



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS ATMOSFERICOS DE MESOESCALA
BASADOS EN EL USO DE PROYECCIONES:
LIMITES Y EXTENSIONES

700137

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :
F I S I C O
P R E S E N T A :
XAVIER TREVIÑO THEESZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARCO ANTONIO NUÑEZ PERALTA



DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

2002



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



REPUBLICA NACIONAL
ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Profesora de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Modelos Atmosféricos de Mesoescala
basados en el uso de Proyecciones: Límites y extensiones"

Realizado por Xavier Treviño Theesz

Con número de cuenta 9251791-0, pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. MARCO ANTONIO NUÑEZ PERALTA

Marcos Peralta - Marco Antonio

Propietario

M. EN C. ISMAEL PEREZ GARCIA

Ismael Perez Garcia

Propietario

DR. FEDERICO MENDEZ LAVIELLE

Federico Mendez Lavielle

Suplente

DR. ERNESTO DO SANTOS CAETNAO NETO

Ernesto do Santos Caetano Neto

Suplente

DR. ABRAHAM MEDINA OVANDO

Abraham Medina Ovando

Consejo Departamental de Física



Patricia Goldstein Memache

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MEMACHE
Coordinadora de Licenciatura
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

Modelos atmosféricos de mesoescala basados en el uso de proyecciones: límites y extensiones

Xavier Treviño Theesz

Índice General

1	Sistemas de coordenadas	6
1.1	Sistema de referencia primario, elipsoide de referencia \mathcal{E} y coordenadas geodéticas	6
1.2	Modelo esférico terrestre y coordenadas esféricas	8
1.3	Sistema de coordenadas asociado a un plano tangente	10
2	Proyecciones	11
2.1	Una fuente de error en modelos de mesoescala	11
2.2	Coordenadas de Proyección	14
2.2.1	Proyecciones	16
2.2.2	Proyecciones conformes	17
2.2.3	Proyección estereográfica polar	19
3	Ecuaciones de conservación	23
3.1	Coordenadas eulerianas y lagrangianas relativas al marco inercial $X'Y'Z'$	23
3.1.1	Teorema del transporte de Reynolds	24
3.2	Ecuaciones de conservación en el marco inercial $X'Y'Z'$	25
3.2.1	Conservación de masa (ecuación de continuidad)	25
3.2.2	Conservación de momento para un flujo no viscoso (ecuación de movimiento)	26
3.3	Ecuaciones de conservación en el marco no inercial XYZ fijo a la Tierra	27
3.3.1	Conservación de masa (ecuación de continuidad)	30
3.3.2	Conservación de momento (ecuación de movimiento)	31
3.3.3	Ecuaciones de conservación en el sistema cartesiano xyz asociado al plano tangente	32

4	Ecuaciones de conservación en coordenadas esféricas y de proyección	34
4.1	Análisis Tensorial	34
4.1.1	Cambio de coordenadas	34
4.1.2	Vectores covariantes y contravariantes	34
4.1.3	Bases recíprocas	37
4.1.4	Producto punto	37
4.1.5	Transformación de coordenadas	38
4.1.6	Cambio de base	38
4.1.7	Transformación de los componentes de un vector	39
4.1.8	Derivadas covariantes	40
4.2	Ecuaciones de conservación en coordenadas arbitrarias	42
4.2.1	Ecuación de movimiento en coordenadas arbitrarias	43
4.2.2	Ecuación de continuidad en coordenadas arbitrarias	46
4.3	Ecuaciones en coordenadas esféricas	47
4.3.1	Ecuación de continuidad	48
4.3.2	Ecuación de movimiento	48
4.4	Ecuaciones en coordenadas de proyección	50
4.4.1	Vectores de posición, velocidad y aceleración en coordenadas x_p, y_p, z_p	53
4.4.2	Ecuación de continuidad	56
4.4.3	Ecuación de movimiento	56
4.4.4	La proyección estereográfica polar	58
5	Análisis de las ecuaciones de conservación usadas por los modelos de mesoescala	61
5.1	El caso de la atmósfera hidrostática	62
5.2	El caso de un flujo estacionario bidimensional	63
5.2.1	Cálculo de isobaras para un campo dado de velocidades en el sistema xyz	63
5.2.2	Campo de velocidades de un flujo potencial bidimensional irrotacional	65
5.2.3	Flujo potencial bidimensional alrededor de un cilindro circular	67
5.2.4	Comparación de las ecuaciones de conservación	70
6	Conclusiones	75
A	Ejemplo: ecuaciones de Haltiner	77

Índice de Figuras

1	Elipsoide de revolución	7
2	Coordenadas esféricas en la esfera terrestre	10
3	coordenadas cartesianas en el plano tangente	11

4	Coordenadas de proyección y plano tangente	13
5	Plano tangente a la esfera terrestre	14
6	Sistemas de coordenadas cartesianas inercial X_i y no inercial X'_i	15
7	a) proyección de Lambert: b) proyección de Mercator; c) proyec- ción estereográfica	17
8	Sistema xyz asociado al plano tangente	32
9	Sistema de coordenadas arbitrarias y_i	35
10	36
11	El vector Ω en función de las coordenadas esféricas	50
12	El plano \mathcal{P}_ϵ	64
13	Coordenadas cartesianas y esféricas en el plano \mathcal{P}_ϵ	67

Introducción

Existen y se usan en México paquetes computacionales que modelan el comportamiento la atmósfera con objetivos meteorológicos. Existen dos tipos de escalas de trabajo, la sinóptica, que modela a escala global y la de mesoescala, que modela a escala local. Es el segundo en el que se centra este trabajo, en el que se elabora un análisis de la forma en la cual se construyen estos modelos de mesoescala, sobre todo concentrándose en los sistemas de coordenadas y en su implicación en la deducción de las ecuaciones atmosféricas de conservación.

Son dos los objetivos que se siguen con este trabajo. Por un lado se trata de entender cuáles son las consecuencias de usar un determinado sistema coordinado de referencia, así como el efecto que el uso de este tiene en los resultados finales y en la manipulación de las ecuaciones de conservación para simplificar los cálculos. El uso de proyecciones para analizar el comportamiento de la atmósfera es un instrumento generalizado, sin embargo, es interesante estudiar el efecto que tiene sobre las variables físicas, por ejemplo en la representación de la topografía o en las ecuaciones de conservación. Por otro lado se trata también de desarrollar y describir en un mismo trabajo, los diferentes aspectos que se tocan para entender las bases de los modelos atmosféricos. La literatura es, hasta este momento, muy dispersa y muy especializada en algún aspecto del tema, y existen pocos textos que tengan como propósito dar una clara idea general del problema.

El trabajo se divide en cinco capítulos: 1) sistemas de coordenadas, 2) proyecciones, 3) ecuaciones de conservación, 4) ecuaciones de conservación en coordenadas esféricas y de proyección, y 5) análisis de las ecuaciones de conservación usadas por los modelos de mesoescala.

En el primer capítulo se tocan dos temas. En primer lugar, dada la forma elipsoidal de la Tierra, se plantean las dificultades de tomar un modelo esférico de la superficie terrestre. En segundo lugar, se definen los tres sistemas de coordenadas usadas en el trabajo, cartesianas con origen en el centro de la esfera terrestre, esféricas y cartesianas asociadas a un plano tangente.

El uso de proyecciones en la modelación atmosférica es una práctica recurrente. Existen ventajas y desventajas, cuyo análisis es parte del segundo capítulo. Al mismo tiempo que se explican las distintas formas de proyecciones de una esfera (en este caso la esfera terrestre construida en el primer capítulo) en un plano (en este caso el llamado plano tangente), se definen las ecuaciones de proyección y se analizan los problemas que surgen al seguir este tipo de métodos. Se plantean también las ecuaciones de transformación entre las coordenadas de proyección y las asociadas al plano tangente.

En el tercer capítulo se parte de los principios de conservación de masa y de momento, de manera que se llega a las ecuaciones de continuidad y de movimiento, tanto para un marco inercial, como para uno no inercial que sigue a la Tierra en su rotación. La característica más importante en estos desarrollos es el uso de un método y una notación que permite entender los procesos seguidos con una mayor fluidez.

El cuarto capítulo es donde se propone un método para definir las ecuaciones

de conservación en términos de las coordenadas de proyección. Para esto se usan, tanto la transformación de las coordenadas esféricas en las de proyección, como el desarrollo de las ecuaciones de continuidad y movimiento en coordenadas arbitrarias. Para esto último se propone la expresión de estas ecuaciones en términos de los vectores covariantes, con lo cual se introducen aspectos de análisis tensorial. En particular, se trabaja más la proyección estereográfica polar, es decir, con el plano tangente al polo norte.

En el último capítulo se comparan las ecuaciones de conservación "exactas", es decir, en las coordenadas cartesianas asociadas al plano tangente, con las ecuaciones en coordenadas de proyección. Esta comparación se hace en dos casos específicos, en el caso de una atmósfera hidrostática y en el de un flujo estacionario. Este proceso se hace comparando las isobaras para cada una de estas ecuaciones.

1 Sistemas de coordenadas

La forma física de la Tierra es demasiado irregular para ser usada directamente. Lo que se hace es definir superficies matemáticas auxiliares, a partir de las cuales se determina la función topografía, es decir, la altura del terreno. Para trabajar con la superficie terrestre se usan dos tipos de coordenadas, las cartesianas y las polares. Las coordenadas polares son las más naturales para superficies curvilíneas.

Como superficie de referencia básico, en principio se usa la superficie equipotencial en el nivel del mar. Sin embargo esta superficie por una lado no es simétrica, y por otro no se conoce totalmente. Así que se introduce entonces una superficie simétrica de revolución, que en este caso es un elipsoide de revolución, que se construye como la que minimiza el error con el geode.

1.1 Sistema de referencia primario, elipsoide de referencia \mathcal{E} y coordenadas geodéticas

El sistema de referencia primario es un sistema cartesiano $X'Y'Z'$ con origen en el centro geométrico del modelo elipsoidal terrestre. El sistema $X'Y'Z'$ se considera un sistema inercial, con respecto al cual el elipsoide de referencia se define como un elipsoide de revolución \mathcal{E} con el eje Z' como el eje de revolución. Si se define a como el semieje mayor y b como el semieje menor, la ecuación que la describe es:

$$\frac{X'^2 + Y'^2}{a^2} + \frac{Z'^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (1)$$

Sea X, Y, Z el sistema cartesiano fijo a la tierra, es decir, cuyos ejes X, Y rotan con ella y que son los ejes $X'Y'$ rotados un ángulo $\Lambda(t) = \Omega t + \Lambda_0$, donde Ω es la velocidad angular terrestre con respecto al eje $Z = Z'$ y Λ_0 es un ángulo arbitrario que podemos tomar, sin perder generalidad, por $\Lambda_0 = 0$. La relación entre las coordenadas de un punto en los dos sistemas de coordenadas es:

$$\begin{aligned} X' &= X \cos \Lambda + Y \sin \Lambda \\ Y' &= -X \sin \Lambda + Y \cos \Lambda \\ Z' &= Z \end{aligned}$$

Ya que $X^2 + Y^2 = (X \cos \Lambda + Y \sin \Lambda)^2 + (-X \sin \Lambda + Y \cos \Lambda)^2 = X'^2 + Y'^2$, la ecuación que describe al elipsoide es

$$E(X, Y, Z) = \frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - 1 = 0$$

Sea P un punto cualquiera en la superficie del elipsoide, el radio de curvatura del meridiano en este punto es:

$$M(\phi_P) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 \phi_P)^{3/2}} \quad (2)$$

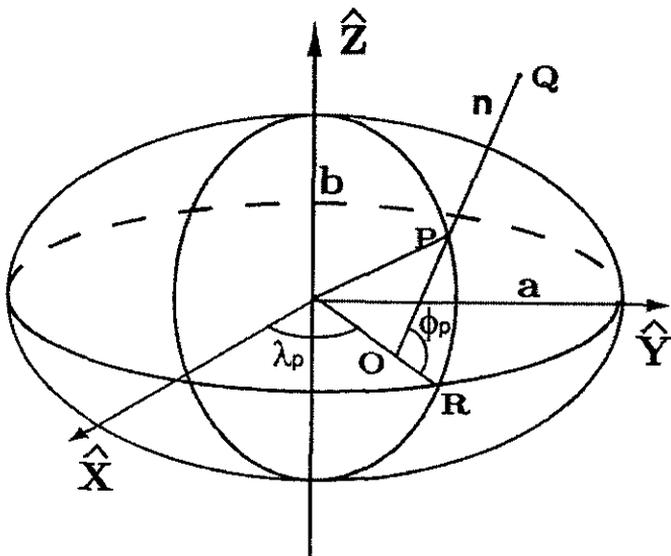


Figura 1: Elipsoide de revolución

y el radio de curvatura en la dirección perpendicular es

$$N(\phi_P) = a(1 - \epsilon^2 \sin^2 \phi_P)^{-1/2} \quad (3)$$

donde $\epsilon^2 = 1 - (b/a)^2$ es la excentricidad del elipsoide.

La localización de un punto P sobre la superficie del elipsoide \mathcal{E} se define por la latitud geodética ϕ_P y la longitud λ_P , donde ϕ_P es el ángulo entre la recta normal a \mathcal{E} en el punto P y el plano ecuatorial XY y λ_P es el ángulo entre el meridiano de referencia (que definimos sobre el plano XZ) y el plano POR como se muestra en la fig.1. Entonces las coordenadas cartesianas del punto $P(\lambda_P, \phi_P)$ en \mathcal{E} están dadas por

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{E}} &= N(\phi_P) \cos \phi_P \cos \lambda_P \\ Y_{\mathcal{E}} &= N(\phi_P) \cos \phi_P \sin \lambda_P \\ Z_{\mathcal{E}} &= N(\phi_P)(1 - \epsilon^2) \sin \phi_P \end{aligned} \quad (4)$$

es decir, la forma vectorial del cualquier punto P en la superficie es

$$\vec{r}(\lambda_P, \phi_P) = X_{\mathcal{E}}(\lambda_P, \phi_P) \hat{X} + Y_{\mathcal{E}}(\lambda_P, \phi_P) \hat{Y} + Z_{\mathcal{E}}(\lambda_P, \phi_P) \hat{Z}$$

donde $\phi_P \in (-\pi, \pi]$ y $\lambda_P \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Tomemos ahora un punto Q cualquiera en el espacio, con coordenadas cartesianas (X, Y, Z) respecto al centro del elipsoide. Sea P el punto en la superficie

del elipsoide más cercano a Q y sea h_P la distancia entre ellos. Si λ_P es la longitud del punto P y ϕ_P es su latitud, el punto Q se puede definir vectorialmente como $\vec{r}(\lambda_P, \phi_P) + h_P \hat{n}(\lambda_P, \phi_P)$, donde $\hat{n}(\lambda_P, \phi_P)$ es el vector normal al elipsoide en el punto P .

Ahora, sabemos que la expresión del vector normal al elipsoide en un punto (X_E, Y_E, Z_E) es:

$$\hat{n}(X_E, Y_E, Z_E) = \left[\frac{\frac{\partial \phi}{\partial X} \hat{X} + \frac{\partial \phi}{\partial Y} \hat{Y} + \frac{\partial \phi}{\partial Z} \hat{Z}}{\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)^2 \right]^{1/2}} \right]_{X=X_E, Y=Y_E, Z=Z_E},$$

donde, ϕ se define tal como aparece en la ec.(1). Usando que $\frac{\partial \phi}{\partial X} = 2 \frac{X}{a^2}$, $\frac{\partial \phi}{\partial Y} = 2 \frac{Y}{a^2}$, $\frac{\partial \phi}{\partial Z} = 2 \frac{Z}{b^2}$, resulta que

$$\hat{n}(X_E, Y_E, Z_E) = \frac{X_E}{[X_E + Y_E + \frac{a^4}{b^4} Z_E]^{1/2}} \hat{X} + \frac{Y_E}{[X_E + Y_E + \frac{a^4}{b^4} Z_E]^{1/2}} \hat{Y} + \frac{Z_E}{[\frac{b^4}{a^4} X_E + \frac{b^4}{a^4} Y_E + Z_E]^{1/2}} \hat{Z}$$

y simplificando

$$\hat{n}(X_E, Y_E, Z_E) = \left(\cos \lambda_P \hat{X} + \sin \lambda_P \hat{Y} \right) \cos \phi_P + \sin \phi_P \hat{Z}.$$

Entonces las coordenadas cartesianas de cualquier punto en el espacio se obtienen de la suma del vector posición de P y el vector posición de Q respecto a P :

$$\begin{aligned} X &= X_E + h_P \cos \phi_P \cos \lambda_P \\ Y &= Y_E + h_P \cos \phi_P \sin \lambda_P \\ Z &= Z_E + h_P \sin \phi_P \end{aligned} \quad (5)$$

donde X_E, Y_E, Z_E están dadas por la ec.(4).

1.2 Modelo esférico terrestre y coordenadas esféricas

Varios modelos existentes de mesoescala consideran que los datos de elevación del terreno están definidos con respecto a un modelo esférico terrestre, que denotamos por S . Esto motiva la definición de un modelo esférico a partir del sistema de referencia XYZ fijo al elipsoide de referencia \mathcal{E} . La esfera S se define como tangente al elipsoide en un punto $P_c = (\lambda_c, \phi_c)$ en la superficie del mismo.

Sabemos que una esfera es una elipse con excentricidad cero, es decir, $e_s^2 = 0$, de manera que los radios de curvatura [ecs.(2) y (3)] son iguales e independientes de la dirección,

$$N_s(\phi_P) = M_s(\phi_P) = R_0$$

y este radio se denota como R_0 . Si definimos $R_0 = \sqrt{MN}$, el promedio geométrico de los dos radios de curvatura del elipsoide tangente en el punto P_c , el radio de la esfera terrestre es

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \sqrt{M(\phi_c)N_c(\phi_c)} \\
 &= \sqrt{\frac{a(1-\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2\sin^2\phi_c)^{3/2}} \frac{a}{(1-\epsilon^2\sin^2\phi_c)^{1/2}}} \\
 &= \frac{a(1-\epsilon^2)^{1/2}}{(1-\epsilon^2\sin^2\phi_c)}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Este valor del radio implica una mínima distorsión de figuras en \mathcal{E} cuando se proyectan en la esfera [8, pp. 24 y 85].

Adoptamos ahora el sistema cartesiano $X_s Y_s Z_s$ cuyo origen está en el centro de S . Los ejes de este sistema tienen la misma orientación que los ejes X, Y, Z . Así, las ecuaciones de transformación entre los sistemas de coordenadas XYZ y $X_s Y_s Z_s$ corresponden a una traslación $\mathbf{X}_s = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$, donde \mathbf{X}_0 son las coordenadas del centro de S en el sistema XYZ .

Usando la ec.(5), cualquier punto Q en el espacio se puede localizar por las coordenadas esféricas λ_s, ϕ_s asociadas al sistema $X_s Y_s Z_s$ haciendo $\epsilon_s^2 = 0$, es decir, $a = b = N = M = R_0$ (radio terrestre), obtenemos

$$\begin{aligned}
 X_s &= r \cos \phi_s \cos \lambda_s \\
 Y_s &= r \cos \phi_s \sin \lambda_s \\
 Z_s &= r \sin \phi_s
 \end{aligned} \tag{7}$$

donde ϕ_s, λ_s son las coordenadas del punto Q y r es la distancia entre Q y el centro de S (fig. 2).

El centro de la esfera tangente en coordenadas XYZ se obtiene usando $h_p = -R_0$ en la ec.(5), y tomando en cuenta que el punto más cercano en la superficie del elipsoide al centro de la esfera tangente es el punto P_c , está dado por

$$\begin{aligned}
 X_0 &= X_c - R_0 \cos \lambda_c \cos \phi_c \\
 Y_0 &= Y_c - R_0 \sin \lambda_c \cos \phi_c \\
 Z_0 &= Z_c - R_0 \sin \phi_c
 \end{aligned}$$

donde X_c, Y_c, Z_c son las coordenadas del punto P_c . Una vez definido el radio y su centro, la esfera está totalmente definida.

A partir de ahora, se denotará con h_s a la distancia entre un punto Q en el espacio y el punto más cercano a la esfera, de manera que se puede expresar como

$$h_s = r - R_0.$$

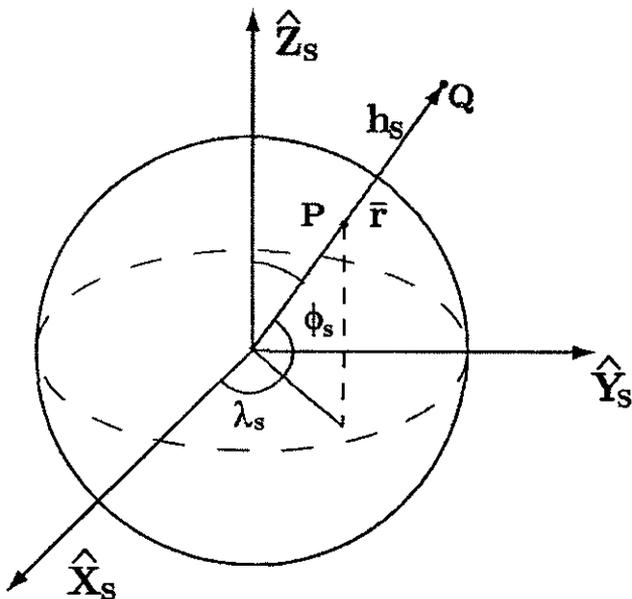


Figura 2: Coordenadas esféricas en la esfera terrestre

1.3 Sistema de coordenadas asociado a un plano tangente

Sea T el plano tangente a \mathcal{E} en el punto $P_c = (\lambda_c, \phi_c)$ que está sobre el meridiano de referencia $\lambda_c = 0$. En T adoptaremos el siguiente sistema cartesiano local xyz : el origen $x = y = z = 0$ está en P_c , el eje x es tangente al paralelo que pasa por P_c y es positivo hacia el este, el eje y es tangente al meridiano $\lambda_c = 0$ y positiva hacia el norte, el eje z es positivo hacia fuera de \mathcal{E} , como se ve en la fig.3. Si $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ denotan a los vectores unitarios a lo largo de los ejes positivos x, y, z , respectivamente, estarán dados por

$$\hat{x} = \hat{Y}, \quad \hat{y} = -\sin \phi_c \hat{X} + \cos \phi_c \hat{Z}, \quad \hat{z} = \cos \phi_c \hat{X} + \sin \phi_c \hat{Z}.$$

Entonces la relación entre las coordenadas geodéticas λ, ϕ, h de un punto en el espacio y sus coordenadas x, y, z relativas a T son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_c & 0 & \cos \phi_c \\ \cos \phi_c & 0 & \sin \phi_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mathcal{E}}(\lambda, \phi) - X_{\mathcal{E}}(\lambda_c, \phi_c) + h \cos \phi \cos \lambda \\ Y_{\mathcal{E}}(\lambda, \phi) + h \cos \phi \sin \lambda \\ Z_{\mathcal{E}}(\lambda, \phi) - Z_{\mathcal{E}}(\lambda_c, \phi_c) + h \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Si hacemos $\epsilon = 0$, y $a = b = R_0$ es el radio terrestre, entonces las ecs.(8) se reducen a

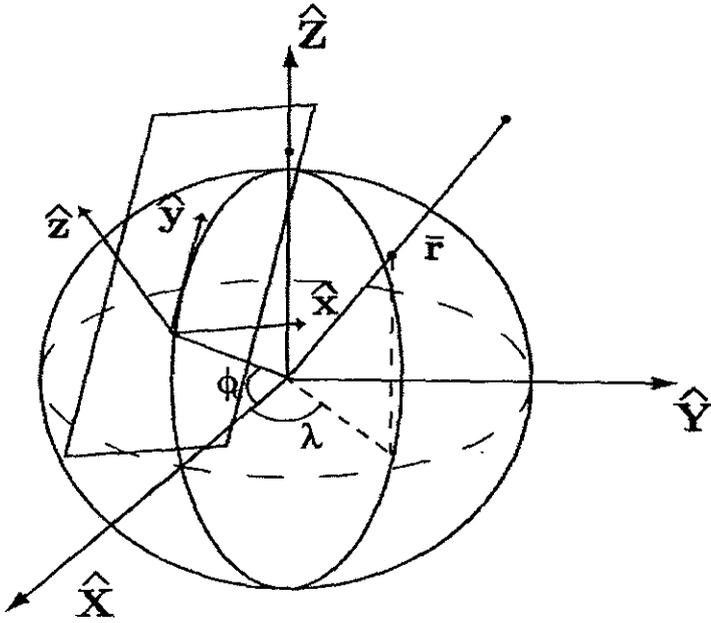


Figura 3: coordenadas cartesianas en el plano tangente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_c & 0 & \cos \phi_c \\ \cos \phi_c & 0 & \sin \phi_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (R_0 + h) \cos \phi_c \cos \lambda_c - R_0 \cos \phi_c \cos \lambda_c \\ (R_0 + h) \cos \phi_c \sin \lambda_c - R_0 \cos \phi_c \sin \lambda_c \\ (R_0 + h) \sin \phi_c - R_0 \sin \phi_c \end{pmatrix} \quad (9)$$

2 Proyecciones

2.1 Una fuente de error en modelos de mesoescala

Una práctica común en la modelación atmosférica de mesoescala es el uso de proyecciones de la esfera terrestre en un sistema cartesiano asociado a un plano tangente, con el propósito de incorporar efectos de curvatura. Este procedimiento plantea algunos problemas que analizaremos a continuación.

En primer lugar, los modelos digitales de elevación del terreno están definidos a partir de un elipsoide de referencia y no con respecto a una esfera como consideran modelos de mesoescala como MM5, RAMS o ARPS, entre otros [1], [9], [5], [4]. Esto plantea el problema adicional de estimar un radio terrestre R_S adecuado para el modelo esférico terrestre. En la documentación de los modelos MM5, RAMS y ARPS no se da ningún criterio para estimar este valor de R_S y

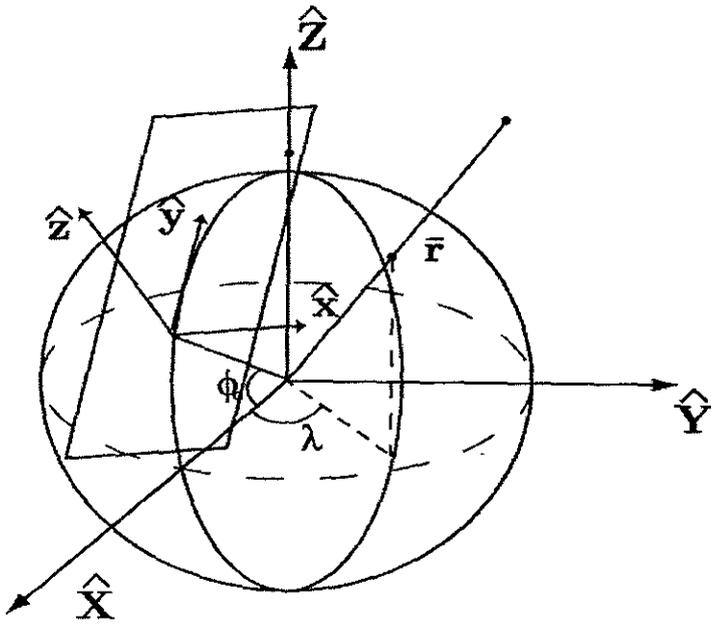


Figura 3: coordenadas cartesianas en el plano tangente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_c & 0 & \cos \phi_c \\ \cos \phi_c & 0 & \sin \phi_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (R_0 + h) \cos \phi_c \cos \lambda_c - R_0 \cos \phi_c \cos \lambda_c \\ (R_0 + h) \cos \phi_c \sin \lambda_c - R_0 \cos \phi_c \sin \lambda_c \\ (R_0 + h) \sin \phi_c - R_0 \sin \phi_c \end{pmatrix} \quad (9)$$

2 Proyecciones

2.1 Una fuente de error en modelos de mesoescala

Una práctica común en la modelación atmosférica de mesoescala es el uso de proyecciones de la esfera terrestre en un sistema cartesiano asociado a un plano tangente, con el propósito de incorporar efectos de curvatura. Este procedimiento plantea algunos problemas que analizaremos a continuación.

En primer lugar, los modelos digitales de elevación del terreno están definidos a partir de un elipsoide de referencia y no con respecto a una esfera como consideran modelos de mesoescala como MM5, RAMS o ARPS, entre otros [1], [9], [5], [4]. Esto plantea el problema adicional de estimar un radio terrestre R_S adecuado para el modelo esférico terrestre. En la documentación de los modelos MM5, RAMS y ARPS no se da ningún criterio para estimar este valor de R_S y

simplemente se propone el valor de $R_S = 6378$ km, sin considerar dato alguno sobre el elipsoide de referencia. En la sección 2.2 se ha propuesto un criterio para estimar R_S . Es claro que un valor arbitrario de R_S puede generar un error en los datos de elevación del terreno que pueden ser pequeños respecto a R_S , pero pueden también ser significativos si consideramos que la altura promedio de un dominio espacial de modelación de mesoescala es de tan sólo 20km.

El segundo problema que plantea el uso de un modelo esférico terrestre es la definición de los datos de elevación del terreno. Si consideramos que los modelos digitales de topografía están dados en coordenadas geodéticas $\{\lambda_k, \phi_k, h_k\}$ la cuestión es recalcular dichos datos para obtener un modelo digital $\{\lambda_{S_k}, \phi_{S_k}, h_{S_k}\}$ en coordenadas esféricas definidas con respecto al modelo esférico terrestre elegido. Este problema puede resolverse aplicando las ecuaciones de transformación de las secciones 2.1 y 2.2, con las cuales podemos calcular las coordenadas $\lambda_{S_k}, \phi_{S_k}, h_{S_k}$ a partir de un punto con coordenadas geodéticas λ_k, ϕ_k, h_k .

El tercer problema al que nos queremos referir mayormente en esta sección es el del uso de proyecciones en la definición de los datos de elevación. Para analizar este problema consideremos que conocemos los datos de elevación $\{\lambda_{S_k}, \phi_{S_k}, h_{S_k}\}$ con respecto a un modelo esférico terrestre, por lo cual en lo sucesivo, consideraremos sólo el problema de modelación atmosférica en el sistema $X_S Y_S Z_S$ con origen en un modelo esférico terrestre de radio R_0 y omitiremos el subíndice S en las coordenadas cartesianas X_S, Y_S, Z_S y esféricas λ_S, ϕ_S, r de un punto.

Entonces las ecuaciones de proyección de un punto λ, ϕ sobre la superficie de la esfera terrestre S se definen con un par de ecuaciones

$$x_p = x_p(\lambda, \phi) \quad y_p = y_p(\lambda, \phi)$$

donde x_p y y_p son las coordenadas del punto proyectado con respecto a un sistema rectangular cartesiano x_p, y_p, z_p definido en el plano de proyección \mathcal{P} . Normalmente se considera que el centro del dominio de modelación está sobre la esfera terrestre, tiene coordenadas (λ_c, ϕ_c) y coincide con el origen del sistema x_p, y_p, z_p :

$$x_p(\lambda_c, \phi_c) = 0 \quad y_p(\lambda_c, \phi_c) = 0 .$$

Por otro lado sabemos que un plano en el espacio físico queda unívocamente definido en el espacio si conocemos las coordenadas de un punto en el plano y un vector ortogonal a dicho plano. Es claro que el origen $x_p = y_p = 0$ es un punto en \mathcal{P} cuyas coordenadas cartesianas pueden calcularse a partir de λ_c y ϕ_c . Para dar un vector normal a \mathcal{P} basta con definir la elevación del terreno sobre C como la altura del terreno en la dirección de $\mathbf{n}(\lambda_c, \phi_c)$, el vector ortogonal a la esfera. De esta manera, la elevación del terreno sobre el origen de coordenadas en el espacio de proyección es exactamente la altura h_k , obtenida del modelo digital del terreno. Así, tanto el punto (λ_c, ϕ_c) , como el vector $\mathbf{n}(\lambda_c, \phi_c)$ definen unívocamente al plano de proyección \mathcal{P} . Pero esta definición corresponde a la del plano \mathcal{T} tangente a la esfera en el punto (λ_c, ϕ_c) , de manera que se puede afirmar que $\mathcal{T} = \mathcal{P}$.

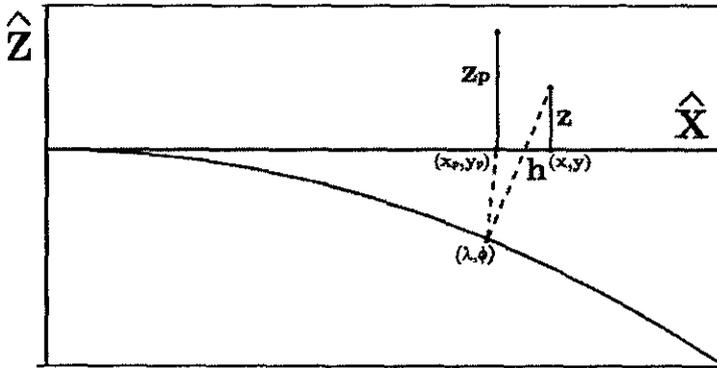


Figura 4: Coordenadas de proyección y plano tangente

Para terminar la identificación de \mathcal{P} , consideremos que la unidad de longitud en los ejes de los sistemas x_p, y_p y x, y [ecs.(9)] es la misma. Así, los ejes x y y coinciden con x_p y y_p respectivamente. En particular, cada punto (x_p, y_p) en el plano \mathcal{P} , obtenido por la proyección de un punto en la superficie de la esfera tiene las coordenadas

$$x = x_p = x_p(\lambda, \phi) \quad y = y_p = y_p(\lambda, \phi) \quad z = 0 \quad (10)$$

con respecto al sistema xyz asociado al plano tangente \mathcal{T} .

Ahora consideremos la definición de la elevación del terreno en modelos que usan proyecciones. De acuerdo con la documentación consultada, si la elevación del terreno sobre el punto (λ, ϕ) en la esfera es h , entonces la elevación z_p relativa al plano \mathcal{P} en el punto proyectado (x_p, y_p) es

$$z_p \sim h.$$

Si consideramos que la elevación del terreno z_p sobre el punto (x_p, y_p) en \mathcal{T} es la distancia entre el punto (x_p, y_p) y la superficie terrestre a lo largo de la recta ortogonal a \mathcal{T} que pasa por (x_p, y_p) , entonces h es sólo un valor aproximado de z_p , como lo ilustra la fig.4.

Podemos ver en la misma figura que si nos alejamos bastante del origen, la altura exacta del terreno sobre el plano tangente difiere mucho de la altura z_p . Si deseamos hallar la elevación z con respecto al plano tangente \mathcal{T} de un punto en la superficie terrestre que tiene coordenadas geodéticas (λ, ϕ, h) , debemos proyectar dicho punto en \mathcal{T} para obtener el punto (x, y) sobre el cual la elevación exacta del terreno es la coordenada z del punto (λ, ϕ, h) . La relación entre las coordenadas (x, y, z) y (λ, ϕ, h) de un mismo punto en el espacio, se obtiene a partir de las ecs.(9) planteadas en el capítulo anterior.

A partir de estas ecuaciones se puede ver que las coordenadas x, y del punto (λ, ϕ, h) dependen de la elevación h lo mismo que la coordenada vertical z . Sin embargo, si se usan proyecciones, se obtiene un punto (x_p, y_p) independiente de

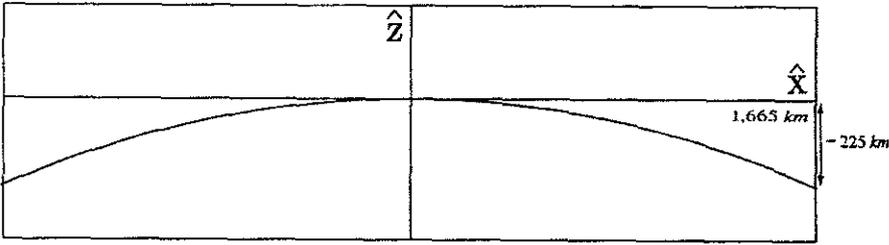


Figura 5: Plano tangente a la esfera terrestre

h , que en general no coincide con el punto (x, y) , por lo que en la práctica no puede calcularse la verdadera elevación z_p sobre (x_p, y_p) ya que la elevación del terreno sólo se conoce sobre un conjunto discreto (x_k, y_k) .

Sin embargo, el uso de proyecciones para calcular la elevación del terreno puede ser válido cerca del origen de coordenadas $x = y = z = 0$. Para tener una idea del error al usar la aproximación $z_p \sim h$ consideremos una superficie terrestre esférica, por lo cual $h = 0$, mientras que la verdadera elevación del terreno sobre un punto proyectado (x_p, y_p) está dada por

$$z_p = \sqrt{R^2 - x_p^2 - y_p^2} - R$$

independientemente de la proyección usada para calcular x_p, y_p y del origen (λ_c, ϕ_c) . La fig.5 muestra que el valor de z_p va de 0 a -225 km para $x_p \in [0, 1665 \text{ km}]$ por lo que la aproximación usada en algunos modelos de mesoescala $z_p \sim h$ es completamente errónea. Aunque el intervalo de 1665 km puede resultar excesivo, debe recordarse que actualmente el Servicio Meteorológico Nacional usa el paquete MM5 para modelar la meteorología sobre la República Mexicana, sobre un dominio horizontal de aproximadamente $3330 \times 3330 \text{ km}^2$, usando una proyección transversa de Lambert [véase la sección (2.2)].

2.2 Coordenadas de Proyección

El uso de proyecciones en los modelos de mesoescala no se ha restringido a la definición de la topografía. También se ha aplicado en la deducción de las ecuaciones que gobiernan la dinámica atmosférica, a saber, las ecuaciones de movimiento, de continuidad y de energía. El objetivo principal de los capítulos siguientes es hacer un análisis de las ecuaciones obtenidas vía proyecciones. Con tal propósito, haremos una síntesis de las coordenadas introducidas hasta este momento.

Consideramos un modelo esférico terrestre y dos sistemas cartesianos $X'Y'Z'$ y XYZ con origen en el centro de la esfera terrestre, el primero es considerando un marco inercial y el segundo está fijo a la Tierra, y por tanto rota con ésta. Los ejes Z' y Z coinciden y constituyen el eje de rotación terrestre.

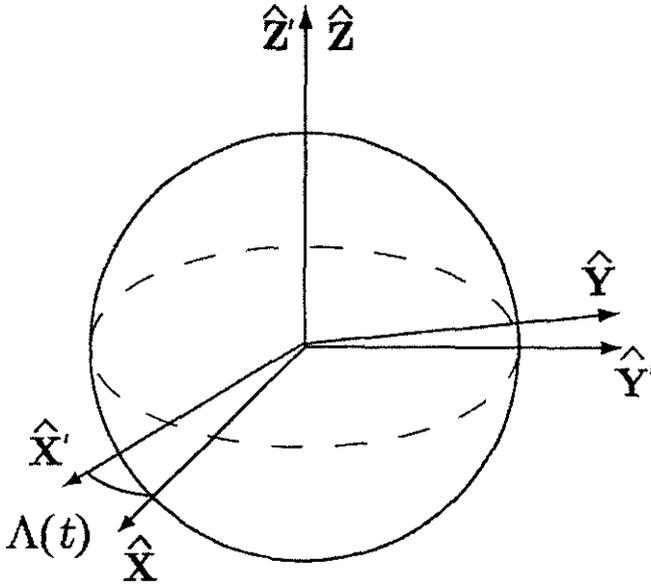


Figura 6: Sistemas de coordenadas cartesianas inercial X_i y no inercial X'_i

Tal como muestra la fig.6, el ángulo $\Lambda(t)$ define el desplazamiento angular terrestre con respecto al sistema inercial XYZ y como hemos dicho anteriormente $\Lambda(t) = \Omega t + \Lambda_0$, donde $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} s^{-1}$ es la velocidad angular terrestre. A su vez, en el sistema fijo a la Tierra XYZ tenemos las coordenadas esféricas λ, ϕ, r . Consideramos también que el origen (λ_c, ϕ_c) , sobre la superficie de la Tierra, del sistema xyz asociado al plano tangente, está en el meridiano de referencia, el cual consideraremos sobre el plano XZ , tal y como se muestra en la fig.3.

Así, cada punto en el espacio está localizado por uno de los siguientes tipos de coordenadas:

1. Cartesianas (X, Y, Z) ;
2. Esféricas (λ, ϕ, r) ;
3. Cartesianas asociadas a un plano tangente (x, y, z) .

Denominaremos como coordenadas de proyección x_p, y_p, z_p a las coordenadas de un punto (λ, ϕ, r) calculadas vía una proyección de la esfera en el plano \mathcal{P} como sigue:

$$x_p = x_p(\lambda, \phi) \quad y_p = y_p(\lambda, \phi) \quad z_p = h = r - R_0 \quad (11)$$

con $x_p(\lambda_c, \phi_c) = y_p(\lambda_c, \phi_c) = 0$, es decir, el punto (λ_c, ϕ_c) se proyecta en el origen del plano de proyección. Como se definió en la sec.(14), si definimos

la elevación del terreno sobre (λ_c, ϕ_c) como la distancia mínima h entre dicho punto y la verdadera superficie terrestre a lo largo de la recta normal a la esfera terrestre en (λ_c, ϕ_c) , y definimos la elevación del terreno sobre el punto proyectado exactamente como h , entonces \mathcal{P} puede identificarse como el plano \mathcal{T} tangente a la esfera.

Sin embargo, las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto con coordenadas esféricas (λ, ϕ, r) son, en general, distintas de las correspondientes coordenadas de proyección (x_p, y_p, z_p) ,

$$x \neq x_p \quad y \neq y_p \quad z \neq z_p .$$

La motivación para usar x_p, y_p, z_p es su similaridad con x, y, z con la ventaja "aparente" de incorporar los efectos de la curvatura terrestre. Por el momento dejaremos de lado esta interpretación de x_p, y_p, z_p y las consideraremos como un sistema curvilíneo de coordenadas que es válido como cualquier otro para obtener y resolver las ecuaciones de movimiento.

Para hallar la relación directa entre las coordenadas cartesianas del plano tangente y las coordenadas de proyección, basta con obtener de la ec.(11) las expresiones de λ, ϕ, r en términos de x_p, y_p, z_p ,

$$\lambda = \lambda(x_p, y_p) \quad \phi = \phi(x_p, y_p) \quad r = z_p + R_0 \quad (12)$$

y sustituir estas expresiones en las ecs.(9) del capítulo anterior

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_c & 0 & \cos \phi_c \\ \cos \phi_c & 0 & \sin \phi_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (R_0 + h) \cos \phi_c \cos \lambda_c - R_0 \cos \phi_c \cos \lambda_c \\ (R_0 + h) \cos \phi_c \sin \lambda_c - R_0 \cos \phi_c \sin \lambda_c \\ (R_0 + h) \sin \phi_c - R_0 \sin \phi_c \end{pmatrix} .$$

En las secciones siguientes daremos una síntesis de las principales proyecciones usadas por los modelos de mesoescala, tanto para definir la topografía como para obtener las ecuaciones que gobiernan un flujo atmosférico.

2.2.1 Proyecciones

El problema básico de las proyecciones es la representación de una superficie no plana sobre un plano, sobre un mapa. Es evidente que cualquier proyección es imperfecta, es decir, al representar una superficie como una esfera o una elipse en un plano, hay una distorsión en ella.

Hay dos razones, para que, a pesar de este inconveniente, se insista en trabajar con proyecciones. Por un lado, se dice que es más fácil trabajar con mapas que con modelos tridimensionales de esferas o elipsoides. En segundo lugar, que los cálculos numéricos en un sistema cartesiano son más sencillos que en una esfera.

A partir de la categorización que asumen Richardus y Adler [8], podemos decir que hay dos criterios para clasificar las proyecciones:

1. *Proyecciones equidistantes.* Mantienen las escalas, es decir, las distancias entre dos puntos de la superficie origen a la superficie proyectada;

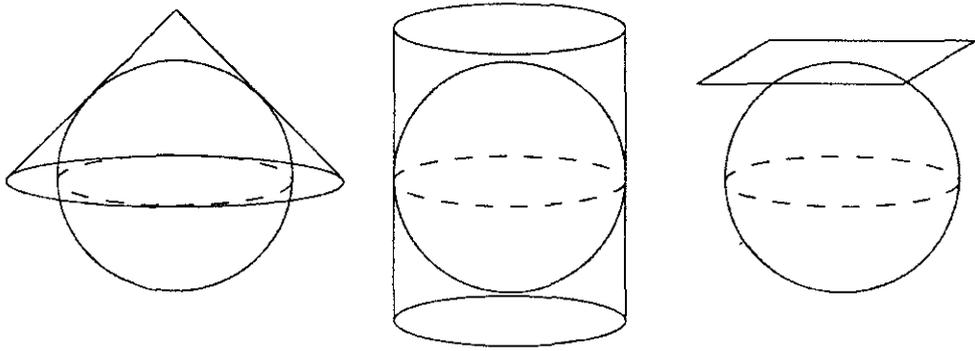


Figura 7: a) proyección de Lambert; b) proyección de Mercator; c) proyección estereográfica

2. *Proyecciones conformes.* Mantienen la forma, es decir, los ángulos entre dos líneas;
3. *Proyecciones equivalentes.* Mantienen las áreas de las figuras, a costa de los ángulos y las distancias.

En segundo lugar, se puede clasificar a las proyecciones por el tipo de superficie de proyección:

1. En un *plano*;
2. En una *superficie cónica*;
3. En una *superficie cilíndrica*.

Los dos últimos pueden pasar a planos mediante una sencilla transformación.

2.2.2 Proyecciones conformes

Proyección de Lambert. La superficie de proyección es un cono, que puede estar colocado de manera que pueda tocar una o dos veces la superficie de la esfera. En el primer caso se habla de un paralelo estándar y en el segundo de dos paralelos estándar.

- Un paralelo estándar en ϕ_c :

Si definimos

$$\rho(\phi) = R \cot \phi_c \left[\frac{\tan(\pi/4 - \phi/2)}{\tan(\pi/4 - \phi_c/2)} \right]^{\sin \phi_c}$$

$$\theta(\lambda) = \lambda \sin \phi_c$$

tenemos,

$$\begin{aligned}x_p &= \rho(\phi) \sin(\theta) \\y_p &= \rho(\phi_c) - \rho(\phi) \cos(\theta).\end{aligned}$$

- Dos paralelos estándar en ϕ_1 and ϕ_2 ($\phi_1 < \phi_2$):

Definimos $\rho_1 = R \cos \phi_1 / \sin \phi_0$ con

$$\begin{aligned}\rho(\phi) &= R \frac{\cos \phi_1}{\sin \phi_0} \left[\frac{\tan(\pi/4 - \phi/2)}{\tan(\pi/4 - \phi_1/2)} \right]^{\sin \phi_0} \\ \theta(\lambda) &= \lambda \sin \phi_0\end{aligned}$$

donde

$$\sin \phi_0 = \frac{\ln \cos \phi_1 - \ln \cos \phi_2}{\ln \tan(\pi/4 - \phi_1/2) - \ln \tan(\pi/4 - \phi_2/2)}$$

para obtener

$$\begin{aligned}x_p &= \rho(\phi) \sin(\theta) \\y_p &= \rho(\phi_c) - \rho(\phi) \cos(\theta).\end{aligned}$$

Proyección de Mercator. Como se ve en la fig.7, la superficie de proyección es un cilindro. Si definimos el punto de contacto del cilindro con la superficie de la esfera como (ϕ_c, λ_c) podemos, sin perder generalidad, fijar $\lambda_c = 0$ y mover ϕ_c . En el caso general,

$$\begin{aligned}x_p &= \frac{1}{2} R \ln \frac{1 + \sin \phi \sin \phi_c + \cos \phi \cos \phi_c \sin \lambda}{1 - \sin \phi \sin \phi_c - \cos \phi \cos \phi_c \sin \lambda} \\ y_p &= R \tan^{-1} \left(\frac{\cos \phi \sin \lambda}{\cos \phi \sin \phi_c \cos \lambda - \sin \phi \cos \phi_c} \right).\end{aligned}$$

En el caso especial cuando $\phi_c = \pi/2$ la proyección se dice que es transversal.

Proyección estereográfica oblicua. Ahora, como se puede ver en la fig.7, la superficie de proyección es un plano. Sea (ϕ_c, λ_c) el punto en la esfera que toca el plano. Otra vez hacemos $\lambda_c = 0$:

$$\begin{aligned}x_p &= 2R \frac{\cos \phi \sin \lambda}{1 + \sin \phi_c \sin \phi + \cos \phi_c \cos \phi \cos \lambda} \\ y_p &= 2R \frac{\cos \phi_c \sin \phi - \sin \phi_c \cos \phi \cos \lambda}{1 + \sin \phi_c \sin \phi + \cos \phi_c \cos \phi \cos \lambda}.\end{aligned}$$

La proyección estereográfica polar se define cuando el punto de contacto entre la esfera y el plano de proyección es el polo norte, es decir $\phi_c = \pi/2$:

$$\begin{aligned}x_p &= 2R \frac{\cos \phi \sin \lambda}{1 + \sin \phi} \\ y_p &= -2R \frac{\cos \phi \cos \lambda}{1 + \sin \phi}.\end{aligned} \tag{13}$$

2.2.3 Proyección estereográfica polar

En esta sección obtendremos la relación directa entre las coordenadas cartesianas x, y, z y de proyección x_p, y_p, z_p para el caso de la proyección estereográfica polar, con el propósito de mostrar la diferencia entre ambos tipos de coordenadas.

Transformación $\{\lambda, \phi, h\} \rightarrow \{x_p, y_p, z_p\}$ Consideramos las siguientes ecuaciones de proyección [3]:

$$\begin{aligned} x_p &= 2R \frac{\cos \phi \cos \lambda}{1 + \sin \phi} \\ y_p &= 2R \frac{\cos \phi \sin \lambda}{1 + \sin \phi} \\ z_p &= h = r - R_0 \end{aligned} \quad (14)$$

donde la nueva coordenada z_p es la propia coordenada de altura del sistema coordenado esférico.

Transformación $\{x, y, z\} \rightarrow \{x_p, y_p, z_p\}$ Usando las transformaciones $\{\lambda, \phi, h\} \rightarrow \{x, y, z\}$ [ec.(9)], y $\{\lambda, \phi, h\} \rightarrow \{x_p, y_p, z_p\}$ [ec.(14)]

$$\begin{aligned} x_p &= 2R \frac{\cos \phi \cos \lambda}{1 + \sin \phi} \\ &= 2R \frac{(R + h) \cos \phi \cos \lambda}{(R + h) + (R + h) \sin \phi} \\ &= 2R \frac{x}{(R + h) + z + R} \\ &= \frac{2Rx}{2R + h(x, y, z) + z} \end{aligned}$$

análogamente:

$$\begin{aligned} y_p &= 2R \frac{\cos \phi \sin \lambda}{1 + \sin \phi} \\ &= \frac{2Ry}{2R + h(x, y, z) + z} \end{aligned}$$

Y para la coordenada vertical,

$$z_p = h(x, y, z) = r - R_0$$

donde $h(x, y, z)$ falta por encontrar, usando la ec.(9):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (R + h)^2 [\cos^2 \phi \cos^2 \lambda + \cos^2 \phi \sin^2 \lambda + \sin^2 \phi] + R^2 \\ &= (R + h)^2 + R^2 \end{aligned}$$

de donde se deduce que $h = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^{1/2} - R$. Entonces la transformación queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{2Rx}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^{1/2} + R + z} \\ y_p &= \frac{2Ry}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^{1/2} + R + z} \\ z_p &= (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^{1/2} - R \end{aligned} \quad (15)$$

Transformación $\{x_p, y_p, z_p\} \rightarrow \{x, y, z\}$

$$\begin{aligned} x &= (R + h) \cos \phi \cos \lambda \\ &= (R + z_p) \cos \phi \cos \lambda \\ y &= (R + h) \cos \phi \sin \lambda \\ &= (R + z_p) \cos \phi \sin \lambda \\ z &= (R + h) \sin \phi - R \\ &= (R + z_p) \sin \phi - R \end{aligned} \quad (16)$$

Para calcular los valores de seno y coseno de los ángulos ϕ y λ usamos las ecs.(14):

$$\frac{y_p}{x_p} = \tan \lambda$$

haciendo

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_p}{x_p}\right)^2 &= \tan^2 \lambda = \frac{\sin^2 \lambda}{\cos^2 \lambda} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \lambda}{\cos^2 \lambda} = \frac{1}{\cos^2 \lambda} - 1 \\ &= \frac{\sin^2 \lambda}{1 - \sin^2 \lambda} \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{1}{\left[\left(\frac{y_p}{x_p}\right)^2 + 1\right]^{1/2}} \\ \sin \lambda &= \frac{1}{\left[\left(\frac{x_p}{y_p}\right)^2 + 1\right]^{1/2}} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} 4R^2 \frac{\cos^2 \phi}{(1 + \sin \phi)^2} &= x_p^2 + y_p^2 \\ \frac{\cos^2 \phi}{(1 + \sin \phi)^2} &= r^2 \end{aligned} \quad (17)$$

si definimos

$$r_p^2 = x_p^2 + y_p^2$$

así como

$$r^2 = \frac{r_p^2}{4R^2} = \frac{x_p^2 + y_p^2}{4R^2}$$

Entonces la solución de la ec.(17) es:

$$\cos \phi = \pm \frac{2r}{r^2 + 1} = \pm \frac{4Rr_p}{r_p^2 + 4R^2}$$

$$\sin \phi = \pm \frac{2}{r(r^2 + 1)} - 1$$

De esta manera, sustituyendo en la ec.(16), y simplificando se deduce que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(R + z_p)}{\left[\left(\frac{y_p}{x_p} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}} \cos \phi \\ &= \pm \frac{(R + z_p)}{\left[\left(\frac{y_p}{x_p} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}} \cdot \frac{4Rr_p}{r_p^2 + 4R^2} \\ &= \pm \frac{x_p(R + z_p)}{r_p} \cdot \frac{4Rr_p}{r_p^2 + 4R^2} \\ &= \pm \frac{x_p 4R(R + z_p)}{r_p^2 + 4R^2} \\ y &= \frac{(R + z_p)}{\left[\left(\frac{x_p}{y_p} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}} \cos \phi \\ &= \pm \frac{(R + z_p)}{\left[\left(\frac{x_p}{y_p} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}} \cdot \frac{4Rr_p}{r_p^2 + 4R^2} \\ &= \pm \frac{y_p 4R(R + z_p)}{r_p^2 + 4R^2} \\ z &= (R + z_p) \sin \phi - R \\ &= (R + z_p) \left(\frac{\pm 2}{r(r^2 + 1)} - 1 \right) - R \\ &= \frac{\pm 2(R + z_p)}{r(r^2 + 1)} - 2R - z_p \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones de transformación de coordenadas de proyección $\{x_p, y_p, z_p\}$ en las coordenadas $\{x, y, z\}$ son:

$$\begin{aligned}x &= \pm \frac{x_p 4R(R + z_p)}{r_p^2 + 4R^2} \\y &= \pm \frac{y_p 4R(R + z_p)}{r_p^2 + 4R^2} \\z &= \frac{\pm 2(R + z_p)}{r(r^2 + 1)} - 2R - z_p\end{aligned}\tag{18}$$

3 Ecuaciones de conservación

Por simplicidad, en este trabajo consideraremos un flujo con las propiedades siguientes:

- Incompresible
- No viscoso
- Isotérmico

En este capítulo damos una deducción de las ecuaciones que gobiernan tal flujo en cada uno de los sistemas de referencia descritos en el capítulo anterior.

3.1 Coordenadas eulerianas y lagrangianas relativas al marco inercial $X'Y'Z'$

Hay dos formas para derivar las ecuaciones de conservación, dependiendo de las coordenadas usadas. En el sistema euleriano de coordenadas las variables independientes son las coordenadas espaciales X', Y', Z' y t . El interés reside en el fluido que pasa por un punto fijo en el espacio, por lo cual diferentes partículas se localizarán en (X', Y', Z') conforme transcurre el tiempo. En el sistema de coordenadas lagrangiano X', Y', Z' y t ya no son variables independientes, ya que el interés está en una porción de masa concreta. Conforme pase el tiempo esta masa se trasladará en el espacio. Ahora, si se conoce la velocidad $u_i \equiv (u_1, u_2, u_3)$ de cada partícula, las variables independientes son la posición inicial X'_0, Y'_0, Z'_0 y el tiempo t . Aplicando los principios de conservación de masa, energía y momento a cualquiera de los dos volúmenes de control, se obtienen las ecuaciones de conservación en cada una de las coordenadas.

Sea α una variable del fluido. Desde el punto de vista euleriano α depende de las variables independientes X', Y', Z' y t . Un cambio en el tiempo δt provoca entonces, desde el punto de vista lagrangiano un cambio $\delta\alpha$,

$$\delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\alpha}{\partial X'}\delta X' + \frac{\partial\alpha}{\partial Y'}\delta Y' + \frac{\partial\alpha}{\partial Z'}\delta Z'$$

donde X', Y', Z' y t ahora no son independientes. Dividiendo por δt ,

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\delta X'}{\delta t} \frac{\partial\alpha}{\partial X'} + \frac{\delta Y'}{\delta t} \frac{\partial\alpha}{\partial Y'} + \frac{\delta Z'}{\delta t} \frac{\partial\alpha}{\partial Z'}$$

tomando el límite $\delta t \rightarrow 0$

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + U'_1 \frac{\partial\alpha}{\partial X'} + U'_2 \frac{\partial\alpha}{\partial Y'} + U'_3 \frac{\partial\alpha}{\partial Z'} \quad (19)$$

Usando la convención de suma sobre índices repetidos, $(X', Y', Z') \equiv (X'_1, X'_2, X'_3)$ resulta que:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + U'_i \frac{\partial\alpha}{\partial X'_i} \quad (20)$$

6

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \mathbf{U}' \cdot \nabla\alpha \quad (21)$$

La ec.(19) expresa la derivada lagrangiana $D\alpha/Dt$, también llamada *derivada material* en términos de las derivadas eulerianas.

De acuerdo a las coordenadas que se usan, hay dos formas de plantear las ecuaciones de conservación, mediante dos tipos de volúmenes de control. En el esquema euleriano, el volumen de control es un paralelepípedo fijo en el espacio de lados δx , δy y δz . Cada propiedad del fluido se desarrolla en series de Taylor alrededor del centro del volumen de control, si δx , δy y δz se vuelven muy pequeños y se aplican los principios de conservación, se obtiene una ecuación diferencial para el principio de conservación. En el esquema lagrangiano, el volumen de control tiene una forma arbitraria, pero representa al volumen V de un misma masa de fluido. Cada principio de conservación es aplicado a una integral sobre un volumen de control, de lo que resulta una ecuación integro-diferencial de la forma $\int_V \mathbf{L}\alpha dV = 0$, donde \mathbf{L} es un operador diferencial y α es una propiedad del fluido. Pero, ya que el volumen es arbitrario, se puede concluir que $\mathbf{L}\alpha = 0$, lo que lleva a la ecuación diferencial de la ley de conservación, como se muestra en la sección 4.2 de este capítulo.

3.1.1 Teorema del transporte de Reynolds

Si se considera una masa de fluido durante un tiempo δt , entonces, desde un punto de vista lagrangiano, α sólo depende de t , dado que el volumen de control se mueve con el fluido.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \right\} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t+\delta t) dV \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \right\} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t) - V(t)} \alpha(t+\delta t) dV \right] + \int_{V(t)} \frac{\partial\alpha}{\partial t} dV \end{aligned}$$

mediante métodos geométricos es fácil demostrar que un elemento de superficie en cualquier volumen de control corresponde a un cambio de volumen tal que $dV = \mathbf{U}' \cdot \mathbf{n} \delta t dS$, de manera que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\int_{S(t)} \alpha(t+\delta t) \mathbf{U}' \cdot \mathbf{n} \delta t dS \right] + \int_{V(t)} \frac{\partial\alpha}{\partial t} dV \\ &= \int_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{U}' \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(t)} \frac{\partial\alpha}{\partial t} dV \end{aligned}$$

usando ahora el teorema de la divergencia (ver apéndice),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \alpha dV &= \int_V \left[\nabla \cdot (\alpha \mathbf{U}') + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial X'_i} (\alpha U'_i) + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] dV \end{aligned} \quad (22)$$

en notación vectorial y tensorial. Este es el teorema del transporte de Reynolds, que relaciona la derivada material de una integral de volumen con una integral de volumen en la que solo hay derivadas eulerianas.

3.2 Ecuaciones de conservación en el marco inercial $X'Y'Z'$

3.2.1 Conservación de masa (ecuación de continuidad)

El principio de conservación de masa nos dice que derivada lagrangiana de una masa de fluido contenida en V es cero, $dm/dt = 0$, es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

Usando la ec.(22) con $\alpha = \rho$,

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial X'_i} (\rho U'_i) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0$$

dado que el volumen es arbitrario el integrando debe ser cero

$$\frac{\partial}{\partial X'_i} (\rho U'_i) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}') + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (24)$$

en forma tensorial y vectorial, que es la llamada *ecuación de continuidad*.

Usando la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{U}' + \mathbf{U}' \cdot \nabla \rho \quad (25)$$

la ecuación de continuidad queda como

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{U}' + \mathbf{U}' \cdot \nabla \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Por la definición de derivada material dada por la ec.(21),

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{U}' + \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Si el flujo es incompresible, tenemos que $D\rho/Dt = 0$, lo que nos da

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{U}' = 0$$

de modo que la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles es, en las diferentes notaciones:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U}' &= 0 \\ \frac{\partial U'_1}{\partial X'_1} + \frac{\partial U'_2}{\partial X'_2} + \frac{\partial U'_3}{\partial X'_3} &= 0 \\ \frac{\partial U'_i}{\partial X'_i} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

3.2.2 Conservación de momento para un flujo no viscoso (ecuación de movimiento)

El principio de conservación de momento es consecuencia de la aplicación de la segunda ley de Newton, es decir, que el cambio en el momento de una masa de fluido es igual a la fuerza resultante $\mathbf{F} = F_i \mathbf{X}'_i$ de todas las fuerzas externas actuando sobre ella:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{U}' dV = \mathbf{F}$$

ya que estamos considerando que el sistema $X'Y'Z'$ es inercial. Aplicando la ec.(22) para cada una de las componentes ρu_i , $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho U'_i dV &= F_i \\ \int_V \left[\frac{\partial}{\partial X'_j} (\rho U'_i U'_j) + \frac{\partial \rho U'_i}{\partial t} \right] dV &= F_i \\ \int_V \left[\nabla \cdot \rho U'_i \mathbf{U}' + \frac{\partial \rho U'_i}{\partial t} \right] dV &= F_i \end{aligned}$$

Usando la identidad (25),

$$\begin{aligned} \int_V \left[\rho U'_i \nabla \cdot \mathbf{U}' + \mathbf{U}' \cdot \nabla \rho U'_i + \frac{\partial \rho U'_i}{\partial t} \right] dV &= F_i \\ \int_V \left[\rho U'_i \nabla \cdot \mathbf{U}' + \mathbf{U}' \cdot \nabla \rho U'_i + U'_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial U'_i}{\partial t} \right] dV &= F_i \\ \int_V \left[\rho \mathbf{U}' \cdot \nabla U'_i + \rho \frac{\partial U'_i}{\partial t} \right] dV &= F_i \end{aligned}$$

6

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{U}'}{Dt} dV = \mathbf{F} \quad (27)$$

ya que $u_i \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}') + U'_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ [ec.(24)]. La fuerza \mathbf{F} tiene dos contribuciones, la fuerza superficial debida a la presión, y la gravedad.

$$\mathbf{F} = - \int_V \nabla p dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV$$

sustituyendo en (27),

$$\int_V \left[\rho \frac{D\mathbf{U}'}{Dt} \right] dV = - \int_V \nabla p dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV$$

Entonces la ecuación de movimiento es:

$$\rho \frac{D\mathbf{U}'}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (28)$$

y en coordenadas eulerianas,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U'_i}{\partial t} + \rho U'_j \frac{\partial U'_i}{\partial X'_j} &= - \frac{\partial p}{\partial X'_i} + \rho g_i \\ \rho \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \rho (\mathbf{U}' \cdot \nabla) \mathbf{U}' &= -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (29)$$

3.3 Ecuaciones de conservación en el marco no inercial XYZ fijo a la Tierra

Las ecuaciones de conservación de la sección 3.2 están referidas a un marco inercial, pero para un observador fijo a la superficie terrestre conviene escribir tales ecuaciones en coordenadas relativas a un sistema cartesiano fijo a la Tierra. Tenemos dos sistemas cartesianos que rotan con la esfera terrestre, a saber, el sistema XYZ con origen en un modelo esférico terrestre y el sistema xyz asociado al plano tangente. Para ejemplificar la transformación de las ecuaciones de conservación consideremos el sistema XYZ .

Definimos a (Λ, Φ, R) como las coordenadas esféricas de un punto en el sistema inercial $X'Y'Z'$ y (λ, ϕ, r) las coordenadas esféricas que representan al mismo punto, pero respecto al sistema no inercial XYZ . La relación entre ambos sistemas de coordenadas esféricas es

$$(\Lambda(t), \Phi = \phi, R = r),$$

ya que la rotación se da en Z con una velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega \mathbf{Z}$. La función $\Lambda(t)$ es entonces de la forma:

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 + \Omega t + \lambda$$

donde Ω es la velocidad angular de la tierra en su rotación alrededor del eje Z' . No se pierde generalidad si definimos $\Lambda_0 = 0$.

La relación entre los vectores base $\hat{X}', \hat{Y}', \hat{Z}'$ y $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ asociados a los sistemas $X'Y'Z'$ y XYZ respectivamente, a partir de la fig.6 está dada por

$$\begin{pmatrix} \widehat{X} \\ \widehat{Y} \\ \widehat{Z} \end{pmatrix} = \mathbb{R}(\Lambda) \begin{pmatrix} \widehat{X}' \\ \widehat{Y}' \\ \widehat{Z}' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widehat{X}' \\ \widehat{Y}' \\ \widehat{Z}' \end{pmatrix} = \mathbb{R}^t(\Lambda) \begin{pmatrix} \widehat{X} \\ \widehat{Y} \\ \widehat{Z} \end{pmatrix} \quad (30)$$

donde

$$\mathbb{R}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cos \Lambda & \sin \Lambda & 0 \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathbb{R}(\Lambda, \phi_0)$ es una matriz de rotación, ya que transforma un sistema ortogonal y derecho en otro sistema ortogonal y derecho. De esta manera, \mathbb{R} tiene la propiedad de que su inversa es su traspuesta, es decir,

$$\mathbb{R}\mathbb{R}^t = \mathbb{R}^t\mathbb{R} = \mathbb{I} \quad (31)$$

De acuerdo a la fig.6 el vector de posición \mathbf{R} de una partícula tiene dos expresiones

$$\mathbf{R} = X'_i \widehat{X}'_i = X_i \widehat{X}_i \quad (32)$$

y usando (30) se obtiene la relación entre las coordenadas X', Y', Z' y X, Y, Z

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbb{R}(\Lambda) \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \mathbb{R}^t(\Lambda) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (33)$$

Para calcular la velocidad y aceleración en el sistema no inercial, debemos calcular las derivadas temporales de los vectores base $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$. Esto puede hacerse derivando directamente la ec.(30):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \widehat{X} \\ \widehat{Y} \\ \widehat{Z} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \left[\mathbb{R} \begin{pmatrix} \widehat{X}' \\ \widehat{Y}' \\ \widehat{Z}' \end{pmatrix} \right] = \frac{d\mathbb{R}}{dt} \begin{pmatrix} \widehat{X}' \\ \widehat{Y}' \\ \widehat{Z}' \end{pmatrix} = \frac{d\mathbb{R}}{dt} \mathbb{R}^t \begin{pmatrix} \widehat{X} \\ \widehat{Y} \\ \widehat{Z} \end{pmatrix} \quad (34)$$

y de la identidad (31) se obtiene que $\frac{d\mathbb{R}}{dt} \mathbb{R}^t$ es una matriz antisimétrica, ya que su componente simétrica es la matriz cero,

$$\frac{d\mathbb{R}}{dt} \mathbb{R}^t + \left(\frac{d\mathbb{R}}{dt} \mathbb{R}^t \right)^t = \mathbf{0}.$$

Conviene entonces escribir $\frac{d\mathbb{R}}{dt} \mathbb{R}^t$ como sigue:

$$\frac{d\mathbb{R}}{dt} \mathbb{R}^t = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 0 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

ya que en esta forma el producto matriz-vector en (34) se reescribe en términos del producto cruz con vector $\vec{\Omega} = \Omega_x \hat{\mathbf{X}} + \Omega_y \hat{\mathbf{Y}} + \Omega_z \hat{\mathbf{Z}}$ como sigue

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \frac{d\mathbb{R}}{dt} \mathbb{R}^t \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \times \hat{\mathbf{X}} \\ \vec{\Omega} \times \hat{\mathbf{Y}} \\ \vec{\Omega} \times \hat{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

En el caso particular de la matriz \mathbb{R} tenemos

$$\frac{d\mathbb{R}}{dt} \mathbb{R}^T = \Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{\Omega} \times \quad (36)$$

con $\vec{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{Z}}$ que es precisamente el vector velocidad angular terrestre con respecto al sistema XYZ fijo a la Tierra.

Ahora calculemos la velocidad de una partícula con vector de posición $\mathbf{R} = X_i \hat{\mathbf{X}}'_i = X_i \hat{\mathbf{X}}_i$. Derivando obtenemos

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dX'_i}{dt} \hat{\mathbf{X}}'_i = \frac{dX_i}{dt} \hat{\mathbf{X}}_i + X_i \frac{d\hat{\mathbf{X}}_i}{dt}, \quad (37)$$

donde identificamos la velocidad en el marco inercial

$$\mathbf{U}' = \frac{dX'_i}{dt} \hat{\mathbf{X}}'_i,$$

la velocidad relativa al sistema no inercial

$$\mathbf{U} = \frac{dX_i}{dt} \hat{\mathbf{X}}_i,$$

y la velocidad del sistema no inercial respecto al inercial

$$X_i \frac{d\hat{\mathbf{X}}_i}{dt} = X_i \vec{\Omega} \times \hat{\mathbf{X}}_i = \vec{\Omega} \times X_i \hat{\mathbf{X}}_i = \vec{\Omega} \times \mathbf{R}$$

de manera que (37) se reescribe como sigue

$$\mathbf{U}' = \mathbf{U} + \vec{\Omega} \times \mathbf{R}. \quad (38)$$

Generalizando el desarrollo anterior, si un vector \mathbf{A} tienen componentes A_i en el sistema fijo a la Tierra, $\mathbf{A} = A_i \hat{\mathbf{X}}_i$, entonces su derivada temporal está dada por

$$\frac{d\mathbf{A}_{in}}{dt} = \frac{dA_i}{dt} \hat{\mathbf{X}}_i + \vec{\Omega} \times \mathbf{R} \quad (39)$$

donde el subíndice *in* se refiere al sistema inercial del centro de la Tierra. Aplicando esto al propio vector velocidad \mathbf{U} obtenemos la aceleración de una partícula en el marco inercial, en términos de cantidades relativas al marco no inercial, tal y como aparece en la ec.(28):

$$\begin{aligned}
\frac{d_{in}\mathbf{U}'}{dt} &= \frac{d_{in}}{dt} (\mathbf{U} + \vec{\Omega} \times \mathbf{R}) \\
&= \left(\frac{d}{dt} + \vec{\Omega} \times \right) (\mathbf{U} + \vec{\Omega} \times \mathbf{R}) \\
&= \frac{d}{dt} (\mathbf{U} + \vec{\Omega} \times \mathbf{R}) + \vec{\Omega} \times (\mathbf{U} + \vec{\Omega} \times \mathbf{R}) \\
&= \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{d}{dt} \vec{\Omega} \times \mathbf{R} + \vec{\Omega} \times \mathbf{U} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{R}) \\
&= \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \vec{\Omega} \times \frac{d}{dt} \mathbf{R} + \vec{\Omega} \times \mathbf{U} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{R}) \\
&= \frac{d\mathbf{U}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \mathbf{U} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{R}). \tag{40}
\end{aligned}$$

El segundo término es la llamada aceleración de Coriolis y el tercero es la aceleración centrípeta.

3.3.1 Conservación de masa (ecuación de continuidad)

Para obtener la ec. de continuidad en el marco XYZ debemos obtener la expresión de U_i en términos de cantidades medidas en el marco no inercial. De (37) obtenemos, usando $\mathbf{U}' = U'_i \hat{\mathbf{X}}'_i$,

$$\begin{aligned}
U'_i \hat{\mathbf{X}}'_i &= U_i \hat{\mathbf{X}}_i + \vec{\Omega} \times \mathbf{R} \\
\begin{pmatrix} U'_1 & U'_2 & U'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}' \\ \hat{\mathbf{Y}}' \\ \hat{\mathbf{Z}}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Omega Y & \Omega X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{Z}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y reemplazando (30) obtenemos

$$\begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ U'_3 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^t \begin{pmatrix} U_1 - \Omega Y \\ U_2 + \Omega X \\ U_3 \end{pmatrix}$$

o, en notación de índices,

$$U'_i = (\mathbb{R}^t)_{ij} (U_j + \varepsilon_{jkl} \Omega_k X_l) \tag{41}$$

donde hacemos uso del tensor antisimétrico $\varepsilon_{jkl} = 0$ si dos o más índices son iguales, $\varepsilon_{jkl} = 1$ si $jkl = 123, 231, 312$ y $\varepsilon_{jkl} = -1$ si $jkl = 213, 132, 321$.

Reemplazando (41) en la ecuación de continuidad (26) y usando regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial U'_i}{\partial X'_i} = \frac{\partial X_m}{\partial X'_i} \frac{\partial}{\partial X_m} \left[(\mathbb{R}^t)_{ij} (U_j + \varepsilon_{jkl} \Omega_k X_l) \right]$$

pero de (33) tenemos que $X_m = (\mathbb{R})_{mn} X'_n$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U'_i}{\partial X'_i} &= (\mathbb{R})_{mi} (\mathbb{R}^t)_{ij} \left(\frac{\partial U_j}{\partial X_m} + \varepsilon_{jki} \Omega_k \delta_{ml} \right) \\ &= \delta_{mj} \left(\frac{\partial U_j}{\partial X_m} + \varepsilon_{jkm} \Omega_k \right) \\ &= \frac{\partial U_j}{\partial X_j} \end{aligned}$$

donde usamos (31) y $\varepsilon_{jkj} = 0$. En esta forma, la ecuación de continuidad queda:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial U_j}{\partial X_j} = 0 \quad (42)$$

es decir, la ecuación de continuidad mantiene su forma funcional.

3.3.2 Conservación de momento (ecuación de movimiento)

Para la ecuación de momento (28), reemplazamos la aceleración en el marco inercial por su expresión (40) relativa al sistema XYZ quedando por recalcular el gradiente de presión y la fuerza de gravedad en el sistema XYZ . Su p' y p son las expresiones de la presión en los sistemas $X'Y'Z'$ y XYZ , entonces

$$p'(X', Y', Z') = p(X, Y, Z)$$

y aplicando el gradiente en el sistema inercial

$$\begin{aligned} \nabla' p' &= \hat{\mathbf{X}}'_i \frac{\partial p'}{\partial X'_i} = (\mathbb{R}^t)_{ij} \hat{\mathbf{X}}_j \frac{\partial X_k}{\partial X'_i} \frac{\partial p}{\partial X_k} \\ &= (\mathbb{R}^t)_{ij} \mathbb{R}_{ki} \hat{\mathbf{X}}_j \frac{\partial p}{\partial X_k} \\ &= \delta_{jk} \hat{\mathbf{X}}_j \frac{\partial p}{\partial X_k} = \hat{\mathbf{X}}_k \frac{\partial p}{\partial X_k} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\nabla' p' = \nabla p.$$

En esta forma, la ecuación de momento en el sistema no inercial es

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} - 2\vec{\Omega} \times \mathbf{U} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{R})$$

Si la velocidad se considera una función de las coordenadas eulerianas de la partícula en cuestión usamos

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$$

para obtener

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} - 2\vec{\Omega} \times \mathbf{U} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (43)$$

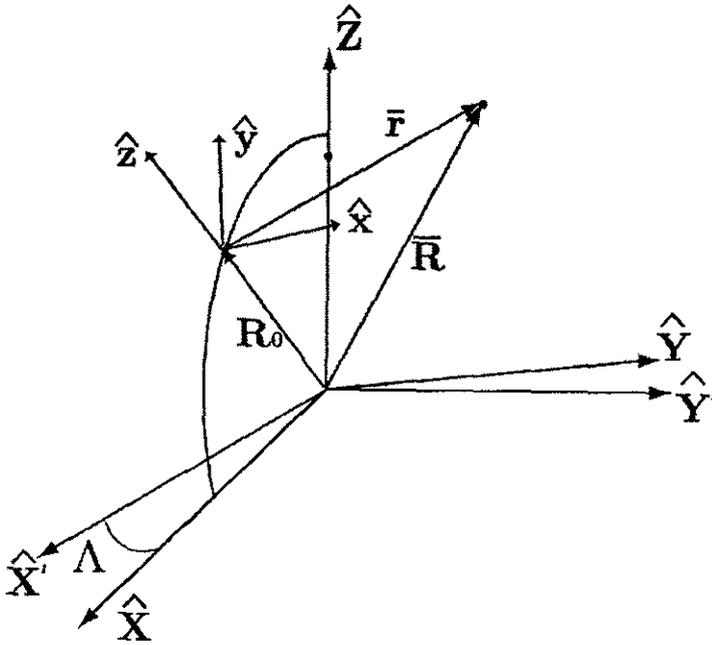


Figura 8: Sistema xyz asociado al plano tangente

3.3.3 Ecuaciones de conservación en el sistema cartesiano xyz asociado al plano tangente

De acuerdo a la fig.8 la relación entre los vectores base $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ del sistema xyz , y los del sistema inercial $X'Y'Z'$ es

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \mathbb{P} \begin{pmatrix} \hat{X}' \\ \hat{Y}' \\ \hat{Z}' \end{pmatrix}$$

con

$$\mathbb{P}(\lambda_c = 0, \phi_c) = \begin{pmatrix} -\sin \phi_c \sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ -\sin \phi_c \cos \Lambda & -\sin \phi_c \sin \Lambda & \cos \phi_c \\ \cos \phi_c \cos \Lambda & \cos \phi_c \sin \Lambda & \sin \phi_c \end{pmatrix}$$

La relación entre los vectores de posición \mathbf{r} relativo al sistema xyz y \mathbf{R} relativo al sistema $X'Y'Z'$ es:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r} + \mathbf{R}_c$$

donde

$$\mathbf{R}' = X'_i \hat{\mathbf{X}}'_i, \quad \mathbf{r} = x_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad \mathbf{R}_c = R_0 \hat{\mathbf{z}}$$

Así, se obtienen las ecuaciones de transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z + R_0 \end{pmatrix} = \mathbb{P} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

o con índices

$$x_i + R_0 \delta_{i3} = (\mathbb{P})_{ij} X'_j$$

Repetiendo el procedimiento de la pag. 30 obtenemos la velocidad \mathbf{v} y la aceleración $d\mathbf{v}/dt$ relativos al plano tangente

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= \mathbf{v} + \overline{\boldsymbol{\Omega}} \times (\mathbf{r} + \mathbf{R}_c) \\ \frac{d\mathbf{U}'}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\overline{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{v} + \overline{\boldsymbol{\Omega}} \times [\overline{\boldsymbol{\Omega}} \times (\mathbf{r} + \mathbf{R}_c)] \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{u} = u_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad , \quad du/dt = (du_i/dt) \hat{\mathbf{x}}_i .$$

Entonces, la ec. de continuidad (26) queda

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (44)$$

y la ec. de movimiento (28) queda a su vez como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} - 2\overline{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{u} - \overline{\boldsymbol{\Omega}} \times [\overline{\boldsymbol{\Omega}} \times (\mathbf{r} + \mathbf{R}_c)] \quad (45)$$

donde

$$\boldsymbol{\Omega} \times \equiv \frac{d\mathbb{P}}{dt} \mathbb{P}^t \equiv \boldsymbol{\Omega} \begin{pmatrix} 0 & \sin \phi_c & -\cos \phi_c \\ -\sin \phi_c & 0 & 0 \\ \cos \phi_c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Omega} (\cos \phi_c \hat{\mathbf{y}} + \sin \phi_c \hat{\mathbf{z}}) \times$$

∇ , p y ρ son el gradiente, la presión y la densidad en las coordenadas xyz y además se usó la expresión de la derivada material

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

4 Ecuaciones de conservación en coordenadas esféricas y de proyección

4.1 Análisis Tensorial

En el uso de las ecuaciones de conservación a veces es conveniente usar un sistema de coordenadas diferente al cartesiano. Cuando se usa un sistema de coordenadas diferente, las relaciones de conservación no deben cambiar a pesar de una representación matemática distinta. Entonces, las ecuaciones en las nuevas coordenadas se escribirán de manera que se mantenga invariante la representación física. Este manejo matemático que preserva la invarianza requiere métodos de análisis tensorial.

Las ecuaciones de conservación deben resolverse imponiendo condiciones iniciales y de frontera. Entre las condiciones de frontera tenemos la impuesta por la topografía, la cual obliga al flujo atmosférico a seguir la superficie real. Una de las formas más aceptadas para imponer esta condición de frontera es el uso de una coordenada vertical que sigue el terreno. Esto plantea la necesidad de escribir las ecuaciones de conservación en coordenadas que no son ortogonales. En esta sección planteamos la deducción de las ecuaciones de conservación en coordenadas arbitrarias que pueden ser coordenadas que siguen el terreno, coordenadas esféricas o las coordenadas de proyección.

4.1.1 Cambio de coordenadas

En lo sucesivo consideraremos que el sistema de referencia primario es el sistema cartesiano XYZ que rota con la Tierra y con origen en el centro del modelo esférico terrestre. Ahora supongamos que las coordenadas X^i de una partícula están relacionadas con coordenadas arbitrarias y^j por medio de las ecuaciones de transformación siguientes:

$$X^i = X^i(y^j) \Leftrightarrow y^j = y^j(X^i) \quad (46)$$

En esta forma el vector de posición en el sistema XYZ está dado por:

$$\mathbf{R} = X^i \widehat{\mathbf{X}}^i = X^i(y^j) \widehat{\mathbf{X}}^i$$

Las superficies $y^j = c^j$, donde c^j son constantes, se llaman *superficies coordenadas*. Las intersecciones de estas superficies definen las *líneas coordenadas*. Si las líneas coordenadas se cortan en ángulo recto, (y^1, y^2, y^3) formarán un sistema ortogonal. Sin embargo, en general no lo serán.

4.1.2 Vectores covariantes y contravariantes

Si $f(X^i) = 0$ representa funciones en el sistema de coordenadas X^i , entonces la misma relación física se debe cumplir $\tilde{f}(y^j) = 0$ cuando se esté refiriendo a un sistema de coordenadas diferente y^i . En términos del sistema coordenado

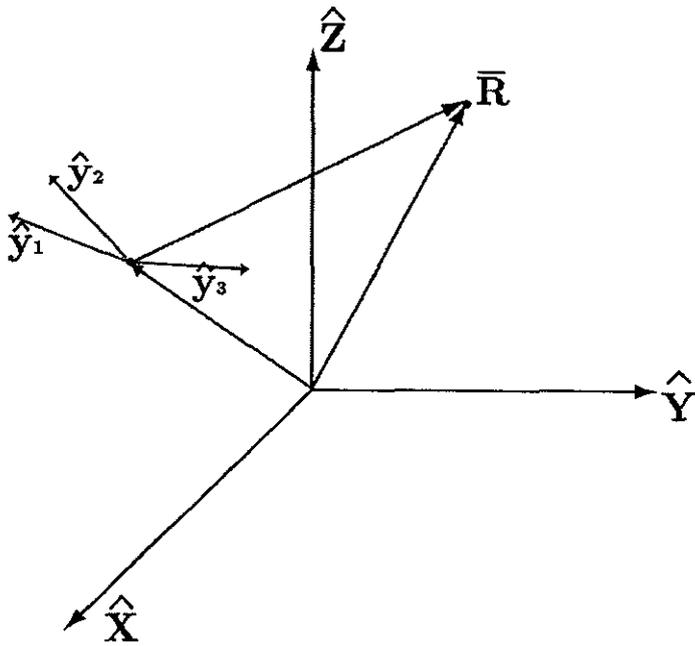


Figura 9: Sistema de coordenadas arbitrarias y_i

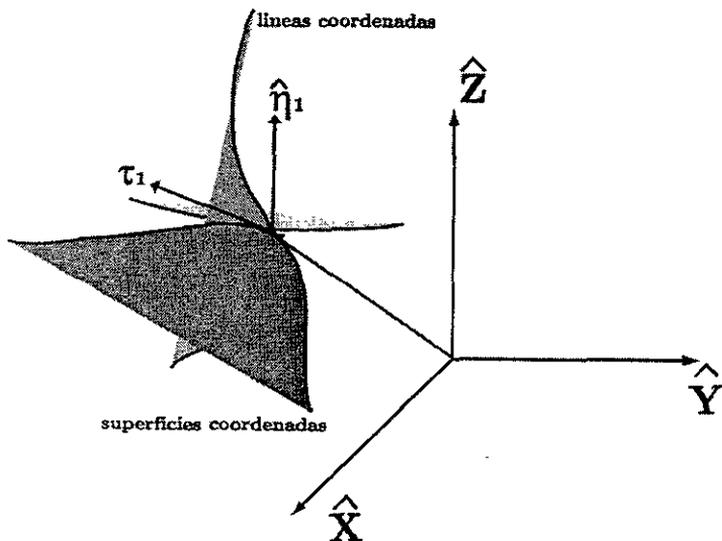


Figura 10:

original (X^1, X^2, X^3) los vectores base del sistema coordenado transformado (y^1, y^2, y^3) se representan en dos formas, como vectores covariantes y como contravariantes.

Un vector o tensor de primer orden \tilde{f}_i es *covariante* si la transformación entre los sistemas de coordenadas X^i y y^i , está dado por

$$\tilde{f}_i = \frac{\partial X^j}{\partial y^i} f_j. \quad (47)$$

En términos de un sistema de coordenadas rectangulares se define a los vectores covariantes τ_i en cada punto como los vectores tangentes a cada una de las líneas coordenadas:

$$\tau_i \equiv \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y^i} = \frac{\partial X^m}{\partial y^i} \hat{\mathbf{X}}_m \quad (48)$$

pues $\mathbf{R}(y^i) = X^m(y^i) \hat{\mathbf{X}}_m$ y $\hat{\mathbf{X}}_m$ es independiente de y^i , por lo que $\partial \hat{\mathbf{X}}_m / \partial y^i = 0$. Estos tres vectores definen una base para el espacio físico.

Por otro lado, un vector o tensor de primer orden \tilde{f}^i es *contravariante* si la transformación entre los sistemas de coordenadas x^i y y^i está dado por

$$\tilde{f}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} f^j \quad (49)$$

En el sistema cartesiano XYZ los vectores contravariantes η^j son los vectores ortogonales a cada una de las tres superficies coordenadas de manera que

$$\eta^j \equiv \nabla y^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^n} \hat{\mathbf{X}}_n, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x^n} \hat{\mathbf{X}}_n. \quad (50)$$

Por supuesto estos vectores dependen del punto (y^1, y^2, y^3) en el cual se calcula.

4.1.3 Bases recíprocas

Dos conjuntos de vectores base $\{\mathbf{a}^i\}$ y $\{\mathbf{b}_j\}$ de un mismo espacio vectorial son recíprocas si satisfacen

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}.$$

Las bases $\{\eta^i\}$ y $\{\tau_j\}$ son bases recíprocas

$$\begin{aligned} \eta^j \cdot \tau_i &= \frac{\partial y^j}{\partial X^n} \hat{\mathbf{X}}_n \cdot \frac{\partial X^m}{\partial y^i} \hat{\mathbf{X}}_m \\ &= \frac{\partial y^j}{\partial X^n} \frac{\partial X^m}{\partial y^i} \hat{\mathbf{X}}_n \cdot \hat{\mathbf{X}}_m \\ &= \frac{\partial y^j}{\partial X^n} \frac{\partial X^m}{\partial y^i} \delta_{nm} \\ &= \frac{\partial y^j}{\partial y^i} \\ &= \delta_{ji}. \end{aligned} \tag{51}$$

Como η^j y τ_i son bases, cualquier vector \mathbf{A} puede ser expresado en cada una de estas bases:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^i \tau_i \\ \mathbf{A} &= A_j \eta^j. \end{aligned}$$

A los coeficientes $\{A^i\}$ se les llama *componentes contravariantes* de \mathbf{A} y los $\{A_j\}$ son las *componentes covariantes* de \mathbf{A} .

4.1.4 Producto punto

Si deseamos calcular el producto punto de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , para explotar de manera correcta el hecho de que la base covariante y la contravariante son recíprocas, podemos hacer

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A^i \tau_i \cdot B_j \eta^j \\ &= A^i B_j \tau_i \cdot \eta^j \\ &= A^i B_j \delta_{ij} \\ &= A^i B_i \end{aligned}$$

de manera que el producto interno es tan sencillo como hacerlo en las coordenadas cartesianas. Esta es la mayor ventaja del uso de estas bases.

4.1.5 Transformación de coordenadas

La parte lineal del incremento de las ecuaciones de transformación $X^i = X^i(y^j)$,

$$dX^i = \frac{\partial X^i}{\partial y^j} dy^j = (\mathbb{J})_{ij} dy^j$$

define la matriz jacobiana

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial y^1} & \frac{\partial X^1}{\partial y^2} & \frac{\partial X^1}{\partial y^3} \\ \frac{\partial X^2}{\partial y^1} & \frac{\partial X^2}{\partial y^2} & \frac{\partial X^2}{\partial y^3} \\ \frac{\partial X^3}{\partial y^1} & \frac{\partial X^3}{\partial y^2} & \frac{\partial X^3}{\partial y^3} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

En forma análoga, la matriz jacobiana de la transformación inversa $y^j = y^j(X^i)$ se obtiene a partir de

$$dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial X^i} dX^i = (\tilde{\mathbb{J}})_{ji} dX^i$$

donde

$$\tilde{\mathbb{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial X^1} & \frac{\partial y^1}{\partial X^2} & \frac{\partial y^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial X^1} & \frac{\partial y^2}{\partial X^2} & \frac{\partial y^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial X^1} & \frac{\partial y^3}{\partial X^2} & \frac{\partial y^3}{\partial X^3} \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Comparando las ecs.(52) y (53), es inmediato que $\tilde{\mathbb{J}}$ es la matriz inversa de \mathbb{J} ,

$$\tilde{\mathbb{J}} = \mathbb{J}^{-1} \quad \delta \quad (\mathbb{J}^{-1})_{ji} = \frac{\partial y^j}{\partial X^i},$$

como puede comprobarse por multiplicación directa de matrices,

$$(\tilde{\mathbb{J}})_{ij} (\mathbb{J})_{jk} = \frac{\partial y^i}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial y^k} = \frac{\partial y^i}{\partial y^k} = \delta_{ik}.$$

4.1.6 Cambio de base

La relación entre los vectores base $\hat{\mathbf{X}}_i, \boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\eta}^j$ se obtiene como sigue. Tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_i &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y^i} = \frac{\partial X^m}{\partial y^i} \hat{\mathbf{X}}_m \\ &= \frac{\partial X^1}{\partial y^i} \hat{\mathbf{X}}_1 + \frac{\partial X^2}{\partial y^i} \hat{\mathbf{X}}_2 + \frac{\partial X^3}{\partial y^i} \hat{\mathbf{X}}_3 \end{aligned}$$

haciendo explícita la notación de términos repetidos. En forma matricial podemos escribir

$$\tau_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial y^i} & \frac{\partial X^2}{\partial y^i} & \frac{\partial X^3}{\partial y^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{X}_1 \\ \widehat{X}_2 \\ \widehat{X}_3 \end{bmatrix}$$

de manera que

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial y^1} & \frac{\partial X^2}{\partial y^1} & \frac{\partial X^3}{\partial y^1} \\ \frac{\partial X^1}{\partial y^2} & \frac{\partial X^2}{\partial y^2} & \frac{\partial X^3}{\partial y^2} \\ \frac{\partial X^1}{\partial y^3} & \frac{\partial X^2}{\partial y^3} & \frac{\partial X^3}{\partial y^3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{X}_1 \\ \widehat{X}_2 \\ \widehat{X}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^t \begin{bmatrix} \widehat{X}_1 \\ \widehat{X}_2 \\ \widehat{X}_3 \end{bmatrix}$$

y de la misma manera

$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial X^1} & \frac{\partial y^1}{\partial X^2} & \frac{\partial y^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial X^1} & \frac{\partial y^2}{\partial X^2} & \frac{\partial y^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial X^1} & \frac{\partial y^3}{\partial X^2} & \frac{\partial y^3}{\partial X^3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{X}_1 \\ \widehat{X}_2 \\ \widehat{X}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{X}_1 \\ \widehat{X}_2 \\ \widehat{X}_3 \end{bmatrix}$$

y, despejando \widehat{X}_i ,

$$\begin{bmatrix} \widehat{X}_1 \\ \widehat{X}_2 \\ \widehat{X}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix}.$$

Así, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^t \mathbf{J} \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{G} \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix}$$

donde la matriz \mathbf{G} se conoce como el *tensor métrico*,

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{J}^t \mathbf{J} \\ G_{ij} &= \frac{\partial X^m}{\partial y^i} \frac{\partial X^m}{\partial y^j}. \end{aligned} \tag{54}$$

4.1.7 Transformación de los componentes de un vector

Por un lado, tomando la base covariante,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^i \tau_i \\ &= A^1 \tau_1 + A^2 \tau_2 + A^3 \tau_3 \\ &= \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

al mismo tiempo tomando la base contravariante

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_j \eta^j \\ &= A_1 \eta^1 + A_2 \eta^2 + A_3 \eta^3 \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

pero sabemos que $\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \mathbb{G} \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix}$ de manera que

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \mathbb{G} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad A_i = G_{ij} A^j .$$

En forma análoga obtenemos

$$A^j = G^{ij} A_i$$

donde los G^{ij} son los componentes de la matriz inversa \mathbb{G}^{-1} del tensor métrico. Es fácil ver que G^{ij} está dada por

$$G^{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial X^n} \frac{\partial y^j}{\partial X^n} . \quad (55)$$

4.1.8 Derivadas covariantes

Consideremos un vector \mathbf{A} en términos de la base covariante,

$$\mathbf{A} = A^l \tau_l$$

derivando,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y^i} = \frac{\partial A^l}{\partial y^i} \tau_l + A^l \frac{\partial \tau_l}{\partial y^i}$$

pero, ya que $\{\tau_j\}$ es una base, el vector $\partial \tau_l / \partial y^i$ puede escribirse como combinación lineal de los τ_j :

$$\frac{\partial \tau_l}{\partial y^i} = \Gamma_{li}^j \tau_j \quad (56)$$

con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y^i} &= \frac{\partial A^l}{\partial y^i} \tau_l + A^l \Gamma_{li}^j \tau_j \\ &= \left(\frac{\partial A^j}{\partial y^i} + A^l \Gamma_{li}^j \right) \tau_j \end{aligned}$$

lo que nos lleva a definir la derivada covariante de A^j como

$$A^j_{;i} = \frac{\partial A^j}{\partial y^i} + \Gamma^j_{li} A^l \quad (57)$$

con lo cual obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y^i} = A^j_{;i} \tau_j$$

El coeficiente Γ^j_{li} se conoce como el símbolo de Christoffel y puede probarse que está dado por

$$\Gamma^j_{li} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial y^l \partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \quad (58)$$

Ahora bien, si el vector \mathbf{A} se expresa en la base contravariante,

$$\mathbf{A} = A_i \eta^i$$

puede mostrarse a su vez, que

$$\frac{\partial \eta^i}{\partial y^l} = -\Gamma^i_{lj} \eta^j$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y^i} = A_{l;i} \eta^l$$

donde

$$A_{l;i} = \frac{\partial A_l}{\partial y^i} - \Gamma^j_{il} A_j$$

es la derivada covariante de la componente covariante A_l de \mathbf{A} . Existe una relación entre el símbolo de Christoffel y el tensor métrico, que se puede demostrar:

$$\begin{aligned} \Gamma^m_{li} &= (\Gamma^s_{ml})_{s=l} = \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^m \partial y^i} \frac{\partial y^s}{\partial x^j} \right)_{s=l} \\ &= \frac{1}{2} G^{mj} \left(\frac{\partial G_{lj}}{\partial y^m} + \frac{\partial G_{mj}}{\partial y^l} - \frac{\partial G_{lm}}{\partial y^j} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y^l} \sqrt{G} \end{aligned}$$

donde $G \equiv \det(\mathbb{G})$ y

$$\sqrt{G} = \sqrt{\det(\mathbb{G})} = \sqrt{\det(\mathbb{J}^t \mathbb{J})} = \sqrt{J^2} = J$$

ya que $J \equiv \det(\mathbb{J})$. Usar \sqrt{G} es mucho más cómodo que J , pues sabemos que para transformaciones ortogonales \mathbb{G} es diagonal, lo que no sucede con el jacobiano J .

Entonces la traza de la matriz $A^j_{;i}$, que es $\text{tr}(A^j_{;i}) = A^i_{;i}$ puede escribirse como sigue, usando la ec.(57),

$$\begin{aligned} A^i_{;i} &= \frac{\partial A^i}{\partial y^i} + \Gamma^i_u A^u \\ &= \frac{\partial A^i}{\partial y^i} + A^u \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{G} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y^i} (\sqrt{G} A^i) \end{aligned} \quad (59)$$

Por otro lado, si tenemos una función escalar $\phi(X^i)$ y su expresión en las coordenadas y^j es $\tilde{\phi}(y^j)$ de manera que

$$\phi(X^i) = \tilde{\phi}(y^j)$$

Aplicando el operador $\nabla_X \equiv \hat{X}^i \partial / \partial X^i$, así como la regla de la cadena, obtenemos

$$\nabla_X \phi = \hat{X}^i \frac{\partial \phi}{\partial X^i} = \hat{X}^i \frac{\partial y^j}{\partial X^i} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y^j} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y^j} \eta^j$$

lo que nos lleva a definir el operador gradiente ∇_y en las coordenadas y^j como

$$\nabla_y \tilde{\phi}(y^j) \equiv \frac{\partial \tilde{\phi}(y)}{\partial y^j} \eta^j$$

Entonces el gradiente de un vector $\mathbf{A} = A^j \tau_j$ cualquiera es

$$\begin{aligned} \nabla_y \mathbf{A} &= \frac{\partial A^j \tau_j}{\partial y^i} \eta^i = \left[\frac{\partial A^j}{\partial y^i} \tau_j + A^j \Gamma^k_{ij} \tau_k \right] \eta^i = \left[\frac{\partial A^j}{\partial y^i} + A^j \Gamma^j_u \right] \tau_j \eta^i \\ &= A^j_{;i} \tau_j \eta^i \end{aligned}$$

4.2 Ecuaciones de conservación en coordenadas arbitrarias

Usando las propiedades anteriores podemos escribir las ecuaciones de conservación respecto a cualquier sistema coordenado, con la seguridad de que las representaciones físicas se mantendrán invariables. Las ecuaciones de continuidad y de movimiento para un fluido incompresible, no viscoso e isotérmico, respecto al sistema no inercial XYZ son:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} - 2\vec{\Omega} \times \mathbf{u} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (61)$$

donde redefinimos la fuerza gravitacional como:

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{R})$$

Ahora consideremos la transformación de las ecs.(60) y (61) en términos de las coordenadas y^i y la base covariante τ_j .

4.2.1 Ecuación de movimiento en coordenadas arbitrarias

Para plantear la ecuación de momento en términos de coordenadas generalizadas o arbitrarias, es necesario transformar término por término

$$\begin{array}{cccccc} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} & + & (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} & = & -\frac{1}{\rho} \nabla p & + & \mathbf{g}' & - & 2\vec{\Omega} \times \mathbf{U} \\ \text{a)} & & \text{b)} & & \text{c)} & & \text{d)} & & \text{e)} \end{array}$$

Para esto primero consideremos la transformación del vector velocidad. Tenemos

$$\mathbf{U} \equiv \frac{dX^i}{dt} \hat{\mathbf{X}}_i$$

usando la ecuación de transformación (46) y la regla de la cadena

$$\mathbf{U} \equiv \frac{dy^j}{dt} \frac{\partial X^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial X^i} \tau_k = \frac{dy^j}{dt} \tau_j \quad (62)$$

por tanto, las componentes contravariantes \tilde{U}^j de \mathbf{U} están dadas por

$$\tilde{U}^j(y) = \frac{dy^j}{dt}$$

y, de la identidad

$$\mathbf{U} = U^i \hat{\mathbf{X}}_i = \tilde{U}^j \tau_j = \tilde{U}^j \frac{\partial X^i}{\partial y^j} \hat{\mathbf{X}}_i \quad (63)$$

se obtiene

$$U^i(X) = \frac{\partial X^i}{\partial y^j} \tilde{U}^j(y). \quad (64)$$

Término a) Usando la ec.(62) obtenemos directamente

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{U}^j}{\partial t} \tau_j \quad (65)$$

Término b) Tenemos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= \left[U^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \mathbf{U} \\ &= \left[U^i \frac{\partial}{\partial X^i} U^j \right] \hat{\mathbf{X}}_j \end{aligned}$$

Usando la ec.(64) para U^i y para U^j así como la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= \left[\left(\frac{\partial X^i}{\partial y^l} \tilde{U}^l \right) \left(\frac{\partial y^m}{\partial X^i} \frac{\partial}{\partial y^m} \right) \left(\frac{\partial X^j}{\partial y^n} \tilde{U}^n \right) \right] \hat{\mathbf{X}}_j \\ &= \left[\left(\frac{\partial X^i}{\partial y^l} \tilde{U}^l \frac{\partial y^m}{\partial X^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^m} \left(\frac{\partial X^j}{\partial y^n} \tilde{U}^n \right) \right] \frac{\partial y^k}{\partial X^j} \tau_k \end{aligned}$$

por la definición de los vectores covariantes [ec.(48)].

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= \left[\delta_i^m \tilde{U}^i \left(\frac{\partial^2 X^j}{\partial y^m \partial y^n} \tilde{U}^n + \frac{\partial X^j}{\partial y^n} \frac{\partial}{\partial y^m} \tilde{U}^n \right) \right] \frac{\partial y^k}{\partial X^j} \tau_k \\ &= \left[\tilde{U}^m \frac{\partial y^k}{\partial X^j} \left(\frac{\partial^2 X^j}{\partial y^m \partial y^n} \tilde{U}^n + \frac{\partial X^j}{\partial y^n} \frac{\partial \tilde{U}^n}{\partial y^m} \right) \right] \tau_k \end{aligned}$$

Usando entonces la definición del símbolo de Christoffel [ec. (58)], se tiene que

$$\frac{\partial^2 X^j}{\partial y^m \partial y^n} = \Gamma_{mn}^s \frac{\partial X^j}{\partial y^s}:$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= \left[\tilde{U}^m \frac{\partial y^k}{\partial X^j} \left(\Gamma_{mn}^s \frac{\partial X^j}{\partial y^s} \tilde{U}^n + \frac{\partial X^j}{\partial y^n} \frac{\partial \tilde{U}^n}{\partial y^m} \right) \right] \tau_k \\ &= \left[\tilde{U}^m \left(\Gamma_{mn}^s \frac{\partial y^k}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial y^s} \tilde{U}^n + \frac{\partial y^k}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial y^n} \frac{\partial \tilde{U}^n}{\partial y^m} \right) \right] \tau_k \\ &= \left[\tilde{U}^m \left(\Gamma_{mn}^s \delta_s^k \tilde{U}^n + \delta_n^k \frac{\partial \tilde{U}^n}{\partial y^m} \right) \right] \tau_k \\ &= \left[\tilde{U}^m \left(\Gamma_{mk}^k \tilde{U}^k + \frac{\partial \tilde{U}^k}{\partial y^m} \right) \right] \tau_k \\ &= \left[\tilde{U}^m \tilde{U}_{,m}^k \right] \tau_k \end{aligned} \tag{66}$$

usando la definición de derivada covariante [ec.(57)].

Término c) Si \tilde{p} es la presión en las coordenadas y^i , tenemos $p(X) = \tilde{p}(y)$, y, por tanto

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\nabla p &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X^i}\hat{\mathbf{x}}_i \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial y^j}{\partial X^i}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y^j}\frac{\partial y^k}{\partial X^i}\tau_k \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial y^j}{\partial X^i}\frac{\partial y^k}{\partial X^i}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y^j}\tau_k \\
&= -G^{jk}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y^j}\tau_k
\end{aligned} \tag{67}$$

usando la definición del tensor métrico [ec.(55)].

Término d) Para el término de la aceleración gravitatoria modificada,

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}' &= g'^i\hat{\mathbf{x}}_i = g'^i\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\tau_k \\
&= \tilde{g}^k\tau_k
\end{aligned} \tag{68}$$

Término e) Tenemos que

$$\vec{\Omega} \times \mathbf{U} = \tilde{\Omega}^i\tau_i \times \tilde{U}^j\tau_j = \tilde{\Omega}^i\tilde{U}^j\tau_i \times \tau_j \equiv \xi_l\eta^l \tag{69}$$

pues hicimos $\tilde{\Omega}^i\tilde{U}^j\tau_i \times \tau_j \equiv \xi_l\eta^l$ Necesitamos conocer el valor de ξ_l , entonces multiplicando entonces todo por τ_k tenemos:

$$\xi_l\eta^l \cdot \tau_k = \tilde{\Omega}^i\tilde{U}^j(\tau_i \times \tau_j) \cdot \tau_k$$

De la ec.(51) sabemos que $\eta^l \cdot \tau_k = \delta_{lk}$, entonces,

$$\xi_k = \tilde{\Omega}^i\tilde{U}^j(\tau_i \times \tau_j) \cdot \tau_k$$

pero

$$(\tau_i \times \tau_j) \cdot \tau_k = \varepsilon_{ijk}J$$

donde, como sabemos, $J = \det \mathbb{J}$ es el jacobiano de la transformación $X^i = X^i(y^j)$, y sustituyendo en la ec.(69),

$$\vec{\Omega} \times \mathbf{U} = \varepsilon_{ijl}J\tilde{\Omega}^i\tilde{U}^j\eta^l$$

y, pasando a la base covariante $\eta^l = G^{lk}\tau_k$, se obtiene

$$\vec{\Omega} \times \mathbf{U} = \varepsilon_{ijl}JG^{lk}\tilde{\Omega}^i\tilde{U}^j\tau_k$$

usando las componentes covariantes de $\vec{\Omega}$ y \mathbf{U} , $\tilde{\Omega}^i = G^{im}\tilde{\Omega}_m$ y $\tilde{U}^j = G^{jn}\tilde{U}_n$:

$$\vec{\Omega} \times \mathbf{U} = \varepsilon_{ijl}(JG^{lk}G^{im}G^{jn})\tilde{\Omega}_m\tilde{U}_n\tau_k$$

y si definimos $\tilde{\varepsilon}^{kmn} \equiv JG^{lk}G^{im}G^{jn}\varepsilon_{ijl}$ y sabemos que $\tilde{\varepsilon}^{kmn} = \varepsilon_{kmn}J$ se obtiene

$$\vec{\Omega} \times \mathbf{U} = \tilde{\varepsilon}^{kmn}\tilde{\Omega}_m\tilde{U}_n\tau_k \tag{70}$$

Ecuación de movimiento De las ecuaciones (65), (66), (67), (68) y (70), resulta que la ecuación de movimiento en coordenadas generalizadas es

$$\frac{\partial \tilde{U}^k}{\partial t} \tau_k = -\tilde{U}^m \tilde{U}_{;m}^k \tau_k - G^{jk} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y^j} \tau_k + \tilde{g}^k \tau_k - 2\tilde{\varepsilon}^{kmn} \tilde{\Omega}_m \tilde{U}_n \tau_k$$

ó

$$\frac{\partial \tilde{U}^k}{\partial t} = -\tilde{U}^m \tilde{U}_{;m}^k - G^{jk} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y^j} + \tilde{g}^k - 2\tilde{\varepsilon}^{kmn} \tilde{\Omega}_m \tilde{U}_n. \quad (71)$$

4.2.2 Ecuación de continuidad en coordenadas arbitrarias

En términos vectoriales, la ecuación de continuidad es $\nabla \cdot U = 0$.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot U &= \frac{\partial U_i}{\partial X_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{\partial X^i}{\partial y^l} \tilde{U}^l \right) \\ &= \frac{\partial y^m}{\partial X^i} \frac{\partial}{\partial y^m} \left(\frac{\partial X^i}{\partial y^l} \tilde{U}^l \right) \\ &= \frac{\partial y^m}{\partial X^i} \left[\frac{\partial^2 X^i}{\partial y^m \partial y^l} \tilde{U}^l + \frac{\partial X^i}{\partial y^l} \frac{\partial \tilde{U}^l}{\partial y^m} \right] \\ &= \frac{\partial y^m}{\partial X^i} \frac{\partial^2 X^i}{\partial y^m \partial y^l} \tilde{U}^l + \frac{\partial y^m}{\partial X^i} \frac{\partial X^i}{\partial y^l} \frac{\partial \tilde{U}^l}{\partial y^m} \\ &= \frac{\partial y^m}{\partial X^i} \frac{\partial^2 X^i}{\partial y^m \partial y^l} \tilde{U}^l + \frac{\partial \tilde{U}^l}{\partial y^l} \\ &= \frac{\partial y^m}{\partial X^i} \frac{\partial^2 X^i}{\partial y^m \partial y^l} \tilde{U}^l + \frac{\partial \tilde{U}^l}{\partial y^l} \end{aligned}$$

Se puede usar otra vez la definición del símbolo de Christoffel [ec.(58)], de manera que se tiene $\frac{\partial^2 X^i}{\partial y^m \partial y^l} = \Gamma_{mn}^i \frac{\partial X^i}{\partial y^l}$.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot U &= \frac{\partial y^m}{\partial X^i} \frac{\partial X^j}{\partial y^i} \Gamma_{mi}^j \tilde{U}^l + \frac{\partial \tilde{U}^l}{\partial y^l} \\ &= \delta_i^m \delta_i^j \Gamma_{mi}^j \tilde{U}^l + \frac{\partial \tilde{U}^l}{\partial y^l} \\ &= \Gamma_{ii}^i \tilde{U}^l + \frac{\partial \tilde{U}^l}{\partial y^l} \\ &= \tilde{U}_{;i}^i \end{aligned}$$

dada la definición de la derivada covariante de un vector contravariante [ec.(57)] con $k = m$. Entonces la ecuación de continuidad en coordenadas arbitrarias para

un fluido incompresible es

$$\tilde{U}_{;i}^i = 0 \quad (72)$$

Usando el resultado de la ec.(59) y cambiando índices resulta

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y^s} (\sqrt{G} \tilde{U}^s) = 0. \quad (73)$$

4.3 Ecuaciones en coordenadas esféricas

Las ecuaciones de transformación para el caso de coordenadas esféricas son

$$\begin{aligned} X &= r \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= r \cos \phi \sin \lambda \\ Z &= r \sin \phi \end{aligned}, \quad (74)$$

con

$$y^1 = \lambda, y^2 = \phi, y^3 = r. \quad (75)$$

Entonces, haciendo los cálculos, el tensor métrico (54) y su inversa (55) son:

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} r^2 \cos^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

de donde se obtiene:

$$J = \sqrt{G} = r^2 \cos \phi \quad (77)$$

Los vectores covariantes son:

$$\tau_1 \equiv \lambda = r \cos \phi \hat{\lambda} \quad ; \quad \tau_2 \equiv \phi = r \hat{\phi} \quad ; \quad \tau_3 = \hat{r} \quad (78)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= -\sin \lambda \hat{X} + \cos \lambda \hat{Y} \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi (\cos \lambda \hat{X} + \sin \lambda \hat{Y}) + \cos \phi \hat{Z} \\ \hat{r} &= \cos \phi (\cos \lambda \hat{X} + \sin \lambda \hat{Y}) + \sin \phi \hat{Z} \end{aligned} \quad (79)$$

y los vectores contravariantes son tales que $\eta^i = \mathbb{G}^{ij} \tau_j$,

$$\eta^1 = \frac{\lambda}{r \cos \phi} \quad ; \quad \eta^2 = \frac{\phi}{r} \quad ; \quad \eta^3 = \hat{r}$$

Dado que la base τ_i es ortogonal podemos calcular las componentes físicas de un vector **A** cualquiera

$$\mathbf{A} = A^i \tau_i = A_j \eta^j$$

como las componentes $A(i)$ en la dirección de los vectores unitarios $\hat{\tau}_i = \tau_i / \|\tau_i\| = \hat{\eta}^i = \eta^i / \|\eta^i\|$,

$$\mathbf{A} = A^i \tau_i = A^i \|\tau_i\| \hat{\tau}_i \equiv A(i) \hat{\tau}_i$$

por tanto la relación entre componentes contravariantes y las componentes físicas son $A(i) = A^i \|\tau_i\|$,

$$A(1) = A^1 r \cos \phi \quad , \quad A(2) = A^2 r \quad , \quad A(3) = A^3 \quad . \quad (80)$$

Entonces las componentes físicas del vector velocidad que se denotan por usualmente por U, V, W están dadas por

$$U = U^1 r \cos \phi \quad , \quad V = U^2 r \quad , \quad W = U^3$$

con $U^i = dy^i/dt$ y por tanto

$$U^1 = \frac{1}{r \cos \phi} U \quad , \quad U^2 = \frac{1}{r} V \quad , \quad U^3 = W \quad . \quad (81)$$

4.3.1 Ecuación de continuidad

Reemplazando (81), usando (75) y (77) en la ecuación de continuidad (73) $\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y^s} (\sqrt{G} \tilde{U}^s) = 0$:

$$\frac{1}{r^2 \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} r^2 \cos \phi \frac{1}{r \cos \phi} U + \frac{\partial}{\partial \phi} r^2 \cos \phi \frac{1}{r} V + \frac{\partial}{\partial r} r^2 \cos \phi W \right] = 0$$

entonces

$$\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} U + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi V) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 W) = 0. \quad (82)$$

4.3.2 Ecuación de movimiento

Tomando la ecuación de movimiento en coordenadas arbitrarias (71)

$$\frac{\partial \tilde{U}^k}{\partial t} + \tilde{U}^m \tilde{U}_{;m}^k + G^{jk} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y^j} - \tilde{g}^k + 2\tilde{\epsilon}^{kmn} \tilde{\Omega}_{;n} \tilde{l}_n = 0,$$

tenemos, usando (81),

$$\frac{\partial \tilde{U}^1}{\partial t} = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial U}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial \tilde{U}^2}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial \tilde{U}^3}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} \quad . \quad (83)$$

Para el segundo término de la ecuación de movimiento usamos la definición (57) de la derivada covariante:

$$\tilde{U}^m \tilde{U}_{;m}^k = \tilde{U}^m \left[\frac{\partial \tilde{U}^k}{\partial y^m} + \Gamma_{lm}^k \tilde{U}^l \right]$$

Luego, usamos la ec.(56) para encontrar los símbolos de Christoffel:

$$\frac{\partial \tau_l}{\partial y^m} = \Gamma_{lm}^k \tau_k.$$

Usando las ecs.(78) y (79) se obtiene

$$\tau_1 \equiv \lambda = r \cos \phi \hat{\lambda} \quad ; \quad \tau_2 \equiv \phi = r \hat{\phi} \quad ; \quad \tau_3 \equiv \hat{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_1}{\partial \lambda} &= \cos \phi \sin \phi \tau_2 - r \cos^2 \phi \tau_3 \quad , \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial \phi} = -\tan \phi \tau_1 \quad , \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial r} = \frac{1}{r} \tau_1 \quad , \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} &= -\tan \phi \tau_1 \quad , \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial \phi} = -r \tau_3 \quad , \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial r} = \frac{1}{r} \tau_2 \quad , \\ \frac{\partial \tau_3}{\partial \lambda} &= \frac{1}{r} \tau_1 \quad , \quad \frac{\partial \tau_3}{\partial \phi} = \frac{1}{r} \tau_2 \quad , \quad \frac{\partial \tau_3}{\partial r} = 0 \quad , \end{aligned}$$

de donde obtenemos los símbolos de Christoffel $\Gamma_{lm}^k = \frac{1}{\tau_k} \frac{\partial \tau_l}{\partial y^m}$. Mediante (81) y haciendo los cálculos, conocemos la expresión de $\tilde{U}^m \tilde{U}_{;m}^k$.

Para el término relacionado con la presión, usando (76),

$$G^{jk} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y^j} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} r^2 \cos^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \tilde{p} / \partial \lambda \\ \partial \tilde{p} / \partial \phi \\ \partial \tilde{p} / \partial r \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (84)$$

La fuerza de gravedad en coordenadas esféricas es:

$$\mathbf{g} = -g \hat{r}_3 \quad (85)$$

Para la fuerza de Coriolis se utiliza que $\tilde{\varepsilon}^{kmn} = \varepsilon_{kmn} J = \varepsilon_{kmn} \sqrt{G} = r^2 \cos \phi \varepsilon_{kmn}$

$$2\tilde{\varepsilon}^{kmn} \tilde{\Omega}_m \tilde{U}_n = 2r^2 \cos \phi \varepsilon_{kmn} \tilde{\Omega}_m \tilde{U}_n$$

Asimismo, sabemos, por la fig.11 que $\vec{\Omega} = \Omega (\cos \phi \hat{\phi} + \sin \phi \hat{r})$, entonces:

$$\tilde{\Omega}_1 = 0 \quad , \quad \tilde{\Omega}_2 = \frac{1}{r} \Omega \cos \phi \quad , \quad \tilde{\Omega}_3 = \sin \phi$$

y usando (81) y la definición de ε_{kmn}

$$\begin{aligned} 2\tilde{\varepsilon}^{1mn} \tilde{\Omega}_m \tilde{U}_n &= -2\frac{1}{r} \Omega V \tan \phi + 2\frac{1}{r} \Omega W \\ 2\tilde{\varepsilon}^{imn} \tilde{\Omega}_m \tilde{U}_n &= 2\frac{1}{r} \Omega U \sin \phi \\ 2\tilde{\varepsilon}^{1mn} \tilde{\Omega}_m \tilde{U}_n &= -2\Omega U \cos \phi \end{aligned} \quad (86)$$

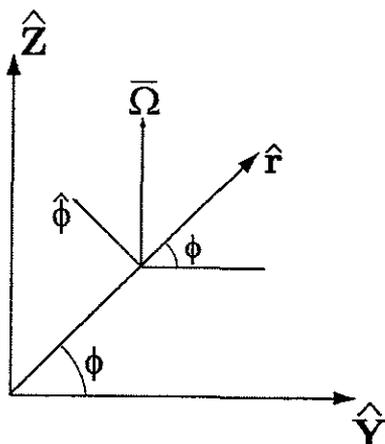


Figura 11: El vector Ω en función de las coordenadas esféricas

Ahora, sustituyendo (83), (84), (85), (86), así como la expresión de $\tilde{U}^m \tilde{U}_{;m}^k$, en la ecuación de continuidad (71) resulta la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} + \frac{UW}{r} - \frac{UV}{r} \tan \phi - 2\Omega V \sin \phi + 2\Omega W \cos \phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \lambda} \\ \frac{dV}{dt} + \frac{VW}{r} + \frac{U^2}{r} \tan \phi + 2\Omega U \sin \phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \phi} \\ \frac{dW}{dt} - \frac{U^2 + V^2}{r} - 2\Omega U \cos \phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} - g \end{aligned} \quad (87)$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{V}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + W \frac{\partial}{\partial r}$$

4.4 Ecuaciones en coordenadas de proyección

Cada punto en el espacio, podemos localizarlo por sus coordenadas cartesianas (X, Y, Z) , esféricas (λ, ϕ, r) ó de proyección (x_p, y_p, z_p) . Podemos tomar ventaja de que conocemos las ecuaciones de conservación en coordenadas esféricas [ecs.(82) y (87)] para obtener dichas ecuaciones en coordenadas de proyección, como se expone a continuación. Otra forma de obtener estas ecuaciones es partiendo de las ecs.(73) y (71) calculando el valor de los términos para la transformación entre (X, Y, Z) y (x_p, y_p, z_p) .

Tenemos el vector de posición de una partícula en el sistema XYZ con origen en un modelo esférico terrestre

$$\mathbf{R} = X\hat{\mathbf{X}} + Y\hat{\mathbf{Y}} + Z\hat{\mathbf{Z}} \quad (88)$$

donde la ec.(74) nos da la transformación de coordenadas (X, Y, Z) a (λ, ϕ, r) . Por otro lado, tenemos las coordenadas de proyección en función de las cuales [ec.(12)] podemos poner a las coordenadas esféricas

$$x_p = x_p(\lambda, \phi) \quad y = y(\lambda, \phi) \quad z_p = r - R_0 \quad (89)$$

$$\lambda = \lambda(x_p, y_p) \quad \phi = \phi(x_p, y_p) \quad r = z_p + R_0 \quad (90)$$

De esta manera, reemplazando la ec.(12) en la ec.(74) obtenemos la expresión de \mathbf{R} en términos de x_p, y_p, z_p ,

$$\mathbf{R} = X(x_p, y_p, z_p) \widehat{\mathbf{X}} + Y(x_p, y_p, z_p) \widehat{\mathbf{Y}} + Z(x_p, y_p, z_p) \widehat{\mathbf{Z}} \quad (91)$$

de donde obtenemos los vectores base asociados a las coordenadas instantáneas x_p, y_p, z_p de proyección de una partícula

$$\mathbf{x}_p = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_p} \quad , \quad \mathbf{y}_p = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y_p} \quad , \quad \mathbf{z}_p = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z_p} \quad (92)$$

y usando sus magnitudes

$$h_x \equiv \|\mathbf{x}_p\| \quad , \quad h_y \equiv \|\mathbf{y}_p\| \quad , \quad h_z \equiv \|\mathbf{z}_p\|$$

obtenemos los vectores unitarios

$$\widehat{\mathbf{x}}_p = \frac{\mathbf{x}_p}{h_x} \quad , \quad \widehat{\mathbf{y}}_p = \frac{\mathbf{y}_p}{h_y} \quad , \quad \widehat{\mathbf{z}}_p = \frac{\mathbf{z}_p}{h_z}$$

Dado que las proyecciones que se usan en modelación atmosférica son conformes, preservan el ángulo entre las curvas en la esfera y por consiguiente el ángulo de $\pi/2$ entre los vectores $\widehat{\lambda}$ y $\widehat{\phi}$ asociados a las coordenadas λ, ϕ, r . Supondremos que las ecuaciones de proyección (89) son tales que \mathbf{x}_p y \mathbf{y}_p son ortogonales,

$$\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{y}_p = 0.$$

Dado que la ec.(90) no es fácil de obtener en general, calcularemos h_x, h_y, h_z usando la expresión de x_p, y_p, z_p en términos de λ, ϕ, r . Para tal propósito usaremos los vectores base unitarios $\widehat{\lambda}, \widehat{\phi}, \widehat{r}$ asociados a las coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \quad , \quad \boldsymbol{\phi} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} \quad , \quad \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} \quad ;$$

si definimos

$$h_\lambda = \|\boldsymbol{\lambda}\| = r \cos \phi \quad , \quad h_\phi = \|\boldsymbol{\phi}\| = r \quad , \quad h_r = \|\mathbf{r}\| = 1 \quad (93)$$

obtenemos la base ortonormal

$$\widehat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{h_\lambda} \quad , \quad \widehat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\boldsymbol{\phi}}{h_\phi} \quad , \quad \widehat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{h_r} \quad .$$

Usando $\partial_{x_p} = \partial/\partial x_p$ para las derivadas parciales, la relación entre $\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p$ y $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\phi}$ se obtiene por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_x \lambda \partial_\lambda + \partial_x \phi \partial_\phi \quad , \quad \partial_y = \partial_y \lambda \partial_\lambda + \partial_y \phi \partial_\phi \\ \partial_\lambda &= \partial_\lambda x \partial_x + \partial_\lambda y \partial_y \quad , \quad \partial_\phi = \partial_\phi x \partial_x + \partial_\phi y \partial_y \end{aligned}$$

si aplicamos lo anterior a \mathbf{R} obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_p &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_p} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_p} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \phi}{\partial x_p} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_p} \boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial \phi}{\partial x_p} \boldsymbol{\phi} \\ \mathbf{y}_p &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y_p} = \frac{\partial \lambda}{\partial y_p} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \phi}{\partial y_p} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = \frac{\partial \lambda}{\partial y_p} \boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial \phi}{\partial y_p} \boldsymbol{\phi}\end{aligned}$$

ó en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{y}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \lambda & \partial_x \phi \\ \partial_y \lambda & \partial_y \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad (94)$$

y de manera análoga

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{\lambda} x_p & \partial_{\lambda} y_p \\ \partial_{\phi} x_p & \partial_{\phi} y_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{y}_p \end{pmatrix} \quad (95)$$

Dado que ya conocemos el valor de h_λ y h_ϕ dada por la ec.(93), necesitamos calcular las magnitudes h_x y h_y de $\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p$. De (94) y (95) se sigue que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \partial_x \lambda & \partial_x \phi \\ \partial_y \lambda & \partial_y \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_{\lambda} x_p & \partial_{\lambda} y_p \\ \partial_{\phi} x_p & \partial_{\phi} y_p \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{|\Delta|} \begin{pmatrix} \partial_{\phi} y_p & -\partial_{\lambda} y_p \\ -\partial_{\phi} x_p & \partial_{\lambda} x_p \end{pmatrix}\end{aligned}$$

donde $\Delta = \partial_{\lambda} x_p \partial_{\phi} y_p - \partial_{\lambda} y_p \partial_{\phi} x_p$ y por tanto

$$\begin{aligned}\partial_x \lambda &= \partial_{\phi} y_p / \Delta \\ \partial_x \phi &= -\partial_{\lambda} y_p / \Delta \\ \partial_y \lambda &= -\partial_{\phi} x_p / \Delta \\ \partial_y \phi &= \partial_{\lambda} x_p / \Delta\end{aligned}$$

sustituyendo en (94),

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{y}_p \end{pmatrix} &= \frac{1}{|\Delta|} \begin{pmatrix} \partial_{\phi} y_p & -\partial_{\lambda} y_p \\ -\partial_{\phi} x_p & \partial_{\lambda} x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{y}_p \end{pmatrix} &= \frac{1}{|\Delta|} \begin{pmatrix} (\partial_{\phi} y_p) h_\lambda & -(\partial_{\lambda} y_p) h_\phi \\ -(\partial_{\phi} x_p) h_\lambda & (\partial_{\lambda} x_p) h_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

y como $h_x = \|\mathbf{x}_p\|$ y $h_y = \|\mathbf{y}_p\|$ se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}h_x &= \frac{1}{|\Delta|} \sqrt{[(\partial_{\phi} y_p) h_\lambda]^2 + [(\partial_{\lambda} y_p) h_\phi]^2} \\ h_y &= \frac{1}{|\Delta|} \sqrt{[(\partial_{\phi} x_p) h_\lambda]^2 + [(\partial_{\lambda} x_p) h_\phi]^2}.\end{aligned} \quad (96)$$

Ahora, ya que conocemos h_x y h_y , necesitamos encontrar la relación entre las dos bases ortonormales para lo cual usamos otra vez $\lambda = h_\lambda \hat{\lambda}$ y $\phi = h_\phi \hat{\phi}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{y}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_x \lambda) h_\lambda & (\partial_x \phi) h_\phi \\ (\partial_y \lambda) h_\lambda & (\partial_y \phi) h_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}$$

entonces resulta,

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_p \\ \hat{\mathbf{y}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x \mathbf{x}_p \\ h_y^{-1} \mathbf{y}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_{x_p} \lambda) h_\lambda h_x & (\partial_{x_p} \phi) h_\phi h_x \\ (\partial_{y_p} \lambda) h_\lambda h_y^{-1} & (\partial_{y_p} \phi) h_\phi h_y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}.$$

A la matriz que aparece en el lado derecho la llamaremos $T_0(\lambda, \phi)$,

$$T_0(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\Delta|} \begin{pmatrix} (\partial_{\phi} y_p) h_\lambda h_x^{-1} & -(\partial_{\lambda} y_p) h_\phi h_x^{-1} \\ -(\partial_{\phi} x_p) h_\lambda h_y^{-1} & (\partial_{\lambda} x_p) h_\phi h_y^{-1} \end{pmatrix}. \quad (97)$$

Supondremos que T_0 tiene determinante positivo y por tanto es una matriz de rotación. Ahora, a partir de que sabemos que $z_p = r - R_0$,

$$\mathbf{z}_p = \partial \mathbf{R} / \partial z_p = \partial r / \partial z_p \partial \mathbf{R} / \partial r = \partial \mathbf{R} / \partial r = \mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}$$

Entonces la relación entre los vectores base unitarios están dados por

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_p \\ \hat{\mathbf{y}}_p \\ \hat{\mathbf{z}}_p \end{pmatrix} = T(\lambda, \phi) \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\phi} \\ \hat{\mathbf{r}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\phi} \\ \hat{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = T^t(\lambda, \phi) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_p \\ \hat{\mathbf{y}}_p \\ \hat{\mathbf{z}}_p \end{pmatrix}, \quad (98)$$

donde la matriz T es una matriz de rotación

$$T(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & 0 \\ T_3 & T_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (99)$$

de manera que $\hat{\mathbf{x}}_p, \hat{\mathbf{y}}_p, \hat{\mathbf{z}}_p$ define un sistema derecho de ejes cartesianos independientemente de la forma de la proyección,

$$\hat{\mathbf{x}}_p \times \hat{\mathbf{y}}_p = \hat{\mathbf{z}}_p.$$

4.4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración en coordenadas $\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p$

Sea \mathbf{R} el vector de posición (88) de una partícula. Ya que no es fácil obtener la expresión (91) de \mathbf{R} en términos de las coordenadas de proyección usaremos las expresiones de la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas como punto de partida.

La velocidad de una partícula está dada por [ec.(38)]

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{R} \quad (100)$$

con

$$\mathbf{V} = \frac{dX}{dt} \hat{\mathbf{X}} + \frac{dY}{dt} \hat{\mathbf{Y}} + \frac{dZ}{dt} \hat{\mathbf{Z}} = U \hat{\boldsymbol{\lambda}} + V \hat{\boldsymbol{\phi}} + W \hat{\mathbf{r}}$$

y usando (81) para coordenadas esféricas

$$\dot{\lambda} = U/r \cos \phi \quad , \quad \dot{\phi} = V/r \quad , \quad \dot{r} = W \quad .$$

Usando la regla de la cadena podemos obtener la expresión de \mathbf{V} en términos de los vectores base $\hat{\mathbf{x}}_p, \hat{\mathbf{y}}_p, \hat{\mathbf{z}}_p$ sin hacer uso explícito de las ecuaciones de proyección

$$\mathbf{V} = (U \quad V \quad W) \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = (U \quad V \quad W) T^t(\lambda, \phi) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_p \\ \hat{\mathbf{y}}_p \\ \hat{\mathbf{z}}_p \end{pmatrix} \quad (101)$$

donde $U = h_\lambda \dot{\lambda}$, $V = h_\phi \dot{\phi}$, $W = \dot{r}$ y por regla de la cadena

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= (\partial_x \lambda) \dot{x}_p + (\partial_y \lambda) \dot{y}_p \\ \dot{\phi} &= (\partial_x \phi) \dot{x}_p + (\partial_y \phi) \dot{y}_p \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_\lambda \dot{\lambda} \\ h_\phi \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_\lambda (\partial_x \lambda) & (\partial_y \lambda) h_\lambda \\ h_\phi (\partial_x \phi) & (\partial_y \phi) h_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\partial_x \lambda) h_\lambda h_x^{-1} & (\partial_y \lambda) h_\lambda h_y^{-1} \\ (\partial_x \phi) h_\phi h_x^{-1} & (\partial_y \phi) h_\phi h_y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \dot{x}_p \\ h_y \dot{y}_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ T_2 & T_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \dot{x}_p \\ h_y \dot{y}_p \end{pmatrix} = T_0^t \begin{pmatrix} h_x \dot{x}_p \\ h_y \dot{y}_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

usando (97). Además, para la velocidad vertical ya sabemos que $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{z}}_p$, lo que resumimos de forma matricial, usando (99)

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_3 & 0 \\ T_2 & T_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \dot{x}_p \\ h_y \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} h_x \dot{x}_p \\ h_y \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{pmatrix}$$

Entonces, sustituyendo en (101) y usando que $TT^t = I$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} h_x \dot{x}_p & h_y \dot{y}_p & \dot{z}_p \end{pmatrix} T T^t \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_p \\ \hat{\mathbf{y}}_p \\ \hat{\mathbf{z}}_p \end{pmatrix} \\ &= h_x \dot{x}_p \hat{\mathbf{x}}_p + h_y \dot{y}_p \hat{\mathbf{y}}_p + \dot{z}_p \hat{\mathbf{z}}_p \end{aligned}$$

de manera que

$$u_p = h_x \dot{x}_p \quad , \quad v_p = h_y \dot{y}_p \quad , \quad w_p = \dot{z}_p \quad (102)$$

son las componentes de \mathbf{V} en la base $\hat{\mathbf{x}}_p, \hat{\mathbf{y}}_p, \hat{\mathbf{z}}_p$. Además tenemos

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = T_0^t \begin{pmatrix} h_x \dot{x}_p \\ h_y \dot{y}_p \end{pmatrix} = T_0^t \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} \quad , \quad W = w_p \quad . \quad (103)$$

Usando $\Omega \times \mathbf{R} = \Omega r \cos \phi \hat{\lambda}$ se obtiene, con (98) y (99):

$$\Omega \times \mathbf{R} = \Omega r \cos \phi (T_1 \hat{\mathbf{x}}_p + T_3 \hat{\mathbf{y}}_p) \quad (104)$$

y reemplazando (102) y (104) en (100),

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = u_p \hat{\mathbf{x}}_p + v_p \hat{\mathbf{y}}_p + w_p \hat{\mathbf{z}}_p + \Omega r \cos \phi (T_1 \hat{\mathbf{x}}_p + T_3 \hat{\mathbf{y}}_p) \quad . \quad (105)$$

Para obtener la aceleración podemos derivar (105) pero es más facil usar la ecuación (40)

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\Omega \times \mathbf{V} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R})$$

que, como hemos visto en la sección 4.3, tiene la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} &= \left[\frac{dU}{dt} + \frac{UW}{r} - \frac{UV}{r} \tan \phi - 2\Omega V \sin \phi + 2\Omega W \cos \phi \right] \hat{\lambda} \\ &+ \left[\frac{dV}{dt} + \frac{VW}{r} + \frac{U^2}{r} \tan \phi + 2\Omega U \sin \phi + \Omega^2 r \cos^2 \phi \right] \hat{\phi} \\ &+ \left[\frac{dW}{dt} - \frac{U^2 + V^2}{r} - 2\Omega U \cos \phi - \Omega^2 r \cos^2 \phi \right] \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Para la aceleración vertical tenemos $w_p = W$

$$\frac{dw_p}{dt} = \frac{dW}{dt}.$$

Usando (103) obtenemos U, V en términos de u_p, v_p , y derivando obtenemos la relación entre derivadas temporales

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} T_0^t \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \left(\dot{\lambda} (\partial_\lambda T_0^t) + \dot{\phi} (\partial_\phi T_0^t) \right) \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + T_0^t \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} \quad (106)$$

Nota: En lo que sigue despreciaremos los términos con Ω^2 .

4.4.2 Ecuación de continuidad

En las coordenadas de proyección, la ecuación de continuidad es

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{G} \tilde{U}^i = 0$$

donde \sqrt{G} y las componentes contravariantes \tilde{U}^i se calculan como sigue.

De la ortogonalidad de los vectores $\mathbf{x}_p \equiv \tau_1$, $\mathbf{y}_p \equiv \tau_2$, $\mathbf{z}_p \equiv \tau_3$ se obtiene la expresión siguiente para el tensor métrico

$$G = J^t J = \begin{pmatrix} h_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_z^2 \end{pmatrix}$$

de manera que $\sqrt{G} = h_x h_y h_z$. Por otro lado, tenemos el vector velocidad

$$\begin{aligned} V &= u_p \hat{\mathbf{x}}_p + v_p \mathbf{y}_p + w_p \mathbf{z}_p \\ &= \frac{u_p}{h_x} \tau_1 + \frac{v_p}{h_y} \tau_2 + \frac{w_p}{h_z} \tau_3 \end{aligned}$$

lo que nos da las componentes contravariantes en términos de las componentes físicas

$$\tilde{U}^1 = \frac{u_p}{h_x}, \quad \tilde{U}^2 = \frac{v_p}{h_y}, \quad \tilde{U}^3 = \frac{w_p}{h_z}.$$

En esta forma la ecuación de continuidad queda como sigue:

$$\frac{1}{h_x h_y h_z} \left[\frac{\partial}{\partial x_p} (h_y h_z u_p) + \frac{\partial}{\partial y_p} (h_x h_z v_p) + \frac{\partial}{\partial z_p} (h_x h_y w_p) \right] = 0 \quad (107)$$

4.4.3 Ecuación de movimiento

Al igual que con la ec. de continuidad, en lugar de usar la ecuación vectorial (43) y la expresión de cada término como función de las coordenadas de proyección y los vectores base $\hat{\mathbf{x}}_p, \hat{\mathbf{y}}_p, \hat{\mathbf{z}}_p$, usaremos las ecuaciones escalares de momento en coordenadas esféricas, dadas por las ecs.(87).

Momento vertical Usando (103), (104) y $r = z_p + R_0$, sabemos que $U^2 + V^2 = u_p^2 + v_p^2$ y que $U = T_1 u_p + T_3 v_p$ y $V = T_2 u_p + T_4 v_p$, lo que nos da la ecuación de momento vertical en coordenadas de proyección:

$$\frac{dw_p}{dt} - \frac{u_p^2 + v_p^2}{z_p + R_0} - 2\Omega \cos \phi (T_1 u_p + T_3 v_p) = -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} - g \quad (108)$$

pues $p_p = p$ y $\rho_p = \rho$.

Momento horizontal Para obtener las ecuaciones de momento horizontal en coordenadas de proyección, usaremos las siguientes relaciones entre T_1, T_2, T_3, T_4 . De las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} U^2 + V^2 &= u_p^2 + v_p^2 \\ U &= T_1 u_p + T_3 v_p \\ V &= T_2 u_p + T_4 v_p \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} T_1^2 + T_2^2 &= T_3^2 + T_4^2 = 1 \\ T_1 T_3 + T_2 T_4 &= 1 \end{aligned}$$

y a partir del hecho de que $T_0^t = T_0^{-1}$ obtenemos $T_2 = -T_3$ y $T_1 = T_4$.

Las ecuaciones de momento horizontal en coordenadas esféricas las escribimos usando $f = 2\Omega \sin \phi$ como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \frac{U \tan \phi}{r} \begin{pmatrix} -V \\ U \end{pmatrix} + \frac{W}{r} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} -V \\ U \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 2\Omega W \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_\lambda} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial p}{\partial \phi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando T_0 en la ec.(106) y reemplazando en la ec.

$$T_0 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + T_0 \left(\dot{\lambda} (\partial_\lambda T_0^t) + \dot{\phi} (\partial_\phi T_0^t) \right) \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$$

obtenemos las ecs. de momento horizontal en coordenadas de proyección. Para esto simplifiquemos cada término como sigue,

$$\begin{aligned} T_0 \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &= T_0 T_0^t \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} \\ T_0 \begin{pmatrix} -V \\ U \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ -T_2 & T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T_2 & -T_1 \\ T_1 & -T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_p \\ u_p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para calcular la aplicación de T_0 al lado derecho usamos la regla de la cadena para transformar el gradiente de presión, así como las ecs.(97) y (98):

$$\begin{aligned} T_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{h_\lambda} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial p}{\partial \phi} \end{pmatrix} &= T_0 \begin{pmatrix} (\partial_x \lambda) h_\lambda h_x^{-1} & (\partial_y \lambda) h_\lambda h_y^{-1} \\ (\partial_x \phi) h_\phi h_x^{-1} & (\partial_y \phi) h_\phi h_y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_r} \frac{\partial p_r}{\partial x_r} \\ \frac{1}{h_y} \frac{\partial p_r}{\partial y_r} \end{pmatrix} \\ &= T_0 T_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{h_x} \frac{\partial p_r}{\partial x_r} \\ \frac{1}{h_y} \frac{\partial p_r}{\partial y_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_x} \frac{\partial p_r}{\partial x_r} \\ \frac{1}{h_y} \frac{\partial p_r}{\partial y_r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando

$$\begin{aligned} U &= T_1 u_p + T_3 v_p \\ W &= w_p \\ \tau &= z_p + R_0 \end{aligned} \tag{109}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + T_0 \left(\dot{\lambda} (\partial_\lambda T_0^i) + \dot{\phi} (\partial_\phi T_0^i) \right) \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + \frac{w_p}{z_p + R_0} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + \\ + \left(\frac{(T_1 u_p + T_3 v_p) \tan \phi}{z_p + R_0} + f \right) \begin{pmatrix} -v_p \\ u_p \end{pmatrix} + \\ + T_0 \begin{pmatrix} 2\Omega w_p \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho_p} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{x_p}} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} \\ \frac{1}{h_{y_p}} \frac{\partial p_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que son las ecuaciones de momento horizontal en coordenadas de proyección.

4.4.4 La proyección estereográfica polar

Consideremos las ecs. de proyección

$$\begin{aligned} x_p &= 2R_0 \frac{\cos \phi \sin \lambda}{1 + \sin \phi} \\ y_p &= -2R_0 \frac{\cos \phi \cos \lambda}{1 + \sin \phi} \\ z_p &= r - R_0. \end{aligned} \quad (110)$$

Usando

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_p}{\partial \lambda} &= 2R_0 \frac{\cos \phi \cos \lambda}{1 + \sin \phi}, & \frac{\partial y_p}{\partial \lambda} &= 2R_0 \frac{\cos \phi \sin \lambda}{1 + \sin \phi} \\ \frac{\partial x_p}{\partial \phi} &= -2R_0 \frac{\sin \lambda}{1 + \sin \phi}, & \frac{\partial y_p}{\partial \phi} &= 2R_0 \frac{\cos \lambda}{1 + \sin \phi} \end{aligned}$$

y $h_\lambda = r \cos \phi$, $h_\phi = r$, se obtiene

$$\Delta = \partial_\lambda x_p \partial_\phi y_p - \partial_\lambda y_p \partial_\phi x_p = 4R_0^2 \frac{\cos \phi}{(1 + \sin \phi)^2}$$

y los valores de

$$h_x = \frac{1}{\Delta} \sqrt{[(\partial_\phi y_p) h_\lambda]^2 + [(\partial_\lambda y_p) h_\phi]^2} = \frac{(1 + \sin \phi) r}{2R_0} \quad (111)$$

$$h_y = \frac{1}{\Delta} \sqrt{[(\partial_\phi x_p) h_\lambda]^2 + [(\partial_\lambda x_p) h_\phi]^2} = \frac{(1 + \sin \phi) r}{2R_0} \quad (112)$$

de manera que $h_x = h_y \equiv h$. Los elementos de la matriz T_0 se obtienen mediante (97) haciendo los cálculos:

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \quad (113)$$

entonces,

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

Esta es entonces, la matriz de transformación entre U, V, W y u_p, v_p, w_p :

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$$

Ecuación de continuidad. Usando los factores $h_x = h_y = h$ y $h_z = 1$ la ec. de continuidad (107) queda como sigue,

$$\frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_p} (hu_p) + \frac{\partial}{\partial y_p} (hv_p) + \frac{\partial}{\partial z_p} (h^2 w_p) \right] = 0$$

donde $h = (1 + \sin \phi) r / 2R_0 = (1 + \sin \phi) (z_p + R_0) / 2R_0$. Si se usa la aproximación $|z_p| \ll R_0$ se obtiene $h = (1 + \sin \phi) / 2$ lo que reduce la ec. de continuidad a

$$\frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_p} (hu_p) + \frac{\partial}{\partial y_p} (hv_p) \right] + \frac{\partial w_p}{\partial z_p} = 0 \quad (114)$$

que corresponde a la ec.(1-35) de Haltiner [3] con $m = 1/h$.

Ecuación de momento. De la ec.(108) y (113) la ecuación de momento vertical queda como sigue

$$\frac{dw_p}{dt} - \frac{u_p^2 + v_p^2}{z_p + R_0} - 2\Omega \cos \phi (\cos \lambda u_p + \sin \lambda v_p) = -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} - g. \quad (115)$$

En el caso del momento horizontal, de la misma forma se usa (113) para sustituir los componentes de la matriz en la ec.(??). Como T_0 no es función de ϕ , resulta que $\partial_\phi T_0^t = 0$. Además,

$$T_0 \dot{\lambda} (\partial_\lambda T_0^t) \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \frac{U}{r \cos \phi} \begin{pmatrix} v_p \\ -u_p \end{pmatrix}$$

donde se usó $\dot{\lambda} = U/r \cos \phi$. Entonces, usando (109), las ecuaciones de momento horizontal quedan como sigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + \frac{w_p}{z_p + R_0} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + \left(\frac{(\cos \lambda u_p + \sin \lambda v_p) (\sin \phi - 1)}{(z_p + R_0) \cos \phi} + f \right) \begin{pmatrix} -v_p \\ u_p \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\Omega w_p \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{h\rho_p} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} \\ \frac{\partial p_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde sólo falta sustituir las λ, ϕ, r por las x_p, y_p, z_p según (110)

$$\frac{(\cos \lambda u_p + \sin \lambda v_p) (\sin \phi - 1)}{(z_p + R_0) \cos \phi} = \frac{x_p v_p - y_p u_p}{2R_0 (z_p + R_0)}.$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + \frac{w_p}{z_p + R_0} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + \\ \left(\frac{x_p v_p - y_p u_p}{2R_0 (z_p + R_0)} + f \right) \begin{pmatrix} -v_p \\ u_p \end{pmatrix} + \\ + \frac{\Omega w_p (1 + \sin \phi)}{R_0} \begin{pmatrix} -y_p \\ x_p \end{pmatrix} = -\frac{1}{h \rho_p} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} \\ \frac{\partial p_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_p}{h} \frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{v_p}{h} \frac{\partial}{\partial y_p} + \frac{w_p}{h} \frac{\partial}{\partial z_p}$$

5 Análisis de las ecuaciones de conservación usadas por los modelos de mesoescala

Sea xyz el sistema cartesiano asociado al plano tangente a la esfera terrestre en un punto ($\lambda_c = 0, \phi_c$). Las ecuaciones de conservación relativas a dicho sistema y usadas por varios modelos de mesoescala ([7], [4], [1], entre otros), están dadas por las ecuaciones de estado de gas ideal, de continuidad (44) y de movimiento (45):

$$p = \mathcal{R}\rho T \quad (116)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (117)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\hat{\mathbf{k}} - 2\Omega \times \mathbf{u} \quad (118)$$

Por otro lado, tenemos las ecuaciones de proyección relativas al sistema $x_p y_p z_p$. Las coordenadas de proyección $x_p y_p z_p$ son coordenadas curvilíneas ortogonales legítimas para modelar la dinámica de un flujo atmosférico, pero, tal como ocurre con la definición de la topografía, en los modelos de mesoescala tales como RAMS o MM5, las coordenadas de proyección se identifican con las coordenadas cartesianas xyz relativas al plano tangente. Como mostramos en la sección 2.1, las coordenadas $x_p y_p z_p$ no coinciden con las cartesianas xyz , excepto en el origen $x = y = z = 0$, y las primeras sólo son una aproximación de las últimas cerca del origen,

$$x_p \approx x \quad , \quad y_p \approx y \quad , \quad z_p \approx z \quad .$$

En esta forma, si en las ecuaciones de proyección reemplazamos $x_p y_p z_p$ por xyz obtendremos las ecuaciones de proyección como una aproximación de las ecs.(116)-(118). Para analizar la validez de esta aproximación consideraremos el plano tangente al polo norte ($\lambda_c = 0, \phi_c = \pi/2$) y las ecuaciones correspondientes a la proyección estereográfica polar [(115), (??), (114)]. Haciendo la aproximación $r = z_p + R_0 \approx R_0$ obtenemos de (111)-(112):

$$h = \frac{1 + \sin \phi}{2} \quad (119)$$

con lo cual las ecuaciones de estado, continuidad, y las tres de movimiento son:

$$p_p = \mathcal{R}\rho_p T_p \quad (120)$$

$$\frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (h u_p) + \frac{\partial}{\partial y} (h v_p) \right] + \frac{\partial w_p}{\partial z} = 0 \quad (121)$$

$$\frac{d u_p}{dt} + \frac{w_p u_p}{R_0} - \left(\frac{x v_p - y u_p}{2R_0^2} + f \right) v_p + \frac{\Omega w_p (1 + \sin \phi) y}{R_0} = -\frac{1}{h \rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x} \quad (122)$$

$$\frac{dv_p}{dt} + \frac{w_p v_p}{R_0} + \left(\frac{xv_p - yu_p}{2R_0^2} + f \right) u_p + \frac{\Omega w_p (1 + \sin \phi) x}{R_0} = -\frac{1}{h\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial y} \quad (123)$$

$$\frac{dw_p}{dt} - \frac{u_p^2 + v_p^2}{R_0} + \Omega \frac{1 + \sin \phi}{R_0} (yu_p + xv_p) = -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z} - g \quad (124)$$

donde sabemos que

$$1 + \sin \phi = \frac{2}{1 + \gamma^2} \quad \text{con} \quad \gamma^2 = \frac{x_p^2 + y_p^2}{4R_0^2}$$

y

$$\frac{d}{dt} = \frac{u_p}{h} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v_p}{h} \frac{\partial}{\partial y} + w_p \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Es claro que las ecuaciones de proyección (120), (121), (122), (123) y (124) son más complicadas que las ecuaciones (116)-(118) por la presencia de coeficientes variables.

Para comparar ambos conjuntos de ecuaciones consideraremos el caso en el cual el campo de velocidades es conocido y usaremos las ecuaciones de momento para calcular las isobaras (superficies de presión constante).

5.1 El caso de la atmósfera hidrostática

En el caso más sencillo corresponde al de una atmósfera hidrostática para la cual el campo de velocidades es cero,

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$$

Con este campo de velocidad las ecuaciones de continuidad (121) y (117) se satisfacen trivialmente. Dado que estamos considerando una atmósfera isotérmica con temperatura T la distribución de presión $p(x, y, z)$ y densidad $\rho(x, y, z)$, están relacionadas por la ecuación de estado

$$p = \mathcal{R}\rho T$$

y reemplazando $\rho = p/\mathcal{R}T$ en la ecuación de momento (118) se obtiene

$$\frac{1}{p} \nabla p = -(g/\mathcal{R}T) \mathbf{k}$$

que se reduce a la ecuación escalar

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = -g/\mathcal{R}T$$

cuya solución queda unívocamente determinada dando el valor de la presión en $z = 0$, $p(z = 0) = p_0$, esto es,

$$p(z) = p_0 e^{-gz/\mathcal{R}T}$$

Si ahora resolvemos las ecuaciones de momento (122)-(124) con $\rho_p = p_p/\mathcal{R}T$,

$$\frac{1}{p_p} \frac{\partial p_p}{\partial z} = -g/\mathcal{R}T$$

obtenemos la solución

$$p_p(z) = p_0 e^{-gz/\mathcal{R}T}$$

y por tanto $p_p(z) = p(z)$ lo que muestra que no hay diferencia alguna en usar las ecs. exactas (116)-(118) y las de proyección (120)-(124).

5.2 El caso de un flujo estacionario bidimensional

En esta sección consideraremos un flujo estacionario e incompresible, por lo que la ecuación de continuidad en el sistema xyz con origen en un punto arbitrario (λ_0, ϕ_0) de la superficie terrestre se reduce a la expresión conocida

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (125)$$

sujeta a la condición de frontera

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} |_{z=z_n(x,y)} = 0 \quad (126)$$

donde $z_n(x, y)$ es la ec. de la superficie esférica terrestre en el sistema xyz y \mathbf{n} es el vector normal a dicha superficie,

$$\begin{aligned} z_n(x, y) &= -R_0 + \sqrt{R_0^2 - x^2 - y^2} \\ \mathbf{n} &= x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + \sqrt{R_0^2 - x^2 - y^2}\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (127)$$

Si tenemos un campo de velocidad \mathbf{V} que satisfaga (125)-(127) podemos usar las ecs. de momento (exactas o de proyección) para obtener el correspondiente gradiente de presión con el cual obtendremos las ecuaciones de isobaras correspondientes, como se verá en la siguiente sección.

5.2.1 Cálculo de isobaras para un campo dado de velocidades en el sistema xyz

Sea xyz el sistema de coordenadas cartesianas asociado al plano tangente a la esfera terrestre en el punto (λ_c, ϕ_c) . Consideremos la superficie isobárica sobre la cual la presión es p_0 . La ecuación cartesiana de dicha superficie está dada por

$$p(x, y, z) = p_0 \quad (128)$$

donde $p(x, y, z)$ es la distribución de presión obtenida de las ecuaciones exactas (116)-(118). Ahora consideremos el plano \mathcal{P}_ϵ que parte del eje z y forma un ángulo θ con el eje x .

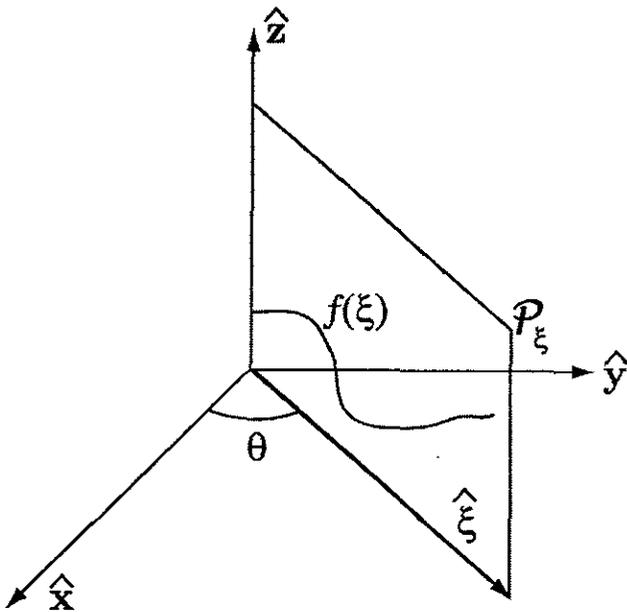


Figura 12: El plano \mathcal{P}_ξ

La intersección de \mathcal{P}_ξ con la isobara $p = p_0$, es una curva que podemos parametrizar con la coordenada radial ξ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \theta \\ y &= \xi \sin \theta \\ z &= f(\xi). \end{aligned} \tag{129}$$

Así, estas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de la curva isobárica, y por lo tanto, satisfacen la ecuación

$$p(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta, f(\xi)) = p_0 \tag{130}$$

Derivando esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{d\xi} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{df(\xi)}{d\xi} &= 0 \\ \cos \theta \frac{\partial p}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{df(\xi)}{d\xi} &= 0 \end{aligned}$$

y despejando $df(\xi)/d\xi$ obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1}$$

cuya solución está sujeta a la condición $f(\xi = 0) = z_0$, nos da las ecuaciones paramétricas (129) de la curva isobárica que pasa por el punto $(x = 0, y = 0, z_0)$, y que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{f}(\xi) = \xi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \xi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + f(\xi) \hat{\mathbf{z}}$$

Si se varía $\theta_\xi \in [0, 2\pi]$ obtendremos la superficie isobárica que intersecta al eje z en el punto $(x = 0, y = 0, z_0)$ sin conocer el valor p_0 de la presión en dicha superficie.

Si en lugar de p , consideramos la distribución de p_p obtenida de las ecuaciones de proyección (120)-(124), resultando la ecuación diferencial

$$\frac{df_p(\xi)}{d\xi} = - \left(\frac{\partial p_p}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial p_p}{\partial y} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial p_p}{\partial z} \right)^{-1} \quad (131)$$

con la condición $f'(\xi = 0) = z_0$, se obtiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{f}'(\xi) = \xi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \xi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + f'(\xi) \hat{\mathbf{z}}$$

de la curva isobárica que resulta de la intersección del plano \mathcal{P}_ξ con la isobara $p = p_0$.

5.2.2 Campo de velocidades de un flujo potencial bidimensional irrotacional

Otro caso interesante es el de un flujo potencial irrotacional en dos dimensiones. Sea xyz el sistema cartesiano en el sistema de coordenadas respecto al plano tangente a la esfera terrestre. Consideremos un plano $y = y_0$ en el que $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ son los vectores base.

El que un fluido sea potencial implica que, dado un campo de velocidades \mathbf{u} , exista una función escalar φ tal que,

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi \quad (132)$$

donde φ es el llamado potencial de velocidad. De la ec.(132) resulta que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (133)$$

Consideremos ahora un fluido irrotacional, es decir, que el vector de vorticidad, que se define por $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, donde \mathbf{u} es la velocidad, sea cero en todos los puntos,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

De (132) y la ec. de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ obtenemos

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (134)$$

La condición de irrotacionalidad está construída en base a las ecuaciones de movimiento, de manera que se puede conocer el campo de velocidades sólo con las ecs.(132) y (134).

En las coordenadas cartesianas ξz , la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ se puede expresar como

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Si introducimos una función ψ que definimos expresamente para que cumpla

$$u_\xi = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (135)$$

entonces, la ecuación de continuidad se satisface trivialmente para todas las funciones ψ . Ahora, la condición de irrotacionalidad del fluido implica que $\omega = \nabla \times \mathbf{u} = -\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial u_\xi}{\partial z}\right) (\hat{\xi} \times \hat{z})$ se anule

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial u_\xi}{\partial z} = 0$$

y sustituyendo la definición de la función ψ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \nabla^2 \psi = 0$$

Usando las ecs.(133) y (135), las funciones φ y ψ están relacionadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (136)$$

Por otro lado, si definimos una función compleja $F(s)$ como

$$F(s) = \varphi + i\psi \quad (137)$$

entonces, si $F(s)$ es analítica se debe cumplir las ecs.(136), que son justamente las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Si definimos como $W(s)$ a la derivada de $F(s)$, entonces:

$$W(s) = u_\xi - iw \quad (138)$$

y si consideramos coordenadas cilíndricas (R, θ_ξ) en el mismo plano ξz , definidas por

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta_\xi \\ z &= R \sin \theta_\xi \end{aligned}$$

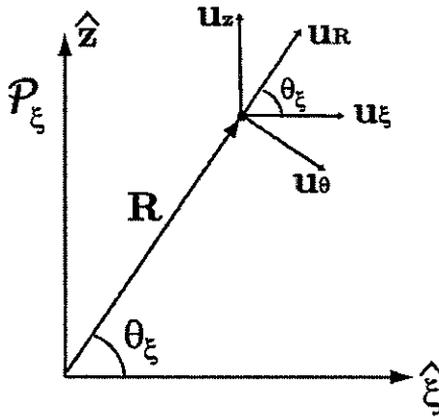


Figura 13: Coordenadas cartesianas y esféricas en el plano \mathcal{P}_ξ

entonces,

$$W(s) = (u_R - iu_\theta) e^{-i\theta_\xi} \quad (139)$$

usando las expresiones

$$\begin{aligned} u &= u_R \cos \theta_\xi - u_\theta \sin \theta_\xi \\ w &= u_R \sin \theta_\xi + u_\theta \cos \theta_\xi \end{aligned} \quad (140)$$

Así, de esta manera, todos los flujos que surjan a partir de estas ecuaciones son válidas, pues se satisface la ecuación de continuidad y la de movimiento (a través de la restricción de irrotacionalidad).

5.2.3 Flujo potencial bidimensional alrededor de un cilindro circular

Un flujo uniforme con dirección del eje x se puede denotar con la función

$$F(s) = u_0 s \quad (141)$$

donde u_0 es la magnitud de la velocidad del flujo. Por la cc.(138), $dF(s)/ds = u_0 = W(s)$ y v es cero. Se puede demostrar que el flujo a través de un par fuente-hoyo de flujo se puede denotar por la función compleja:

$$F(s) = \frac{\mu}{s} \quad (142)$$

para un cilindro circular con radio $R = R_0$. El flujo alrededor de un cilindro con circulación se puede representar como una superposición entre un flujo uniforme

ec.(141) y un par fuente-hoyo de flujo ec.(142), de manera que la función $F(s)$ queda como:

$$F(s) = u_0 \left(s + \frac{R_0^2}{s} \right) \quad (143)$$

ya que en este caso se puede demostrar que $\mu = u_0 R_0^2$. Por la condición de frontera, sabemos que el flujo a través de la superficie $R = R_0$ tiene que ser una línea de flujo y ψ es constante en ella, de manera que en toda esta superficie circular la velocidad normal sea cero. Entonces en esa superficie, usando $s = R e^{i\theta}$,

$$F(s)_{R=R_0} = u_0 (R_0 e^{i\theta} - R_0 e^{-i\theta}) = 2u_0 R_0 \cos \theta_\xi$$

Derivando (143) resulta

$$\begin{aligned} W(s) &= u_0 \left(1 - \frac{R_0^2}{s^2} \right) = u_0 \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} e^{-i2\theta} \right) = u_0 \left(e^{i\theta} - \frac{R_0^2}{R^2} e^{-i\theta} \right) e^{-i\theta} \\ &= u_0 \left\{ \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right) \cos \theta_\xi + i \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2} \right) \sin \theta_\xi \right\} e^{-i\theta} \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned} u_R &= u_0 \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right) \cos \theta_\xi \\ u_\theta &= -u_0 \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2} \right) \sin \theta_\xi \end{aligned} \quad (144)$$

Entonces en coordenadas cartesianas, usando (140)

$$\begin{aligned} u_\xi &= u_0 \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right) \cos^2 \theta_\xi + u_0 \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2} \right) \sin^2 \theta_\xi \\ &= u_0 \left[1 + \frac{R_0^2}{R^2} (\sin^2 \theta_\xi - \cos^2 \theta_\xi) \right] \end{aligned} \quad (145)$$

$$\begin{aligned} w_\xi &= u_0 \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right) \cos \theta_\xi \sin \theta_\xi - u_0 \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2} \right) \sin \theta_\xi \cos \theta_\xi \\ &= -2u_0 \frac{R_0^2}{R^2} \sin \theta_\xi \cos \theta_\xi \end{aligned} \quad (146)$$

Usando la fig.13

$$\cos \theta_\xi = \frac{\xi}{R} \quad , \quad \sin \theta_\xi = \frac{R_0 + z}{R}$$

el campo de velocidades se puede reescribir

$$\begin{aligned}
 u_\xi &= u_0 \left[1 + \frac{R_0^2}{R^2} (\sin^2 \theta_\xi - \cos^2 \theta_\xi) \right] \\
 &= u_0 \left[1 + \frac{R_0^2}{R^2} - \frac{2R_0^2 \xi^2}{R^4} \right] \\
 w_\xi &= -2u_0 \frac{R_0^2}{R^2} \sin \theta_\xi \cos \theta_\xi \\
 &= -2u_0 \frac{R_0^2}{R^4} \xi (R_0 + z)
 \end{aligned}$$

Si introducimos coordenadas adimensionales

$$\bar{\xi} = \xi/R_0 \quad , \quad \bar{z} = z/R_0 \quad , \quad \bar{R} = R/R_0$$

entonces

$$u_\xi = u_0 \left[1 + \bar{R}^{-2} - 2\bar{\xi}^2 \bar{R}^{-4} \right] \quad (147)$$

$$w_\xi = -2u_0 \bar{\xi} (1 + \bar{z}) \bar{R}^{-4}. \quad (148)$$

De manera que el campo de velocidad sobre un plano arbitrario \mathcal{P}_ξ alrededor de un cilindro circular es

$$\mathbf{u}(\xi, z) = u_\xi(\xi, z) \hat{\xi} + w_\xi(\xi, z) \hat{z}$$

Usando ahora la fig.12,

$$\hat{\xi} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$$

$\bar{\xi}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ obtenemos el campo de velocidad en el sistema xyz

$$\mathbf{u}(x, y, z) = u(x, y, z) \hat{x} + v(x, y, z) \hat{y} + w(x, y, z) \hat{z}$$

donde

$$u = u_\xi \cos \theta = u_0 \left[1 + \bar{R}^{-2} - 2\bar{\xi}^2 \bar{R}^{-4} \right] \cos \theta \quad (149)$$

$$v = u_\xi \sin \theta = u_0 \left[1 + \bar{R}^{-2} - 2\bar{\xi}^2 \bar{R}^{-4} \right] \sin \theta \quad (150)$$

$$w = w_\xi = -2u_0 \bar{\xi} (1 + \bar{z}) \bar{R}^{-4}. \quad (151)$$

Usando las ecs.(129) en su forma adimensional es fácil ver que $\mathbf{V}(x, y, z)$ satisface (125)-(127):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w$$

pero

$$\partial_x u = \partial_x \xi \partial_\xi u_\xi(\xi, z) \cos \theta = \cos^2 \theta \partial_\xi u_\xi(\xi, z)$$

$$\partial_y v = \partial_y \xi \partial_\xi v_\xi(\xi, z) \sin \theta = \sin^2 \theta \partial_\xi u_\xi(\xi, z)$$

$$\partial_z w = \partial_z w_\xi(\xi, z)$$

por tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = \partial_\xi u_\xi (\xi, z) + \partial_z w_\xi (\xi, z) = 0$$

dadas las ecs.(147) y (148). Para verificar la ecuación de frontera (126) usamos

$$\mathbf{n} = \widehat{\xi}\widehat{\xi} + \sqrt{1 - \widehat{\xi}^2}\widehat{z} \quad , \quad \mathbf{V} = u_\xi\widehat{\xi} + w_\xi\widehat{z} \quad ,$$

lo que nos da, usando $\overline{R}^2|_{z=z_n(x,y)} = \widehat{\xi}^2 + (1 + \overline{z})^2|_{z=z_n(x,y)} = 1$,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_\xi\overline{\xi} + w_\xi\sqrt{1 - \overline{\xi}^2} = u_0(1 + 1 - 2\overline{\xi}) - 2u_0(1 - \overline{\xi})\overline{\xi} = 0$$

5.2.4 Comparación de las ecuaciones de conservación

Conocido el campo de velocidades calcularemos las isobaras para las ecuaciones de movimiento exactas, así como para las ecuaciones de proyección.

Ecuaciones de momento "exactas". Las ecuaciones (116)-(118) son

$$\begin{aligned} p &= \mathcal{R}\rho T \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ -\frac{1}{\rho}\nabla p &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - g\widehat{z} + 2\overrightarrow{\Omega} \times \mathbf{u} \end{aligned}$$

donde $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\widehat{z}$. Entonces

$$\overrightarrow{\Omega} \times \mathbf{u} = \Omega\widehat{z} \times (u\widehat{x} + v\widehat{y} + w\widehat{z}) = \Omega(u\widehat{y} - v\widehat{x})$$

Si el flujo es estacionario, tenemos $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ lo que implica que las ecs. de momento son

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= (\mathbf{u} \cdot \nabla)u - 2\Omega v \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= (\mathbf{u} \cdot \nabla)v + 2\Omega u \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= (\mathbf{u} \cdot \nabla)w + g \end{aligned}$$

Usando

$$\partial_x \overline{\xi} = \frac{\cos \theta}{R_0} \quad , \quad \partial_y \overline{\xi} = \frac{\sin \theta}{R_0} \quad , \quad \partial_z \overline{z} = \frac{1}{R_0} \quad (152)$$

e introduciendo el operador $\mathbb{M} = u_\xi \partial_{\overline{\xi}} + w_\xi \partial_{\overline{z}}$ resulta

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \cdot \nabla) u(\xi, z) &= (\cos \theta u_\xi \partial_x + \sin \theta u_\xi \partial_y + w_\xi \partial_z) u(\xi, z) \\
&= \left(\frac{\cos \theta u_\xi (\cos \theta) \partial_{\bar{\xi}}}{R_0} + \frac{\sin \theta u_\xi (\sin \theta) \partial_{\bar{\xi}}}{R_0} + \frac{w_\xi \partial_{\bar{z}}}{R_0} \right) u(\xi, z) \\
&= \frac{1}{R_0} \left(\cos^2 \theta u_\xi \partial_{\bar{\xi}} + \sin^2 \theta u_\xi \partial_{\bar{\xi}} + w_\xi \partial_{\bar{z}} \right) u(\xi, z) \\
&= \frac{1}{R_0} \mathbb{M}u = \frac{\cos \theta}{R_0} \mathbb{M}u_\xi
\end{aligned}$$

análogamente

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \cdot \nabla) v &= \frac{\sin \theta}{R_0} \mathbb{M}u_\xi \\
(\mathbf{u} \cdot \nabla) w &= \frac{1}{R_0} \mathbb{M}w_\xi
\end{aligned}$$

Así las ecuaciones de momento quedan como sigue

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\cos \theta}{R_0} \mathbb{M}u_\xi - 2\Omega \sin \theta u_\xi \\
-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\sin \theta}{R_0} \mathbb{M}u_\xi + 2\Omega \cos \theta u_\xi \\
-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{R_0} \mathbb{M}w_\xi - g
\end{aligned}$$

Entonces obtenemos la siguiente ec. diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{df(\xi)}{d\xi} &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} \\
&= - \frac{\left[\frac{\cos \theta}{R_0} \mathbb{M}u_\xi - 2\Omega \sin \theta u_\xi \right] \cos \theta + \left[\frac{\sin \theta}{R_0} \mathbb{M}u_\xi + 2\Omega \cos \theta u_\xi \right] \sin \theta}{\frac{1}{R_0} \mathbb{M}w_\xi - g} \quad (153)
\end{aligned}$$

cuya solución está sujeta a la condición $f(\xi = 0) = z_0$ y nos da las ecuaciones paramétricas de la curva isobárica que pasa por el punto $(x = 0, y = 0, z_0)$, y que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{f}(\xi) = \xi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \xi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + f(\xi) \hat{\mathbf{z}}.$$

Calculando las derivadas parciales en la ec.(153):

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{\xi}} u_\xi &= \partial_{\bar{\xi}} \left[u_0 \left(1 + \bar{R}^{-2} - 2\bar{\xi}^2 \bar{R}^{-4} \right) \right] = 2u_0 \frac{\bar{\xi}}{\bar{R}^6} \left(4\bar{\xi}^2 - 3\bar{R}^2 \right) \\
\partial_{\bar{z}} u_\xi &= \partial_{\bar{z}} \left[u_0 \left(1 + \bar{R}^{-2} - 2\bar{\xi}^2 \bar{R}^{-4} \right) \right] = 2u_0 \frac{1+\bar{z}}{\bar{R}^6} \left(4\bar{\xi}^2 - \bar{R}^2 \right) \\
\partial_{\bar{\xi}} w_\xi &= \partial_{\bar{\xi}} \left[-2u_0 \bar{\xi} (1 + \bar{z}) \bar{R}^{-4} \right] = 2u_0 \frac{1+\bar{z}}{\bar{R}^6} \left(4\bar{\xi}^2 - \bar{R}^2 \right) \\
\partial_{\bar{z}} w_\xi &= \partial_{\bar{z}} \left[-2u_0 \bar{\xi} (1 + \bar{z}) \bar{R}^{-4} \right] = -2u_0 \frac{\bar{\xi}}{\bar{R}^6} \left(\bar{R}^2 - 4(1 + \bar{z})^2 \right) \quad (154)
\end{aligned}$$

donde se usaron las ecs.(147) y (148) así como

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{\xi}}\bar{R} &= \partial_{\bar{\xi}}\sqrt{\bar{\xi}^2 + (1 + \bar{z})^2} = \frac{\bar{\xi}}{\bar{R}}, \\ \partial_{\bar{z}}\bar{R} &= \frac{1 + \bar{z}}{\bar{R}}.\end{aligned}$$

Sustituyendo (154) en (153) resulta

$$\begin{aligned}\frac{df(\xi)}{d\xi} &= -\frac{u_{\xi}\partial_{\bar{\xi}}u_{\xi} + w_{\xi}\partial_{\bar{z}}u_{\xi}}{u_{\xi}\partial_{\bar{\xi}}w_{\xi} + w_{\xi}\partial_{\bar{z}}w_{\xi} - R_0g} \\ &= -\frac{u_{\xi}2u_0\frac{\bar{\xi}}{R^3}(4\bar{\xi}^2 - 3\bar{R}^2) + w_{\xi}2u_0\frac{1+\bar{z}}{R^3}(4\bar{\xi}^2 - \bar{R}^2)}{-u_{\xi}2u_0\frac{1+\bar{z}}{R^3}(\bar{R}^2 - 4\bar{\xi}^2) - w_{\xi}2u_0\frac{\bar{\xi}}{R^3}(\bar{R}^2 - 4(1+\bar{z})^2) - R_0g}\end{aligned}\quad (155)$$

Ecuaciones de momento en coordenadas de proyección. Las ecuaciones en coordenadas de proyección son las (120)-(124). Por un lado la ecuación de estado y la de continuidad

$$p_p = \mathcal{R}\rho_p T_p \quad , \quad \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (hu_p) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_p) \right] + \frac{\partial w_p}{\partial z} = 0$$

y por otro las ecuaciones de conservación de momento

$$\begin{aligned}-\frac{1}{h\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x} &= \frac{du_p}{dt} + \frac{w_p u_p}{R_0} - \left(\frac{xv_p - yu_p}{2R_0^2} + f \right) v_p + \frac{\Omega w_p (1 + \sin \phi) y}{R_0} = -\frac{1}{h\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x} \\ -\frac{1}{h\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial y} &= \frac{dv_p}{dt} + \frac{w_p v_p}{R_0} + \left(\frac{xv_p - yu_p}{2R_0^2} + f \right) u_p + \frac{\Omega w_p (1 + \sin \phi) x}{R_0} \\ -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z} &= \frac{dw_p}{dt} - \frac{u_p^2 + v_p^2}{R_0} + \Omega \frac{1 + \sin \phi}{R_0} (yu_p + xv_p) + g\end{aligned}$$

donde $\frac{d}{dt} = \mathbb{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_p}{h} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v_p}{h} \frac{\partial}{\partial y} + w_p \frac{\partial}{\partial z}$. Si el flujo es estacionario $\partial/\partial t = 0$ y

$$\mathbb{L} \equiv \frac{1}{h} \left(u_p \frac{\partial}{\partial x} + v_p \frac{\partial}{\partial y} \right) + w_p \frac{\partial}{\partial z}.\quad (156)$$

Usando la ec.(119), así como el campo de velocidades de las ecs (147) y (148) en coordenadas ξ, z y (149)-(151) en coordenadas xyz , las ecuaciones de conservación de momento son

$$\begin{aligned}-\frac{1}{h\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x} &= \mathbb{L}u_p + \frac{w_p u_p}{R_0} - \left(\frac{xv_p - yu_p}{2R_0^2} + f \right) v_p + \frac{\Omega w_p 2hy}{R_0} \\ -\frac{1}{h\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial y} &= \mathbb{L}v_p + \frac{w_p v_p}{R_0} + \left(\frac{xv_p - yu_p}{2R_0^2} + f \right) u_p + \frac{\Omega w_p 2hx}{R_0} \\ -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z} &= \mathbb{L}w_p - \frac{u_p^2 + v_p^2}{R_0} + \frac{2\Omega h}{R_0} (yu_p + xv_p) + g.\end{aligned}$$

donde usaremos

$$u_p = u \quad , \quad v_p = v \quad , \quad w_p = w \quad .$$

Usando la regla de la cadena y (152) resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{L}u(\xi, z) &= \left[\frac{1}{h} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \right] u(\xi, z) \\ &= \left[\frac{1}{h} (\cos \theta u_\xi \partial_x + \sin \theta u_\xi \partial_y) + w_\xi \partial_z \right] u(\xi, z) \\ &= \frac{1}{R_0} \left[\frac{1}{h} (\cos \theta u_\xi (\cos \theta) \partial_{\bar{\xi}} + \sin \theta u_\xi (\sin \theta) \partial_{\bar{\xi}}) + w_\xi \partial_z \right] u(\xi, z) \\ &= \frac{\cos \theta}{R_0} \left[\frac{1}{h} u_\xi \partial_{\bar{\xi}} + w_\xi \partial_z \right] u_\xi . \end{aligned}$$

además

$$\mathbb{L} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{1}{h} u_\xi \partial_{\bar{\xi}} + w_\xi \partial_z \right) .$$

Análogamente

$$\mathbb{L}v = \frac{\sin \theta}{R_0} \left(\frac{1}{h} u_\xi \partial_{\bar{\xi}} + w_\xi \partial_z \right) u_\xi$$

$$\mathbb{L}w = \frac{1}{R_0} \left(\frac{1}{h} u_\xi \partial_{\bar{\xi}} + w_\xi \partial_z \right) w_\xi .$$

Sustituyendo en las ecs. de momento

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x} &= \cos \theta \mathbb{L}u_\xi + \cos \theta \frac{w_\xi u_\xi}{R_0} - \left(\frac{\sin \theta \cos \theta \bar{\xi} u_\xi - \cos \theta \sin \theta \bar{\xi} u_\xi}{2R_0} + f \right) \sin \theta u_\xi + \frac{\Omega w_\xi 2hy}{R_0} \\ &= \cos \theta \mathbb{L}u_\xi + \cos \theta \frac{w_\xi u_\xi}{R_0} - f \sin \theta u_\xi + \frac{\Omega w_\xi 2hy}{R_0} \\ -\frac{1}{h\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial y} &= \sin \theta \mathbb{L}u_\xi + \sin \theta \frac{w_\xi u_\xi}{R_0} + \left(\frac{\sin \theta \cos \theta \bar{\xi} u_\xi - \cos \theta \sin \theta \bar{\xi} y u_\xi}{2R_0} + f \right) \cos \theta u_\xi + \frac{\Omega w_\xi 2hx}{R_0} \\ &= \sin \theta \mathbb{L}u_\xi + \sin \theta \frac{w_\xi u_\xi}{R_0} + f \cos \theta u_\xi + \frac{\Omega w_\xi 2hx}{R_0} \\ -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z} &= \mathbb{L}w_\xi - \frac{u_\xi^2}{R_0} + 2\Omega h (\sin \theta \bar{\xi} \cos \theta u_\xi + \cos \theta \bar{\xi} \sin \theta u_\xi) + g \\ &= \mathbb{L}w_\xi - \frac{u_\xi^2}{R_0} + 4\Omega h \sin \theta \cos \theta \bar{\xi} u_\xi + g . \end{aligned}$$

La expresión entonces, de la ec.(131) para estas ecuaciones es

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} .$$

Entonces usando

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \theta\right) \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^{-1} =$$

$$= h \left[\cos \theta \mathbb{L}u_{\xi} + \cos \theta \frac{w_{\xi}u_{\xi}}{R_0} - f \sin \theta u_{\xi} + \frac{\Omega w_{\xi} 2hy}{R_0} \right] \cos \theta +$$

$$+ h \left[\sin \theta \mathbb{L}u_{\xi} + \sin \theta \frac{w_{\xi}u_{\xi}}{R_0} + f \cos \theta u_{\xi} + \frac{\Omega w_{\xi} 2hx}{R_0} \right] \sin \theta$$

y

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mathbb{L}w_{\xi} - \frac{u_{\xi}^2}{R_0} + 4\Omega h \sin \theta \cos \theta \bar{\xi} u_{\xi} + g$$

resulta

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = -h \frac{\mathbb{L}u_{\xi} + w_{\xi}u_{\xi}R_0^{-1} + 4\Omega h \bar{\xi} w_{\xi} \cos \theta \sin \theta}{\mathbb{L}w_{\xi} - u_{\xi}^2 R_0^{-1} + 4\Omega h \bar{\xi} u_{\xi} \sin \theta \cos \theta + g}. \quad (157)$$

Comparación de las isobaras Resolviendo las ecuaciones diferenciales para ξ tanto para el caso de las ecuaciones de movimiento exactas, como para las de proyección, ecs.(155) y (157), resultan los valores para $f(\xi)$ que se resumen en la siguiente tabla

ξ km	$z = f(\xi)$ exacta km	$z = f(\xi)$ de proyección km
0	0	0
100	-1.00298×10^{-5}	-1.50451×10^{-5}
200	-4.00714×10^{-5}	-6.0108×10^{-5}
300	$-8.9981E \times 10^{-5}$	-0.00013497
400	-0.000159521	-0.000239268
500	-0.000248362	-0.000372498
600	-0.000356087	-0.000534018
700	-0.000482193	-0.00072306
800	-0.000626099	-0.000938731
900	-0.000787151	-0.001180026
1000	-0.000964625	-0.001445837
1100	-0.001157739	-0.001734961
1200	-0.001365656	-0.002046116
1300	-0.001587493	-0.002377946
1400	-0.001822328	-0.00272904
1500	-0.002069209	-0.003097936
1600	-0.002327159	-0.003483142

Como podemos ver, la diferencia entre las isobaras de las ecuaciones exactas y de las de proyección es casi imperceptible, del orden de uno entre un millón. Es decir, no existe una ventaja clara en usar las ecuaciones de proyección en términos numéricos.

6 Conclusiones

Como hemos visto, la mayor parte de los modelos computacionales que modelan la atmósfera terrestre se ven enfrentados a problemas que tienen que ver, entre otras cosas, con el uso de proyecciones tanto en la definición de la topografía como en las mismas ecuaciones de conservación.

Los procedimientos que se han seguido para la obtención de las ecuaciones de movimiento y de continuidad en las diferentes coordenadas son diferentes que en la mayoría de los textos consultados. Se intentó mantener una misma notación y metodología a lo largo del trabajo, de forma que se pueda tener una idea integral del problema en cuestión. El uso de una notación vectorial y matricial a lo largo del trabajo dejan más claro los pasos que se siguieron a lo largo del trabajo.

Los primeros dos capítulos se centraron en analizar el uso de los distintos sistemas de coordenadas para la superficie terrestre. Encontramos la relación entre las coordenadas cartesianas respecto al plano tangente y las coordenadas asociadas a una proyección estereográfica polar.

Tal y como se demostró en los capítulos 3 y 4, al referir las ecuaciones de conservación a cada uno de estos dos sistemas de coordenadas, resultan ecuaciones distintas. Vimos cómo las ecuaciones de proyección (121), (122), (123) y (124) son más complicadas que las ecuaciones en coordenadas cartesianas (117), (118) por la presencia de coeficientes variables.

A pesar de la mayor complejidad en los coeficientes de las ecuaciones asociadas a las proyecciones, en el último capítulo se mostró como, tanto en el caso de una atmósfera hidrostática, como en el de un flujo potencial, la diferencia numérica es muy pequeña entre los dos conjuntos de ecuaciones.

En este trabajo se hicieron tres planteamientos referentes al uso de proyecciones en la definición de la superficie de la Tierra.

El primer planteamiento que se hizo se refiere a la definición de los datos de elevación del terreno. La información que proporcionan los satélites está definida en general con respecto a un elipsoide. Al usar los sistemas de coordenadas en base a proyecciones surge el problema de que las proyecciones solo usan información sobre la localización del terreno en el elipsoide ignorando la elevación verdadera con respecto al plano de proyección.

Para identificar el plano de proyección solo se necesitan dos datos. Hemos visto que se puede definir como el plano tangente al elipsoide en un punto sobre el cual la elevación del terreno es la misma con respecto al elipsoide y el plano de proyección.

Este trabajo propone una posible solución para este problema. El hecho de definir al plano de proyección como el plano tangente no implica de ninguna manera que el sistema de coordenadas cartesianas referido al plano tangente equivalga al sistema de coordenadas basadas en la proyección. La primera se refiere al espacio físico, mientras que la segunda a un espacio abstracto que no es el físico. Lo que se propone es una sencilla transformación de coordenadas para recalcular la verdadera elevación del terreno.

Un segundo planteamiento que se puede hacer es el del problema de la definición correcta de un modelo esférico a partir de la forma elipsoidal de la Tierra. La definición de esta esfera pasa por el uso de aproximaciones, tanto en el valor del radio de ésta, como de la definición de la topografía, que está dada en general con respecto a una elipse. Al usar proyecciones, se generan problemas respecto a la definición de los datos de elevación del terreno respecto a un modelo esférico. El uso de programas como MM5 en México implican errores hasta de 400 km. en la elevación del terreno.

Para solucionar este problema es necesaria una definición precisa de la esfera con respecto al sistema primario de referencia, de manera que se tienen que recalcular los datos de elevación con respecto a la esfera.

El tercer planteamiento que el trabajo ha desarrollado es el referido al uso de proyecciones en las mismas ecuaciones de conservación. Mediante la deducción de las ecuaciones de movimiento y continuidad en coordenadas generalizadas es posible obtener éstas referidas a cualquier sistema coordenado.

De esta manera, el uso de las coordenadas de proyección en sí mismo es totalmente legítimo, no menos que cualquier otro sistema de coordenadas. El problema surge cuando la mayoría de los modelos computacionales [MM5, RAMS, HOTMAC, ARPS, MEMO] identifican las coordenadas de proyección como si se tratase de coordenadas cartesianas en el espacio físico.

El cálculo del comportamiento atmosférico en coordenadas de proyección, estaría entonces implicando el uso de transformaciones inversas del llamado "espacio de proyección" al espacio físico. Ninguna de las documentaciones de los modelos de Mesoescala citados, así como autores como Haltiner reportan el uso de esta transformación inversa.

Las aproximaciones surgidas al identificar estas dos sistemas de coordenadas hacen que el rango de validez de estos modelos se limite a un área bastante pequeña de 200×200 km. [6]. Esto contrasta con el uso que hace el Servicio Meteorológico Nacional del programa MM5 para la República Mexicana en una región de 3300×3300 km.

Al mismo tiempo, el uso de proyecciones en las ecuaciones de movimiento hacen que estas sean más complicadas por tener coeficientes variables con respecto a las ecuaciones en coordenadas cartesianas.

Como hemos visto, a partir de la comparación de las ecuaciones de proyección y las llamadas "exactas" podemos concluir que la diferencia, en los dos casos que contemplamos, es prácticamente nula. Es decir, no hay diferencia en términos físicos en el uso de una u otra. Entonces la dificultad para manejar las ecuaciones de conservación en términos de las coordenadas de proyección, sumado a los problemas de aproximación que conlleva y que hemos analizado en este trabajo, plantea una fuerte duda acerca de las ventajas de trabajar con ella. Es probable que, a raíz de una inercia histórica de necesidad de usar mapas en papel, se siga trabajando con proyecciones, en vez de usar las coordenadas en el espacio físico.

Apéndice

A Ejemplo: ecuaciones de Haltiner

A diferencia de las ecuaciones de proyección estereográfica usadas anteriormente (110), consideremos las ecuaciones de proyección que utiliza G. J. Haltiner [3]:

$$\begin{aligned}x_p &= 2R_0 \frac{\cos \phi \cos \lambda}{1 + \sin \phi} \\y_p &= 2R_0 \frac{\cos \phi \sin \lambda}{1 + \sin \phi} \\z_p &= h\end{aligned}\tag{159}$$

que corresponde a la misma transformación usada anteriormente, pero con una rotación de $\pi/2$ de los ejes ortogonales x_p, y_p . Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_p}{\partial \lambda} &= -2R_0 \frac{\cos \phi \sin \lambda}{1 + \sin \phi}, & \frac{\partial y_p}{\partial \lambda} &= 2R_0 \frac{\cos \phi \cos \lambda}{1 + \sin \phi} \\ \frac{\partial x_p}{\partial \phi} &= -2R_0 \frac{\cos \lambda}{1 + \sin \phi}, & \frac{\partial y_p}{\partial \phi} &= -2R_0 \frac{\sin \lambda}{1 + \sin \phi}\end{aligned}$$

por lo que,

$$\Delta = \partial_\lambda x_p \partial_\phi y_p - \partial_\lambda y_p \partial_\phi x_p = 4R_0^2 \frac{\cos \phi}{(1 + \sin \phi)^2}$$

además,

$$\begin{aligned}h_{x_p} &= \frac{1}{\Delta} \sqrt{[(\partial_\phi y_p) h_\lambda]^2 + [(\partial_\lambda y_p) h_\phi]^2} = \frac{(1 + \sin \phi) r}{2R_0} \\ h_{y_p} &= \frac{1}{\Delta} \sqrt{[(\partial_\phi x_p) h_\lambda]^2 + [(\partial_\lambda x_p) h_\phi]^2} = \frac{(1 + \sin \phi) r}{2R_0}\end{aligned}$$

y $h_{x_p} = h_{y_p} \equiv h$. A partir de (97):

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda \\ -\cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Usamos estos valores de la matriz T_0 en la ec.(108):

$$\begin{aligned}\frac{dw_p}{dt} - \frac{u_p^2 + v_p^2}{z_p + R_0} - 2\Omega \cos \phi (\cos \lambda u_p + \sin \lambda v_p) &= -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} - g_p \\ \frac{dw_p}{dt} - \frac{u_p^2 + v_p^2}{z_p + R_0} - \frac{\Omega (1 + \sin \phi)}{R_0} (y_p u_p - x_p v_p) &= -\frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} - g_p\end{aligned}$$

usando $T_1 = T_3 = -\sin \lambda U + \cos \lambda V$. Esta ecuación es la misma que la ec.(115) para la proyección (110).

En el caso del momento horizontal, sustituyendo los componentes de la matriz T_0 en la ec. (??), como T_0 no es función de ϕ , resulta que $\partial_\phi T_0^i = 0$.

Además, como sabemos que $\dot{\lambda} = U/r \cos \phi$,

$$T_0 \dot{\lambda} (\partial_\lambda T_0^i) \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \frac{U}{r \cos \phi} \begin{pmatrix} v_p \\ -u_p \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de momento horizontal quedan como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + \frac{w_p}{z_p + R_0} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + \left(\frac{(-\sin \lambda u_p + \cos \lambda v_p)(\sin \phi - 1)}{(z_p + R_0) \cos \phi} + f \right) \begin{pmatrix} -v_p \\ u_p \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\Omega w_p \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho_p} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{x_p}} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} \\ \frac{1}{h_{y_p}} \frac{\partial p_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para simplificar, usamos

$$\begin{aligned} \frac{(-\sin \lambda u_p + \cos \lambda v_p)(\sin \phi - 1)}{(z_p + R_0) \cos \phi} &= \frac{y_p u_p - x_p v_p}{2R_0(z_p + R_0)} \\ \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\Omega w_p \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} &= \Omega w_p \frac{1 + \sin \phi}{R_0} \begin{pmatrix} -y_p \\ x_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + \frac{w_p}{z_p + R_0} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + \left(\frac{y_p u_p - x_p v_p}{2R_0(z_p + R_0)} + f \right) \begin{pmatrix} -v_p \\ u_p \end{pmatrix} + \\ + \frac{\Omega w_p (1 + \sin \phi)}{R_0} \begin{pmatrix} -y_p \\ x_p \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho_p} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{x_p}} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} \\ \frac{1}{h_{y_p}} \frac{\partial p_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son las (1-28)-(1-30) de Haltiner [3], en las que se basan algunos modelos de mesoescala.

Referencias

- [1] CAPS, *Guía técnica del Advanced Regional Prediction (ARPS) versión 4.0* (Universidad de Oklahoma) 1996.
- [2] Currie I.G, *Fundamental Mechanics of Fluids* (McGraw-Hill, New York) 1974.
- [3] Haltiner G. J., *Numerical Weather Prediction* (Wiley and Sons, New York) 1971.
- [4] Hotmac, *Documentación*.
- [5] NCAR, *Guía de usuario del MM5 Modeling System versión 3.0* (NCAR, EU) 2000.
- [6] Nuñez, M. *Map projections and topography in atmospheric mesoscale modeling*, por publicar.
- [7] Pielke, R., *Mesoscale Meteorological Modeling* (Academic Press, Orlando) 1984.
- [8] Richardus P. and Adler R. K., *Map Projections for Geodesists, Cartographers and Geographers* (North-Holland, Amsterdam) 1972.
- [9] *Guía técnica del Regional Atmospheric Modeling System (RAMS)* (EU) 1994.