestructurará sus propios esquemas de conocimiento, para que con ello no sólo tenga aplicación inmediata sino que al resto de su vida escolar, laboral y social. La organización lógica e instrumental podría pensarse como una herramienta que ha de articularse con las estrategias que utiliza el estudiante para aprender y las que utiliza el docente para enseñar.

c) Incorporación de Información.

Es necesario que el estudiante resuelva sus dudas y obtenga información que le permita conocer y formalizar conceptos, procedimientos y principios que engloban y explican la situación problemática en cuestión, lo cual hará con la guía del profesor quien orientará la búsqueda de información más pertinente para la construcción de su conocimiento.

d) Aplicación.

Una vez que el estudiante ha iniciado la incorporación de conocimientos construidos deberá verificar si son correctos, suficientes y, si le permiten la solución de problemas planteados en el nivel de habilidad establecido. La ejercitación se desarrolla, en un principio, en situaciones similares a la problematización inicial y paulatinamente se van solucionando problemas más complejos.

La aplicación del conocimiento es, así una manifestación de la modificación de los esquemas cognitivos del estudiante.

e) La consolidación es la etapa que permite al estudiante generalizar el conocimiento y proponer variaciones de manera fundamentada, es decir, que ante la presentación de diversas situaciones deben poder decir cuando es lógicamente pertinente usar o transferir esos nuevos conocimientos. Para llegar a la consolidación se recomienda:

Presentar al alumno situaciones o problemas donde la aplicación de los nuevos conocimientos sean generalizables (problemas cada vez más complejos, en otros campos o de investigaciones multidisciplinarias).

Proponer situaciones en donde los estudiantes tengan que decir cuáles conocimientos son pertinentes en la solución.

Solicitar a los alumnos que planteen otras situaciones en donde puedan aplicar los nuevos conocimientos.

CONCEPCIÓN PEDAGÓGICA PARA LA INSTRUMENTACIÓN DE LA PRÁCTICA EDUCATIVA DEL COLEGIO DE BACHILLERES

PROBLEMATIZACIÓN	Para que el estudiante reconozca que sus conocimientos son insuficientes para la solución de ciertos problemas.
ORGANIZACIÓN LÓGICA INSTRUMENTAL	Son las estrategias, el material de apoyo y las condiciones usadas por el profesor para reafirmar, modificar o reestructurar los esquemas de conocimiento de los alumnos.
INCORPORACIÓN DE INFORMACIÓN	Para resolver dudas, conocer y formalizar conceptos y procedimientos implicados en la situación problemática, el estudiante requiere de información veraz y oportuna, lo cual hará con la guía del profesor.
APLICACIÓN	Para verificar si los conocimientos obtenidos son correctos y suficientes deberá realizar aplicaciones similares a la problematización inicial.
CONSOLIDACIÓN	Para generalizar el conocimiento a otras asignaturas y a situaciones más complejas.

RECAPITULACIÓN DEL CAPITULO I

"MODELO EDUCATIVO DEL COLEGIO DE BACHILLERES"

INSTITUCIONES DE ENSEÑANZA MEDIA SUPERIOR

ACTIVIDADES SOCIALMENTE PRODUCTIVAS

MODELO EDUCATIVO DEL COLEGIO DE BACHILLERES

Conjunto de normas, valores, concepciones teóricas y lineamientos que definen la estructura curricular, organizativa y metodológica que en lo social, científico y pedagógico dan identidad y dirección a la práctica educativa de la institución.

OBJETIVOS GENERALES

- Desarrolla la capacidad intelectual del alumno mediante la obtención y aplicación de conocimientos.
- Conceder la misma importancia a la enseñanza que al aprendizaje.
- Crear una conciencia crítica que le derive una actitud responsable ante la sociedad.
- Proporcionar capacitación y adiestramiento en una técnica.

ESTRUCTURA ACADEMICA

Para lograr sus objetivos cuenta con:

Área de formación propedeutica

Área de capacitación para el trabajo

Área de formación paraescolar

PLAN Y PROGRAMA DE ESTUDIO

El plan concreta los objetivos institucionales en programas de estudio el programa está integrado por: contenidos a enseñar, su ubicación, secuencia, distribución, dosificación, carga horaria, objetivos de aprendizaje y enfoque metodológico (estrategias didácticas, lineamientos de evaluación, bibliografía y organización de los contenidos para su enseñanza.

PERFIL DEL EGRESADO

De acuerdo con las caracte-rísticas de los alumnos estos deben desempe-ñarse para:
*La educación superior
*El mundo del trabajo
*La vida cotidiana

CONCEPCIÓN PEDAGÓGICA

Avances generados por las principales teorías

- Conocer el nivel de desarrollo de conocimientos del estudiante (habilidades básicas).
- propiciar condiciones sociales que le permitan desarrollo máximo.
- recomendar el uso de los procesos internos del alumno: atención, imaginación, memoria y lenguaje.
- ofrecer materiales que proporcionen aprendizajes significativos (contenidos ordenados, interrelacionados y jerarquizados respetando niveles de inclusión, abstracción y generalización, que el alumno tenga los antecedentes básicos para entender

CONCEPCIONES

APRENDIZAJE. - Proceso continuo de construcción del conocimiento (búsqueda de explicación de la realidad).
ENSEÑANZA. - Conjunto de acciones que propician el aprendizaje.
la construcción del conocimiento se dá a través de la interacción entre sujeto y objeto.

II. MODELO DIDÁCTICO PARA LA ELABORACIÓN DE MATERIALES.

La elaboración de materiales deberá tener la cualidad de vincular y aplicar los aspectos disciplinario y didáctico.

El aspecto disciplinario se refiere a la formación del docente y las características de cada asignatura las cuales están expuestas tanto en el enfoque como en la intención del programa.

El aspecto didáctico indica partir de las bases que según el modelo educativo del Colegio de Bachilleres permiten la apropiación constructiva del conocimiento. Para aclarar lo que esto ultimo significa es necesario partir del concepto homogéneo de aprendizaje.

1. BASES PEDAGÓGICAS.

El aprendizaje se debe concebir como constructivo, integral y evolutivo (desarrollo).

Constructivo: porque el sujeto en su acción cognoscitiva estructura un objeto al identificar sus características y nuevas relaciones respecto a este, pero a la vez el objeto estructura al sujeto dependiendo de la naturaleza de este. De aquí que el proceso de aprendizaje sea una interacción estricta entre el sujeto y el objeto de conocimiento lo cual le da su caracter de construcción.

El aprendizaje entonces no es acumulativo, ya que la propia acción del sujeto para aprender ante una nueva situación o problemática creará las condiciones necesarias, para reelaborar, ampliar y corregir sus propias concepciones respecto a los objetivos de conocimiento.

Integral: porque en la acción de aprender se involucran dimensiones de diferente nivel que impactan dicha acción, tales como lo **socio-cultural** y particularmente las creencias, costumbres y convicciones que ha desarrollado el individuo en su interacción con la cultura y la historia de su época. También lo referente a su individualidad, conformada por su personalidad; particularmente sus mecanismos emocionales, afectivos y motivacionales ante la necesidad de crecimiento intelectual y de satisfacción por conocer, comprender e interpretar su propia realidad.

Evolutivo (desarrollo): porque el estudiante, fortalece en la acción de aprender sus instrumentos cognoscitivos, sean estas habilidades lógicas metodológicas, esquemas de acción y estructuras de abstracción y reflexión, las cuales posibilitan al sujeto para acceder a nuevas situaciones de aprendizaje, en el sentido de considerar al aprendizaje como producto de una relación entre la estructuración del sujeto y los objetivos.

2. FASES DE APRENDIZAJE.

El aprendizaje debe ser significativo, entonces da lugar a un modelo didáctico conformado por cuatro fases: Inducción, Estructuración, Consolidación y Retroalimentación.

Inducción: su objetivo es poner en contacto al estudiante con lo que va a aprender incorporándolo a una situación general del aprendizaje del problema. La situación de aprendizaje que deseamos ofrecer al estudiante debe posibilitarle su participación activa dentro del proceso. asimismo, la inducción tiene como función iniciar un proceso de aprendizaje en el cual el propio sujeto tenga necesidad de ir construyendo y completando su actividad cognoscitiva.

Estructuralización: durante esta fase se lleva a cabo la revisión, coordinación y construcción de esquemas de conocimiento, estas actividades son el resultado de un proceso complejo que se inicia de alguna forma con la identificación de una problematización y de la movilización de esquemas de conocimientos que el sujeto posee y que puedan ayudarle a resolverla. Ambas actividades (identificación y movilización) pueden considerarse como abordadas durante la inducción una vez que el sujeto ha movilizado (evocado y relacionado) algunos esquemas de conocimiento, tratará de aplicarlos para resolver el problema o situación de aprendizaje. Deberá entonces buscar una forma de compensación para poder resolver la dificultad y restablecer el equilibrio cognoscitivo alterado por el planteamiento de un problema. Precisamente esto último, se refiere al sentido más general en que puede entenderse el papel activo del sujeto en la construcción.

Se da una aproximación sistemática, del sujeto (estudiante) al objeto de conocimiento (estudio).

Consolidación: Tiene la función de reafirmar lo aprendido, a un nivel mayor que los alcances de la fase anterior, debido a que establece relaciones y comparaciones de todos los temas y conceptos estudiados en la fase de estructuración. En este sentido el conocimiento debe ser aplicado y generalizado ya que la consolidación que se da en la fase de estructuración se circunscribe al tema estudiado. Por otra parte en esta fase de consolidación la reafirmación pone el énfasis en la posibilidad de que el estudiante profundice en el conocimiento científico que se retoma para la tecnología y la vida cotidiana en general, relacionando los temas estudiados de una manera global y en sentido de estructura conceptual.

Retroalimentación: aquí el estudiante reconoce el procedimiento que ha seguido para construir su conocimiento, así como de las diferencias entre su modo de pensar inicial y final.

Por una parte debe realizarse a través de la contrastación entre el nivel de conocimientos con el que inició el proceso de aprendizaje y al que finalmente llegó; los productos obtenidos (conceptos) lo guardarán hacia nuevas preguntas de un nivel superior. Por otro lado, mediante el análisis del proceso que siguió - proceso que ha seguido un camino lógico- sin descartarse el factor afectivo que obviamente estuvo involucrado, llevará al estudiante a describir los errores y aciertos en el procedimiento que siguió, de ahí que la función fundamental del material sea orientar al estudiante en estos dos aspectos.

3. ELEMENTOS DIDÁCTICOS DE LOS MATERIALES.

Las fases del aprendizaje enunciadas deben ser retomadas en la elaboración de materiales impresos, para este propósito se incluyen algunos elementos didácticos que permitan al estudiante la construcción del conocimiento.

Estos son: la inducción, cuya función principal es motivar y contextualizar, la estructuración para hacer reflexionar, la consolidación para reafirmar lo aprendido y la retroalimentación cuyo propósito es aplicar lo aprendido.

Los componentes principales de estos elementos didácticos son:

La fase de Inducción se compone de los elementos didácticos: índice, propósito, introducción y cuestionamiento guía.

Índice: Se refiere al desglose del contenido del material especificado en páginas.

Propósito: Se redacta en forma general, e integra los conocimientos, habilidades, valores, etc. que deberá poseer el estudiante al finalizar el estudio del material.

Introducción: Ubica al estudiante en el tema que va a estudiar.

Cuestionamiento Guía: Sirve de orientación al alumno para el desarrollo del contenido, proponiéndole una situación problemática que puede contestarse parcialmente con lo que conoce y lo posibilita para detectar la necesidad de adquirir nuevos conocimientos y habilidades a fin de poder resolverla totalmente.

En **la fase de estructuración** los elementos didáctos son: Desarrollo de contenido, actividades de regulación y explicaciones integradoras.

Desarrollo de Contenido: Al inicio se establece una red conceptual o esquema que oriente el desarrollo del contenido.

Identificando los elementos de un concepto y exponiendo sus relaciones.

Se deben manejar, conceptos sencillos e ir progresivamente hacia los más complejos.

Actividades de regulación: Se incluye en el desarrollo del contenido donde es necesario elaborar preguntas que propicien la reflexión o actividades que permitan aplicar, comprender o construir el conocimiento. Deben permitir la participación activa del estudiante.

Explicaciones Integradoras: Deben incluirse de preferencia al final de cada tema.

Son síntesis de la relación y vinculación de los conceptos ejes integrados en una totalidad. Pudiendo presentarse en forma de cuadro, esquema o en una reflexión personal del autor.

Los elementos didácticos de la Fase de Consolidación son actividades de consolidación y de generalización.

Actividades de consolidación:

- Son actividades integrales que posibilitan que el estudiante las relacione con los temas tratados en el material.

- Son de caracter práctico y constructivo a partir del contenido estudiado, para obtener una explicación del estudiante.

- Permiten al estudiante dar respuestas globales y congruentes de lo estudiado.

- Promueven el pensamiento abstracto, así como las operaciones mentales del tipo formal.

- Permiten aplicar lo que aprendió el estudiante a situaciones concretas.

- Ayuda a observar las relaciones y la utilidad de lo aprendido.

- Aquellas donde se consolide, aplique o ejerciten varios conceptos en una sola, con el fin de que el estudiante integre lo aprendido.

Actividades de generalización.

- Se propone al final de cada material.

- Sugieren consultar otros materiales para profundizar lo aprendido y que no está en el material estudiado.

- Enriquecen lo aprendido al ser generalizado el conocimiento a otras situaciones.

- Actividades tales como leer artículos (ciencia y tecnología, etc.) o asistir a eventos culturales, conferencias, museos, etc.

- **La fase de Retroalimentación** tiene como elementos didáctico a: La recapitulación, los lineamientos de autoevaluación y la bibliografía.

La recapitulación es un esquema o cuadro sinóptico que contiene los aspectos relevantes del contenido.

Presentado con un breve análisis del proceso lógico que sirvió al estudiante durante su aprendizaje con el material.

Posibilita que el estudiante haga una síntesis reflexiva de los contenidos vistos.

Los lineamientos de autoevaluación son respuestas a las actividades de consolidación que permiten al estudiante verificar sus propias respuestas; éstas pueden ser de dos tipos dependiendo de la intención de los autores.

- Se pueden bosquejar las respuestas, explicando algunos de los elementos que debió considerar, o bien dar respuestas detalladas y concretas.

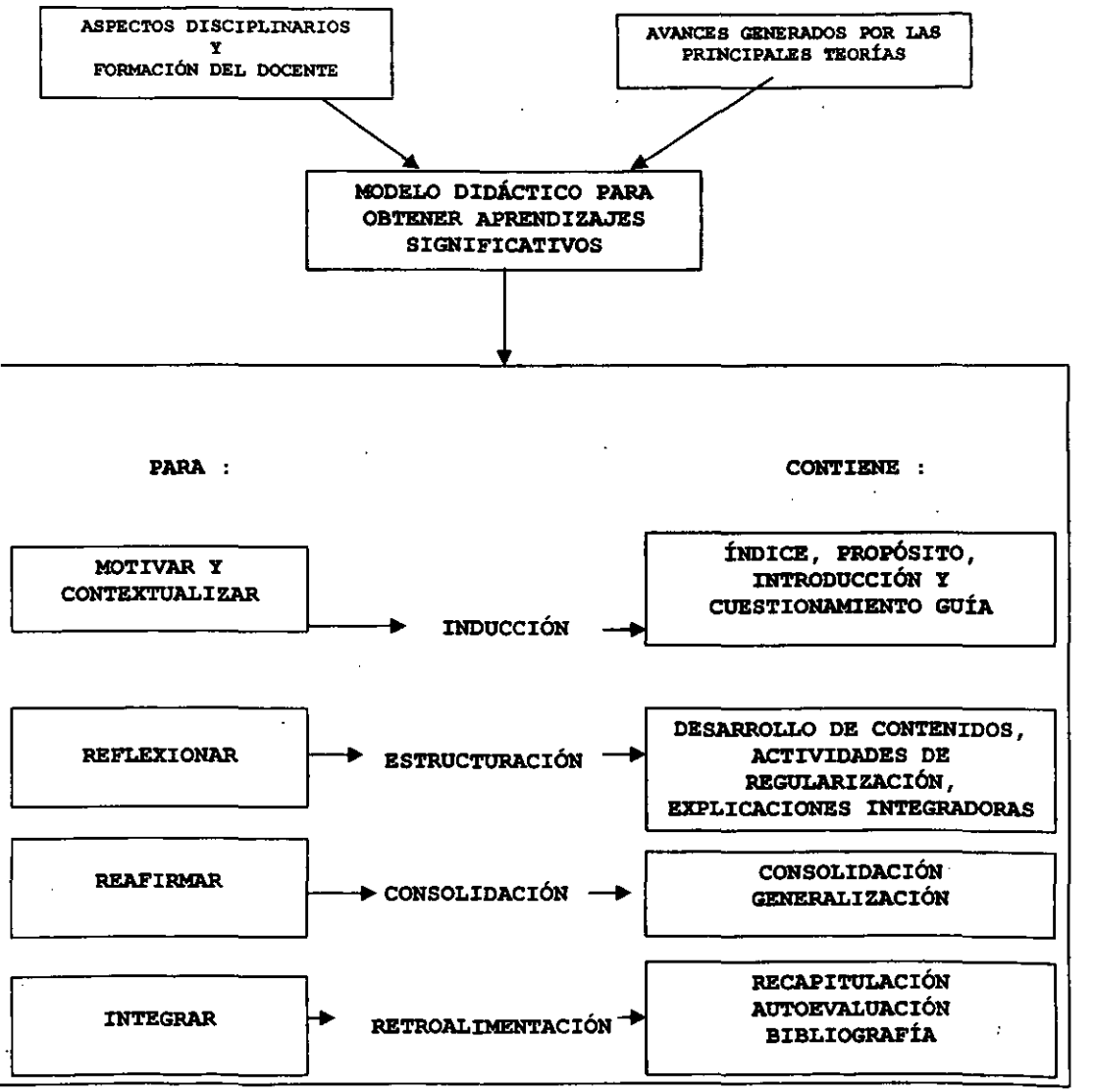
- Permiten al estudiante volver a revisar aquellos puntos que necesiten reafirmarse, o bien consultar otras fuentes.

La bibliografía, lista las referencias donde el estudiante puede profundizar o ampliar los temas tratados a lo largo del material.

Dichas referencias deben adecuarse al nivel de bachillerato y de fácil acceso para él (libros y bibliotecas de costos accesibles).

RECAPITULACIÓN DEL CAPITULO II

"MODELO DIDÁCTICO PARA LA ELABORACIÓN DE MATERIALES"



III. INICIACIÓN AL ALGEBRA.

PROPUESTA DIDACTICA PARA EL NIVEL MEDIO SUPERIOR.

ÍNDICE DE LA PROPUESTA

Propósito

Introducción

Cuestionamiento Guía

1. **Notación Exponencial**
2. **Origen de los Sistemas de Numeración**
3. **Los Números Naturales**
4. **Los Números Enteros**
5. **Los Números Racionales**
6. **La Recta Numérica**
7. **Los Números Decimales**
8. **Reglas del Punto Decimal**
9. **Notación Científica**
10. **Los Números Irracionales**
11. **Los Números Reales**
12. **Leyes de Exponentes y Radicales**
13. **Razones y proporciones**

Síntesis Temática

Actividades de Consolidación

Lineamientos de Autoevaluación

Actividades de Generalización

PROPÓSITO

En los cursos de Matemáticas de la secundaria estudiaste la Aritmética de los principales conjuntos numéricos (naturales, enteros y racionales), notaste su importancia y analizaste su utilidad al aplicarlos en la solución de problemas; ahora con el estudio de este material comprenderás cómo se generan los números reales (naturales, enteros, racionales e irracionales), y las propiedades de sus operaciones, con la finalidad de reconstruir métodos, técnicas y procedimientos que faciliten tanto la resolución de problemas de carácter numérico como el acceso al estudio del álgebra.

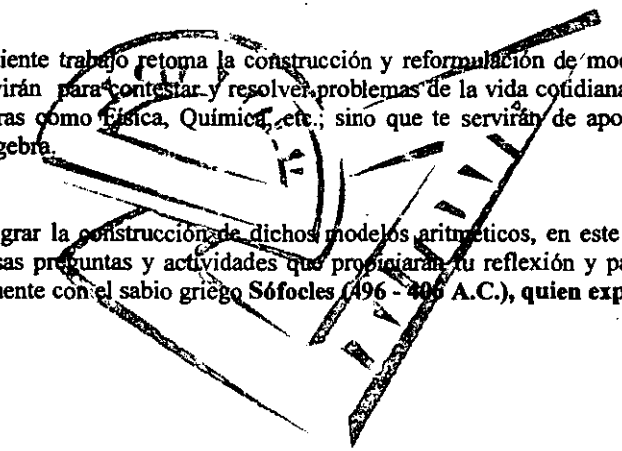
Para lograr esto en cada subtema, se plantean problemas y ejercicios relacionados con el conocimiento que ya posees, los cuales deben hacerte reflexionar y aplicar tus propios métodos para llegar a la respuesta, la cual confrontarás con la construcción sugerida en el material y así poder evaluar, afirmar o modificar tus propios conocimientos.

Todo ello, primero con respecto a los sistemas numéricos y posteriormente para los modelos aritméticos que de ellos dependen.

INTRODUCCIÓN

El proceso de contar es y ha sido una de la más grandes preocupaciones de la humanidad desde tiempos muy remotos, se dice que, probablemente, el primer instrumento que el hombre usó para ello fueron sus dedos, posteriormente cada civilización creó su propio sistema de numeración que también sirvió para contar, luego para este mismo fin se utilizó el ábaco y las operaciones aritméticas; en la actualidad las máquinas calculadoras y las computadoras constituyen una importante e indispensable herramienta de trabajo que sirve no sólo para contar sino para procesar grandes cantidades de información que se obtienen en poco tiempo.

El siguiente trabajo retoma la construcción y reformulación de modelos aritméticos que no sólo te servirán para contestar y resolver problemas de la vida cotidiana, y de aplicaciones a otras asignaturas como Física, Química, etc.; sino que te servirán de apoyo para tu acceso al estudio del Álgebra.

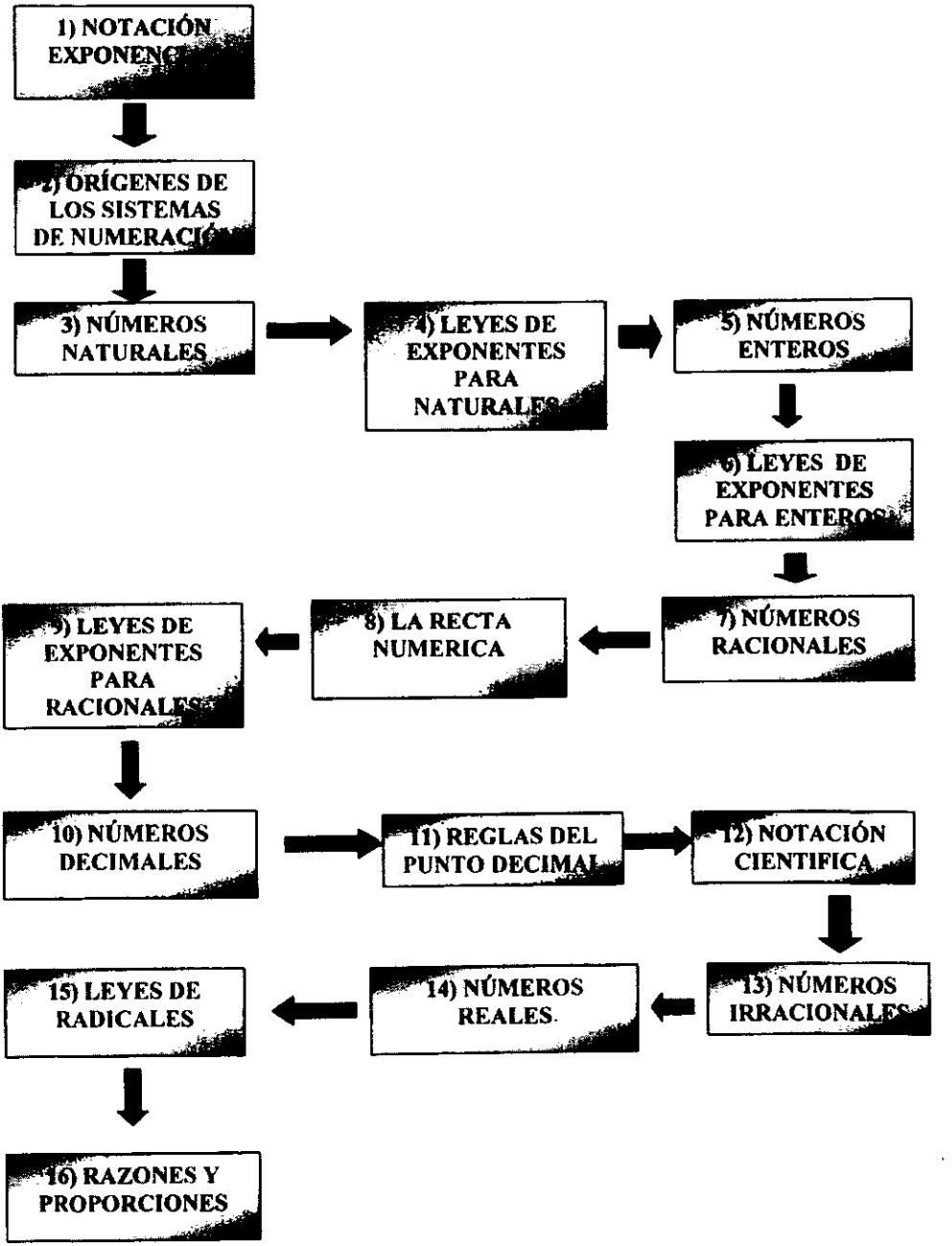


Para lograr la construcción de dichos modelos aritméticos, en este material encontrarás entre otras cosas preguntas y actividades que propiciarán tu reflexión y participación activa lo cual es congruente con el sabio griego **Sófocles (496 - 406 A.C.), quien expresaba:**

"...Se debe aprender haciendo las cosas, porque aunque uno cree que sabe no tiene la certeza hasta que lo intenta hacer."

El autor

DESARROLLO DE CONTENIDO



Cuando utilices los números para contar, debes tener en cuenta las operaciones que puedas realizar con ellos; así como su significado y propiedades para hacer más eficiente dicha actividad, por ejemplo:

Si en un almacén hay 1005 cajas con 25 refrescos cada una, calcula el total de refrescos en existencia.

Respuesta: _____

Observa que, algunos procedimientos para obtener la respuesta del problema anterior pueden ser:

a) Contar uno a uno los refrescos.
b) Sumar 1005 veces 25.
c) Sumar 25 veces 1005.
d) Multiplicar 25 por 1005.
e) Sumar los productos: 1000 por 25 con 5 por 25.

Medita cada procedimiento y date cuenta que el más rápido y sencillo fue sumar los productos 1000 por 25 con 5 por 25, lo cual se debe a que dicho resultado se obtuvo a través de la suma de dos multiplicaciones cuyos productos son fácilmente calculables, al aplicar en forma conveniente la propiedad distributiva y de manera abreviada el resultado de multiplicar 25 por 1000 (agregando a 25 tres ceros).

Imagínate el ahorro de tiempo y esfuerzo que hubo entre contar uno a uno los refrescos y el de sumar 25000 con 125 (último procedimiento mental).

Recuerda que, el resultado de multiplicar cualquier número entero por 10, 100, 1000, etc. se obtiene agregando a dicho número uno, dos, tres, etc. ceros.

La razón de lo anterior es que dada la estructura del sistema décimal, cualquier número puede expresarse con notación desarrollada de donde, por ejemplo, al multiplicar.

a)25 por 10

Lo expresamos primero con notación desarrollada.

$$\left[2(10)^1 + 5(10)^0\right]10$$

Luego, a esta expresión le aplicamos la propiedad distributiva y la Ley de los Exponentes $\mathbf{a^n a^m = a^{n+m}}$, **Para obtener:**

$$2(10)^1(10) + 5(10)^0(10)$$

Enseguida se escribe su equivalente con notación exponencial

$$2(10)^2 + 5(10)^1(1)$$

Nota que en esta expresión tenemos dos centenas, cinco decenas y ninguna unidad, por lo tanto:

$$2(10)^2 + 5(10)^1 + 0(10)^0$$

Lo cual es igual a 250

b) 25 por 100

$$\left[2(10)^1 + 5(10)^0\right]100 = 2(10)^1(100) + 5(10)^0(100) =$$

$$= 2(10)^1(10)^2 + 5(1)(10)^2 = 2(10)^3 + 5(10)^2 + 0(10)^1 + 0(10)^0 =$$

c) Utiliza el mismo procedimiento para obtener el producto de 25 por 1000.

Observa que como consecuencia de lo anterior, el procedimiento para multiplicar números terminados en ceros puede abreviarse, por ejemplo:

Para multiplicar 15000 por 40000, multiplicamos 15 por 4 y agregamos al resultado 7 ceros, puesto que si aplicamos las propiedades conmutativa y asociativa tendremos:
15000(40000) = 15(1000)(4)(10000)=15(4)(1000)(10000)=60(10000000)=600000000.

¿Crees que valga la pena estudiar las operaciones, sus propiedades y el significado de los números para ahorrar tiempo y esfuerzo en la solución de éste y otros problemas semejantes?

1. NOTACIÓN EXPONENCIAL.

Hace aproximadamente 400 años sólo algunas personas realizaban multiplicaciones y otros especialistas divisiones[1]. En la actualidad las máquinas computadoras proveen miles de operaciones por segundo y las mayoría de las personas requieren información veraz y oportuna para tomar decisiones con más certidumbre, es por ello que las computadoras, las calculadoras y algunos procedimientos prácticos como la notación exponencial y científica, además de su manejo e interpretación son de vital importancia, por ejemplo:

- Si se sabe que la velocidad de la luz es de 300000 kilómetros por segundo, calcular la distancia recorrida por ella en una hora.

Respuesta:_____

Para comprobar tu respuesta, llena los espacios vacíos. De las expresiones contenidas en el siguiente razonamiento.

a)

a) En un segundo la luz recorre _____ km.
b) En dos segundos la luz recorre _____ km.
c) En tres segundos la luz recorre _____ km.
d) En un minuto la luz recorre _____ km.
e) En una hora la luz recorre _____ km.

Si para obtener la respuesta, las operaciones que realizaste fueron multiplicar 300000, por 60 y este resultado por 60, entonces el resultado final se puede expresar como $108(10)^7$, lo cual se debe a que la escritura de algunos números puede hacerse por medio de exponentes, y a esta representación suele llamarse NOTACIÓN EXPONENCIAL.

- Tomando como referencia la observación del párrafo anterior, escribe el número 300000 en notación exponencial.

Respuesta: _____

Para comprobar tu respuesta observa que 300000 es igual a 3(100000) y que 100000 se puede escribir como el producto 10(10)(10)(10)(10), el cual expresado en forma exponencial equivale a $(10)^5$ y por lo tanto:

300000 = 3( )( ).

[2] **Página 24, "Historia de las Matemáticas", Marcel Boll, Editorial Diana.**

Conviene recordar los siguientes hechos:

a) **En la notación exponencial $(10)^5$ el número que se repite como factor, en este caso "10" se llama base y el índice que señala las veces que se toma la base como factor, en este caso "5" se llama exponente.**

b) **La base de una potencia puede ser cualquier número entero y también cero siempre y cuando el exponente no sea también cero (0^0 no esta definido).**

c) **Cuando el exponente es cero y la base diferente de cero, la potencia es uno ($3^0 = 1$, $7^0 = 1$,...)**

Teniendo en cuenta los hechos anteriores completa en los espacios vacíos, las siguientes expresiones:

EJERCICIOS

Escribe los siguientes productos usando exponentes:

a) 10(10)(10) = 10^3
b) 5(5)(5)(5)(5) =
c) 9(9)(9)(9)(9)(9)(9) =
d) 1(1)(1)(1) =
e) 0(0) =

Escribe cada potencia como producto de factores iguales:

a) 9^3 = 9(9)(9)
b) 5^6 =
c) $(10)^2$ =
d) 1^4 =
e) 0^1 =

Para escribir 10(10)(10)(10)(10)(10)(10) anotamos un uno seguido de _____ ceros, o diez elevado a la _____ potencia .

Para escribir $(10)^9$ anotamos 1 seguido de _____ ceros, lo que significa multiplicar diez por si mismo _____ veces.

Llena los espacios vacíos de las siguientes expresiones:

a) $(10)^{(\ )}$ = 10(10)(10)(10)(10)(10) = ( )
b) $(\ )^{(\ )}$ = 10(10)(10)(10)(10) = ( )
c) $(10)^{(3)}$ = = ( )
d) $(\ )^{(\ )}$ = = (100)
e) $(\ )^{(0)}$ = = ( )

	Número		Producto		Notación Exponencial
a)	500	=	5( )	=	5 (10)( )
b)	9000	=	9( )	=	9 ( )( )
c)	_____	=	7(10000)	=	___ ( )( )

Escribe cada número en Notación Exponencial:

a) 800000

b) 3000

c) 1

d) 25000

e) 3070000

Ahora expresa cada número escrito en forma exponencial en la forma usual:

a) $3\,(10)^2$ =

b) $5\,(10)^4$ =

c) $6\,(10)^5$ =

d) $9\,(7)^2$ =

e) $2\,(5)^3$ =

CÁLCULO EGIPCIO

Se cree que alrededor del año 1650 a. de C. fue elaborado el papiro de **RHIND**[3] en el cual se aprecia que la multiplicación en Egipto se realizaba por medio de duplicaciones y sumas de resultados, por ejemplo, descubre su método observando y analizando el siguiente esquema en el que se muestra el producto de 47 por 25, utilizando notaciones modernas para entender mejor.

47	**1**
94	**2**
188	**4**
376	**8**
752	**16**
1175	**25**

Si no te fue posible entender, vuelve a intentar después de contestar, ¿qué significan los renglones enmarcados?, por ejemplo, ¿ qué indica ?

376	8

(Notar que los números de la izquierda, indican 47, tatas veces como los de su derecha)

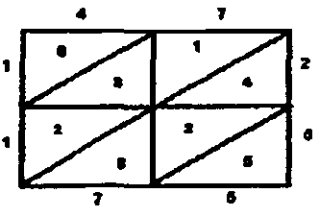
¿Podrías utilizar este procedimiento para calcular el producto 1175 por 18?

[3] Página 60, Lecturas de Apoyo, "Matemáticas I-A", Volumen 1

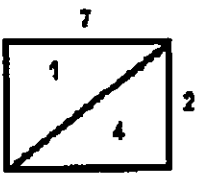
CALCULO ARABE.

Los árabes del siglo IX, para multiplicar utilizaban una cuadrícula con diagonales llamado **MÉTODO SCACHIERO**[4] Lucas Pacioli (1445-1514) quien escribió el primer tratado impreso de aritmética y álgebra demostró dicho procedimiento.

Descubre su método observando y analizando el diagrama en el que se muestra la forma de obtener 1175 como resultado de multiplicar 47 por 25.

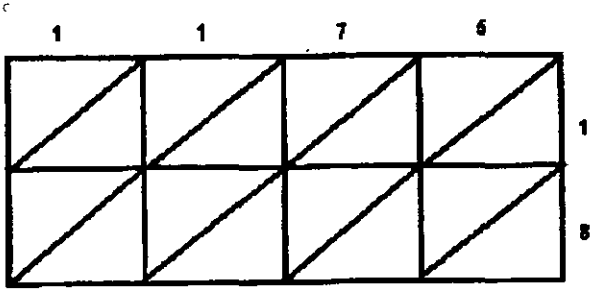


Si no te fue posible entender, vuelve a intentar después de contestar, ¿qué parte de la multiplicación significa la esquina del diagrama?



(Comprueba en el resto del diagrama, lo que sucede en esta esquina, es decir, que dos por siete son catorce)

¿Podrías utilizar este procedimiento para calcular el producto 1175 por 18 en el siguiente diagrama?



[4] Pagina 228, Lecturas de Apoyo, Matemáticas I-A", Volumen I

2. ORIGENES DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

Los primeros números que el hombre conoció fueron: el uno, dos, tres, cuatro, cinco,...

Le sirvieron para contar objetos. Al principio se ayudó mediante el empleo del procedimiento de apareo, formando parejas entre los objetos que debía contar y conjuntos de referencia, que generalmente eran los dedos de las manos. Actualmente los niños hacen lo mismo cuando con los dedos indican su edad, por cada dedo un año.

Después descubrió que era necesario un método más eficiente para registrar cantidades mayores y empezó a rayar las rocas, las paredes de las cuevas, troncos y varas, es decir señaló con una marca cada objeto, dando lugar a la aparición de los primeros símbolos.

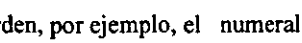
A medida que fueron aumentando sus necesidades se hizo evidente que el conteo a base de tarjar era difícil e inconveniente, por lo cual los símbolos empezaron a ser ordenados en grupos y remplazados por unidades mayores, tal como sucedió en el sistema Egipcio en el que diez[5] unidades (||||||||||) eran sustituidas por una pezuña (∩),
diez pezuñas por una cuerda anudada (δ), etc., y de esta forma ganar espacio y comodidad en la notación.

En esta fase evolutiva podemos notar que las civilizaciones ya contaban con reglas y símbolos propios para representar números, es decir, tenían sus propios sistemas de numeración.

NUMERACIÓN EGIPCIA (3000 a.C.)

Los símbolos básicos o numerales que servían para representar a los números eran:

uno diez cien mil diez mil cien mil un millón

El principio bajo el cual se utilizaban estos numerales es el aditivo, que consiste en sumar su valor sin importar el orden, por ejemplo, el numeral: 
representaba el número 1000+100+100+100+10+10+1+1+1+1+1, es decir, 1000+300+20+5, o sea, 1325

[5] La medida de los grupos es comúnmente designada como la base, en consecuencia el sistema de numeración Egipcio es de base diez. Y obviamente un símbolo no podía representarse más de nueve veces.

NUMERACIÓN ROMANA (200 a.C.)

Los símbolos básicos o numerales que sirven para representar a los números son letras del abecedario, o sea:

I	V	X	L	C	D	M
uno	cinco	diez	cincuenta	cien	quinientos	mil

Los principios bajo los cuales se utilizan estos símbolos son: aditivo, sustractivo y multiplicativo, los cuales consisten en:

a) Sumar el valor de los símbolos que integran el numeral, si el de menor valor aparece escrito a la derecha del mayor, por ejemplo, el numeral MDCCXXXII, representa el número:
1000+500+100+100+10+10+10+1+1, es decir,
1000+500+200+30+2, o sea **1732.**

b) Restar el valor de los símbolos que integran el numeral, solo cuando esté:

I antes de V o de X
X antes de L o de C
C antes de D o de M.

Por ejemplo, el numeral:
IV, representa el número, V – I, es decir 5 – 1, o sea 4

XLV, representa el número, L – X + V, es decir 50 – 10 + 5, o sea 45

MCMXC, representa el número, _____, es decir, _____,
o sea _____.

c) Multiplicar el valor de los símbolos básicos por mil, cuando sobre ellos se coloque una barra.
Por ejemplo, el numeral:
$\overline{IV}$, representa el número, 4(1000), es decir
4000.
$\overline{X}$ L X X, representa el número, 10( )+ L + X +X,
es decir, _____ + 50 + 20, o sea _____

Con la finalidad de ser prácticos se debe usar un mínimo de símbolos al escribir numerales, por ejemplo, al escribir:

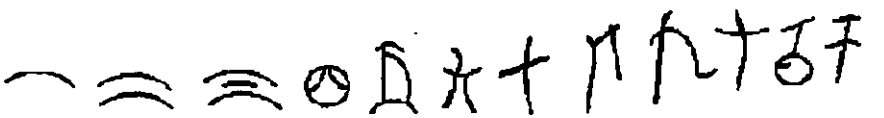
noventa y cinco, lo hacían con XCV, y no con LXXXXV.

Diez, lo hacían con X, y no con VV, etc.

Una mejoría notable se dio al usar multiplicadores para indicar el número de potencias de la base tal como sucede en el sistema de numeración **chino-japonés.**

NUMERACIÓN CHINO-JAPONES (2000 a. C.)

Los símbolos básicos o numerales que les sirven para representar a los números son:



Uno dos tres cuatro cinco seis siete ocho nueve diez cien mil

Los principios bajo los cuales operaban estos números fueron el aditivo y el multiplicativo, los cuales consisten en: sumar los productos formados entre los números menores que la base (multiplicadores) y las potencias de la base (1, 10, 100, 1000, etc.) sus numerales se escriben verticalmente, por ejemplo, el numeral:

		2(1000)	=	**2000**
	Representa	**4(100)**	=	**400**
	El	**3(10)**	=	**30**
	Número	**8(1)**	=	**8**
				2438

Finalmente aparecieron los sistemas de numeración posicionales cuando en ellos se utilizaron posiciones para sustituir las potencias de su base.

Los principios que utilizan estos sistemas son; el aditivo, el multiplicativo y el posicional; ellos consisten en sumar los términos que resultan de multiplicar el valor de cada símbolo por la potencia correspondiente a la posición que ocupa.

Algunos de estos sistemas son:

1. NUMERACIÓN INDOARABIGA (200 a.C.)

Los símbolos básicos o numerales que sirven para representar números son:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cero	uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve

La base de este sistema es diez, sus valores posicionales son horizontales de derecha a izquierda en forma creciente.

La interpretación de un numeral en este sistema puede facilitar la compresión de sus principales características, por ejemplo:

7845 representa el número

$7(10)^3 + 8(10)^2 + 4(10)^1 + 5(10)^0$, es decir

$7(1000) + 8(100) + 4(10) + 5(1)$, o sea

$7000 + 800 + 40 + 5$

A cualquiera de las expresiones:

$7(10)^3 + 8(10)^2 + 4(10)^1 + 5(10)^0$ ó $7(1000) + 8(100) + 4(10) + 5(1)$

se acostumbra llamar notación desarrollada del número 7845.

2. NUMERACIÓN MAYA (300 D.C)

Los símbolos básicos o numerales que les sirvieron para representar números en este sistema fueron:

cero

uno

cinco

Este sistema fue vigésimal (base veinte), sus valores posicionales eran verticales de abajo hacia arriba en forma creciente.

El principio aditivo y los símbolos básicos se combinaban para representar número menores que 20.

Sus valores posicionales eran:

•
•
•
$(20)^3 = 8000$
$(20)^2 = 400$
$(20)^1 = 20$
$(20)^0 = 1$

Para el cómputo del tiempo y las fechas importantes[6] disponían de este mismo sistema. Con la única excepción de que la unidad de tercer orden era 18 veces la unidad anterior, es decir, 18(20), en vez de $20 (20) = (20)^2$, pues este número se acerca lo mas posible a la duración del año de 365 días.

De manera que dichos valores fueron:

•
•
•
$18(20)^2 = 7200$
$18(20)^1 = 360$
$(20)^1 = 20$
$(20)^0 = 1$

La escritura de numerales menores que veinte, se realizaba de dos maneras: una, utilizando un punto por cada unidad y una barra por cada cinco. Otra, representando con una cabeza distinta cada uno de estos números.

---

[6] Página 8, J. Rey Pastor y J. Babini
Historia de las Matemáticas. Los sistemas de numeración
Primera Edición. Buenos Aires 1951. Espasa-Calpe

Por ejemplo el numeral:
a) Con el sistema vigésimal estricto

●		$1(20)^2(18)$	=	1(7200) = 7200
● ●	**Representa**	$7(20)^1(18)$	=	7(360) = 2520
	El	$0(20)^1$	=	0(20) = 00
———	**Número; ó**	$10(20)^0$	=	10 (1) = 10
				9730

b) Con el sistema para el computo del tiempo.

●		$1(20)^3$	=	1(1800) = 8000
● ●	**Representa**	$7(20)^2$	=	7(400) = 2800
	El	$0(20)^1$	=	0(20) = 0
———	**Número; ó**	$10(20)^0$	=	10 (1) = 10
				10810

Nota: Entre los monumentos y códices Mayas, el mayor número que se ha encontrado corresponde a un número de ocho cifras en el sistema decimal, es decir decenas de millón.

3. NUMERACIÓN BABILONICA (2000 a.C.)

Los símbolos básicos o numerales que les servían para representar números fueron:

uno	diez

Este sistema fue sexagésimal (base sesenta), sus valores posicionales eran horizontales de derecha a izquierda en forma creciente.

El principio aditivo y los símbolos básicos se combinaban para formar números menores a sesenta.

Este sistema careció de un símbolo para representar al cero por mucho tiempo, por lo cual su uso presentaba algunas ambigüedades.

Un ejemplo en este sistema y su significado sería:

$3(60)^2$	+	$34(60)^1$	+	$23(60)^0$	=	
10800	+	2040	+	23	=	12863

4. NUMERACIÓN BINARIA (1670 D.C.).

Los símbolos básicos o numerales usados para representar números en este sistema son:

0	1
cero	uno

La base de este sistema es dos y sus valores posicionales son horizontales de derecha a izquierda en forma creciente.

Un ejemplo en este sistema y su significado sería:

$1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1_2$ representa el número

$1(2)^5 + 0(2)^4 + 1(2)^3 + 1(2)^2 + 1(2)^1 + 1(2)^0$, es decir

$1(32) + 0(16) + 1(8) + 1(4) + 1(2) + 1(1)$, o sea

$32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 1 = 47$

Para escribir un número cualquiera "k" en un sistema de numeración posicional.

Listamos primero las potencias posicionales del sistema de numeración contenidas en el número "k".

Luego dividimos el número "k" entre la máxima potencia contenida en él para calcular cuántas de éstas están en la posición que le corresponde.

En seguida volvemos a dividir el residuo o sobrante entre la potencia anterior a la máxima, para calcular cuántas de estas potencias están en la posición que le corresponde, y así sucesivamente vamos calculando el número de potencias correspondiente a cada posición que contenga el número "k". Por ejemplo:

Para escribir el número "ciento veinticinco mil trescientos ochenta y siete" en el sistema posicional maya, procedemos de la forma siguiente:

Las potencias del sistema de numeración maya contenidas en el número son:

$(20)^0 = 1$; $(20)^1 = 20$; $(18)(20) = 360$; $(18)(20)^2 = 7200$.

(Notar que la siguiente potencia $18\,(20)^3 = 144000$, ya no esta contenida en dicho número.)

Al dividir 125387 entre 7200, tenemos: $125387 = 7200(17) + 2987$

Enseguida dividimos 2987 entre 360 para obtener: $2987 = 360(8) + 107$.

Ahora dividimos 107 entre 20, de donde $107 = 20(5) + 7$

Y por lo tanto hay:

17 en la cuarta posición (17 de 7200)

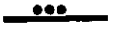
8 en la tercera posición (8 de 360)

5 en la segunda posición (5 de 20)

7 en la primera posición (7 de 1)

Por lo cual

17(7200) = 122400



8(360) = 2880

5(20) = 100

7(1) = 7

125387

Ejercicios

1.- En el numeral Indoarabigo 7323 indica:

a) ¿Cuántas decenas hay? _____

b) ¿Cuántos millares hay? _____

2.- En el numeral maya **, indica:**

a) ¿Cuántas unidades hay? _____

b) ¿Cuántos de veinte hay? _____

3.- En el numeral posicional ternario 1201 indica:

a) ¿Cuántos nueves hay? _____

b) ¿Cuántas unidades hay? _____

4.- ¿Qué indica cero en la segunda posición de un numeral?

a) Indoarabigo

b) Maya

c) Binario

5.- Escribe el número "mil novecientos noventa y cinco", en el sistema de numeración:

a) Maya
b) Babilónico
c) Ternario
d) Binario
e) Romano

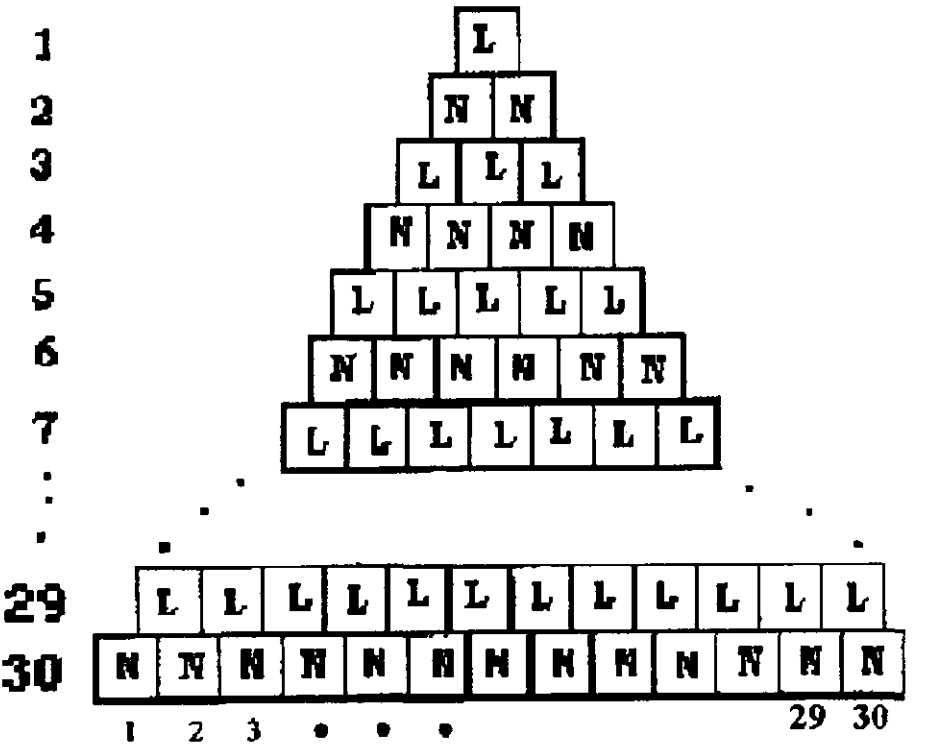
Hemos visto cómo las diferentes civilizaciones en su afán de tener comodidad y eficiencia para contar han inventado diversos sistemas de numeración. También y con el mismo fin los ha utilizado en técnicas de cómputo.

El desarrollo y práctica de algunas operaciones con sistemas de numeración no posicionales fué dificultoso y por lo tanto el cálculo era ayudado por dispositivos mecánicos como el ábaco romano, el ábaco chino (suan pan) o el ábaco japonés (soroban), de tal manera que la adición y sustracción podían resolverse con relativa rapidez y no así la multiplicación y división cuya dificultad era mayor.

Por otra parte podemos decir que los métodos de numeración posicionales nos permiten expresar de manera más simple los números, los cuales son mas adaptables a los cálculos, ya que ellos se basan en las propiedades de las operaciones, en la estructura del sistema de numeración y en las tablas de adición y multiplicación.

Supón que para obtener empleo de encargado de almacén en una compañía refresquera, se necesita secundaria terminada y resolver los problemas siguientes.

1.- Si las cajas de refrescos en un almacén están acomodadas de tal forma que arriba hay una de sabor limón, luego dos de naranja, enseguida tres de limón, posteriormente cuatro de naranja y así sucesivamente hasta treinta en la parte inferior de naranja.



a) ¿Cuántas cajas hay de ambos sabores?
b) ¿Cuántas cajas hay de limón?
c) ¿Cuántas cajas hay de naranja?

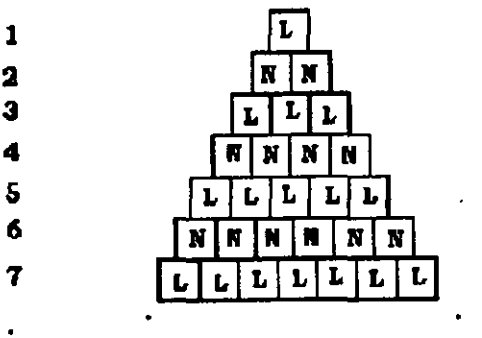
Una manera de resolver la primera pregunta abreviando tiempo y esfuerzo es siguiendo y completando las interrogantes de esta estrategia.

Tratar primero con situaciones semejantes pero con pocos elementos para después generalizar utilizando como referencia un modelo físico.

Es obvio que para responder la pregunta habrá que realizar la suma

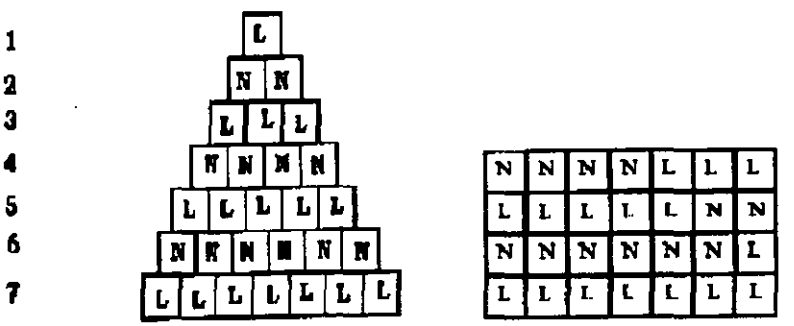
1 + 2 + 3 + ... + 29 + 30

Por lo cual nos referiremos al siguiente modelo físico con pocas cajas de refresco.



Observa que el modelo físico sugiere algunas estrategias de solución como la siguiente.

Las cajas se pueden reacomodar formando un rectángulo, es decir:



De lo anterior podemos notar que la suma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 se puede reagrupar como con las cajas, es decir:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 7 + (1+6) + (2 + 5) + (3+4) = 4 (7) = 28

Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, y la definición de multiplicación.

Tomando en cuenta lo anterior, la suma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, se calcula multiplicando _____ por_____

De manera análoga y extensiva, calcula las siguientes sumas usando multiplicaciones.

a) 1 + 2 + 3 + ... + 29 + 30 = _____ por _____

(Observa los diagramas y nota lo que sucede cuando el número de sumandos es par, y cuando es impar).

b) 1 + 2 + 3 + ... + 80 + 81 = _____ por _____

Generalizando, ahora calcula las sumas siguientes con multiplicaciones:

c) 1 + 2 + 3 + ... + m = _____ por _____, si m es impar.

d) 1 + 2 + 3 + ... + m = _____ por _____, si m es par.

e) Observa los diagramas y la relación entre los sumandos y los factores, notarás que las respuestas son:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 7(3)

a) 1 + 2 + 3 + ... + 29 + 30 = 31(15)

b) 1 + 2 + 3 + ... + 80 + 81 = 81(41)

c) $1 + 2 + 3 + \ldots + m = \left(\frac{m+1}{2}\right)m$

d) $1 + 2 + 3 + \ldots + m = (m+1)\left(\frac{m}{2}\right)$

Los siguientes son algunos conocimientos que se tienen sobre estos números.

3. LOS NÚMEROS NATURALES

Los números naturales son 1,2,3,4,...

El número cero no es un elemento de este conjunto, aunque en este caso por convenir en las explicaciones del tema si se le considere como tal.

Estos números a los que también se acostumbra representar por puntos equidistantes en una recta.

Fueron utilizados inicialmente por los indios para contar y realizar cálculos aritméticos y astronómicos; posteriormente Mohamed Ibn-Musa mejor conocido como Al-Khuwarizmi alrededor del año 800 describe sistemáticamente los símbolos numerales y sus reglas para realizar cálculos en un libro que sirve de difusión en todo el islam; luego Leonardo de Pisa o Fibonacci (1170-1240) mostró en Europa la enorme ventaja que tienen estos números al realizar operaciones con ellos. Hoy la mayoría de los países en el mundo los utilizan no sólo para contar sino para determinar el orden o la posición de un elemento particular en un conjunto ordenado (El equipo de Fút-bol Guadalajara fue el primero en su grupo y el cuarto en la clasificación general) cuando los números se utilizan para este fin se les llama números ordinales.

Observando el diagrama podemos notar que:

a) Cada número natural le corresponde con un punto y sólo uno de la recta, en cuyo caso se acostumbra decir que dicho número es la coordenada del punto y el punto la gráfica del número.

b) Un número natural "m" es menor que otro "n" , si la gráfica correspondiente a la coordenada de "m" se halla a la izquierda de la gráfica que corresponde a la coordenada "n".

c) No hay un número natural máximo; los puntos correspondientes a los números naturales continúan indefinidamente hacia la derecha .

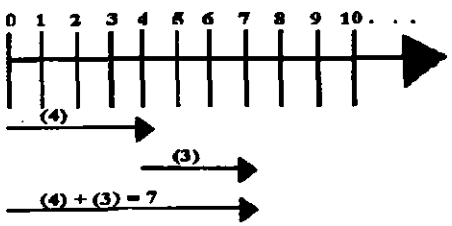
SUMA.

Si queremos contar el número de elementos de dos o más conjuntos utilizamos la suma de números:

Por ejemplo, si los maestros de matemáticas, Rosario y Javier atienden cuatro grupos de segundo y tres de tercero respectivamente, juntos atienden un total de siete grupos; así, si denotamos con Q={2A,2B,2C,2D} al conjunto de los grupos que la maestra atiende, con P={3A, 3B, 3C} los del maestro y con $Q \cup P$ = {2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C} al conjunto unión de "Q" y "P", entonces n(Q)=4, n(p)=3 y $n(Q \cup P)=7$ representan el número de elementos del conjunto Q, P y $Q \cup P$ respectivamente, y por lo tanto $n(Q)+n(P)=n(Q \cup P)$; es decir 4+3=7.

Nota que los conjuntos "P" y "Q" no tienen elementos en común y por lo tanto el número de elementos que hay en la unión es igual a la suma de los que hay en "P" mas los que hay en "Q".

La suma también puede interpretarse en la recta numérica a través de desplazamientos, por ejemplo, para la suma 4+3=7 puedes pensar, al número 4 como si estuviera representado por un movimiento de 4 unidades hacia la derecha partiendo desde cero y a lo largo de la recta horizontal, y al número 3 como si fuera otro movimiento de tres unidades hacia la derecha partiendo desde 4; tales movimientos pueden a su vez representarse usando flechas dibujadas sobre la recta numérica apuntando en la dirección del movimiento y teniendo una longitud igual al número de unidades implicadas en él, tal como se muestra en la siguiente figura:



MULTIPLICACIÓN.

Multiplicar naturales también es otra forma de contar, por ejemplo, si en la Escuela Secundaria No. 247 hay 4 grupos de primero y cada uno tiene inscritos 40 alumnos, entonces el total de alumnos de primer año es de 160. Si en este caso denotas con n(A)=40 al número de alumnos del grupo "A" y de manera similar n(B)=40, n(C)=40, y n(D)=40 para el número de alumnos de los grupos "B", "C" y "D", entonces n(A)+n(B)+n(C)+n(D)=n(A∪B∪C∪D), es decir, 40+40+40+40=160. Puedes notar que este mismo resultado se obtiene más fácilmente multiplicando 4 por 40; por esta razón se dice que la multiplicación de números naturales puede interpretarse como una suma abreviada, es por ello que debes utilizarla, siempre que tengas que sumar un mismo número varias veces.

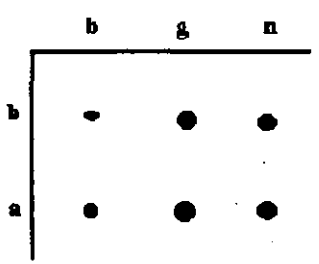
Otro ejemplo de conteo es:

Supón que una muchacha tiene dos faldas y tres blusas a elegir para vestirse en un día determinado, si cada falda puede usarse con cada blusa, entonces el número de combinaciones que puede hacer son seis ya que cada falda es combinable de tres maneras con las blusas.

Si para esta situación indicas con F={b, a} al conjunto de las faldas de color blanco y azul, con B={b, g, n} al conjunto de blusas de color blanco, gris y negro y con FxB={(b, b),(b, g),(b, n),(a, b),(a, g),(a, n)} al producto cartesiano de F y G, puedes notar que:

- En el conjunto FxB el número de parejas es seis.
- Cada pareja representa la combinación de una falda con una blusa, así por ejemplo (b, n) es la combinación de la falda blanca con la blusa negra.
- Las parejas se obtienen apareando cada elemento de F con cada elemento de B.

Partiendo de este ejemplo puedes observar que si F y B son dos conjuntos tales que n(F)=2 y n(B)=3, entonces 2(3) = n(FxB), si distribuyes de manera ordenada estos apareamientos en renglones y columnas podrás evidenciar mejor algunas propiedades importantes de la multiplicación.



Así por ejemplo, en la figura hay dos renglones y tres columnas de puntos y cada apareamiento se representa por uno de ellos. El producto 2 por 3 se define como el número de apareamientos en la figura.

Nota que en la figura, el arreglo de 2 por 3 es la unión de dos conjuntos ajenos (renglones) cada uno de los cuales tiene tres elementos. Por consiguiente, el producto de 2 por 3 puede obtenerse sumando 3+3.

Ya definidas las operaciones de suma y multiplicación, se resumen sus propiedades en el siguiente cuadro.

CERRADURA	CONMUTATIVA	ASOCIATIVA	NEUTRO
		SUMA	
7+5 es natural	6+4=4+6	(2+6)+4=2+(6+4)	7 + 0 = 7
a+b es natural	a+b=b+a	(a+b)+c=a+(b+c)	K + 0 = K
La suma de Números Naturales es Número Natural.	El orden de los sumandos no altera la suma.	Se puede asociar los sumandos convenientemente	Todo número sumado con cero da como resultado el mismo número
		MULTIPLICACIÓN	
6(8) es natural	7(4) = 4(7)	[(2)(6)](4)=2[6(4)]	1 (7) = 7
ab es natural	ab = ba	[ab]c=a[bc]	1 m = m
El producto de números naturales es número natural	El orden de los factores no altera al producto.	Se puede asociar los factores convenientemente.	Todo número multiplicado por uno, da como resultado el mismo número

DISTRIBUTIVIDAD

5 (3+7) = 5 (3)+5(7)
a (b+c) = ab+ac
La multiplicación se distribuye con respecto a la suma.

Ejercicios
Si el almacén contiene 1005 cajas y si cada camión carga 125 cajas.

a) ¿Cuántas faltan para llenar camiones completos sin que sobren ni falten?

b) ¿Cuántas cajas habrá que colocar en cada lado de la base de una torre cúbica para que contenga 125?

Respuestas_____y_____

a) Compara tus soluciones en la sección de respuestas, o descúbrelas completando las siguientes expresiones:

Número de camiones	**Número de cajas**
1	125
2	250
3	____
4	____
____	625
____	____
____	____
____	____
____	____

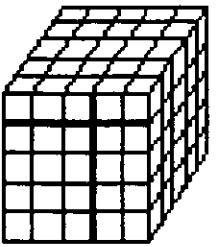
De acuerdo a las afirmaciones anteriores vemos que se pueden llenar _____ camiones completos de cajas y sobran _____.

¿Qué operación debemos realizar con 1005 y 125 para obtener las respuestas 8 y 5?
Respuesta: _____.

¿Cuántas cajas faltan para llenar otro camión?
Respuesta: _____.

¿Qué operación se usa con 125 y 5, para obtener 120 como respuesta?
Respuesta: _____.

b) Considerando que una torre cubica tiene la forma:



Veamos que las medidas del frente, de fondo y de alto son _____, es decir el número de cajas en el frente, en el ancho y lo alto es el mismo.

Por lo tanto, si una torre cúbica contiene 2 cajas por cada lado habrá en ella _____, cajas, es decir, $2(2)(2)=2^3$, o sea que $2^3 = 8$,. Completa la tabla

Número de cajas por lado	**Número de cajas en el cubo**	**Operación**
1	1	1
2	8	2^3
3	_____	_____
4	_____	_____
_____	_____	_____
_____	_____	_____
n	_____	_____

De donde se ve que para que la torre cúbica contenga 125 cajas, debemos colocar _____ por cada lado, es decir, el número que elevado al cubo da 125 es _____.

Ahora pensemos, ¿qué operación deberíamos haber realizado con 125 y 3 para obtener la respuesta a la pregunta, es decir 5?.

RESTA.

1.- Si en un grupo de primer semestre hay 42 alumnos de los cuales 17 son mujeres. ¿Cuántos hombres hay?

Respuesta : _____

Tu respuesta la puedes verificar analizando los siguientes procedimientos:

ALUMNAS	ALUMNOS	No. DE ALUMNOS
• • • • •	X X X X X	X X X X X
1 2	18 19 20...	1 2 3...
• • • • •	X X X X X	X X X X X
• • • • •	X X X X X	X X X X X
• •	X X X X X	X X X X X
16 17	41 42	24 25

1. Coloquemos al conjunto de alumnos 1,2,3,... hasta llegar a 17 por un lado y luego agreguemos alumnos por otro lado y sigamos contando 18,19,20,... hasta completar 42, posteriormente contamos los alumnos agregados y vemos que son 25, tal como lo muestra el diagrama;

2. También podemos llegar al resultado razonando de la siguiente forma;

Como el número total de alumnos que deben estar en el grupo es 42, el número de alumnas más el número de alumnos debe ser 42, esto lo podemos indicar con la ecuación $x+17=42$.

Pero notarás que para que la igualdad anterior se cumpla la x debe ser igual a _____ y por lo tanto este valor de x será la solución de la ecuación; la cual se obtiene restando 17 de 42, por lo que podemos escribir

$42-17=25$.

Como consecuencia de lo anterior se deduce lo siguiente:

a) Son equivalentes las expresiones:

$17 + 25 = 42$, $25 = 42 - 17$ y $17 = 42 - 25$
y por lo consiguiente $17 + x = 42$ y $x = 42 - 17$

a. La resta se puede interpretar como una suma en la cual se desconoce un sumando, por ejemplo, $7 - 3 = x$ significa encontrar el sumando x que sumado con 3 da 7, es decir $7 - 3 = x$ equivale a $7=x+3$, es por esto que:

La Resta o Sustracción es la operación que se utiliza para encontrar un sumando desconocido cuando la suma o total y un sumando son conocidos, a-b es un número c, tal que $a = c + b$.

c) Notarás que existen ecuaciones como $x + 5 = 2$ para las cuales no hay solución en los números naturales y por lo tanto para su equivalente $x = 2 - 5$ tampoco.

EJERCICIOS

Interpreta el significado de las siguientes restas :

a) $7 - 2 = 5$ ya que $7 = 5 + 2$
b) $9 - 6 =$ ___ ya que $9 =$ ___ + ___
c) $8 -$ ___ $= 3$ ya que ___ $= 3 +$ ___

Resuelve las ecuaciones.

a) $x + 9 = 12$
b) $17 - m = 4$

Observemos aquí la comodidad de haber incluido el cero a los números naturales. En esta parte no habríamos podido resolver ecuaciones como la siguiente K+7=7, ó K= 7-7

Resolver para:

a) °C, si $k = °C + 273$
b) T_c si $1.8\ Tc + 32° = T_f$
c) Y si $X - Y = 1$

DIVISIÓN CON RESIDUO CERO.

2.- Un ama de casa le dió a su hijo $20.00 para jabón en polvo. Si cada bolsa de jabón cuesta $5.00. ¿Cuántas de ellas podrá comprar, con esa cantidad?.

Respuesta : _____

Tu respuesta la puedes verificar analizando los siguientes procedimientos:

1. - Una forma de llegar al resultado sería calculando los costos por una, dos,... etc. bolsas hasta llegar a la cantidad de dinero disponible, es decir:

Una bolsa cuesta $ 5.00
____ bolsas cuestan $10.00
____ bolsas cuestan $_____
____ bolsas cuestan $_____

2. Si sabemos que para calcular la cantidad a pagar de cualquier número de bolsas de jabón tenemos que multiplicar el costo de cada una por el número de ellas, (por ejemplo, para calcular el costo de tres multiplicamos 5 por 3 y obtenemos 15, es decir 5(3)=15), entonces para obtener el costo de "ξ" (cantidad desconocida) bolsas multiplicamos _____ por _____ para obtener en este caso $20.00, es decir 5x=20 pero notarás que para que esta igualdad se cumpla la ξ debe ser igual a _____ y por lo tanto este valor de ξ será solución de la ecuación.

Otra forma de obtener esta respuesta es dividiendo _____ entre _____ por lo que podemos decir:

$$\frac{20}{5} = 4 \text{ ó } 20 \div 5 = 4$$

Como consecuencia de lo anterior se puede deducir lo siguiente:

a) Son equivalentes las expresiones:

$$5(4)=20, \qquad 4=\frac{20}{5} \text{ y} \qquad 5=\frac{20}{4} \text{ y también}$$

$$5x = 20 \text{ con } x = \frac{20}{5}, \text{ por lo que } x = 4$$

b) La división (siempre que el divisor sea diferente de cero) se puede interpretar como una multiplicación en la cual se desconoce un factor, por ejemplo, $\frac{12}{3}$ significa encontrar el factor x, que multiplicado por 3 dé 12; es decir, si $\frac{12}{3} = x$ entonces $12 = 3x$, es por esto que:

La división es la operación que se utiliza para encontrar un factor desconocido cuando el producto y un factor son conocidos; esto es, si a y b son números y $b \neq 0$, entonces $a \div b$ es un número c tal que a=bc.

c) Notarás que existen ecuaciones como 3x=5 para las cuales no hay solución en los números naturales y por lo consiguiente para su equivalente $x = 5 \div 3$, ($x = \frac{5}{3}$) tampoco.

Es por ello que al definir la división con números naturales se indica la condición de que la división sea de residuo igual a cero.

EJERCICIOS.

Completa las siguientes deducciones:

a) $\frac{7}{7} = x$ significa $7 = 7x$ y entonces $x = 1$

b) $\frac{5}{1} = x$ significa _____ y entonces $x =$ _____

c) $\frac{0}{9} = x$ significa _____ y entonces $x =$ _____

d) $\frac{3}{0} = x$ significa _____ y entonces $x =$ _____

e) $\frac{0}{0} = x$ significa _____ y entonces $x =$ _____

Resuelve las siguientes ecuaciones, despejar:

a) $7x = 49$

b) $\frac{x}{8} = 9$

c) $\frac{35}{x} = 7$

d) f, en $p = \frac{f}{a}$

e) t, en $v = \frac{d}{t}$

f) r, en $w = I^2 r t$

DIVISIÓN CON RESIDUO DIFERENTE DE CERO.

1.- Un ama de casa le dio a su hijo $20.00 para comprar atún. ¿Cuál es el máximo número de latas que pudo comprar si estaban en oferta con un costo de $3.00 cada una?.

Respuesta : _____

Tu respuesta la puedes verificar analizando los siguientes procedimientos :

1.- Una forma de llegar al resultado sería calculando los costos por una, dos,...,etc. latas hasta llegar a la cantidad de dinero disponible, es decir :

Una	lata	cuesta	$ 3.00
_____	latas	cuestan	$ 6.00
_____	latas	cuestan	_____
_____	latas	cuestan	_____
_____	latas	cuestan	_____
_____	latas	cuestan	_____

2.- Si procedemos como el caso de la división exacta entonces para obtener el costo de "x" latas multiplicamos 3(costo de cada lata) por x (número desconocido de latas) para obtener en este caso $20.00, es decir $3x = 20$; pero notarás que esta ecuación no tiene solución en el sistema de los números naturales, ya que no existe ningún número natural que multiplicado por 3 dé 20 y por lo tanto para estos casos se considera la ecuación $20 = 3x + r$ cuya solución correcta es $x = 6$ y $r = 2$ como tal vez lo constataste al dividir 20 (dividendo) entre 3 (divisor) para obtener 6 (cociente) y dos como residuo con lo cual se comprueba que $20 = 3(6)+2$.

En general para casos así se sugiere resolver la ecuación $20=3x+r$ la cual tiene muchas soluciones; una de ellas sería $x = 4$ y $r = 8$ pero en el problema anterior se observa que el número de pesos que sobran es mayor a tres, y con él ($8.00) compraríamos dos latas más de atún; es decir, no sería máxima la cantidad de latas compradas con $20.00, es por ello que en una división el residuo siempre debe ser menor que el divisor, lo cual también asegura una solución única; de donde:

La división con residuo $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$ es la operación que se utiliza para encontrar dos números c y r (cociente y residuo) tales que $a = bc + r$, siempre y cuando r sea menor que b ($r < b$).

RAÍZ CUADRADA

Si el área de un cuadrado es $81 m^2$, ¿cuánto mide cada lado?
Respuesta:_____

Completa las columnas siguientes hasta llegar a la respuesta.

Lado	Área
1	1
2	4
3	9
4	____
5	____
____	36
____	49
____	____
____	____
____	____

También podemos llegar al resultado razonando de la forma siguiente:

Como el área es 81 m^2 y se obtiene multiplicando lado por lado, esto lo podemos indicar con la ecuación
L L = 81, o sea, $L^2 = 81$, pero notarás que para que la igualdad se cumpla, L debe ser igual a _____ y por lo tanto ese valor de L será la solución de la ecuación; la cual se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de 81, por lo que podemos escribir
$L = \sqrt{81} = 9$

Como resultado de lo anterior deducimos lo siguiente:

a) Son equivalentes las expresiones:
$9^2 = 81 \quad y \quad 9 = \sqrt{81}$
y por consiguiente

$L^2 = 81 \quad y \quad L = \sqrt{81}$

b) La raíz cuadrada de un número K, se puede interpretar como encontrar un número cuyo cuadrado es K, por ejemplo, raíz cuadrada de 49 significa encontrar un número **x** que elevado al cuadrado de 49, es decir:
$\sqrt{49} = x$ equivale a $49 = x^2$, es por esto que:

La raíz cuadrada es la operación que se utiliza para encontrar un número que multiplicado por si mismo de cómo resultado un número conocido; es decir, $\sqrt{a}$ es un número b, tal que $b^2 = a$

c) Notar que en los números naturales no existen raíces cuadradas de números diferentes a cuadrados, por ejemplo:

$\sqrt{3}$, no tiene solución en los números naturales puesto que ninguno de estos números elevado al cuadrado es 3.

$\sqrt{25}$, si tiene solución, puesto que existe el número natural 5 cuyo cuadrado es 25.

EJERCICIOS

Interpreta el significado de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{25} = 5$ *ya que* $25 = (5)^2$

b) $\sqrt{9} = \_\_\_$ *ya que* $\_\_\_ = (\quad)^2$

c) $\sqrt{\quad} = \_\_\_$ *ya que* $100 = (\quad)^2$

Resuelve las ecuaciones:

a) $a^2 = 169$

b) $m^2 = 1$

c) $\sqrt{y} = 6$

Resolver para:

a) b, si $b^2 = k$

b) m, si $\sqrt{m} = T$

c) $\frac{b}{\quad}$, si $b^2 - 3 = K$

3.- Todos los refrescos de un almacén pueden acomodarse en cajas con 4 sin que sobren ni falten; tampoco sobrarían ni faltarían si se acomodaran en cajas con 6, o en cajas con 8.

a) Descubre dicha cantidad si se sabe está entre 220 y 250;

b) ¿Cuál es el mínimo de refrescos con el que se pueden llenar cajas de 4, 6 u 8 sin que sobren ni falten?

Las siguientes sugerencias pueden ayudar a encontrar las respuestas.

a) Dado que todos los refrescos se pueden acomodar en cajas de 4, entonces dicha cantidad deberá estar entre los números:

4, 8 12, ___, •••, 216, 220, ___, ___, ___, ___, ___, ____

También se sabe que los podemos acomodar en cajas de 6, por lo cual la respuesta debe ser alguno de los números:

6, 12, ___, •••, 216, 222, ___, ___, ___, ___, ___,

Lo mismo podemos hacer si llenamos cajas con 8, de donde el número buscado está entre los siguientes:

___, ___, ___, •••, 216, 224, ___, ___, ___, ___, ___

Como la cantidad buscada se encuentra entre 220 y 250, ella debe ser _____.

Por lo anterior podemos observar que algunas cantidades con las que se pueden llenar cajas de 4, 6 u 8 refrescos sin que sobren o falten son:

240, 216, •••, 120, 96, ___, ___, y ___

De donde puede observarse que la manera de ocupar menos cajas es llenarlas con _____ refrescos.

Seguramente descubriste que la respuesta en a), es 240; y en b), 24.

4.- Un empleado quiere acomodar 120 refrescos de toronja, 80 de naranja y 16 de limón en cajas que contengan igual cantidad y el mismo sabor.

a) ¿De qué formas lo puede hacer para que no sobren ni falten refrescos?

b) ¿De qué manera ocupa menos cajas?

Un camino para llegar a la respuesta sería contestando y meditando las siguientes cuestiones:

Notar que para que no halla sobrantes ni faltantes;

los 16 refrescos de limón se pueden acomodar en 2 cajas de 8, ó en 4 de 4, ó en 1 de 16, es decir, en cajas de 1, 2, 4, 8 y 16

Análogamente:

Los 80 refrescos de naranja se pueden acomodar en cajas de 1, 2, 4, ___, ___, ___, ___, ___, ___ y ___.

Los 120 refrescos de toronja se pueden acomodar en cajas de 1, 2, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ____, ____, ____, ___, ___, ___ y ___.

Por lo anterior podrás observar que una posibilidad de acomodar todos los refrescos (limón, naranja y toronja) si que sobren ni falten y con el mismo sabor, es en cajas con 4.

De manera semejante podrás ver que las otras posibilidades son : ___, ___ y ___.

De acuerdo con las posibilidades, la forma de ocupar menos cajas es llenarlas con _____ refrescos.

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) y el Máximo Común Divisor (MCD) son dos cantidades que no solo sirven para resolver problemas como los anteriores, también facilitan en gran medida los cálculos con fracciones.

Existen diversas maneras de obtener estos números y una de ellas es a través de la factorización en primos, la cual requiere recordar los conceptos de múltiplo, divisor ó factor y los criterios de divisibilidad.

Todos estos aspectos se describen brevemente a continuación.

Notar que las respuestyas a los incisos a), y b) son (1,2,4,8), y (8)

NÚMEROS PRIMOS

Ideas o conceptos de: múltiplo, divisor, factor y divisibilidad.

En las secciones anteriores vimos que hay divisiones con residuos diferentes de cero como $3\overline{)\begin{array}{r}6\\20\\2\end{array}}$ la cual se puede expresar en la forma $20 = 3(6)+2$

y divisiones exactas con residuo igual a cero como $6\overline{)\begin{array}{r}4\\20\\0\end{array}}$ la cual equivale a $20 = 5(4)$,

cuando esto último ocurre se acostumbra decir que 5 es divisor o factor de 20; por otra parte se dice que 20 es múltiplo de 5. Por ejemplo , como $12 = 3(4)$ se dice que 3 y 4 son divisores o factores de 12 y, que 12 es múltiplo de 3 al igual que múltiplo de 4.

Utilizando estas ideas podemos completar las siguientes afirmaciones:

a) 40 es divisible entre 8, ya que existe el número natural _____ único tal que 40=(8)( ).

b) 42 es divisible entre ____, ya que existe el número natural 7 único tal que 42=( )( ).

c) Cualquier número natural m es divisible entre 1, ya que existe el número natural _____ único tal que _____.

d) Cualquier número natural m es divisible entre si mismo, ya que existe el número natural _____ único tal que _____.

La propiedad distributiva puede ser útil en algunos casos para investigar divisibilidad, por ejemplo:

La suma 35 + 50 puede expresarse como

$5(7) + 5(10) = 5(7 + 10)$ por lo cual

35, 50 y 85 = 35 + 50, son divisibles entre 5.

En general decimos que la suma de dos o más números es divisible entre otro número si lo es cada uno de sus sumandos.

Sin realizar la división, completa las siguientes afirmaciones para hacer ver que las cantidades son divisibles entre 5:

a) $7(15) = 7(3)(5)$ por lo cual $[7(15)]$ es divisible entre 5

b) $9(10) =$

c) $3(10)^2 =$

d) $7(20) + 3(15) =$

e) $1(10)3 - 3(10)2 =$

f) $6(10)3 + (10)2 + 6(10)$

Escribe las siguientes cantidades como producto (factoriza) igual que en el ejercicio anterior, para hacer ver que son divisibles entre 3 y entre 9

a) $9999 = 9(1111) = 3(3)(1111)$

b) $7(99)$

c) $9 + 999$

d) $(999) - 4(9)$

e) $[9(9) + 8(99) + 7(999)] + [9 + 8 + 7]$

Contesta por qué cualquier número con cero unidades es divisible entre:

a) 10

b) 2 y 5

La forma más general para investigar cuándo un número dado es divisible entre otro es efectuar la división y ver que el residuo es cero.

En algunos casos para no efectuar la división se utilizan los llamados criterios de divisibilidad los cuales se muestran a continuación con ejemplos

DIVISIBILIDAD ENTRE 2 Y ENTRE 5

Todo número cuya cifra de las unidades sea par (con terminación: 0,2,4,6 y 8) , es divisible entre 2.

EJEMPLO.- El número 72498, la cifra de las unidades (8), es par, por lo tanto, es divisible entre 2.

Esto lo podemos observar si dicho número lo descomponemos de la siguiente forma:

$72498 = 72490 + 8 = 10(7249) + 8 = 2(5)(7249) + 2(4) = 2\,[5(7249) + 4]$

Ahora realicemos el mismo proceso, pero con un número cuya cifra de las unidades sea impar, es decir:

$57843 = 57840 + 3 = 10(5784) + 3 = 2(5)(5784) + 3$

En esta suma se observa , que el primer sumando es divisible entre 2, mientras que en el segundo no, por lo cual el número 57843 no es divisible entre 2.

Todo número cuya cifra de las unidades sea cero o cinco (con terminación: 0 ó 5), es divisible entre 5.

EJEMPLO.- El número 4395, tiene 5 unidades, es decir termina en cinco, por lo tanto es divisible entre 5.

¿Podrías justificar el criterio anterior, tal y como se procedió en el caso de la divisibilidad entre 2?

DIVISIBILIDAD ENTRE 3 Y ENTRE 9

Todo número cuya suma de sus dígitos (los que forman su numeral) sea múltiplo de 3, es divisible entre 3.

EJEMPLO.- El número 5634 es divisible entre 3, ya que

5 + 6 + 3 + 4 = 18
y 18 es múltiplo de 3.

Una razón que explica lo anterior es que, de la expresión:

$$5(1000) + 6(100) + 3(10) + 4(1)$$

puede notarse que:

a) 10 se puede escribir como 9 + 1
100 se puede escribir como 99 + 1
1000 se puede escribir como 999 + 1, etc.

b) 9 se puede escribir como 3(3)
99 se puede escribir como 3(33)
999 se puede escribir como 3(333), etc.

Aplicando las propiedades Distributiva y Asociativa, tendremos:

$$5(999 + 1) + 6(99 + 1) + 3(9 + 1) + 4(1) =$$

$$= 5[3(333) + 1] + 6[3(33) + 1] + 3[3(3) + 1] + 4(1) =$$

$$= 5(3)(333) + 5 + 6(3)(33) + 6 + 3(3)(3) + 3 + 4(1) =$$

$$= [5(3)(333) + 6(3)(33) + 3(3)(3)] + [5 + 6 + 3 + 4]$$

De donde puede notarse, que todos los términos del primer sumando son divisibles entre tres y que para que todo el numeral sea divisible entre este número, es necesario que también sea divisible entre tres el sumando [5 + 6 + 3 + 4], o se que:

= [5(3)(333) + 6(3)(33) + 3(3)(3)] + 3(6), es decir:
3 [5(333) + 6(33) + 3(3) + 6], por lo cual dicho número es divisible entre 3.

Todo número cuya suma de sus dígitos (los que forman su numeral) sea múltiplo de 9, es divisible entre 9.

EJEMPLO.- El número76158 es divisible entre 9, ya que
7 + 6 + 1 + 5 + 8 = 27
y 27 es múltiplo de 9

¿Podrías justificar el criterio de divisibilidad entre 9, procediendo de la misma forma que como se hizo para el 3?

DIVISIBILIDAD ENTRE 7

Un número es divisible entre 7, si la diferencia entre el número que resulta de cancelar la cifra de las unidades y el doble de la misma, es múltiplo de 7.

EJEMPLO.- El número 56868 es divisible entre 7, ya que 5670 [resultado de 5686-2(8)], es divisible entre 7, puesto que el cociente $5670 \div 7$ tiene residuo cero, o bien para no realizar la división repetimos el mismo criterio sucesivamente hasta llegar a un múltiplo de 7 conocido, es decir, 5670 es divisible entre 7, ya que 567 [resultado de 567 – 2 (0)] también lo es y por lo tanto 567 es divisible entre 7 porque 42 [resultado de _____] es divisible entre 7.

Una razón que explica lo anterior es que, de la expresión:

$$5(10)^4 + 6(10)^3 + 8(10)^2 + 6(10)^1 + 8$$

Puede notarse que siempre que aumentamos en ella veinte veces el número de unidades que tenga, habrá veintiún veces esta cantidad, o sea un múltiplo de 7, con lo cual dicha expresión quedará como sigue:

$$5(10)^4 + 6(10)^3 + 8(10)^2 + 6(10)^1 - \underline{20(8)} + \underline{20(8)} + 8$$

$$5(10)^4 + 6(10)^3 + 8(10)^2 + 6(10)^1 - 2(10)(8) + 21(8)$$

Y si asociamos y factorizamos de manera que el último término quede como factor de 7, tendremos:

$$10\left[5(10)^3 + 6(10)^2 + 8(10)^1 + 6 - 2(8)\right] + 7(3)(8)$$

De donde puede notarse que, para que dicho número sea múltiplo de 7 se necesitaría que la expresión $5(10)^3 + 6(10)^2 + 8(10)^1 + 6 - 2(8)$, o sea el número que resulta de la diferencia $5686 - 2(8) = 5670$ lo sea.

Ahora repetimos el mismo proceso para el número, 5670, es decir:

$$5(10)^3 + 6(10)^2 + 7(10)^1 + 0 =$$

$$= 5(10)^3 + 6(10)^2 + 7(10)^1 - 20(0) + 20(0) + 0 =$$

$$= 5(10)^3 + 6(10)^2 + 7(10)^1 - 2(10)(0) + 21(0) =$$

$$= 10[5(10)^2 + 6(10) + 7 - 2(0)] + 3(7)(0)$$

De donde podemos ver que el sumando 3(7)(0), es el múltiplo de 7, y entonces para que todo el número sea múltiplo de 7, se necesitaría que también lo fuera el número $[5(10)^2+6(10)+7-2(0)]$, o sea $567 - 2(0) = 567$, y así sucesivamente hasta llegar al número 42.

DIVISIBILIDAD ENTRE 11

Un número es divisible entre 11, si la diferencia entre el número que resulta de cancelar la cifra de las unidades y las unidades, es múltiplo de 11.

EJEMPLO.- El número 26367 es divisible entre 11, si el número que resulta de la diferencia: 2636 – 7 = 2629, también lo es.

Ahora volvamos a aplicar el mismo criterio al número 2629 para ver si es divisible entre 11, o sea:

2629, es divisible entre 11, si lo es el número:
262 – 9 = 253, y por consiguiente
253, divisible entre 11, si lo es el número:
25 – 3 = 22.

Como 22 es divisible entre 11, entonces también lo son: 253, 2629 y 26367, de donde 26367 es divisible entre 11

¿Podrías justificar la división entre 11, procediendo de la misma forma que como se hizo para el 7?.

Tomando en cuenta la divisibilidad, los números naturales mayores que uno se pueden clasificar en:

a) **Números primos** (los que sólo son divisibles entre 1 y él mismo)

b) **Números compuestos** (los que tienen más de dos divisores distintos)

De acuerdo con lo anterior, completa las afirmaciones incompletas:

a) 9 es número compuesto porque sus divisores son 1, 3 y 9

b) 15 es un número _____ porque sus divisores son _____

c) 11 es un número _____ porque sus divisores son _____

d) 2 es un número _____ porque sus divisores son _____

e) 39 es un número _____ porque sus divisores son _____

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

El teorema fundamental de la aritmética indica, que cualquier número compuesto se puede expresar como producto de números primos.

Hay distintos métodos para encontrar la descomposición de un número compuesto en sus factores primos; por ejemplo, si se quiere hacer la descomposición de 90, se factoriza sucesivamente hasta obtener únicamente factores primos, es decir:

$$90 = 9(10) = 3(3)(2)(5) = 3^2(2)(5)$$

Otra forma de encontrar la descomposición en factores primos de cualquier número es utilizando los criterios de divisibilidad hasta donde sea posible, por ejemplo, para encontrar los factores primos del número 90, disponemos del siguiente diagrama:

En la columna de la izquierda escribimos 90 y en la de la derecha el primer factor primo que tenga 90 (en este caso y utilizando los criterios de divisibilidad comenzando por 2, vemos que 90 es divisible entre 2 y por lo tanto 2 es su primer factor)

a)
90	2

Debajo de 90 escribimos su otro factor (en este caso 45)

b)
90	2
45	

Ahora volveremos a empezar el proceso pero con 45, es decir, en la columna de la derecha escribimos el primer factor primo que tenga 45, (en este caso 2 no es factor de 45 y 3 sí lo es), de donde:

c)
90	2
45	3
15	

Así sucesivamente continuamos hasta llegar en la columna de la izquierda a uno.

d)
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Finalmente con referencia al diagrama expresamos:

$90 = 2(3)^2(5)$

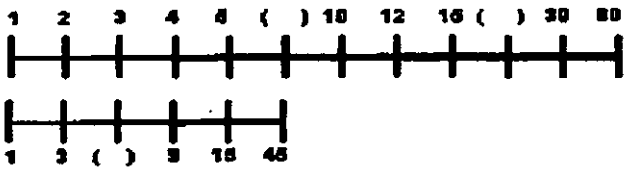
MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Existen problemas en los cuales necesitamos conocer los divisores (factores) o múltiplos comunes de dos o más números. Especialmente, los que con más frecuencia utilizamos es el MCM y el MCD, por ejemplo:

1. Supón que se tienen 2 tanques con 60 y 45 litros de pintura blanca y azul, se desea envasarlos en botes de manera que cada bote lleve la misma cantidad respectivamente y el mismo color. ¿De qué capacidad serán los botes para tener el mínimo de ellos sin que sobre ni falte pintura?.

Respuesta : _____

Relaciona las condiciones del problema con el diagrama, llena los espacios vacíos y contesta las preguntas para verificar o encontrar la respuesta.
(Notar que con el tanque de 60 L. podemos llenar botes de 12 L. y no sobra ni falta pintura y los mismo sucederá si lo hiciéramos con botes de 3 L, etc.



Ya habrás notado que:

a) Los números: 1,2,3,4,5,( ), 10, 12, 15, ( ), y 60, son divisores de _____

b) Los números: 1,3,( ),9,15 y 45 son _____ de _____

c) Los números: 1,( ), y 15 son divisores comunes de _____ y de _____; por lo tanto el mayor de los divisores comunes es _____; es decir 15.

Al mayor de los divisores comunes de dos o más números se le llama Máximo Común Divisor.

Algunas formas de obtener el MCD se muestran enseguida:

a) Primero se listan los divisores de cada número, luego los divisores comunes y de estos últimos se saca el MCD, por ejemplo, obtener el MCD de 18 y 30

Divisores de 18 : 1,2,3,6,9,18
Divisores de 30 : 1,2,3,5,6,10,15,30
Divisores comunes de 18 y 30 : _____
El MCD de 18 y 30 es : _____

b) Primero se listan los divisores primos de cada número, luego los divisores primos comunes y al multiplicarlos se obtiene el MCD.

Divisores Primos de 18 : 2(3)(3)

Divisores Primos de 30 : 2(3)(5)

Divisores Primos Comunes de 18 y 30 : 2 y 3

[El MCD de dos números a y b, se denota como (a,b)].

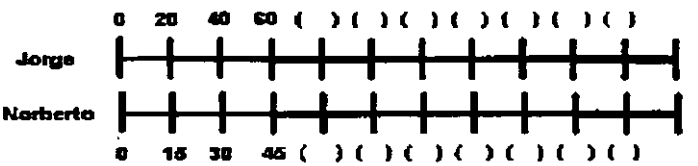
Esto puede entenderse si notamos que al formar los productos combinados de los divisores primos de cualquier número se obtienen todos sus divisores mayores que uno incluidos los primos, por ejemplo, los divisores primos de 18 son : 2, 3 y 3, de sus productos combinados 2(3), 3(3) y 2(3)(3) obtenemos sus divisores no primos 6, 9 y 18 por lo tanto para obtener MCD de dos números bastará con formar el producto de sus divisores primos comunes

2. Supongamos que Jorge y Norberto llevan agua de un depósito para otro.

Jorge tarda 20 segundos en cada viaje y Norberto 15. Si los dos salen al mismo tiempo y mantienen una velocidad constante, ¿a qué hora volverán a coincidir en la salida?.

Respuesta: _____.

Para comprobar tu respuesta llena los espacios vacíos del diagrama y de las afirmaciones incompletas:
(Fijarse que, 20, 40, 60,... es el tiempo que tarda Jorge en hacer 1, 2, 3,... viajes)



Notar que:

60, _____, _____,_____,..., son múltiplos comunes de: _____ y _____, y que:_____ es el mínimo de ellos; o sea que el menor de ellos es 60.

Al menor múltiplo común diferente de cero, de dos ó más números se le llama Mínimo Común Múltiplo.
(El MCM de dos números a y b, se denota como [a y b])

Algunas formas de obtener el M.C.M. se muestran en seguida:

a) Se comienza por listar los primeros múltiplos de cada número, luego sus primeros múltiplos comunes, y de estos últimos se saca el MCM.

Múltiplos de 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64,72,80,...

Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108,...

Múltiplos comunes de 8 y 12:_____.

El M.C.M. de 8 y 12, es: _____

b) En algunos casos quizás sea más fácil listar los múltiplos del mayor número, hasta obtener el que también sea múltiplo de los restantes, por ejemplo, obtener el M.C.M. de 4, 9 y 6.

Múltiplos de 9: 9, 18, 27, 36

El M.C.M. de 4, 9 y 6, es: 36.

c) Otra forma es multiplicando las potencias más altas de todos los factores diferentes que aparecen en la factorización en primos de los números dados, por ejemplo, para obtener el M.C.M. de 20 y 75, primero descomponemos en factores primos los números:

Descomposición en factores primos de 20: $2(2)(5) = 2^2(5)$

Descomposición en factores primos de 75: $3(5)(5) = 3(5)^2$

Las potencias más altas de cada uno de los factores que aparecen en la descomposición son: 2^2, 3 y 5^2

El MCM de 20 y 75 es: $2^2(3)(5^2) = 4(3)(25) = 300$

Este procedimiento puede ser entendible, si el MCM se obtiene listando los múltiplos del número mayor (expresado en factores primos) hasta obtener el que también sea múltiplo del número menor (también expresado en factores primos), es decir:

Factores primos de 20:2(2)(5).

Factores primos de 75:3(5)(5).

Los múltiplos del número mayor [(75), ó (3) (5) (5)], son:

a) (3) (5) (5) (0)= 0

(El número cero no puede ser el inicio, ya que dicho número debe ser múltiplo común diferente de cero).

b) (3) (5) (5) (2)

(Tampoco puede ser, pues le falta un 2 para ser múltiplo de 20)

c) (3) (5) (5) (3)

(No es múltiplo de 20)

d) (3) (5) (5) (4) = (3) (5) (5) (2) (2)

Sí es, ya que contiene tanto los múltiplos de 20 como los de 75, y además es el mínimo, porque si eliminamos alguno de los factores, ya no resulta ser múltiplo de alguno de los números, de donde el MCM de 20 y 75 es $3\,(5)^2\,(2)^2$.

Otras formas importantes de calcular el MCD (a, b) y el MCM [a, b] de dos números enteros a y b diferentes de cero son:

a) Aplicando el algoritmo de Euclides que dice: Si a = bg + r, entonces los divisores comunes de a y b son los mismos que los de b y r.

Por ejemplo, el MCD. de 20 y 75 es 5, (último residuo diferente de cero), ya que:

$75 = 20\,(3) + 15$ $\qquad 20\overline{)75}$ cociente 3, residuo 15

$20 = 15\,(1) + 5$ $\qquad 15\overline{)20}$ cociente 1, residuo 5

$15 = 5\,(3) + 0$ $\qquad 5\overline{)15}$ cociente 3, residuo 0

b) Aplicando el teorema $[a,b] = \dfrac{|a.b|}{(a,b)}$ es decir, multiplicando los números y dividiendo su producto entre el MCD.

Por ejemplo el MCM de 20 y 75, es 300, ya que:

$$[20\,,\,75] = \frac{20\,(75)}{(20,\,75)} = \frac{1500}{5} = 300$$

LEYES DE EXPONENTES PARA NATURALES.

Ya habíamos dicho que para abreviar aquellos productos de factores iguales como $10(10)(10)$ escribimos $(10)^3$. En general a^n = aaa...a, (hasta n factores), si n es número natural.

Algunas consecuencias que se derivan de esta notación son las leyes de exponentes.

Completa las siguientes expresiones para recordar dichas leyes cuando m y n son números naturales.

1.- $a^n a^m = a^{m+n}$	Producto de potencias De igual base	$8^3 (8)^3 = 8^{3+(\ )} = 8^{(\ )}$, puesto que $8^3 (8)^4 = 8\ (8)\ (8)\ [\ 8\ (8)\ (8)\ (8)\ ]$
2.- $(ab)^n = a^n b^n$	Potencia de Un producto	$[7(4)]^5 = 7^5(\ \ )^{(\ )}$ $[\ 7\ (4)\ ]^5 = [\ 7(4)\ ]\ [7\ (4)\ ]$ $[\ 7\ (4)\ ] = [\ 7(4)\ ]\ [7\ (4)\ ]$ $= 7\ (7)\ (7)\ (7)\ (7)\ (4)\ (4)\ (4)\ (4)\ (4) =$ $= 7^5 (4)^5$
3.- $(a^m)^n = a^{mn}$	Potencia de una potencia	$[9^2]^3 = 9^{2(\ )} = 9^{(\ )}$ $[9^2]^3 = (9^2)\ (9^2)\ (9^2) = 9^6$
4.- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$	Potencia de un cociente	$\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{7^2}{9^{(\ )}}$ $\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{7}{9}\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{7\ (7)}{9\ (9)} = \frac{7^2}{9^2}$
5.- $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m>n \\ 1 & \text{si } m=n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } m<n \end{cases}$ $a \neq 0$	Cociente de potencias de igual base	$\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-(\ )} = 7^{(\ )}$ $\frac{7^4}{7^4} = 1$ $\frac{7^3}{7^7} = \frac{1}{7^{7-3}} = \frac{1}{7^{(\ )}}$

SUMA

Sí en una empresa las ventas en miles de pesos se representan con números enteros positivos y los gastos con negativos, entonces para obtener el estado de pérdidas y ganancias (E.P.G.) en un tiempo determinado tendremos que sumar todas las ventas (cantidades positivas) con todos los gastos (cantidades negativas), por ejemplo, obtener el estado de pérdidas y ganancias de un negocio durante su primera semana de ejercicio, si realizó los siguientes movimientos:

	VENTAS	GASTOS	E.P.G.
LUNES	5	-8	-3
MARTES	3	-7	-4
MIÉRCOLES	6	-4	2
JUEVES	9	-1	8
VIERNES	2	-6	-4
	25	-26	-1

Respuesta : _____

Tu respuesta la puedes verificar analizando el siguiente procedimiento.

Al sumar las ventas con los gastos nos damos cuenta que, aplicando la propiedad asociativa el total de ventas es _____, por un lado y el total de gastos es _____ por otro y que si sumamos estos totales obtenemos _____; es decir:

$(5) + (3) + (6) + (9) + (2) + (-8) + (-7) + (-4) + (-1) + (-6) =$
$= 5 + 3 + 6 + 9 + 2 - 8 - 7 - 4 - 1 - 6 =$
$= 25 - 26 = -(26 - 25) = -(1) = -1$

De lo anterior puede notarse que siempre que la cantidad que represente los gastos sea mayor a la de las ventas, la suma de ambas cantidades será negativa; y cuando suceda lo contrario, es decir, que la cantidad que represente los gastos sea menor a la de las ventas, la suma de ambas debe ser positiva.

Escribe y resuelve un ejemplo para el cual se cumpla cada una de las condiciones dadas:

a)

b)

También habrás notado que:

La Suma de todas las ventas (números positivos) da como resultado un número _____, y la

suma de todos los gastos (números negativos) da como resultado un número _____, lo cual sugiere que:

a) La suma de números positivos es _____

b) La suma de números negativos es _____

Notar que la columna E.P.G. se puede obtener realizando las sumas siguientes:

a) (5) + (-8) = 5 - 8 = -3

b) (3) + (-7) = 3 - 7 = _____

c) (6) + (-4) = = _____

d) (9) + (-1) = = _____

e) (2) + (-6) = = _____

LOS NÚMEROS ENTEROS

Utiliza numerales para describir los siguientes enunciados.

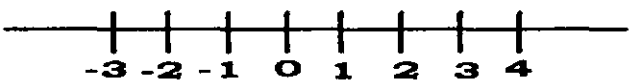
a) Ninguna inscripción en la UNAM _____
b) Cinco grados bajo cero _____
c) Mil quinientos pesos de utilidad _____
d) Doscientos mil cuarenta pesos de pérdidas _____
e) Nueve goles recibidos _____
f) Dos mil cinco metros bajo el nivel del mar _____
g) Número que sumado con 3 de 3 _____
h) Mil cuarenta pesos de ventas _____
i) Número que sumado a 5 de cero _____

(Observa que algunos enunciados se anotan con números positivos, y otros con negativos, por ejemplo, en el inciso b), es –5; y en el h), 1040, etc.).

En la secundaria estudiaste estos números, ¿Recuerdas cómo se llaman?.

Respuesta: _____

Los números enteros Z = {...-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...}, también se representan por puntos en la recta numérica.



Fueron utilizados en la India, en el siglo VII de nuestra era, dando un significado de deudas a los números negativos y admitiendo soluciones negativas para las ecuaciones. En la actualidad el número cero y los enteros negativos junto con los naturales, nos permiten expresar magnitud y sentido u orientación al mismo tiempo, por ejemplo: las temperaturas sobre cero se describen con números positivos y bajo cero con negativos, los depósitos en el banco con números positivos y los retiros con negativos, de forma similar para goles a favor y goles en contra, y en situaciones semejantes.

La introducción formal por José Peano (1858-1932) de estos números (siglo XIX) precisó el camino para resolver no solo ciertas ecuaciones sin solución en el sistema de los números naturales, sino que hizo posible restar de un número, otro igual o mayor que él, definiendo para ello nuevos números llamados, Enteros negativos y cero, resolviendo así problemáticas como las siguientes:

$7 + a = 7$ y $b + 5 = 3$ o sus equivalentes $a = 7 - 7$ y $b = 3 - 5$, la primera se cumple para $a = 0$ (si restamos un número entero positivo de sí mismo obtenemos el número cero) y la segunda para $b = -2$ (si en los enteros positivos restamos un número mayor de otro menor, obtenemos un número negativo que resulta de la diferencia de ellos, en este caso: $3 - 5 = -(5 - 3) = -(2) = -2$

Por lo ya expuesto y recordando que la resta o diferencia es un número que sumado al sustraendo da como resultado el minuendo, podemos hacer, por ejemplo las siguientes deducciones:

a) 0 – 5 = -5 significa 0 = -5 + 5

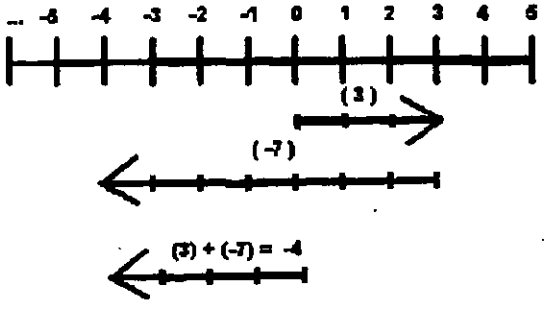
b) 0 – 7 = -7 significa 0 = -7 + 7

c) 0 – m = -m significa 0 = -m + m

De donde, generalizando vemos que para cada número entero m existe otro número entero –m tal que –m+m=0. Al número –m se le llama el inverso aditivo de m.

Por otro lado se define el orden entre estos números aclarando que un número "a" es menor que otro "b" (a < b), si el punto asociado a ese valor "a" está situado a la izquierda del que le corresponde a "b" en la recta numérica; Por ejemplo, nótese que el punto p (-4) esta situado a la izquierda de q (-2) en la recta numérica y por lo tanto decimos que –4 es menor que –2 y escribimos –4 < -2, o también se dice que –2 es mayor que –4 y escribimos –2>-4 porque –2 esta representado a la derecha de –4 en la recta.

La suma con estos números, al igual que con los naturales también puede interpretarse en la recta numérica utilizando desplazamientos, por ejemplo, (3) + (-7) = 3 – 7 puede pensarse como un movimiento de 3 unidades a partir del cero en el sentido positivo (hacia la derecha), seguido por un movimiento de 7 unidades en el sentido negativo (hacia la izquierda) partiendo desde 3. El punto final es –4, por ello se dice que (3) + (-7) = 3 – 7 = -4; tales movimientos pueden a su vez representarse usando flechas debajo de la recta numérica, apuntando en la dirección del movimiento y con una longitud igual al número de unidades implicadas en él, tal como se muestra en la figura siguiente:



También se conviene en llamar valor absoluto de un número entero cualquiera "m" (se escribe como $|m|$), a la distancia entre el punto y el cero.

Formalmente se indica con símbolos así:

$$|m| = \begin{cases} m, & \text{si } m \geq 0 \\ -m, & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

a) $|7| = 7$, ya que la distancia del punto que representa a 7 y el que representa a cero, es 7.

b) $|-7| = -(-7) = 7$, ya que la distancia del punto que representa a _____ y, el que representa cero, es _____

Finalmente las operaciones de suma y multiplicación se definieron de tal forma que coincidieran tanto resultados como propiedades que siguen los número naturales (cerradura, neutro multiplicativo, conmutatividad, asociatividad y distributividad), agregando además la de neutro (0 + b = b) e inverso aditivo –m + m = 0 ya descritos líneas arriba.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

RESTA.

Observa y completa en forma secuencial las siguientes expresiones y sus equivalentes:

(3) + ( ) =	6	equivale a	6	- ( )	=	3
( ) + (2) =	5	equivale a	_____	- (2)	=	3
(3) + (1) =	_____	equivale a	4	- (1)	=	_____
(3) + ( ) =	3	equivale a	3	- ( )	=	3
( ) + (-1) =	2	equivale a	_____	- (-1)	=	3
(3) + (-2) =	_____	equivale a	1	- (-2)	=	_____
(3) + ( ) =	0	equivale a	0	- ( )	=	3
( ) + (-4) =	_____	equivale a	_____	- (-4)	=	3
( ) + ( ) =	_____	equivale a	-2	- (-5)	=	_____
( ) + ( ) =	_____	equivale a	-3	- ( )	=	3

Tomando en cuenta lo anterior, completa las afirmaciones siguientes:

En la columna de restas puedes ver en todos los casos, que para que el resultado sea 3 habrá que sumar (en el sentido de la suma con números enteros ya explicado) al minuendo, el sustraendo con signo opuesto; es decir, al minuendo, agregamos el inverso aditivo del sustraendo, por ejemplo, la resta 5 - (2) equivale a la suma 5-2, es decir a 3; y la resta -1-(-4), equivale a la suma –1 + 4, o sea 3; esto indica que para restar un número de otro, primero eliminamos paréntesis, considerando que el sustraendo precedido de signo menos, significa inverso aditivo, y luego procedemos como en la suma, por ejemplo,

a) 5 - (2) = 5 - 2 = 3

b) -1 - (-4) = -1 + 4 = 3

De acuerdo con las equivalencias, la resta es una operación que se utiliza para encontrar un sumando desconocido, cuando la suma y uno de los sumandos son conocidos, por ejemplo la resta (4) - (1) = ( ) equivale a la suma 4 = ( ) + (1) y por lo tanto se dice que (4) - (1) = (3) porque (4) = (3) + (1).

Resuelve y justifica las siguientes restas:

a) (7) - (5) = ( ) ya que (7) = ( ) + (5)
b) (2) - (-4) = ( )
c) (-3) - (7) = ( )
d) (5) - (5) = ( )
e) (4) - (9) = ( )
f) (-6) - (0) = ( )
g) (0) - (-1) = ( )
h) (-2) - (-2) = ( )

MULTIPLICACIÓN

Supón que de una tarjeta de crédito se retiran $3,000.00 para pagar la renta de un almacén. Si ahora hay $28,000.00 disponibles en la tarjeta y si cada mes paga la misma cantidad de renta, completa las siguientes afirmaciones :

Después de seis meses la cantidad que habrá disponible en la tarjeta es, _____.

Sí denotamos los depósitos y los periodos de tiempo futuro con enteros positivos y los retiros y periodos de tiempo pasado con negativos, sabemos que para obtener dicha respuesta procedemos de la forma siguiente;

$$(28,000) + [(-3,000) + (-3,000) + (-3,000) + (-3,000) + (-3,000) + (-3,000)] =$$
$$(28,000) + [\ 6(-3,000)] = 10,000$$

Pero notarás que para que la suma de 28,000 con 6(-3,000) sea 10,000, se necesita que 6(-3,000) sea igual a _____, lo cual sugiere que el producto de 2 números con signo opuesto sea _____, lo que también se confirma al aplicar las reglas de la suma a,

$$(-3,000) + (-3,000) + (-3,000) + (-3,000) + (-3,000) + (-3,000)$$

Sí se sigue pagando cada mes la misma cantidad de renta, después de un año, el saldo de la tarjeta será de _____ , mas los intereses generados por el saldo negativo, lo cual indica que dicha cantidad sea negativa, es decir _____.

Comprueba tu respuesta, llenando los espacios vacíos del procedimiento numérico:

$$(28,000) + [12(\quad)] = (28,000) + (\quad) = (\quad)$$

Como suponemos que siempre se ha pagado la misma cantidad de renta, entonces cuatro meses antes de ahora había en la tarjeta _____, de acuerdo con lo cual y utilizando el procedimiento con números enteros deberemos tener:

$$(28,000) + [-4\ (-3,000)] = 40,000$$

pero te darás cuenta que para que la suma de 28,000 con otro número sea 40,000, se necesita que ese otro número sea _____, el cual deberá ser resultado de -4 (-3,000), lo que finalmente sugiere que el producto de dos números negativos sea _____.

EJERCICIOS

1.- Completa la tabla:

$(+)(+) = (\quad)$
$(+)(-) = (\quad)$
$(-)(-) = (\quad)$
$(-)(+) = (\quad)$

2.-Al resolver operaciones combinadas, deberás tener en cuenta las propiedades Distributiva, Conmutativa y Asociativa, además de la regla de los signos para multiplicar, por ejemplo,

$$\begin{aligned} &-7-(4-1)+(-2+5-3)-(-9)+6= \\ &=-7-1(4-1)+1(-2+5-3)-1(-9)+6= \\ &=-7-4+1-2+5-3+9+6= \\ &=-7-4-2-3+1+5+9+6=-16+21=15 \end{aligned}$$

3.- Finalmente es importante notar que, para multiplicar más de dos números, deberás aplicar además de las reglas de los signos la propiedad asociativa, por ejemplo,

$$-3(2)(-5)=[-3(2)](-5)=(\quad)(-5)=30$$

3.- Resuelve las siguientes operaciones:

a) $-3(2)(-5)$

b) $(-3)^4$

c) $(-2)^5$

d) $-2(4)^3$

e) $7-(4-1)+2(-3+5-1)-(-9)+6(-3)$

f) $\dfrac{4-(-5)}{-2+(-1)}$

g) $\dfrac{-(-3)+\sqrt{(-3)^2-4(3)(-12)}}{2(3)}$

h) $4-(5)^2-2(3)^3+6(-2)^4$

i) $2(-3)^4-(5)$

j) $-5-(-1+7)+3(2-6+4)-(2)-7(2-4+6)$

k) $\dfrac{-1-2(-4)}{-2(-3)-(-1)}$

l) $\dfrac{-2(3)+2(5)}{-8-3(-4)}$

DIVISIÓN

Observa y completa en forma secuencial las siguientes expresiones y sus equivalentes:

a) $(-3)(\quad) = (-12)$ equivale a $\frac{-12}{-3} = (\quad)$

b) $(\quad)(3) = (-9)$ equivale a $\frac{-9}{(\quad)} = 3$

c) $(-3)(2) = (\quad)$ equivale a $\frac{\quad}{-3} = 2$

d) $(-3)(\quad) = (-3)$ equivale a $\frac{-3}{-3} = (\quad)$

e) $(\quad)(0) = (0)$ equivale a $\frac{0}{(\quad)} = 0$

f) $(-3)(-1) = (\quad)$ equivale a $\frac{(\quad)}{-3} = -1$

g) $(-3)(\quad) = (\quad)$ equivale a $\frac{(\quad)}{-3} = (\quad)$

h) $(\quad)(-3) = (\quad)$ equivale a $\frac{9}{(\quad)} = (\quad)$

i) $(\quad)(-4) = (\quad)$ equivale a $\frac{(\quad)}{(\quad)} = (\quad)$

j) $(-3)(\quad) = (\quad)$ equivale a $\frac{(\quad)}{(\quad)} = (\quad)$

Tomando en cuenta los resultados anteriores contesta:

En la columna de multiplicaciones:

1.- Los productos van de menor a mayor, de tres en tres y desde, _____ hasta _____; además los factores de la derecha van de mayor a menor desde, _____ hasta _____.

2.- Se cumple la regla de los signos para la multiplicación, ya que:

a) El producto de dos números con signo contrario es _____

b) El producto de dos números con signo igual es _____

3.- Si el producto es cero, entonces uno de los factores es _____

En la columna de divisiones:

Los cocientes van de mayor a menor desde _____ hasta _____, mientras que los dividendos aumentan de tres en tres desde _____, hasta _____.

La regla de los signos para la división es igual a la de la multiplicación, ya que como puedes ver, el cociente de números con signo opuesto es _____ y el cociente de números con signo igual es _____.

3.- De acuerdo con las equivalencias la división es una operación que se utiliza para encontrar un factor desconocido cuando el producto y uno de los factores son conocidos, por ejemplo la división $\frac{-12}{-3}$ = ( ).

Equivale al producto (-3)( ) = -12 y por lo tanto se dice que $\frac{-12}{-3}$ =4
porque -12 = ( )( ).

4.- Resuelve y justifica las siguientes divisiones:

a) $\frac{-15}{5} = (\quad)$, porque $-15 = (\quad)(\quad)$

b) $\frac{8}{-1} = (\quad)$, porque $\_\_\_\_ = (\quad)(\quad)$

c) $\frac{-6}{-6} = (\quad)$, porque $\_\_\_\_ = (\quad)(\quad)$

d) $\frac{0}{4} = (\quad)$, porque $\_\_\_\_ = (\quad)(\quad)$

e) $\frac{-1}{1} = (\quad)$, porque $\_\_\_\_ = (\quad)(\quad)$

Notar, que no todos los cocientes entre estos números son enteros, por ejemplo:

$\frac{-15}{4}$ **, no representa un entero, ya que no hay ninguno de ellos que multiplicado por 4 de 15.**

En el sistema de los números racionales que se verá a continuación, cualquier cociente entre ellos es número racional.

LEYES DE EXPONENTES PARA ENTEROS

En esta parte extenderemos el significado de las potencias con exponentes enteros negativos y cero, para lo cual se requiere definir los símbolos a^0 y a^{-n} de tal manera que las leyes con exponentes naturales sigan siendo válidas.

Justificamos las definiciones suponiendo que las leyes se cumplen aunque los exponentes sean enteros negativos y cero.

a) Como la primera ley se cumple aunque uno de los exponentes sea cero, tendremos :

$$a^0a^3 = a^{(\quad)+(\quad)} = a^{(\quad)}$$

Por otro lado pensemos, ¿a qué debe ser igual a^0 para que la expresión, $a^0a^3 = a^3$ sea cierta?, o sea, ¿por qué número debemos multiplicar el número a^3 para obtener como resultado el mismo a^3?.

Generalizando, $a^0a^n = a^n$, se justifica que a^0 sea igual a _____.

b) Como la primera ley se cumple aunque uno de los exponentes sea entero negativo, tendremos:

$a^{-3}a^3 = a^{(\quad)+(\quad)} = a^{(\quad)} = (\quad)$, o sea $a^{-3}a^3 = 1$, de donde por definición de división.

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}, \quad \text{con } a \neq 0$$

Generalizando, de $a^{-n}a^n = a^{(\quad)} = (\quad)$, se justifica que a^{-n} sea igual a _____, con $a \neq 0$

Si suponemos que a 4 grupos de la escuela se les asignó 3 parcelas rectangulares iguales para dar mantenimiento a las áreas verdes, ¿qué parte le tocará a cada uno, si debe ser igual para todos?.

Respuesta : _____

Descubre y comprueba tu propia respuesta completando las siguientes afirmaciones :

1.- Como las 3 parcelas no alcanzan para asignar una completa a cada uno de los 4 grupos, entonces habrá que dividirlas en dos partes iguales, teniendo un total de _____ mitades para repartir, y por lo tanto a cada uno de los cuatro grupos les tocará _____ mitades y sobraran _____.

Ilumina en los diagramas la parte que le corresponde a cada grupo y de paso confirma tus respuestas anotadas en este párrafo.

2.- Ahora divide los mismos terrenos en tres partes iguales cada una y obtendrás un total de _____ tercios para hacer la repartición y entonces a cada grupo le corresponderá una máximo de _____ tercios y sobrarán _____.

Utiliza nuevamente los diagramas para verificar tus resultados.

3.- Si posteriormente realizas la división en cuartos, dispondrás de _____ cuartos para hacer la repartición y sobraran _____.

Una vez más utiliza diagramas para verificar tus afirmaciones:

4.- Si posteriormente se agregan a este trabajo 2 grupos más. ¿Qué parte se quitará a cada uno de los primeros 4 para que todos tengan igual área? _____.

5.- Finalmente a cada uno de los 6 grupos les tocó _____.

Al ir contestando las anteriores afirmaciones, habrás notado que:

6.- Si dos terceras partes de cada grupo son mujeres. ¿Qué parte del trabajo les toca a ellas?

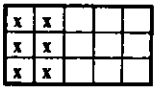
1.- Las _____ se utilizan para representar parte o partes iguales de un todo tomado como unidad, siempre y cuando se pueda fraccionar.

2.- Las _____ se utilizan para expresar una división o cociente, ya que dividiendo 3 entre 4 se obtiene 3/4 coincidiendo con el resultado del problema.

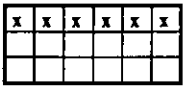
3.- Posteriormente se verá que las fracciones se utilizan para expresar o comparar razones.

EJERCICIOS SOBRE SIGNIFICADO DE FRACCIONES.

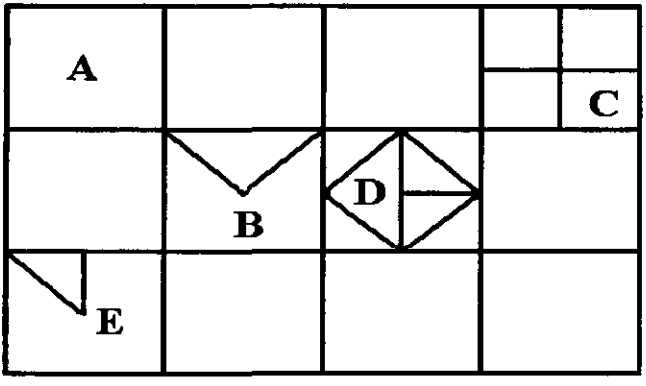
1.- Escribe la fracción que representa el área iluminada.

a) 

b)

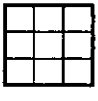
c) 

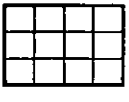
2.- Expresa con fracciones las áreas de las regiones sombreadas A, B Y C.



3.- Si el área del rectángulo mayor es 96m, ¿cuál será el área de las regiones: A, B, C, D, y E?.

4.- Ilumina 2/3 del área de cada terreno:

a) 

b) 

c)

5.- Si un padre heredo 7 terrenos de igual superficie a sus 4 hijos. ¿ Cuánto le toco a cada uno?

NUMEROS RACIONALES

Los números racionales Q $\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 2, -1.5, \overline{.33}, 0, -1, \ldots \}$, es decir, aquellos que se puedan escribir como cociente $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$, surgen inicialmente con problemas de medición de objetos susceptibles de dividirse, por ejemplo. Cuando deseamos medir la longitud de un objeto, la mayoría de las veces su medida esta comprendida entre dos de sus múltiplos, por lo cual dicha medida se divide en "n" partes iguales (cada una es designada con el símbolo 1/n). Si el objeto contiene exactamente "m" de ellas, su medida se denota con la fracción m/n.

Hacia el año 2000 a.C. los egipcios y babilonios ya utilizaban fracciones. Las fracciones fueron utilizadas con ciertas reservas hasta el siglo XVII, a partir del cual se les considero como números racionales y en el mismo plano que a los números naturales. Para que tal suceso pudiera darse, previamente se precisaron definiciones para la adición, multiplicación y la igualdad entre estos números, con la finalidad de que al usarlos continuaran siendo validas las leyes fundamentales de la aritmética de los números naturales, y también para que al aplicarlos en problemas de tipo práctico no hubieran contradicciones.

La introducción de estos números permitió, que todas las ecuaciones ax=b, tuvieran como solución un número racional.

Por ejemplo, la ecuación 5x=8, no tiene solución en el sistema de los números enteros, ya que ninguno de ellos multiplicado por 5 da 8; la misma ecuación tratada en el sistema de los números racionales tiene como solución $\frac{8}{5}$, que también es uno de estos números, puesto que cinco veces ocho quintos es cuarenta quintos, o sea ocho.

$$\left[5\left(\frac{8}{5}\right)=\frac{40}{5}=8\right]$$

Notar en particular que si 7x = 1, entonces x = 1/7 y por lo tanto 7(1/7) = 1, 1/7 es llamado el inverso multiplicativo de 7 e inversamente 7 es el inverso multiplicativo de 1/7.

Habrás notado hasta aquí que:

a) Los números naturales y el cero son enteros.
b) Los números enteros son racionales, ya que, por ejemplo, cinco y cero se pueden expresar como: 5 = 10/2 = 5/1 y 0 = 0/3 = 0/1
c) El sistema de números inducido hasta este momento está formado por los números naturales, el cero, enteros negativos y las fracciones positivas y negativas, los cuales conforman el sistema de los números racionales.

Las operaciones de suma y multiplicación se definieron en los racionales de tal forma que coincidieran resultados y propiedades que ya se tenían con los números enteros (cerradura, conmutatividad, asociatividad, neutro multiplicativo, neutro aditivo, inverso aditivo y distributividad) agregando además la del inverso multiplicativo, la cual indica que para todo número racional a/b mayor que uno existe otro, b/a tal que a/b [b/a] = 1.

El inverso aditivo para cero no existe y para uno es el mismo uno.

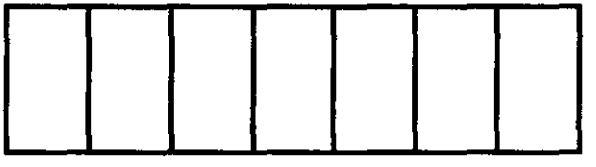
MULTIPLICACIÓN.

Sí en un colegio los alumnos de cuarto semestre son $\frac{2}{7}$ del total, y si $\frac{3}{5}$ de los de cuarto semestre se capacitan en computación. ¿Qué parte de todos los alumnos del Colegio son de cuarto semestre y pertenecen al área de computación?.

Respuesta: _____

Sí describes correctamente las instrucciones que siguen podrás llegar a la respuesta y comprobar tu solución.

1ra. Instrucción : Supongamos que el siguiente diagrama representa todos los alumnos del Colegio.
Iluminemos dos de las siete partes iguales en que se dividió el diagrama.
La parte iluminada se representa con la fracción $\frac{(\ )}{(\ )}$, y puede relacionarse con la parte que corresponde a los alumnos de _____.



2da. Instrucción: Si remarcas $\frac{3}{5}$ de la partes iluminada, te darás cuenta que dicha parte representa los alumnos de computación y de 4° semestre,

La cual expresamos con la fracción $\frac{(\ )}{(\ )}$

3ra. Instrucción : Observando el diagrama construido y analizando la figura habrás notado que la parte iluminada $\frac{(\ )}{(\ )}$ también significa $\frac{3}{5}$ *de* $\frac{2}{7}$

Observa que el mismo resultado se puede obtener operando las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{5}$.
¿Podrías indicar de que operación se trata?.
Este y otros ejemplos similares sugieren que el producto de dos fracciones se obtenga multiplicando numerado por numerador y denominador por denominador.

EJERCICIOS DE MULTIPLICACIÓN.

1.- Resolver los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos metros cuadrados de mosaico se necesitan para cubrir una sala rectangular que mide 4 1/3 m. por 3 1/4 m. ?. (Recordar que 4 1/3 = 4 + 1/3 = 12/3 + 1/3 = 13/3)

b) Sí un atleta corre a una velocidad de 15 1/4 km. por hora, ¿qué distancia recorrerá en 1 1/2 hrs.?.

c) Sí 5/17 partes del peso del latón es aluminio, entonces, ¿cuál será el peso en aluminio de una pieza de latón que pesa 12 1/2 kg.?

d) Sí suponemos que el crecimiento anual de la población del D.F. (índice demográfico) con respecto a la población del año anterior es de 2% y suponiendo que se mantendrá fijo, si a principio de 1998 había 15.5 millones de habitantes. ¿Cuántos habitantes habrá a principios de 1999?.
(A las fracciones cuyo denominador es cien, se les llama por ciento, P.E. 2% equivale a $\frac{2}{100}$)

e) Sí un artículo de $850.00 lo ofrecen con un descuento del 20%, entonces su costo es el 80% de $850.00; puesto que 850 menos el 20% de 850, equivale a :

$$\frac{100}{100}(850)-\frac{20}{100}(850)=\left(\frac{100}{100}-\frac{20}{100}\right)(850)=$$
$$\frac{80}{100}(850)=0.8(850)=680$$

2.- Escribe el inverso multiplicativo de los siguientes números:

a) 7 ( )
b) 1/4 ( )
c) 2/3 ( )
d) -3 ( )
e) -2/5 ( )

3.- Contesta las siguientes preguntas:

a)¿Cuánto es 3/8 de un día?.

b)¿Cuánto es 1/4 (25%) de 200?.

c)Sí un jurado esta compuesto por 15 personas de las cuales 6 son hombres. ¿Qué parte de todo el jurado son mujeres?.

d)Sí un automóvil avanza a una velocidad de 120 km/hr. Calcula la distancia recorrida en 45 minutos si se supone que va a una velocidad constante.

e)En una secundaria el 60% de los alumnos son varones. Sí hay 240 mujeres, ¿cuántos hombres hay?.

f)¿Cuántos cuartos de limón, hay en 3 1/2 limones?

g)Al llegar a una gasolinera, la aguja del tanque de la gasolina de un auto marcaba 3/4 de su capacidad, si para llenarlo se requirieron 15 l. ¿cuál es su capacidad?.

h) La sal de mesa contiene 2/5 partes de sodio. Si una persona consume 3/4 gr. de sal en un día. ¿Cuánto sodio ingiere con esa cantidad de sal?.

i)Un automóvil viaja a una velocidad promedio de 70 1/2 km. por hora si maneja durante 6 1/4 hrs. ¿Cuántos km. avanzó?.

j)Si se sabe que aproximadamente el 25% del oxigeno que se respira pasa a la sangre, y que 21% del volumen del aire es oxigeno. ¿Cuánto oxigeno ha pasado a la sangre de una persona que ha inspirado 2 3/4 litros de aire?.

5.- Completa para que quede una igualdad:

a) 3(7)/4 = 3/4(7/1) = 3/4 ( )

b) 3(7)/4 = 3/1( ) = 3( )/( )

c) 3/5 = (3)/(1) ( )/( ) = 3( ) / ( )

ORDEN

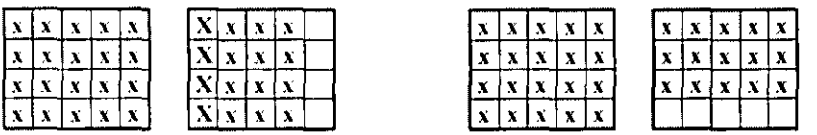
En 1960 la población del Estado de México era de 9/5 millones de habitantes y la de Guanajuato de 7/4. ¿Cómo era la población del Estado de México con respecto a la de Guanajuato? (Menor, <; mayor, >; o igual, =).

Respuesta: _____

Comparemos ambas poblaciones con diagramas de áreas y de esa forma se verá más clara la respuesta, para lo cual te pedimos completar las partes incompletas del procedimiento:

1.- Supón, que las poblaciones de ambos estados de la República están representados por las áreas iluminadas siguientes:

Estado de México **Guanajuato**



5/5 ( )/5 ( )/4 3/( )

2.- De acuerdo con las áreas iluminadas en los diagramas, nos damos cuenta que:

9/5 equivalen a ( )/20 y 7/4 equivalen a ( )/20

3.- Por lo anterior sabemos que la población del Estado de México es _____ que la de Guanajuato, pues 35 es _____ que 36.

4.-¿Qué operaciones tendrías que realizar con las fracciones 9/5 y 7/4 para llegar al mismo resultado sin usar los diagramas?.

EJERCICIOS DE ORDEN.

1.- Completa las siguientes igualdades y comprueba con el diagrama:

(2)/3 = 8/( ) = ( )/48

2.- Completa de modo que las fracciones sean equivalentes:

a) 2/3(1) = 2/3[4/( )] = ( )/( )

b) 2/3( ) = 2/3 [16/16] = ( )/( )

3.-Escribe los siguientes números en veinticuatroavos:

a) 3/8
b) 1/4
c) 2

4.- Escribe el signo <, > o =, según corresponda:

a)	2/5	☐	4/7
b)	6/5	☐	3/2
c)	1/8	☐	4/32

5.- Resuelve los siguientes problemas:

a)¿Qué pasa si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican por un mismo número diferente decero?.

b)Encuentra una fracción equivalente a 35/77 y que tenga numerador 10

c) Una varilla de 3/8 de pulgada se desea introducir en un orificio de 11/32 de pulgada. ¿Cabe o no ?, ¿por qué?.

d) Si suponemos que el óxido férrico contiene 3/10 de oxigeno y el óxido de zinc 1/5. ¿Cuál contiene más oxigeno?.

6.- Multiplica y simplifica al máximo los resultados:

a) 3/4 (5/6)

b) 5/2 (4/7)

c) 3 (1/3)

SUMA Y RESTA

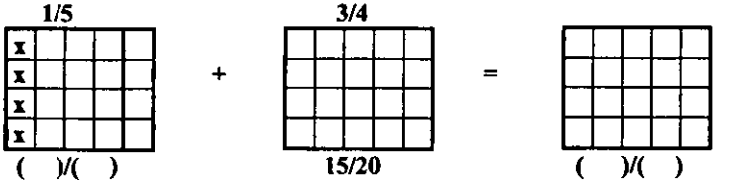
Se tienen dos latas de pintura blanca de igual capacidad, una de ellas contiene 1/5 y la otra 3/4, sí las juntas en una sólo bote, ¿hasta que parte se llenará?

Respuesta: _____

Sería conveniente que el procedimiento que utilizaste para tu respuesta la compruebes con un problema de respuesta obvia, por ejemplo, se sabe que el peso total de 3/4 kg. de bistec y 1/2 kg. de carne de cerdo es 1 1/4 kg. o sea 5/4 kg., entonces comprueba esta respuesta utilizando el mismo procedimiento que con el problema de la pintura.

Enseguida veremos otra forma de llegar a la respuesta, lo cual puede servir para confirmar la tuya y también como una alternativa más para la solución de problemas semejantes, por lo cual te pedimos completar las partes incompletas del siguiente procedimiento.

1.- Representamos con diagramas de áreas los contenidos de pintura en cada bote.



2.- Al observar los diagramas, notarás que 1/5 + 3/4 equivale a ( )/20 + ( )/( ) y, a: ( )/( ).

3.- Este y otros ejemplos similares nos sugieren que para sumar fracciones con denominador diferente, se deben sustituir por otras equivalentes de igual denominador.

4.- Un razonamiento similar podemos hacer cuando se trate de restar, por ejemplo,

2/3 - 1/2 = 2/3[2/2] - 1/2[( )/3] = 4/( ) - ( )/6 = ( )/( ).

EJERCICIOS DE SUMA Y RESTA

1.- De un rollo de tela que contiene 120 m., se toman sucesivamente los 3/8, después 1/6 y luego 1/4 del total. Encuentra lo que sobra.

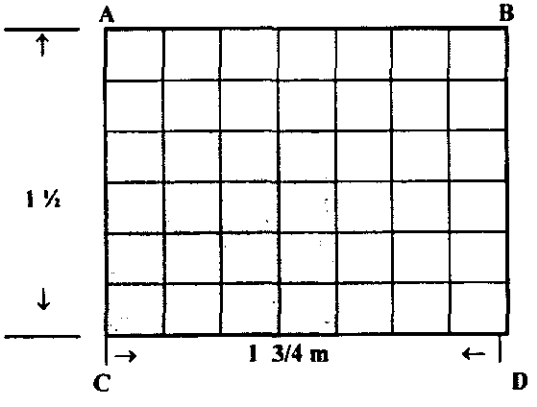
2.- Halla en cada expresión los números que faltan:

a) 4 1/3 = ( )/3 + 1/3 = ( )/3

b) 9/4 = 2 + ( )/4
c) 7 + ( ) = 6 + 11/8
d) 5 = ( )/5 = ( )/1 = ( )/10
e) 2 1/4 + ( ) = 3 3/4 = 15/( )
f) 1/1(2) + 1/2(3) =
g) 1/1(2) + 1/2(3) + 1/3(4) =
h) 1/1(2) + 1/2(3) + 1/3(4) + 1/4(5) =
i) 1/1(2) + 1/2(3) + 1/3(4) + 1/4(5) + ... + 1/99(100) =
j) 1/a + 1/b = 3/8
k) 1/a + 1/b + 1/c = 1

3.- En una tienda de artículos electrónicos un empleado vende 2/5 de cable coaxial de un carrete y después 3/4 de lo que quedó, si le sobran 27 m. ¿cuántos metros contenía el carrete?.

4.- Obtener el perímetro y el área del rectángulo A B C D



c) $\frac{8}{7} \div \frac{2}{1} = (\ ) = \frac{8}{(\ )} \frac{(\ )}{2} =$

d) $\frac{15}{9} \div 3 = (\ ) = \frac{(\ )(\ )}{(\ )(\ )} =$

e) $\frac{3}{3} \div \frac{3}{1} = (\ ) = \frac{(\ )(\ )}{(\ )(\ )} =$

5.- Estos y otros ejemplos similares sugieren que el resultado de dividir cualquier fracción a/b entre otra c/d se obtiene multiplicando el dividendo ( )/( ) por el inverso multiplicativo del divisor ( )/( ) o sea a/b ÷ c/d = ( )( )/( )( ) =.

6.- Este procedimiento puede justificarse aplicando algunos conocimientos anteriores, por ejemplo, supón que el resultado de dividir 9/2 entre 3/4, es a/b, es decir, 9/2 ÷ 3/4 = a/b lo que a su vez equivale a 9/2 = 3/4(a/b) si en esta última ecuación multiplicamos ambos miembros por el inverso multiplicativo de 3/4 tendremos

9/2 ( )/( ) = ( )/( ) 3/4 (a/b) y por lo tanto

9/2 ( )/( ) = (1) a/b o sea que ( )/( ) = a/b

Ejercicios:

a) Si un coche recorrió 100 km. en 3/4 de hora. ¿Cuál fue su velocidad por hora?.

b) Si un objeto pesa en la luna la sexta parte de lo que pesa en la tierra. ¿Cuál será el peso en la luna de un objeto que pesa en la tierra 3/4 kg.?.

c) Si el área de un rectángulo es 12 1/4 m^2 y si la longitud del ancho es de 2 1/3 m. ¿Cuánto mide de largo?.

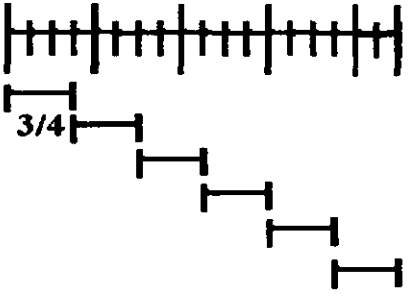
DIVISIÓN

¿Cuántos tramos de 3/4 m. se pueden cortar de un tubo de cobre de 4 1/2 m?.

Respuesta : _____

Puedes constatar tu respuesta analizando los siguientes procedimientos, para lo cual te pedimos llenar los espacios vacíos que verifican las afirmaciones que en ellos aparecen:

1.- Imaginemos el tubo a través de un diagrama como el siguiente:



En el cual puede verse que se pueden cortar _____ tubos de 3/4 m.

2.- Si quisiéramos saber qué operación es la adecuada para este problema; contestar: el número de tramos de 2m. de un tubo de 8 m. es _____, lo cual resulta de realizar la operación _____, por lo tanto para resolver el problema inicial deberás realizar la operación _____ para obtener como resultado _____.

3.- ¿Podrías indicar cómo dividir 9/2 ÷ 3/4, y comprobar tu respuesta usando un diagrama igual que en el ejemplo ilustrativo?.

4.- Ensaya tu procedimiento con los siguientes ejemplos de resultados conocidos:

a) $\frac{2}{3} \div \frac{2}{3} = (1) = \frac{2}{(\ )} \frac{(3)}{(\ )} =$

b) $\frac{5}{6} \div \frac{1}{1} = (\ ) = \frac{5(\ )}{6(\ )} =$

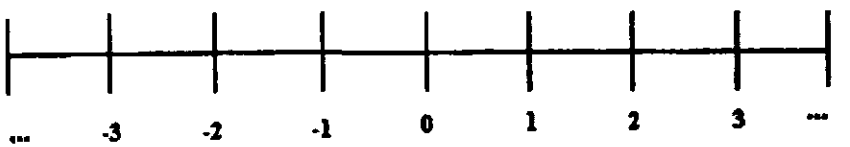
ALGO SOBRE LA RECTA NUMÉRICA

Ahora utilicemos la recta numérica para indicar los números positivos y negativos junto con sus operaciones.

Comencemos trazando una recta horizontal y escojamos un punto sobre ella llamado origen, para representar al cero, ahora designemos otro punto a la derecha del cero para representar el 1.

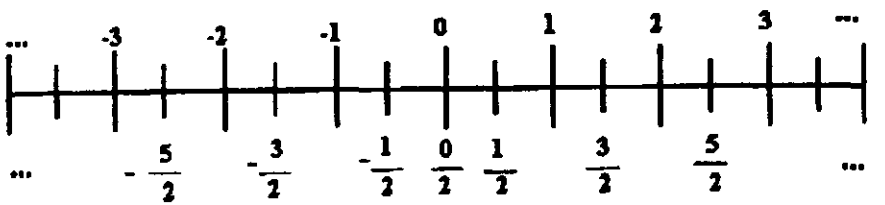
El segmento que tiene el origen y el punto 1 se llama segmento unidad y se usa para designar los puntos a la derecha y a la izquierda del origen.

Los puntos de la derecha del origen representan a los enteros positivos y los puntos de la izquierda a los enteros negativos, es decir:

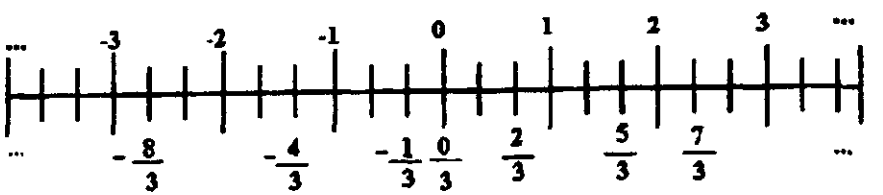


Ahora dividamos el segmento unidad en dos segmentos congruentes (medios) y usemos uno de ellos para designar los puntos a la derecha y a la izquierda del origen.

Los puntos a la derecha del origen representan a las fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$, y los puntos a la izquierda del origen a las fracciones negativas: $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$, es decir:



De forma semejante podemos trazar los puntos que corresponden a tercios, cuartos, etc.



En las rectas numéricas cuyos puntos se representan con numerales de la forma $\frac{a}{b}$

el denominador ***b*** nos dice el número de subintervalos en que se dividió el segmento unidad.
El numerador ***a*** indica que el punto se encuentra a una distancia de ***a*** subintervalos, a la derecha o a la izquierda del origen, según sea a positiva o negativa, por ejemplo:

En la fracción $-\frac{10}{4}$ el denominador 4, se obtuvo dividiendo el segmento unidad en cuatro (cuartos) segmentos congruentes.

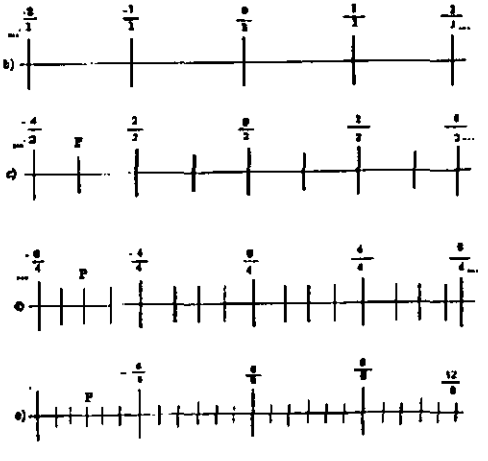
El numerador -10, indica que el punto representado por la fracción está 10 cuartos a la izquierda del origen

En la recta del inciso b), **(ver diagrama)** el denominador 1 de cada fracción nos indica que para localizar el punto correspondiente, debemos usar el segmento unitario en su totalidad. A cada punto correspondiente a un entero, se le asigna una fracción cuyo numerador es el mismo entero y cuyo denominador es uno.

Se tiene una disposición en parejas de los números racionales tal que para cada número racional positivo corresponde un racional negativo.

Los puntos que representan estos dos números son simétricos uno del otro con respecto al cero, por ejemplo, el racional negativo $-\frac{3}{2}$ es el simétrico del racional positivo $\frac{3}{2}$.

Los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{an}{bn}$ (donde n es natural) pueden representarse por un mismo punto en la recta numérica, por ejemplo, $-\frac{3}{2}, -\frac{6}{4}, -\frac{9}{6}$ por el punto "P" en las gráficas c), d) y e).



Esto se aclara, si notamos que llegaremos al mismo punto en la recta numérica, cuando al dividir cada segmento unidad en dos segmentos congruentes y avanzamos tres a la izquierda partiendo del origen, que si lo dividimos en cuatro (el doble de dos) y avanzamos seis espacios (el doble de tres), o que si lo dividimos en seis (el triple de dos) y avanzamos nueve (el triple de tres), etc.

Otra forma de saber que dos expresiones fraccionarias $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan el mismo punto en la recta numérica es verificando que ad = bc.

Así por ejemplo en las expresiones $-\frac{3}{2}, -\frac{6}{4}, -\frac{9}{6}$, podemos notar que

$-3(4) = 2(-6)$, $-6(6)=4(-9)$ y $-3(6)= 2(-9)$.

Para verificar dicho procedimiento, observemos que las fracciones $-\frac{3}{2}=-\frac{6}{4}$ son equivalentes a $-\frac{3(4)}{2(4)}$ y $-\frac{6(2)}{4(2)}$ respectivamente y como $-3(4)$ y $-6(2)$ son iguales, entonces $-\frac{3}{2}=-\frac{6}{4}$.

En general, las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes a $\frac{ad}{bd}$ y $\frac{cb}{db}$ respectivamente, de las cuales se observa que para ser iguales es necesario que de donde $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es decir, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan el mismo punto $ab = cb$.

Aquí cabe aclarar, que las fracciones reducidas[7] no siempre son las más útiles, por ejemplo, al comparar o sumar las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$, utilizamos las expresiones equivalentes $\frac{3(7)}{5(7)}$ y $\frac{4(5)}{7(5)}$ en su lugar.

La recta numérica también sirve para representar con flechas los números racionales de igual manera que se hizo con los enteros, por ejemplo, el racional negativo $-\frac{3}{4}$, puede representarse por una flecha que apunta hacia la izquierda y tiene una longitud de $\frac{3}{4}$, mientras que el racional positivo $\frac{7}{4}$ puede representarse por una flecha que apunta hacia la derecha y tiene una longitud de $\frac{7}{4}$.

La flecha que representa a un racional puede sin embargo, tener su origen en cualquier punto de la recta.

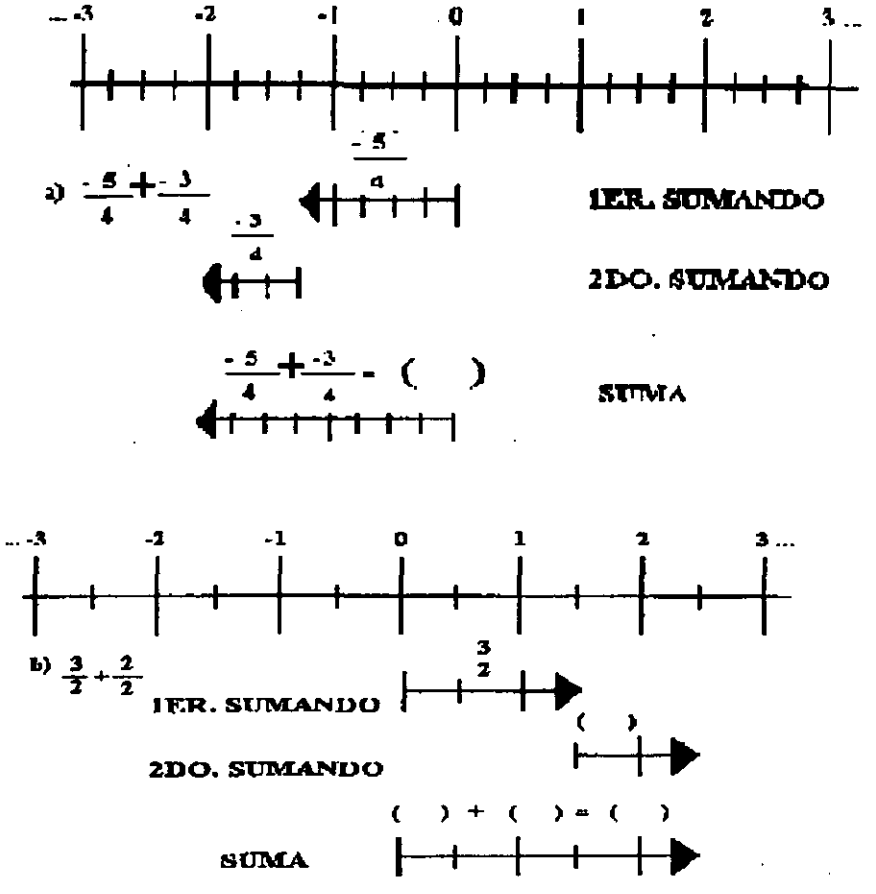
A la longitud de la flecha utilizada para representar a un número racional se le llama valor absoluto.

Así podemos decir, por ejemplo, que el valor absoluto de $-\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{3}$ el cual denotamos como $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$ y que el valor absoluto de $\frac{7}{8}$, es $\frac{7}{8}$ el cual también podemos denotar como $\left|\frac{7}{8}\right| = \frac{7}{8}$.

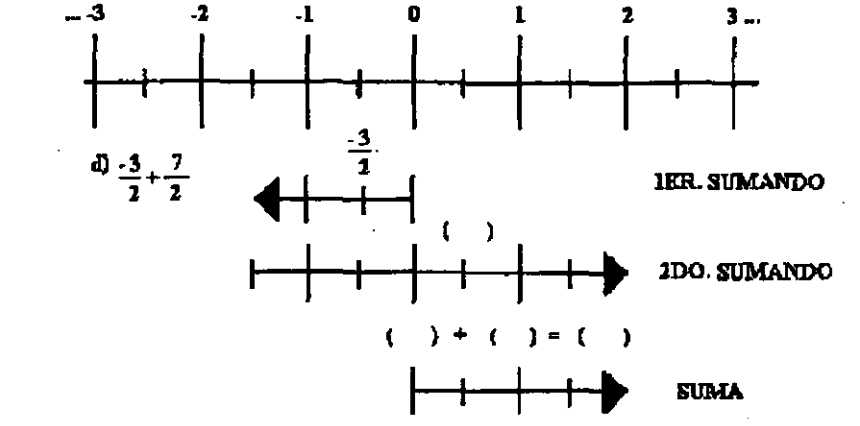
[7] La fracción reducida de un número racional $^{a}/_{b}$, es aquella en que a y b no tienen un factor común mayor que uno, es decir, el mcd de a y b es 1.

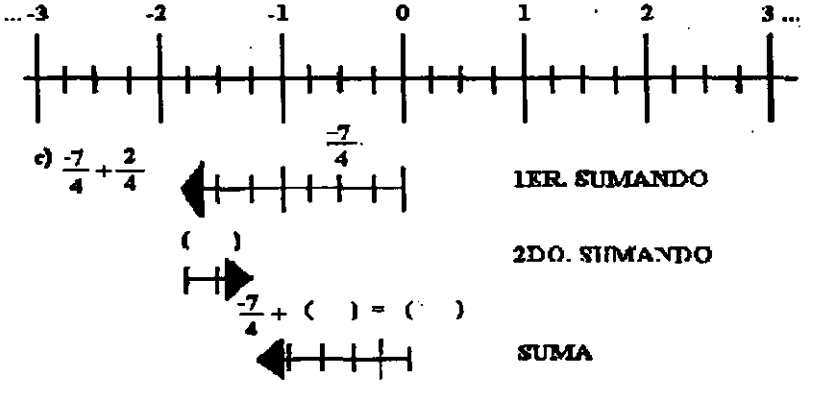
SUMA DE RACIONALES CON FLECHAS

Los números racionales se pueden también sumar por medio de flechas de la misma forma que se hizo con los enteros, o sea que para sumar dos números racionales, la flecha que representa al primer sumando debe tener su origen en cero y la flecha que representa al segundo sumando deberá iniciar en la punta de la flecha del primer sumando. Algunos ejemplos se muestran a continuación.



Observa que en ambas sumas, la longitud de la flecha para la suma es igual a la suma de las longitudes de las flechas de los sumandos y la dirección es la misma que las de las dos flechas de los sumandos.





Observar que en ambas sumas, la longitud de la flecha para la suma es la diferencia de las longitudes de las flechas para los sumandos y la dirección es la misma que la más larga de las dos flechas.

La flecha para todas las sumas tiene su origen en cero y su sentido en dirección a la punta del segundo sumando.

Representando con flechas los números racionales podemos comprobar, al igual que con los números enteros:

El cero es el neutro aditivo de cualquier número racional.

Por ejemplo, probar que: $0+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}$ y que la suma de cualquier número racional y su simétrico (reflexión) es cero. Por ejemplo, comprobar que: $-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$

Por esto podemos decir que el simétrico de cualquier número racional es su inverso aditivo.

Ahora podemos decir, como en los números enteros, que para restar un número racional de otro cualquiera, habrá que sumar al minuendo el inverso aditivo del sustraendo.

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE LOS NÚMEROS RACIONALES CON SIGNO

¿Recuerdas cómo se multiplican dos números racionales positivos?. Por ejemplo, al multiplicar $^{2}/_{3}$ ($^{7}/_{5}$), obtenemos: _____.

¿Recuerdas cómo se multiplican dos números enteros con signos opuestos?. Por ejemplo, al multiplicar -2 por 7, obtenemos: _____.

Si expresamos los números –2 y 7 con los numerales racionales $-^{2}/_{1}$ y $^{7}/_{1}$, entonces el producto $-^{2}/_{1}$ ($^{7}/_{1}$), será el número racional _____, equivalente a la expresión entera _____.

Si queremos que las reglas anteriores se apliquen al producto de dos números racionales con signos opuestos, entonces al multiplicar, por ejemplo, $-^{3}/_{4}$ ($^{2}/_{5}$) , obtendremos _____.

¿Recuerdas cómo multiplicamos dos enteros negativos?. Por ejemplo, al multiplicar –3 por –5, se obtiene _____.

Si tomamos en cuenta que las fracciones $-\frac{9}{3}$ y $-\frac{15}{3}$ son iguales a –3, y –5

Respectivamente, entonces el producto $-\frac{9}{3}\left(-\frac{15}{3}\right)$ deberá ser igual a _____,

Ya que de no ser así, no habrá concordancia con el resultado, cuando dichos números se interpreten como enteros.

Resumiendo podemos decir que el producto de dos números es positivo si tienen signos iguales y negativo si tienen signos opuestos.

El número racional 1 es el neutro multiplicativo. Por ejemplo:

$$1\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{1}\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{-5}{6}$$

Es importante en este momento recordar que el sistema de los números racionales tiene una propiedad que no tienen los enteros.

Para todo número racional "p", con excepción de cero, existe otro número racional "q", llamado inverso multiplicativo de "p", tal que pq = 1.

Por ejemplo, el inverso multiplicativo de $-\frac{3}{8}$, es $-\frac{8}{3}$, ya que: $-\frac{3}{8}\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{24}{24}=1$

El inverso multiplicativo de –5, es _____ porque _____.

Supongamos que sobran doce séptimas partes, de varios pasteles que se dieron en una fiesta. Si se los obsequiaron a los cuatro meseros que atendieron, ¿Cuánto pastel le toco a cada uno? _____.

Recordemos que para obtener el cociente de dos números racionales positivos, multiplicamos el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Aplicando este procedimiento para comprobar el resultado del problema anterior, tenemos:

$$\frac{12}{7} \div \frac{4}{1} = (\ )(\ ) = (\ ) = (\ )$$

Si deseamos que este mismo procedimiento se aplique a los números racionales,

entonces, para dividir $-\frac{2}{3}$ entre $\frac{1}{4}$, multiplicamos _____ por _____, para

obtener _____.

LEYES DE EXPONENTES PARA RACIONALES

Antes de iniciar esta sección puede ayudarnos recordar las siguientes deducciones:

Sí $3^2 = 9$, entonces, $3 = \sqrt{(\ )}$

Sí $2^3 = 8$, entonces, $2 = \sqrt[(\ )]{(\ )}$

En general

Sí $a^n = b$, entonces, $\_\_\_\_ = \sqrt[(\ )]{(\ )}$

En esta parte veremos el significado de las potencias con exponentes racionales; para ello definiremos los símbolos $a^{1/n}$ y $a^{m/n}$ de tal manera que las leyes se cumplan aunque algunos exponentes sean números racionales.

a) Como la ley $(a^m)^n = a^{mn}$ se debe cumplir aunque uno de los exponentes sea número racional positivo de la forma $1/n$, tendremos, por ejemplo,

$$(7^{1/2})^2 = 7^{1/2(\ )} = 7^{(\ )} = (\ )$$

Ahora pensemos, ¿a qué debe ser igual $7^{1/2}$ para que la igualdad $[\ (7)^{1/2}\ ]^2 = 7$ sea cierta?, es decir, como $(7^{1/2})^2 = 7$, entonces, $7^{1/2} = \sqrt{(\ )}$

Generalizando tendremos:

Como $(\ a^{1/n}\ )^n = a^{(\ )(\ )} = a^{(\ )} = (\ )$, *entonces* $a^{1/n} = \sqrt[(\ )]{(\ )}$

b) Como la ley $(a^m)^n = a^{mn}$ se debe cumplir aunque uno de los exponentes sea número racional positivo de la forma m/n, tendremos por ejemplo:

$$(7^{2/3})^3 = 7^{(\ )(\ )} = 7^{(\ )}$$

Ahora pensemos, ¿a qué debe ser igual $7^{2/3}$ para que al elevarse al cubo de como resultado 7^2?, es decir,

Como $(7^{2/3})^3 = 7^2$, entonces, $7^{2/3} = \sqrt[(\ )]{(\ )}$

Generalizando tendremos:

Como $(a^{m/n})^n = a^{(\ )(\ )} = a^{(\ )}$, ***entonces,*** $a^{m/n} = \sqrt[(\ )]{(\ )}$

c) Como la ley $a^m a^n = a^{m+n}$ debe cumplirse aunque los exponentes sean racionales negativos, tendremos, por ejemplo,

$7^{-2/3}\,(\,7^{2/3}\,) = (7)^{(\ )+(\ )} = 7^{(\ )} = (\quad)$ es decir:

$7^{-2/3}\,(\,7^{2/3}\,) = 1$, ***de donde*** $7^{-2/3} = \frac{1}{7^{2/3}}$

ya que $7^{-2/3}$ debe ser el inverso multiplicativo de $7^{2/3}$ pues de otra forma dicho producto no sería la unidad.

Generalizando:

Si $a^{-m/n}\ a^{m/n} = a^{(\ )+(\ )} = a^{(\ )} = (\quad)$, ***entonces*** $a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$; $a \neq 0$

Sí de una varilla de 15 m. se desean cortar 8 pedazos de igual tamaño. ¿Cómo calcular la medida de cada tramo sin usar números decimales?.

Respuesta: _____

RESPUESTA SUGERIDA:

Una forma de orientarnos para saber qué operación utilizar en este problema, sería suponer que, por ejemplo, la varilla fuera de 16 m. en lugar de 15 m., y entonces cada uno de los 8 pedazos mediría _____, y por lo tanto la operación que utilizaremos con 16 y 8 para sacar 2 como resultado es _____, lo cual sugiere que para calcular el tamaño de cada tramo con la medida inicial de la varilla utilizamos la siguiente operación:

```
   1
8 |15
  | 7
```

Al efectuar la división obtenemos como cociente _____ y como residuo _____ y por lo tanto tenemos un sobrante de 7 m.

```
   18
8 |150
  | 70
  |  6
```

Si transformamos los metros a decímetros (décimas de metro), tendremos que 15 m. equivalen a _____ dm., ya que cada metro contiene 10 dm. y al realizar la división en dm. Obtenemos como cociente _____ y residuo _____ y por lo consiguiente tenemos un sobrante de _____ dm., y entonces el residuo es menor que el anterior.

```
   187
8 |1500
  | 70
  |  60
  |   4
```

Si ahora seguimos el mismo proceso que en los párrafos anteriores pero con centímetros (centésimas de metro), tendremos que 15 m. equivalen a _____ cm., ya que cada metro contiene _____ cm. y al realizar la división en cm. Obtenemos como cociente _____ y residuo _____ cm., y como el sobrante es de _____ el residuo es menor que el anterior.

```
   1875
8 |15000
  | 70
  |  60
  |   40
  |    0
```

Al hacerlo ahora con milímetros tendrás como cociente _____ y como residuo _____. Por lo cual nos damos cuenta que la división es exacta con milímetros.

De lo anterior contesta:

1. ¿Qué operación realizaste para convertir metros a unidades menores?

   Respuesta:_____

2. ¿Qué operación realizaste para convertir unidades menores que el metro a metros?

   Respuesta: _____

3. Escribe la operación para transformar 1875 milímetros a metros

   Respuesta: _____

Dada la estructura del sistema decimal, dicha operación puede ser expresada de las siguientes formas:

$$\frac{1875}{1000} = \frac{1000+800+70+5}{1000} = \frac{1000}{1000} + \frac{800}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} = 1 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$$

La última expresión corresponde al número decimal: una unidad mas ocho décimos, mas siete centésimos, mas cinco milésimos; es decir 1.875

Si el cociente del problema inicial $15 \div 8$ lo pensamos como la fracción $\frac{15}{8}$, nos damos cuenta que 1.875 es su representación decimal. Lo cual da lugar a pensar que dividiendo el numerador entre el denominador de una fracción obtenemos su representación decimal.

También notemos que al dividir 1875 enteros entre 1000 se recorrió tres lugares a la izquierda el punto decimal.

LOS NÚMEROS DECIMALES.

Un ingeniero belga llamado Simón Stevin (1548 – 1620) introdujo la idea de las fracciones decimales (aquellas cuyo denominador es una potencia de diez) a mediados del siglo XVI[8].

Las fracciones decimales también pueden representarse con números decimales, pues notemos que los dígitos a la izquierda de un punto decimal representan los múltiplos de las unidades, las decenas, las centenas, etc., y los dígitos a la derecha los múltiplos de los décimos, los centésimos, los milésimos, etc., de manera que:

a) Sí el numerador de una fracción decimal consta de un sólo dígito, éste se anota en la posición correspondiente, a la indicada por el denominador, por ejemplo, $\frac{3}{100}$, se escribe como 0.03, ya que la segunda posición a la derecha del punto decimal representa los centésimos, anotando cero en las posiciones décimos y unidades.

b) Si el numerador de una fracción decimal consta de más de un dígito, está se transforma en la suma de otras cuyos numeradores contengan un sólo dígito, por ejemplo,

$$\frac{325}{10}=32.5, \text{ ya que: } \frac{325}{10}=\frac{300+20+5}{10}=\frac{300}{10}+\frac{20}{10}+\frac{5}{10}=$$

$$=30+2+\frac{5}{10}=3(10)+2(1)+5\left(\frac{1}{10}\right)=$$

= tres decenas + dos unidades + cinco décimos =32.5

c) Si la fracción equivale a una fracción decimal (porque su denominador se pueda expresar como potencias de 2 o de 5, o como un producto de ambas), se deberá convertir a otra cuyo denominador sea potencia de diez, por ejemplo:

$$7\frac{3}{25}-7\frac{3}{5^2}$$

$$7\frac{3}{25}=7+\frac{3}{5^2}=7+\frac{3(2^2)}{5^2(2^2)}=7+\frac{3(4)}{[5(2)]^2}=7+\frac{12}{(10)^2}=$$

$$=7+\frac{12}{100}=7+\frac{10}{100}+\frac{2}{100}=7+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}=7(1)+\frac{1}{10}+2\left(\frac{1}{100}\right)=$$

=siete unidades + un décimo + dos centésimos = 7.12

[8] Pag. 255; Peterson; "Teoría de la Aritmética" ; Editorial Limusa

Los números decimales se pueden escribir en notación desarrollada igual que como lo hacemos con los números indoarabigos, por ejemplo:

$$37.254 = 3(10)^1 + 7(10)^0 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} =$$

$$= 3(10)^1 + 7(10)^0 + 2\left(\frac{1}{10}\right) + 5\left(\frac{1}{100}\right) + 4\left(\frac{1}{1000}\right) =$$

$$= 3(10)^1 + 7(10)^0 + 2(10)^{-1} + 5(10)^{-2} + 4(10)^{-3}$$

d) Los números decimales se pueden leer ignorando el punto decimal y agregando el nombre de la posición ocupada por el último dígito de la derecha; por ejemplo, 37.254, se lee como "treinta y siete mil, doscientos cincuenta y cuatro milésimos".

Algunas veces los números decimales se escriben con uno o más ceros a la derecha de la última cifra decimal (cuando por ejemplo: restamos de 0.3, 0.125,

o sea 0.3000 – 0.125, o dividimos, 1 entre 4, es decir $4\overline{)1.00}$) en estos casos al leer el número deben incluirse los ceros, por ejemplo, 0.3 puede escribirse como 0.3000 y se lee tres mil diezmilésimos.

Completa las siguientes columnas.

FRACCIÓN DECIMAL	NOTACIÓN DECIMAL	NOTACIÓN DESARROLLADA	SE LEE
a) $\frac{9}{1000}$			
b)	0.257		
c)		$4^{(10)2} + 7^{(10)1} + 2^{(10)0} + 5(10)^{-1} + 1(10)^{-2}$	
d)			Treinta y dos mil quinientos ocho centésimos
e) $37\frac{5}{8}$			

VALORES RELATIVOS DE POTENCIAS

					$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
$(10)^3$	$(10)^2$	$(10)^1$	$(10)^0$	•	$(10)^{-1}$	$(10)^{-2}$	$(10)^{-3}$	$(10)^{-4}$
1000	100	10	1		0.1	0.01	0.001	0.0001
MILLARES	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	PUNTO DECIMAL	DECIMOS	CENTESIMOS	MILESIMOS	DIEZMILESIMOS

REGLAS DEL PUNTO DECIMAL

1. El resultado de dividir cualquier número entre 10, 100, 1000, etc. Se obtiene recorriendo el punto decimal uno, dos, tres, etc. lugares a la izquierda, por ejemplo, el resultado de dividir 1635.47 entre 1000, es _____, ya que:

$$\frac{1635.47}{1000} = \frac{1000+600+30+5+\frac{4}{10}+\frac{7}{100}}{1000} =$$

$$= \frac{1(10)^3+6(10)^2+3(\ \ )^{(\ )}+5(10)^{(\ )}+4(10)^{-1}+7(10)^{(\ )}}{10^3} =$$

$$\frac{1(10)^3}{(10)^3}+\frac{6(10)^2}{(10)^3}+\frac{3(\ \ )^{(\ )}}{(10)^3}+\frac{5(\ \ )^{(\ )}}{(\ \ )^{(\ )}}+\frac{4\,(10)^{(-1)}}{(\ \ )^{(\ )}}+\frac{7\,(\ \ )^{(\ )}}{(\ \ )^{(\ )}}$$

$$= 1+6(10)^{-1}+3(10)^{(\ )}+5(10)^{(\ )}+4(10)^{-4}+7(10)^{(\ )} = 1.63547$$

Aplicando procedimientos similares al del párrafo anterior, podremos saber como usar el punto decimal al operar con números decimales, por ejemplo:

a.- Al multiplicar 124.73 por 2.5 se obtiene _____ , pues los factores se pueden escribir como las fracciones decimales:

$\frac{12473}{100}$ y _____ , y por lo tanto su producto

12473 (2.5) como $\frac{12473}{100}(\_\_\_) = \frac{311825}{(\ \ \ \ )} = 311.825$

Lo cual confirma que para multiplicar 124.73 por 2.5, realizamos el producto de los números 124.73 por 25, y al resultado le recorremos el punto decimal 3 lugares a la izquierda, puesto que son milésimos.

b.- ¿Podrías proceder de manera similar para comprobar que el resultado de multiplicar 3.5 por 100, se obtiene recorriendo el punto dos lugares a la derecha, o sea 3.5 (100)= 350

[En caso de que el número en cuestión, no contenga suficientes cifras para recorrer el punto hacia la derecha o hacia la izquierda, se agregarán tantos ceros como se requieran, puesto que por ejemplo:

3.5 = 3.500 = 003.5, ya que:

$$3.5 = 3 + \frac{5}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000} = 0(100) + 0(10) + 3 + \frac{5}{10}$$

c.- Comprueba ahora, que el resultado de restar 1.875 de 2.5, es _____ , haciendo las conversiones y operaciones necesarias para llegar a la misma respuesta.

Completa la tabla.

1000 m.	100 m.	10 m.	m.	0.1 m.	0.01 m.	0.001 m.
			93.5		0.935	
			7.9			
500			0.5			
			86			
			0.01			
10^3 m.	$10^{(\ )}$ m.	$(\ )^{(\ )}$ m		10^{-1} m.	$10^{(\ )}$ m.	$(\ )^{(\ )}$ m

FRACCIONES NO DECIMALES.

Para distinguir las fracciones decimales de las restantes debemos tener en cuenta que el denominador de las fracciones equivalentes a ellas se puede expresar únicamente como potencia de 2, ó de 5, o bien como un producto de ambas, por ejemplo:

a) $\frac{75}{100} = \frac{3(\ )}{4(\ )} = \frac{3}{(\ )} = \frac{3}{2^{(\ )}}$

b) $\frac{7}{1000} = \frac{7}{10^{(\ )}} = \frac{7}{[2(\ )]^{(\ )}} = \frac{7}{2^{(\ )}(5)^{(\ )}}$

c) $\frac{397}{10000} = \frac{397}{10^{(\ )}} = \frac{397}{[(\ )(5)]^{(\ )}} = \frac{397}{(\ )^{(\ )}(\ )^{(\ )}}$

Escribe fracciones equivalentes a las que se proponen cuyo denominador sea únicamente potencia de 2, de 5 ó el producto de ellas

a) $\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{3}{25}$ *c)* $\frac{7}{4}$

d) $\frac{5}{8}$ $\frac{127}{125}$

Existen fracciones como $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{5}{6}$, etc. Cuyo denominador no se puede expresar como potencia de 2, de 5, ó el producto de potencias de ambos, y por lo tanto no son fracciones decimales.

Por otro lado tomemos alguna de ellas, por ejemplo $\frac{7}{6}$ y supongamos que existe una fracción decimal equivalente a ella, de modo que: $\frac{7}{6} = \frac{K}{10^n}$ de donde $(7)(10)^n = (6)(k)$,

pero esta igualdad no es posible, ya que ningún múltiplo de 6 tiene como suma de sus dígitos 7 (Observa que en todos los números de la forma $7(10)^m$, sus dígitos suman 7)

DECIMALES PERIODICOS

Para expresar una fracción no decimal como un número decimal también se divide el numerador entre el denominador, pero en este caso se continúan agregando ceros al dividendo, hasta que en el cociente resulte un periodo que se repite, por ejemplo, al dividir

13 entre 15 (notar que $\frac{13}{15}$ es una fracción no decimal porque 15=3(5) y contiene un factor que no es potencia de 2 y/o 5) obtenemos:

0.8	0.86	0.866
15;13.0	15;13.00	15;13.000
10	100	100
	10	100
		10

Es decir $\frac{13}{15} = 0.866... = 0.8\overline{6}$ la barra sobre el 6 indica que 6 se repite indefinidamente.

Utilizando el algoritmo de la división para encontrar el número decimal equivalente a una fracción cualquiera $\frac{a}{b}$ nos podemos dar cuenta que los únicos residuos posibles son: 0,1,2,3,...,b-1 (ya que el residuo debe ser menor que el divisor).

Si el residuo es cero en cualquier paso, entonces la división termina y su representación es un decimal finito.

Si el residuo no es cero en algún paso, entonces habrá b-1 residuos posibles en donde forzosamente alguno se repetirá después de b-1 pasos, lo cual se debe esencialmente a la naturaleza del propio algoritmo (bajo un cero cada vez, dividiendo siempre entre el denominador b, obteniendo un nuevo residuo) posteriormente, deberan repetirse los digitos del cociente.

Consideremos los ejemplos siguientes:

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3.5714285 \\
\hline
7 & 250000000 \\
 & 40 \\
 & 50 \\
 & 10 \\
 & 30 \\
 & 20 \\
 & 60 \\
 & 40
\end{array}
$$

Notar que:

No podíamos esperar que el residuo fuera cero, porque el divisor contiene un factor que no es potencia de 2, ni de 5 ni de ambos.

Los residuos son números entre uno y seis.

Después de seis pasos del algoritmo, el residuo 4 se repite.

Las cifras del cociente 571428 se repiten infinitamente.

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.933 \\
\hline
15 & 14.00 \\
 & 0.50 \\
 & 5
\end{array}
$$

Los residuos posibles son números entre uno y quince.

Después de dos pasos del algoritmo, el residuo 5 se repite,

La cifra 3 del cociente se repite infinitamente.

FRACCIONES EQUIVALENTES A DECIMALES.

Para obtener la fracción que corresponda a un decimal finito o a un decimal infinito periódico, procedemos como en los siguientes ejemplos.

Si consideramos que "m" es otra expresión de los números que a continuación se dan, entonces podemos escribir

1.- $m = 73.045$

Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por 1000 (para convertir el decimal a entero), y así obtener...

$1000\ m = (\quad)$ por lo que $m = (\quad)/(\quad)$

2.- $m = 0.\overline{54}$

Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por 100 (número de cifras del periodo) para obtener:

$100\ m = (\quad)$

Si ahora restamos la primera de la segunda ecuación tendremos: y por lo tanto $m = (\quad)/(\quad)$.

$$\begin{array}{r} 100\ m = 0\overline{54}.54 \\ (-)\ m = \quad \overline{0}.54 \\ \hline 99\ m = (\quad) \end{array}$$

Mediante el algoritmo de la división podemos hacer ver que $(\quad)/(\quad)$

efectivamente equivale a $0.\overline{54}$

3.- $m = 0.3\overline{125}$

Multipliquemos por 10 (para tener un decimal cuyo periodo inicie después del punto decimal)

$10\ m = 3.\overline{125}$

Enseguida procedemos como en el caso anterior, es decir, multiplicamos por 1000 la nueva expresión (número de cifras que contiene el periodo) para obtener:

$1000(10)\ m = 3125.\overline{125}$

y de ella restamos $10\ m = 3.\overline{125}$, ó sea

Y por último despejamos m para obtener:

$m = (\quad)/(\quad) = 3122 / 9990$

$$\begin{array}{r} 10000\ m = 3125.\overline{125} \\ (-)\ 10\ m = \quad \overline{3.125} \\ \hline (\quad)m = (\quad) \end{array}$$

NOTACIÓN CIENTIFICA

En el trabajo científico y tecnológico es muy común trabajar con números muy grandes o muy pequeños, lo cual ocasiona que tanto los cálculos como su interpretación sean imprácticos e inseguros.

Las potencias de base diez, proporcionan una manera sencilla y mas segura, para denotar cantidades muy grandes o muy pequeñas, a través de la llamada notación científica.

Una cantidad está escrita en notación científica, si se expresa como un producto de un número mayor o igual que uno; pero menor que diez, por una potencia de diez. Por ejemplo:

a) La temperatura interior del sol es de 13 000 000 de grados centígrados. Para escribir esta cantidad en notación científica;, colocamos el punto decimal entre uno y tres (lo cual equivale a dividir entre $10\ 000\ 000 = 10^7$) para que dicho número sea mayor que uno y menor que diez. Después multiplicamos por (10^7), para compensar el resultado de la división anterior; esto es:

$$13\ 000\ 000 = 13\ 000\ 000\ (1) = (13\ 000\ 000)\ \frac{(10)^7}{(10)^7} = \frac{13000000}{10000000}\ (10)^7 = 1.3\ (10)^7$$

(Notar que el exponente positivo, indica que el punto decimal, se debe recorrer siete lugares hacia la derecha, o sea, $1.3(10)^7 = 13\ 000\ 000$).

b) Otro ejemplo se da al representar la densidad relativa del hidrógeno; 0.00000000048 gr/cm^3.

En dicha no notación colocamos el punto decimal entre _____, y _____ (lo cual equivale a multiplicar por $10000000000=10^{10}$), para que dicho número sea mayor que 1 y menor que 10. Después dividimos entre $(10)^{10}$ para compensar el resultado de la multiplicación anterior, es decir:

$$0.00000000048=0.00000000048(1)=0.0000000048\frac{10^{10}}{10^{10}}=$$

$$0.00000000048(10)^{10}\frac{1}{(10)^{10}}=\_\_\_\_\_(10)^{-10}$$

[Notar que el exponente negativo indica que el punto decimal debe recorrerse 10 lugares a la izquierda, o sea que $4.8(10)^{-10} = 0.00000000048$]

Utilizando notación científica y leyes de exponentes se simplifican algunos cálculos, por ejemplo:

a) Si la luz recorre 300000 Km. por segundo. ¿Qué distancia recorrerá en un día?
Si un día tiene 24 horas, una hora 60 minutos y un minuto 60 segundos, entonces, un día tiene 24 (60) (60) = 24 (3600) = 86400 segundos; y por lo tanto la distancia recorrida por la luz es:

$$300000\,(86400) = 3\,(10)^5\,(8.64)\,(10)^4 =$$
$$= 3\,(8.64)\,(10)^5\,(10)^4 =$$
$$= 25.92\,(10)^9 = 259{,}200{,}000{,}00$$

b) Si 6650000 barriles generan 4000000000 KWh horas de electricidad,

¿Cuántos KWh genera cada barril?

(Cambiando los datos podemos intuir la operación adecuada para obtener la respuesta).
Supongamos que si 4 barriles generan 12 Kwh, entonces cada barril debe generar _____ Kwh. ¿Qué operación debemos realizar con 4 y 12 para obtener 3 como respuesta? _____.
O sea, que para calcular la que genera cada barril deberemos dividir los Kwh entre el número de barriles. Utilizando notación científica tendremos:

$$\frac{4000000000}{6650000} = \frac{4(10)^9}{6.65(10)^{(\ )}} = 0.60150375(10)^{(\ )} = 601.50375$$

c) Si 6,650,000 barriles generan 4000000000 KWh horas de electricidad, ¿cuántos barriles genera 1 KWh?.

Notemos que para encontrar la respuesta podemos plantear una proporción, es decir:

$\frac{6650000}{x} = \frac{4000000000}{1}$, o sea $4000000000x = 6650000$, por lo tanto:

$$x = \frac{6650000}{(\quad)} = \frac{6.65(10)^{(\ )}}{4(10)^{(\ )}} = 1.6625(10)^{(\ )} = \_\_\_\_\_$$

LOS NÚMEROS IRRACIONALES.

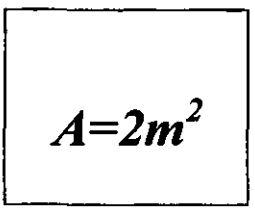
Existen números decimales infinitos sin periodo a los cuales se les llama irracionales, por ejemplo, 0. 1011011101111..., en el que se aumenta un uno en forma progresiva en cada grupo de numerales 1 que siguen después de cada numeral cero.

La manera de construir otros números irracionales es evitando periódos que se repitan una y otra vez como en el ejemplo anterior.

Hay situaciones de las que provienen números irracionales de uso más común, por ejemplo.

¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya área es $2m^2$?

L



Sea "L" el lado del cuadrado cuya área es 2.

Entonces L x L = 2, es decir $L^2 = 2$.

O sea, que tenemos que encontrar el número que

Multiplicado por si mismo de 2, es decir $L=\sqrt{2}$

Si al principio lo hacemos por tanteos, tendremos:

1(1) = 1; 2(2) = 4, de donde observamos que la respuesta se encuentra entre ___ y ___ por lo tanto buscamos la respuesta entre ellos:

1.1 (1.1) = 1.21; 1.2 (1.2) = 1.44: 1.3 (1.3) = 1.69; 1.4 (1.4) = 1.96; 1.5 (1.5) = 2.25.

Lo anterior nos indica que la respuesta se halla entre los números ____ y ____.

Ahora calculamos:
1.41 (1.41) = 1.9881; 1.42 (1.42) = 2.0164, de donde la respuesta debe estar entre los números ____ y ____; [Recordar que: 1.41, 1.9881, etc. Son números racionales que se pueden expresar también como $\frac{141}{100}$, $\frac{19881}{10000}$, etc]

Si continuamos así sucesivamente, a lo mejor $\sqrt{2}$ = L, es un número con muchas cifras decimales, o pudiera ser que se tuvieran que calcular también, una gran cantidad de estas cifras para llegar a un periodo de repetición, en caso de ser fracción no decimal; pero en ambos casos no tenemos la certeza de que suceda alguno de los dos.

Una manera de ver que $\sqrt{2}$, no es de ninguna de las dos formas, o sea número racional, es suponiendo que sí es, y dicha suposición no lleve a una contradicción; o sea que:

Supongamos que a y b son números enteros tales que, el lado del cuadrado de Area 2 es de la forma $\frac{a}{b}$

es decir $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$; o sea $\frac{a^2}{b^2} = 2$.

Como ***a y b*** son enteros, ellos se pueden expresar como un producto único de factores primos, por lo cual: $a = a_1 a_2 .... a_n$ y $b = b_1 b_2 .... b_n$, entonces: $a^2 = a^2_1 a^2_2 .... a^2_n$ y $b^2 = b^2_1 b^2_2 .... b^2_n$, por lo tanto todos los factores en ***a y b*** son primos y aparecen un par de veces tanto en a^2 como en b^2.

De lo anterior podemos deducir que; si $\frac{a^2}{b^2} = 2$, entonces:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_1^2 a_2^2 .... a_n^2}{b_1^2 b_{21}^2 .... b_n^2} = 2$$

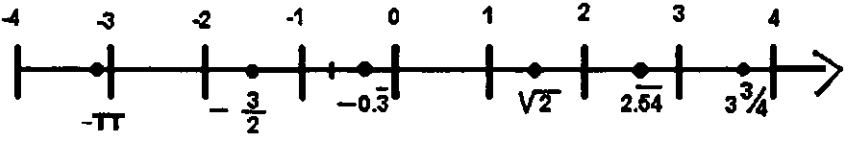
De donde, todos los b_i tendrían que cancelarse con todos los a_i, exceptuando un 2 en el numerador, o sea que para que la igualdad se cumpliera tendríamos que tener:

$$\frac{(a^2_1 a^2_2 .... a^2_n)\, 2}{b^2_1 b^2_2 .... b^2_n} = 2,$$

Pero esto no es posible, puesto que tanto el numerador como el denominador tienen un número par de primos, y para que la última igualdad se cumpla necesitamos que el numerador un número impar de primos. Por lo tanto la suposición de la que partimos debe ser falsa, puesto que nos llevo a una contradicción.

LOS NÚMEROS REALES.

Los números racionales (decimales finitos e infinitos periódicos) junto con los irracionales (decimales infinitos no periódicos) forman el conjunto de los números reales (decimales finitos e infinitos) en los cuales las operaciones se definen en términos de las operaciones sobre los números racionales de modo que todas sus propiedades se cumplan (cerradura, neutros, conmutatividad, asociatividad, inversos y distributividad) agregando además, la propiedad de compleción o completez en la cual se afirma que a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica y a cada punto en la recta le corresponde un número real.



En algunas ocasiones los cálculos se aproximan reemplazando un número irracional por un racional cercano a él, por ejemplo:

Aproximamos π con 3.14 al calcular el perímetro de un círculo cuyo radio mide 5cm. Es decir:

$$P = 2\pi D = 2(3.14)(10) = 6.28(10) = 62.8 \text{ cm.}$$

Cuando realicemos operaciones en las que intervengan expresiones irracionales, podemos aplicar las propiedades de los números reales, los procedimientos de la aritmética y las leyes de los radicales, con la finalidad de ser mas exactos y prácticos en los cálculos, por ejemplo:

La ley de los radicales $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\ \sqrt{b}$ (que se vera después de los incisos), es aplicable a los siguientes casos:

a) Para multiplicar 3 por $\sqrt{12}$, procedemos de la siguiente forma:

$$3\sqrt{12} = 3\sqrt{4(3)} = 3\sqrt{4}\ \sqrt{3} = 3(2)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

b) Para obtener la diferencia entre 3 y $\sqrt{27}$:

$$3 - \sqrt{27} = 3 - \sqrt{9(3)} = 3 - \sqrt{9}\ \sqrt{3} = 3 - 3\sqrt{3} = 3(1 - \sqrt{3})$$

b) Para calcular el valor de "h" en la ecuación $h^2+4^2=8^2$; despejamos "h", o sea:

$h^2 = 8^2 - 4^2$, de donde:

$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = \sqrt{16(3)} = \sqrt{16}\ \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

a)	Sí	$6 + 8 = 14$,	entonces	$8 = 14 - 6$
b)	Sí	$7(5) = 35$,	entonces	$7 = 35/5$
c)	Sí	$9^2 = 81$	entonces	$9 = \sqrt{81}$

Lo cual ayuda a entender las definiciones de las operaciones inversas, entre las cuales están la raíz cuadrada, cúbica, etc., de tal forma que,

a) La resta se definió al tratar de resolver ecuaciones en forma de suma, por ejemplo, $x + 7 = 12$ equivale a $x = 12-(\ )$ y entonces $x = (\ \ )$

b) Las divisiones, con aquellas ecuaciones que vienen expresadas como un producto, por ejemplo, si $3x = 18$, entonces $x = 18/(\ )$ por lo tanto $x = (\ \ )$.

c) Análogamente nos podremos dar cuenta que las raíces se definen al resolver ecuaciones en forma de potencia, por ejemplo, $x^3 = 8$ es equivalente a $x = \sqrt[3]{(\ )}$ y así x es igual a _____

Generalizando, podemos decir que para n natural, la raíz n-ésima de un número real a es otro número b que al elevarse a la n-ésima potencia da como resultado a, esto es:

$$si \quad b^n = a, \quad entonces \quad b = \sqrt[n]{a}$$

Es importante completar toda esta información aclarando que:

a) Sí n es un entero impar positivo y a es un número real cualquiera, entonces la raíz enésima de a es un número único. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{-125} = -5 \quad \text{y} \quad \sqrt[5]{32} = 2$$

b) Si n es un entero par positivo y a es un número mayor que cero, entonces existen dos raíces enésimas de a. Por ejemplo:

$\sqrt{49} = 7$ y -7 ya que $(7)^2 = 49$, y también $(-7)^2 = 49$

$\sqrt[4]{81} = 3$ y -3 ya que $(\ )^{(\ )}$, y también $(\ )^{(\ )}$

c) Si n es un entero par positivo y a es menor que cero, entonces no existe la raíz enésima de a en los números reales. Por ejemplo:

No existe la raíz cuadrada de –36, ($\sqrt{-36}$), ya que ningún número

elevado al cuadrado da –36 (todo número positivo o negativo elevado a una potencia par es positivo).

LEYES DE LOS RADICALES

Las leyes de los radicales se utilizan para cambiar expresiones algebraicas por otras equivalentes que facilitan su interpretación, su operación y uso práctico.
En ellas debe observarse que si m y n son números pares, entonces a y b deben ser positivos.

a) $\sqrt[n]{a^n} = a$

b) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

c) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

d) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Continúa y completa la siguientes expresiones; observando que los subradicales deben ser números positivos.

a)	$\sqrt{25} = 5$	ya que	$(5)^2 = 25$
b)	$\sqrt[3]{64} = 4$	ya que	$(4)^3 = 64$
c)	$\sqrt[(\ )]{k^4} = (\ )$	ya que	$(k)^4 = k^4$
d)	$\sqrt[(\ )]{(\ )} = (\ )$	ya que	$(k)^n = k^n$
e)	$\sqrt[3]{7^6} = 7^2$	ya que	$(7^2)^3 = 7^6$
f)	$\sqrt{9^8} = 9^{(\ )}$	ya que	$(9^4)^2 = 9^{(\ )}$
g)	$\sqrt[(\ )]{k^{12}} = (\ )^{(\ )}$	ya que	$(k^3)^4 = (\ )^{(\ )}$
h)	$\sqrt[(\ )]{(\ )^{(\ )}} = (\ )^{(\ )}$	ya que	$(k^m)^n = (\ )^{(\ )}$

i) $\sqrt{3} = 3^{1/2}$ ya que $\left(3^{1/2}\right)^2 = 3$

j) $(\sqrt[\ ]{5} = 5^{(\ )}$ ya que $\left(5^{1/3}\right)^3 = 5$

k) $(\sqrt[\ ]{k} = (\ )^{(\ )}$ ya que $\left(k^{1/4}\right)^4 = k$

l) $(\sqrt[\ ]{(\ )} = (\ )^{1/n}$ ya que $\left(k^{1/n}\right)^n = (\ )$

m) $\sqrt[3]{7^2} = 7^{2/3}$ ya que $\left(7^{2/3}\right)^3 = 7^2$

n) $(\sqrt[\ ]{(\ )^{\ }} = (\ )^{(\ )}$ ya que $\left(3^{4/5}\right)^5 = 3^4$

o) $\sqrt{k^{(\ )}} = (\ )^{(\ )}$ ya que $\left(k^{3/m}\right)^m = (\ )^{(\ )}$

p) $(\sqrt[\ ]{(\ )^{(\ )}} = (\ )^{(\ )}$ ya que $\left(k^{n/m}\right)^m = (\ )^{(\ )}$

(Recordar que las raíces pares de números negativos no tienen solución en los números reales).

Lo visto antes nos indica que se pueden sustituir los radicales por exponentes racionales, por lo tanto, las operaciones con radicales pueden efectuarse utilizando las leyes de los exponentes, con **a** y **b** enteros positivos.

NOTACIÓN CON EXPONENTES RACIONALES	NOTACIÓN CON RADICALES Y EXPONENTES ENTEROS	EJEMPLOS

1. La emésima (m) potencia de la raíz de índice n de un número es igual a la raíz de índice n de la emésima (m) potencia de dicho número.

$$\left(a^{1/n}\right)^m = \left(a^m\right)^{1/n} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = \sqrt[3]{(125)^2}$$

2. El producto de las raíces de índice n de dos números, es igual a la raíz de índice n del producto de dichos números.

$$\left((a)^{1/n}(b)^{1/n}\right) = (ab)^{1/n} \qquad \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8(27)}$$

3. El cociente de las raíces de índice n de dos números, es igual a la raíz de índice n del cociente de dichos números.

$$\frac{a^{(\ )}}{(\ )^{(\ )}} = \left[\frac{a}{(\ )}\right]^{1/n} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = (\ )\sqrt[\ ]{\frac{(\ )}{(\ )}}$$

$$b \neq 0$$

4.- La raíz de índice n de la raíz de índice m de un número, es igual a la raíz de índice m n de dicho número.

$$\left[a^{1/m}\right]^{1/n} = a^{1/(\ )} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64}$$

5.- La raíz de índice n de la enésima potencia de un número positivo, es igual a dicho número.

$$\left(a^n\right)^{1/n} = a \qquad \sqrt[n]{a^n} = a \qquad \sqrt[4]{7^4} = \pm 7$$

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZÓN

Si una máquina "A" teje 3 camisetas cada 5 minutos y otra máquina "B" teje 5 camisetas cada 8 minutos, ¿cuál de ellas es más rápida?.

Respuesta: _____

Tu respuesta puedes verificarla analizando y completando los siguientes procedimientos:

1 Una forma de llegar al resultado sería calculando el número de camisetas que pueden tejer ambas máquinas en 40 minutos (notar que 40 es múltiplo común de 5 y 8).

Máquina "A"		**Máquina "B"**	
No. de camisetas	Tiempo	No. de camisetas	Tiempo
3	5	5	8
6	10	10	
9		15	
12			
	25		

2.- Otra forma de llegar a la solución es suponer el mismo problema pero con datos que faciliten la respuesta, por ejemplo.

Si una máquina teje 12 camisetas cada 4 minutos, posiblemente se nos ocurra pensar que en cada minuto dicha máquina debe tejer _____ camisetas y entonces la operación que utilizamos con 12 y 4 para tener la respuesta es una _____.

Ahora calculemos el rendimiento de ambas máquinas por minuto para saber cuál es más rápida.

La máquina _____ es más rápida que la máquina _____, ya que su rendimiento es de _____camisetas por minuto, mientras que el de _____, es de _____ camisetas por minuto.

De esta forma podemos decir:

Que sí la máquina "A" teje 3 camisetas cada 5 minutos, entonces el rendimiento de la máquina "A" es el cociente $\frac{3}{5}$, que se lee "3" a "5".

También se dice que el rendimiento, en este caso, es la razón del número de camisetas hechas por la máquina entre el tiempo que tarda en hacerlas.

Como observamos, existen situaciones dentro de las cuales se relacionan dos cantidades, y cuya representación se hace por medio de pares ordenados de números, (el orden entre los números que forman una razón es importante), ya que, por ejemplo, no es la misma situación:

3 kilos de naranja por $5.00, que 5 kilos de naranja por $3.00 de donde $\frac{3}{5}$ es diferente de $\frac{5}{3}$.

De esta forma vemos que: al cociente de dos números cualesquiera $^{m}/_{n}$, con $n \neq 0$ se le llama razón de m, a n

Completa las siguientes afirmaciones:

a) Si la velocidad es la razón de la distancia recorrida por un automóvil entre el tiempo que tardó en recorre tal distancia, entonces la velocidad de un auto que recorre 250 km. en 2 hrs. es: _____

b) Si la escala de un mapa es la razón de una longitud cualquiera del mapa entre la correspondiente longitud del terreno. La escala de un mapa en el que cada centímetro representa 1000 centímetros es: _____.

c) Si el porcentaje de bateo es la razón del número de hits por cada cien veces al bat entonces, ¿cuál es el porcentaje de bateo de un beisbolista que bateó 12 hits en 25 veces al bat?. _____

Si la razón de número de niños al de niñas es de 5 a 3, entonces:

d) Si hubiera 30 niños, ¿cuántas niñas habría?

e) Si hubiera 8 niños más que niñas, ¿cuántas niñas habría?

f) Si hubiera un total de 56 entre niñas y niños, ¿cuantos niños habría?

PROPORCIONES

En un problema determinado, diferentes situaciones pueden describir la misma razón, por ejemplo:

3 kilos de naranja por \$5.00 se representa con la razón $\frac{3}{5} = 0.6$ y:

6 kilos de naranja por \$10.00 se representa con la razón _____ = _____, de donde nos damos cuenta que las razones son _____.

Esta igualdad recibe el nombre de proporción.

De esta forma vemos que: la igualdad de dos razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, con b y d diferentes de cero forman una proporción

El criterio para determinar cuando dos razones efectivamente forman una proporción es el mismo que para determinar cuando dos números racionales son equivalentes, o sea que

Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces ad = bc y recíprocamente, por ejemplo.

Un automóvil recorre 14 km. con 1 litro de gasolina, y 28 km. con 2 litros de gasolina, de donde

$$\frac{14}{1} = \frac{28}{2}$$, ya que 14(2)=1(28)

El propósito de establecer una proporción en un problema dado, es conocer uno de sus cuatro componentes a partir de tres que se conocen utilizando el criterio de igualdad de dos razones, por ejemplo:

Si tenemos la proporción $\frac{a}{7} = \frac{3}{21}$, a se puede calcular aplicando el criterio de igualdad de los productos cruzados, es decir:

Sí $\frac{a}{7} = \frac{3}{21}$, entonces 21a=3(7), donde $a = \frac{3(7)}{21} = \frac{21}{21} = 1$

PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

Si un automóvil recorrió 42 km. con 3 litros de gasolina, ¿cuánta gasolina necesitará para recorrer 126 km.?

Respuesta: _____

Tu solución la puedes comprobar analizando los siguientes procedimientos:

1.- Una forma de llegar al resultado en este caso podría ser trazando una tabla de variación en la que se registraran las magnitudes relacionadas hasta llegar al resultado.

Kilómetros recorridos	Litros de gasolina
42	3
84	
168	
	9

2.- Analizando la tabla contestamos las preguntas:

a) Sí aumentamos el número de kilómetros recorridos, ¿qué pasa con la cantidad de gasolina?
b) ¿Qué nos indica menor consumo de gasolina?
c) ¿Cómo son las razones que se pueden formar entre los kilómetros recorridos y los litros de gasolina utilizados en cada caso?

Por lo anterior podemos suponer que todas las razones que se puedan formar así son iguales y por lo tanto para contestar la pregunta del problema planteamos la proporción:

$$\frac{42}{3} = \frac{136}{x}$$ (se lee: 42 es a 3, como 126 es a x)

En la cual se cumple:
$42x=3(126)$ de donde $x = \frac{3(126)}{42} = \frac{378}{42} = 9$

En este caso decimos que la distancia recorrida por el automóvil es directamente proporcional al consumo de litros de gasolina.

En problemas cuyas situaciones sean análogas a la descrita, se dice que existe proporcionalidad directa.

Ejemplo:

Supongamos que en una región hay 7 enfermos de SIDA por cada 10000 habitantes. Si se supone que el número de enfermos es directamente proporcional al número de habitantes, entonces ¿cuántos enfermos de SIDA tendrá una parte de la región que tiene 3500 habitantes?.

Tomando en cuenta que el número de enfermos es directamente proporcional al número de habitantes y que eso equivale a decir que la razón que existe entre el número de enfermos y el número de habitantes es siempre la misma, entonces para contestar la pregunta podemos plantear la proporción: $\frac{7}{10000} = \frac{x}{3500}$, en la cual se cumple

$7(3500) = 10000x$, y por lo tanto $\frac{7(3500)}{10000} = x$, o sea $2.4500 = x$

PROPORCIONALIDAD INVERSA.

Si una máquina teje 30 camisetas en 80 minutos, ¿cuánto tiempo se tardarán en tejer las 30 camisetas 8 máquinas de igual eficiencia?

Respuesta: _____

Tu solución la puedes comprobar analizando los siguientes procedimientos:

1. Una forma de llegar al resultado sería trazando una tabla de variación en la cual se registran las magnitudes que se relacionan (en este caso el tiempo con respecto al número de máquinas empleadas) hasta llegar al resultado deseado en este caso.

Número de máquinas	Tiempo empleado
1	80
2	_____
4	_____
8	_____

2. Analizando la tabla podemos observar que: Al aumentar el número de máquinas, el tiempo empleado _____, o bien que para aumentar la producción y disminuir el tiempo tendremos que _____ el número de máquinas.

   Todos los productos 1(80), 2(40), 4( ), 8( ), etc. son _____.

   Por lo cual podemos establecer igualdades como las siguientes:

   1(80) = 2(40) ó 1(80) = 4(20), etc.

   Y de éstas podemos obtener las proporciones:

   $\frac{1}{2} = \frac{(\ )}{80}$ *ó* $\frac{1}{4} = \frac{(\ )}{(\ )}$, *etc.*

   En las cuales podemos notar que la razón $\frac{(\ )}{80}$, es la inversa de la razón $\frac{80}{(\ )}$ y que también la razón $\frac{20}{80}$ es la inversa de la razón $\frac{(\ )}{(\ )}$, etc.

Por lo anterior podemos suponer que todas las razones que se puedan formar así, son iguales y por lo tanto para contestar la pregunta del problema planteamos la proporción:

$\frac{1}{8}=\frac{x}{80}$, de donde 8x=1(80), y entonces $x=\frac{80}{8}=10$

En este caso decimos que el tiempo varia en forma inversamente proporcional al número de máquinas empleadas.

En problemas cuyas situaciones sean análogas a la descrita con anterioridad se dice que existe proporcionalidad inversa

Ejemplo:

Si un automóvil va de una ciudad a otra a una velocidad constante de 90 km./h y tarda 3 hrs. en llegar, ¿cuánto tiempo tardará si la velocidad empleada es de 120 km./hrs.?, y suponiendo que el tiempo que emplea el automóvil en recorrer una distancia es inversamente proporcional a su velocidad, cuando la distancia es constante.

Tomando en cuenta que los enunciados:

"El tiempo empleado por un automóvil en recorrer una distancia constante es inversamente proporcional a la velocidad empleada" y "La razón que existe entre los tiempos empleados es igual a la razón inversa entre las velocidades utilizadas" son equivalentes, entonces para contestar la pregunta podemos platear la proporción

$\frac{3}{x}=\frac{120}{90}$, donde 3(90)=120x, y por lo tanto $\frac{3(90)}{120}=x$, o sea que $\frac{270}{120}=x$, es decir

2.25=x

Ejemplos.

Resolver cada uno de los siguientes problemas, investigando primero el tipo de proporción de la que se trata (directa o inversa).

1. Si 24 puertas desalojan un estadio de fut-bol en 8 minutos, ¿cuántas puertas de igual tamaño serán necesarias para desalojar en 5 minutos, suponiendo que el número de personas en el estadio permanece constante?.

   Solución.- Si duplicamos el número de puertas de 24 a 48, entonces el tiempo para desalojar el estadio será _____, o bien, si disminuimos a la mitad el número de puertas, entonces el tiempo de desalojo es _____.

La construcción de la siguiente tabla podría ayudar a verificar el tipo de proporción de que trata el problema:

Número de puertas	Tiempo de desalojo
24	_____
48	_____
12	_____

De la tabla observamos que:

a) Aumentando el número de puertas _____ el tiempo.

b) Los productos 24(8), 48( ), 12( ), ..., escritos en cada renglón son _____.

c) Las razones: $\frac{24}{48}$ y $\frac{4}{8}$ así como $\frac{24}{12}$ y $\frac{16}{8}$; ó como $\frac{48}{12}$ y $\frac{16}{4}$, etc.

son iguales (notemos que las razones escritas en segundo término de cada pareja están invertidas según aparecen en la tabla, por ejemplo, $\frac{4}{8}$, está en la tabla como $\frac{8}{4}$).

Por lo antes expuesto podemos suponer que se trata de proporcionalidad inversa y entonces para contestar la pregunta, planteamos la proporción:

$\frac{24}{x}=\frac{5}{8}$ de donde 5x=8(24), y entonces $x=\frac{8(24)}{5}=\frac{192}{5}=38.4$

2. Sí el banco paga el 22%[8] de interés anual, ¿cuánto le pagará a una persona que depositó $2500 durante un año?.

Solución.- Sí el banco paga la cantidad de _____ por depositar durante un año _____ entonces para que el banco pague bajo esas mismas condiciones $44.00 (el doble de $22.00) un cliente deberá depositar _____ y para que pague también con las mismas condiciones $11.00 (la mitad de $22.00) el cliente depositará _____.

[8] 22% significa la razón 22/100 (las razones cuyo denominador es 100 se llaman porcentajes).

Completemos la tabla siguiente

Intereses ganados	Depósitos (inversión)
____	100
44	____
11	____

De la tabla podemos observar que:

a) Para duplicar los pagos, los depósitos deberán _____ también.
b) Para disminuir los pagos, los depósitos deberán _____ también.
c) Las razones que se forman: $\frac{22}{44}$ y $\frac{100}{(\ )}$, $\frac{44}{11}$ y $\frac{200}{(\ )}$, ó $\frac{22}{44}$ y $\frac{(\ )}{50}$, son iguales

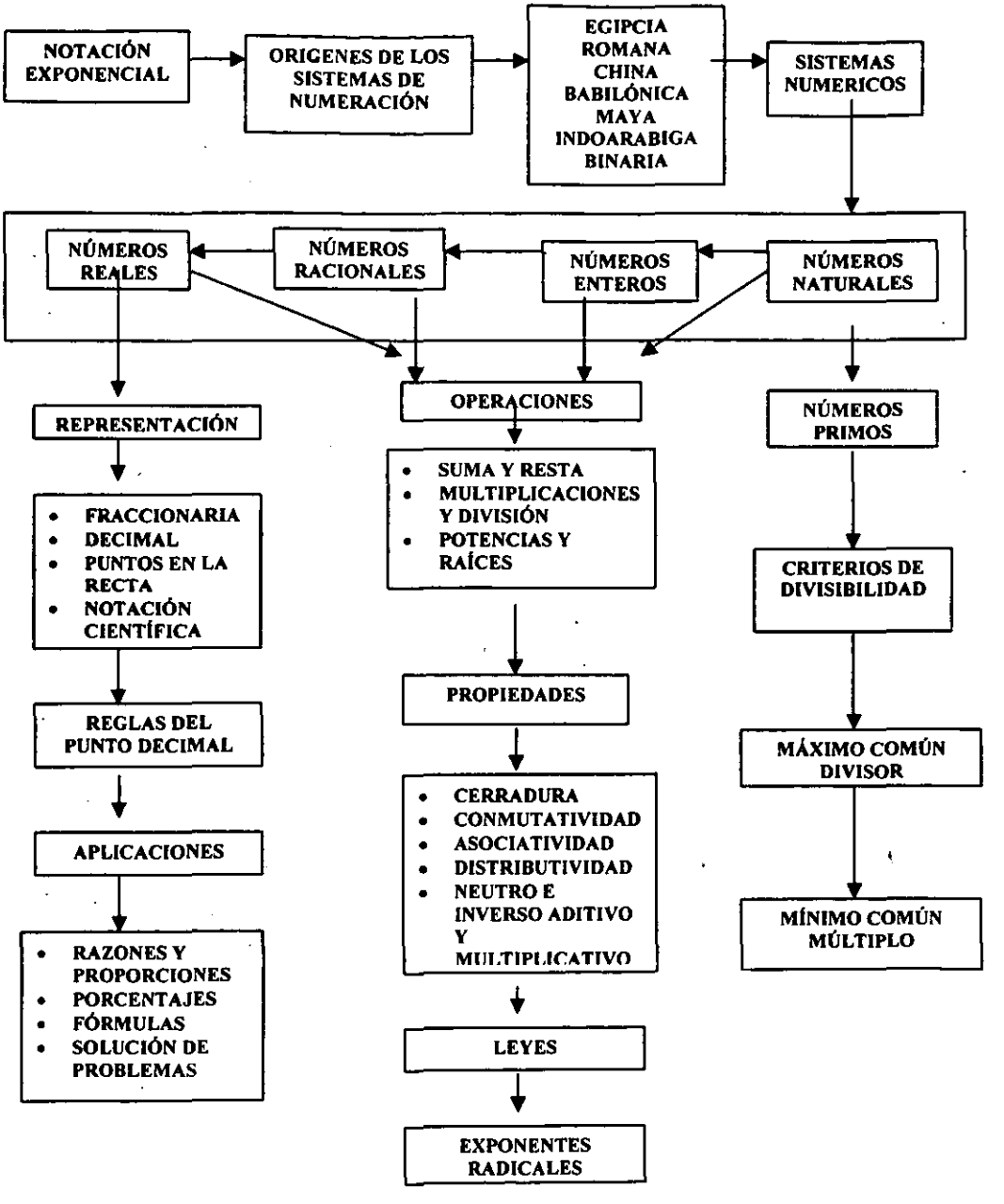
Por lo anterior podemos suponer que todas las razones que se formen de igual forma son iguales y por lo tanto para contestar la pregunta planteamos la proporción directa (dado que se han expuesto sus condiciones):

$$\frac{22}{x}=\frac{100}{2500} \text{ de donde, } 100x = 2500(22), \text{ por lo tanto } x=\frac{2500(22)}{100}=\frac{55000}{100}=550$$

EJERCICIOS.- Resolver usando proporciones.

1. Sí 3 de cada 8 árboles plantados en una región dan frutos. ¿Qué porcentaje de ellos dan frutos?
2. Sí por el consumo de $15m^3$ de agua se paga $8.50, y si el costo del agua es directamente proporcional al consumo de la misma, ¿cuánto se pagará por un consumo de $120m^3$?.
3. Un padre heredó a dos hijos dos terrenos rectangulares de igual superficie, si uno de los terrenos mide 12m de frente por 30m de fondo y el otro mide 15m de frente, ¿cuánto mide de fondo?
4. Sí un depósito de agua tarda 3 hrs. en llenarse con 4 llaves que proporcionan la misma cantidad de agua por hora, ¿cuántas llaves deberemos emplear para llenar el depósito en 0.5hrs.?. Suponiendo que el tiempo que tarda en llenarse el depósito es inversamente proporcional al número de llaves empleadas.
5. Un día de clases asistió el 85% de los alumnos inscritos en un grupo. Sí había 25 alumnos ese día, ¿de cuántos alumnos se compone el grupo?

RECAPITULACIÓN DEL CAPITULO III

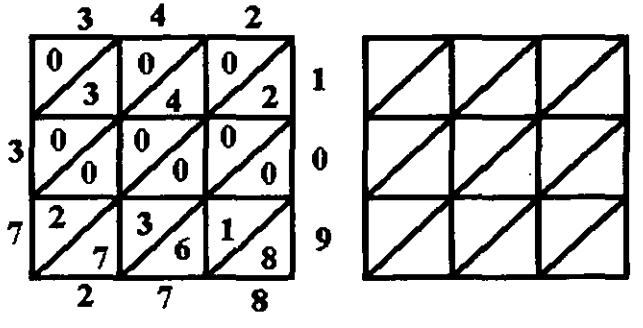


ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Los siguientes problemas te permitirán aplicar los conocimientos estudiados.

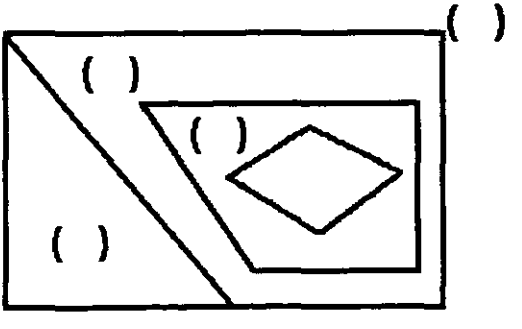
1.- El cuadrado de la izquierda muestra el procedimiento que utilizaban los árabes del siglo IX para multiplicar 342 por 109 y así obtener como resultado 37278.

Utiliza el mismo procedimiento en el cuadrado de la derecha para multiplica 125 por 207.



2.- Las figuras del diagrama siguiente indican las relaciones que guardan entre sí los diferentes conjuntos que componen los números reales N(Naturales), Z(Enteros), Q(Racionales). Q' (Irracionales) y R(Reales).

Coloca en los paréntesis vacíos la letra inicial del conjunto que corresponda a la figura geométrica que lo representa.



3.- Anota una "X" en la casilla de la tabla que corresponde al conjunto o conjuntos a los que pertenece cada uno de los números de la primera columna.

	N	Z	Q	Q'	R
$\sqrt{2}$					
$-\frac{3}{4}$					
1.5					
$\mathbf{1.\overline{25}}$					
-3					
0					
π					
1					
$\frac{3}{4}$					

4.- Completa y escribe para cada caso la propiedad que indica.

a) $3 + (\quad) = 3$ _____

b) $(\quad) + [4 + 6] = [5 + (\quad)] + 6$ _____

c) $a[(\quad)c] = a[(\quad)b]$ _____

d) $m(\quad) = m$ _____

e) $[100 - 2](\quad) = [100][57] - (\quad)[57]$ _____

5.- Realiza todas las operaciones hasta obtener un resultado.

a) $7 - \{ 2 - [- 6 - 3 (2 - 5)] - 9 \} + 4$

b) $$\frac{\frac{3}{8} - \frac{5}{10}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right]}{-\frac{3}{5}\left[\frac{5}{6} - 1\right]}$$

c) $$\frac{2 (10)^{6} \quad [3 (10)^{-3}]}{4 (10)^{-3} \; [6 (10)^{-7}]}$$

d) $- | - 1\ 1/2 + 1.4 |$

e) $- | [(- 0.2)^{2}]^{3} |$

6.- Encontrar los números racionales "perdidos" (que no aparecen) en la siguiente expresión.

$$0.5 (- 2 + 1\ 1/4 - \square) = 1/2 (-2/1 + \square - 2/3) = -2/2 + 5/\square - \square =$$

$$= \frac{- \square + 15 - \square}{24} = \frac{- \square + 15}{24} = \frac{- \square}{\square} =$$

7.- Utiliza los conocimientos estudiados para llegar a las respuestas correctas de cada uno de los siguientes problemas.

a) Dos muchachos trabajan 8 horas y ganan $20.00 en total si uno de ellos gana 20 centavos más por hora que el otro. ¿Cuánto gana cada uno?.

b) Si un niño cuenta sus canicas de dos en dos, le sobra una, de tres en tres le sobran dos, de cuatro en cuatro le sobran tres, de cinco en cinco le sobran cuatro y de seis en seis le sobran cinco. ¿Cuántas canicas tiene el niño si son menos de cien?.

c) Si la sal de mesa contiene 2/5 partes de sodio y si una persona consume 3/4 gramos de sal. ¿Cuánto sodio ingiere con esa cantidad de sal?.

d) En un grupo sabemos que existen 7 alumnas por cada 12 alumnos, si hubiera un total de 57 entre alumnas y alumnos. ¿Cuántos de cada uno habría?.

e) En una tienda hay tres tipos de latas de champiñones con igual calidad y siguientes características

250 gr	$44.50
115 gr	$25.07
112 gr	$24.92

¿ Cuál es la mejor oferta ?

8.- Resuelve los siguientes problemas:

a) Si el aire contiene 20% de oxígeno, ¿Cuántos litros de aire contendrán dos litros de oxígeno?.

b) La fuerza con que se atraen dos cuerpos de un kilogramo de peso, y cuyos centros de gravedad distan un metro es $6.67/10^{11}$ newtons. Expresa este número en notación decimal.

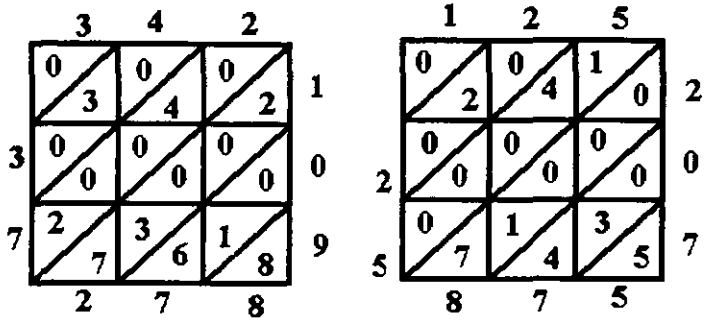
c) Dos automóviles se someten a prueba en un autódromo. Uno de ellos da una vuelta cada 90 segundo y el otro lo hace cada 100 segundos. Si parten juntos. ¿En qué tiempo el automóvil más rápido habrá dado una vuelta más que el otro?.

d) Una familia de 7 personas agota sus víveres en 15 días. Si llegaron 3 parientes de visita, ¿En cuántos días se agotaran los víveres, suponiendo que todas las personas consumen la misma cantidad de comida diariamente?.

ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

Los siguientes problemas te permitirán aplicar a situaciones concretas los aprendizajes logrado

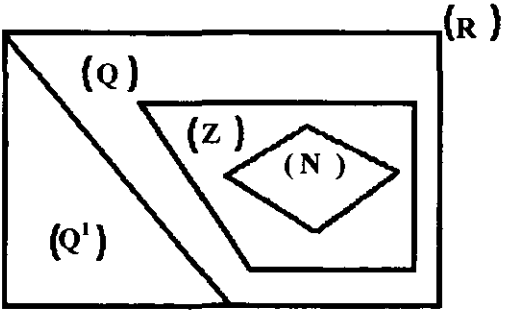
1.- El cuadrado de la izquierda muestra el procedimiento que utilizaban los árabes del siglo IX para multiplicar 342 por 109 y así obtener como resultado 37278.



Utiliza el mismo procedimiento en el cuadrado de la derecha para multiplicar 125 por 207.

2.- Las figuras del diagrama siguiente indican las relaciones que guardan entre sí los diferentes conjuntos que componen los números reales N(Naturales), Z(Enteros), Q(Racionales). Q' (Irracionales) y R(Reales).

Coloca en los paréntesis vacíos la letra inicial del conjunto que corresponda a la figura geométrica que lo representa.



3.- Anota una "X" en la casilla de la tabla que corresponde al conjunto o conjuntos a los que pertenece cada uno de los números de la primera columna.

	N	Z	Q	Q'	R
$\sqrt{2}$				X	X
$-\frac{3}{4}$			X		X
1.5			X		X
$1.\overline{25}$			X		X
-3		X	X		X
0		X	X		X
π				X	X
1	X	X	X		X
$\frac{3}{4}$			X		X

4.- Completa y escribe para cada caso la propiedad que indica.

a) $3 + (\ 0\ ) = 3$ **Neutro aditivo**

b) $(\ 5\ ) + [4 + 6\ ] = [\ 5 + (\ )\ ] + 6$ **Asociatividad de la suma**

c) $a\ [(\ b\ )\ c\ ] = a\ [\ (\ c\ )\ b\ ]$ **Conmutativa de la Multiplicación**

d) $m\ (\ 1\ ) = m$ **Neutro multiplicativo**

e) $[\ 100 - 2\ ]\ (\ 57\ ) = [\ 100\ ]\ [\ 57\ ] - (\ 2\ )\ [\ 57\ ]$ **Distributiva**

5.- Realiza todas las operaciones hasta obtener un resultado.

a) $7 - \{ 2 - [- 6 - 3 (2 - 5)] - 9 \} + 4$

b) $$\frac{\frac{3}{8} - \frac{5}{10}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right]}{-\frac{3}{5}\left[\frac{5}{6} - 1\right]} = \frac{\frac{3}{8} - \frac{10}{30} + \frac{5}{20} - \frac{10}{10}}{-\frac{15}{30} + \frac{3}{5}} = \frac{\frac{3}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{1}}{-\frac{1}{2} + \frac{3}{5}} = \frac{\frac{9-8+6-24}{24}}{\frac{5+6}{10}} = \frac{\frac{15-32}{24}}{\frac{1}{10}} =$$

$$= \frac{-\frac{14}{24}}{\frac{1}{10}} = -\frac{170}{24} = -\frac{85}{12} = -7\frac{1}{12}$$

c) $$\frac{2(10)^6 \quad [3(10)^{-3}]}{4(10)^{-3} \quad [6(10)^{-7}]} = \frac{6(10)^3}{24(10)^{-10}} = 0.25(10)^{13} = 2500000000000$$

d) $- | - 1\ 1/2 + 1.4 | = -|-1.5 + 1.4| = -|-0.1| = -01.$

e) $- | [(- 0.2)^2]^3 | = -\left|[-0.2]^6\right| = -|0.00064| = -0.00064$

6.- Encontrar los números racionales "perdidos" (que no aparecen) en la siguiente expresión.

$0.5 (- 2 + 1\ 1/4 - \boxed{2/3}) = 1/2 (-2/1 + \boxed{5/4} - 2/3) = -2/2 + \boxed{5/8} - \boxed{2/6} =$

$$= \frac{-\boxed{24} + 15 - \boxed{8}}{24} = \frac{\boxed{-32} + 15}{24} = \boxed{-17/24}$$

7.- Utiliza los procedimientos aritméticos estudiados para llegar a las respuestas correctas de cada uno de los siguientes problemas.

a) Dos muchachos trabajan 8 horas y ganan $20.00 en total, si uno de ellos gana 20 centavos más por hora que el otro. ¿Cuánto gana cada uno?.

R: 10.80
9.20

b) Si un niño cuenta sus canicas de dos en dos, le sobra una, de tres en tres le sobran dos, de cuatro en cuatro le sobran tres, de cinco en cinco le sobran cuatro y de seis en seis le sobran cinco. ¿Cuántas canicas tiene el niño si son menos de cien?.

R: 59

c) Si la sal de mesa contiene 2/5 partes de sodio y si una persona consume 3/4 gramos de sal. ¿Cuánto sodio ingiere con esa cantidad de sal?.

R: 3/10 = .3

d) En un grupo sabemos que existen 7 alumnas por cada 12 alumnos, si hubiera un total de 57 entre alumnas y alumnos. ¿Cuántos de cada uno habría?.

R: 21 Y 36

e) En una tienda hay tres tipos de latas de champiñones con igual calidad y siguientes características

250 gr	$44.50
115 gr	$25.07
112 gr	$24.92

¿ Cuál es la mejor oferta ?

R: La Primera

8.- Resuelve los siguientes problemas:

a) Si el aire contiene 20% de oxígeno, ¿Cuántos litros de aire contendrán dos litros de oxígeno?.

R: 102

b) La fuerza con que se atraen dos cuerpos de un kilogramo de peso, y cuyos centros de gravedad distan un metro es $6.67/10^{11}$ newtons. Expresa este número en notación decimal.

R: 0.000000000067

c) Dos automóviles se someten a prueba en un autódromo. Uno de ellos da una vuelta cada 90 segundo y el otro lo hace cada 100 segundos. Si parten juntos. ¿En que tiempo el automóvil más rápido habrá dado una vuelta más que el otro?.

R: 900 segundos

d) Una familia de 7 personas agota sus víveres en 15 días. Si llegaron 3 parientes de visita, ¿En cuanto días se agotaran los víveres, suponiendo que todas las personas consumen la misma cantidad de comida diariamente?.

R: 10.5 días

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN.

Con la intención de profundizar en la mayor parte de los contenidos en este material te recomiendo consultar el libro:

"Matemáticas Contemporaneas".
Segunda Edición
Jack R. Briton/Ignacio Bello
Editorial Harla, México.

Con la finalidad de enriquecer lo aprendido al ser generalizado a otros conocimientos, te sugiero los siguientes libros:

* "Cosmos"
Carl Sagan
Editorial Planeta.

*"El hombre que calculaba"
Malbatahan
Editorial Limusa.

*"Más de 45 desafios y otros Juegos"
Revista Muy Interesante
No. 7

La relación entre los conocimientos aprendidos y la ciencia y la tecnología son muy estrechos, para darte cuenta de ello visita:

* El pasaje del Metro la Raza.
* El Museo de la Comisión Federal del Eléctricidad de Chapultepec.
* El Museo del Niño, Tercera Sección de Chapultepec.
* El Museo de las Ciencias "Universum" en Ciudad Universitaria.

BIBLIOGRAFÍA PARA EL ALUMNO

- Jack R. Briton, Bello Ignacio (1982). Matemáticas Contemporáneas. México, Harla Segunda Edición.

- Eichols, Robert E., Merrill E. Shanks (1969). Matemáticass I. Impreso en los Estados Unidos de América, Fondo Educativo Internacional.

- Lovaglia, Merritt A. Elmore (1972). Álgebra. Harla, primera edición en Español.

-Santiago Valiente, Santiag Rubio (1993). El hombre y las Matemáticas I. México, Editorial Patria, S.A. de C.V.

-Odgers, López Alejandro (1975). Los Números Enteros. Anuies, Primera Edición.

- Acevedo, Valdez (1996). Aritmética y Álgebra. Mc. Graw-Hill, Interamericana Editores, S.A. de C.V., Primera Edición.

- Barnett y Nolasco (1986). Álgebra Elemental, Estructura y Aplicaciones. México, Mc. Graw-Hill, Segunda Edición.

- Cárdenas, Curiel y Lluis(1985. Matemáticas I,II y III. México, Continental.

- Polya, Geoge (1986). Enseñanza por medio de problemas. Traducción, Cesar Cristóbal E. (Artículo).

-Malba Tahan (1986). El hombre que calculaba. México, Limusa.

IV CONTEXTO MATEMÁTICO

Los conceptos y procedimientos que se utilizan en el trabajo en los capítulos anteriores, giran alrededor de algunos fundamentos de sistemas numéricos* , una estructura axiomática coherente, un vocabulario y simbología específicos, así como de proposiciones, algunas de las cuales requieren demostración con la finalidad de que el estudiante pueda valerse de él para fundar en una base segura su preparación para estudios mas avanzados de Matemáticas**.

A fin de esclarecer la idea descrita en el párrafo anterior y como un complemento al estudio de los números naturales y enteros, a continuación analizaremos algunas de las propiedades relativas al tema de la divisibilidad y cuyo estudio formal pertenece a una rama de las matemáticas llamada "Teoría de los Números".

* Niven y Zuckerman. Introducción a la Teoría de los Números. México, 1969. Editorial Limusa-Wiley, S.A. pp. 10.

** A.Adrian Albert. Algebra Superior, México, 1961. Editorial Hispano Americana.

DIVISIBILIDAD. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN.

Definición 1. Sean a y b enteros, con $b \neq 0$.
Se dice que b divide a a, si existe c entero tal que $a = bc$, en cuyo caso, también se dice que a es múltiplo de b y también de c.
Se acostumbra la notación $b|a$

A partir de esta definición se pueden ilustrar los métodos de demostración matemática con las propiedades elementales de divisibilidad, algunas de las cuales ya fueron tratadas a grosso modo en los temas ya enunciados en el capítulo anterior.

TEOREMA 1.- Demostrar los siguientes enunciados.

a) si $a \neq 0$, entonces $a \mid a$

Dado que $a \neq 0$

Existe el neutro multiplicativo uno tal que $a(1) = a$ de donde $a \mid a$

b) Si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$ (transitividad).

Como $a \mid b$ y $b \mid c$, existen q y r tales que $b = aq$ y $c = br$ por la propiedad asociativa tenemos $c = br = (aq)r = a(qr)$, de donde $a \mid c$.

c) Si $a \mid b$ y c es un entero, entonces $a \mid bc$.

Como $a \mid b$, existe q tal que $b = aq$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por c y teniendo en cuenta la propiedad asociativa de la multiplicación, tenemos $bc = aqc = a(qc)$, de donde $a \mid bc$.

d) Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b+c)$.

Sabemos que $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces existe q y r tales que $b = aq$ y $c = ar$.

Sumando estas igualdades y teniendo en cuenta la propiedad distributiva obtenemos:
$b + c = aq + ar = a(q + r)$, de donde $a \mid (b + c)$.

e)Si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = \pm b$.

Sabemos que $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces existen enteros q y r tales que $b = aq$ y $a = br$ de cuyas igualdades y transitividad tenemos $b = aq = brq$, ahora dividiendo entre b resulta $1 = rq$ de donde $r = q = \pm 1$, ya que los únicos enteros cuyo producto es uno, son 1 y -1.

f)

De manera similar se pueden demostrar:

g) Si a es un entero diferente de cero, entonces, $a \mid 0$
h) Si a es entero, entonces es divisible entre 1, -1, a y -a.
i) Las siguientes expresiones son equivalentes:

$a \mid b$; $-a \mid b$; $a \mid -b$; $-a \mid -b$.

COMBINACIÓN LINEAL.

Un concepto de suma importancia que se usará más adelante es el de combinación lineal de dos o más enteros, el cual enunciamos a continuación.

Definición 2. Si a, b, s y t son enteros, la suma as + bt se llama combinación lineal de a y b, y también de s y t.

Como una consecuencia de las propiedades c) y d) obtenemos el siguiente:

TEOREMA 2. Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces a divide a cualquier combinación lineal de b y c.

Como $a \mid b$ y $a \mid c$
Entonces por c) $a \mid br$, y $a \mid cs$, con r y s enteros de d) se sigue que $a \mid (br + cs)$.

TEOREMA 3.

Si $a \mid b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$

Sabemos que $a \mid b$ ---------- (1)
Por definición existe q entero tal que b = aq. Multiplicando ambos miembros por -1 (propiedad de la igualdad) y asociando, tenemos las siguientes consecuencias:

- $-b = a(-q)$, lo que implica que $a \mid -b$ ---------- (2)
  De (1) y (2) se sigue $a \mid |b|$ ---------- (3)
- $-b = -aq$, lo que implica que $-a \mid -b$ ---------- (4)
- Multiplicando ambos miembros de la igualdad en (2) por -1 tendremos

  $b = -a(-q)$, lo que implica que $-a \mid b$ ---------- (5)

- De (4) y (5) se sigue $-a \mid |b|$ ---------- (6)
- De (3) y (6) se sigue $|a| \mid |b|$ ---------- (7)
- Por definición de (7), existe q entero positivo tal que $|b| = |a|q$, de donde:

  Si $q = 1$, entonces $|b| = |a|$ y
  Si $q \neq 1$, entonces $q = h + 1$ con $h > 0$
  Por lo cual $|b| = |a|q = |a|(h+1) = |a|h + |a|$
  Lo que implica que $|a| \leq |b|$.

PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN

El principio del buen orden de los números naturales se emplea con mucha frecuencia en Matemáticas; más adelante notarás su presencia en algunas partes de este trabajo, es por eso que a continuación lo describimos.

Todo conjunto no vacío de números naturales contiene un elemento mínimo

Notar por ejemplo que:

a) "Uno", es el elemento mínimo en el conjunto, $F=\{1,2,3,4,6,12\}$ (Factores naturales del número 12 }.

b) No existe un elemento mínimo para el conjunto, M = $\{\ldots -3, -2, -1, \}$ (Los números enteros menores que cero)

c) No hay ningún número racional mínimo que esté entre cero y uno.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR.

Definición 3. Si a, b y c son enteros tales que $a \mid b$ y $a \mid c$, se dice que a es divisor común de b y c.

Puesto que cualquier entero diferente de cero tiene un número finito de divisores (entre los cuales está el uno) también es finito y no vacío el número de divisores comunes de b y c, excepto si $b = c = 0$ por lo tanto existe el máximo común divisor de ellos.

Definición 4. Si por lo menos uno de b y c no es, cero, se define su máximo común divisor como el mayor entero positivo que es divisor de ellos y se designa con la notación (b,c).

Supongamos que a y b son números enteros diferentes de cero y si además $b \mid a$, entonces el conjunto de divisores de b coinciden con los de a y b, y como el máximo divisor de b es b, ello implica que el máximo de los divisores comunes de a y b es b, es decir:

Teorema 4.- Si $b \mid a$, entonces $(a,b) = b$

Si $b \mid a$, entonces b es divisor común de a y b y además es el máximo , ya que el máximo divisor de b es el mismo b, por lo tanto $b = (a,b)$

Teorema 5.- Si $b \neq 0$ y $a = qb + r$, entonces los divisores comunes de a y b coinciden con los divisores comunes de b y r y por lo tanto $(a,b) = (b,r)$.

Haremos ver que el conjunto de divisores comunes de a y b coincide con el conjunto de divisores comunes de b y r, de donde también habrá coincidencia entre (a,b) y (b,r).

Todo divisor de a y b, es divisor de b y r.
Supongamos que $h \mid a$ y $h \mid b$, entonces por definición existe q_1 y q_2 enteros tales que

$a = hq_1$ y $b = hq_2$ de donde
$r = a - qb = (hq_1) - q(hq_2) = h(q_1 - qq_2)$
lo cual implica que $h \mid r$.

Recíprocamente.

Todo divisor b y r es divisor de a y b

Supongamos que $h \mid b$ y $h \mid r$, entonces por definición existen q_1 y q_2 enteros tales que

$b = hq_1$ y $r = hq_2$ de donde
$a = qb + r = q(hq_1) + h(q_2) = h(qq_1 + q_2)$

lo cual implica que $h \mid a$.

El proceso del algoritmo de la división nos permite encontrar todos los divisores de un número dado, algo semejante sucede con el procedimiento de Euclides para calcular el máximo común divisor (M.C.D.) de dos números lo que describimos a continuación.

$(a, b) = b$ si $b \mid a$

En caso contrario

$(a, b) = (b, r) = (r, r')$, si $r' \mid r$, donde $b = q'r + r'$ con $0 \leq r' < r$.

Continuando de esta forma tendremos una sucesión decreciente de residuos positivos que terminará a lo sumo en $|b|$ pasos y por lo tanto el último residuo diferente de cero será el MCD de a y b.

Teorema 6.- Si a, b son números naturales y d=as+bt es la combinación lineal positiva miníma de a y b, entonces d=(a,b)

Haremos ver que d es divisor común de a y b y además que d es el máximo de ellos.

Supongamos que $d = as + bt$ es la mínima combinación lineal positiva de a y b

Dividiendo a entre d obtenemos
$a = dq + r$ con $0 \leq r < d$
de donde $a - dq = r$ ----------(1)

Sustituyendo $d = as + bt$ en (1), tendremos $a-(as+bt)q = a - aqs - btq = a(1-qs)-b(tq) = r$

De donde r resulta ser combinación lineal de a y b, pero supongamos que $r \neq 0$, entonces de la desigualdad se deduce que $r < d$, lo cual es absurdo ya que se había supuesto a d como la mínima combinación lineal de a y b, de donde $r = 0$.

Por lo tanto $a = dq$, lo cual implica que $d \mid a$.

En forma análoga se puede hacer ver que $d \mid b$.

Con lo cual se prueba que d es divisor común de a y b.

Para probar que d es el máximo de los divisores comunes supongamos que si f es otro divisor común de a y b entonces por definición existen q' q" enteros tales que:

$a = fq'$ y $b = fq"$

De donde y como $d = as + bt$, obtenemos $d = fq's + fq"t = f(q's + q"t)$, por lo cual $f \mid d$ y entonces $f \leq d$
Lo que implica que d es el M.C.D.

Procedemos ahora a la inversa probando que si d = (a,b), entonces [d=as+bt] es la mínima combinación lineal positiva de a y b, para esto haremos ver que cualquier otra combinación lineal positiva d' de a y b es mayor que d.

Supongamos que d' = as' + bt' es cualquier combinación lineal positiva de a y b.

Como d = (a,b), entonces $d \mid a$, y $d \mid b$ y entonces d divide a cualquier combinación lineal, en particular $d \mid (as' + bt')$, de donde $d \mid d'$, por lo cual $d \leq d'$, y por lo tanto d es la mínima combinación lineal positiva de a y b.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Para obtener o llegar al concepto de múltiplo recordemos la definición de divisibilidad.

Sean a y b enteros con $b \neq 0$.

Se dice que b divide a a, si existe c entero tal que a = bc, en cuyo caso también se dice que a es múltiplo de b y también de c, por lo cual podemos decir que el concepto de divisibilidad equivale al de múltiplo, esto es:

Un número entero a es múltiplo de otro $b \neq 0$, si existe c entero tal que a = bc, es decir, a es múltiplo de b si $b \mid a$.

Sean b y c, dos enteros diferentes de cero, entonces $|bc|$ es múltiplo común de b y c para cualesquiera valores b y c, ya que:

- Si $b > 0$ y $c > 0$ existen ellos mismo tales que $bc = |bc|$.
- Si $b < 0$ y $c > 0$ existe -c tal que $-b(-c) = bc = |bc|$
- Si $b < 0$ y $c < 0$ existen ellos mismo tales que $-b(-c) = bc = |bc|$
- Si $b > 0$ y $c < 0$ existe -b tal que $-b(-c) = bc = |bc|$

De lo anterior se sigue que el conjunto de múltiplos comunes positivos de dos enteros cualesquiera diferentes de cero no es vacío y por lo tanto es bien ordenado, lo cual implica que posee un elemento mínimo.

Definición 5.- Al menor de los múltiplos comunes de dos números enteros b y c diferentes de cero se le llama mínimo común múltiplo (M.C.M.) y se denota como [b,c]

Teorema 7.- Si a y b son números enteros y si además, c es otro entero tal que es múltiplo de ellos, entonces también será múltiplo de [a,b].

Supongamos que c es múltiplo de a y de b por lo tanto $a \mid c$ y $b \mid c$.
Si aplicamos el algoritmo de la división a los números c y [a,b], tendremos:

$$c = [a,b]q + r \text{ con } 0 \leq r < [a,b]$$

En donde nos damos cuenta que como $a \mid c$, entonces:

$$a \mid ([a,b]q + r) \text{ por lo cual } a \mid [a,b] \text{ y } a \mid r$$

De igual forma se puede hacer con b para inferir que $b \mid r$.

De donde r es múltiplo común de a y b.

Si ahora suponemos que $r \neq 0$, entonces $r < [a,b]$, lo cual no es posible ya que [a,b] es el M.C.M. y entonces r debe ser igual a cero, con lo cual tendríamos $c = [a,b]q$ lo que implica que c es múltiplo de [a,b].

Teorema 8.- Si a y b son números enteros diferentes de cero, entonces

$$[a,b] = \frac{|a.b|}{(a,b)}$$

Comenzamos la demostración haciendo ver que: $[a,b] \mid \frac{|a.b|}{(a,b)}$

$$\frac{|a.b|}{(a,b)} = \frac{|a||b|}{(a,b)} = \frac{|a|}{(a,b)} |b| = |a| \frac{|b|}{(a,b)}$$

De donde $\frac{|a.b|}{(a,b)}$ es múltiplo de a y de b.

Por lo tanto, es múltiplo común de a y de b, y como todo multiplo común es múltiplo de [a,b], entonces:

$$[a,b] \mid \frac{|ab|}{(a,b)} \quad -----(1)$$

Inversamente se probará que: $\frac{|ab|}{(a,b)} \mid [a,b]$

Como (a,b) es la mínima combinación lineal positiva de a y de b, entonces:
(a,b) = as + bt, de donde $1 = \frac{as}{(a,b)} + \frac{bt}{(a,b)}$
Si ahora se multiplica por [a,b], se tendrá

$$[a,b] = \frac{a}{(a,b)}[a,b]s + \frac{b}{(a,b)}[a,b]t$$

Pero como [a, b] es múltiplo de a y de b, entonces [a,b] = aa′ y [a, b] = bb′, sustituyendo:

$$[a,b] = \frac{a}{(a,b)} b\,b's + \frac{b}{(a,b)} a\,a't$$

Por lo tanto:

$$[a,b] = \frac{ab}{(a,b)} b's + \frac{ab}{(a,b)} a't = \frac{ab}{(a,b)} [b's + a't]$$

De donde $\frac{ab}{(a,b)} \mid [a, b]$ ---------(2)

de (1) y (2), se sigue: $[a,b] = \frac{|ab|}{(a,b)}$

BIBLIOGRAFÍA.

Niven y Zuckerman. Introducción a la Teoría de los Números. México, 1969. Editorial Limusa Wiley, S.A.

A. Adrian Albert. Álgebra Superior. México, 1951. Editorial Hispano Americana.

Cárdenas, Lluis, Raggi, Tomas. Álgebra Superior. México, 1973. Editorial Trillas.

Enzo R. Gentile. Aritmética Elemental. Segunda Edición. Vinculos Matemáticos No. 210. Facultad de Ciencias, UNAM, 1996.

Andertrey, Rosa María. Notas de un curso de Álgebra. Tesis 1986. Facultad de Ciencias.

CONCLUSIONES.

ALCANCES Y LIMITACIONES.

De acuerdo con las características principales de los alumnos, profesores y materiales de apoyo descritos anteriormente, se tiene confianza en que esta propuesta puede ser valiosa dado que se elaboró de acuerdo a las orientaciones para la práctica docente del modelo educativo del Colegio de Bachilleres, el cual concibe al estudiante como un constructor de su conocimiento y al profesor como un facilitador del mismo..

En este sentido se pretende por una parte, que el estudiante con base en su experiencia sobre el conocimiento y manejo de las operaciones fundamentales, conozca el origen y la necesidad de utilizar los diferentes sistemas numéricos que componen los números reales, las relaciones que guardan entre sí, sus clasificaciones, conceptos, definiciones y vocabulario específico, así como desarrollar la habilidad para resolver problemas, y la muestra de una actitud positiva, y de interés hacia el estudio de las matemáticas.

Por la otra, que el profesor con base en su experiencia, sobre el conocimiento de la asignatura y la práctica docente facilite el acceso al contenido, supervisando reforzando con analogías, pistas y otros ejemplos; organizando equipos, haciendo participar a los alumnos; retroalimentando, resaltando conclusiones para integrar contenidos y enriquecer el material con otros ejercicios de preferencia interdisciplinarios.

La utilidad de este trabajo dependerá mucho de la disponibilidad y recursos que tengan tanto alumnos como profesores.

HACIA UNA AUTOCRÍTICA.

Por la naturaleza del trabajo y el afán de desarrollar con precisión los temas centrales del contenido debo considerar que la contextualización histórica en que los ubicamos es somera.

Algunos concepto de relativa importancia no se trataron con mayor énfasis y profundidad porque a pesar de que en el programa del Colegio de Bachilleres no se prevee el estudio de algunos de ellos, considero de acuerdo con la experiencia que el tiempo disponible para lo previsto es insuficiente y por lo tanto la mayor parte de la práctica educativa se le dedica al dominio de los conocimientos y habilidades más esenciales y significativos.

Probar la validez de ésta o cualquier otra propuesta requiere la puesta en práctica de la misma y una investigación sobre sus efectos, pero lo anterior está fuera del objetivo de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA.

1. Robert E. Eichole, (1969). "Matemáticas I". Fondo Educativo Interamericano, S.A.

2. Lecturas de Apoyo, (1993). "Matemáticas I-A", complilación de M.E.M, Patricia Balderas Cañas VACP y P-CCH UNAM Colegio de Bachilleres.

3. Cárdenas Curiel Lluis, (1985). "Matemáticas I, II, III". México, Cia. Editorial Continental, S. A. de C. V.

4. Barnett, (1983) "Álgebra y trigonometría". México, Mc Graw-Hill de México, S.A. de C. V.

5. Santiago Valiente Barderas, (1993). "El Hombre y las Matemáticas I". México, Patria, S.A. de C.V.

6. Mariano Perero, (1994), "Historia e Historia de las Matemáticas. México, Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

7. Dirk Jan Struik, (1986). "Historia Consisa de las Matemáticas". México, Instituto Politécnico Nacional.

8. J.Rey Pastor, (1951). "Historia de las Matemáticas". Buenos Aires, Editora Espasa Calpe Argentina S. A.

9. Marcel Boll, (1979). "Historia de las Matemáticas". México, Edit. Diana, S. A.

10. Polya George, (1986). "Enseñanza por medio de problemas". Traducción: Cesar Cristóbal E. (Artículo).

11. Juan D. Godines, (1993). "Hacia una teoría de la didáctica de la Matemáticas". Universidad de Granada.

12. Marin Méndez, D. E., (1982). Uusubel y el Aprendizaje significativo en el salón de clases". Tesis de Lic. Fac. de Psicología UNAM, México.

13. José Bleger P. 63-72. "Temas de Psicología". Artículo, C.B.

14. Rafael Santoyo S. "Algunas Reflexiones Sobre la Coordinación de los Grupos de Aprendizaje". Artículo, C.B.

15. Notas para el curso. "La Construcción del Conocimiento en el Ámbito Escolar". 1994 C.B. Dirección de Planeación Académica (1993). "Orientaciones para la Evaluación del Aprendizaje" C.B.

16. Dirección de Planeación Académica 1993. "Orientaciones para la Evaluación del Aprendizaje". C.B.

17. Dirección de Planeación Académica. "Técnicas, Instrumentos y Reactivos para la Evaluación del Aprendizaje". C.B.

18. S. Shulman. "Perpectivas Hacerca de la Psicología del Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas". Artículo, C.E.

19. Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta, (1993). "Material de Apoyo para la Elaboración de Fascículos". C.B.

20. Dirección de Planeación Académica. "Técnicas Instrumentos y Reactivos para la Evaluación del Aprendizaje". C.B.

21. Dirección de Planeación Académica, (1995). "Hábilidades Básicas a Ejercitar y/o Desarrollar en el Programa de Matemáticas I". C.B.

22. Colegio de Bachilleres, (1995). "Decreto de Creación y Estatuto General". México, 34p.

23. Colegio de Bachilleres, (1993). "Modelo Educativo del Colegio de Bachilleres". México, 52p.

24. Colegio de Bachilleres, (1992). "Programa de la Asignatura de Matemáticas I". México, 45p.

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS PARA EL MANEJO DE LA PROPUESTA.

El estudio de este material puede hacerse de manera individual o por equipos de tres a cinco alumnos, apoyados por algunos textos de los sugeridos en la bibliografía, una buena calculadora y la asesoría de un profesor, quien organizará, supervisará y evaluará no sólo las actividades para la construcción del conocimiento, y del mismo material propuesto, sino del aprendizaje de los alumnos para que a partir de ello pueda retroalimentarlos, haciéndoles notar la información importante, enriqueciendo y mejorando el resto de los aspectos que intervienen en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje.