93

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA FUNCION GOMPERTZ-MAKEHAM EN LA DESCRIPCION DE LA SOBREVIVENCIA DE UNA POBLACION SELECTA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ENEYDA SANCHEZ ALVARO

DIRECTOR DE TESIS: M. en D. ALEJANDRO MINA VALDES

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

La función Gompertz-Makeham en la descripción de la sobrevivencia de una población selecta

realizado por ENEYDA SÁNCHEZ ALVARO

con número de cuenta **08934704-3** , quien cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	**M. en D. Alejandro Mina Valdés**	
Propietario	**M. en C. Virginia Abrín Batule**	Virginia Abrín Batule
Propietario	**Act. Ma. Aurora Valdez Michell**	
Suplente	**Dr. Arturo Lorenzo Valdés**	
Suplente	**Act. Marina Castillo Garduño**	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz

La función Gompertz-Makeham en la descripción de la sobrevivencia de una población selecta.

Agradezco a mis padres su infinito amor y su incansable dedicación.

A mis hermanos por ser unos grandes guías.

A mi esposo por su amor y comprensión.

Índice.

Introducción.

Este trabajo surge de la necesidad por contar con un método que nos permita reproducir la experiencia de la mortalidad para cualquier tabla de mortalidad, la Secretaría de Hacienda y Crédito Público a través de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) da a conocer al sector asegurador las tablas de mortalidad con las que debe constituir sus reservas y cálculo de sus primas, sin embargo, para tipo de cálculos que involucran la probabilidad de muerte de dos o más personas como la que se muestra en esta aplicación, la CNSF no obliga al sector asegurador a hacerlo con una tabla de mortalidad determinada; por lo que algunas de las compañías aseguradoras carecen de un método para modelar una tabla de mortalidad y además verificar que la tabla de mortalidad que se utilice esté acorde a su experiencia.

Se han realizado diferentes estudios por encontrar una función matemática que reproduzca la experiencia de la mortalidad para cualquier grupo de vidas con un grado suficiente de exactitud, es por ello que en el primer capítulo se muestran los componentes básicos de una tabla de mortalidad así como la forma de calcularse.

En el segundo capítulo se señalan los antecedentes de la tabla de mortalidad y los supuestos que utiliza la función de Gompertz-Makeham que básicamente son dos: la casualidad, sin una inclinación previa a la muerte y una creciente incapacidad para resistir la muerte[1] dicha función es usada para modelar la tabla de mortalidad porque su expresión matemática facilita los cálculos. La importancia de ésta función va más allá de describir la función de sobrevivencia de un grupo de personas, a través de esta función

[1] Mina Valdés, Funciones de sobrevivencia empleadas en el Análisis Demográfico, 2000.

se pueden describir fenómenos de fecundidad, nupcialidad así como también proyecciones poblacionales.

La metodología de los Grupos no Superpuestos[2] se presenta en el capítulo tres, la que nos permitirá determinar los parámetros involucrados en dicha función.

Recientemente se conformó un Comité de Mortalidad a través de las asociaciones: Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS) y Mexicana de Actuarios (AMA) como respuesta a la actualización de las bases demográficas del sector asegurador. El 85% del sector asegurador proporcionó información para la obtención de ésta nueva tabla conocida como México 2000[3] por lo que se puede aseverar que los datos son confiables, es por ello que se utilizará dicha tabla para la construcción de edades equivalentes para dos personas.

[2] Mina Valdés, Op. Cit.
[3] AMIS, AMA, Tabla de Mortalidad México 2000.

1. Concepto y funciones de la tabla de mortalidad.

1.1. Tabla de Mortalidad

La base de primas y reservas en el seguro de vida está dado por las tablas de mortalidad, en ellas se conforma la experiencia pasada de una población ante el evento muerte. "Una tabla de mortalidad es por tanto simplemente un registro de la experiencia pasada, y el uso de una tabla de mortalidad en particular como base para los cálculos del seguro de vida o de anualidades, implica la suposición de que la experiencia del futuro se reproducirá de acuerdo con lo estipulado en la tabla utilizada"[4] .

El estudio de la mortalidad de una población es esencial tanto para el conocimiento de la evolución de sus principales indicadores (esperanza de vida, mortalidad infantil, etc.) como para el establecimiento de proyecciones demográficas.

La tabla de mortalidad puede ser un modelo de población, conocido como *población estacionaria*, en el que los nacimientos son iguales al número de muertes por lo que la tasa de crecimiento es igual a cero. Este modelo permite proyectar la población por edades.

La idea original de las tablas de vida consiste en seguir una generación a través del tiempo, determinando en cada edad el número de sobrevivientes, hasta que la generación se extingue, este tipo de tablas es conocidos como *tabla por generaciones*, para estos casos la población es sometida a las condiciones de mortalidad de cada uno de los años por lo que pasan. Debido a que se requiere mucho tiempo para seguir a la generación, hasta que

[4] Maclean Joseph, "El Seguro de Vida", Ed. Continental, 1982, p.79

fallece el último sobreviviente y a muy diferentes condiciones de mortalidad estas tablas no son utilizadas con frecuencia.
Las tablas de mayor uso son las *del momento o contemporáneos* las cuales se sustentan en la mortalidad observada durante un mismo período de tiempo de todos los miembros de la población. "En este caso, se somete una generación o cohorte hipotética de personas, en todas las edades, a las condiciones de mortalidad de ese mismo periodo, que puede ser un año o un promedio de dos o tres años"[5] Regularmente cuando se habla de una tabla de mortalidad nos referimos a este tipo.

Existen tablas *completas* y *abreviadas,* las primeras se refieren a las funciones que son elaboradas para cada una de las edades que intervienen en la tabla y las segundas se refieren a las funciones que son calculadas por grupos de edades.

El principio lógico de las tablas de mortalidad esta dado por la descripción de defunciones de un grupo humano de recién nacidos hasta la extinción de éste, la duración de la vida se comporta de manera semejante entre el grupo, la diferencia está dada por la velocidad con que se extinguen. La tabla de mortalidad mide con precisión la manera en la que se habrá de extinguir una generación. La velocidad con la que se determina la extinción de una generación es la *fuerza* con la que mueren entre cada edad; a mayor número de muertes más rápida será la desaparición y menor el número de personas que llegarán con vida a las últimas edades.

Lo que determina esta velocidad con la que se extingue una población, es la incidencia en la mortalidad, una medida satisfactoria es calcular la probabilidad de muerte (**q_x**), que expresa el riesgo que una persona tiene de morir entre el aniversario x y x+1.

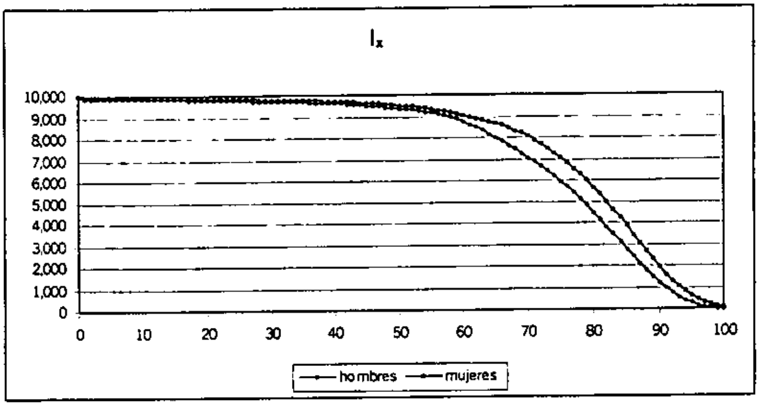
1.2. Funciones de la tabla de mortalidad

En este sección consideraremos las funciones que involucra una tabla de mortalidad, su significado y la forma como se calculan.

Función l_x

La población de sobrevivientes o vivos se denomina l_x, y son aquellos que de una generación inicial l_0 llegan con vida a la edad exacta x, el valor inicial de la población es conocido como base o raíz de la tabla, es una función decreciente y positiva cuyo comportamiento gráfico es el siguiente.

Gráfico 1



Fuente: AMIS, AMA, Tabla de Mortalidad México 2000.

La edad en la cual el número de sobrevivientes se hace cero se representa como ω (omega).

[5] Ortega Antonio, Tablas de Mortalidad, CELADE, Costa Rica, 1982, p.3

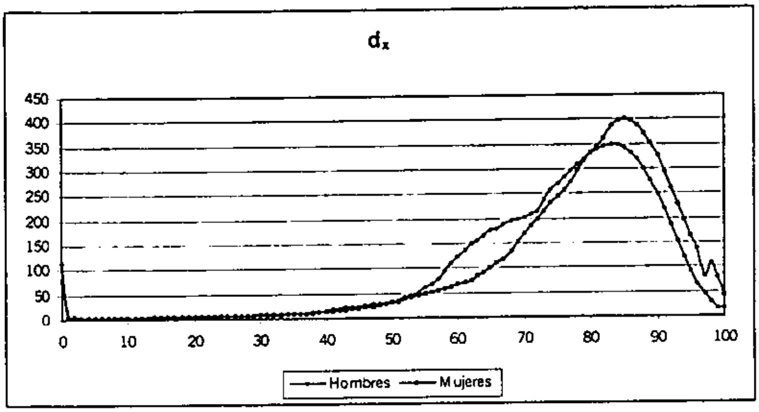
Función d_x

Esta función nos indica el número de muertes ocurridas entre las edades x y x+1, en el grupo de observación l_x. En términos de l_x, d_x se expresa de la siguiente manera:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Su comportamiento gráfico es el siguiente.

Gráfico 2



Fuente: AMIS, AMA, Tabla de Mortalidad México 2000, 2000.

Si generalizamos para un intervalo de n años, las defunciones entre las edades x y x+n se representan como sigue:

$$_nd_x = l_x - l_{x+n}$$

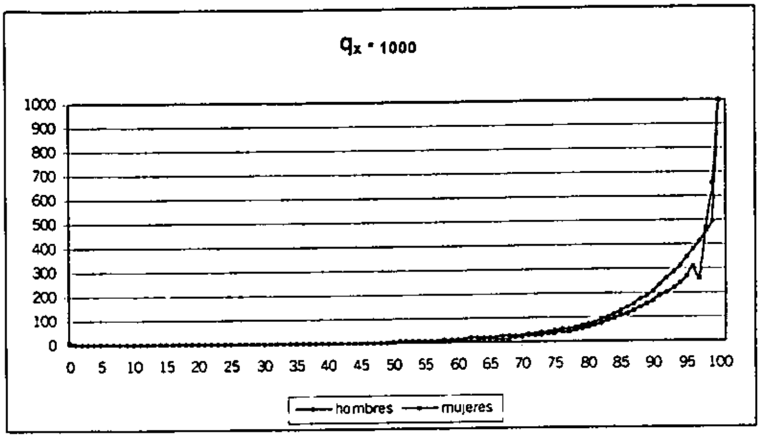
Probabilidad de muerte q_x

Es la probabilidad que una persona de edad x fallezca entre las edades x y x+1, en términos de l_x:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

El comportamiento de q_x es el siguiente:

Gráfico 3



Fuente: AMIS, AMA, Tabla de Mortalidad México 2000, 2000.

Si generalizamos para un intervalo de n años, la probabilidad que una persona fallezca entre las edades x y x+n se representa como sigue:

$$_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{_nd_x}{l_x}$$

Si se conocen los valores que toma $_nq_x$ para cada edad y consideramos una raíz arbitraria l_0, podemos obtener los valores de l_x a través de la siguiente relación:

$$l_x * {}_nq_x = {}_nd_x$$

$$l_x - {}_nd_x = l_{x+n}$$

Probabilidad de sobrevivencia p_x

La probabilidad de sobrevivencia p_x expresa las posibilidades que tiene un individuo de edad x por sobrevivir al aniversario x+1, en términos de l_x se puede expresar como sigue:

$$l_{x+1} = l_x * p_x$$

También podemos deducir que:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Cada integrante del grupo tiene sólo dos posibilidades sobrevivir a la edad x+1 o morir antes de alcanzar la edad x+1, por lo que necesariamente sucede:

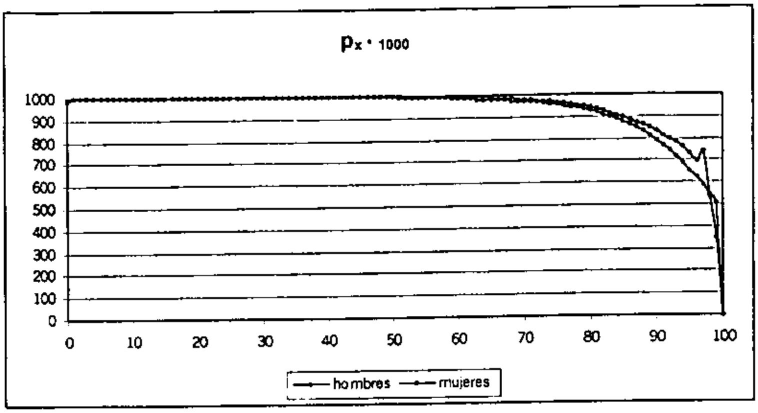
$$p_x + q_x = 1$$

Para un intervalo de n años podemos expresar la probabilidad de sobrevivencia así:

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Su comportamiento gráfico sería el siguiente:

Gráfico 4



Fuente: AMIS, AMA, Tabla de Mortalidad México 2000, 2000.

Función L_x

L_x representa los años vividos ó el número de años-persona vividos por la generación l_x entre las edades x y x+1, suponiendo uniformidad en las muertes, se obtienen a partir de lo siguiente:

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

Si suponemos que el número de nacimientos y muertes se comportan de manera uniforme podemos interpretar a L_x como el número de personas que habiendo cumplido la edad x no han alcanzado la edad x+1.

Función T_x

T_x denota el número de personas vivas de edad mayor ó igual a x.

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \ldots + L_{w-1}$$

Indica el número total de años vividos por los sobrevivientes l_x desde el aniversario x hasta la extinción del grupo.

Función e_x

La esperanza de vida o vida media se denota por:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Representa el número medio de años que le quedan por vivir a los sobrevivientes a la edad x.

2. Antecedentes de las tablas de mortalidad.

2.1. Breves antecedentes

La punta de lanza de la ciencia actuarial moderna fueron sin duda la estadística y probabilidad, los primeros estudios acerca de este tema se realizaron alrededor de 1654, Blaise Pascal realizó un estudio que le permitiría conocer las probabilidades de los números que había en un juego de azar. Pese a que su intención no era descubrir la teoría de probabilidades dio la pauta para que se desarrollara. Es hasta 1658 cuando se escribe el primer tratado sobre probabilidades, hecho por un francés llamado Christian Huygens, en este período es cuando se establecen los fundamentos de la ciencia actuarial.

John Graunt es quien sienta las bases de una estadística científica, realizando un trabajo a partir de las tablas de mortalidad de la ciudad de Londres, en 1662 publica su libro Observaciones naturales y políticas realizadas sobre las Partidas de defunción, "Fue el primer intento para interpretar los fenómenos biológicos en masa y la conducta social a partir de datos numéricos, en este caso, cifras poco elaboradas de nacimientos y defunciones en Londres entre 1604 y 1661"[6].

Otro evento importante es la elaboración de las tablas de mortalidad que presenta Halley en Polonia en el año de 1693, Estimaciones de los grados de Mortalidad en la Humanidad, el período de observación fue durante los años 1687 a 1691 donde se registraron los nacimientos y defunciones de un gran número de personas. Supuso que la población era estacionaria y que los fallecimientos en determinada edad igualarían al número de vivientes a esa edad. La contribución de éste trabajo radica en que "estableció la primera

[6] Pfeffer Irving, "Perspectivas del Seguro", Ed. Mapfre, 1974, p.434

enumeración completa de una población, permitiéndole fijar la proporción de esa población que fallecía a una cierta edad; hizo también una completa tabulación por edades de fallecimiento de esa población muestral"[7].

Alrededor de 1713 Bernoulli habla de la Ley de los Grandes Números la cual es utilizada primero en los juegos de azar, esta ley nos habla de los grandes fenómenos en masa, a medida que el número de experimentos crezca, la proporción de los resultados favorables se aproxima a la probabilidad subyacente.

En 1718, Moivre publica la Doctrina de las Probabilidades, su contribución más importante está dada por la hipótesis de decremento uniforme. Donde supone que a través de una constante la población decrece de manera uniforme.

Debido al cálculo de primas y reservas que se hicieron para los primero seguros temporales, James Dadson publica en tres volúmenes su teoría donde "simuló la marcha progresiva de una compañía de seguros bajo distintos supuestos, y al establecer un balance al final de un período de veinte años, calculaba la reserva de reaseguro"[8].

En Inglaterra, la primer tabla de mortalidad que se aplicó para fines del seguro, fue la de Northamton hecha alrededor de 1780, años más tarde esta tabla sufrió ajustes de acuerdo con la Equitable Society y los resultados se publicaron en 1825. La primer tabla de mortalidad basada en la experiencia propia de los asegurados, fue la Morgan's Equitable Table, publicada en 1834 con un periodo de observación de 1762 a 1829.

[7] Op. Cit., p.439
[8] Op. Cit. p. 442

En 1843 se publicó la tabla de diecisiete compañías de seguros inglesas, cuya mortalidad fue deducida de la propia experiencia de las compañías.

En 1869 y como consecuencia de la observación de veinte compañías inglesas, el Instituto de Actuarios de Londres publicó las siguientes tablas:

- Hm (Healthy lives Male: Hombres sanos)
- Hf (Healthy lives Female: Mujeres sanas)
- Hm*f (Healthy lives Male and Female: Hombres y Mujeres sanos)

En 1815 Joshua Milne elabora una tabla a partir del censo de las Parroquias que existían en Inglaterra, en ella se considera el aumento de la población, de tal manera que tuvo una utilización extensa.

Hasta mitades del siglo XIX Estados Unidos no contaba con estudios de mortalidad por lo que los americanos seguían las orientaciones de las sociedades inglesas, sin embargo las condiciones de mortalidad e inversión que se vivían en América podrían ser mejores que en Inglaterra. Hacia 1868 se construyó la Tabla de Mortalidad con experiencia americana hecha por Sheppard Homans, él realizó ciertas consideraciones para la construcción de esta tabla:

- Existía una gran diferencia entre las tasas de mortalidad y los titulares de las póliza.
- Los titulares de las pólizas deberían elegir el tipo de seguro que mejor se adaptara a sus intereses.
- Relación de la mortalidad con las zonas geográficas
- Se evitaron las experiencias de los primeros cinco años eliminándose el efecto de una selección medica reciente
- La tabla termina a los 96 años

La Sociedad Actuarial de América y la Asociación de Médicos del Seguro de Vida en el año de 1909 emprendieron un estudio para analizar el efecto de ciertas condiciones, como la ocupación y el exceso de peso sobre la duración de una vida; esto resulto útil para conocer distintas clases de procedimientos para conservar la vida.

En 1915 las compañías mas importantes de Estados Unidos aportaron su experiencia de las estadísticas de asegurados vivos desde 1900 hasta 1915 para construir la Tabla Americana de Mortalidad Masculina, desapareciendo la selección medica, aproximadamente cinco años.

En 1937 la Asociación Nacional de Comisionados de Seguros designó un Comité para estudiar la necesidad de una nueva tabla de mortalidad, éste Comité integrado por personas de Servicios de Control, Asociación Actuarial de América y del Instituto de Actuarios Americano, dieron a conocer en 1941 la Tabla CSO que significa Comissioner 1941 Standard Ordinary Mortality Table, la cual fue sustituida por la CSO1958 basada en las tasas de mortalidad de las compañías aseguradoras durante los años 1950 a 1954.

Algunas de las más importantes tablas utilizadas por las compañías americanas durante el siglo XX fueron, American Experience Table que fue sustituida por las CSO 1941, la National Fraternal Congress Table, elaborada a partir de personas aseguradas en organizaciones mutuales, la Standard Industrial Mortality Table, basada en la experiencia de compañías que practican el seguro industrial, en 1937 Standard Annuitants Mortality Table, para el cálculo de rentas y la Commissioner`s Standard Ordinary Table 1941 y 1958. La United States Life Tables refleja la mortalidad en la población general, distinta a la de los asegurados de vida. Las presunciones de mortalidad son decisivas para la tarificación y para el cálculo de las reservas. La mayoría de los aseguradores siguen unas prácticas conservadoras al elegir las tablas con las que van a efectuar sus cálculos.

2.2. La función de Gompertz-Makeham

Los primeros estudios hechos acerca de las leyes de mortalidad trataron de hallar la forma de describir el comportamiento de un grupo inicial ante el evento muerte, actualmente los alcances que reviste esta función van más allá de describir una tabla de mortalidad.

Una de las leyes más importantes acerca de la mortalidad es la propuesta por Gompertz-Makeham y pese a que sus orígenes datan de 1825, cuando por primera vez Gompertz da a conocer su teoría y en 1860 Makeham termina por completar la idea de Gompertz, se mantiene vigente.

Encontrar una metodología que nos permita calcular las constantes involucradas en dicha función sería de gran ayuda por citar algunos ejemplos nos permitiría describir como se comporta la mortalidad de manera global o seccionada de una determinada población, establecer relaciones directas con los costos del seguro de vida y sobre todo contar con las herramientas necesarias para describir fenómenos como la mortalidad, fecundidad, nupcialidad y proyecciones de población.

2.3. Presentación de la función.

Benjamín Gompertz en 1825 apoyaba su hipótesis en dos causas generales de la muerte: la casualidad y la creciente incapacidad del hombre para resistir la muerte.
Las causas biológicas son consideradas por Gompertz, dejando de considerar las causas fortuitas. Así la hipótesis de Gompertz queda planteada de la siguiente manera:

"La resistencia que tiene el hombre para evitar la muerte disminuye a una tasa proporcional a ella misma, en el tiempo".

Denotando por μ_x a la tasa instantánea de mortalidad, donde

$$\mu_x = \lim_{h \to \infty} \frac{l(x) - l(x+h)}{hl(x)} = -\frac{\partial}{\partial x} \ln l(x)$$

Gompertz toma su recíproco ($1/\mu_x$) como la medida que cuantifica la resistencia del hombre a la muerte. Teniéndose que el planteamiento matemático de su hipótesis:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1/\mu_x) = -h(1/\mu_x) \qquad (1)$$

Donde h es la tasa a la que disminuye la resistencia del hombre a la muerte.

Resolviendo (1) para μ_x, Gompertz obtiene:

$$\mu = Bc^x \qquad . (2)$$

y resolviendo (2) para l(x), se obtiene:

$$l(x) = kg^c \qquad (3)$$

Lo que comúnmente conocemos como la Ley de Gompertz .

William M. Makeham en 1860 incorpora las causas de muerte no consideradas por Gompertz, modificando (2) al incrementar su valor con la suma de la constante A, la que hipotéticamente involucra dichas causas fortuitas.

Así, para Makeham:

$$\mu = A + Bc^x \qquad (4)$$

y resolviendo (4) para l(x), obtiene:

$$l(x) = ks^x g^{c^x} \qquad (5)$$

Lo que comúnmente es conocido como la Ley de Gompertz-Makeham.

Para desarrollar la ecuación (1) se considera lo siguiente:

a) Se dividen ambos miembros de la igualdad entre el recíproco de la Tasa Instantánea de Mortalidad, es decir, entre $1/\mu_x$ y se integra con respecto a x para obtener el siguiente resultado:

$$\int \frac{\partial(1/\mu x)}{1/\mu x}\partial x = -h\int \partial x \qquad (2)$$

$$\ln\left(\frac{1}{\mu x}\right) + \ln B = -hx \qquad (3)$$

b) Con las leyes de los logaritmos se obtiene:

$$\ln\frac{B}{\mu x} = -hx \qquad (4)$$

c) Aplicando antilogaritmo en ambos lados de la igualdad:

$$\frac{B}{\mu x} = e^{-hx} \qquad (5)$$

d) Se multiplica por los inversos de e^{-hx} y $1/\mu x$, es decir, por e^{hx} y μx para obtener la siguiente expresión para μx:

$$\mu x = Be^{hx} \qquad (6)$$

e) Si denotamos a e^{h} como C, la expresión para μx es la siguiente:

$$\mu x = BC^{x} \qquad (7)$$

Hasta aquí se ha encontrado una expresión para la Tasa Instantánea de Mortalidad a partir del supuesto de Gompertz. Si ahora se parte de la definición de Tasa Instantánea de Mortalidad considerando el cambio que se observa en los sobrevivientes de una población (lx), se tiene el siguiente límite donde h tiende a cero:

$$\mu x = \lim_{h \to 0} \frac{l(x) - l(x+h)}{hl(x)} \qquad (8)$$

$$\mu x = -\frac{1}{l(x)} \lim_{h \to 0} \frac{l(x+h) - l(x)}{h} \qquad (9)$$

Por la definición de derivada se tiene que:

$$\mu x = -\frac{1}{l(x)} \frac{\partial}{\partial x} l(x) \qquad (10)$$

$$\mu x = -\frac{\partial}{\partial x} \ln(x) \qquad (11)$$

Se ha logrado expresar la Tasa Instantánea de Mortalidad (μx) como la derivada con respecto a x del logaritmo de la función l(x); ahora se buscará encontrar una expresión para l(x). Si se integra y evalúa la expresión (11) con respecto a *y* en el intervalo (0,x) se obtiene:

$$\int_0^x \mu y \partial y = -\int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \ln l(y) \partial y \qquad (12)$$

$$= -\ln(l(y) \Big|_0^x \qquad (13)$$

$$= -\left[\ln l(x) - \ln(l(0)\right] \qquad (14)$$

Por las leyes de los logaritmos tenemos que:

$$\int_0^x \mu y \partial y = \ln \frac{B}{\mu x} \qquad (15)$$

Multiplicando por–1 la expresión (15)

$$\ln\frac{l(x)}{l(0)}=\int_0^x \mu y \partial y \qquad (16)$$

Para eliminar el logaritmo del primer miembro de nuestra igualdad se aplica antilogaritmo: .

$$\frac{l(x)}{l(0)}=e^{-\int_0^x \mu y \partial y} \qquad (17)$$

Finalmente se despeja l(x) obteniendo el siguiente resultado:

$$l(x)=l(0)e^{-\int_0^x \mu y \partial y} \qquad (18)$$

Hasta este momento se conoce la expresión que define la Ley de Gompertz, sin embargo, es necesario considerar los supuestos que Makeham estableció en su Ley.

Makeham propone integrar, en el modelo que define la Ley de Gompertz, la primera de las dos causas de muerte supuestas por Gompertz y la cual no fue considerada en el modelo. Es decir, considerar dentro de un modelo matemático tanto las causas independientes de la edad como las dependientes.

Makeham establece la siguiente ley:

$$\mu x = A + BC^x \qquad (19)$$

Donde:

- μx = Tasa Instantánea de Mortalidad bajo los supuestos de Makeham.
- A = Parámetro asociado al efecto de las causas de muerte independientes de la edad, las cuales no fueron consideradas en la determinación de la ley de

Gompertz.

BC^x = Expresión que define la ley de Gompertz.

Desarrollando la expresión (19), se integran ambos miembros de la igualdad en el intervalo (0,x), es decir:

$$\int_0^x \mu y \partial y = \int_0^x \left(A + BC^y\right)\partial y \qquad (20)$$

Se resuelven las integrales y se evalúan:

$$\int_0^x \mu y \partial y = \int_0^x A\partial y + \int_0^x BC^y \partial y \qquad (21)$$

$$\int_0^x \mu y \partial y = Ay\Big|_0^x + \frac{BC^y}{\ln C}\Bigg|_0^x \qquad (22)$$

$$\int_0^x \mu y \partial y = Ax + \frac{BC^y}{\ln C} - \frac{B}{\ln C} \qquad (23)$$

Simplificando la expresión (23) y multiplicándola por –1 se obtiene:

$$-\int_0^x \mu y \partial y = -Ax - \frac{B}{\ln C}\left(C^x - 1\right) \qquad (24)$$

Se renombran los siguientes términos para expresar la igualdad (24) en términos de logaritmos, para ello, realizamos lo siguientes cambios: -A se denotará como lnS y –B/lnC como lng, por lo que la expresión (24) queda de la siguiente manera:

$$\int_0^x \mu y \partial y = x\ln S + (C^x - 1)\ln g \qquad (25)$$

La cual se puede simplificar utilizando las leyes de los logaritmos para obtener:

$$-\int_0^x \mu y \partial y = \ln S^x + \ln g^{(c^x-1)} \qquad (26)$$

$$-\int_0^x \mu y \partial y = \ln S^x \ln g^{(c^x-1)} \qquad (27)$$

Este resultado permite encontrar una nueva definición para la expresión (18):

$$l(x) = l(o)e^{-\int_0^x \mu y \partial y} \qquad (18)$$

Así sustituyendo la expresión (27) en la expresión (18) tenemos:

$$l(x) = l(o)e^{\ln S^x g^{(c^x-1)}} \qquad (28)$$

$$l(x) = l(o)\left(S^x g^{(c^x-1)}\right) \qquad (29)$$

$$l(x) = l(o)\left(S^x g^{c^x} g^{-1}\right) \qquad (30)$$

$$l(x) = \frac{l(0)}{g} S^x g^{c^x} \qquad (31)$$

Si denotamos l(0)/g como K, tenemos la siguiente expresión:

$$l(x) = KS^x g^{c^x} \qquad (32)$$

Esta expresión (32) es la Ley de Gompertz-Makeham, siendo entonces la función de la siguiente forma:

$$Y(x) = Ka^x g^{c^x} \qquad (33)$$

La ley de Makeham fue utilizada en un principio para describir el cambio relativo de la línea (lx) de supervivientes de una tabla de mortalidad, la cual supone que podría ser descrita por una función de la forma $\mu x = A + BC^x$.

3. Metodología.

3.1. Método de los grupos no superpuestos.

Para determinar los parámetros k, a, b y d de la función Gompertz-Makeham se utilizará el método de los Grupos no Superpuestos[9]; para el cual es necesario determinar las siguientes condiciones:

a) Los datos se dividirán en cuatro grupos de observaciones sucesivas (y_x).

b) Cada grupo deberá contar con el mismo número de valores observados (m). Por lo que, para aplicar este método, se necesita conformar los siguientes grupos:

c) Primer grupo:

$$\begin{array}{llllll} x: & 0 & 1 & 2 & 3\ldots & (m-1) \\ y_x: & y_0 & y_1 & y_2 & y_{3\ldots} & y_{m-1} \end{array} \quad (34)$$

Segundo grupo:

$$\begin{array}{llllll} x: & m & (m+1) & (m+2) & (m+3)\ldots & (2m-1) \\ y_x: & y_m & y_{m+1} & y_{m+2} & y_{m+3\ldots} & y_{2m-1} \end{array} \quad (35)$$

Tercer grupo:

$$\begin{array}{llllll} x: & 2m & (2m+1) & (2m+2) & (2m+3)\ldots & (3m-1) \\ y_x: & y_{2m} & y_{2m+1} & y_{2m+2} & y_{2m+3\ldots} & y_{3m-1} \end{array} \quad (36)$$

[9] Mina Alejandro, Funciones de Sobrevivencia empleadas en el Análisis Demográfico, 2000.

Cuarto grupo:

x:	3m	(3m+1)	(3m+2)	(3m+3)...	(4m-1)	(37)
y_x:	y_{3m}	y_{3m+1}	y_{3m+2}	y_{3m+3}...	y_{4m-1}	

d) Para linealizar la expresión (33) del apartado anterior, se calculan los logaritmos decimales de las y_x en cada uno de los grupos definidos en el inciso anterior, es decir:

$\log y_i = \log ka^i b^{d^i}$ para i=0,1,2,...(4m-1) (38)

$\log y_i = \log k + i \log a + d^i \log b$ para i=0,1,2,...(4m-1) (39)

e) A continuación se calculan las sumas de los logaritmos de cada uno de estos grupos y se denotan las sumas como S_0, S_1, S_2 y S_3 respectivamente.

f) Para el primer grupo, tenemos:

$$S_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \log y_i = \sum_{i=0}^{m-1} \log k + \sum_{i=0}^{m-1} i \log a + \sum_{i=0}^{m-1} d^i \log b \qquad (40)$$

Si se desarrolla cada término del miembro derecho se tiene lo siguiente:

i) $\sum_{i=0}^{m-1} \log k = m \log k$

ii) $\sum_{i=0}^{m-1} i \log a$ para toda i, donde $\sum_{i=0}^{m-1}$ es una progresión aritmética con el primer término de la sucesión igual a cero, la diferencia común es 1 y el número de observaciones es m. La suma de esta sucesión es m(m-1)/2; por tanto:

$$\sum_{i=0}^{m-1} i \log a = \frac{m(m-1)}{2} \log a$$

iii) $\sum_{i=0}^{m-1} d^i \log b$, donde $\sum_{i=0}^{m-1} d^i$ es una progresión geométrica con el primer término de la sucesión igual a d^0, la razón común es d y el número de observaciones es m. La suma de esta sucesión es $\frac{d^0(d^m-1)}{(d-1)}$ y por tanto:

$$\sum_{i=0}^{m-1} d^i \log b = \frac{d^o(d^m+1)}{(d-1)} \log a$$

Así la suma para el primer grupo de observaciones es:

$$S_0 = m\log k + \left(\frac{m(m-1)}{2}\right)\log a + \left(\frac{d^m-1)}{d-1}\right)\log b \qquad (41)$$

Siguiendo el procedimiento anterior, se obtienen las sumas para el resto de los grupos:

$$S_1 = m\log k + \left(m^2 + \frac{m(m-1)}{2}\right)\log a + \left(d^m \frac{d^m-1)}{d-1}\right)\log b \qquad (42)$$

$$S_2 = m\log k + \left(2m^2 + \frac{m(m-1)}{2}\right)\log a + \left(d^{2m} \frac{d^m-1)}{d-1}\right)\log b \qquad (43)$$

$$S_3 = m\log k + \left(3m^2 + \frac{m(m-1)}{2}\right)\log a + \left(d^{3m} \frac{d^m-1)}{d-1}\right)\log b \qquad (44)$$

g) Ahora se calculan las primeras diferencias de las sumas S_0, S_1, S_2 y S_3; y denotando estas diferencias con ΔS_0, ΔS_1 y ΔS_2:

$$\Delta S_0 = S_1 - S_0 \qquad (45)$$

$$\Delta S_0 = S_1 - S_0 = m\log k + \left(m^2 + \frac{m(m-1)}{2}\right)\log a + \left(d^m \frac{d^m-1)}{d-1}\right)\log b -$$

$$m\log k - \left(\frac{m(m-1)}{2}\right)\log a - \left(\frac{d^m-1)}{d-1}\right)\log b \qquad (46)$$

La expresión anterior se puede reducir para obtener:

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)}{d - 1}(d^m - 1)\log b \tag{47}$$

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1}\log b \tag{48}$$

Para calcular la diferencia ΔS_1

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1 \tag{49}$$

$$\Delta S_1 = m \log k + \left(2m^2 + \frac{m(m-1)}{2}\right)\log a + \left(d^{2m}\frac{d^m - 1)}{d - 1}\right)\log b - \tag{50}$$

$$m \log k - \left(m^2 + \frac{m(m-1)}{2}\right)\log a - \left(d^m \frac{d^m - 1)}{d - 1}\right)\log b$$

$$\Delta S_1 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)}{d - 1}\left(d^{2m} - d^m\right)\log b \tag{51}$$

$$\Delta S_1 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)}{d - 1}\left(d^{2m} - 1\right)d^m \log b \tag{52}$$

$$\Delta S_1 = m^2 \log a + d^m \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1}\log b \tag{53}$$

Para calcular la diferencia ΔS_2

$$\Delta S_2 = S_3 - S_2 \tag{54}$$

$$\Delta S_2 = m \log k + \left(3m^2 + \frac{m(m-1)}{2}\right)\log a + \left(d^{3m}\frac{d^m - 1)}{d - 1}\right)\log b - \tag{55}$$

$$m \log k - \left(2m^2 + \frac{m(m-1)}{2}\right)\log a - \left(d^{2m}\frac{d^m - 1)}{d - 1}\right)\log b$$

$$\Delta S_2 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)}{d - 1}\left(d^{3m} - d^{2m}\right)\log b \tag{56}$$

$$\Delta S_2 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)}{d - 1}\left(d^{3m} - 1\right)d^{2m} \log b \tag{57}$$

$$\Delta S_2 = m^2 \log a + d^{2m} \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \log b \tag{58}$$

h) Se continúa el proceso calculando las segundas diferencias, las cuales se denotarán como $\Delta^2 S_0$ y $\Delta^2 S_1$

$$\Delta^2 S_0 = \Delta S_1 - \Delta S_0 \tag{59}$$

$$\Delta^2 S_0 = m^2 \log a + \left(d^m \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \right) \log b - \left(m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \right) \log b \tag{60}$$

$$\Delta^2 S_0 = \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} (d^m - 1) \log b \tag{61}$$

$$\Delta^2 S_0 = \frac{(d^m - 1)^3}{d-1} \log b \tag{62}$$

$$\Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1 \tag{63}$$

$$\Delta^2 S_1 = m^2 \log a + \left(d^{2m} \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \right) \log b - \left(m^2 \log a + d^m \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \log b \right) \tag{64}$$

$$\Delta^2 S_1 = \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} (d^{2m} - d^m) \log b \tag{65}$$

$$\Delta^2 S_1 = d^m \frac{(d^m - 1)^3}{d-1} \log b \tag{66}$$

i) Con los resultados anteriores se encontrarán las expresiones para los parámetros a, b y d. Para encontrar el parámetro d se utiliza la expresión (66) y el resultado encontrado en (62), de la siguiente manera:

$$\Delta^2 S_1 = d^m \frac{\left(d^m - 1\right)^3}{d-1} \log b \tag{67}$$

Despejando d^m y calculando la raíz m-ésima se tiene que d puede expresarse como:

$$d^m = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \quad (68)$$

$$d = \left(\frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (69)$$

Para encontrar el parámetro b se retoma el resultado obtenido en (62). Primero se despeja el logaritmo de b para después aplicar antilogaritmo y obtener b:

$$\Delta^2 S_0 = \frac{(d^m - 1)^3}{d - 1} \log b$$

$$\Delta^2 S_0 \frac{d - 1}{(d^m - 1)^3} = \log b \quad (70)$$

$$Anti\log(\log b) = Anti\log\left[\Delta^2 S_0 \frac{d - 1}{(d^m - 1)^3} \right] \quad (71)$$

$$b = Anti\log\left[\Delta^2 S_0 \frac{d - 1}{(d^m - 1)^3} \right] \quad (72)$$

El parámetro a se calculará a partir de las expresiones (48) y (62):

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} \log b$$

log b puede expresarse a partir de (62), es decir:

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)^2}{d - 1} * \frac{d - 1}{(d^m - 1)^3} \Delta^2 S_0 \quad (73)$$

Se despeja el log a y se aplica antilogaritmo:

$$\log a = \frac{1}{m^2} \left(\Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1} \right) \quad (74)$$

$$Anti\log(\log a) = Anti\log\left(\frac{1}{m^2} \left(\Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1} \right) \right) \quad (75)$$

$$a = Anti\log\left(\frac{1}{m^2} \left(\Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1} \right) \right) \quad (76)$$

Por último, el parámetro k se obtendrá a partir de la condición de mínimos cuadrados, es decir:

$Y_x = ka^x b^{d^x}$ Para x = 0,1,2,...,4m-1

$$\sum_{x=0}^{4m-1}\left(y_x - ka^x b^{d^x}\right)^2 = 0 \qquad (77)$$

Para simplificar la expresión, se denota como Vx a $a^x b^{d^x}$, por tanto (77) se expresa como:

$$\sum_{x=0}^{4m-1}(y_x - kVx)^2 = 0 \qquad (78)$$

Desarrollando $(y_x - kVx)^2$ se obtiene:

$$(y_x - kVx)^2 = (y_x^2 - 2ky_xVx + k^2Vx^2) \qquad (79)$$

$$= (y_x^2 - 2\,y_x^2 + k^2Vx^2) \qquad (80)$$

$$= (k^2Vx^2 - y_x^2) \qquad (81)$$

Este resultado permite expresar (78) como:

$$\sum_{x=0}^{4m-1}\left(k^2Vx^2 - y_x^2\right) = 0 \qquad (82)$$

$$\sum_{x=0}^{4m-1}\left(k^2Vx^2\right) = \sum_{x=0}^{4m-1}\left(y_x^2\right) \qquad (83)$$

Se despeja k^2 de (83):

$$k^2 = \frac{\sum_0^{4m-1} y_x^2}{\sum_0^{4m-1} V_x^2} \qquad (84)$$

Para eliminar el cuadrado de k, se sabe que y_x = kVx según la expresión (78), por lo tanto es posible expresar (84) como:

$$k^2 = \frac{\sum_{0}^{4m-1} y_x^{\,2}}{\sum_{0}^{4m-1} V_x^{\,2}} \qquad (85)$$

Dada la expresión (85) es posible estimar k de la siguiente manera:

$$K = \frac{\sum_{0}^{4m-1} y_x^{\,2}}{\sum_{0}^{4m-1} V_x^{\,2}} \qquad (86)$$

3.2. Resultados.

En esta sección se mostrará la aplicación de la sección 3.1 para la Tabla de Mortalidad México 2000. Los estudios más recientes hecho por las Asociaciones: Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS) y Mexicana de Actuarios (AMA), es la construcción de la Tabla de Mortalidad México 2000[10] que pretende ser acorde al comportamiento demográfico del sector asegurado en nuestro país. Con base en la información de las compañías aseguradoras, se logró recabar a más del 85% del mercado por lo que les permitió encontrar resultados confiables, las tablas están separadas por sexo y algunos otras características que se pueden consultar en el Anexo del presente trabajo.

- ✓ Consideremos cuatro grupos de observaciones sucesivas (y_x), para linealizar la expresión utilizada en la sección anterior (33), se calculan los logaritmos decimales de las y_x en cada uno de los grupos definidos, a continuación se calculan las sumas de los logaritmos de cada uno de estos grupos y se denotan sumas como S_0, S_1, S_2 y S_3 respectivamente.

[10] AMIS, AMA, Tabla de Mortalidad México 2000.

Tabla 1

x	l_x	log l_x
12	100,000	5.00000
13	99,965	4.99985
14	99,922	4.99966
15	99,871	4.99944
16	99,811	4.99918
17	99,744	4.99889
18	99,671	4.99857
19	99,596	4.99824
20	99,521	4.99791
21	99,446	4.99759
22	99,369	4.99725
23	99,287	4.99689
24	99,212	4.99656
25	99,138	4.99624
26	99,065	4.99592
27	98,994	4.99561
28	98,927	4.99531
29	98,851	4.99498
30	98,770	4.99463
31	98,685	4.99425
32	98,592	4.99384
33	98,487	4.99338
	$S_0=\Sigma \log l_x$	109.93420

x	l_x	log l_x
34	98,380	4.99291
35	98,272	4.99243
36	98,163	4.99195
37	98,052	4.99146
38	97,941	4.99096
39	97,811	4.99039
40	97,663	4.98973
41	97,498	4.98899
42	97,313	4.98817
43	97,107	4.98725
44	96,888	4.98627
45	96,657	4.98523
46	96,411	4.98413
47	96,144	4.98292
48	95,844	4.98156
49	95,539	4.98018
50	95,228	4.97877
51	94,900	4.97726
52	94,533	4.97558
53	94,105	4.97361
54	93,626	4.97140
55	93,080	4.96886
	$S_1=\Sigma \log l_x$	109.65001

x	l_x	log l_x
56	92,456	4.96594
57	91,751	4.96261
58	90,963	4.95886
59	90,007	4.95428
60	88,893	4.94887
61	87,630	4.94265
62	86,230	4.93566
63	84,704	4.92790
64	83,107	4.91964
65	81,409	4.91067
66	79,622	4.90103
67	77,797	4.89097
68	75,878	4.88012
69	73,904	4.86867
70	71,884	4.85663
71	69,819	4.84397
72	67,706	4.83063
73	65,534	4.81647
74	63,102	4.80005
75	60,471	4.78155
76	57,710	4.76125
77	54,818	4.73892
	$S_2=\Sigma \log l_x$	107.39732

x	l_x	log l_x
78	51,796	4.71430
79	48,650	4.68708
80	45,388	4.65694
81	42,024	4.62350
82	38,576	4.58631
83	35,068	4.54491
84	31,531	4.49874
85	28,001	4.44717
86	24,520	4.38953
87	21,135	4.32501
88	17,894	4.25272
89	14,848	4.17165
90	12,041	4.08067
91	9,517	3.97849
92	7,306	3.86366
93	5,427	3.73453
94	3,884	3.58925
95	2,665	3.42572
96	1,744	3.24158
97	1,082	3.03415
98	632	2.80042
99	344	2.53696
	$S_3=\Sigma \log l_x$	88.18328

- ✓ Se calculan las primeras diferencias de la suma S_0, S_1, S_2 y S_3 y denotándose estas diferencias con ΔS_0 , ΔS_1 y ΔS_2 :

$$\Delta S_0 = S_1 - S_0 \quad = \quad -0.28419$$

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1 \quad = \quad -2.25270$$

$$\Delta S_2 = S_3 - S_2 \quad = \quad -19.214040$$

- ✓ Se calculan las segundas diferencias, las cuales se denotarán como $\Delta^2 S_0$ y $\Delta^2 S_1$

$$\Delta^2 S_0 = \Delta S_1 - \Delta S_0 \quad = \quad -1.96851$$
$$\Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1 \quad = \quad -16.96134$$

- ✓ Con los resultados anteriores se encuentran los valores para los parámetros a, b y d.

$$d = \left(\frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad = \quad 1.102845$$

- ✓ Para encontrar el parámetro b se sigue:

$$b = Anti\log\left[\Delta^2 S_0 \frac{d-1}{(d^m - 1)^3} \right] \quad = \quad 0.99954187$$

- ✓ Para encontrar el parámetro a:

$$a = Anti\log\left(\frac{1}{m^2} \left(\Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1} \right) \right) \quad = \quad 0.99994685$$

✓ Por último, el parámetro k se obtiene con la condición de mínimos cuadrados, de la siguiente manera:

Tabla 2

x	a^x	d^x	b^{dx}	$Vx=a^x*b^{dx}$	l_x	Vx^2	$Vx*l_x$
12	0.99936	3.23725	0.99852	0.99788	100,000	0.99577	99,788
13	0.99931	3.57018	0.99837	0.99768	99,968	0.99536	99,736
14	0.99926	3.93736	0.99820	0.99745	99,922	0.99492	99,668
15	0.99920	4.34230	0.99801	0.99722	99,863	0.99444	99,585
16	0.99915	4.78888	0.99781	0.99696	99,792	0.99393	99,489
17	0.99910	5.28140	0.99758	0.99668	99,713	0.99337	99,382
18	0.99904	5.82456	0.99733	0.99638	99,625	0.99277	99,265
19	0.99899	6.42359	0.99706	0.99605	99,536	0.99212	99,143
20	0.99894	7.08423	0.99676	0.99570	99,445	0.99142	99,018
21	0.99888	7.81281	0.99643	0.99531	99,354	0.99065	98,889
22	0.99883	8.61632	0.99606	0.99490	99,263	0.98982	98,756
23	0.99878	9.50247	0.99566	0.99444	99,169	0.98891	98,617
24	0.99873	10.47976	0.99521	0.99394	99,080	0.98792	98,480
25	0.99867	11.55755	0.99472	0.99340	98,996	0.98684	98,343
26	0.99862	12.74620	0.99418	0.99280	98,915	0.98566	98,203
27	0.99857	14.05708	0.99358	0.99215	98,836	0.98437	98,061
28	0.99851	15.50279	0.99292	0.99144	98,759	0.98296	97,914
29	0.99846	17.09718	0.99220	0.99067	98,679	0.98142	97,758
30	0.99841	18.85555	0.99140	0.98982	98,595	0.97974	97,591
31	0.99835	20.79475	0.99052	0.98889	98,507	0.97789	97,413
32	0.99830	22.93340	0.98955	0.98786	98,414	0.97588	97,220
33	0.99825	25.29199	0.98848	0.98674	98,313	0.97367	97,010

Tabla 3

x	a^x	d^x	b^{dx}	$Vx=a^x \cdot b^{dx}$	l_x	Vx^2	$Vx^* l_x$
34	0.99819	27.89316	0.98730	0.98552	98,212	0.97124	96,790
35	0.99814	30.76184	0.98600	0.98417	98,110	0.96859	96,557
36	0.99809	33.92556	0.98457	0.98269	98,003	0.96568	96,307
37	0.99804	37.41465	0.98300	0.98107	97,892	0.96250	96,039
38	0.99798	41.26257	0.98127	0.97929	97,773	0.95901	95,748
39	0.99793	45.50624	0.97936	0.97734	97,641	0.95518	95,428
40	0.99788	50.18634	0.97727	0.97519	97,493	0.95100	95,074
41	0.99782	55.34778	0.97496	0.97283	97,329	0.94641	94,685
42	0.99777	61.04004	0.97242	0.97025	97,147	0.94138	94,257
43	0.99772	67.31773	0.96962	0.96741	96,947	0.93588	93,787
44	0.99766	74.24105	0.96655	0.96429	96,735	0.92986	93,281
45	0.99761	81.87640	0.96318	0.96088	96,509	0.92328	92,733
46	0.99756	90.29701	0.95947	0.95712	96,267	0.91609	92,139
47	0.99750	99.58364	0.95539	0.95301	96,003	0.90823	91,492
48	0.99745	109.82537	0.95092	0.94850	95,713	0.89965	90,784
49	0.99740	121.12040	0.94601	0.94355	95,424	0.89029	90,037
50	0.99735	133.57708	0.94063	0.93813	95,125	0.88009	89,240
51	0.99729	147.31486	0.93472	0.93219	94,805	0.86898	88,376
52	0.99724	162.46552	0.92826	0.92569	94,446	0.85691	87,428
53	0.99719	179.17435	0.92118	0.91859	94,031	0.84380	86,375
54	0.99713	197.60161	0.91343	0.91081	93,570	0.82958	85,225
55	0.99708	217.92403	0.90496	0.90232	93,047	0.81419	83,959

Tabla 4

x	a^x	d^x	b^{d^x}	$Vx=a^x \cdot b^{d^x}$	l_x	Vx^2	$Vx \cdot l_x$
56	0.99703	240.33652	0.89572	0.89306	92,452	0.79755	82,565
57	0.99697	265.05403	0.88563	0.88295	91,779	0.77960	81,036
58	0.99692	292.31361	0.87464	0.87194	91,028	0.76029	79,371
59	0.99687	322.37673	0.86267	0.85997	90,109	0.73955	77,491
60	0.99682	355.53169	0.84966	0.84696	89,032	0.71734	75,406
61	0.99676	392.09649	0.83554	0.83284	87,806	0.69362	73,128
62	0.99671	432.42182	0.82025	0.81755	86,443	0.66838	70,671
63	0.99666	476.89441	0.80370	0.80101	84,954	0.64162	68,049
64	0.99660	525.94081	0.78584	0.78317	83,468	0.61336	65,369
65	0.99655	580.03141	0.76660	0.76396	81,968	0.58363	62,620
66	0.99650	639.68498	0.74593	0.74332	80,420	0.55252	59,778
67	0.99645	705.47364	0.72378	0.72120	78,772	0.52014	56,811
68	0.99639	778.02836	0.70011	0.69758	76,887	0.48662	53,635
69	0.99634	858.04501	0.67490	0.67243	74,949	0.45217	50,398
70	0.99629	946.29099	0.64816	0.64575	72,968	0.41699	47,119
71	0.99623	1,043.61267	0.61989	0.61755	70,944	0.38137	43,812
72	0.99618	1,150.94344	0.59014	0.58788	68,874	0.34561	40,490
73	0.99613	1,269.31269	0.55898	0.55682	66,745	0.31004	37,165
74	0.99607	1,399.85567	0.52652	0.52446	64,342	0.27505	33,745
75	0.99602	1,543.82440	0.49291	0.49095	61,642	0.24103	30,263
76	0.99597	1,702.59964	0.45832	0.45647	58,582	0.20837	26,741
77	0.99592	1,877.70420	0.42298	0.42125	55,076	0.17745	23,201

Tabla 5

x	a^x	d^x	b^{d^x}	$Vx=a^x \cdot b^{d^x}$	l_x	Vx^2	$Vx \cdot l_x$
78	0.99586	2,070.81745	0.38716	0.38556	51,262	0.14865	19,765
79	0.99581	2,283.79151	0.35116	0.34969	47,148	0.12228	16,487
80	0.99576	2,518.66898	0.31533	0.31399	42,769	0.09859	13,429
81	0.99570	2,777.70251	0.28004	0.27883	38,178	0.07775	10,645
82	0.99565	3,063.37646	0.24568	0.24461	33,482	0.05983	8,190
83	0.99560	3,378.43065	0.21265	0.21171	28,699	0.04482	6,076
84	0.99555	3,725.88673	0.18135	0.18054	23,981	0.03260	4,330
85	0.99549	4,109.07706	0.15215	0.15146	19,454	0.02294	2,946
86	0.99544	4,531.67676	0.12536	0.12479	15,245	0.01557	1,902
87	0.99539	4,997.73890	0.10125	0.10079	11,476	0.01016	1,157
88	0.99533	5,511.73339	0.08001	0.07963	8,243	0.00634	656
89	0.99528	6,078.58985	0.06170	0.06141	5,607	0.00377	344
90	0.99523	6,703.74490	0.04633	0.04611	3,578	0.00213	165
91	0.99517	7,393.19427	0.03378	0.03362	2,120	0.00113	71
92	0.99512	8,153.55034	0.02384	0.02373	1,153	0.00056	27
93	0.99507	8,992.10554	0.01624	0.01616	567	0.00026	9
94	0.99502	9,916.90229	0.01063	0.01058	248	0.00011	3
95	0.99496	10,936.81014	0.00666	0.00663	94	0.00004	1
96	0.99491	12,061.61082	0.00398	0.00396	31	0.00002	0
97	0.99486	13,302.09209	0.00225	0.00224	8	0.00001	0
98	0.99480	14,670.15116	0.00120	0.00120	2	0.00000	0
99	0.99475	16,178.90882	0.00060	0.00060	0	0.00000	0
100	0.99470	17,842.83528	0.00028	0.00028	0	0.00000	0
						53.85749	**5,520,136**
						k =	**102,495**

Con los parámetros obtenidos mostraremos la construcción de la Tabla de Mortalidad México 2000.

Tabla 6

x	l_x	d_x	q_x	Lx	Sx	Tx	e_x
12	100,000	21	0.00021	99,990	0.99979	6,064,196	60.64
13	99,979	22	0.00022	99,968	0.99977	5,964,206	59.65
14	99,957	24	0.00024	99,945	0.99975	5,864,237	58.67
15	99,933	26	0.00026	99,921	0.99973	5,764,292	57.68
16	99,908	28	0.00028	99,894	0.99971	5,664,371	56.70
17	99,880	30	0.00030	99,865	0.99969	5,564,478	55.71
18	99,850	33	0.00033	99,833	0.99966	5,464,613	54.73
19	99,817	36	0.00036	99,799	0.99963	5,364,780	53.75
20	99,781	39	0.00039	99,762	0.99960	5,264,981	52.77
21	99,743	42	0.00042	99,722	0.99956	5,165,218	51.79
22	99,701	46	0.00046	99,678	0.99952	5,065,497	50.81
23	99,655	50	0.00050	99,630	0.99948	4,965,819	49.83
24	99,605	54	0.00055	99,578	0.99943	4,866,189	48.85
25	99,551	59	0.00060	99,521	0.99937	4,766,611	47.88
26	99,491	65	0.00065	99,459	0.99932	4,667,090	46.91
27	99,426	71	0.00072	99,391	0.99925	4,567,631	45.94
28	99,355	78	0.00078	99,316	0.99918	4,468,241	44.97
29	99,277	85	0.00086	99,235	0.99910	4,368,925	44.01
30	99,192	93	0.00094	99,145	0.99901	4,269,690	43.04
31	99,099	102	0.00103	99,047	0.99892	4,170,545	42.08
32	98,996	112	0.00113	98,940	0.99881	4,071,497	41.13
33	98,884	123	0.00124	98,823	0.99869	3,972,557	40.17

Tabla 7

x	l_x	d_x	q_x	Lx	Sx	Tx	e_x
34	98,761	135	0.00137	98,693	0.99857	3,873,735	39.22
35	98,626	148	0.00150	98,552	0.99842	3,775,041	38.28
36	98,478	163	0.00165	98,397	0.99827	3,676,489	37.33
37	98,315	178	0.00181	98,226	0.99809	3,578,093	36.39
38	98,137	196	0.00200	98,039	0.99790	3,479,867	35.46
39	97,941	215	0.00220	97,834	0.99769	3,381,828	34.53
40	97,726	236	0.00242	97,608	0.99746	3,283,994	33.60
41	97,490	259	0.00266	97,360	0.99721	3,186,386	32.68
42	97,231	284	0.00293	97,089	0.99693	3,089,025	31.77
43	96,946	312	0.00322	96,790	0.99662	2,991,937	30.86
44	96,634	343	0.00355	96,463	0.99628	2,895,146	29.96
45	96,292	376	0.00390	96,104	0.99590	2,798,684	29.06
46	95,916	412	0.00430	95,709	0.99548	2,702,580	28.18
47	95,503	452	0.00474	95,277	0.99503	2,606,870	27.30
48	95,051	496	0.00522	94,803	0.99452	2,511,593	26.42
49	94,555	543	0.00574	94,284	0.99396	2,416,790	25.56
50	94,012	595	0.00633	93,715	0.99335	2,322,506	24.70
51	93,417	651	0.00697	93,092	0.99268	2,228,792	23.86
52	92,766	712	0.00768	92,410	0.99193	2,135,700	23.02
53	92,054	779	0.00846	91,664	0.99111	2,043,290	22.20
54	91,275	851	0.00932	90,849	0.99021	1,951,626	21.38
55	90,424	929	0.01027	89,960	0.98921	1,860,777	20.58

Tabla 8

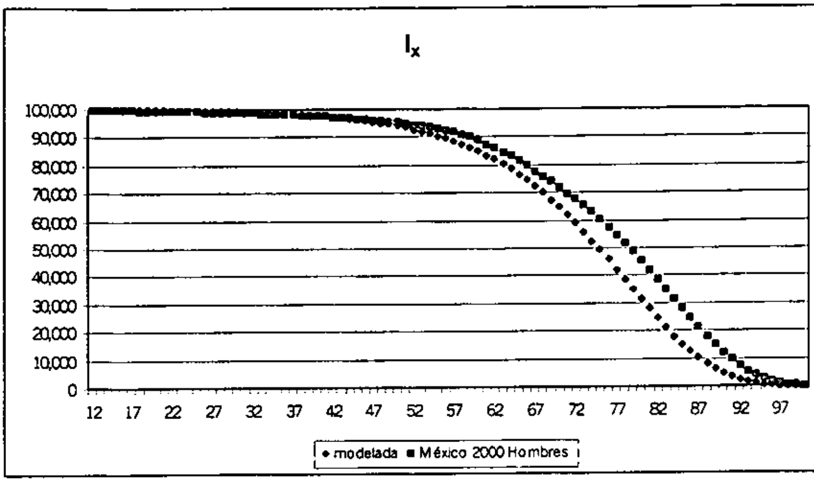
x	l_x	d_x	q_x	Lx	Sx	Tx	e_x
56	89,495	1,013	0.01132	88,989	0.98811	1,770,817	19.79
57	88,483	1,103	0.01247	87,931	0.98690	1,681,828	19.01
58	87,379	1,200	0.01373	86,779	0.98557	1,593,897	18.24
59	86,179	1,304	0.01513	85,527	0.98411	1,507,118	17.49
60	84,876	1,415	0.01667	84,168	0.98249	1,421,590	16.75
61	83,461	1,532	0.01836	82,695	0.98072	1,337,422	16.02
62	81,928	1,657	0.02022	81,100	0.97876	1,254,728	15.31
63	80,271	1,788	0.02228	79,377	0.97661	1,173,628	14.62
64	78,483	1,925	0.02453	77,521	0.97424	1,094,250	13.94
65	76,558	2,068	0.02702	75,524	0.97164	1,016,730	13.28
66	74,490	2,216	0.02975	73,382	0.96877	941,206	12.64
67	72,274	2,367	0.03275	71,090	0.96562	867,825	12.01
68	69,906	2,520	0.03605	68,646	0.96217	796,735	11.40
69	67,386	2,674	0.03968	66,049	0.95837	728,088	10.80
70	64,712	2,826	0.04367	63,299	0.95419	662,039	10.23
71	61,886	2,973	0.04804	60,400	0.94961	598,740	9.67
72	58,913	3,113	0.05285	57,356	0.94459	538,340	9.14
73	55,800	3,243	0.05812	54,178	0.93908	480,984	8.62
74	52,557	3,358	0.06389	50,878	0.93305	426,805	8.12
75	49,199	3,455	0.07022	47,472	0.92644	375,927	7.64
76	45,744	3,529	0.07715	43,979	0.91921	328,456	7.18
77	42,215	3,577	0.08474	40,426	0.91130	284,476	6.74

Tabla 9

x	l_x	d_x	q_x	Lx	Sx	Tx	e_x
78	38,638	3,594	0.09303	36,840	0.90266	244,050	6.32
79	35,043	3,577	0.10209	33,255	0.89324	207,210	5.91
80	31,466	3,523	0.11197	29,704	0.88296	173,955	5.53
81	27,943	3,430	0.12275	26,228	0.87177	144,251	5.16
82	24,513	3,296	0.13448	22,865	0.85960	118,023	4.81
83	21,216	3,124	0.14723	19,654	0.84639	95,159	4.49
84	18,093	2,914	0.16108	16,635	0.83207	75,504	4.17
85	15,178	2,673	0.17610	13,842	0.81656	58,869	3.88
86	12,505	2,405	0.19234	11,303	0.79982	45,027	3.60
87	10,100	2,120	0.20989	9,040	0.78176	33,725	3.34
88	7,980	1,826	0.22880	7,067	0.76235	24,685	3.09
89	6,154	1,533	0.24913	5,388	0.74152	17,617	2.86
90	4,621	1,252	0.27093	3,995	0.71924	12,230	2.65
91	3,369	991	0.29424	2,873	0.69549	8,235	2.44
92	2,378	759	0.31908	1,998	0.67023	5,361	2.25
93	1,619	559	0.34546	1,339	0.64349	3,363	2.08
94	1,060	396	0.37338	862	0.61530	2,023	1.91
95	664	267	0.40278	530	0.58569	1,161	1.75
96	397	172	0.43362	311	0.55475	631	1.59
97	225	105	0.46578	172	0.52261	320	1.43
98	120	60	0.49913	90	0.48939	148	1.23
99	60	32	0.53351	44	0.31810	58	0.97
100	28	28	1.00000	14	0.00000	14	0.50

En la siguiente gráfica verificaremos el comportamiento de l_x modelada contra la l_x original de la tabla de mortalidad.

Gráfico 5



A través de los valores obtenidos y el gráfico podemos inferir que es una buena aproximación.

4. Aplicación

4.1. Seguro mancomunado

En un Seguro Mancomunado el objetivo será proteger a dos personas a través de una póliza, este tipo de seguro brinda protección por fallecimiento de dos personas con un interés asegurable en común, en la cual cada uno de ellos designará a sus propios beneficiarios.

Algunas ventajas del seguro son la protección y el ahorro del seguro, pues se considera como un sólo asegurado de acuerdo con una edad mancomunada equivalente, logrando con ello un ahorro en el costo de la protección.

La edad mancomunada equivalente es aquella que permite sustituir dos vidas de edades diferentes o iguales por la de una edad común.

Este tipo de seguros normalmente opera en el mercado asegurador mexicano de la siguiente manera:

Al ocurrir el fallecimiento de uno de los asegurados, se paga la suma asegurada a los beneficiarios designados por él. El asegurado sobreviviente tiene la opción de contratar un Seguro Individual con la misma suma asegurada sujeto a lo siguiente:

a) Lo solicite dentro de un plazo no mayor a 30 días.

b) La edad del asegurado sea menor a 60 años.

En caso de fallecimiento simultáneo, la suma asegurada de las coberturas por fallecimiento se distribuye 50% entre los beneficiarios de un asegurado y 50% para los beneficiarios del otro.

En caso de que el plan contratado otorgue beneficios por supervivencia se observa lo siguiente:

a) Si ambos sobreviven al plazo convenido se acredita el 100% de la suma asegurada del beneficio por supervivencia, en donde a cada asegurado le corresponde el 50% de esa suma asegurada, por lo que para cualquier retiro los documentos deberán contener la firma de ambos asegurados.

b) Si sobrevive uno de los asegurados, a éste se le acreditará el 100% de la suma asegurada del beneficio de supervivencia.

4.2. Probabilidades de vida para dos personas.

Para encontrar la edad equivalente mancomunada que nos permita sustituir una edad para esta pareja es necesario conocer la probabilidad que dos personas de edades *x* y *y*, vivan dentro de n años.

La probabilidad que *x* viva n años se expresa como:

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

De forma similar, la probabilidad que *y* viva n años es

$$_np_y = \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

Y la de que vivan una y otra al cabo de los n años

$$_np_x * {}_np_y = \frac{l_{x+n} * l_{y+n}}{l_x * l_y}$$

La probabilidad que una persona de edad x sobreviva n años, en términos de la función de Gompertz-Makeham, se puede expresar de la siguiente manera:

$$_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{ks^{x+n}g^{c^{x+n}}}{ks^x g^{c^x}} = s^n g^{c^{x+n}} g^{-c^x}$$

$$_nP_x = s^n g^{c^x(c^n-1)}$$

La probabilidad que dos personas de edades x y y, sobrevivan n años, lo expresamos de la siguiente manera:

$$_nP_{x \cdot y} = {}_nP_x \cdot {}_nP_y$$

por lo que:

$$_nP_{x \cdot y} = s^n g^{c^x(c^n-1)} \cdot s^n g^{c^y(c^n-1)}$$

$${}_nP_{x\cdot y} = s^{2n} g^{(c^x+c^y)(c^n-1)}$$

Y por tanto para obtener la edad equivalente mancomunada ω:

$${}_nP_w = {}_nP_{x\cdot y}$$

$$w = \frac{\log\left(\dfrac{n\log s}{(c^n-1)\log g} + c^x + c^y\right)}{\log c}$$

Por ejemplo si deseamos conocer la edad equivalente mancomunada que nos permita sustituir una persona de edad 35 y otra de edad 27 para un periodo de 20 años se debe hacer lo siguiente:

$$\omega = \frac{\log\left[\dfrac{20\log s}{(C^{20}-1)\log g} + C^{35} + C^{27}\right]}{\log c} = \mathbf{39}$$

De aquí se sigue la construcción de la tabla de edades equivalentes para todas las edades aceptación, comúnmente éstas edades varían entre 15 y 70:

Tabla 10

X	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
15	23															
16	23	23														
17	24	24	24													
18	24	24	25	25												
19	25	25	25	26	26											
20	25	26	26	26	27	27										
21	26	26	27	27	27	28	28									
22	26	27	27	28	28	28	29	29								
23	27	27	28	28	29	29	29	30	30							
24	28	28	28	29	29	29	30	30	31	31						
25	29	29	29	29	30	30	30	31	31	32	32					
26	29	29	30	30	30	31	31	31	32	32	33	33				
27	30	30	30	31	31	31	32	32	32	33	33	34	34			
28	31	31	31	31	32	32	32	33	33	33	34	34	35	35		
29	31	32	32	32	32	33	33	33	34	34	34	35	35	36	36	
30	32	32	33	33	33	33	34	34	34	35	35	35	36	36	37	37

X	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	33	33	33	34	34	34	34	35	35	35	36	36	36	37	37	38
32	34	34	34	34	35	35	35	35	36	36	36	37	37	37	38	38
33	35	35	35	35	35	36	36	36	36	37	37	37	38	38	38	39
34	36	36	36	36	36	36	37	37	37	37	38	38	38	39	39	39
35	36	37	37	37	37	37	37	38	38	38	38	39	39	39	40	40
36	37	37	38	38	38	38	38	38	39	39	39	39	40	40	40	41
37	38	38	38	39	39	39	39	39	39	40	40	40	40	41	41	41
38	39	39	39	39	40	40	40	40	40	40	41	41	41	41	42	42
39	40	40	40	40	40	41	41	41	41	41	41	42	42	42	42	43
40	41	41	41	41	41	41	42	42	42	42	42	42	43	43	43	43
41	42	42	42	42	42	42	42	43	43	43	43	43	43	44	44	44
42	43	43	43	43	43	43	43	43	44	44	44	44	44	44	45	45
43	44	44	44	44	44	44	44	44	44	45	45	45	45	45	45	46
44	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	46	46	46	46	46	46
45	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	47	47	47	47	47

Tabla 11

X	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
46	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	48	48	48	48
47	47	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48	49	49	49
48	48	48	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	50	50
49	49	49	49	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	51
50	50	50	50	50	51	51	51	51	51	51	51	51	51	51	51	51
51	51	51	51	51	51	52	52	52	52	52	52	52	52	52	52	52
52	52	52	52	52	52	52	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53
53	53	53	53	53	53	53	53	54	54	54	54	54	54	54	54	54
54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	55	55	55	55	55	55	55
55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	56	56	56	56	56	56
56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	57	57	57	57	57
57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	58	58	58	58
58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	59	59	59
59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	60	60
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	61

X	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61
62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62
63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63
64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64
65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65
66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66
67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67
68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68
69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69
70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70

Tabla 12

X	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
31	38														
32	39	39													
33	39	40	40												
34	40	40	41	41											
35	40	41	41	42	42										
36	41	41	42	42	43	43									
37	42	42	42	43	43	44	44								
38	42	43	43	43	44	44	45	45							
39	43	43	44	44	44	45	45	46	46						
40	44	44	44	45	45	45	46	46	47	47					
41	44	45	45	45	46	46	46	47	47	48	48				
42	45	45	46	46	46	47	47	47	48	48	49	49			
43	46	46	46	47	47	47	48	48	48	49	49	50	50		
44	47	47	47	47	48	48	48	49	49	49	50	50	51	51	
45	47	48	48	48	48	49	49	49	50	50	50	51	51	52	52

X	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	48	48	49	49	49	49	50	50	50	51	51	51	52	52	53
47	49	49	49	50	50	50	50	51	51	51	52	52	52	53	53
48	50	50	50	50	51	51	51	51	52	52	52	53	53	53	54
49	51	51	51	51	51	52	52	52	52	53	53	53	54	54	54
50	52	52	52	52	52	52	53	53	53	53	54	54	54	55	55
51	52	53	53	53	53	53	53	54	54	54	54	55	55	55	56
52	53	53	53	54	54	54	54	54	55	55	55	55	56	56	56
53	54	54	54	54	55	55	55	55	55	56	56	56	56	57	57
54	55	55	55	55	55	56	56	56	56	56	57	57	57	57	58
55	56	56	56	56	56	56	57	57	57	57	57	58	58	58	58
56	57	57	57	57	57	57	57	58	58	58	58	58	59	59	59
57	58	58	58	58	58	58	58	58	59	59	59	59	59	60	60
58	59	59	59	59	59	59	59	59	59	60	60	60	60	60	61
59	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	61	61	61	61	61
60	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	62	62	62	62

Tabla 13

X	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
61	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	63	63	63
62	62	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	64	64
63	63	63	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	65
64	64	64	64	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65
65	65	65	65	65	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66
66	66	66	66	66	66	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67
67	67	67	67	67	67	67	68	68	68	68	68	68	68	68	68
68	68	68	68	68	68	68	68	69	69	69	69	69	69	69	69
69	69	69	69	69	69	69	69	69	70	70	70	70	70	70	70
70	70	70	70	70	70	70	70	70	70						

Tabla 14

X	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
46	53																			
47	54	54																		
48	54	55	55																	
49	55	55	56	56																
50	55	56	56	57	57															
51	56	56	57	57	58	58														
52	57	57	57	58	58	59	59													
53	57	58	58	58	59	59	60	60												
54	58	58	59	59	59	60	60	61	61											
55	59	59	59	60	60	60	61	61	62	62										
56	59	60	60	60	61	61	61	62	62	63	63									
57	60	60	61	61	61	62	62	62	63	63	64	64								
58	61	61	61	62	62	62	63	63	63	64	64	65	65							
59	62	62	62	62	63	63	63	64	64	64	65	65	66	66						
60	62	63	63	63	63	64	64	64	65	65	65	66	66	67	67					
61	63	63	64	64	64	64	65	65	65	66	66	66	67	67	68	68				
62	64	64	64	65	65	65	65	66	66	66	67	67	67	68	68	69	69			
63	65	65	65	65	66	66	66	66	67	67	67	68	68	68	69	69	70	70		
64	66	66	66	66	66	67	67	67	67	68	68	68	69	69	69	70	70			
65	66	67	67	67	67	67	68	68	68	68	69	69	69	70	70	70				
66	67	67	68	68	68	68	68	69	69	69	69	70	70	70						
67	68	68	68	69	69	69	69	69	70	70	70	70								
68	69	69	69	69	70	70	70	70	70											
69	70	70	70	70	70															
70																				

Conclusiones.

Contar con un modelo matemático que logra ajustarse adecuadamente a una tabla de mortalidad permite realizar pronósticos sobre las tendencias de las tablas, por ejemplo dentro del sector asegurador es de vital importancia conocer que los supuestos que se usan para la construcción de sus productos esté acorde a la realidad de sus indicadores, esta metodología permite de forma eficiente conocer el comportamiento de su población asegurada.

Sin embargo las aplicaciones de este modelo van más de allá de describir una curva, en ésta Tesis se mostró una de las aplicaciones para el Seguro de Vida Mancomunado, a través de los parámetros que se encontraron con la función Gompertz-Makeham se construyó una tabla de edades equivalentes que permite conocer la edad con la que se pueden sustituir dos vidas, en el presente trabajo se mostró la aplicación para dos vidas sin embargo la misma metodología es valida para conjuntos de más de dos vidas, es importante destacar que el contar con tablas específicas de acuerdo con el tipo de seguro (Temporal, Ordinario de vida o Dotal) y plazo nos ayudará a medir con precisión el tipo de riesgo.

Cabe señalar que la mayoría de las compañías aseguradoras cuentan únicamente con una tabla de edades equivalentes para toda la gama de sus productos por lo que una ventaja comercial en un mercado tan competido es tener tablas diversificadas por tipo de riesgo, además de permitirnos ser competitivos con otros países.

Esto es básicamente porque en un seguro temporal el riesgo que se está cubriendo es el fallecimiento dentro de un período, pero en un seguro dotal se cubren dos eventos: la sobrevivencia y el fallecimiento. Con lo anterior se puede inferir que la edad equivalente resultante es mayor en un seguro dotal que en un seguro temporal.

Otras de las líneas de investigación dentro del campo de la demografía es estimar:

- La diferencia de mortalidad entre hombres y mujeres
- La influencia del tabaquismo en el deterioro de la salud
- Fecundidad
- Nupcialidad

Para poder llevar a cabo proyecciones poblacionales acordes a la realidad.

Anexo. Estudio de la tabla de mortalidad México 2000.

I. Introducción

En respuesta a la necesidad de actualizar las bases demográficas que se utilizan en el sector para la tarifación de planes del seguro de Vida Individual, la Asociación Mexicana de Actuarios y la Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros se han dado a la tarea de realizar un análisis de la siniestralidad del ramo. El objetivo es generar tablas de mortalidad que describan con exactitud el comportamiento de este fenómeno en la población asegurada de nuestro país.

Para llevar a cabo los estudios antes mencionados se formó el Comité de Mortalidad A.M.A.-A.M.I.S., grupo de trabajo cuyo objetivo era establecer, con base en la información disponible de las aseguradoras, las características que debiera tener el estudio, para posteriormente proponerlo al resto de las compañías. El resultado fue el construir una tabla con las siguientes características:

> ***Por monto de Suma Asegurada y número de asegurados*** para dar un peso adecuado a la siniestralidad, ya que la mortalidad puede variar sustancialmente por rango de suma asegurada, además de que carteras muy antiguas con sumas aseguradas muy pequeñas pueden influir en los resultados.
>
> ***Separada por Sexo*** porque, aunque se sabe que las mujeres tienen una menor siniestralidad, generalmente se asume la misma como una razón constante de 3 años menos, cuando en la realidad las curvas de siniestralidad entre hombres y mujeres son muy diferentes.
>
> ***Incluyendo los siniestros ocurridos y no reportados,*** de acuerdo al reporte de las compañías a septiembre de 1999, para dar mayor solidez a los datos utilizados.
>
> ***Tabla Última. Sin considerar los cuatro primeros años de experiencia*** en lo referente a expuestos y siniestros, con objeto de reducir las diferencias que existen entre las compañías en sus reglas de selección, sus distintos requisitos de exámenes médicos, los efectos de las cláusulas de disputabilidad y suicidio. Es decir, eliminar la influencia de la selección en los primeros años del seguro.
>
> ***Tabla Selecta. Analizando los cuatro primeros años de experiencia*** en lo referente a expuestos y siniestros, con el propósito de reflejar los efectos de la selección en los primeros años de vigencia de las pólizas.
>
> ***Sin incluir saldos y prorrogados.*** Se excluyeron del estudio base, ya que se espera tengan una mortalidad diferente a las de las pólizas en periodo de pago de primas. Posteriormente se considera adecuado evaluar el incluir prorrogados automáticos, es decir, los que no son a petición del asegurado.
>
> ***Excluir las pólizas en vigor que ya hicieron uso del Beneficio de Exención de Pago de Primas (inválidos)*** las cuales tienen una mortalidad esperada más alta.
>
> ***Sin incluir riesgos subnormales,*** por tanto se eliminaron tanto de expuestos como de siniestros los que tenían calificación superior al 150%.

Por otro lado, se acordó sería interesante evaluar la mortalidad con los siguientes cortes:

- **Saldos y prorrogados.**
- **Pólizas con o sin examen.**
- **Fumadores y no fumadores.**
- **Planes Temporales y otros planes.**
- **Las principales causas de muerte.**
- **Muertes Accidentales, con o sin el Beneficio de Doble Indemnización.**

Este estudio sólo se enfoca a analizar la mortalidad de seguros de vida individual para pólizas en período de pago de primas, a través de una tabla última y del análisis de la diferencia en mortalidad durante los primeros 4 años de la póliza. En estudios subsecuentes, se tratará de abarcar cada vez mas cortes de los mencionados anteriormente.

II. Construcción de la Base de Datos

El comité enfocó su trabajo a la definición de la estructura de la base de datos y el manual con las instrucciones generales para el reporte de las mismas. Se precisó la información que se pediría a las compañías, tomando como base un documento proporcionado por la Society of Actuaries, el cual fue traducido y adaptado a las características de las pólizas que se comercializan en el mercado nacional.

En este proceso de traducción y adaptación del documento se encontraron dos diferencias significativas en los productos:

1. Las columnas de conversión que incluyen a los seguros que en su inicio fueron temporales y que cambiaron, sin requisitos de asegurabilidad, a planes permanentes, ya que en México esta cláusula no existe en la mayoría de las compañías.

2. Se añadió el Beneficio Adicional de pago de la Suma Asegurada por invalidez, ya que en Estados Unidos no se expide este beneficio.

La estructura de la base de batos anteriormente mencionada, fue enviada a todas las compañías de seguros del mercado mexicano, invitándolas a participar en el estudio.

III. Información

Las compañías que contribuyeron con información para el estudio fueron:

AIG México Seguros Interamericana, S. A. de C. V.

Aseguradora Hidalgo, S. A.

Aseguradora Interacciones, S. A.

Grupo Nacional Provincial, S.A.

Seguros Atlas, S. A.

Seguros Comercial América, S.A. de C. V.

Seguros Génesis, S. A.

Seguros La Territorial, S. A.

Seguros Monterrey New York Life, S. A.

Zurich Vida, Compañía de Seguros

Para el caso de hombres el total de pólizas expuestas fue de 1,700,905 con una suma asegurada de $183,877,187.895. Por su parte el total de pólizas siniestradas fue de 4,170 y en suma asegurada reclamada $521,295,088.

Para mujeres se registraron sólo 695,733 pólizas expuestas, el 40% de las de los hombres y un monto asegurado de $56,562,975,284 que representó sólo el 30% del monto asegurado para hombres. El total de pólizas siniestradas fueron 776, con un monto de $70,410,317.

Con esto se logró conjuntar información equivalente a más del 85% del mercado, lo que da confiabilidad a los resultados.

El monto promedio asegurado para mujeres fue de $81,300 contra $108,105 de los hombres.

En el caso de los hombres, el total de terminaciones fue de 154,193, con un monto de $25,703,320,499. Para las mujeres se presentaron 31,429 con un monto de $4,038,686,997.

IV. Tabla Última

A) Metodología

El procedimiento que se siguió para obtener los datos utilizables fue el siguiente:

1) Se trabajó por separado cada año de observación por compañía.
2) Se eliminaron las pólizas que no se utilizarían de acuerdo a su antigüedad, subnormalidad o estado de saldado o prorrogado.
3) Se agruparon por edad alcanzada a su último aniversario y se filtraron por sexo.
4) De esta forma se concentró el número de pólizas y la suma asegurada por edad alcanzada, tanto de expuestos como de siniestros en cada año de observación.

Expuestos

Para determinar los expuestos se sumaron las edades alcanzadas iguales para los años de observación de 1995, 1996 y 1997, agrupándolos posteriormente en edades quinquenales para obtener los expuestos de las edades "pivotales".

$$E_x = \sum_i E_x^i$$ *donde i = 1995, 1996 y 1997*, *x = 0,1,2,...,100*

$$E_{\bar{x}} = \sum_{t=0}^{4} E_{x+t}$$ *donde x = 0,5,10,15,...,95*, $\bar{x} = x + 2$

Siniestros

Los siniestros por edad alcanzada se calcularon con su edad al último aniversario, agrupando los fallecimientos a su edad alcanzada sumándoles los fallecimientos de una edad más, los que ocurrieron después del aniversario de la póliza, ya que correspondían a los expuestos de la misma edad.

$\theta_x = \sum_i \left(\theta_x^i + \theta_{x+1}^{'i}\right)$	*donde i = 1995, 1996 y 1997* *x = 0,1,2,...,100*
$\theta_{\bar{x}} = \sum_{t=0}^{4} \theta_{x+t}$	donde x = 0,5,10,15,...,95 $\bar{x} = x + 2$

Entradas y Salidas

Por lo que respecta a las salidas y entradas de expuestos por causas distintas a su fallecimiento, se utilizaron las siguientes formulas:

$V_x = \sum_i V_x^i - V_{x+1}^{i+1}$	*donde i = 1995, 1996 y 1997* *i+1 = 1996,1997 y 1998*
$V_x = \sum_{t=0}^{4} V_{x+t}$	donde x = 0,5,10,15,...,95 $\bar{x} = x + 2$

Probabilidades

De esta forma se obtuvieron las probabilidades siguientes:

$q_{\bar{x}}^{(1)} = \dfrac{\theta_{\bar{x}}}{E_{\bar{x}}}$
$q_{\bar{x}}^{(2)} = \dfrac{V_{\bar{x}}}{E_{\bar{x}}}$
$q_{\bar{x}}^{\prime(1)} = 1-\left(1-q_{\bar{x}}^{(1)}-q_{\bar{x}}^{(2)}\right)^{\frac{q_{\bar{x}}^{(1)}}{q_{\bar{x}}^{(1)}+q_{\bar{x}}^{(2)}}}$

Se prefirió utilizar esta fórmula que generalmente se emplea en tablas de dos decrementos, ya que de esta forma se está suponiendo distribución uniforme de siniestros durante el año o fuerza de mortalidad constante, en vez de la forma tradicional que consiste en calcular la tasa central con el promedio de expuestos para después aproximarla a la tasa anual, porque esta última utiliza dos aproximaciones que difícilmente se cumplen en la realidad.

Interpolación

Por lo que respecta a los hombres se interpolaron los resultados quinquenales, desde la edad 10 hasta los 79 años, por la fórmula osculatoria de Jenkins a la tercera diferencia, en la siguiente forma:

$q_{x+s} = sq_{\bar{x}+1} + \dfrac{s(s^2-1)}{6}\Delta^2 q_{\bar{x}+1} + (1+s)q_{\bar{x}} + \dfrac{(1-s)\left[(1-s)^2-1\right]\Delta^2 q_{\bar{x}}}{6}$
donde s = 1,2,3,4

Para las edades menores de 10 años y mayores de 79 se utilizó la formula de Makeham, determinando los parámetros con las siguientes tres ecuaciones:

$\log_t P_x = c^x(c^t-1)\log g$
$\log_t P_{x+t} = c^{x+t}(c^t-1)\log g$
$\log_t P_{x+2t} = c^{x+2t}(c^t-1)\log g$

Para las mujeres se desecharon los puntos pivotales que no tenían una secuencia esperada y toda la tabla se interpoló con la fórmula de Makeham separándola en tres secciones distintas. Algo similar ha ocurrido con las tablas de mortalidad para mujeres en otros países, porque el número de pólizas y montos asegurados todavía es pequeño, aunque la ventaja es que la mortalidad siempre se ha observado creciente a partir de los 10 ó 12 años de edad.

En todas las interpolaciones efectuadas con la formula de Makeham se utilizaron los intervalos t y las edades tales que generan una curva similar a la que se utilizó para determinar la tabla de mortalidad denominada CSO 80 básica, la cual fue generada en Estados Unidos con una cantidad de datos 10 veces mayor de los que tuvimos en este trabajo. Sin embargo, en hombres de 10 a 79 años los resultados son fielmente los obtenidos de la experiencia de los datos, los cuales pueden constatarse al comparar las probabilidades obtenidas con las encontradas en forma quincenal.

Graduación y Recargos.

Como ya se mencionó estas tablas no incluyen recargo alguno, pues consideramos que cada compañía debe determinar la desviación posible de sus valores esperados de acuerdo al plan, antigüedad, márgenes de solvencia legales, etc. De esta forma, cuando se venda un plan individual de pensiones o un seguro dotal posiblemente el recargo a la probabilidad de muerte sea negativo y en planes flexibles los cargos por mortalidad garantizados forman parte de los sobrantes de la compañía.

Tampoco se graduaron los resultados, excepto para las edades en que se utilizó la fórmula de Makeham, cuya aplicación proporciona una graduación natural de una fórmula exponencial, porque no consideramos que esta clase de graduaciones sea importante, ya que toda graduación supone un distanciamiento a los valores reales que en este caso son más importantes que su presentación. Sin embargo, debe reconocerse que la interpolación obsculatoria de Jenkins ya proporciona cierta graduación. Es decir, se sacrificó cualquier suavidad en los datos para las probabilidades de muerte por edad fueran los más fieles posibles, de acuerdo a la experiencia obtenida.

B) Resultados

Hombres

La probabilidad de muerte en la tabla para hombres muestra un decremento desde 0.6. al millar en edad 1, hasta 0.35 en edad 12, después de lo cual comienza a crecer duplicándose a la edad de 17 años(0.73), continuando con un crecimiento más suave a partir de los 18 años hasta los 22(0.82) para volver a disminuir a partir de los 23 años de edad hasta los 27 años donde llega a 0.68 al millar para después crecer cada año para todas las edades superiores, al principio en forma suave y después de los 50 años su crecimiento es más pronunciado de tal modo que a los 75 años de edad es 100 veces más alta que a los 13 años y, a su vez, a los 98 años es 10 veces mayor que a los 75 años. La mortalidad en la edad de 0 a 1 fue estimada, tomando en cuenta la mortalidad infantil de la población en México y los resultados encontrados en otras tablas. Para efectos prácticos la mortalidad se cierra en uno a la edad de 100 años, lo cual es sólo para simplificar la tabla, ya que, como se puede observar, la tendencia de la mortalidad muestra que es inferior a ese valor. Es decir, para efectos del seguro de vida las probabilidades expresadas en las edades altas son poco importantes al calcular su densidad en valor presente

HOMBRES (1000 X qx)

Edad	MEX 2000	Edad	MEX 2000	Edad	MEX 2000	Edad	MEX 2000
0	11.327	26	0.720	52	4.526	78	60.737
1	0.600	27	0.680	53	5.090	79	67.047
2	0.540	28	0.764	54	5.833	80	74.125
3	0.490	29	0.815	55	6.701	81	82.056
4	0.460	30	0.864	56	7.628	82	90.934
5	0.430	31	0.939	57	8.589	83	100.861
6	0.410	32	1.070	58	10.506	84	111.946
7	0.400	33	1.084	59	12.379	85	124.304
8	0.390	34	1.098	60	14.205	86	138.059
9	0.380	35	1.112	61	15.980	87	153.339
10	0.370	36	1.126	62	17.700	88	170.267
11	0.370	37	1.140	63	18.846	89	189.003
12	0.350	38	1.327	64	20.432	90	209.651
13	0.426	39	1.508	65	21.955	91	232.347
14	0.518	40	1.693	66	22.914	92	257.204
15	0.598	41	1.893	67	24.669	93	284.320
16	0.668	42	2.120	68	26.020	94	313.764
17	0.730	43	2.255	69	27.337	95	345.574
18	0.754	44	2.383	70	28.721	96	379.741
19	0.757	45	2.543	71	30.268	97	416.199
20	0.757	46	2.775	72	32.077	98	454.816
21	0.772	47	3.120	73	37.102	99	495.379
22	0.820	48	3.178	74	41.705	100	1,000.000
23	0.763	49	3.255	75	45.663		
24	0.741	50	3.451	76	50.113		
25	0.734	51	3.865	77	55.117		

Estos datos relejan una probabilidad de muerte global de 2.570 por pólizas y 2.653 por montos, siendo mayor por montos en .083 al millar, equivalente al 3% mayor en monto.

Mujeres

Por lo que respecta a tabla de mujeres, las probabilidades de muerte son casi la mitad de la de hombres en edad 1 y en edad 16. La siniestralidad es siempre creciente después de la primera edad, llegando a sus valores similares a los de los hombres en las últimas edades de la tabla.

MUJERES (1000 X qx)

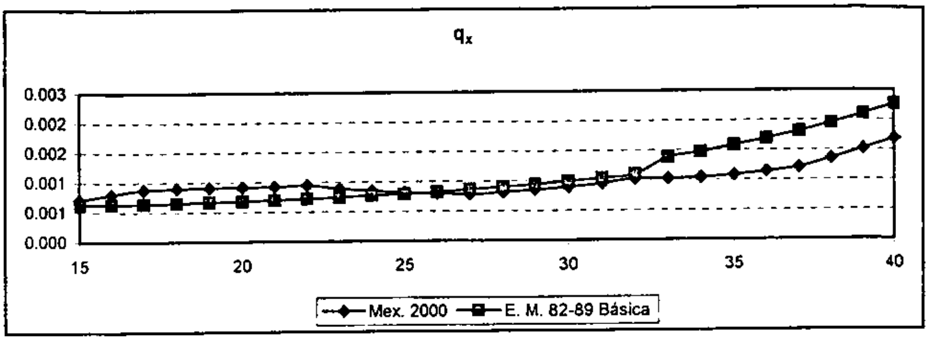
Edad	MEX 2000	Edad	MEX 2000	Edad	MEX 2000	Edad	MEX 2000
0	7.831	26	0.542	52	4.009	78	47.502
1	0.330	27	0.568	53	4.390	79	52.916
2	0.332	28	0.596	54	4.803	80	59.014
3	0.334	29	0.628	55	5.211	81	65.208
4	0.336	30	0.663	56	5.628	82	72.845
5	0.338	31	0.703	57	6.004	83	83.968
6	0.341	32	0.747	58	6.461	84	93.826
7	0.344	33	0.795	59	6.932	85	104.498
8	0.348	34	0.850	60	7.398	86	116.042
9	0.351	35	0.910	61	7.888	87	128.321
10	0.355	36	0.977	62	8.369	88	140.999
11	0.360	37	1.052	63	9.445	89	155.553
12	0.365	38	1.136	64	10.558	90	169.833
13	0.371	39	1.228	65	11.714	91	184.991
14	0.377	40	1.331	66	12.954	92	201.454
15	0.385	41	1.446	67	13.901	93	220.103
16	0.392	42	1.574	68	16.214	94	241.212
17	0.401	43	1.716	69	18.698	95	268.568
18	0.411	44	1.874	70	21.132	96	305.424
19	0.422	45	2.050	71	23.466	97	263.280
20	0.434	46	2.246	72	25.797	98	466.234
21	0.448	47	2.463	73	28.684	99	650.743
22	0.463	48	2.706	74	31.768	100	1,000.000
23	0.479	49	2.975	75	34.752		
24	0.498	50	3.275	76	37.836		
25	0.519	51	3.609	77	42.005		

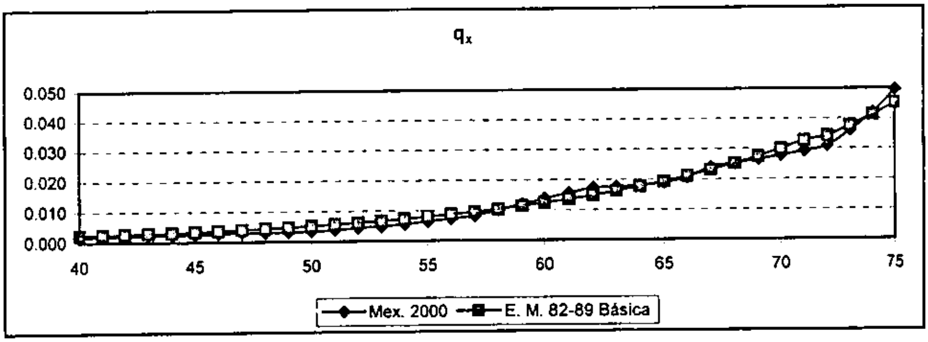
Nuevamente, la probabilidad de muerte global en pólizas fue inferior a la de montos, ya que en el primer caso fue de 1.141 al millar y en el segundo de 1.202 al millar, representando el 0.061 la diferencia, equivalente al 5% mayor en monto.

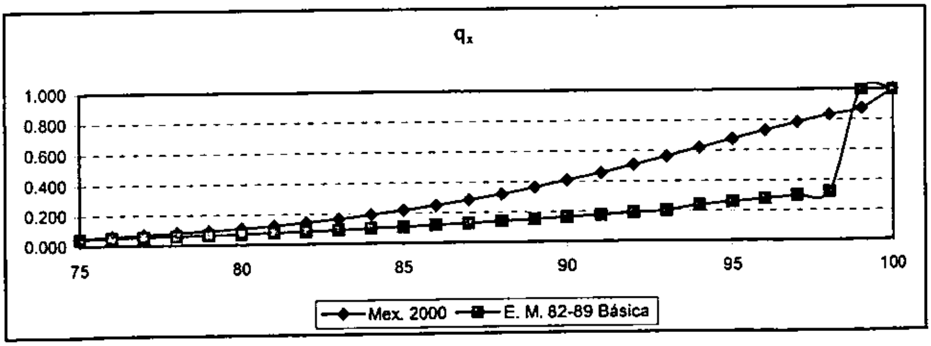
C) Comparativo con la Tabla de Experiencia Mexicana 82-89 Básica

En los gráficos siguientes se aprecia que la Tabla de Hombres México 2000 no es una función creciente, lo cual es un comportamiento habitual, según estudios recientes del fenómeno realizados en otros países.

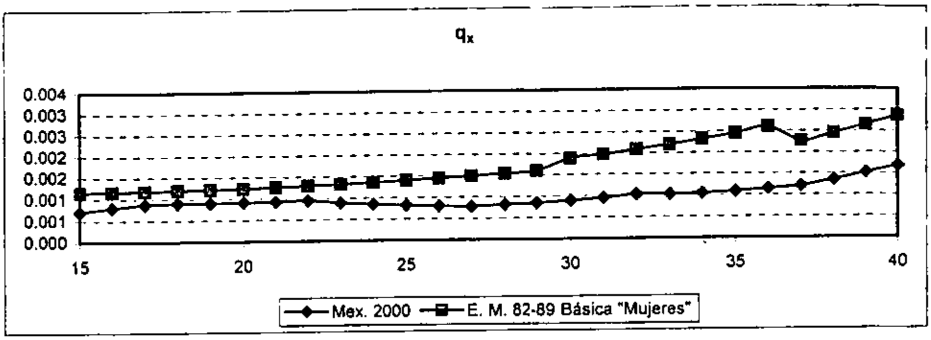
Por otro lado, podemos apreciar que la nueva tabla es mayor de 16 a 23 años, menor de 24 a 57 años, mayor de 58 a 68 años, menor de 69 a 73 y de 74 en adelante es más alta.

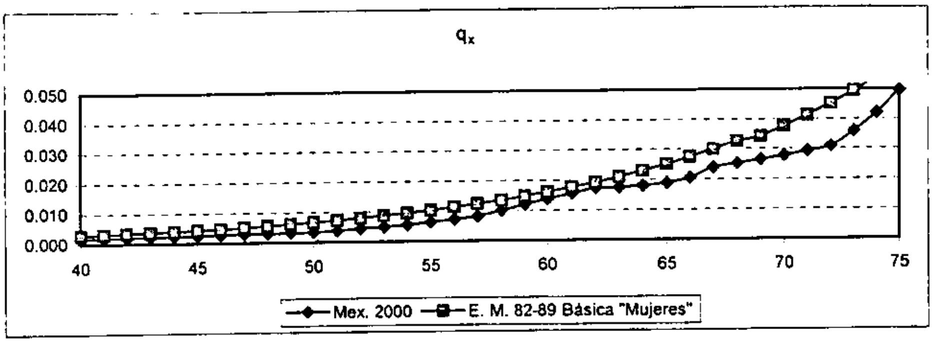






En el caso de las mujeres consideramos importantes comparar la tabla resultante con la tabla que se usaba en México, la Tabla Experiencia Mexicana Básica 82-89 disminuida tres años para cada edad. Como resultado, se observó que los porcentajes obtenidos en la Tabla México 2000 son menores, hasta en un 39%, de 15 hasta 74 años, de 75 en adelante el mayor.





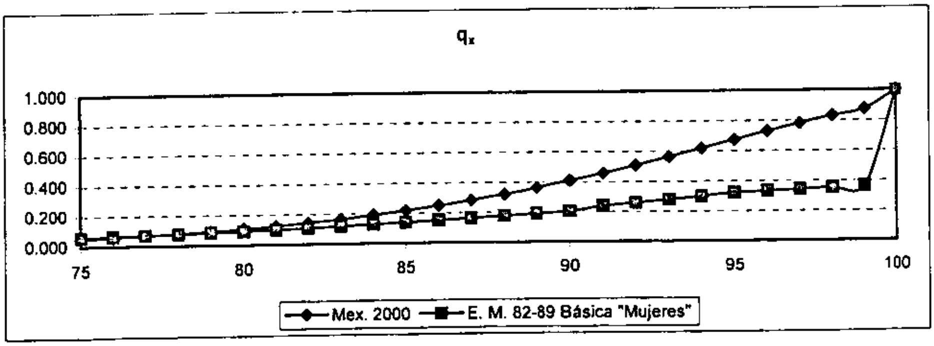


Tabla Selecta

Esta tabla se construyó con las mismas bases de datos con las que se obtuvieron los factores de siniestralidad en la tabla última, con las consideraciones siguientes:

A) Metodología

El procedimiento que se siguió para obtener los datos utilizables fue el siguiente:

1. Se trabajaron por separado los datos de cada año de observación por compañía.

2. Se eliminaron las pólizas que no se utilizarían de acuerdo a su antigüedad, grado de subnormalidad o estado de saldado o prorrogado. Se agruparon por edad alcanzada a su último aniversario y se filtraron por sexo.

3. De esta forma se concentró el número de pólizas y la suma asegurada por edad alcanzada, tanto de expuestos como de siniestros en cada año de observación.

Considerando la notación para expuestos y siniestros que se utilizó para la elaboración de la tabla última, las probabilidades de muerte se calcularon de la siguiente forma:

$q_{[x]+t} = \dfrac{\theta_{[x]+t}}{E_{[x]+t}}$	*donde t = 1,2,3,4*

Esta probabilidad se calculó por cada 10 edades, con la siguiente fórmula:

$$\bar{q}_{[x]+t} = \frac{\sum_{k=0}^{9} \theta_{[x]+t+k}}{\sum_{k=0}^{9} E_{[x]+t+k}}$$

A su vez el porcentaje correspondiente se determinó

$$\frac{\bar{q}_{[x]+t}}{q_{x+t}} = (P)_{[x]+t}$$

donde q_{x+t} es la probabilidad de morir a la edad central alcanzada en la tabla de mortalidad México 2000, tanto para hombres como para mujeres.

B) Resultados

Se tomó como base la metodología para el cálculo de la tabla selecta CSO 80.

Hombres

Edades	1	2	3	4	5
20-29	**70%**	**86%**	90%	**94%**	**100%**
30-39	**73%**	**84%**	90%	**99%**	**100%**
40-49	**56%**	**68%**	73%	86%	**100%**
50-59	51%	**62%**	**65%**	**84%**	**100%**
60-69	45%	49%	**58%**	**59%**	**100%**

Mujeres

Edades	1	2	3	4	5
20-29	60%	**67%**	**67%**	71%	**100%**
30-39	56%	**60%**	65%	69%	**100%**
40-49	**54%**	**55%**	**63%**	67%	**100%**
50-59	46%	**50%**	**53%**	65%	**100%**
60-69	**37%**	**40%**	50%	**61%**	**100%**

Datos Obtenidos
Datos Ajustados

C) Comparativo entre Compañías

Las compañías que aportaron los factores de selección para realizar este comparativo representan aproximadamente el 60% del volumen de primas de vida individual a diciembre de 1998. Se puede observar, por un lado, que los factores de selección utilizados por las aseguradoras no son similares entre sí y que sólo una de ellas (la compañía D) utiliza porcentajes semejantes a los que se presentaron anteriormente, lo que evidencia la necesidad de realizar estudios frecuentes para precisar el comportamiento de la mortalidad en este tipo de productos.

Año	Mex 2000*	Base E.M. 82-89			
		A	B	D*	E
1	70%-45%	65%	50%	75%-48%	80%
2	86%-49%	65%	65%	80%-52%	80%
3	90%-58%	65%	75%	85%-55%	85%
4	94%-59%	65%	85%	90%-60%	90%
5	100%	65%	90%	95%-65%	90%
6	100%	65%	95%	95%-70%	100%
7-+	100%	65%	100%	95%-70%	100%

*Depende de la Edad

V. Conclusiones

Los resultados obtenidos nos aportan datos acerca de la mortalidad por edad, por género y factores de selección.

A pesar de que en realidad sólo se contó con tres años de expuestos 1996, 1997 y 1998, los datos de hombres fueron lo suficientemente correctos para generar probabilidades de muerte razonables en sus cifras y curvas de mortalidad por edades, similares a las Tablas modernas, demostrándose, en el caso de la Tabla Última que la mortalidad en hombres está muy lejos de ser creciente después de los 12 años de edad.

Al separar la mortalidad por sexos se comprobó que las aproximaciones para estimar la mortalidad de las mujeres, reduciendo tres años, son incorrectas en la mayoría de las edades. Además, se puede observar que la nueva Tabla Última para mujeres es menor en un 21% en promedio, que la mortalidad de la E.M. 82-89 disminuida en tres años.

Ya se esperaba que hubiera menos mujeres aseguradas que hombres, pero lo que se observó además que las mujeres, en promedio, se aseguran por sumas aseguradas inferiores a las de los hombres, no obstante que las necesidades asegurables podrían ser similares.

Es obvio y al mismo tiempo evidente, que la mortalidad de la población asegurada en México ha tenido una importante evolución en los últimos 30 años. Por esta razón es indispensable analizarla y estudiarla constantemente. Por tanto, se propone que, cada año, se continúe efectuando un trabajo similar agregando un año más de expuestos y siniestros, con objeto de conocer la tendencia de la mortalidad, sin tener que efectuar cada 10 años un nuevo estudio que requiera de este gran esfuerzo desarrollado. De esta forma, se dará mayor solidez y respaldo a los resultados y se podrán reflejar estos efectos en los costos que se trasladan a los asegurados.

Para lograr esto es fundamental contar con información adecuada, confiable y oportuna, en la cual el papel de las aseguradoras es fundamental, En lo particular, es muy importante establecer con mayor precisión algunos factores que tradicionalmente hemos siempre estimado:

- La diferencia de mortalidad entre mujeres y hombres.
- La influencia del tabaquismo en el deterioro de la salud.
- Los efectos de la selección durante los primeros años de vigencia de las pólizas.
- La importancia del nivel de suma asegurada.
- Los efectos de los accidentes como causa de muerte y principales causas de los mismos.
- La mortalidad de saldados y prorrogados.
- Mortalidad por tipo de plan.

Finalmente, nuestro deseo es que este trabajo sea útil para el progreso del seguro en México, puesto que es básico el conocimiento de la mortalidad en el precio y los valores de los productos para que las empresas de seguros tengan tarifas competitivas con otros países y para el desarrollo, cada vez más importante, del seguro en nuestro país.

Bibliografía.

1. Livi-Bacci Massimo, Introducción a la Demografía, Editorial Ariel, España, 1993.

2. Pfeffer Irving, Clock David, Perspectivas del Seguro, Editorial Mapfre, España, 1974.

3. González Galé José, Elementos de Cálculo Actuarial, Academia Nacional de Ciencias Económicas.

4. Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros, Asociación Mexicana de Actuarios, Tabla de Mortalidad México 2000, AMIS y AMA, México, 2000.

5. Pérez Tejada López Alonso F., Proyecto de Texto para Cálculo Actuarial, Tesis,1985.

6. Ortega Antonio, Tablas de Mortalidad, Centro Latinoamericano de Demografía, Costa Rica, 1982.

7. Burden L. Richard, Faires J. Douglas, Análisis Numérico, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1985.

8. Canavos George, Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos, Editorial McGraw-Hill, España, 1988.

9. Mina Valdés, Alejandro, Funciones de sobrevivencia empleadas en el Análisis Demográfico, 2000.

10. Maclean Joseph, El Seguro de Vida, Editorial Continental, México, 1982.

11. Jordan Chester Wallace, Life Contingencies, The Society of Actuaties, 1975.