

14



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“SIMULACIÓN DEL LLENADO DE  
MOLDES DE INYECCIÓN DE PLÁSTICO”

300301

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO MECÁNICO  
P R E S E N T A :  
UBALDO GUILLERMO ROJAS PILONI



DIRECTOR: M. EN I. MIGUEL ANGEL CRUZ MORALES  
MÉXICO, D.F.

2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTOS

Durante el siglo XV, en una pequeña aldea cercana a Nuremberg, vivía una familia con 18 niños. Para poder poner pan en la mesa para tal prole, el Padre, y jefe de la familia, trabajaba casi 18 horas diarias en las minas de oro y en cualquier otra cosa que se presentara. A pesar de las condiciones tan pobres en que vivían, dos de los hijos de Albrecht Durer tenían un sueño. Ambos querían desarrollar su talento para el arte, pero bien sabían que su padre jamás podría enviar a ninguno de ellos a estudiar a la Academia.

Después de muchas noches de conversaciones calladas entre los dos, llegaron a un acuerdo. Lanzarían al aire una moneda. El perdedor trabajaría en las minas para pagar los estudios al que ganara. Al terminar sus estudios, el ganador pagaría entonces los estudios al que quedara en casa, con las ventas de sus obras, o como fuera necesario.

Lanzaron al aire la moneda un domingo al salir de la Iglesia. Albrecht Durer ganó y se fue a estudiar a Nuremberg. Albert comenzó entonces el peligroso trabajo en las minas, donde permaneció por los próximos cuatro años para sufragar los estudios de su hermano, que desde el primer momento fue toda una sensación en la Academia.

Los grabados de Albrecht, sus tallados y sus oleos llegaron a ser mucho mejores que los de muchos de sus profesores, y para el momento de su graduación, ya había comenzado a ganar considerables sumas con las ventas de su arte.

Cuando el joven artista regresó a su aldea, la familia Durer se reunió para una cena festiva en su honor. Al finalizar la memorable velada, Albrecht se puso de pie en su lugar de honor en la mesa, y propuso un brindis por su hermano querido, que tanto se había sacrificado para hacer sus estudios una realidad. Sus palabras finales fueron: "Y ahora, Albert, hermano mío, es tu turno. Ahora puedes ir tu a Nuremberg a perseguir tus sueños, que yo me haré cargo de ti." Todos los ojos se volvieron llenos de expectativa hacia el rincón de la mesa que ocupaba Albert, quien tenía el rostro empapado en lagrimas y movía de lado a lado la cabeza mientras murmuraba una y otra vez "no... no...no..." Finalmente, Albert se puso de pie y seco sus lagrimas. Miro por un momento a cada uno de aquellos seres queridos y se dirigió luego a su hermano, y poniendo su mano en la mejilla de aquel, le dijo suavemente: "No hermano, no puedo ir a Nuremberg. Es muy tarde para mí. Mira... mira lo que cuatro años de trabajo en las minas han hecho a mis manos! Cada hueso de mis manos se ha roto al menos una vez y últimamente la artritis en mi mano derecha ha avanzado tanto que hasta me costo trabajo levantar la copa durante tu brindis... mucho menos podría trabajar con delicadas líneas el compás o el pergamino y no podría manejar la pluma ni el pincel. No, hermano... para mí ya es tarde..."

Mas de 450 años han pasado desde ese día. Hoy en día los grabados, oleos, acuarelas, tallas y demás obras de Albrecht Durer pueden ser vistos en museos alrededor de todo el mundo.

Pero seguramente usted, como la mayoría de las personas, solo recuerde uno. Un día, para rendir homenaje al sacrificio de su hermano Albert, Albrecht Durer dibujó las manos maltratadas de su hermano, con las palmas unidas y los dedos apuntando al cielo. Llamo a esta poderosa obra simplemente "Manos", pero el mundo entero abrió de inmediato su corazón a su obra de arte y se le cambio el nombre a la obra por el de "Manos que oran".

La próxima vez que veas una copia de esa creación, obsérvala bien. Permite que sirva de recordatorio, si es que lo necesitas, de que nadie, pero nadie, nunca, triunfa solo!



Quiero agradecer a todos los profesores desde el principio y hasta el final de mi formación académica, ya que con su enseñanza y colaboración me enseñaron que el entender del estudio no solamente es una necesidad, si no también un privilegio y don que dignifica y enorgullece; saber que muy pocos han alcanzado la perfección en todas estas cualidades, pero ser, sin la ambición de alcanzar la meta reconociendo que esta ambición solo es otra forma de codiciar, de tener. En especial, quiero agradecer a Miguel Ángel, director de este trabajo, por todas sus enseñanzas y consejos, por que más que un asesor, es un amigo. Gracias por todo Miguel.

Este trabajo esta dedicado a:

Mis hermanos, Ramón, Lourdes, Valeria, Fabiola y Lizeth, por su amor y su comprensión.

Muy especialmente a mi mamá y mi papá, una acción vale más que mil palabras, gracias por todo lo que me han dado.

Los quiere mucho, Ubaldo.

# **Simulación del Llenado de Moldes de Inyección de Plástico**

## **Índice**

Prólogo.....	1
Capítulo 1 Plásticos y Fluidos.....	3
1.1. Clasificación del plástico.....	4
1.1.1. Definición de polímero.....	4
1.1.2. Termoplásticos.....	4
1.1.3. Termofijos.....	5
1.1.4. Polímeros cristalinos, amorfos y de cristal líquido.....	5
1.1.5. Copolímeros, aleaciones y elastómeros.....	6
1.1.6. Aditivos, refuerzos y cargas.....	7
1.2. Ciclo de inyección.....	7
1.2.1. Fase de llenado.....	8
1.2.2. Fase de empacamiento.....	9
1.2.3. Fase de enfriamiento.....	9
1.3. Reología.....	9
1.4. Tipos de fluidos.....	10
1.4.1. Conceptos generales.....	10
1.4.2. Definición de fluido.....	12
1.4.3. Clasificación de los fluidos.....	12
1.5. Modelos de viscosidad.....	16
1.5.1. Modelo de potencias.....	17
1.5.2. Modelo de segundo orden.....	17
1.5.3. Modelo de matriz de datos.....	18
1.5.4. Modelo de Ellis.....	18
1.5.5. Modelo de Carreau.....	18
1.5.6. Modelo de Cross.....	18
Capítulo 2 Modelo Matemático de la Fase de Llenado de la Cavidad.....	19
2.1. Introducción.....	20
2.2. Consideraciones del material.....	20
2.2.1. Compresibilidad de la masa fundida.....	20
2.2.2. Modelo del fluido.....	21
2.2.3. Propiedades térmicas de la masa fundida.....	21
2.2.4. Ecuaciones resultantes.....	22
2.3. Consideraciones geométricas.....	22
2.3.1. Análisis dimensional.....	22
2.3.2. Ecuación de continuidad para la cavidad.....	24
2.3.3. Ecuaciones del momentum para la cavidad.....	25
2.3.4. Ecuación de energía para la cavidad.....	28
2.3.5. Ecuaciones resultantes.....	29
2.4. Análisis matemático.....	30
2.4.1. Integración de las ecuaciones de momentum.....	30
2.4.2. Integración de la ecuación de continuidad.....	35
2.5. Simetría del flujo.....	36

Capítulo 3 Modelo Matemático de la Fase de Llenado de los Canales.....	39
3.1 Introducción.....	40
3.2 Consideraciones del material.....	40
3.3 Consideraciones geométricas.....	40
3.3.1 Análisis dimensional.....	40
3.3.2 Ecuación de continuidad para los canales.....	41
3.3.3 Ecuaciones del momentum para los canales.....	42
3.3.4 Ecuación de energía para los canales.....	43
3.3.5 Ecuaciones resultantes.....	44
3.4 Análisis matemático.....	45
3.4.1 Integración de la ecuación del momentum.....	45
3.4.2 Integración de la ecuación de continuidad.....	48
Capítulo 4 Métodos de Solución.....	50
4.1 Introducción.....	51
4.2 Ecuaciones resultantes.....	51
4.3 Condiciones de frontera.....	52
4.4 Etapas para la solución de los modelos matemáticos.....	53
4.5 Moldflow.....	54
4.5.1 Preprocesamiento.....	54
4.5.2 Análisis.....	55
4.5.3 Postprocesamiento.....	55
Capítulo 5 Casos de Estudio.....	57
5.1 Introducción.....	58
5.2 Caso 1. Selección de material.....	58
5.3 Caso 2 Corrección de puntos de inyección.....	62
Conclusiones.....	71
Referencias.....	73

## Nomenclatura

A	=	área
C <sub>p</sub>	=	capacidad térmica específica a presión constante
F	=	fuerza
g	=	tensor fuerzas de cuerpo
h	=	altura
k	=	conductividad térmica
P	=	presión
t	=	tiempo
T	=	temperatura
u	=	desplazamiento
v	=	velocidad
v	=	vector velocidad
β	=	coeficiente de expansión térmica
η	=	viscosidad
η <sub>a</sub>	=	viscosidad aparente
ρ	=	densidad
τ	=	esfuerzo cortante
σ	=	tensor esfuerzo total
γ	=	deformación de cortante
γ̇	=	rapidez de cortante
γ̇	=	tensor rapidez de deformación
∇	=	operación gradiente de una función

## Prólogo

La historia del plástico se remonta a 1862, cuando en la Gran Feria Internacional de Londres, Alexander Parkes mostró su descubrimiento de un material orgánico derivado de la celulosa, que sometido al calor podía ser moldeado de múltiples formas y, una vez enfriado, mantenía la estructura que se le había dado. Parkes mostró que este nuevo material, tenía todas las propiedades del caucho, a más bajo costo. Su aventura, que en ese entonces fue conocida como la Parkesina, no resistió la realidad de la producción industrial debido al alto costo de las materias primas necesarias para producirla. En ese primer paso hacia el plástico.

El polietileno fue obtenido accidentalmente por los estudios a alta presión del etileno que Michaels realizó en Amsterdam. Para 1935, en Inglaterra, los químicos e ingenieros Faucett, Paton, Perrin y Williams polimerizaron etileno utilizando altas presiones y altas temperaturas. Entre 1952 y 1953, el químico alemán Karl Ziegler desarrolló un procedimiento de polimerización de etileno sin presión, recurriendo a catalizadores de alquil-aluminio y otros similares. En 1954 el italiano Giulio Natta, siguiendo los trabajos elaborados por Ziegler, desarrolló un catalizador estereoespecífico con el que era posible obtener polipropileno a bajas presiones y temperaturas. En la actualidad, son los dos plásticos más utilizados. En 1963, estos dos científicos compartieron el Premio Nobel de Química por sus estudios acerca de los polímeros. Es así como se da la carrera por los plásticos.

Con el propósito de reducir los tiempos de manufactura y producción, se establece la necesidad de realizar simulaciones en todos los ámbitos de la manufactura, con el fin de disminuir costos. Durante la década de los 70, la tendencia cambió bruscamente, debido al creciente número de investigaciones en procesos, avances en técnicas de simulación numérica y la disminución del tamaño e incremento de velocidad de las computadoras.

Los simuladores matemáticos fueron desarrollados de tal manera que incluían procesos de inyección, inyección de vapor y combustión. La investigación durante este periodo resultó en avances significativos en lo que respecta a la caracterización de la física del plástico. Aunque el primer simulador comercial de flujo se da en 1975, no es sino hasta 1978 que se lanza al mercado el primer software de análisis de flujo. Desde entonces, se han desarrollado técnicas y modelos matemáticos que permiten, cada vez más, describir el movimiento del flujo del plástico.

Los simuladores de inyección de plástico se pueden clasificar, principalmente, en dos tipos: plano medio y 3D. El simulador de plano medio está enfocado a piezas con espesores pequeños, mientras que en el simulador 3D se puede simular piezas de cualquier espesor. La ventaja que ofrece el simulador de plano medio con respecto al 3D, es un proceso más rápido y la mayoría de los productos de plástico son de espesores pequeños, por lo que el simulador 3D se utiliza con poca frecuencia. Este trabajo tiene como objetivo principal el conocer la base teórica de los programas de computadoras para la simulación del proceso de inyección de plástico y beneficios que proporciona el uso de este tipo de sistemas.

A través de la tesis se expone el ciclo de inyección del plástico y las clasificaciones de los fluidos, para enfocar las fases que tiene el ciclo de inyección, y en que clasificación de fluido están los plásticos fundidos.

Entendido esto, se desarrollan los modelos matemáticos que describen el comportamiento del plástico dentro de la cavidad y dentro del sistema de canales en la fase de llenado, el cual persigue el entendimiento de ventajas y limitaciones que se tienen al desarrollar este tipo de sistemas.

Se plantean los pasos para dar solución a los modelos matemáticos obtenidos, así como también los pasos para realizar el análisis de flujo teniendo un sistema de este tipo, y poder interpretar los resultados obtenidos de estos sistemas.

Se llevan a la práctica las investigaciones hechas anteriormente (obtención de modelos matemáticos y solución, e interpretación de los resultados obtenidos) en dos casos de estudio. También se dan a conocer las bondades que se obtienen este tipo de sistemas.

# CAPÍTULO 1

# Plásticos y Fluidos

## Capítulo 1. - Plásticos y Fluidos.

### 1.1. – Clasificación del plástico

#### 1.1.1. - Definición de polímero

Un polímero, es una sustancia cuyas moléculas forman cadenas largas de unidades repetitivas, de varios millares de átomos de longitud. Los polímeros, difieren uno del otro por su naturaleza química y física de sus unidades repetitivas en las cadenas. Estas unidades contienen varias combinaciones de oxígeno, hidrógeno, nitrógeno, carbono, silicón, cloro, flúor y azufre. Cuanto mayor sea la cantidad de unidades repetitivas en la cadena, mayor será el peso molecular del polímero.

La clasificación de los polímeros puede ser muy extensa y confusa, sin embargo, dos grandes grupos pueden ser identificados: los termofijos y termoplásticos. Por su estructura, los polímeros pueden ser clasificados en cristalinos, amorfos y cristal líquido. Otra clasificación es la de homopolímeros, copolímeros, aleaciones y elastómeros.

#### 1.1.2. - Termoplásticos

Los termoplásticos son resinas las cuales se ablandan al contacto con al calor y se endurecen con el frío. La temperatura de ablandamiento varía de acuerdo al tipo del polímero y calidad. Debido a su sensibilidad ante el calor, debe tenerse precaución para evitar su degradación, descomposición, o encender el material. El nylon, acrílico, acetal, poliestireno, cloruro del polivinilo, polietileno, y el acetato celuloso son ejemplos de polímeros termoplásticos.

La mayoría de las cadenas moleculares de los termoplásticos se asemejan a cordones independientes, entrelazados que parecen fideos. La figura 1.1 representa como se encuentran enlazadas las cadenas de los termoplásticos.



Figura 1.1. – Cadena molecular de un termoplástico

El calentamiento de los termoplásticos provoca el deslizamiento entre las moléculas, causando el flujo del plástico. Esta es la razón por la cual los termoplásticos pueden ser inyectados. Cuando se enfrían, se reafirma una vez más las cadenas de átomos y moléculas. Si se vuelve a calentar, las moléculas vuelven a deslizarse. Existen limitaciones prácticas al número de ciclos de calentamiento - enfriamiento a los que pueden estar sujetos los termoplásticos antes de que afecte sus propiedades.

### 1.1.3. - Termofijos

Los termofijos, son plásticos que sufren un cambio químico durante su procesamiento que los hace permanentemente insolubles y no-fusionables. Fenólicos, epóxicos, y resinas de poliéster insaturadas son algunos plásticos termofijos. La estructura del termofijo es parecida a una cadena de los termoplásticos. La diferencia entre estos dos tipos de plásticos radica en que los termofijos, están unidas las cadenas de los átomos en el cruce mediante un enlace, mientras que en los termoplásticos, no. Este enlace crea una aparente red compleja interconectada entre las cadenas. Cuando se agrega calor, estos enlaces cruzados impiden a las cadenas individuales resbalar, y así el flujo del plástico. Si se agrega calor en exceso a un plástico termofijo después de que los enlaces estén compuestos, el polímero se degrada en lugar de fundirse. Es por esta razón que los termofijos no son reciclables. La figura 1.2 muestra la unión de cadenas de un termofijo.



Figura 1.2.- Termofijo con cadenas cruzadas unidas

### 1.1.4. - Polímeros cristalinos, amorfos y de cristal líquido

En algunos termoplásticos, la estructura química se presenta de tal modo que las cadenas del polímero se doblan sobre si mismas y se comprimen de manera organizada. Las regiones organizadas resultantes muestran la conducta característica cristalina. A los plásticos que tienen este tipo de regiones, se les denomina cristalinos. Los plásticos que no tienen estas regiones, son llamados amorfos. Todos los plásticos cristalinos contienen regiones amorfas entre las regiones cristalinas y las conexiones. Por esta razón, también se les llama semicristalinos. Muchas de las diferencias de las propiedades mecánicas, físicas y reológicas entre plásticos, puede atribuirse a su estructura. Los polímeros cristalinos tienen un peso específico mayor que el de los amorfos.

Los polímeros de cristal líquido son estudiados como una clase separada y única de plásticos. Las moléculas están tiesas y organizadas en grandes series paralelas. Estos grandes dominios proporcionan características únicas comparadas con los polímeros cristalinos y amorfos. La figura 1.3 representa la diferencia de la estructura entre un polímero cristalino, un amorfo y un cristal líquido, cuando están fundidos y en estado sólido.

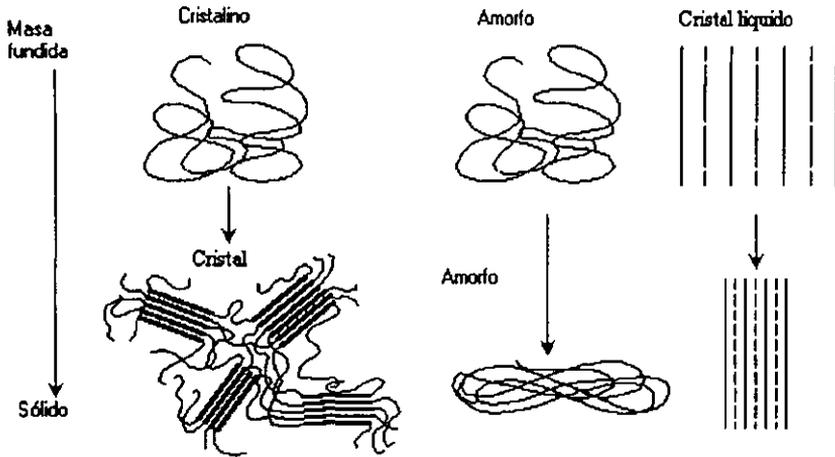


Figura 1.3.- Representación bidimensional de la estructura de un polímero cristalino, amorfo y cristal líquido

La tabla 1.1 muestra la dependencia de las propiedades con respecto al tipo de polímero.

Propiedad	Cristalino	Amorfo	Cristal líquido
Gravedad específica	Alto	Bajo	Alto
Esfuerzo de tensión	Alto	Bajo	Alto
Ductilidad	Bajo	Alto	Bajo
Módulo de tensión	Alto	Bajo	Alto
Temperatura de uso	Alto	Bajo	Alto
Pandeo	Alto	Bajo	Bajo
Resistencia química	Alto	Bajo	Alto
Flujo	Alto	Bajo	Alto

Tabla 1.1.- Tabla de comparación de propiedades

### 1.1.5. - Copolímeros, aleaciones y elastómeros.

Un copolímero es un polímero hecho con dos o más tipos diferentes de unidades repetidas. Cuando una familia del polímero incluye copolímeros, como las resinas del acetal, el término homopolímero identifica el polímero con un solo tipo de unidad repetida. Los copolímeros puede tener diferentes propiedades de aquéllos homopolímeros constituidos por cualquier unidad repetitiva.

Las aleaciones, son otra manera de cambiar las propiedades de los plásticos para un trabajo específico. La definición exacta de aleaciones de plástico no es muy clara. Sin embargo, generalmente se

acepta que una aleación de plástico, es una combinación de dos o más plásticos unidos mecánicamente. El propósito de unir plásticos mecánicamente es dar a la aleación una propiedad especial que se requiera (ej. fuerza de impacto y resistencia del químico), reducir costos, o facilitar su proceso de producción.

Los elastómeros, son termoplásticos con un módulo mucho más bajo que los termoplásticos. Son materiales flexibles que pueden estirarse repetidamente por lo menos dos veces de su longitud original y pueden regresar a su longitud original aproximada cuando la tensión se suelta. El caucho ha estado disponible por mucho tiempo, pero actualmente, los elastómeros están reemplazando el caucho original. Además, los elastómeros son utilizados para modificar las propiedades de un termoplástico rígido y normalmente mejora la fuerza de impacto.

1.1.6. - Aditivos, refuerzos, y cargas.

Las propiedades físicas, mecánicas y reológicas también pueden ser modificadas agregando algún aditivo, refuerzo o carga. En general, las propiedades mecánicas incrementan significativamente si al plástico se le añade alguna fibra. Las cargas particularmente aumentan el módulo. Retardantes a la flama, estabilizadores de UV e inhibidores de oxidación son otros aditivos comunes. Cuando las propiedades mecánicas se mejoran, la resina se denomina "resina reforzada". Un ejemplo claro es el nylon reforzado con fibra de vidrio. Cuando el aditivo no mejora las propiedades mecánicas significativamente, pero afecta la naturaleza física del material, la resina normalmente es llamada "resina llena". En la tabla 1.2 se mencionan algunos tipos de aditivos, refuerzos y cargas.

Aditivo	Refuerzo	Cargas
Estabilizadores de UV	Fibra de vidrio	Esteras de vidrio
Plastificantes	Fibra de carbono	Carbono
Lubricantes	Fibra de aramid	Metal en polvo
Colorantes	Yute	Arena de silice
Retardantes a la flama	Fibra de nylon	Madera en harina
Antioxidantes	Fibra de poliester	Cerámica en polvo
Antiestáticos		Molibdeno
Fungicidas		
Modificadores de viscosidad		
Modificadores de impacto		

Tabla 1.2. – Diferentes clases de aditivos, refuerzos y cargas

1.2. - Ciclo de inyección

Una máquina de inyección está compuesta por un tornillo que gira dentro de un barril o camisa, con una distancia mínima entre el hilo el tornillo y el tambor. El tambor está rodeado por varios calentadores que transmiten el calor del exterior que ayudan a que el plástico se funda. En la parte frontal del tornillo, la máquina posee un pequeño depósito donde se prepara una carga de plástico fundido para ser inyectado. Además cuenta con una boquilla que conecta a esta con el molde, y una válvula que esta cerrada mientras se está inyectando el material para evitar el flujo de retroceso y esta abierta mientras gira el tornillo, lo que permite la acumulación de una nueva carga. La máquina cuenta con la unidad de cierre o prensa, donde se coloca el molde. Su función, es mantener cerrado el molde mientras inyecta el plástico fundido. El cierre se efectúa mediante un mecanismo de presión hidráulico. La fuerza necesaria de cierre de una pieza

determinada, se obtiene a partir del área proyectada de esta. La carrera de la mitad móvil del molde de inyección debe ser lo suficientemente larga para poder botar la pieza y que cubra la profundidad de la pieza, siendo su carrera un poco más del doble de la profundidad de modelo. En la figura 1.4 se muestran las partes de una máquina de inyección de plástico.

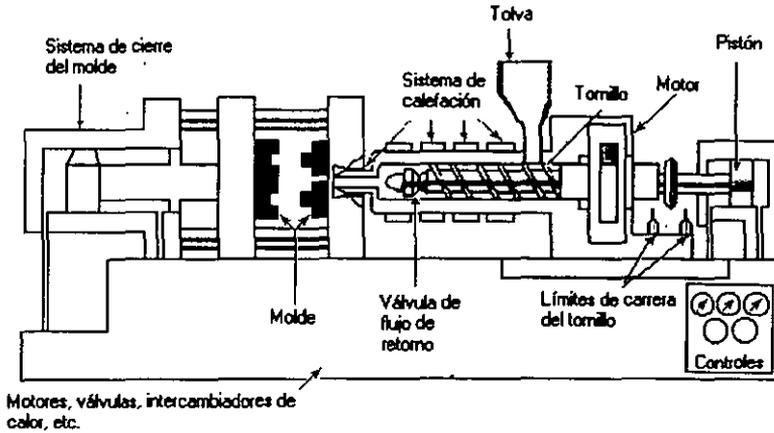


Figura 1.4 Diagrama físico de una máquina hidráulica de inyección

Los pellets son depositados en la tolva alimentación, y son forzados contra la pared del tambor fundiéndose debido al calor generado por la fricción entre los mismos pellets, la fricción entre los pellets y las paredes del tambor, y por la conducción de calor. Así el material fundido es llevado al frente del tomillo, y la máquina de inyección está preparada para realizar la inyección de plástico. Debido a que el tomillo en esta parte tiene el movimiento parecido al de un pistón, inyecta el plástico cuando se mueve hacia adelante.

El ciclo de inyección del plástico puede ser dividido en una serie de pasos los cuales son descritos a continuación.

#### 1.2.1. - Fase de llenado.

Para poder explicar las fases del ciclo de inyección, se asumirá que el ciclo comienza cuando el molde esta cerrado y la máquina está preparada para realizar su primer inyección. El tomillo avanza hacia el frente, empujando el material fundido que estaba listo para llenar la cavidad del molde. En esta etapa el tomillo no rota, solo se mueve hacia adelante como un pistón. El tiempo que tarda la máquina en llenar el molde, es llamado tiempo de llenado.

En esta fase, los principales parámetros de control del proceso son:

- La temperatura del material fundido.
- La temperatura del molde.
- La presión de inyección.
- La velocidad de inyección.

1.2.2. - Fase de empacamiento.

Al finalizar la fase de llenado, la presión debe ser mantenida durante un periodo de tiempo, para dejar entrar un poco más material a la cavidad debido a que el plástico se contrae por enfriamiento de este, y el material que entra compensa la contracción volumétrica. La presión con la que se empaca puede variar a través de la fase, para evitar la fuga de material antes de que solidifique la superficie de la pieza moldeada, luego se incrementa para comprimir y eliminar los huecos y se baja para evitar los esfuerzos residuales hasta que el material solidifique en la compuerta.

El mantener una presión adecuada en esta fase es de gran importancia, debido a que un exceso de presión en esta fase provoca que las piezas moldeadas sean generadas con esfuerzos residuales y sobrepeso; y por otro lado, una presión de sostenimiento deficiente provocaría pandeos y deficiencias en la geometría final.

1.2.3. - Fase de enfriamiento

La tercera y última fase es la de enfriamiento. Comienza cuando la pieza se enfría mientras se encuentra dentro del molde. Después de que la pieza es lo suficientemente sólida, el molde se abre y la pieza es expulsada. El molde entonces cierra y comienza nuevamente el ciclo. Durante éste periodo de tiempo se da la fase de plastificación del material. Esto es que mientras se enfría la pieza moldeada, la máquina de inyección prepara más material, para que en cuanto sea expulsada la pieza, la máquina se encuentre lista para re iniciar el ciclo sin pérdida de tiempo.

Se puede observar en la figura 1.5 que gran parte del tiempo total del ciclo se debe al enfriamiento, la cual incluye el tiempo de retención. Por lo tanto, la velocidad del enfriamiento, es una variable muy importante en la economía del moldeo por inyección.

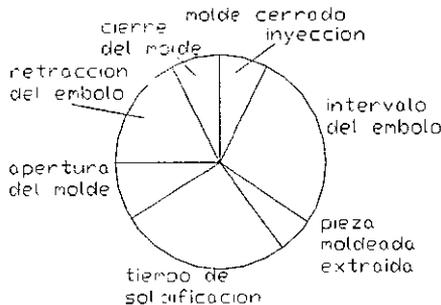


Figura 1.5. — Diagrama de ciclo de inyección

1.3. - Reología

El interés de la ingeniería mecánica es el análisis de los fenómenos a gran escala que usualmente envuelven un comportamiento promedio de un gran número de unidades microestructurales; y no del estudio del material microestructuralmente. Razón por la cual es conveniente trabajar con un modelo idealizado continuo del material, del cual no se especifica su microestructura. La mecánica del medio continuo es una

rama de la ciencia, encargada de estudiar las respuestas de tales cuerpos ideales al aplicar fuerzas y obtener deformaciones. Para un flujo isotérmico, solo la ley de viscosidad de Newton y una relación entre densidad y presión son necesarias como entradas del sistema para obtener un resultado muy preciso con las ecuaciones de Navier-Stokes. Pero el solo modelo matemático continuo no basta cuando se requiere de respuestas más complejas. La respuesta a la solución de polímeros líquidos es muy compleja y recientemente los métodos tienden a combinar la mecánica del medio continuo con estudios microestructurales. Este es el campo que estudia la reología.

El campo de interés de la Reología es la relación entre esfuerzo (fuerza / unidad de área), deformación (cambio de forma) y tiempo.

Así, la Reología se define como:

"Estudio de la deformación y flujo de los materiales cuando se ven sometidos a esfuerzos"<sup>1</sup>

La definición de reología hace que parezca como una división de la mecánica del medio continuo, sin embargo, se ha tratado como una ciencia pura.

Los objetivos generales de la Reología en el proceso de inyección del plástico son:

- Entender el comportamiento del plástico en el proceso de conversión
- Cuantificar la reacción del material
- Usar los datos para predecir el desempeño de los polímeros en el proceso de inyección de plásticos
- Relacionar la estructura molecular con las respuestas reológicas de los polímeros

Algunos de los efectos reológicos que han sido observados son:

- Rapidez de cortante dependiente de la viscosidad.
- Efecto de esfuerzo normal en flujo de estado cortante.
- Respuestas transitorias en flujo cortante inestable, etc.

## 1.4. - Tipos de Fluidos

### 1.4.1. - Conceptos generales.

Para clasificar los tipos de flujos que existen, se deben tener claros los conceptos de esfuerzo cortante, rapidez de deformación, viscosidad, y viscosidad aparente.

Cuando una fuerza  $F$  es aplicada a un elemento de volumen, la parte superior es desplazada una cantidad  $u$ . El desplazamiento relativo de la parte superior e inferior es conocida como deformación del cortante y esta dada por ( figura 1.6):

$$\gamma = \frac{u}{h} \tag{1.1}$$

---

<sup>1</sup> Engineering Rheology  
Tanner, Roger I.  
Oxford Science Publications

Y el esfuerzo cortante esta dado por:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (1.2)$$

Para un flujo viscoso, es conveniente considerar la rapidez de deformación, el cual está dado por:

$$\dot{\gamma} = \frac{v}{h} = \frac{dv}{dx} \quad (1.3)$$

Donde  $v$  es la velocidad en la dirección  $z$ .

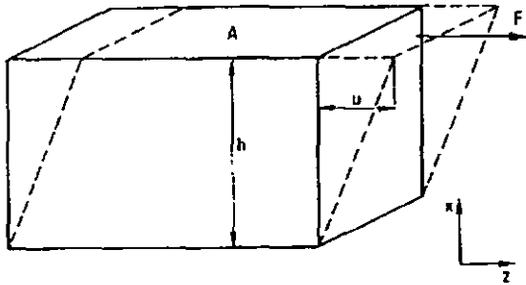


Figura 1.6. – Geometría de flujo cortante

La viscosidad es un parámetro reológico importante, definido por:

$$\text{Viscosidad} = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{rapidez de cortante}} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (1.4)$$

y tiene unidades de  $Nsm^{-2}$ , o en sistema CGS,  $gcm^{-1}s^{-1}$ , donde este último es conocido como Poise. Para tener algunos parámetros de comparación, ya que la viscosidad es una variable un poco rara, la viscosidad del agua a  $20^{\circ}C$  es de 0.01 Poises y la del aire es 0.000181 Poises.

La viscosidad aparente es definida como:

$$\eta_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (1.5)$$

donde la viscosidad aparente es solo para fluidos no-Newtonianos, y es análoga a la viscosidad para los fluidos Newtonianos. Para fluidos Newtonianos, la viscosidad no varia conforme varia la rapidez de cortante, mientras en los fluidos no-Newtonianos, la viscosidad aparente sí varia.

En mecánica de fluidos, es necesario tener una relación entre el tensor de esfuerzo viscoso y el tensor de rapidez de deformación. Para poder estudiar los tipos de flujos que existen, se deben elaborar las ecuaciones que nos relacionen todas las variables de interés. A tales ecuaciones se les conoce como "ecuaciones constitutivas". Con estas ecuaciones, se obtiene la distribución de velocidades para los tipos de flujos (realmente, son limitados los casos que se pueden resolver analíticamente aún considerando flujo laminar). Usando la distribución de velocidad, otros resultados de interés podrán ser obtenidos. Para describir los variados efectos de estos fluidos, las ecuaciones constitutivas deben ser remplazadas por otras "ecuaciones constitutivas". El nombre de estas ecuaciones alternativamente son "ecuaciones reológicas de estado" o "modelos no-Newtonianos".

#### 1.4.2. - Definición de fluido.

Un fluido se define como "sustancia que se deforma continuamente cuando se somete a una esfuerzo cortante sin importar que tan pequeño sea ese esfuerzo cortante"<sup>2</sup>. Con esta definición parecería que los plásticos no son fluidos, sin embargo se estudian como tales en el proceso de inyección. Debido a esto, aquellos que estudian reología han ampliado la definición de fluido con el propósito de obtener una definición que permita englobar a todos los materiales que se estudian como fluidos. Así tenemos que fluido es la "Forma de la materia que exhibe deformación continua sobre algunos rangos de esfuerzo cortante y puede parcialmente recobrar su configuración original si el esfuerzo es removido"<sup>3</sup>. Con esto se obtiene una definición más completa y la mecánica de fluidos estudia el comportamiento de los fluidos, cuyo objetivo es el determinar una o más de las siguientes variables para un flujo dado:

- Distribución de velocidad.
- La razón de flujo como una función de la caída de presión.
- Las fuerzas mecánicas que actúan sobre las caras de un sólido, cuando el sólido está cubierto por este fluido.

#### 1.4.3. - Clasificación de los fluidos.

Ya definidos los conceptos básicos, se pueden clasificar los fluidos según su comportamiento.

Se considerará que la rapidez de cortante de un fluido cambia instantáneamente (experimentalmente es difícil, pero es muy ilustrativo para la clasificación de los flujos). Para muchos fluidos, esto produciría un cambio en su estructura interna muy rápidamente, lo que conduce a un nuevo estado de esfuerzos correspondiendo a un nuevo valor de rapidez de cortante alcanzado instantáneamente. Tales fluidos son independientes del tiempo. Para fluidos que tienen dependencia del tiempo, el cambio se produciría mucho más lento, y el esfuerzo cortante cambiaría lentamente hasta corresponder al último valor alcanzado por la rapidez de cortante. Finalmente, algunos fluidos no se deforman, si no alcanzan su "valor de deformación" o conocido en mecánica de materiales como esfuerzo de cedencia.

Por todo esto, es conveniente clasificar a los fluidos de acuerdo a su comportamiento en (figura 1.7):

<sup>2</sup> Victor L. Streeter. "Mecánica de Fluidos"  
México, Ed. Mc Graw Hill, 2000, p.p. 3

<sup>3</sup> Donald Rosato, Dominick Rosato. "Injection Molding Handbook"  
Ed. Van Nostrand Reinhold, 1986, p.p. 166



Figura 1.7 – Clasificación de los fluidos según su comportamiento<sup>4</sup>

♦ Fluidos independientes del tiempo.

Fluido Newtoniano:

Este tipo de flujo es el más simple que describe el comportamiento real de este tipo de fluidos. Son caracterizados por tener su viscosidad constante, la cual es independiente de la rapidez de cortante. Este modelo es una descripción exacta de muchos fluidos con bajo peso molecular, como son el agua, el benceno y muchos líquidos orgánicos. Su ecuación constitutiva está dada por:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \tag{1.6}$$

Donde  $\mu$  es la constante de proporcionalidad. La viscosidad  $\mu$  es una propiedad del fluido y está en función de la presión y la temperatura.

Esta ecuación es conocida como la ley de la viscosidad de Newton.

Fluido Pseudoplástico:

Para este fluido, la viscosidad decrece conforme se incrementa la rapidez de cortante. El incremento del esfuerzo cortante descompone la estructura interna dentro del fluido muy rápida y reversiblemente, y la dependencia del tiempo se manifiesta. Muchos de este tipo de fluidos también manifiestan otro tipo de comportamiento, tal como viscoelasticidad en el caso de polímeros y dependencia del tiempo en el caso de pinturas. Muchas ecuaciones constitutivas han sido propuestas para describir el comportamiento de este tipo de materiales, pero por su simplicidad, el modelo de la ley de potencias es el más utilizado, y la cual se describe a continuación:

<sup>4</sup> Arthur W. Birley. "Physics of Plastics Processing, Properties and Materials Engineering". Ed. Hansen. p.p. 59

$$\tau = k(\dot{\gamma})^n \quad (1.7)$$

donde  $k$  y  $n$  son parámetros del material. A  $k$  se le conoce como el índice de consistencia y a  $n$  como índice de comportamiento de flujo. Ambos se encuentran en función de la presión y la temperatura, pero  $k$  es más sensible que  $n$ , además, la dependencia que tiene la presión sobre estos parámetros no ha sido investigada. Se observa que si  $n=1$ , la ley se reduce a la ley de viscosidad de Newton y  $k$  sería la viscosidad del fluido. Si  $n < 1$ , se tendrá un comportamiento pseudoplástico y si  $n > 1$ , se tendrá un comportamiento dilatante, el cual se describe enseguida.

#### Flujo Dilatante:

En este tipo de fluidos, a medida que se incrementa la rapidez de cortante, se incrementa el esfuerzo cortante. Muchos fluidos dilatantes también describen dilatación volumétrica, esto es, que incrementa el volumen conforme incrementa la rapidez de cortante, al mismo tiempo que incrementa la dilatación viscosa y la viscosidad aparente. Algunos ejemplos de este tipo de fluidos son las suspensiones acuosas de óxido de titanio, suspensiones de almidón y arena movediza. La ley de potencia también se puede utilizar para describir su comportamiento.

#### Fluidos con esfuerzo de fluencia:

Algunos fluidos no se deforman si no se excede el esfuerzo de fluencia. Es aceptado que el mecanismo de comportamiento de los fluidos plásticos contienen una estructura lo suficientemente rígida como para resistir pequeños esfuerzos cortantes que se encuentren por debajo de su esfuerzo de fluencia. Cuando este esfuerzo es excedido, la estructura se colapsa y la deformación se hace continua, como un fluido no plástico. El esfuerzo de fluencia puede ser tan pequeño en suspensiones de agua como tan grande para algunos asfaltos. Este tipo de fluidos es necesario modelar su comportamiento para prever el comportamiento de una pintura cuando es aplicada a una pared vertical. Ejemplos de este tipo de fluidos son algunos asfaltos.

#### Fluidos Bingham:

Este tipo de fluido también debe rebasar su esfuerzo de fluencia para poder trabajar con ellos. En el caso más simple, este tipo de fluidos describe un comportamiento parecido al de los fluidos Newtonianos, solo que en este caso, se debe rebasar su esfuerzo de fluencia. El modelo para este tipo de flujos es:

$$\tau = \tau_y + \eta\dot{\gamma} \dots \dots \tau > \tau_y \quad (1.8)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \dots \dots \tau < \tau_y \quad (1.9)$$

Donde  $\tau_y$  es el esfuerzo de fluencia y  $\eta$  es la viscosidad plástica o coeficiente de rigidez. Cabe hacer notar que cuando  $\tau < \tau_y$  implica que no existe deformación.

La viscosidad aparente para el fluido Bingham está dada por:

$$\eta_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \eta + \tau_y \dot{\gamma}^{-1} \quad (1.10)$$

Así, mostrando que la viscosidad aparente decrece conforme aumenta la rapidez de cortante. Para valores muy altos de rapidez de cortante, los efectos del esfuerzo de fluencia llegan a ser despreciables y el fluido llega a comportarse como fluido Newtoniano.

En la figura 1.8 se observa el comportamiento del esfuerzo cortante con respecto a la rapidez de cortante de algunos tipos de fluidos.

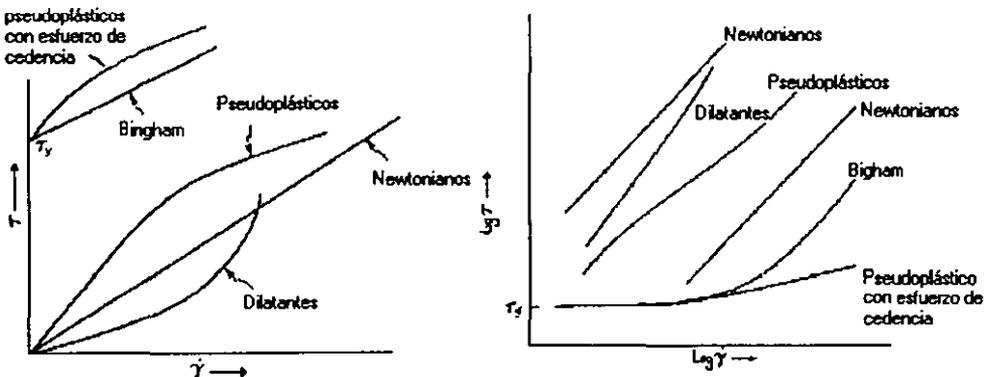


Figura 1.8 — Gráfica de esfuerzo cortante vs. rapidez de cortante de diferentes fluidos

♦ Fluidos dependientes del tiempo.

Los fluidos dependientes del tiempo se clasifican en dos tipos, los Thixotrópicos y los Rheopécticos.

Fluidos Thixotrópicos:

Para este tipo de fluidos, en un valor de rapidez de cortante dado, el esfuerzo cortante decrece lentamente hasta que alcanza un estado de equilibrio. Tales fluidos tienen un comportamiento de pseudoplásticos con dependencia del tiempo. Algunos ejemplos de fluidos tixotrópicos son las pinturas, la salsa de jitomate, algunos aceites crudos o bien secos. La thixotropía es necesaria en las pinturas, ya que se necesita que el flujo se facilite para la aplicación de la pintura sobre una superficie vertical y después de esto, recobrar su viscosidad para que quede adherida en la superficie y no se venga abajo.

Fluidos Rheopécticos:

Para un fluido Rheopéctico, el esfuerzo cortante, dado un valor constante de rapidez de cortante, incrementa lentamente conforme pasa el tiempo hasta alcanzar su estado de equilibrio. Tales fluidos tienen el comportamiento de fluidos dilatantes con dependencia del tiempo. Un ejemplo de fluido Rheopéctico es el yeso.

♦ Fluidos Viscoelásticos

Algunos fluidos tienen una característica particular que los hace recobrar su estado original después de haber sido sometido a un estado de esfuerzos. Estos fluidos tienen las propiedades parecidas a un sólido elástico y a un líquido viscoso al mismo tiempo, por lo que se les llama viscoelásticos. Ejemplos de este tipo

de fluidos son los plásticos fundidos, la clara del huevo y las pastas. Para fluidos de este tipo, el comportamiento del flujo no puede ser representado por una relación que involucre solo la rapidez de cortante y el esfuerzo cortante. La ecuación constitutiva para tales fluidos debe envolver el esfuerzo cortante, la rapidez de cortante y el tiempo como variable. Para propósitos ilustrativos, se mencionará una ecuación constitutiva muy simple, la cual se aplica solo para valores bajos de rapidez de cortante:

$$\tau + \lambda_1 \frac{d\tau}{dt} = \mu \cdot \left( \dot{\gamma} + \lambda_2 \frac{d\dot{\gamma}}{dt} \right) \quad (1.11)$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los tiempos de relajación, y  $\mu$  la viscosidad. Se puede observar que si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se igualan a cero, la ecuación se reduce a la ley de viscosidad de Newton.

En la figura 1.9 se grafica el comportamiento que tienen algunos polímeros dada una temperatura.

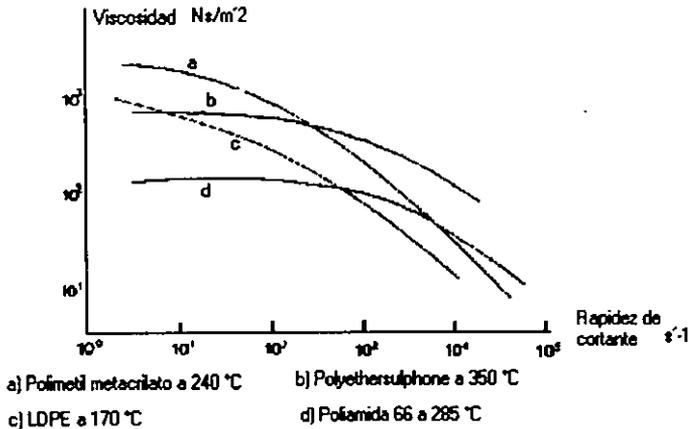


Figura 1.9. – Curvas de flujo de algunos polímeros a temperatura constante

En consecuencia, los plásticos fundidos tienen un comportamiento viscoelástico. La elasticidad es muy significativa. La elasticidad es originada como un resultado del desarreglo de las cadenas de los polímeros. Para un polímero fundido en un estado sin esfuerzos, las cadenas están orientadas al azar. Cuando el polímero es sometido a esfuerzos, las cadenas se "acomodan" y se orientan en dirección a la fuerza aplicada. Cuando los esfuerzos son retirados, las cadenas querrán regresar a su estado de equilibrio, el cual era el de orientación al azar. El recobro del estado de equilibrio, no es instantáneo debido a que la viscosidad de las cadenas aún se encuentra presente, por lo que las cadenas no se recobrarán totalmente. Éste es el comportamiento elástico que tienen los plásticos fundidos.

### 1.5. – Modelos de viscosidad

Para modelar el proceso de inyección, se requiere una función que modele el comportamiento de la viscosidad para los polímeros. En la literatura se pueden encontrar varias funciones las cuales están

estudiadas y comprobadas. Es muy importante escoger un modelo el cual sea preciso sobre el rango de temperaturas para el cual se usará sobre el proceso. Las funciones más comunes son:

- Modelo de potencias (modelo de primer orden)
- Modelo de segundo orden
- Modelo de matriz de datos
- Modelo Ellis
- Modelo Carreau
- Modelo Cross

El propósito de estos modelos es ajustar la viscosidad tan exacto como sea posible al comportamiento del material.

### 1.5.1. – Modelo de potencias (modelo de primer orden)

Este modelo tiene la forma:

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1} \quad (1.12)$$

donde  $m$  y  $n$  son constantes. Cuando  $m = \mu$  y  $n=1$ , se obtiene la relación para un fluido Newtoniano. Para masa fundida de los polímeros, la constante  $n$  oscila entre 0 y 1. Este modelo solo puede representar el comportamiento de los polímeros en regiones de alto valor de rapidez de cortante. Para obtener las constantes  $m$  y  $n$ , se deben obtener datos experimentales hasta poder ajustar dichos valores. La principal desventaja del modelo es en el rango de bajos valores de rapidez de cortante. A pesar de esta desventaja, el modelo ha sido usado con buenos resultados ya que en la fase de llenado en particular, la rapidez de cortante es lo suficientemente alta para justificar el uso del modelo de primer orden.

Debido a la dependencia de la viscosidad de la temperatura, se incluye un exponencial que contiene la temperatura. Esto es:

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1} \exp(cT) \quad (1.13)$$

donde  $c$  es una constante y  $T$  es la temperatura. El modelo de primer orden es el más utilizado en los softwares de inyección de plástico.

### 1.5.2. - Modelo de segundo orden

Para mejorar el modelo de primer orden de viscosidad y poder hacer análisis en regiones de bajos niveles de rapidez de cortante, se desarrolló un modelo de segundo orden:

$$\ln \eta = A_0 + A_1 \ln \dot{\gamma} + A_2 T + A_3 (\ln \dot{\gamma})^2 + A_4 T \ln \dot{\gamma} + A_5 T^2 \quad (1.14)$$

donde  $A_i$  son constantes. Este modelo puede ser usado en regiones donde la rapidez de cortante es baja, sin embargo, no es de gran relevancia en el estudio del comportamiento del polímero en la fase de inyección puesto que siempre se encuentra en altos niveles de rapidez de cortante.

### 1.5.3. – Modelo de matriz de datos

Este modelo es simplemente la recolección de datos obtenidos experimentalmente de viscosidad, temperatura y rapidez de cortante. No se obtiene ninguna curva y ningún modelo como en los dos casos anteriores. Se introducen en una matriz de datos los valores y cuando se requiere de algún valor específico, se interpola entre los puntos más cercanos de la matriz y se obtiene el valor deseado.

Este modelo es conveniente para materiales los cuales tienen características inusuales de viscosidad tales como los líquido cristalinos. Ninguno de los modelos de viscosidad pueden describir adecuadamente el comportamiento de estos materiales. La desventaja en este modelo es que cuanto más exacto se desee un valor, mucho más serán los valores que se deben obtener experimentalmente, lo que hace tener una base de datos muy grande, además de que solo se puede interpolar y no extrapolar.

### 1.5.4. – Modelo de Ellis

El modelo de Ellis expresa la viscosidad como una función como una función del esfuerzo cortante:

$$\frac{\eta_0}{\eta} = 1 + \left( \frac{\tau}{\tau_{1/2}} \right)^{\alpha-1} \quad (1.15)$$

donde  $\tau_{1/2}$  es el valor del esfuerzo cortante para  $\eta = \frac{\eta_0}{2}$

### 1.5.5. - Modelo de Carreau

El modelo de Carreau tiene la forma:

$$\frac{\eta - \eta_\alpha}{\eta_0 - \eta_\alpha} = \left[ 1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{n-1/2} \quad (1.16)$$

donde  $\eta_\alpha$  es la viscosidad cuando la rapidez de cortante es infinito,  $\eta_0$  es la viscosidad cuando la rapidez de cortante es cero,  $n$  tiene la misma interpretación que el modelo de primer orden y  $\lambda$  es una constante de tiempo.

### 1.5.6. - Modelo de Cross

El modelo de Cross tiene la forma

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + (\eta_0 \dot{\gamma} / \tau^*)^{-n}} \quad (1.17)$$

donde  $\tau^*$  es el esfuerzo cortante en la transición entre fluido Newtoniano y el comportamiento del modelo de primer orden.

## **CAPÍTULO 2**

# **Modelo Matemático de la Fase de Llenado de la Cavidad**

## Capítulo 2. – Modelo Matemático de la Fase de Llenado de la Cavidad

### 2.1. - Introducción.

Como se vio en el capítulo anterior, la masa fundida de los plásticos tienen un comportamiento viscoelástico. El modelo más sencillo para representar un fluido viscoelástico es como Fluido General Newtoniano. Por esto, se deben tomar en cuenta algunas consideraciones sobre el modelo matemático que nos permitan simplificarlo, para poder realizar soluciones en tiempos razonables.

Las ecuaciones generales que gobiernan el comportamiento de un fluido son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} = \rho \mathbf{g} + [\nabla \cdot \bar{\sigma}] - [\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] \quad (2.2)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \beta T \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P \right) + P \nabla \cdot \mathbf{v} + (\bar{\sigma} : \{\nabla \mathbf{v}\}) + \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2.3)$$

donde la ecuación (2.1) es la ecuación de la conservación de la masa, la ecuación (2.2) pertenece a la conservación de la cantidad de movimiento, y la ecuación (2.3) es la ecuación de la energía.

### 2.2. - Consideraciones del material

#### 2.2.1. - Compresibilidad de la masa fundida

Durante la fase de llenado se considerará que la masa fundida es incompresible. Esto significa que la densidad permanece constante. Entonces de la ecuación 2.1 se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

Esto permite que en la ecuación de momentum (2.2) se puedan realizar algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] &= \rho [\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}] \\ [\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] &= \rho [\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}] + \rho \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ [\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] &= \rho [\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}] \quad \text{si } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2.2. - Modelo del fluido

La masa fundida del polímero se modela como un Fluido General Newtoniano. Esto implica que los efectos de viscoelasticidad sean ignorados. Esta consideración permite utilizar la relación:

$$\begin{aligned} \sigma^- &= -PI + \tau^- \\ \sigma^- &= -PI + \eta(\gamma^-)\dot{\gamma}^- \end{aligned} \quad (2.6)$$

Cabe resaltar que debido a que se considera la masa fundida incompresible, el tensor deformación ( $\gamma^-$ ), y el tensor derivatorio de deformación ( $\dot{\gamma}^-$ ), son iguales.

Esta consideración altera las ecuaciones (2.2) y (2.3) respectivamente. Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \sigma) &= [\nabla \cdot (-PI + \eta\dot{\gamma})] \\ (\nabla \cdot \bar{\sigma}) &= -\nabla \cdot P + [\nabla \cdot \eta\dot{\gamma}] \end{aligned} \quad (2.7)$$

y también:

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma} : \{\nabla v\}) &= (-PI + \tau^-) : \nabla v \\ (\sigma : \{\nabla v\}) &= (-PI + \eta\dot{\gamma}) : \nabla v \\ (\bar{\sigma} : \{\nabla v\}) &= (-PI : \nabla v) + (\eta\dot{\gamma} : \nabla v) \\ (\sigma : \{\nabla v\}) &= -P(\nabla \cdot v) + (\eta\{\nabla v + \nabla v^T\} : \nabla v) \\ (\sigma : \{\nabla v\}) &= \eta(\nabla v : \nabla v + \nabla v^T : \nabla v) \end{aligned}$$

tomando en cuenta la incompresibilidad del fluido, la ecuación se reduce:

$$\begin{aligned} (\sigma : \{\nabla v\}) &= \frac{1}{2}\eta(\nabla v : \nabla v + \nabla v^T : \nabla v + \nabla v : \nabla v^T + \nabla v^T : \nabla v^T) \\ (\sigma : \{\nabla v\}) &= \frac{1}{2}\eta(\{\nabla v + \nabla v^T\} : \{\nabla v + \nabla v^T\}) \\ (\sigma^- : \{\nabla v\}) &= \frac{1}{2}\eta(\gamma^- : \gamma^-) \\ (\sigma^- : \{\nabla v\}) &= \eta\gamma^{-2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde la  $^T$  representa la transpuesta.

2.2.3. - Propiedades térmicas de la masa fundida

A pesar de que la conductividad térmica de masa fundida de un polímero es dependiente de la temperatura, se considera constante debido a que es difícil obtener una relación entre la conductividad y la temperatura, ya que además, la conductividad térmica depende del grado de cristalinidad y el nivel de orientación de las moléculas.

Con esta consideración, el término que envuelve a  $k$  en la ecuación (2.3) se reduce a:

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = k\nabla^2 T \quad (2.9)$$

2.2.4. - Ecuaciones resultantes

Habiendo realizado las consideraciones anteriores, las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido, resultan:

$$(\nabla \cdot v) = 0 \tag{2.10}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \rho g - \nabla P + [\nabla \cdot \eta \gamma] - \rho [v \cdot \nabla v] \tag{2.11}$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T \right) = \beta T \left( \frac{\partial P}{\partial t} + v \cdot \nabla P \right) + \eta \gamma^2 + k(\nabla^2 T) \tag{2.12}$$

2.3. - Consideraciones geométricas

La solución de las ecuaciones (2.10) a la (2.12), tienen un grado de dificultad muy alto. Debido a las consideraciones geométricas, aun es posible reducir grado de dificultad de tales ecuaciones. Estas consideraciones son basadas en el análisis dimensional que a continuación se describe.

2.3.1. - Análisis dimensional

En general, las cavidades de los moldes de inyección poseen espesores delgados, lo cual se toma en consideración. Por comodidad, un sistema de coordenadas cartesiano es usado para describir la cavidad. Los ejes son ajustados de tal manera de que el eje Z esté en dirección del espesor de la cavidad y el plano XY coincida con el plano medio de la cavidad. Como se observa en la figura (2.1)

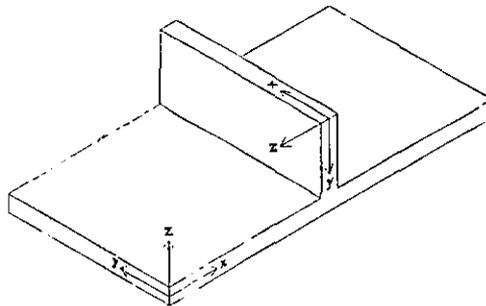


Figura 2.1. – Sistema coordinado para la cavidad del molde

La técnica del análisis dimensional consiste en obtener valores estimativos del orden de magnitud de cada término que interviene en una ecuación. Los términos que sean lo suficientemente bajos en el orden de magnitud, influyen muy poco en el resultado, así que pueden ser ignorados. Es de suma importancia que los valores que se asignen a cada término sean valores característicos, es decir, que se asignen valores

## Capítulo 2 Modelo Matemático de la Fase de Llenado de la Cavity

cercanos a los reales, para que se obtenga un buen análisis y que los resultados sean confiables. Las variables a que se les asignan los valores son: la longitud de la cavidad, espesor de la cavidad, velocidad de la masa fundida y viscosidad. Valores exactos no son requeridos; con valores aproximados en orden de magnitud es más que suficiente para obtener una idea de que variables no pueden ser despreciadas y cuales sí.

Las características de los valores a ser usados son:

Espesor de la cavidad:	$H = 10^{-3}$ (m)
Longitud de la cavidad:	$L = H/\delta$ (m) donde $\delta = H/L \ll 1$
Velocidad de la masa fundida:	$V = 10^{-1}$ (m/s)
Presión en la cavidad:	$P_0 = 10^7$ (N/m <sup>2</sup> )
Viscosidad de la masa fundida:	$\eta_0 = 10^4$ (N s/m <sup>2</sup> )
Coefficiente de expansión:	$\beta = 10^{-3}$ (1/K)
Conductividad térmica de la masa fundida:	$k = 10^{-1}$ (W/mK)
Densidad de la masa fundida:	$\rho = 10^3$ (kg/m <sup>3</sup> )
Diferencia de temperaturas entre el molde y la masa fundida:	$T_0 = 10^2$ (K)

Utilizando estos valores de las variables relevantes en las ecuaciones, se puede definir otras variables en términos de las dimensiones:

$$\text{coordenada-x: } x = Lx^* = (H/\delta) x^*$$

$$\text{coordenada-y: } y = Ly^* = (H/\delta) y^*$$

$$\text{coordenada-z: } z = Hz^*$$

$$\text{tiempo: } t = (LV)t^* = (H/\delta V)t^*$$

$$\text{velocidad en x: } v_x = (L/T)v_x^* = Vv_x^*$$

$$\text{velocidad en y: } v_y = (L/T)v_y^* = Vv_y^*$$

$$\text{velocidad en z: } v_z = (H/T)v_z^* = \delta Vv_z^*$$

$$\text{presión: } P = P_0 P^*$$

$$\text{viscosidad: } \eta = \eta_0 \eta^*$$

$$\text{diferencia de temperaturas: } \Delta T = T_0 \Delta T^*$$

donde las variables con asterisco son adimensionales y de orden uno.

La aproximación se realiza substituyendo las variables adimensionales dentro de cada ecuación y calcular el orden de magnitud. Por ejemplo:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \left[ \frac{V}{L} \right] \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} \quad (2.13)$$

si las variables con asterisco son de orden uno, entonces el orden de magnitud de  $\partial v_x/\partial x$  es del mismo orden de magnitud de  $V/L$ , por lo que se puede escribir:

$$O\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\right] = O\left[\frac{V}{L}\right] \quad (2.14)$$

donde  $O[\bullet]$  se lee como el orden de magnitud de  $[\bullet]$

Usando los valores característicos dados para  $V$  y  $L$  se tiene:

$$\begin{aligned} O\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\right] &= O\left[\frac{V}{L}\right] \\ O\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\right] &= O\left[\frac{\delta V}{H}\right] \\ O\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\right] &= O\left[\frac{\delta 10^{-1}}{10^{-3}}\right] \\ O\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\right] &= O[10^2 \delta] \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.3.2. - Ecuación de continuidad para la cavidad

La ecuación de continuidad (2.10) para un flujo generalizado, no-Newtoniano e incompresible, en coordenadas cartesianas está dada por:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.16)$$

El primer término se calculó en el ejemplo anterior, por lo que no se repite. Usando los valores característicos y sustituyendo, tenemos que:

$$\begin{aligned} O\left[\frac{\partial v_y}{\partial y}\right] &= O\left[\frac{V}{L}\right] \\ O\left[\frac{\partial v_y}{\partial y}\right] &= O\left[\frac{\delta V}{H}\right] \\ O\left[\frac{\partial v_y}{\partial y}\right] &= O\left[\frac{\delta 10^{-1}}{10^{-3}}\right] \\ O\left[\frac{\partial v_y}{\partial y}\right] &= O[10^2 \delta] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} O\left[\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] &= O\left[\frac{V}{H}\right] \\ O\left[\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] &= O\left[\frac{10^{-1} \delta}{10^{-3}}\right] \end{aligned}$$

$$O\left[\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = O[10^2 \delta] \quad (2.17)$$

Se encuentra que todos los términos tienen el orden de magnitud similar, por lo que no es posible simplificar la ecuación (2.16).

### 2.3.3. - Ecuaciones del momentum para la cavity

La ecuación del momentum (2.11) es una ecuación vectorial. Estas ecuaciones pueden ser representadas en coordenadas cartesianas. Si se representan en coordenadas cartesianas, esta ecuación produce tres ecuaciones, las cuales son:

- En la componente X de la ecuación de momentum

$$\underbrace{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t}}_I = \underbrace{\rho f_x}_{II} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{III} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)}_{IV} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right)}_V + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right)}_{VI} - \underbrace{\rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)}_{VII} \quad (2.18)$$

- En la componente Y de la ecuación de momentum

$$\underbrace{\rho \frac{\partial v_y}{\partial t}}_I = \underbrace{\rho f_y}_{II} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_{III} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right)}_{IV} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)}_V + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right)}_{VI} - \underbrace{\rho \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)}_{VII} \quad (2.19)$$

- En la componente Z de la ecuación de momentum

$$\underbrace{\rho \frac{\partial v_z}{\partial t}}_I = \underbrace{\rho f_z}_{II} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}}_{III} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right)}_{IV} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right)}_V + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}_{VI} - \underbrace{\rho \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}_{VII} \quad (2.20)$$

El término (I) es la rapidez del cambio de momentum, el término (II) representa las fuerzas debidas a la gravedad, el término (III) es el gradiente de presión, los términos del (IV) al (VI) representan las fuerzas viscosas y el término (VII) las fuerzas inerciales.

Entonces, se usan los valores característicos y las variables adimensionales para determinar el orden de magnitud de las ecuaciones (2.18) a la (2.20) determinando la relevancia que tiene cada término.

- En la componente X

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\rho \frac{\partial v_x}{\partial t}\right)}_{(10^4 \delta)} &= \underbrace{\left(\rho f_x\right)}_{(10^4)} - \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)}_{(10^{10} \delta)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)}_{(10^9 \delta^2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)}_{(10^9 \delta^2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)}_{(10^9 \delta^2)} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)}_{(10^9)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)}_{(10^9 \delta^2)} - \underbrace{\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}_{(10^4 \delta)} - \underbrace{\rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}}_{(10^4 \delta)} - \underbrace{\rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}}_{(10^4 \delta)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

- En la componente Y

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\rho \frac{\partial v_y}{\partial t}\right)}_{(10^4 \delta)} &= \underbrace{\left(\rho f_y\right)}_{(10^4)} - \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{(10^{10} \delta)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)}_{(10^9 \delta^2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)}_{(10^9 \delta^2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)}_{(10^9 \delta^2)} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)}_{(10^9 \delta^2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)}_{(10^9)} - \underbrace{\rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}}_{(10^4 \delta)} - \underbrace{\rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}}_{(10^4 \delta)} - \underbrace{\rho v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}}_{(10^4 \delta)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

- En la componente Z

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\rho \frac{\partial v_z}{\partial t}\right)}_{(10^4 \delta^2)} &= \underbrace{\left(\rho f_z\right)}_{(10^4)} - \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)}_{(10^{10})} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)}_{(10^9 \delta)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)}_{(10^9 \delta^2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)}_{(10^9 \delta)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)}_{(10^9 \delta^2)} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)}_{(10^9 \delta)} - \underbrace{\rho v_x \frac{\partial v_z}{\partial x}}_{(10^4 \delta^2)} - \underbrace{\rho v_y \frac{\partial v_z}{\partial y}}_{(10^4 \delta^2)} - \underbrace{\rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}_{(10^4 \delta^2)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para poder visualizar el orden de magnitud de cada término claramente, se puede resumir en una tabla. En la tabla (2.1) están resumidos los órdenes de magnitud de cada término.

Número de término	Descripción (fuerza / unidad de masa)	Magnitud en la componente en X	Magnitud en la componente en Y	Magnitud en la componente en Z
I	Fuerza total	$10^2\delta$	$10^2\delta$	$10^2\delta$
II	Fuerza gravitatoria	$10^4$	$10^4$	$10^4$
III	Gradiente de presión	$10^{10}\delta$	$10^{10}\delta$	$10^{10}$
IV	Fuerza viscosa	$10^9\delta^2$	$10^9\delta^2$	$10^9\delta$
V	Fuerza viscosa	$10^9\delta^2$	$10^9\delta^2$	$10^9\delta^3$
VI	Fuerza viscosa	$10^9\delta^2$	$10^9\delta^2$	$10^9\delta$
VII	Fuerza viscosa	$10^9$	$10^9$	$10^9\delta^3$
VIII	Fuerza viscosa	$10^9\delta^2$	$10^9\delta^2$	$10^9\delta$
IX	Fuerza inercial	$10^4\delta$	$10^4\delta$	$10^4\delta^2$
X	Fuerza inercial	$10^4\delta$	$10^4\delta$	$10^4\delta^2$
XI	Fuerza inercial	$10^4\delta$	$10^4\delta$	$10^4\delta^2$

Tabla 2.1. – Tabla de comparación de órdenes de magnitud de las ecuaciones de momentum

Debido a que los espesores de la pieza a moldear son muy delgados, se supone que  $\delta$  es mucho menor que la unidad. Normalmente,  $\delta$  está en un rango de  $0.001 < \delta < 0.1$ ; teniendo en cuenta los valores que puede adoptar  $\delta$ , el término dominante es el gradiente de presión y las fuerzas viscosas surgidas de la derivada en la dirección Z. En particular, si definimos como  $\delta = 0.1$ , las fuerzas gravitacionales son de orden de magnitud cinco veces menor que el de mayor orden de magnitud; mientras que las fuerzas inerciales son de orden de magnitud seis veces menor que el de mayor orden de magnitud, por lo que se pueden despreciar estos términos. Por lo tanto, se ignoran los términos menores o iguales a  $10^9\delta$ , y así, las ecuaciones del momentum son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

En estas ecuaciones se observa que la presión está solo en función del material y las variables X y Y, por lo que en la dirección Z, la presión no varía.

### 2.3.4. - Ecuación de energía para la cavity

La ecuación de la energía (2.12), en coordenadas cartesianas es:

$$\underbrace{\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_I = \underbrace{\beta T \left( \frac{\partial P}{\partial T} + v_x \frac{\partial P}{\partial x} + v_y \frac{\partial P}{\partial y} + v_z \frac{\partial P}{\partial z} \right)}_{II} + \underbrace{\eta \gamma^2}_{III} + k \underbrace{\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)}_{IV} \quad (2.25)$$

Donde el significado físico de cada uno de estos términos es: El término (I) es la variación de la energía debido a la convección en las direcciones X, Y y Z. El término (II) es la variación de la energía debido a la compresión - expansión de la masa fundida. El término (III) es la variación de generación de energía debido a la disipación viscosa. Finalmente, el término (IV) representa la variación de la energía debido a la conducción en las direcciones X, Y y Z. Ahora se debe estimar el orden de magnitud de cada término usando los valores característicos definidos anteriormente. Expandiendo la ecuación y obteniendo el orden de magnitud de cada término, se tiene:

$$\underbrace{\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{(10^6 \delta)} + \underbrace{\rho C_p v_x \frac{\partial T}{\partial x}}_{(10^6 \delta)} + \underbrace{\rho C_p v_y \frac{\partial T}{\partial y}}_{(10^6 \delta)} + \underbrace{\rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z}}_{(10^6 \delta)} = \underbrace{\beta T \frac{\partial P}{\partial T}}_{(10^6 \delta)} + \underbrace{\beta T v_x \frac{\partial P}{\partial x}}_{(10^6 \delta)} + \underbrace{\beta T v_y \frac{\partial P}{\partial y}}_{(10^6 \delta)} + \underbrace{\beta T v_z \frac{\partial P}{\partial z}}_{(10^6 \delta)} + \underbrace{\eta \gamma^2}_{(10^4)} + k \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}_{(10^7 \delta^2)} + k \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{(10^7 \delta^2)} + k \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{(10^7)} \quad (2.26)$$

Se observa que los términos que envuelven la variación de la energía debido a la compresión - expansión y a la conducción en las direcciones X y Y son de orden de magnitud significativamente menor. Por lo tanto, se pueden despreciar estos términos, y así la ecuación de la energía resulta:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \eta \gamma^2 + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.27)$$

donde la rapidez de cortante está definida como:

$$\gamma = \sqrt{\left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2} \quad (2.28)$$

La pérdida de energía por convección en la dirección Z solo se da en el frente de flujo y es un efecto transitorio, por lo que se desprecia sin que esto arrastre un error significativo, así que la ecuación de energía resultante está dada por:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \eta \dot{\gamma}^2 + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.29)$$

### 2.3.5. - Ecuaciones resultantes

Tomando en cuenta todas las consideraciones sobre el comportamiento del material y el análisis dimensional, las ecuaciones (2.10) a la (2.12) resultan:

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.30)$$

Ecuación del momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ecuación de la energía

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \eta \dot{\gamma}^2 + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.32)$$

2.4. - Análisis matemático

Se pueden realizar más simplificaciones si se integran las ecuaciones de continuidad y la de momentum.

2.4.1. - Integración de las ecuaciones de momentum

De las ecuaciones del momentum (2.31) se observa que la presión es función de solamente de  $X$  y  $Y$ . Por esta razón, es conveniente integrar las ecuaciones del momentum sobre el espesor, con el objetivo de obtener las expresiones que describan las velocidades  $V_x$  y  $V_y$ .

Se puede ver que el material dentro de la cavity, está en ambas fases, líquido y sólido. Conforme avanza el material, una pequeña porción de material se va adheriendo a las paredes de la cavity y enfriando, formándose una pequeña capa de material frío que se encuentra adherida a las paredes de la cavity. La masa fundida avanza entre las capas de material enfriado. Las ecuaciones que se derivaron anteriormente son para fluidos, por lo que no aplican a la capa fría. Por lo tanto, se define el concepto de *temperatura de no-flujo*, para distinguir entre la fase líquida y sólida. La temperatura de no-flujo es la temperatura a la cual el material puede ser considerado sólido. Sobre esta capa fría, las velocidades  $V_x$ ,  $V_y$  y  $V_z$  son cero.

En la figura 2.2 se define la notación que se usará. Refiriéndose a la figura, en la línea central,  $z=0$ . La interfase entre la capa fría y la masa fundida, dado un punto  $(x,y)$ , es  $z = h^+(x,y)$  y  $z = h^-(x,y)$  respectivamente. El espesor total de la cavity es  $2H$  y el espesor donde se encuentra la masa fundida en cualquier punto es  $h^+ - h^-$ . Cabe hacer notar que aún no se considera que es simétrico el espesor de la capa fría, por lo que es posible que  $|h^+| \neq |h^-|$ .

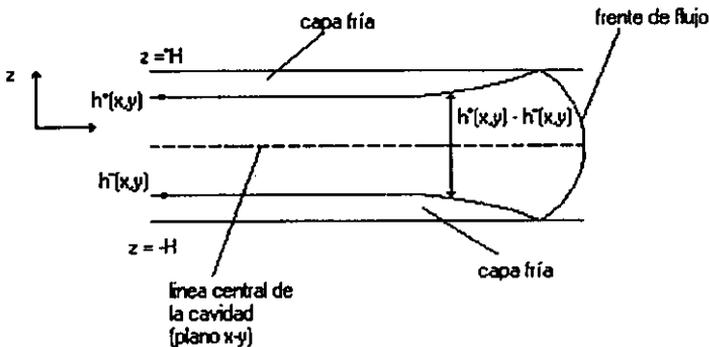


Figura 2.2. - Corte longitudinal del frente de flujo

Solo por conveniencia, se escribirán nuevamente las ecuaciones del momentum

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (2.35)$$

Para empezar, se integra la ecuación (2.33) con respecto a  $Z$  desde  $h$  hasta  $z$ , y se obtiene:

$$\int_h^z \frac{\partial P}{\partial x} dz' = \int_h^z \frac{\partial}{\partial z'} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z'} \right) dz'$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} z = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} - \left[ \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]_{z=h^-} + \left[ \frac{\partial P}{\partial x} z \right]_{z=h^-}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} z = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} - A(x, y) \quad (2.36)$$

donde  $A(x, y) = \left[ \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]_{z=h^-} - \left[ \frac{\partial P}{\partial x} z \right]_{z=h^-}$  es una constante para un punto  $(x, y)$  dado.

Dividiendo ambos lados de la ecuación (2.36) entre  $\eta$  e integrando nuevamente desde  $h^-$  hasta  $z$ , se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} = \int_{h^-}^z \frac{\partial v_x}{\partial z'} dz' - A(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} = v_x(z) - v_x(h^-) - A(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} \quad (2.37)$$

En la interface formada por la capa fría y la masa fundida, donde  $z = h^-$  y  $z = h^+$ , se tiene que la velocidad  $v_x = 0$ . Tomando en cuenta esto y despejando  $v_x(z)$ , se tiene:

$$v_x(z) = \frac{\partial P}{\partial x} \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} + A(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} \quad (2.38)$$

Realizando las mismas operaciones para la ecuación (2.34), se obtiene una expresión similar para la componente en  $Y$  de la velocidad, la cual está dada por:

$$v_y(z) = \frac{\partial P}{\partial y} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' + B(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} \quad (2.39)$$

donde  $B(x, y) = \left[ \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]_{z=h^-} - \left[ \frac{\partial P}{\partial y} z \right]_{z=h^-}$  y es una constante para un punto  $(x, y)$  dado.

Aplicando la condición de que  $v_x = 0$  en  $z = h^+$ , de la ecuación (2.38) se obtiene:

$$0 = \frac{\partial P}{\partial x} \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' + A(x, y) \int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta} \quad (2.40)$$

despejando  $A(x, y)$ , se tiene:

$$A(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\left\{ \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' \right\}}{\left\{ \int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta} \right\}}$$

$$A(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial x} C(x, y) \quad (2.41)$$

donde se ha definido una nueva constante  $C(x, y)$ , la cual está dada por:

$$C(x, y) = \frac{\int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz'}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta}} \quad (2.42)$$

Usando La ecuación (2.39) se obtiene una constante similar, la cual está dada por:

$$B(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\left\{ \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' \right\}}{\left\{ \int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta} \right\}}$$

$$B(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial y} C(x, y) \quad (2.43)$$

Utilizando estos resultados, las ecuaciones (2.38) y (2.39), pueden ser escritas, respectivamente como:

$$v_x(z) = \frac{\partial P}{\partial x} \left[ \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' - C(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} \right] \quad (2.44)$$

$$v_y(z) = \frac{\partial P}{\partial y} \left[ \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' - C(x, y) \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} \right] \quad (2.45)$$

Del teorema del valor medio del cálculo integral, se definen las velocidades promedio  $v_x$  y  $v_y$ , las cuales están dadas por:

$$v_x = \frac{1}{h^+ - h^-} \int_{h^-}^{h^+} v_x(z) dz \quad (2.46)$$

y

$$v_y = \frac{1}{h^+ - h^-} \int_{h^-}^{h^+} v_y(z) dz \quad (2.47)$$

sustituyendo la ecuación (2.44) dentro de la ecuación (2.46), se obtiene:

$$v_x = \frac{1}{h^+ - h^-} \frac{\partial P}{\partial x} \left[ \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' dz - C(x, y) \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} dz \right] \quad (2.48)$$

Esta integral puede ser evaluada por partes. Primero, para evaluar el término:

$$\int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' dz \quad (2.49)$$

se debe realizar un cambio de variables. Se elige como  $u = z$ , y  $w = \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz'$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' dz &= \int_{h^-}^{h^+} w \frac{du}{dz} dz \\ \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' dz &= [wu]_{z=h^-}^{z=h^+} - \int_{h^-}^{h^+} u \frac{dw}{dz} dz \\ \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' dz &= \left[ z \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' \right]_{z=h^-}^{z=h^+} - \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'^2}{\eta} dz' \end{aligned}$$

$$\int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{z'}{\eta} dz' dz = h^+ \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' - \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'^2}{\eta} dz' \quad (2.50)$$

de manera similar, para evaluar el término:

$$\int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} dz \quad (2.51)$$

realizando nuevamente un cambio de variables, los cuales son  $u = z$ , y  $w = \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta}$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} dz &= \int_{h^-}^{h^+} w \frac{du}{dz} dz \\ \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} dz &= [wu]_{z=h^-}^{z=h^+} - \int_{h^-}^{h^+} u \frac{dw}{dz} dz \\ \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} dz &= \left[ z \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} \right]_{z=h^-}^{z=h^+} - \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' \\ \int_{h^-}^{h^+} \int_{h^-}^z \frac{dz'}{\eta} dz' &= h^+ \int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta} - \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' \end{aligned} \quad (2.52)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.50) y (2.52) dentro de la ecuación (2.48), y usando la ecuación (2.42), resulta:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{h^+ - h^-} \frac{\partial P}{\partial x} \left[ h^+ \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' - \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'^2}{\eta} dz' - C(x, y) \left\{ h^+ \int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta} - \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' \right\} \right] \\ v_x &= \frac{1}{h^+ - h^-} \frac{\partial P}{\partial x} \left[ h^+ \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' - \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'^2}{\eta} dz' - h^+ \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' + \frac{\left( \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' \right)^2}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta}} \right] \end{aligned}$$

$$\bar{v}_x = \frac{1}{h^+ - h^-} \frac{\partial P}{\partial x} \left[ - \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'^2}{\eta} dz' + \frac{\left( \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' \right)^2}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta}} \right]$$

si se define a  $S_2$  como:

$$S_2 = \frac{1}{2} \left[ \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'^2}{\eta} dz' - \frac{\left( \int_{h^-}^{h^+} \frac{z'}{\eta} dz' \right)^2}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{dz'}{\eta}} \right] \quad (2.53)$$

entonces tenemos:

$$\bar{v}_x = \frac{-2S_2}{h^+ - h^-} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.54)$$

Donde a  $S_2$  se conoce como fluidez.

El promedio de la velocidad en Y, puede ser derivada de la misma forma, sustituyendo la ecuación (2.45) en (2.47), y de esta forma se obtiene:

$$\bar{v}_y = \frac{-2S_2}{h^+ - h^-} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.55)$$

#### 2.4.2. - Integración de la ecuación de continuidad.

En la fase de llenado, la ecuación de continuidad esta dada por:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.56)$$

la integración de esta ecuación con respecto a Z, desde  $z = -H$ , hasta  $z = +H$ , está dada por:

$$\int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_y}{\partial y} dz + \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_z}{\partial z} dz = 0 \quad (2.57)$$

debido a que en la capa fría, la velocidad en cualquier dirección es cero, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_y}{\partial y} dz + \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_z}{\partial z} dz &= \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial v_y}{\partial y} dz + [v_z]_{z=h^-}^{z=h^+} \\
 \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_y}{\partial y} dz + \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_z}{\partial z} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{h^-}^{h^+} v_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h^-}^{h^+} v_y dz \\
 \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_y}{\partial y} dz + \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_z}{\partial z} dz &= \frac{\partial}{\partial x} ((h^+ - h^-) v_x) + \frac{\partial}{\partial y} ((h^+ - h^-) v_y) \\
 \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_y}{\partial y} dz + \int_{H^-}^{H^+} \frac{\partial v_z}{\partial z} dz &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( 2S_2 \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( 2S_2 \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left( S_2 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( S_2 \frac{\partial P}{\partial y} \right) &= 0 \tag{2.58}
 \end{aligned}$$

donde en las últimas expresiones se utilizaron las definiciones y los valores de las velocidades promedio dadas en las ecuaciones (2.46), (2.47), (2.54) y (2.55).

La ecuación de presión (2.58), combina las ecuaciones de conservación del momentum y la ecuación de continuidad.

### 2.5. – Simetría del flujo

La ecuación (2.58) puede ser simplificada aún más si se asume que el flujo es simétrico con respecto a la línea central de la cavity. Al tomar en cuenta esta consideración, significa que los cálculos que se necesitan realizar son solo de la mitad de espesor de la cavity, ganando rapidez de procesamiento de datos y reducción de almacenamiento de datos. Si el flujo es simétrico, entonces la capa fría será simétrica con respecto a la línea central de la cavity. Esta consideración no siempre es válida, por ejemplo, cerca de la boquilla, en esquinas muy puntiagudas y moldes en los cuales la temperatura entre las placas es significativa.

El flujo asimétrico cerca de la boquilla y en las esquinas, afortunadamente es un efecto local, y así, el error que se produce es mínimo.

Con respecto a la variación de la temperatura entre las placas de los moldes; debido a la baja conductividad térmica de los plásticos, la variación de la temperatura deberá ser demasiado grande para que se generara un flujo asimétrico significativo, de lo contrario, el error que se produce será pequeño.

Como resultado de esta consideración se tiene:

1. El espesor de la capa fría es simétrico con respecto a la línea central. Matemáticamente se representa:

$$\begin{aligned}
 |h^+| &= |h^-| \\
 |h^+| &= h \tag{2.59}
 \end{aligned}$$

2. El perfil de la velocidad sobre el ancho de la cavity, es simétrico con respecto a la línea central, donde  $z = 0$ , por lo que se tiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.60)$$

3. La temperatura es simétrica con respecto a la línea central de la cavidad ( $z=0$ ), por lo tanto:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.61)$$

4. La viscosidad es simétrica con respecto a la línea central de la cavidad ( $z=0$ ), por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{h-\eta}^{h'} \frac{z'}{\eta} dz' &= \int_{h-\eta}^h \frac{z'}{\eta} dz' \\ \int_{h-\eta}^{h'} \frac{z'}{\eta} dz' &= \int_{h-\eta}^0 \frac{z'}{\eta} dz' + \int_0^h \frac{z'}{\eta} dz' \\ \int_{h-\eta}^{h'} \frac{z'}{\eta} dz' &= \int_{h-\eta}^0 \frac{z'}{\eta} dz' - \int_h^0 \frac{z'}{\eta} dz' \\ \int_{h-\eta}^{h'} \frac{z'}{\eta} dz' &= 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

y así de la ecuación (2.53), se obtiene

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \left[ \int_{h-\eta}^{h'} \frac{z'^2}{\eta} dz' - \frac{\left( \int_{h-\eta}^{h'} \frac{z'}{\eta} dz' \right)^2}{\int_{h-\eta}^{h'} \frac{dz'}{\eta}} \right] \\ S_2 &= \frac{1}{2} \left[ \int_{h-\eta}^{h'} \frac{z'^2}{\eta} dz' - \frac{(0)^2}{\int_{h-\eta}^{h'} \frac{dz'}{\eta}} \right] \\ S_2 &= \frac{1}{2} \int_{h-\eta}^{h'} \frac{z'^2}{\eta} dz' \\ S_2 &= \frac{1}{2} \int_{h-\eta}^h \frac{z'^2}{\eta} dz' \\ S_2 &= \int_0^h \frac{z'^2}{\eta} dz' \end{aligned} \quad (2.63)$$

Sin importar su naturaleza, todas las situaciones de flujo estas sujetas a cuando menos cinco ecuaciones para describir el estado de un fluido en movimiento. Esto se debe a que la ecuación de estado de la termodinámica estipula que se necesitan cuando menos dos propiedades independientes una de otra para obtener las demás propiedades. Además, se desean conocer las velocidades en las dirección X, Y y Z, de lo que se obtiene un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

Por lo tanto, partiendo de las ecuaciones de conservación de masa, conservación de cantidad de movimiento y conservación de energía, de las cuales de su forma general se realizaron consideraciones con respecto al tipo de material a estudiar, consideraciones geométricas acerca del sistema de coordenadas y estructura de la cavidad, con el propósito de obtener un modelo matemático adecuado al proceso de inyección de plástico que describa el estado de un fluido plástico en movimiento.

## **Capítulo 3**

# **Modelo Matemático de la Fase de Llenado de los Canales**

## Capítulo 3 – Modelo Matemático de la Fase de Llenado de los Canales

### 3.1. – Introducción

Al igual que se partió en el capítulo anterior de las ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido, se comienza con las mismas ecuaciones generales que gobiernan el comportamiento de un fluido, solo que en este caso, se asocia un sistema de coordenadas cilíndricas por la forma de los canales.

### 3.2. - Consideraciones del material

Las consideraciones que se tomaron sobre el comportamiento del material para la cavidad, son válidas para el sistema de canales (sección 2.2). El punto de partida, son las ecuaciones de continuidad, de momentum y energía.

Para el sistema de canales, debido a que son circulares, se asocia un sistema de coordenadas cilíndricas. La figura 3.1 muestra la geometría y el sistema de coordenadas para un canal circular. También se puede ver en la figura que la interfase entre la capa fría y la masa fundida está en  $r = r^*$

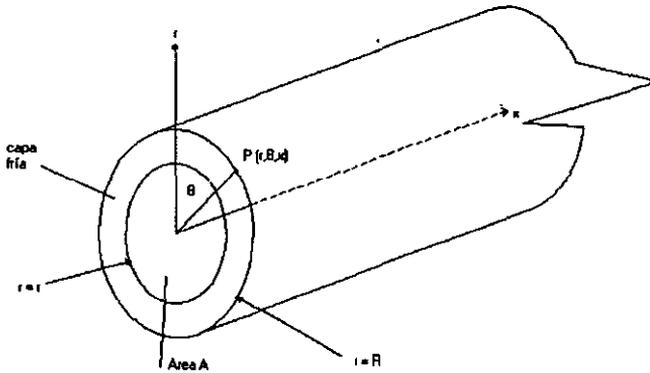


Figura 3.1. – Sistema coordinado para canales circulares del molde

Además, se asume que, la temperatura y el flujo en el canal son simétricos con respecto al eje central longitudinal del canal: esto significa que nada dependerá de la variable  $\theta$ .

### 3.3. - Consideraciones geométricas

Las consideraciones geométricas tomadas para la cavidad, son igualmente para los canales basadas en el análisis dimensional que a continuación se describe.

#### 3.3.1. – Análisis dimensional

Entendido el proceso del análisis dimensional (sección 2.3.1), se procede a definir las variables y realizar el análisis.

Radio del canal:	$R = 10^{-3}$ (m)
Longitud del canal:	$L = R/\delta$ (m) donde $\delta = R/L \ll 1$
Velocidad de la masa fundida:	$V = 10^{-1}$ (m/s)
Presión del canal:	$P_0 = 10^7$ (N/m <sup>2</sup> )
Viscosidad de la masa fundida:	$\eta_0 = 10^4$ (N s/m <sup>2</sup> )
Coefficiente de expansión:	$\beta = 10^{-3}$ (1/K)
Conductividad térmica de la masa fundida:	$k = 10^{-1}$ (W/mK)
Densidad de la masa fundida:	$\rho = 10^3$ (kg/m <sup>3</sup> )
Diferencia de temperaturas entre el molde y la masa fundida:	$T_0 = 10^2$ (K)

Utilizando estos valores de las variables relevantes en las ecuaciones, se definen otras variables en términos de las dimensiones:

$$\text{coordenada-r: } r = Rr^*$$

$$\text{coordenada-}\theta: \theta = \theta\theta^*$$

$$\text{coordenada-x: } x = Lx^* = (R/\delta)x^*$$

$$\text{tiempo: } t = (LV)t^* = (R/\delta V)t^*$$

$$\text{velocidad en r: } v_r = (R/T)v_r^* = (\delta L/T)v_r^* = (\delta V)v_r^*$$

$$\text{velocidad en } \theta: v_\theta = (\theta/t)v_\theta^* = (\theta V\delta/R)v_\theta^*$$

$$\text{velocidad en x: } v_x = (L/T)v_x^* = Vv_x^*$$

$$\text{presión: } P = P_0 P^*$$

$$\text{viscosidad: } \eta = \eta_0 \eta^*$$

$$\text{diferencia de temperaturas: } \Delta T = T_0 \Delta T^*$$

### 3.3.2. - Ecuación de continuidad para los canales

En coordenadas cilíndricas, la velocidad  $\mathbf{v}(r, \theta, x)$  tiene como componentes  $v_r, v_\theta$  y  $v_x$ .

De la ecuación de continuidad se tiene:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (3.1)$$

Debido a la simetría con respecto al eje longitudinal, la ecuación (2.64) se simplifica a:

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (3.2)$$

y así para la ecuación de continuidad se tiene:

$$0 = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r)}_{10^2 \delta} + \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_{10^2 \delta} \quad (3.3)$$

los dos únicos términos que tiene la ecuación de continuidad son del mismo orden de magnitud, por lo que no se puede realizar ninguna simplificación.

### 3.3.3. - Ecuaciones del momentum para los canales

Las ecuaciones de momentum (ecuación 2.11), en coordenadas cilíndricas se representan como:

- La componente R de la ecuación del momentum

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \rho f_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \left( \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right) - \frac{2v_r}{r^2} - \rho \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \quad (3.4)$$

- La componente  $\theta$  de la ecuación del momentum

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \rho f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right) - \rho \left( v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right) \quad (3.5)$$

- La componente X de la ecuación del momentum

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \eta \left( \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) - \rho \left( v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \quad (3.6)$$

Los valores característicos y las variables adimensionales, son utilizados para determinar el orden de magnitud de las ecuaciones (3.4) a la (3.6) para determinar la relevancia que tiene cada término.

Realizando el análisis dimensional en las tres componentes del sistema, con los valores característicos y las variables adimensionales que se definieron para determinar el orden de magnitud de cada elemento de la ecuación; el orden de magnitud resulta de la siguiente forma:

- En la componente R de la ecuación del momentum

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \underbrace{\rho f_r}_{10^4} - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \left( \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right) - \frac{2v_r}{r^2} - \rho \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \quad (3.7)$$

- En la componente  $\theta$  de la ecuación del momentum

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \underbrace{\rho f_\theta}_{10^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right) - \rho \left( v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right) \quad (3.8)$$

- En la componente X de la ecuación del momentum

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \underbrace{\rho f_x}_{10^4} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \eta \left( \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) - \rho \left( v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \quad (3.9)$$

Debido a la consideración de simetría, todas las derivadas con respecto a  $\theta$  fueron eliminadas. Una vez utilizado el análisis dimensional, las ecuaciones (3.7) a (3.9) se simplifican a:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \eta \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (3.12)$$

### 3.3.4. - Ecuación de energía para los canales

Usando los operadores de gradiente y Laplaciano en coordenadas cilíndricas y asumiendo la simetría con respecto al eje longitudinal, la ecuación de la energía está dada por:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \beta T \left( \frac{\partial P}{\partial t} + v_r \frac{\partial P}{\partial r} + v_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \eta \gamma^2 + k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (3.13)$$

Utilizando nuevamente el análisis dimensional, para determinar la magnitud de los términos que envuelven esta ecuación, tiene como magnitudes:

$$\frac{\rho c_p}{10^6} \left( \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{10^4 \delta} + v_r \underbrace{\frac{\partial T}{\partial r}}_{10^4 \delta} + v_x \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_{10^4 \delta} \right) = \frac{\beta T}{10^{-1}} \left( \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}}_{10^4 \delta} + v_r \underbrace{\frac{\partial P}{\partial r}}_{10^4 \delta} + v_x \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{10^4 \delta} \right) + \frac{\eta \gamma^2}{10^4} + \frac{k}{10^{-1}} \left( \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}_{10^4} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}_{10^4 \delta^2} \right) \quad (3.14)$$

analizando una vez más los términos que son relativamente significativos a la ecuación, se reduce a:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \eta \gamma^2 + k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \quad (3.15)$$

donde

$$\gamma = \frac{\partial v_x}{\partial r}$$

Puede ser ignorada la transferencia de calor convectiva en la dirección radial. Esta consideración, es un error en el frente de flujo, sin embargo, es un efecto transitorio. Una vez que el frente de flujo ha pasado el punto, el flujo tiende a ser laminar y la consideración es válida. De tal manera que simplifica la ecuación (3.15):

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \eta \gamma^2 + k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \quad (3.16)$$

### 3.3.5. - Ecuaciones resultantes

Al igual que se hizo en la cavidad, tomando en cuenta las consideraciones sobre el comportamiento del material y el análisis dimensional para el sistema de canales circulares, las ecuaciones del comportamiento del fluido resultan:

- Continuidad

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (3.17)$$

- Momentum

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\eta \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (3.18)$$

- Energía

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \eta \gamma^2 + k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \quad (3.19)$$

### 3.4. - Análisis matemático

#### 3.4.1. - Integración de la ecuación del momentum

Observando la ecuación (3.18), si se integra dos veces en la dirección R, se obtiene una expresión que permita conocer la velocidad en X

Multiplicando ambos lados de la ecuación (3.18) por r e integrando con respecto a r desde r=0, hasta r, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^r r' dr' &= \int_0^r \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \eta \frac{\partial v_x}{\partial r'} \right) dr' \\ \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} r^2 &= r\eta \frac{\partial v_x}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.20)$$

dividiendo ambos lados entre  $r\eta$  e integrando nuevamente desde 0 hasta r, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^r \frac{r'}{\eta} dr' &= \int_0^r \frac{\partial v_x}{\partial r'} dr' \\ \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^r \frac{r'}{\eta} dr' &= v_x(r) - v_x(0) \end{aligned} \quad (3.21)$$

definiendo como  $r^*$  el valor de  $r$  en la interfase entre la capa fría y la masa fundida. Se sabe que la velocidad  $v_x$  es cero en la interfase. Con esto se tiene que:

$$v_x(0) = v_x(r^*) - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^{r^*} \frac{r'}{\eta} dr'$$

$$v_x(0) = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^{r^*} \frac{r'}{\eta} dr' \quad (3.22)$$

por lo tanto la ecuación (3.21) se representa como:

$$v_x(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \left\{ \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' - \int_0^{r^*} \frac{r'}{\eta} dr' \right\} \quad (3.23)$$

Definiendo la velocidad promedio en la dirección  $X$  como el flujo total que pasa a través de la sección transversal del canal, dividido entre el área,  $A_c$ :

$$\bar{v}_x(r) = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} v_x(r) dA \quad (3.24)$$

se tiene que  $A = \pi r^2$ , por lo tanto  $dA = 2\pi r dr$ . De la ecuación (3.24), se obtiene:

$$\bar{v}_x(r) = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} v_x(r) dA$$

$$\bar{v}_x(r) = \frac{1}{\pi r^{*2}} \int_0^{r^*} 2\pi v_x(r) r dr$$

$$v_x(r) = \frac{2}{r^{*2}} \int_0^{r^*} v_x(r) r dr \quad (3.25)$$

substituyendo la ecuación (3.23) en la ecuación (3.25), se obtiene:

$$\bar{v}_x(r) = \frac{2}{r^{*2}} \int_0^{r^*} v_x(r) r dr$$

$$v_x(r) = \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial P}{\partial x} \left\{ \int_0^{r'} \left( \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' \right) r dr - \int_0^{r^*} \left( \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' \right) r dr \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_x(r) &= \frac{1}{r^{+2}} \frac{\partial P}{\partial x} \left\{ \int_0^{r'} \left( \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' \right) r dr - \int_0^{r'} r dr \left( \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' \right) \right\} \\ \bar{v}_x(r) &= \frac{1}{r^{+2}} \frac{\partial P}{\partial x} \left\{ \int_0^{r'} \left( \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' \right) r dr - \frac{1}{2} r^{+2} \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

La doble integral que se encuentra en la ecuación (3.26) puede ser evaluada utilizando integración por partes. Realizando un cambio de variables como se describe a continuación:

$$u = \frac{1}{2} r^2$$

$$v = \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr'$$

entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^{r'} \left( \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' \right) r dr' &= \int_0^{r'} v \frac{\partial u}{\partial r} dr \\ \int_0^{r'} \left( \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' \right) r dr' &= v u \Big|_{r=0}^{r'} - \int_0^{r'} u \frac{\partial v}{\partial r} dr \\ \int_0^{r'} \left( \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' \right) r dr' &= \frac{1}{2} r^{+2} \int_0^{r'} \frac{r'}{\eta} dr' - \frac{1}{2} \int_0^{r'} \frac{r'^3}{\eta} dr' \end{aligned} \quad (3.27)$$

sustituyendo esta ecuación en la ecuación (3.26), resulta:

$$\bar{v}_x(r) = -\frac{1}{2r^{+2}} \frac{\partial P}{\partial x} \left\{ \int_0^{r'} \frac{r'^3}{\eta} dr' \right\} \quad (3.28)$$

si se define como fluidez  $a$ :

$$S_1 = \frac{1}{2r^*} \int_0^{r^*} \frac{r'^3}{\eta} dr' \quad (3.29)$$

se tiene que la velocidad promedio en la dirección x se define como:

$$v_x(r) = -\frac{S_1}{r^*} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.30)$$

Cabe hacer notar que la fluidez esta en función de una sola dimensión y de el tipo de material.

### 3.4.2. - Integración de la ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad, de acuerdo a las consideraciones obtenidas con anterioridad, tiene la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

como se realizó con las ecuaciones de momentum, se integra sobre el área de sección transversal obteniendo:

$$\begin{aligned} \int_A \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right\} dA &= 0 \\ 2\pi \int_0^{r^*} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right\} r dr &= 0 \\ 2\pi \left\{ \int_0^{r^*} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) dr + \int_0^{r^*} \frac{\partial v_x}{\partial x} r dr \right\} &= 0 \\ 2\pi \left\{ (rv_r) \Big|_{r=0}^{r^*} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{r^*} v_x(r) r dr \right\} &= 0 \\ 2\pi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_x(x) r^{*2}}{2} \right) &= 0 \\ -\pi \frac{\partial}{\partial x} \left( r^* S_1 \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

en las últimas dos ecuaciones se utiliza la definición de velocidad promedio y fluidez definidas en las ecuaciones (3.24) y (3.29) respectivamente; así la ecuación (3.31) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( r^+ S_t \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.32)$$

por lo que la ecuación general de continuidad (ecuación 3.17) y de momentum (ecuación 3.18) se han reducido a una ecuación de presión.

Para el sistema de canales, al igual que para la cavidad, se partió de las ecuaciones de conservación de masa, conservación de cantidad de movimiento y conservación de energía. Para este caso, por su forma del canal, se adoptó un sistema de coordenadas cilíndrico. Al igual que para la cavidad, las consideraciones con respecto al tipo de material, consideraciones geométricas acerca del sistema de coordenadas y estructura del canal, se obtuvo el modelo matemático adecuado al proceso de inyección de plástico que describe el estado de un fluido plástico en movimiento. Cabe mencionar que las consideraciones antes mencionadas tuvieron como resultado un modelo matemático de flujo unidireccional, mientras que para la cavidad, se obtuvo un modelo bidimensional.

**Capítulo 4**

**Métodos de**

**Solución**

Capítulo 4.- Métodos de Solución

4.1.- Introducción

En este capítulo se pretende dar a conocer las técnicas utilizadas al resolver un problema de simulación de flujo y los pasos a seguir para obtener un resultado dado un programa de simulación de llenado de moldes de inyección de plástico. También se dan a conocer los alcances que tienen este tipo de sistemas.

4.2.- Ecuaciones resultantes

En el capítulo 2 y 3 se dedujeron las ecuaciones que rigen el comportamiento del plástico fundido dentro de la cavidad y el sistema de colada respectivamente.

Por conveniencia, se describirán las ecuaciones que describen el comportamiento del plástico para la cavidad y el sistema de colada, deducidas anteriormente.

Ecuación de presión para la cavidad:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( S_2 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( S_2 \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \tag{4.1}$$

donde  $S_2 = \int_0^h \frac{z'^2}{\eta} dz'$

Ecuación de energía para la cavidad:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \eta \dot{\gamma}^2 + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{4.2}$$

Ecuación de presión para los canales:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( r^+ S_1 \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \tag{4.3}$$

donde  $S_1 = \frac{1}{2r^+} \int_0^{r^+} \frac{r'^3}{\eta} dr'$

Ecuación de la energía para los canales:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \eta \dot{\gamma}^2 + k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \tag{4.4}$$

4.3.- Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera especifican cualquier efecto físico que provoque que el sistema cambie. En este caso, las condiciones de frontera son:

1.- La presión es cero en el frente de flujo:

$$P = 0 \text{ en el frente de flujo} \quad (4.5)$$

Debido a que tiene venteos el molde, el aire atrapado dentro de la cavidad circula libremente hacia fuera sin ninguna restricción, por lo que no presenta restricción alguna el frente de flujo con respecto a la presión. Cabe mencionar que se manejan presiones manométricas, pues la presión que se tiene en el frente de flujo es la atmosférica. Usando presiones relativas, la presión en el frente de flujo es cero.

2.- La presión o la rapidez de flujo son definidas en el (los) punto(s) de inyección:

$$P = P_{in} \text{ ó } q = q_{in} \text{ en el (los) punto(s) de inyección} \quad (4.6)$$

La gasto se conoce dividiendo el volumen total de la cavidad entre el tiempo total de la fase de inyección y multiplicando esto por la densidad del material a inyectar.

3.- El gradiente de presión normal es cero en cualquier superficie impermeable.

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (4.7)$$

Fisicamente, esto significa que el material no puede fluir a través de las paredes del molde o las orillas de éste.

4.- La temperatura en las paredes de la cavidad y algunos puntos internos de esta es conocida

$$T = T_w \text{ en } z = h \text{ ó } z = h + \delta \quad (4.8)$$

Ya que es posible definir la temperatura del molde, esta condición es posible. También se pueden definir diferentes temperaturas para cada pared descrita en el molde. En algunos moldes, primero se diseña el sistema de enfriamiento del molde. Los resultados obtenidos de éste análisis definen las temperaturas que tendrá cada pared de molde y así proceder con el diseño reológico.

5.- El gradiente de temperatura en la dirección z es cero en la línea central de la cavidad:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \quad (4.9)$$

La consideración de simetría con respecto a la línea central de la cavidad, da como resultado esta consideración.

6.- La temperatura del plástico fundido en el (los) punto(s) de inyección esta(n) definidos:

$$T = T_{in} \text{ en el (los) punto(s) de inyección.} \quad (4.10)$$

Debido a su complejidad, las ecuaciones descritas no pueden ser resueltas analíticamente, por lo que se recurre a métodos numéricos. La solución para este sistema de ecuaciones se divide en tres pasos: cálculo del campo de presiones, cálculo del campo de temperaturas y avance del frente de flujo. El método de elementos finitos es utilizado para obtener el cálculo de la presión; para el cálculo de la temperatura se usa el método de diferencias finitas, y por último para calcular el avance del frente de flujo se utilizan volúmenes de control.

#### 4.4.- Etapas para la solución de los modelos matemáticos

Ya que se tienen las ecuaciones y las condiciones de frontera, se procede a la solución. La fluidez  $S_2$  depende de la viscosidad, y la viscosidad depende a su vez de la temperatura y la rapidez de cortante, por lo que las ecuaciones 4.1 y 4.2 se deben resolver simultáneamente. Sin embargo, para obtener la solución por métodos numéricos, las ecuaciones están desacopladas al usar pequeños incrementos de tiempo. En un periodo de tiempo dado, la temperatura se asume constante y el campo de presiones es calculado asumiendo el valor de la viscosidad a la temperatura dada. A pesar de que los incrementos de tiempo son lo suficientemente pequeños, el desacoplamiento da resultados satisfactorios.

La secuencia del proceso de la solución es el siguiente:

1.- Calcular la fluidez  $S_2$ . Al comienzo del análisis, se toma un valor nominal de la viscosidad a la temperatura del plástico fundido definido. Con la fluidez conocida, se resuelve la ecuación de presiones 4.1 con las condiciones de frontera 4.5, 4.6 y 4.7. Este cálculo se realiza con el método de elementos finitos. Este cálculo arroja las variaciones de la presión en sus direcciones X y Y ( $\partial P/\partial x$  y  $\partial P/\partial y$ ). Usando estos valores, se calcula las velocidades en X y Y con las ecuaciones 2.44 y 2.45 respectivamente, con el propósito de actualizar el valor de la rapidez de cortante. Asumiendo la temperatura constante, el valor de la viscosidad es actualizada usando el nuevo valor de la rapidez de cortante. Con el valor de la viscosidad actualizado, se calcula la fluidez  $S_2$ . El ciclo se completa y se reinicia resolviendo la ecuación 4.1. El proceso descrito se repite n veces, hasta que en dos iteraciones consecutivas, el cambio de la presión es menor que una tolerancia definida.

2.- Ya que el cálculo de la presión ha convergido, el valor de las velocidades  $v_x$ ,  $v_y$ , la rapidez de cortante  $\dot{\gamma}$  y la viscosidad  $\eta$  son usados en la ecuación 4.2 para calcular el término convectivo y el calentamiento viscoso. La solución de la ecuación 4.2 se trata como un problema de conducción con términos convectivo y calentamiento viscoso como origen de calentamiento. Se usa el método de diferencias finitas para la resolución de este problema. Resuelta la ecuación 4.2, se obtiene como resultado el campo de temperaturas. Con las temperaturas conocidas, se actualiza el valor de la viscosidad, el cual es usado para calcular el flujo en cada volumen de control y el frente de flujo.

3.- Conocida la rapidez de flujo en cada volumen de control, se puede calcular cual llenará en el siguiente incremento de tiempo. El frente de flujo avanza conforme avanzan los cálculos.

Los pasos 1, 2 y 3 se repiten hasta que el la cavidad es llenada.

#### 4.5.- Moldflow

Moldflow presenta tres etapas en el desarrollo de un análisis de flujo: preprocesamiento, análisis y postprocesamiento, descritas a continuación (tabla 4.1).

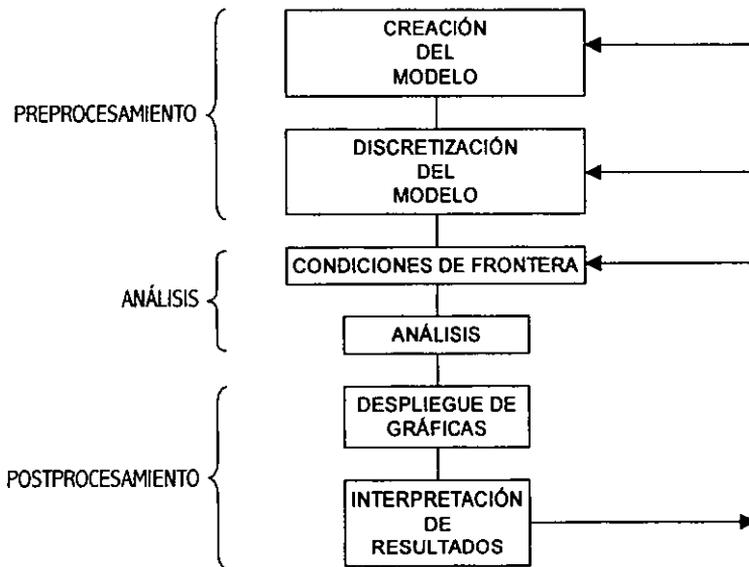


Tabla 4.1.- Estructura de moldflow

##### 4.5.1.- Preprocesamiento

El preprocesamiento se divide en la creación del modelo y creación de la malla (mallado) o discretización del modelo.

- **Modelo:** Esta representación es llamada modelo y no debe ser confundida con los modelos matemáticos que obtuvieron anteriormente. Este modelo es la geometría que representará la cavidad del molde en la simulación de inyección. Normalmente, el modelo es creado en un sistema CAD.
- **Mallado:** El proceso de mallado es en el cual el modelo es discretizado en pequeñas regiones llamados elementos. En el mallado se definen puntos sobre la superficie llamados nodos. Los nodos se encuentran unidos por los elementos. Al conjunto de nodos y elementos se le llama malla.

#### 4.5.2.- Análisis

Realizado el preprocesamiento (obtención del modelo y la malla), para realizar un análisis, es necesario ajustar las condiciones de frontera del modelo. Las condiciones de frontera son:

- Asignar el o los puntos de inyección: Identificar nodos de inyección
  - Selección de material: Moldflow contiene una base de datos a la cual se puede acceder para seleccionar el material que se pretende emplear en la simulación de inyección.
  - Ajustar la temperatura del molde y del plástico fundido: Aquí se definen las temperaturas del molde y plástico fundido con las cuales se desea llevar a cabo el análisis.
  - Tiempo de inyección: Se define el tiempo de inyección del proceso
  - Realizar análisis: Una vez que se han ajustado todas las condiciones de frontera, se corre el análisis.
- Es en esta parte donde se da solución a los modelos matemáticos con las técnicas matemáticas para dar paso a los resultados.

#### 4.5.2.- Postprocesamiento

El postprocesamiento es el despliegue de resultados y creación del reporte. Aquí se analizan los resultados si son satisfactorios o se debe modificar algo. El análisis de resultados de cada uno de estos sistemas, se basa en la aplicación de diez principios:

1.- Patrón de Flujo Controlado y Unidireccional.

El principio de flujo direccional establece que el plástico deberá fluir en una sola dirección con un flujo frontal recto hasta la última zona en llenarse. Esto da un patrón de flujo unidireccional.

2.- Flujo Balanceado.

Este principio establece que las trayectorias del flujo dentro de un molde, deberán llenar todas las trayectorias de recorrido del material plástico en el mismo tiempo y con la misma presión.

3.- Gradiente de Presión Constante.

La mejor eficiencia de llenado se realiza cuando el gradiente de presión se mantiene constante, esto quiere decir que la caída de presión por unidad del recorrido, es constante a lo largo de la trayectoria del flujo.

4.- Máximo Esfuerzo Cortante.

El esfuerzo cortante durante el llenado deberá ser menor que el nivel crítico ( $\tau < 1\%$  del esfuerzo de tracción del material en estado sólido). El valor de este nivel crítico depende del material que se este usando así como la aplicación de la pieza.

5.- Tiempo de Enfriamiento Uniforme.

El tiempo de enfriamiento deberá ser uniforme en toda la pieza para evitar pandeo.

6.- Localización de las Líneas de Unión y Fusión.

La mejor localización de las líneas de unión y fusión será en las áreas menos sensibles, dónde los esfuerzos mecánicos sean menores o dónde, desde el punto de vista estético, no sean visibles.

7.- Evitar el Efecto Duda.

El "efecto de duda" ocurre cuando el flujo disminuye su velocidad o se para a lo largo de una trayectoria particular. Si el plástico dentro de la cavidad tiene dos opciones entre una sección delgada y una sección gruesa, el plástico tiende a llenar la sección gruesa primero, por que esta ruta ofrece menos resistencia al flujo.

8.- Evitar el choque de flujos.

Este principio establece que se deben colocar los puntos de inyección de tal manera que los flujos frontales se encuentren al final del llenado de la pieza.

9.- Balancear con Flujos Líderes y Deflectores de Flujo.

Usar flujos líderes, incremento local en el espesor para un decremento en el flujo en una dirección particular, o un deflectores de flujo, reducción local en el espesor para desviar el flujo, para obtener un flujo balanceado.

10.-Contracciones Térmicas Controladas.

Se necesita diseñar adecuadamente los sistemas de distribución para controlar las contracciones térmicas, para lo cual se requiere incrementar la temperatura del material en la cavidad. Esto hace que la pieza tenga más bajos niveles de esfuerzo, sin causar degradación en el material debido a los largos tiempos de exposición a temperaturas elevadas. Se debe analizar que el gradiente de temperatura no exceda 20°C sobre las partes de mismo espesor, para evitar un descontrol en las contracciones térmicas.

El uso de los principios anteriores permite obtener piezas de calidad, mejores moldes y establecer las condiciones de inyección preliminares para la inyectora.

**CAPÍTULO 5**

**Casos de**

**Estudio**

## Capítulo 5.- Casos de Estudio

### 5.1. – Introducción

Se presentan dos casos con el propósito de explicar el uso y funcionalidad de este tipo de sistemas, además de los alcances y ventajas que puede tener la utilización de este tipo de herramientas.

### 5.2. - Caso 1. Selección de material

**Problema .-** La pieza es una base donde se coloca una tarjeta electrónica. Se desea seleccionar el material indicado para esta pieza.

**Solución propuesta .-** La base de la placa tiene como medidas 119x184 mm con un espesor promedio de 3.25 mm. Contiene tres postes, los cuales tienen 66 mm de altura los que se encuentran a los costados y 60.8 mm el del centro. Se crea el modelo de la pieza y se simula la inyección con dos materiales diferentes para poder detectar diferencias y posibles causas de falla en el proceso de inyección. El punto de inyección se propuso en la parte media de la placa y cerca del poste de 60.8mm. Debido a que no estará sometida a esfuerzos de gran escala, se trata de economizar la pieza con un material de bajo costo. Como primer material, se toma el ABS/PC. La tabla 5.1 muestra las condiciones de moldeo del primer material. Los resultados se muestran a continuación.

Propiedad	Material 1
Temp. del molde	60°C
Temp. de la masa fundida	250°C
Tiempo de inyección	5 seg.
Material	ABS/PC

Tabla 5.1. – Condiciones de moldeo de la primera selección de material

La figura 5.1 muestra el modelo de la pieza. La figura 5.2 muestra el tiempo de llenado de la pieza. La figura 5.3 muestra la temperatura que tiene la masa fundida en el momento que se llena la cavidad. La figura 5.4 muestra el tiempo de enfriamiento que tiene la pieza. Esta gráfica ayuda a identificar qué material es más económico en el proceso de manufactura, ya que un tiempo de enfriamiento elevado indica grandes tiempos de producción, y consecuentemente el incremento del costo de la pieza (sección 1.2.3).

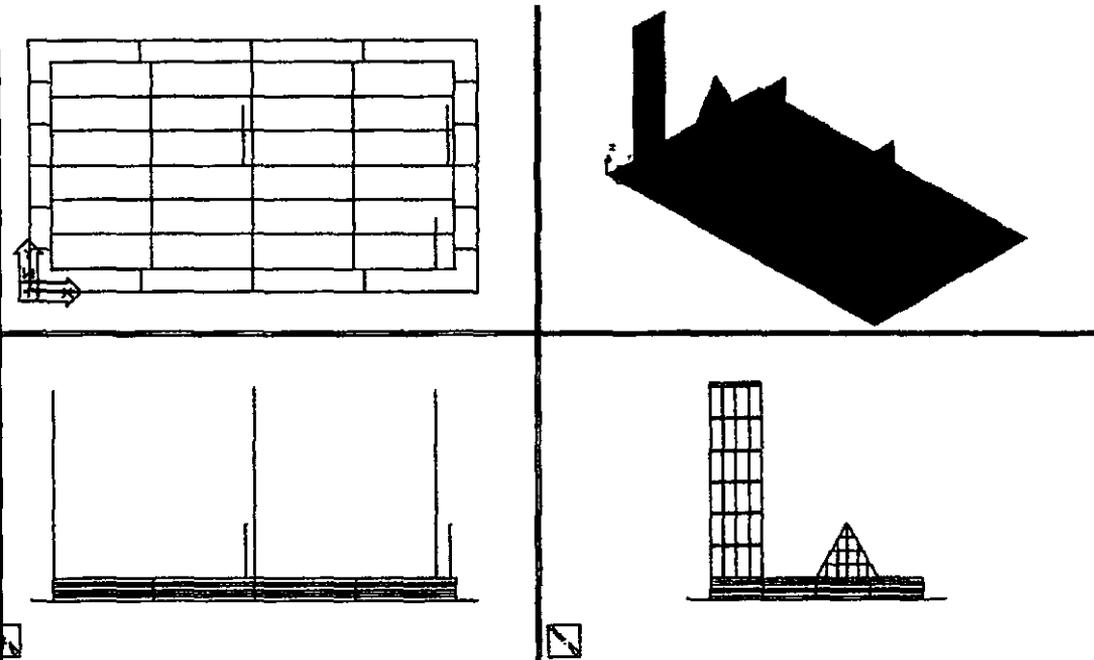


Figura 5.1. — Vistas y modelo de superficie de la pieza



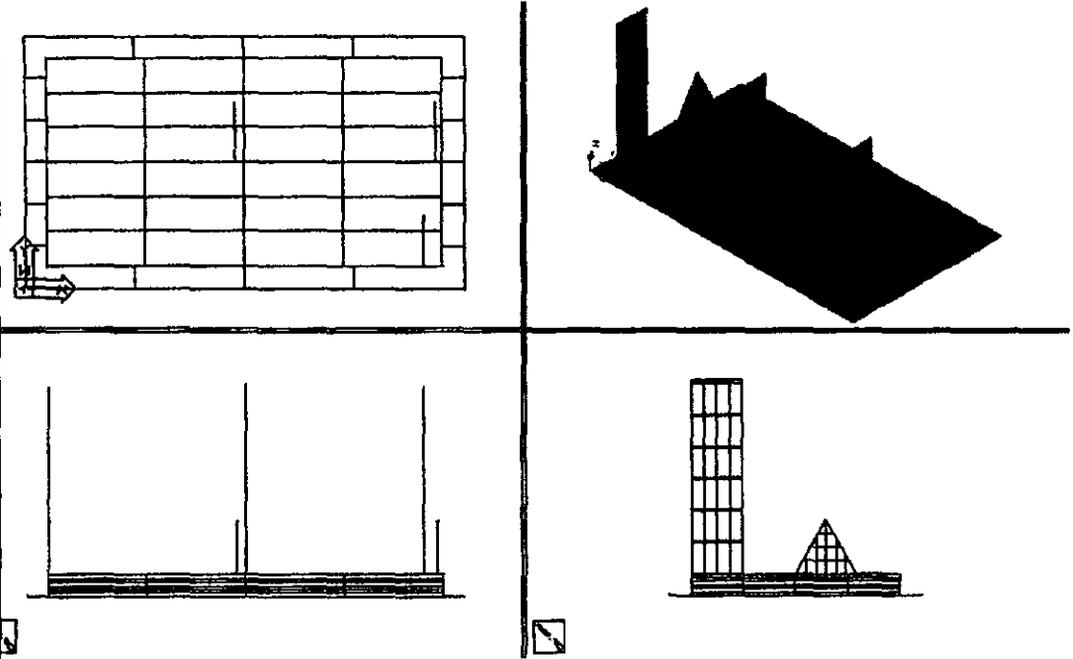


Figura 5.1. – Vistas y modelo de superficie de la pieza

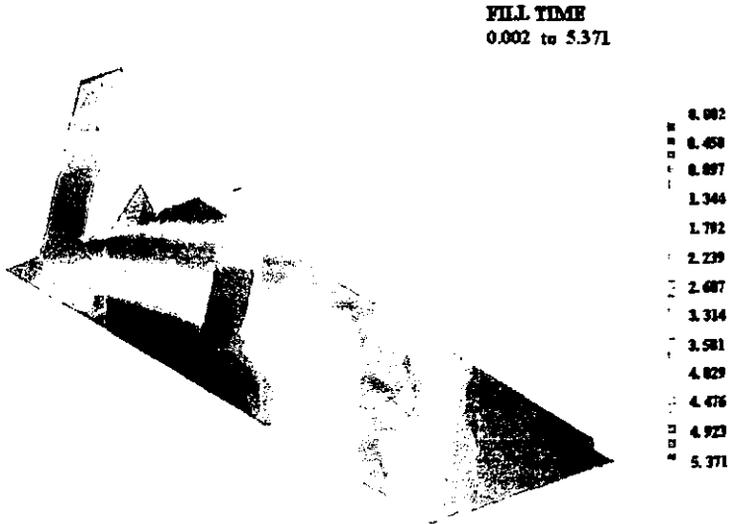


Figura 5.4. – Tiempo de enfriamiento de la pieza

En la fase de llenado, el poste central se llena en un tiempo de 1 segundo, mientras que en los otros dos postes laterales se llenan en un tiempo de 3 segundos. Esto ocasiona que el flujo en la placa se retrase, provocando líneas de unión y aire atrapado frente a los postes. Finalmente la placa se llena en 5.4 segundos (figura 5.2). El gradiente de temperatura es de 56°C, lo que puede ocasionar problemas de pandeo (figura 5.3). El tiempo de enfriamiento del modelo con este material es de 43 segundos (figura 5.4).

El otro material que se decidió utilizar, es PBT con 30% de fibra de vidrio. El punto de inyección se encuentra localizado en el mismo lugar que el modelo anterior. Se tomaron las temperaturas mas bajas a las que pueden ser inyectados los materiales respectivos, con el objetivo de hacer comparativas las simulaciones y reducir los costos de producción. Las condiciones de moldeo con el segundo material se muestran en la tabla 5.2.

Propiedad	Material 2
Temp. del molde	60°C
Temp. de la masa fundida	220°C
Tiempo de inyección	5 seg.
Material	PBT 30% fibra de vidrio

Tabla 5.2. – Condiciones de moldeo de la segunda selección de material

La gráfica de tiempo de llenado es similar a la simulación anterior, por lo que no se repite. La figura 5.5 muestra la temperatura instantánea con el segundo material. La figura 5.6 muestra el tiempo de enfriamiento de la pieza con el material PBT 30% fibra de vidrio.

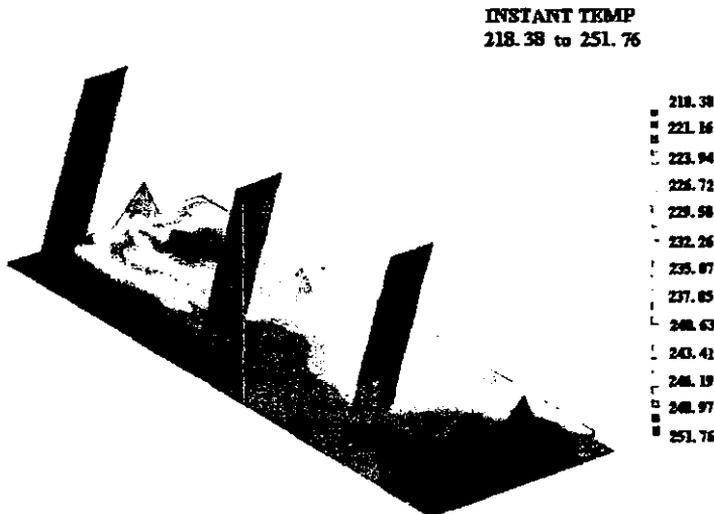


Figura 5.5. – Temperatura de la masa fundida en el momento que se llena la cavidad con material PBT 30% fibra de vidrio

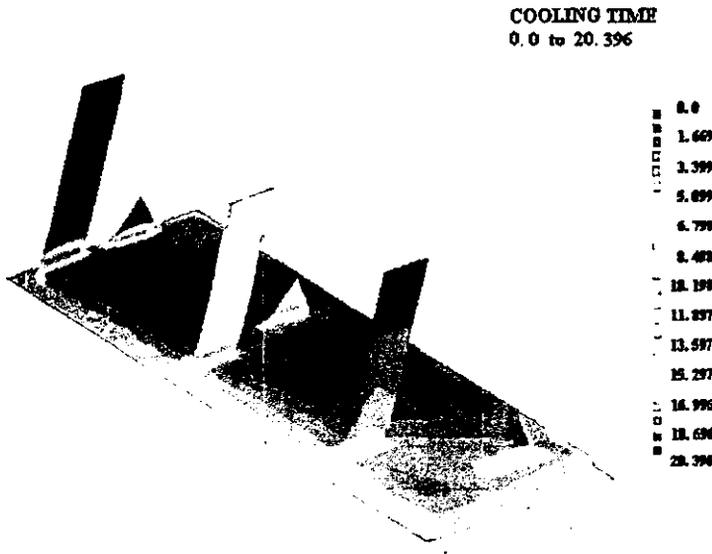


Figura 5.6. – Tiempo de enfriamiento con el material PBT 30% fibra de vidrio

La gráfica de tiempo de llenado es similar en las dos simulaciones, por lo que se presentan los mismos problemas descritos anteriormente. Para el modelo con el material PBT 30% fibra de vidrio se tiene un gradiente de 33°C (figura 5.5). En el caso del modelo con el material PBT 30% fibra de vidrio, el tiempo de enfriamiento es de 20 segundos (figura 5.6).

Comparando los dos modelos, el de material ABS/PC tiene un gradiente de temperatura de 56°C, mientras que el modelo con material PBT 30% fibra de vidrio tiene un gradiente de 33°C. En los dos casos rebasa por mucho el gradiente permisible, que es de 20°C, por lo que se pueden tener problemas de pandeo. Lo que respecta al tiempo de enfriamiento, el modelo con material ABS/PC enfría en un tiempo de 43 segundos, mientras que el modelo con material PBT 30% fibra de vidrio enfría en un tiempo de 20 segundos. Debido a que el tiempo de enfriamiento del modelo con material ABS/PC es el doble del modelo con material PBT 30% fibra de vidrio, el costo de producción de este último es menor. A continuación se resumen los resultados la tabla 5.3.

Propiedad	Material 1	Material 2
Temp. del molde	60°C	60°C
Temp. de la masa fundida	250°C	220°C
Tiempo de inyección	5 seg.	5 seg.
Material	ABS/PC	PBT 30% fibra de vidrio
Gradiente de temperatura	222 a 166°C	251 a 218°C
Tiempo de enfriamiento	43 seg.	20 seg.

Tabla 5.3. – Comparación entre modelos de diferente material

### Conclusiones

- En el gradiente de temperaturas, el modelo con material ABS/PC tiene un gradiente mayor que el modelo con PBT con 30% fibra de vidrio con lo que este último puede presentar menos problemas de pandeo.
- Lo que respecta al tiempo de enfriamiento, es muy viable el material PBT con 30% fibra de vidrio ya que enfría en la mitad de tiempo de lo que necesita el material ABS/PC, representando reducción en costos.
- Con base en los puntos anteriores, se selecciona el material PBT con 30% fibra de vidrio proponiendo modificar los postes de sujeción de la tarjeta, disminuyendo su espesor para no tener problemas con el pandeo de dichos postes.

### 5.3. - Caso 2. Corrección de puntos de inyección

Problema .- La pieza es una polea, la cual tiene problemas de pandeo.

Solución propuesta .- La polea tiene un diámetro  $d$  122 mm. Se realizó el modelo de la pieza y se simula la inyección en condiciones originales para poder detectar posibles causas de falla en el proceso de inyección.

Cabe señalar que se simula solo la mitad de la polea debido a que tiene dos puntos de inyección y el flujo presenta simetría desde el punto de vista geométrico. La tabla 5.4 muestra las condiciones de moldeo originales.

Propiedad	Polea original
Temp. del molde	60°C
Temp. de la masa fundida	350°C
Tiempo de inyección	7 seg.
Material	Nylon 30% fibra de vidrio

Tabla 5.4. – Condiciones originales de moldeo

De la tabla 5.4, de antemano se observa que la temperatura de inyección es muy alta para este material, por lo que se pueden presentar problemas de temperatura en la simulación. En la figura 5.7 se encuentra el modelo en tres dimensiones de la polea. Se observa en la figura 5.8 la polea con los espesores originales. En la figura 5.9 se muestra el tiempo de llenado de la pieza. En la figura 5.10 se muestra la temperatura que tiene la masa fundida en el momento que se llena la cavidad. La figura 5.11 muestra los niveles de esfuerzo que presenta la pieza.

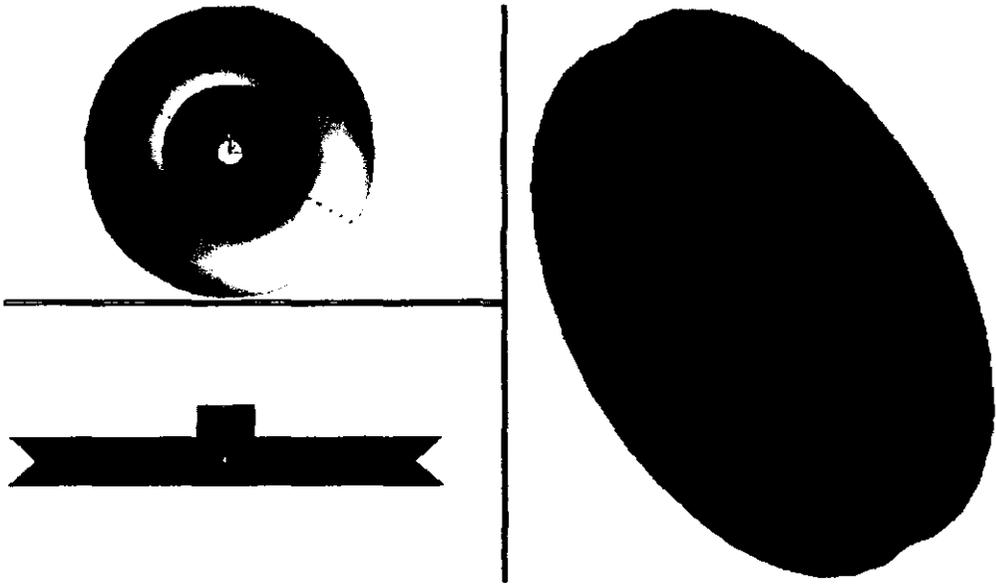


Figura 5.7. – Modelo de la polea en tres dimensiones

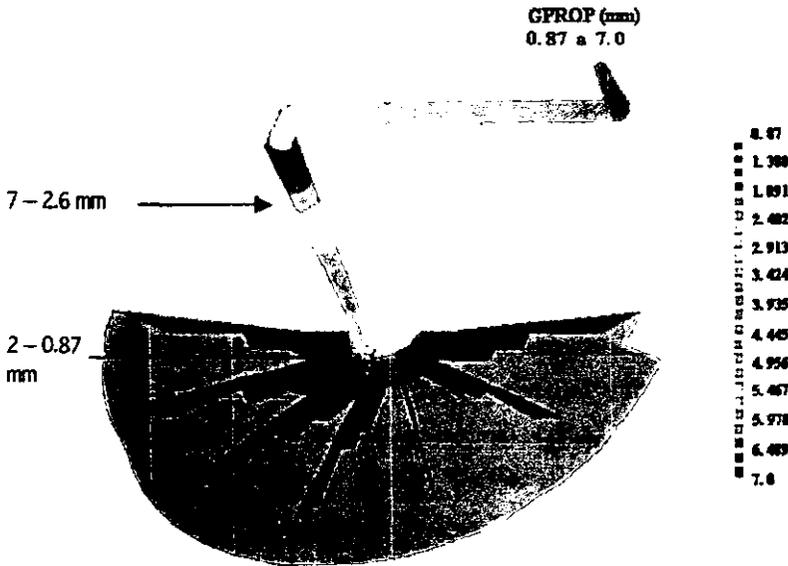


Figura 5.8. -- Espesores originales de la polea

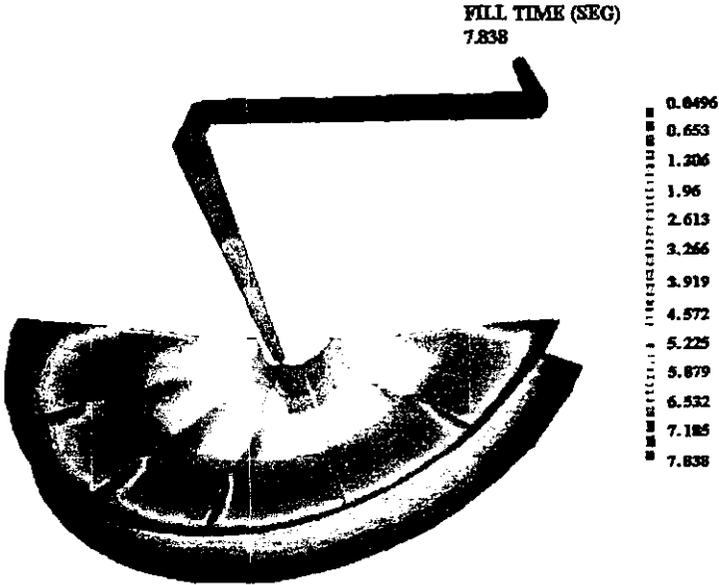


Figura 5.9. -- Tiempo de llenado

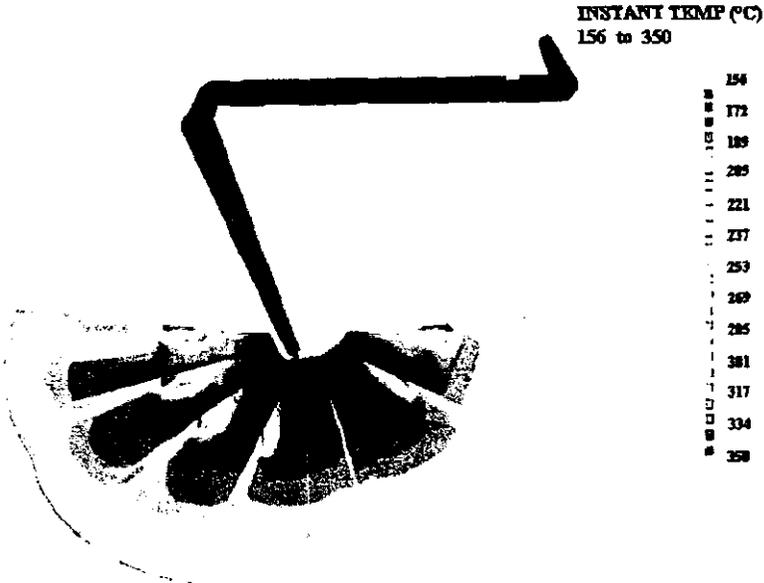


Figura 5.10. — Temperatura de la masa fundida en el momento que se llena la cavidad

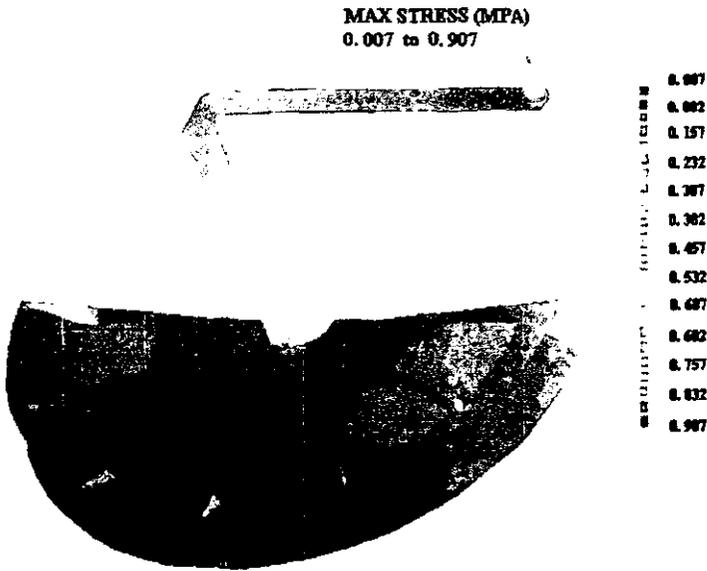


Figura 5.11. — Esfuerzo cortante

Debido a que el valor máximo de esfuerzo cortante de la pieza se encuentran en el punto de inyección y no se aprecia completamente, se realiza un acercamiento de este. La figura 5.12 muestra este acercamiento.

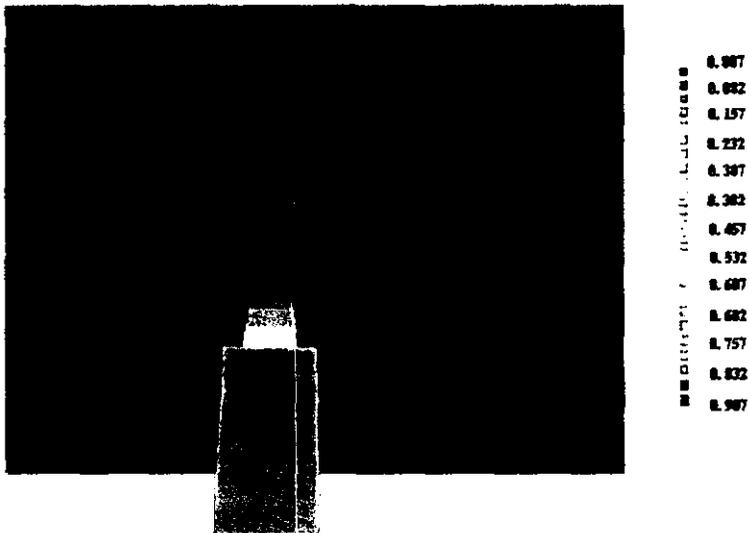


Figura 5.12. – Acercamiento del punto de inyección de la gráfica de esfuerzo cortante

Se analizan la simulación y se encuentra en la figura 5.10 que se esta rebasando el gradiente de 20°C, por lo que se pueden presentar problemas de pandeo. Además, en la figura 5.11, el material fluye con un esfuerzo cortante mayor a la permisible (0.85 MPa), el cual genera problemas de esfuerzos residuales.

Se propone reducir la temperatura de inyección puesto que es muy alta, con el propósito de reducir el gradiente de temperatura. También se propone ampliar las dimensiones del punto de inyección y el canal que une a la colada con el punto de inyección (ecuaciones 2.6 y 3.15) con el objetivo de reducir los niveles de esfuerzo cortante. Los resultados se muestran a continuación.

Las condiciones de moldeo propuestas son (tabla 5.5):

Propiedad	Polea propuesta
Temp. del molde	60°C
Temp. de la masa fundida	270°C
Tiempo de inyección	7 seg.
Material	Nylon 30% fibra de vidrio

Tabla 5.5. – Condiciones propuestas de moldeo

La gráfica de tiempo de inyección es similar en los dos casos, por lo que no se repite. La figura 5.13 muestra la polea con las modificaciones propuestas. La figura 5.14 muestra la temperatura instantánea que tiene la polea modificada. La figura 5.15 muestra los niveles de esfuerzo cortante que tiene la polea modificada.

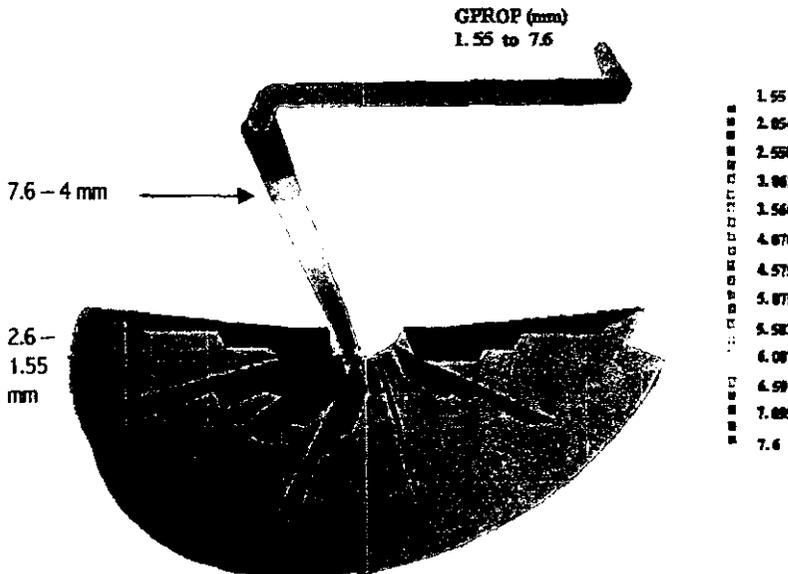


Figura 5.13. – Dimensiones de la polea propuesta

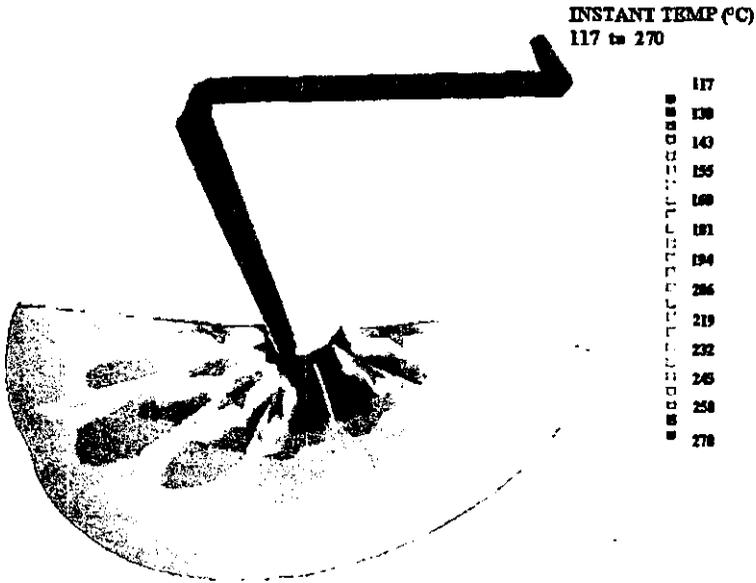


Figura 5.14. – Temperatura de la masa fundida de la polea modificada en el momento que se llena la cavidad



Figura 5.15. – Esfuerzo cortante de la polea modificada

Una vez más, se observa que los mayores niveles de esfuerzo cortante se concentran en el punto de inyección, por lo que se realizó nuevamente un acercamiento. La figura 5.16 muestra el acercamiento del punto de inyección en la gráfica de esfuerzo cortante

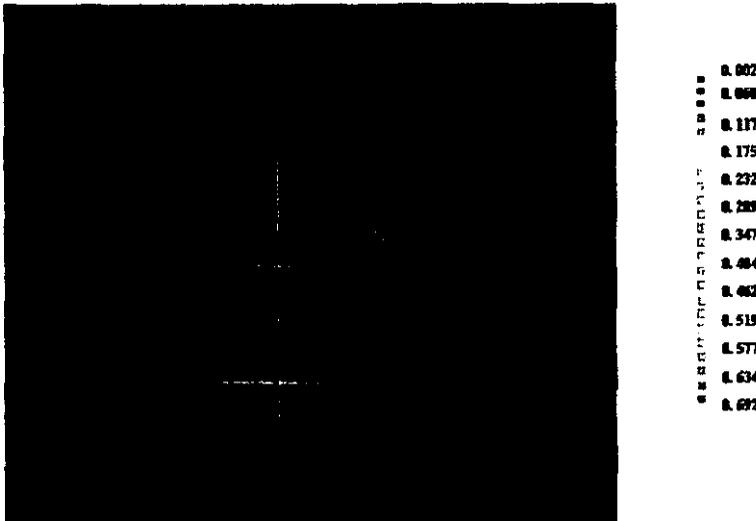


Figura 5.16. – Acercamiento del punto de inyección de la gráfica de esfuerzo cortante en la polea modificada

Se analiza la gráfica de temperatura de la polea propuesta y se observa que se encuentra alrededor de los 20°C permisibles, por lo que cumple con el gradiente permisible.

Lo que concierne al esfuerzo cortante, se observa que los niveles disminuyeron a 0.692 Mpa, lo cual se encuentra dentro de los límites de esfuerzo cortante.

Se realizó una tabla para detectar fácilmente las diferencias que existen entre el modelo original y el propuesto. La tabla 5.6 muestra estas diferencias.

Propiedad	Polea original	Polea propuesta
Temp. del molde	60°C	60°C
Temp. de la masa fundida	350°C	270°C
Tiempo de inyección	7 seg.	7 seg.
Material	Nylon 30% fibra de vidrio	Nylon 30% fibra de vidrio
Gradiente de temperatura	350 a 156°C	270 a 117°C
Esfuerzo cortante	0.007 a 0.907 MPa	0.002 a 0.692 MPa

Tabla 5.6. – Comparación entre modelos original y propuesto

El gradiente de temperatura descrita en la tabla, no es el gradiente que se debe tomar en cuenta, pues varían los espesores de la pieza. Se colocaron de esta manera solo como ilustración de la diferencia de gradientes entre las poleas, ya que es mayor el de la original al de la propuesta.

### Conclusiones

- Los resultados son satisfactorios y se concluye que se deben modificar las dimensiones de los puntos de inyección y sistema de canales para evitar problemas de esfuerzos residuales y por consiguiente el pandeo de la pieza.
- En el proceso de inyección, se debe bajar la temperatura de inyección para evitar problemas de pandeo de la pieza y degradación del material.
- Realizar pruebas con las modificaciones propuestas con el fin de validar el rediseño del molde.

## Conclusiones

De lo presentado con antelación, se puede concluir que:

- La manufactura se ve beneficiada con el uso de estos sistemas al realizar simulaciones de flujo para predecir el conformado del material en la fase de manufactura. Si bien nada es exacto, una aproximación del fenómeno permite obtener la idea principal de tal. Por esta razón, el aplicar este tipo de sistemas despeja muchas dudas y aclara el panorama de cómo será la inyección del plástico en la realidad. Dicho de otra manera, este tipo de sistemas ayuda a conocer en forma aproximada las variables de interés; y se parte de aquí para obtener las variables reales del proceso. Las variables reales del proceso se obtienen directamente en la máquina de inyección, que serán cercanas, o en algunos casos iguales, a las variables que se obtuvieron de la simulación de inyección de plástico, reduciendo costos en la producción de moldes y en tiempo.
- El dar solución a este tipo de sistemas, es más complejo de lo que se plantea en este trabajo. Para poder dar solución, se necesita conocer más acerca de los métodos numéricos de elementos finitos y diferencias finitas, así como la solución de volúmenes de control. Entendido esto, se deben realizar programas para dar soluciones en tiempos razonables. Cada uno de los puntos antes mencionados, por su gran extensión, pueden ser considerados temas de tesis. En la actualidad, computadoras personales y una gran cantidad de sistemas de simulación, proporcionan al Ingeniero, un medio económico y eficiente para resolver complejos problemas de Ingeniería.
- Si se desea tener un estudio más exacto, se deben tomar en cuenta modelos de viscoelasticidad más complejos que permitan una descripción más precisa de los fluidos viscoelásticos, al igual que crear una función de la conductividad térmica que involucre la temperatura de la masa fundida para tener un modelo más cercano a la realidad.
- El análisis dimensional es una herramienta muy útil, pues permite simplificar bastante las ecuaciones, pero se debe estar seguro de que las consideraciones hechas en el análisis dimensional estén acorde con el análisis de la pieza en cuestión; de lo contrario, no se pueden predecir los errores que esto conlleva; es decir, si la pieza en cuestión no cumple con las consideraciones hechas en el análisis dimensional, la simulación es errónea.
- El comprender las consideraciones que se llevan a cabo ayuda a obtener simulaciones cercanas a el proceso real de inyección de plástico. El modelo debe estar dentro de los parámetros establecidos en el análisis dimensional, por ejemplo, tener una relación espesor-longitud pequeña, sirve para obtener simulaciones confiables, además de que la mayoría de los productos plásticos están dentro de estos parámetros establecidos.
- El poder simular piezas de relaciones espesor-longitud pequeñas se considera una desventaja. Aunque la mayoría de los productos plásticos están dentro de esta relación, a veces es necesario producir piezas de espesores mayores los cuales no se pueden simular, por lo que se necesita recurrir a técnicas más avanzadas como estudio de flujo tridimensional.
- Dentro del análisis térmico, la temperatura del molde se considera constante, sin embargo, debido al ciclo de inyección, es un proceso el cual varía sin poder predecir la magnitud del error.

- La consideración de simetría en el flujo se produjo al considerar temperaturas semejantes tanto para la cavidad como para el corazón del molde, por lo que en el proceso real se debe cerciorar de estas temperaturas sean semejantes, de lo contrario se producirán resultados diferentes a los de la simulación.
- En algunos casos se necesita tener una amplia experiencia en el proceso de conformado de materiales plásticos y diseños de moldes de inyección de plásticos. Esto se debe a que en algunas ocasiones, los diseños son tan complejos, que el comportamiento del material dentro de la cavidad es diferente y no son suficientes los estudio generados en este trabajo.
- Personalmente, el desarrollo de esta tesis sirvió para darme cuenta de que existen áreas en las cuales se aplican los conocimientos adquiridos durante la carrera. Para este trabajo, se conjuntaron los conocimientos de cálculo vectorial, métodos numéricos, mecánica del medio continuo, dinámica de fluidos, diseño y manufactura asistidos por computadora, con la exigencia de actualización de conocimientos matemáticos.
- Debido a su complejidad y los variados campos que se abarcaron en esta tesis, el estudiar y comprender el llenado de moldes de inyección de plástico, en lo personal, fue un reto agradable que se logró exitosamente, ya que se entendió parte del conformado de los plásticos.

## Referencias

- Aris. *"Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics"*.  
United Kingdom, Ed. Prentice Hall, 1962.
- Arthur W. Birley. *"Physics of Plastics Processing, Properties and Materials Engineering"*.  
Ed. Hansen.
- Donald Rosato, Dominick Rosato. *"Injection Molding Handbook"*  
Ed. Van Nostrand Reinhold, 1986.
- Kennedy. *"Flow Analysis Reference"*  
Australia, Ed. Shortrun Books, 1993, p.p. 59 - 89
- Lawrence E. Malvern. *"Introduction to the Mechanics of Continuous Medium"*  
New Jersey, Ed. Prentice hall, 1969.
- Enzo Levi. *"Mecánica del Medio Continuo"*  
Mexico, Ed. Limusa-Wiley, 1971.
- Enzo Levi. *"Mecánica de Fluidos"*  
México, Ed. Castilla, 1970.
- *"Intergraph Engineering Modeling System (EMS)"*  
Reference manual, USA, 1994
- *"Intergraph Injection Flow Analysis (I/Flow)"*  
Reference manual, USA, 1994
- *"Intergraph MF/Flow Pre/Post Processing"*  
Reference manual, USA, 1994
- Landou and Lifshitz. *"Fluid Mechanics"*  
Moscow, Ed. Butterworth Heinemann, 1986.
- Mase and Mase. *"Continuum Mechanics"*  
USA, Ed. CRC Pres, 2000.
- Nicholas p. Cheremisinoff, Ramesh Gupta. *"Handbook of Fluids in Motion"*  
Ed. Ann Arbor Science.

- Shames, Irvin. "*Mechanics of Fluids*"  
México, Ed. Mc Graw Hill.
- Tanner, Roger I. "*Engineering Rheology*"  
Oxford Science Publications.
- Victor L. Streeter. "*Mecánica de Fluidos*"  
México, Ed. Mc Graw Hill, 2000.
- Cruz M, García V, Hernández G, Memorias del VIII Congreso Anual de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica, Grupo Celanese SA, México, 2001.
- Barrón M, Martínez O, Análisis de Falla de una Cubierta de Plástico.  
Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1997
- Ruiz J, Simulación del Llenado de Moldes Mediante la Técnica del Elemento Finito.  
Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1998.

Internet

<http://filemon.mecanica.upm.es/~felipe/>  
<http://filemon.mecanica.upm.es/~goico/teo/ap.html>  
<http://www.plasticstechnology.com>  
<http://www.plastico.com>  
<http://www.moldflow.com>  
<http://www.plasticszone.com>