66

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Teorema del Equilibrio de Nash y Teoría de la Negociación

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

A C T U A R I A

300018

P R E S E N T A :

ría rónica

Ma. Teresa V. Martínez Palacios

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Fernando Brambila Paz

2001

VNIVERDAD NACIONAL AVPNºMA DE MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"TEOREMA DEL EQUILIBRIO DE NASH Y TEORIA DE LA NEGOCIACION".

realizado por MARIA TERESA VERONICA MARTINEZ PALACIOS

con número de cuenta 8824800-2, pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR.	FERNANDO BRAMBILA PAZ	F. Bramb
Propietario	ACT.	DAVID LOPEZ SERVIN	
Propietario	M.en C.	VIRGINIA ABRIN BATULE	Virginia Abrín Batule
Suplente	DRA.	FLOR DE MARIA ACEFF SANCHEZ	
Suplente	ACT.	JOSE GUADALUPE VAZQUEZ VAZQUEZ	

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M.en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL

AGRADECIMIENTOS.

Al Universo, a su luz, a su sonido, a sus colores y a su silencio, REVERENCIALMENTE GRACIAS.

Agradezco: A mi mamá Remedios Lucila Palacios Gómez con todo mi amor y admiración. Por tu amor, tu ayuda y tu ejemplo; por ser mi incondicional GRACIAS SIEMPRE.
A mi papá Mario Alfonso Martínez Gariel. Por tu gran amor, apoyo y ayuda de siempre.
A mi Maestro y Hermano Lorenzo Vaquero, por guiarme, por sus valiosísimas enseñanzas, gran amor y ejemplo; por estudiar conmigo, GRACIAS POR SIEMPRE con toda mi admiración y amor.
A mi hermana Ma. del Socorro, por todo lo que me has enseñado y tu gran amor de siempre.
A mi hermana Vicky. Mi amor, por tu profundo amor hacia mi, por tu ayuda y disposición incondicionales para conmigo.
A mis sobrinos David y Vanesa por su amor.
A mi Maru por darme siempre tus manos y por tu gran amor.
A mi Ali por tu gran amor.
A todos mis hermanos y a los maestros del grupo QUINAME.
A mis amigos: Toño, Sandrita, Adriana, Cris y Seve por su ayuda y apoyo.

También agradezco al Dr. Fernando Brambila Paz, por dirigirme ésta tesis, por su gran apoyo y ayuda en todo, por tantas y tan oportunas enseñanzas. Por sus tan valiosos consejos, GRACIAS SIEMPRE con mi admiración y afecto.
A la Dra. Flor de María Aceff Sánchez su fina atención de corregir ésta tesis tan detalladamente. A los sinodales por revisión y observaciones. Y al Maestro Sergio Hernández sus observaciones y ayuda.

Esta tesis fue realizada con el apoyo de los proyectos:
"Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza", del Dr. Fernando Brambila Paz, CONACYT-SMM.
"Ecuaciones Diferenciales y Física Matemática"; del Dr. Ricardo Weder Zaninovich, PAPIT IN105799.
"Teoría Espectral de Operadores y Problemas Inversos"; del Dr. Rafael R. Del Río Castillo, CONACyT 27487-E.

CONTENIDO

Biografía de John Forbes Nash Jr.

JOHN NASH, "UNA MARAVILLOSA MENTE"

John Forbes Nash Jr. nació el 13 de junio de 1928 en Bluefield, Virginia Occidental., E. U.. Estudió en Carnegie Institute of Tecnology (sus primeros escritos los publicó con su padre a la edad de 17 años) donde obtuvo el grado de licenciatura y maestría en Matemáticas en 1948. En 1950 obtuvo el grado de doctor en la Universidad de Princeton con su Tesis "Juegos no Cooperativos", y su teorema de equilibrio en negociaciones, la cual inauguró una lenta revolución en campos diversos como: economía política, ciencias políticas y evolución de la Biología.

Durante los siguientes nueve años en una asombrosa oleada de actividad matemática, el buscó, encontró y resolvió los problemas más importantes y más difíciles de Geometría y Análisis; su trabajo en la teoría de Variedades Algebraicas, Geometría Riemanniana y Ecuaciones Diferenciales parabólicas e hiperbólicas fue extremadamente significativo en el desarrollo de estos temas. Desde 1951 Nash obtuvo una posición en MIT. El fue descrito en 1958 como "el matemático joven más prometedor en el mundo".

Desgraciadamente en 1959 fue hospitalizado con un diagnóstico de esquizofrenia, por lo que renunció a su posición. Durante cerca de 30 años vivió dentro de él aunque tuvo temporadas de aparente mejoría y es hasta 1990 que Nash presenta una gran recuperación de su padecimiento mental que deja a los psiquiatras sin respuesta. Es en este momento que regresa a las matemáticas y acepta un puesto en Princeton.

En poco tiempo la importancia del trabajo de Nash fue reconocido con muchos honores: El premio VON NEUMANN, miembro en la Sociedad Econométrica y en la Academia Americana de Artes y Ciencias, miembro en la Academia Nacional de Ciencias de Estados Unidos, terminando con el Premio Nobel en 1994.

Llama la atención que el premio Nobel se lo dan básicamente por su tesis doctoral y un artículo que escribió 45 años antes. Su vida y su obra han sido tan sorprendentes, que se empezaron a escribir varios libros, algunos sobre su vida y otros sobre su obra.

Por ejemplo Sylvia Nasar logra un Best seller narrando esta historia basada en entrevistas con amigos, familiares, conocidos, y colegas. También describe detalladamente las deliberaciones, por la Medalla Fields 1958, en donde Nash fue un candidato, y las deliberaciones para el Premio Nobel 1994 en Ciencias Económicas, también da una basta descripción de principio a fin de los lugares y personas quienes jugaron un papel importante en la vida de Nash.

En el libro encontramos información fascinante acerca de la historia de: Carnegie Tech, Princeton, Rand Corporation, MIT, el Instituto Courant y también información acerca de bien conocidas personalidades matemáticas y algunas no tan bien conocidas.

La primera discusión dentro de muchos interesantes caminos distintos: su descripción de MIT se entreteje con una discusión de la época de McCarthy, mientras su descripción de la Rand Corporation y de Von Neumann inicia hacia una discusión de la relación de la teoría de juegos y la política de la guerra fría.

John Nash, tiene una interesante personalidad que conjuga genio y esquizofrenia. Su esposa quien lo cuidó durante 30 años jugó un papel principal en su vida y en su restablecimiento.

TRABAJO CIENTIFICO DE NASH

Los matemáticos puros tienden a juzgar cualquier trabajo en las ciencias Matemáticas basándose en la profundidad matemática, las nuevas ideas matemáticas, nuevos métodos matemáticos y en que problemas planteados con anterioridad resuelve.

Visto de esta manera, el Teorema de equilibrio de Nash 1950 que le da el Premio Nobel, es para los matemáticos puros solamente un resultado ingenioso y a lo más una sorprendente aplicación de métodos bien conocidos.

Mientras que su trabajo en matemáticas de 1990 al 2000 es mucho más rico e importante si se ve por un matemático puro. Durante estos años él demostró que toda variedad compacta y suave puede ser realizada como un pliego de una variedad real algebraica, probó el problema de inversión C^1-isométrica que es altamente antiintuitivo. Introdujo poderosas y nuevas herramientas para demostrar un problema nuevo más difícil, que es el problema de inversión C^k-isométrico en altas dimensiones, y dio un inicio en los teoremas de continuidad, unicidad y existencia fundamental de ecuaciones diferenciales parciales. (Para una más amplia discusión de este resultado, véase [k1] y [M].)

Sin embargo, cuando las matemáticas son aplicadas hacia otras ramas del conocimiento humano, nosotros tenemos que cuestionarnos: ¿Hacia que extensión el nuevo trabajo incrementará nuestro entendimiento del mundo real? En estas bases, la tesis de Nash, fue muy revolucionaria. (véase [N21], así como [U].) El campo de Teoría de Juegos fue la creación de Von Neumann y fue escrito en colaboración con Morgenstern. (Una participación muy importante en esta teoría es debida a Zermelo en particular en juegos no-cooperativos).

La teoría de juegos de suma-cero para dos personas de Von Neumann y Morgenstern fue extremadamente satisfactoria y ciertamente tuvo aplicación hacia la guerra, así fue ampliamente reconocida por los militares. No obstante, esto tuvo algunas otras aplicaciones. Sus esfuerzos hacia desarrollar una teoría de juegos distinta de cero para *n* personas para usar en teoría económica no fueron realmente muy útiles (Ambos, Nash y Milnor participaron en un estudio experimental de juegos de n-personas [N10]: Nash fue hábil para detectar en gran manera la correlación entre las "soluciones" de Neumann-Morgenstern y el mundo real.)

Nash en su tesis fue el primero en enfatizar la distinción entre juegos cooperativos, como fueron estudiados por Neumann-Morgenstern (a grosso modo esos son juegos en donde los participantes pueden negociar con cualquier otro), y el juego no cooperativo mas sencillo, donde no hay negociación.

En realidad el caso cooperativo puede ser realmente reducido al caso no cooperativo incorporando las posibles formas de cooperación en la estructura formal del juego. Nash hace un empiezo en la teoría de juegos cooperativos en su artículo [N5] The Bargaining Problem, también extendió algunos conceptos mientras el fue estudiante.

Así mismo como una nota en este artículo Nash conjetura que: todo juego cooperativo debe tener un valor que exprese: "la utilidad que tiene para cada jugador la oportunidad de participar en el juego". Tal valor fue construido por Shapley unos años más tarde. Sin embargo, la mayor contribución que lo llevo a su Premio Nobel, fue la teoría no cooperativa. Nash introdujo el concepto fundamental de punto de equilibrio: una colección de estrategias para varios jugadores tal que un jugador no puede mejorar su resultado por estar cambiando solamente su estrategia individual. Por una aplicación del Teorema de Punto Fijo de Brouwer, él demostró que el mínimo punto de equilibrio siempre existe (Para información más detallada ver [OR], [M].) Un concepto parecido al punto de equilibrio de Nash fue introducido por Cournot más de cien años antes.

A través de los años el desarrollo de Nash dio lugar a cambios fundamentales en ciencias económicas y ciencias políticas. Nasar ilustra el impacto del teorema de Nash en dólares y centavos al describir "La más grande subasta" en 1994, cuando la administración del gobierno de los Estados Unidos traspasa unas largas porciones de los espectros electromagnéticos para uso comercial. Un procedimiento circular fue cuidadosamente diseñado por expertos en teoría de juegos de subasta para maximizar ambas cosas, las transferencias y utilidad de las ventas a los respectivos compradores.

El resultado fue altamente prospero dando más de $ 10 000 000 000 a la administración y garantizando una eficiente localización de los espectros electromagnéticos. Para contrastar una adjudicación similar en Nueva Zelanda, fuera de teoría de juegos, fue un desastre en el cual el gobierno adquirió sólo el 15% de estas esperadas ganancias y la longitud de onda no fue eficientemente distribuida.

En Biología también implementa su teoría de equilibrio tomando a las especies como jugadores en el juego de la supervivencia natural, donde una especie no extingue a la otra ya que de ello depende su supervivencia como especie. Basado en el trabajo introducido por Maynard Smith, ideas de teoría de juegos son actualmente aplicadas en la competencia entre diferentes especies o dentro de una especie (véase [MS] y [W] una más precisa forma de esta teoría, divulgada por Dawkins [D1], sostiene mas bien que esa competencia es entre genes individuales.).

También en ciencias económicas aplicó Nash su teorema de equilibrio conduciendo a la economía mundial al equilibrio en el que todos ganan siempre que se produzca más riqueza; equilibrio del cual no todos los contendientes se sienten satisfechos. Ya que en la economía clásica siempre hay un sólo ganador y este es siempre el más fuerte sin importar si se produce mayor o menor riqueza, concepto que evoluciona con el teorema de Nash. Conforme a Binmore (en [W]): de la idea de equilibrio que presenta Nash en su tesis se puede tener una posible interpretación evolutiva, aunque en este tiempo su atención fue enfocada casi enteramente sobre esta interpretación como la única solución viable de razonar cuidadosamente por jugadores idealmente racionales... Afortunadamente... el libro de Maynard Smith "Evolución y la teoría de juegos" dirigido a teóricos en juegos desvió su atención de sus crecientes y elaboradas definiciones de racionalidad.

Después de todo, ni insectos ni bichos razonan sin embargo la teoría de juegos conduce de algún modo a pronosticar su conducta bajo condiciones apropiadas. Simultáneamente la llegada de las ciencias económicas experimentales aporta el hecho de que humanos no están sujetos a grandes movimientos de pensamiento cada uno. Cuando ellos encuentran su camino hacia un equilibrio de un juego, ellos ejecutan de una manera característica el método de ensayo-error.

En todas las aplicaciones un muy importante corolario debe ser enfatizado: A pesar de cómo fue desarrollada la Teoría de Equilibrio por Nash y sus sucesores; Nash describe lo que puede suceder en una situación competitiva: **un equilibrio no es necesariamente del agrado de todos los contendientes.**

En contraste la teoría económica clásica de Adam Smith donde la competencia es libre, conduce a generar mayor riqueza, pero si la competencia no es regulada puede llevar a conflictos sociales, políticos y económicos. Y es por ello que se requiere que la economía guarde un equilibrio, llegar a un punto de equilibrio donde algunos "contendientes" puede no estar de acuerdo, pero por el bien de todos, así debe ser. Esto es, se espera que el gobierno pueda regular los negativos efectos de una competencia desenfrenada y dirigir hacia un mejor resultado global.

También resulta un contraste con la teoría clásica Darwiniana en donde siempre la primera selección natural conduce a un mejoramiento en las especies. Una exagerada versión de selección natural puede algunas veces conducir a una muerte y terminar en una eventual extinción. Por ejemplo suponga que de una familia de pavo reales elegimos siempre el pavo real con la más espléndida cola para la reproducción de la familia; éste proceso debe de llevar a una guerra evolutiva de genes durante la cual las colas crecen progresivamente hasta que los pavo reales se convierten en inadaptados y no pueden escapar de sus depredadores.

Pensando en el conflicto político entre naciones este puede conducir hacia una guerra de castas, lo cual esta mal discernido por cada uno y en casos extremos puede ir hacia una innecesaria guerra. Similarmente en teoría evolutiva en guerra de especies dentro de una especie o entre especies compitiendo acerca de periodos de tiempo geológicos puede ser extremadamente detrimental.

Introducción.

En este trabajo se presenta el Teorema de Equilibrio de Nash y la Teoría de Negociación.

Este teorema esta basado en el teorema de punto fijo de Brouwer y ha sido utilizado en diversas áreas como Economía y Biología, entre otras.

Se ha aplicado en teoría de negociación donde da a todos los negociadores, ganancias en la negociación. A pesar de que esto no es del agrado de todos.

Se presenta también la teoría de negociación desde el enfoque clásico y desde el enfoque matemático, en este último es en donde se aplica el teorema de equilibrio de Nash a la teoría de negociación.

Durante el primer capítulo se analiza de manera introductoria la teoría de negociación clásica, en donde se clasifica a las negociaciones y se dan ejemplos de negociaciones que van desde la más sencilla de dos negociadores por un sólo tema hasta tipos especiales de negociación tales como las fusiones y las negociaciones donde el tiempo juega un papel primordial.

También se habla de las negociaciones en donde es necesaria la intervención de un tercero, ya sea árbitro, mediador o facilitador. Y consecuentemente hablamos de las negociaciones con arbitraje convencional y de última oferta.

En el segundo capítulo se hace una introducción a la Teoría de Gráficas y a la Teoría de Juegos a través del Álgebra Lineal.

En este capítulo se muestra como un problema social, un juego, en problema económico, entre otros, se pueden modelar a través de las gráficas con su respectiva representación matricial.

Y bien que un juego o un evento social puede ser representado matricialmente, entonces es posible a través de teoría de juegos conocer el tipo de juego del que se trata y la ganancia que cada jugador obtiene de jugarlo. Así mismo conocer las estrategias de las que cada jugador dispone y las que lo llevan a ganar el juego.

Se introduce intuitivamente el concepto de equilibrio de Nash con el concepto de punto silla en una matriz.

En el tercer capítulo, en la primera parte consideramos los juegos de dos jugadores estrictamente competitivos de información perfecta y sin jugadas de azar.

Se estudian los juegos desde su representación gráfica y/o su representación estratégica y si hay algún algoritmo mediante el cual este pueda ser ganado.

Se definen el valor de un juego; y el equilibrio de Nash a partir de la forma estratégica de un juego.

En la segunda sección estudiamos los juegos con posibles resultados W y L (es decir, victoria para el jugador I o victoria para el jugador II) solamente y con jugadas de azar. Aquí cada jugador desea maximizar su probabilidad de ganar.

En la sección tres enunciamos los supuestos de racionalidad de Neumann y Morgenstern.

Y en la cuarta y última sección de este capítulo a partir de los supuestos de racionalidad de Neumann y Morgenstern, estudiamos los pagos y las funciones de pagos para los jugadores y la representación del equilibrio de Nash mediante estas funciones. Y también que es posible encontrar equilibrios de Nash por medio de la eliminación sucesiva de estrategias dominadas.

En la primera parte del capítulo cuatro revisamos modelos que intentan estudiar la negociación y describimos los axiomas de Nash.

Axiomas que debe de cumplir una función G:B$\rightarrow\mathbb{R}^2$ para tener una solución de negociación de Nash generalizada para los poderes de negociación α y β.

También se estudia el caso de la solución de negociación de Nash generalizada para los poderes de negociación α y β cuando los jugadores son aversos al riesgo. Y la unicidad del equilibrio.

Trabajamos la teoría de juegos dada en el capítulo tres pero para estrategias mixtas y el como buscar equilibrios geométricamente que es la conexión del teorema del Minimax de Von Neumann y el teorema del hiperplano separador.

En la última sección de este capítulo trabajamos con el equilibrio de Nash que es el tipo de equilibrio más importante en Teoría de Juegos.

Y el Teorema de Equilibrio de Nash mediante el cual Nash demuestra que en un juego finito no es posible que no haya un equilibrio; tal prueba es basada en el Teorema de Punto Fijo de Brouwer.

Capítulo 1.

Teoría de Negociación Clásica

El desarrollo continuo de un mundo tan complejo y estructurado como es el nuestro nos da conocimiento de conflictos que en éste se generan y se crean a cada momento y de las distintas formas y métodos empleados para darles solución.

Algunos de estos métodos y formas son ya establecidos y algunos no, tales como: tradiciones, reglamentos, juzgados, mercados (en las leyes de oferta y demanda) y las negociaciones que las hay establecidas y no establecidas.

Estas formas y métodos han hecho a través de la negociación que los grupos (de dos o más) de individuos entre los cuales se da la disputa se vean favorecidos en sus propios sistemas de trabajo, favoreciendo a la vez al sistema mismo al tener negociaciones más eficientes después o durante la contienda, ya que una negociación en bastantes ocasiones genera otras negociaciones y cada una de ellas resultados.

El favorecimiento incluye habilidades interpersonales y/o intergrupales, capacidades tales como: convencer, ofrecer o regatear, aceptar, ser flexible y decidir en qué momento y cómo actuar.

De otra manera decimos que el favorecimiento depende de el "arte de negociar ".

Por otra parte la solución a un conflicto en una negociación no siempre sucede en el tiempo óptimo y/o no es la favorable para todos; esto hace que demeriten tanto la solución como la negociación. En algunas ocasiones esto sucede por las diversas posturas que toman los negociadores hacia la negociación, y hacia el oponente.

Algunos otros conflictos ni siquiera han sido solucionados por que los negociadores carecen de los elementos necesarios para darles solución.

Para las disputas en las cuales no es posible la negociación entre sus integrantes es necesaria la intervención de un intermediario que como parte de su formación profesional ha desarrollado habilidad en la negociación; y habilidad para analizar el problema y buscar la solución; capacitación que todo ser humano debiéramos de tener para ser empleada en las situaciones que requieren de la negociación para su solución. Y no sólo ser instruidos en el "Arte y Ciencia de la negociación" si no también de la mediación: cuya instrucción se encuentra en el campo de las técnicas analíticas para resolver problemas además de estar en las relaciones interpersonales.

1.1 CARACTERIZACIÓN DE LOS CONFLICTOS

1.- Sobre el número de participantes.

Con base en la teoría de juegos y sus aplicaciones utilicemos la palabra ***juego***, denominando así al análisis estratégico (estructura de la negociación del conflicto) y ***jugadores*** a los adversarios del conflicto.

Como anteriormente mencionamos los integrantes de un conflicto o una disputa son variables en número de acuerdo a la naturaleza del conflicto. Los hay desde los que involucran a un solo participante, a dos adversarios; *por ejemplo*: en una negociación de compra-venta de un bien o servicio de donde el comprador y el vendedor son los adversarios en el juego, tres o mas dando posible origen a formación de grupos dentro de la disputa.

Por otra parte dichos grupos pueden no estar bien definidos. Supóngase el aumento de precio a un bien de primera necesidad y un grupo bastante numeroso de ciudadanos en desacuerdo que pudiendo organizarse como grupo (os) negociador (es) no lo han hecho; puede también formarse un grupo pero que durante las negociaciones surjan diferencias entre los integrantes de éste y se divida en subgrupos que cada uno de ellos demande representatividad en la negociación.

En otras circunstancias de organización bien definidas por los grupos negociadores, podrían éstos decidir a quien invitar a que se les una en la mesa de negociaciones y decidir entre la unión quién debe de negociar, de esta forma parte de la negociación sería ya representativa.

2.- ¿Son monolíticas las partes?

Entendamos por ***monolítico***: integrado de una sola pieza; es decir una parte o un negociador es monolítico si dicha parte en la contienda consta de un sólo miembro y para efectos de toma de decisión no requiere éste de ratificación alguna sobre el acuerdo negociado.

Es común que las partes de una disputa no sean internamente monolíticas y que las piezas que a cada una de estas partes conforman a pesar de tener un mismo fin varíen en sus intereses, esto provoca enfrentamientos internos a negociar en la (s)parte (s) en disputa para llegar a un acuerdo en lo externo.

Por ejemplo: A fin de llevar a cabo una segunda liberación acelerada del Tratado de Libre Comercio de América del Norte (TLC), los gobiernos de México, Estados Unidos y Canadá intercambiarán en las próximas semanas las listas de productos en los que están interesados en apresurar la apertura.

La Secofi (Secretaria de Comercio y Fomento Industrial) y los organismos del sector empresarial se dedicaron a determinar cuáles serían los renglones en los que se podrían abrir más las puertas del comercio; llevándose a cabo consultas de los sectores productivos y se recibieron propuestas de empresas y otros organismos para integrar las listas de productos que serán negociados.

El Consejo Nacional de Comercio Exterior (Conacex) asegura que no se someterá a esta negociación a ningún producto o renglón que no haya sido consultado con la base industrial.

Acuerdo México-Estados Unidos para impulsar microempresas.

La administración de pequeñas empresas (SBA) del departamento de Estados Unidos y la Secofi trabajan en este documento con el fin de establecer una cooperación bilateral entre los microempresarios.

Firmarán México y la U. E. instrumentos de negociación del acuerdo.

El embajador de México ante la Unión Europea y el director general para América Latina del bloqueo Europeo, firmarán los tres instrumentos de negociación del Acuerdo de Asociación Política, Concentración Económica y Cooperación entre ambas partes.

El primero de los tres instrumentos a firmar es el Acuerdo Global que define con detalle los acuerdos políticos, de cooperación y describe el contenido y mecánica de las negociaciones de liberalización comercial. El segundo es un Acuerdo Interino que fija la creación de un comité conjunto integrado por representantes de México, la comisión Europea y los Estados miembros de la U. E., capacitado para marcar tiempos y modalidades del acuerdo y negociar la liberalización comercial.

Este Acuerdo Interino es necesario para que entren en vigor los aspectos de cooperación del Acuerdo Global, mientras éste es ratificado por los 17 parlamentos implicados y se pueda negociar la parte comercial.

La Declaración Conjunta es el tercer instrumento que se firmará y servirá para negociar la liberalización del sector servico. El Acuerdo Global deberá recibir el dictamen favorable del Parlamento Europeo a fin de que sea ratificado por el Senado mexicano y los 15 Parlamentos nacionales de la U. E. por lo que el libre comercio se hará efectivo a fines del año 2000.

Aún si la parte en disputa fuese monolítica en ocasiones tiene que enfrentar conflictos en lo interno.

No quiere esto decir que se provoque retraso o perturbación a la negociación ya que la diversidad de posturas en la negociación podría facilitarla.

Es importante analizar la disputa y estar al tanto de los conflictos internos y externos que ésta misma genere.

3.- Sobre los juegos repetitivos o los vicios y experiencias de jugar varias veces lo mismo.

Hay conflictos que suceden con frecuencia, esto ocasiona favorablemente en algunos de los casos que las negociaciones sean ágiles y honestas; por otra parte el cambio en la información disponible puede ocasionar que se enturbien negociaciones futuras.

Cuando son repetitivas las negociaciones y exclusivamente de ellas el negociador también es repetitivo sucede que este desee obtener su propio beneficio en cuanto a reputación y negocio se refiera y no para el bando que represente.

4.- ¿Hay vinculación o encadenamiento en las negociaciones?

Llamemos negociaciones encadenadas a aquellas que dependen de soluciones de otras negociaciones (anteriores o posteriores) para su solución; también hay las negociaciones encadenadas reiterativas que no sólo involucran a los mismos negociadores o jugadores todo el tiempo sino que también emplean las mismas reglas básicas.

5.- Sobre el número de soluciones posibles o ¿hay más de un tema?

Hay algunas negociaciones en donde el bien a negociar depende de un valor fluctuante (tasa), esto genera un conflicto entre los participantes a la negociación; los hay también que prefieren una ganancia moderada para las partes en disputa o ninguna ganancia.

En algunas otras la ganancia no es medible, y puede suceder que las partes en conflicto no tengan ninguna opción y sí existan muchas posibles soluciones, entonces, las partes en disputa deberán acceder a conocer como interactúan estas posibles soluciones en torno a la negociación y flexibilizar o modificar si es necesario su posición tomando en cuenta para ello que el adversario puede o no ser estable en su posición y que no la solución óptima a la negociación involucra necesariamente ganancia para todos, o ninguno y si la hay no siempre podrá ser medible o cuantificable. Sin embargo el que existan varias posibles soluciones amplia o abre el rango de solución a la negociación y esto hace que los disputantes disfruten del resultado una vez hecha la negociación.

6.- La obtención de un arreglo o la continuidad de una negociación.

Existen negociaciones en las cuales es necesario llegar a un acuerdo, y en las cuales no es necesario hacer una parte específica de la negociación, para estas los adversarios deberán aquilatar las consecuencias de un posible rompimiento de la negociación o la prolongación de la misma en sus intereses, si el acuerdo es necesario por ley y se prolongasen las negociaciones entonces, el acuerdo deberá someterse a mediación y arbitraje.

Por ejemplo. El rector de la Universidad Veracruzana (UV), Emilio Gidi Villarreal, solicitará a la Junta Local de Conciliación y Arbitraje declare inexistente la huelga que a las cero horas de este domingo (3 de Agosto de 1997) inició el SETSUV (Sindicato Estatal de Trabajadores al Servicio de la Universidad Veracruzana), pues el objeto fundamental de la misma, que era revisar los salarios, " ya esta satisfecho ".

Tal solicitud la presentarán los apoderados legales de la UV el martes próximo, dentro del plazo de 72 horas que la ley prevé para proceder, a partir de la huelga.

La institución ofrece un incremento salarial global de 22.5 por ciento, 16 directo al salario, un punto más del que se ha dado como tope en 15 universidades públicas del país.

EL SETSUV inicialmente pedía 30 por ciento, pero horas antes de que comenzara el movimiento propuso una salida colateral, consistente en 16 por ciento de incremento al salario y 6.5 por ciento a alguna de las prestaciones, y al ser rechazada su propuesta por los representantes del centro educativo, procedió a colocar las banderas de huelga (rojinegras) en todas las instalaciones universitarias.

El rector Gidi Villarreal precisó que en febrero pasado, la Dirección General de Educación Superior de la SE instruyó a las universidades públicas que en las revisiones de los contratos colectivos de trabajo ofrecieran aumentos saláriales del 16 por ciento, y advirtió que en caso de huelga, esa Secretaría deducirá del subsidio las cantidades correspondientes a salarios caídos, lo que significa que estos no se pagarán.

Hasta la tarde del domingo no se preveía la reanudación de las pláticas entre ambas partes y que surgiera un posible acuerdo para dar fin al conflicto laboral que mantiene paralizada la Universidad de Veracruz.

7.- La ratificación de los acuerdos o ¿valió la pena?

En algunas ocasiones la solución a la negociación esta sujeta a ratificación de acuerdos por una o más partes de los negociantes como medida de seguridad cierta o ficticia de las partes en disputa este hecho en algunas negociaciones permitiría obtener algunas concesiones de ultimo minuto del (de los) oponente(s) o por el contrario endurecer la determinación del oponente(s) y/o retrasar las negociaciones.

8.- ¿Son posibles las amenazas?

En el caso de un distribuidor de materia prima en escasez para un mercado, si el demandante de ésta objeta el precio y en caso de no ser favorecido amenaza con irse, esto es o no un retorno a la negociación, o un rompimiento. Si por el contrario el distribuidor toma una posición inaccesible en la negociación y la amenaza fuera "si no aceptas mi oferta romperé las negociaciones y emprenderé las siguientes acciones en contra tuya" podría entonces en alguno de los dos casos influir el uso del poder a través de la amenaza a la solución favorable o desfavorablemente.

Un ejemplo sería el hecho reciente suscitado a favor de los intereses del Profesor Carlos Hank Gonzáles y los de sus amigos que están retomando el camino del éxito en Costa Rica luego de la visita a México del Canciller de dicho país Fernando Naranjo.

Ya que el controlador general de Costa Rica, Luis Fernando Vargas, se retracto del carácter tajante con la que había anulado la adjudicación de un millonario contrato carretero en favor de Trimesan una alianza entre dos empresas de aquel país y Tribasa, de David Peñalosa y la familia Hank.

El anuncio del controlador Vargas fue hecho luego que el Canciller Naranjo se reunió con diversas autoridades y personajes en México, en el contexto de una reunión binacional.

Ahora Trimesan podría volver a ganar, a más tardar en septiembre próximo lo que semanas atrás el controlador había considerado que merecía una anulación definitiva y total.

Las relaciones México-Costa Rica se habían enturbiado por las cancelaciones de contratos y concesiones a empresas asociadas de alguna manera con el hankismo como el caso de Tribasa que de forma insistente apuntaron con sospechas los diarios de San José.

Un mes atrás la contraloría de Costa Rica había anunciado que el contrato obtenido por Trimesan para rehabilitar la carretera Bernardo Soto merecía "nulidad absoluta, evidente y manifiesta", por varias irregularidades detectadas.

En los medios empresariales mexicanos se comentaba, antes de la visita del canciller Naranjo, que varias importantes firmas mexicanas en las que participaba la familia Hank estarían dispuestas a dejar de invertir en Costa Rica si se sostenía el veto de Trimesan.

Ahora el vicepresidente internacional del Grupo Tribasa y virtual encargado del asunto Costa Rica, José Andrés de Oteyza a anunciado inclusive que estaría dispuesto a demandar a Costa Rica en caso de que se insista en desconocer la concesión original del proyecto carretero.

9.- El tiempo como factor de importancia en la negociación.

La importancia del tiempo depende de la negociación en la que se esté y como los oponente manejen esta variable tiempo, ya que en ocasiones la táctica puede ser retrasar el tiempo para desalentar al (a los) oponente (s), para llegar a un acuerdo fuera de un juzgado (antes o después de un juicio retrasado), etc.; en el caso inverso, en el que de esta variable dependen grandes cantidades de vidas o de dinero, como lo sería en acuerdos de paz o no guerra entre dos o más personas, comunidades o naciones.

10.- Sobre la certeza de los convenios o el valor de la buena voluntad.

Un acuerdo es siempre riesgoso si éste no esta enlazado a un proceso legal.

11.- ¿Son privadas o públicas las negociaciones?

Generalmente es casi imposible realizar una negociación en secreto cuando ésta es de interés público. Ya que siempre estarán presentes los medios de comunicación no sólo con el fin de dar a conocer el suceso; si no además con el fin de hacer noticia de éste.

12.- Sobre las normas de conducta en las negociaciones.

¿Qué normas de conducta adoptaría usted en una negociación para con la negociación y para con el o los oponentes? y ¿Qué conducta cree usted que los adversarios (jugadores) en la disputa tendrán hacia la negociación y hacia usted como negociador?

Pudiera suceder que tuvieran la mejor disposición de llegar a un acuerdo y ceder razonablemente en la porción que les corresponda en la negociación, pero ésta sería en el caso óptimo; en los restantes casos de negociaciones los adversarios participan cada quien por intereses propios o del bando que representan.

13.- La necesidad de un intermediario o alguien a quien culpar de un acuerdo.

Un agente externo en la negociación podría predisponer a uno o a todos los negociadores de tal manera que una vez hecho el acuerdo uno o más de ellos creyeran que tal acuerdo no fue en su favor gracias a la participación del árbitro.

Perspectivas de investigación.

Dentro de lo que se conoce como perspectivas de investigación que tiene como fin describir el "ser" y el "deber ser" de la toma de decisiones nos encontramos con la :

Investigación externamente prescriptiva o descriptiva.

Que estriba básicamente en determinar de qué manera deben de comportarse los interventores (especialmente los mediadores, árbitros y manipuladores de reglas) para ayudar a las partes negociadoras de manera imparcial y equilibrada. Ésto puede concebirse como una orientación externamente prescriptiva.

Un *facilitador* es una persona que se encarga de que las partes pertinentes lleguen a la mesa de negociación.

Un facilitador puede optar por no involucrarse en el proceso de negociación efectivo, pero puede desempeñar un papel de facilitación para poner en práctica el acuerdo: ayudando con detalles legales de último minuto, ayudando con financiamiento, ayudando con la supervisión de los convenios.

Un *mediador* es un agente externo imparcial que puede ayudar en el proceso de negociación, pero no tiene la autoridad para dictar la solución. Su propósito es inducir a los jugadores a determinar si existen posibles soluciones que cada uno de ellos preferiría en lugar de no llegar a un acuerdo, y a ayudar a que los jugadores seleccionen por sí mismos un convenio aceptable para todos ellos.

Un *árbitro* puede tratar de llevar a los negociadores a que formulen por sí mismos la solución a la disputa una vez escuchando a todas las partes participantes en la disputa o sugerirles una solución, pero si éstos no llegasen a un acuerdo el árbitro tiene autoridad para imponer la solución.

Por ejemplo la Comisión Nacional de Derechos Humanos resolvió en defensa por violación a las garantías individuales; por tal motivo, la instancia emitió recomendaciones al presidente de Puebla, Carlos Pallados Vázquez de instruir para que inicien un procedimiento administrativo de responsabilidad contra Alejandro Armenia Mire, alcalde de Acatzingo, Puebla, en 1995, por el desalojo del local de flores de Juventino Castro Apresa, "sin haber respetado la garantía de audiencia", y en su caso, se apliquen las sanciones correspondientes.

Asimismo, se investigue al actual alcalde, Alejandro Sánchez Ramírez, toda vez que no dio respuesta a la CNDH acerca el informe y documentación solicitados sobre el hecho, y la recomendación expedir el Reglamento de Mercados y Centrales de Abasto, para evitar situaciones similares. La disposición de la institución incluye restituir de su local al afectado.

Y el *ajustador de reglas* (también llamado manipulador de reglas) al cual se le confiere la autoridad de alterar o restringir el proceso de la negociación.

Un interventor efectivo, ya sea un *facilitador, mediador, árbitro o manipulador de reglas* debe de entender el proceso de negociación desde diferentes ángulos de investigación.

El interventor tiene aspiraciones, ideales, valores, juicios y restricciones propias y debe ser identificado como otro jugador en el juego el cual debe tratar de aumentar al máximo sus ganancias.

1.2 NEGOCIACIÓN ENTRE DOS PARTES POR UN SOLO TEMA

Modelos analíticos y resultados empíricos.

El regateo entre dos partes puede dividirse en dos tipos: el distributivo y el integrativo.

Por el momento fijemos nuestra atención en el caso de *regateo distributivo*; en este las partes tienen intereses estrictamente opuestos y esta negociándose solo una cosa.

Ambos contendientes desean optimizar su posición en el juego según corresponda al tema en disputa, ésto nos permite observar que mientras uno de los adversarios desea maximizar su posición lo que el otro requiere es minimizarla respecto del juego; además si ambos son lo suficientemente codiciosos no habrá ganancia para ninguno.

Ahora supongamos que cada uno de los agentes negociadores tiene decisión independiente, es decir no tienen que convencer a ningún otro agente de ratificación de acuerdo. Y nó se cuenta con la presencia de interventores neutrales de una tercera parte para auxiliar a los negociadores.

También supondremos que la única amenaza por cualquiera de las dos partes, es suspender las negociaciones; ante el análisis de las consecuencias de no acuerdo *cada uno de los negociadores establece el valor real que requiere.*

Cada uno de ellos tiene que tratar de determinar su mejor opción a un acuerdo negociado.

El valor real reservado del agente maximizador (AGM) es **M**, y representa el mínimo que aceptará en la negociación; cualquier valor de contrato final, x, menor que **M** sería para el AGM peor que el no acuerdo; y si x es mayor que **M**, entonces x-**M** es el excedente del AGM quien desea maximizarlo. El agente minimizador AGm tiene un valor reservado **m** , y es el máximo que aceptará; cualquier valor de contrato final x , que sea mayor a **m** , sería peor para el AGm que la situación que resulta de no acuerdo; si x es menor que **m** entonces, **m**-x es el excedente del AGm; quien desea minimizarlo.

Sí **m<M** no hay negociación; pero sí **M<m** , entonces el valor x del contrato final se encuentra en **[M,m]**.

Donde **[M,m]** es la zona de acuerdo. Apesar de esto podrían las partes no estar de acuerdo en aceptar una x mutuamente aceptable; además de que de manera general no conocen el tamaño real de **[M,m]**.

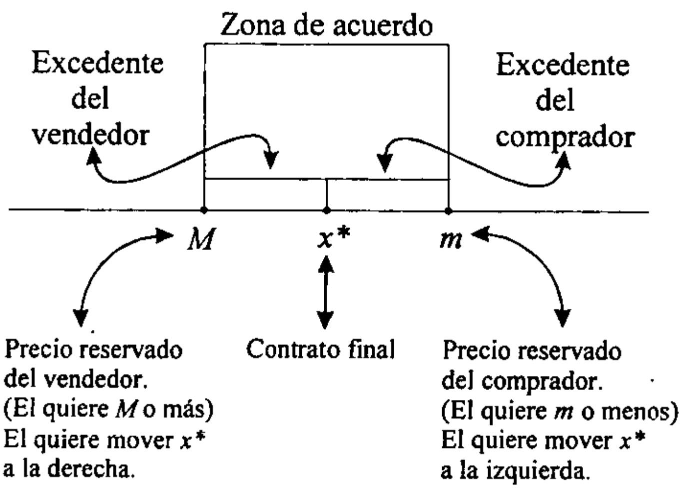


Figura1. Geometría del regateo distributivo.

Ahora *cada uno de los negociadores conoce su precio reservado pero sólo tiene información probabilística acerca del precio reservado de la otra parte*. Llamemos sin pérdida de generalidad: comprador y vendedor a los agentes negociadores; tomemos el punto de vista asimétrico del vendedor, donde antes de iniciar las negociaciones el deberá determinar **M** y evaluar probabilísticamente $\underline{\mathbf{m}}$ donde $\underline{\mathbf{m}}$ es una cantidad incierta o una variable aleatoria; hará bien el vendedor si durante la negociación hace valoraciones periódicas acerca de $\underline{\mathbf{m}}$; y también es importante hacer creer al comprador que $\underline{\mathbf{M}} > \mathbf{M}$. El vendedor deberá de considerar que de manera análoga el comprador le quiere hacer creer que $\mathbf{m} < \underline{\mathbf{m}}$.

A continuación se describe un patrón, el cual es llamado por el autor "*danza de la negociación*" que describe las concesiones hechas por el comprador y el vendedor durante la negociación, en donde: M_1, m_1, M_2, m_2, etc. representan los precios propuestos sucesivamente por los negociadores.

Una vez que hay dos ofertas en la mesa (M_1 y m_1) la mejor predicción del contrato final es el punto medio, siempre que este caiga dentro de la zona de acuerdo, sino, es difícil predecir dónde caerá el contrato final. No podríamos afirmar que x^* quedará cerca del precio reservado que estuviera más cerca del punto medio de la zona de acuerdo. Lo que si es que las concesiones tendrían que estar más cargadas hacia un lado y es difícil predecir las consecuencias.

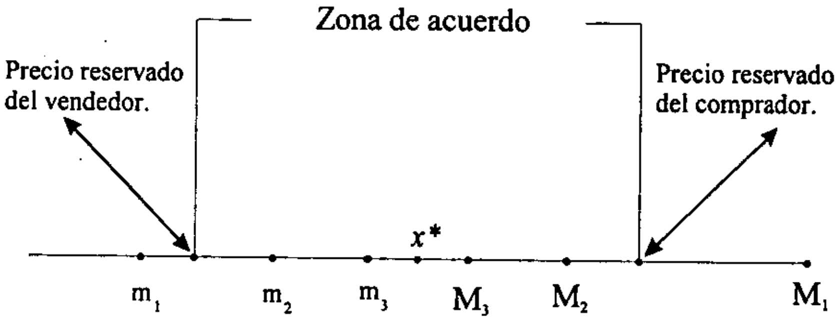


Figura 2. La danza de la negociación (x^* = precio de contrato final).

En el regateo distributivo las ofertas sucesivas por parte del vendedor son por lo general decrecientes monótonamente, en tanto que las del comprador son monótonamente crecientes.

En el siguiente caso *tanto el comprador como el vendedor conocen el precio reservado propio y el del adversario*; si $\mathbf{m}>\mathbf{M}$, la ganancia potencial es $\mathbf{m}$-$\mathbf{M}$ y el x^* obvio sería ($\mathbf{m}$-$\mathbf{M}$)/2. No obtendrían nada si no convienen en una regla para compartir, o si $\mathbf{m}<\mathbf{M}$.

Un famoso ejemplo sería: ¿Cómo compartirían un hombre rico y un hombre pobre $200? El hombre rico podría optar por una división de $150 a $50 a su favor ya que al pobre le afligiría más perder $50 que al rico perder $150; un árbitro podría sugerir la distribución contraria. El hombre rico podría argumentar que es un error mezclar los negocios con la caridad y en base a esto pedir un reparto parejo.

Otra situación aparentemente asimétrica es cuando las partes negociantes difieren en el número de personas que constituyen al lado negociante. En fin, las asimetrías suelen darse de diversos tipos: diferencias en dotaciones o en riquezas iniciales, diferencias en costos relacionados con el tiempo, diferencias en necesidades, diferencias en el número de personas que comprenden cada lado, entre otras.

Sucede con frecuencia que los negociadores tienden a confundir la simetría y los puntos focales en las negociaciones con su noción de "equidad"; pero no sucede con igual frecuencia que la simetría de una persona sea la simetría de otra.

Una variante más del regateo distributivo es cuando *sólo una de las partes conoce el precio reservado del adversario.*

Supongamos el caso en el que *el comprador conoce el precio reservado* **M** *del vendedor y su propio precio reservado* **m**; el adversario conoce **M** pero sólo tiene una distribución de probabilidades para **m**.

Por ejemplo: pensemos en el intervalo [0,a] y sea **M**=a/3, fija, el precio reservado del vendedor; ahora elijamos aleatoriamente el precio reservado del comprador **m** en [0,a], y supongamos que el valor escogido de **m** es 5a/6.

¿Cómo podrían negociar los jugadores? Sí el comprador muestra interés en negociar quiere esto decir que **m**≥a/3, en lo siguiente, el precio del contrato final x^* dependerá de las habilidades y posturas que tengan los jugadores en el juego. En éste juego el comprador debe de tener la habilidad de hacer que el vendedor baje mediante sus ofertas su precio a un valor cercano a a/3, actuando el comprador como si su verdadero precio reservado fuera **m**=3a/6.

El siguiente caso podría llamarse el *caso canónico de regateo distributivo* y es cuando cada una de las partes tiene información probabilística acerca del precio reservado de la otra.

En este tipo de negociaciones ambos contendientes tienen una distribución de probabilidades para cada uno de ellos y ambos las conocen. Mediante sorteos y de manera confidencial se les da a conocer a cada uno de ellos su propio precio reservado, si los valores obtenidos al azar son tales que **M>m**, entonces no hay zona de acuerdo, pero si **M<m**, entonces el excedente a compartir entre los negociadores es **m-M**, antes de comenzar la negociación los contendientes no saben si es que hay excedente, y si lo hay ¿de cuánto es este?; de forma inmediata negocian y los acuerdos finales son los valores excedentes que las otras partes pueden lograr.

El *regateo informal* sin ninguna estructura impuesta para las negociaciones y sin restricciones en el tiempo, conduce a mejores resultados que los que se logran mediante métodos formales. Una alternativa de regateo informal es la de revelación simultánea de precios reservados.

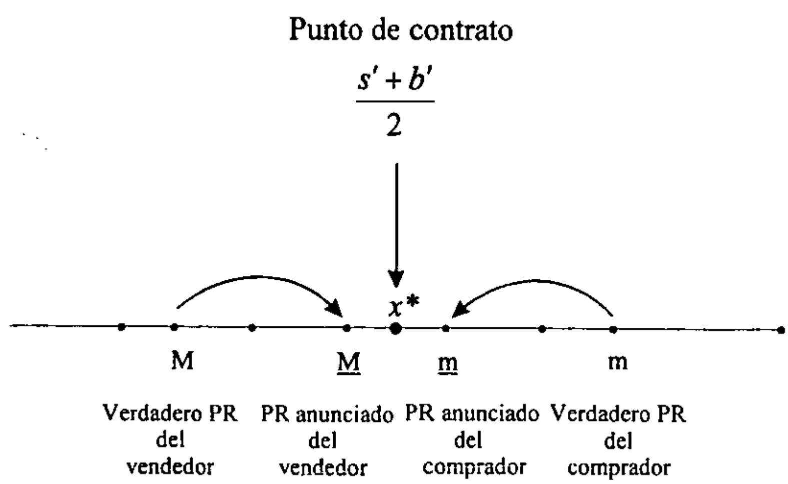


Figura 3. Procedimiento de revelación simultánea. (Sería ineficiente sí $\underline{m}<\underline{M}$).

Supóngase una negociación de *revelación simultánea*, donde uno de los negociadores propone al otro escribir al mismo tiempo sus precios reservados respectivos y si son compatibles, entonces dividir la ganancia potencial. Sean estos valores reservados: $\underline{M}$, y no necesariamente $\underline{M}$=M para el vendedor, y $\underline{m}$, y no necesariamente $\underline{m}$=**m**, para el comprador. Donde sí $\underline{m}<\underline{M}$, se suspende la negociación, pero sí $\underline{m}>\underline{M}$, entonces $x^{*}=(\underline{m}+\underline{M})/2$.

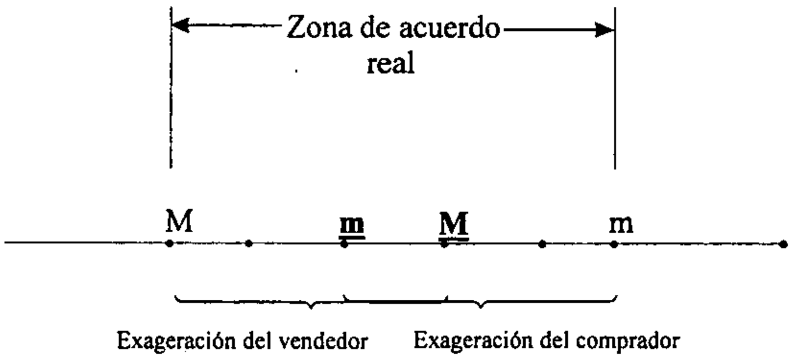


Figura 4. Caso ineficiente: en el cual hay una zona de acuerdo en valores reales pero no en valores revelados.

De manera teórica al procedimiento de resolución simultánea puede alterarse de tal manera que ambos contendientes digan el verdadero precio reservado.

Supóngase que hay un vendedor A y un comprador B, y un manipulador de reglas G, imagínese que G puede inducir a B a revelar $\underline{m}$=**m**. ¿Cómo puede lograr G que A sea igualmente honesto? Sí el precio real de A es M y anuncia $\underline{M}$, mientras que B anuncia $\underline{m}$, entonces las ganancias de A serán $\{[(\underline{m}+\underline{M})/2] - M\}$si $\underline{m}>\underline{M}$ y 0 de otra manera, más un monto ajustado que B le pagará, dependiendo del $\underline{M}$ que él anuncie. Obsérvese que mientras más alto sea el valor de $\underline{M}$ más bajo será el pago ajustado que reciba de B; por tanto, dado este ajuste A tendrá menos ganas de exagerar y querrá disminuir $\underline{M}$, ahora el truco consiste en manipular la función de ajuste de tal suerte que si B anuncia $\underline{m}$=**m**, entonces la mejor respuesta de A consiste también en decir la verdad y anunciar M=$\underline{M}$. Supongamos ahora que es A quien siempre anuncia M=$\underline{M}$, ¿cuál será ahora el ajuste que tendrá que pagarle B?; ahora G inducirá de manera inversa a que sea A quien pague a B un valor de ajuste que depende del $\underline{m}$ anunciado, así G manipulará la función de ajuste de B haciendo que para B sea mejor anunciar $\underline{m}$=**m**. De esta manera G adecuará la función de ajuste de tal modo que los montos recibidos tanto por A de B, como por B de A, menos los montos pagados de A a B y de B a A sean iguales a cero.

1.3 TIEMPO V.S. DECISIÓN

El papel del tiempo.

Durante algunas negociaciones las partes en contienda cometen errores en el tiempo que la negociación dura, ya sea por ansiedad, por miedo de que el contendiente contrario decida suspender la negociación, miedo a que se presente un acontecimiento no previsto, dichos temores son de procedencia variada, algunos se generan por que los negociadores carecen de habilidad y otorgan un valor a la rapidez en la negociación que no le corresponde, o simplemente por inquietud de perder el tiempo es decir se impacientan por ver que se realice el trato.

Ciertamente el tiempo es valioso y en ocasiones los negociadores deben de estar dispuestos a dar dinero a cambio de tiempo.

El caso en el que el vendedor de un bien, con restricción de tiempo se enfrenta con un número incierto de compradores interesados en dicho bien, es probable se impaciente por la realización del trato, una vez que alguno de los compradores, con su oferta genere alguna zona de negociación, y esto es porque al esperar esta entregando una certeza conveniente a cambio de una incierta ganancia potencial conveniente.

Un muy interesante ejemplo de negociación en el cual la variable tiempo se convierte en la más importante es el llamado: *juego de la huelga.*

La mayor parte de los contratos obrero-patronales se solucionan sin llegar a la huelga, es la amenaza de llegar a ella lo que genera que los negociantes se muestren mas accesibles en torno a la negociación y esto es porque si las partes negociadoras están convencidas de que su lado tiene la razón y ninguna de ellas puede salirse del conflicto, el juego de la espera se ve alterado en costos por demora.

Hay un juego llamado "*juego de la escalada*" o el juego de la "subasta de tipo ascendente" en la cual ambas partes pagan.

Un ejemplo sencillo es el de dos postores en una subasta: hacen sus ofertas en orden creciente por un premio que valoran igualmente, el postor más alto gana el premio y paga al subastador su postura mas alta, pero también el segundo postor mas alto paga al subastador el monto de su postura más alta; de manera tal que si M es el costo del premio y N es la postura mas alta, con N≤M, entonces tal postor gana M-N y el segundo postor más alto pierde K si K es su postura más alta.

Las *estrategias de equilibrio* para los contendientes en el "juego de la escalada" se encuentran en lo que se llama sus estrategias invariantes.

Una vez que las apuestas han evolucionado a x dólares (llamémosle dólares sin perdida de generalidad a la moneda con la cual se haga la subasta) y uno de los jugadores tiene en mente aumentar su oferta a (x+1) dólares, quiere esto decir que ha perdido ya (x-1) dólares, suponiendo que x>1.

Si se ignoran los costos anteriores y un jugador tiene deseos de abandonar el juego con una probabilidad p constante cuando x>1; decimos entonces que el jugador esta haciendo uso de una ***estrategia invariante***.

Se dice que hay equilibrio cuando hay un par de estrategias con las cuales ambos contendientes pueden abandonar el juego con una probabilidad p constante una vez que ha iniciado el juego.

1.4 ADQUISICIONES Y FUSIONES

En el dominio de las negociaciones de dos partes por un solo tema, nos encontramos con las fusiones que son un caso muy especial de negociación, estas fusiones se dan entre individuos, empresas, organismos, etc. Estas se vuelven complicadas ya que ahora ambas partes tienen que tener una evaluación propia y real del valor de la empresa (sin perder generalidad) que se fusionará y de la producción que esta fusión genere; para ello se requiere que ambas partes compartan entre sí parte de su información confidencial.

Si aún habiendo compartido la información necesaria real para que cada una de las partes tenga su evaluación propia, no hay zona de acuerdo, entonces la negociación ahora podría convertirse en una fusión de varios temas y tratar de negociar un programa de transferencia de pagos vinculado con el desarrollo de acontecimientos futuros, los cuales son llamados contratos de contingencia; decimos podría, porque ahora depende de cómo cada una de las partes evalúe probabilísticamente dichos acontecimientos y de su aversión al riesgo.

Ejemplo. Supóngase una compañía M con un capital accionario de 100 000 acciones, con un valor de 10 dólares por acción y el científico Lorenzo Anderson quien tiene una idea con potencial comercial, dicha compañía sabe que con la idea y el "know how" para ponerla en practica del científico Lorenzo el valor de sus acciones crecerá en forma de parábola a 60 dólares por acción y alcanzará una valuación de 6 000 000. ¿Cuánto deberá pagarle la compañía a Lorenzo?, si el punto focal sería de 2500 000 dólares; éste se convierte ahora en el problema del hombre rico y el hombre pobre; depende entonces ahora de la habilidad de Lorenzo como negociador y no como científico; ¿y como se lo pagaría?, podría ser dándole a Lorenzo acciones de la compañía fusionada en lugar de un pago en efectivo, ¿pero si Lorenzo tiene mas aversión a los riesgos que M?, entonces quizás convendría hacerle el pago en parte efectivo y en parte accionario.

En algunos casos de fusión, los negociadores requieren de la intervención de una tercera parte para que esta se lleve a cabo.

Un ejemplo de compra-venta. Pensemos en el Sr. S quien desea vender su compañía y un comprador B, ambos han examinado otras oportunidades de vender y comprar respectivamente y cada quien ha hecho también su análisis sobre incertidumbres y su actitud hacia los riesgos. S ha decidido vender a B y B comprar a S.

El precio reservado real de S es de 7 200 000 dólares y el de B es de 6 600 000 dólares, ambos desconocen el precio reservado de su adversario. Comienzan a negociar, pero no llegan a ningún acuerdo, no se dan cuenta que no existe zona de acuerdo. Finalmente S sugiere contratar los servicios de un mediador M quien no sabe nada sobre esta negociación; sí S y B son honestos con M y le muestran su información confidencial, M podría al menos indicarles si es que hay una base para seguir negociando; o mejor aún, que no hay zona de acuerdo pero que es posible alcanzarla ideando contratos contingentes aceptables para ambas partes.

En particular si se abrieran por completo, M podría encontrar que la redituabilidad de la fusión depende en gran medida de las primeras reacciones del mercado ante un invento recientemente patentado por S; supongamos que estas posibles reacciones son O, P, Q y R. El punto ahora es que B y S le asignan distintas probabilidades de suceder a las reacciones O, P, Q y R (que son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivas) y perciben de manera diferente las implicaciones financieras de cada una de ellas. Entonces M, vería la posible conveniencia de elaborar el contrato usual de un pago fijo en este momento, mediante un contrato de contingencia, en el cual B pagará ahora a S un monto X_1, y, después de un año, dependiendo de la ocurrencia de las reacciones otro monto X_O, X_P, X_Q ó X_R. Supongamos que si se realiza la fusión, la resolución sería después de un año y un contrato representativo sería: $X_1 = 4\ 000\ 000$, $X_O = -1000$, $X_P = 0$, $X_Q = 5\ 000\ 000$, $X_R = 8\ 500\ 000$; cuya interpretación sería: 4 000 0000 de dólares da ahora B a S, sí ocurriera O, S devolvería 1000 dólares a B; sí P, entonces B ya no hace ningún pago a S; sí Q entonces B paga a S 5 000 000 de dólares; sí R, entonces S obtiene 8 500 000 dólares de aquí a un año. Un contrato de no contingencia sería: $X_O = X_P = X_Q = X_R = 0$.

M se enterará mediante una revelación honesta por parte de los contendientes de que S y B tienen diferentes percepciones de probabilidades para la ocurrencia de los sucesos, diferentes descuentos para el dinero y diferentes actitudes hacia los riesgos, y que cada una de las partes impone restricciones, tales como: $X_1 \geq 0$ es requerido por S y que $X_o + .85\ X_R \leq 11\ 000\ 000$ de dólares, requiere B. Además se entera el mediador de que las variables de control, están conjuntamente sujetas a restricciones para cualquier contrato variable.

En el conjunto de contratos conjunto de contratos contingentes ¿existe alguno que genere ganancias conjuntas? Y si existen pero además existen más de uno ¿cuál deberán elegir?.

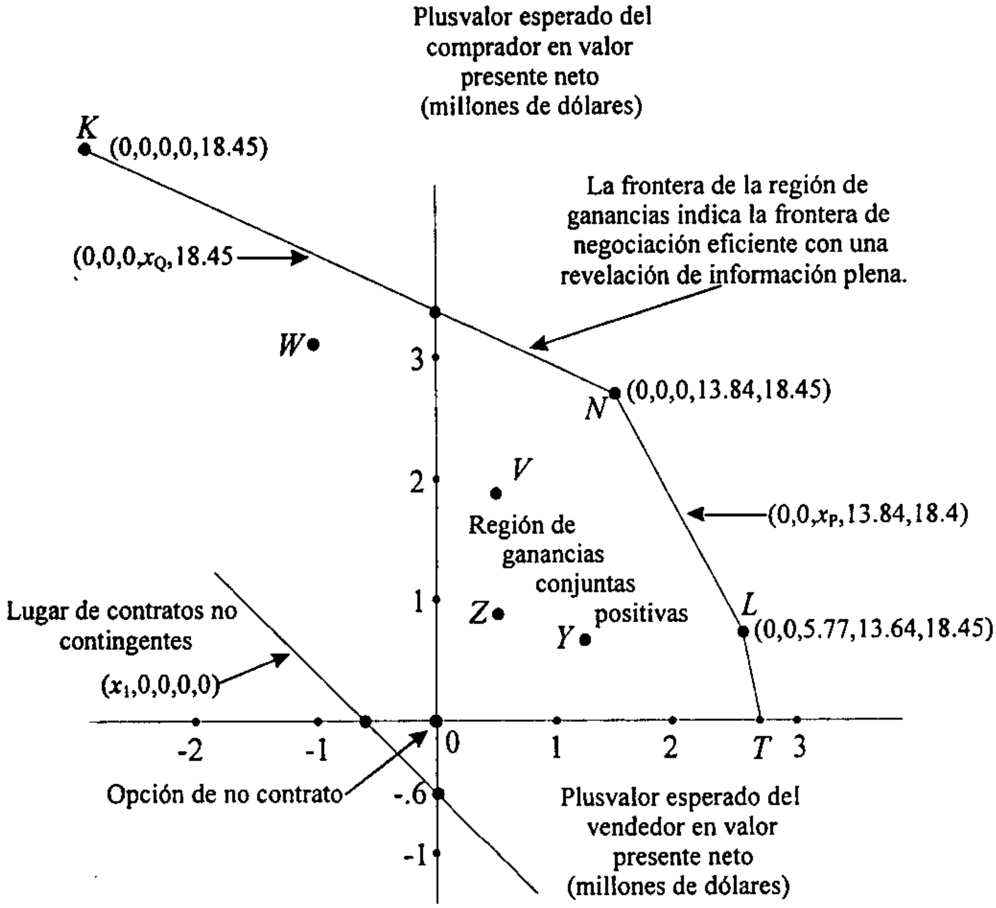


Figura 5. Evaluaciones conjuntas de contratos viables. Los cinco componentes en cada una de las configuraciones representa (x_1,x_O,x_P,x_Q,x_R).

Para este caso se ha supuesto que ambas partes de la negociación eran neutrales a los riesgos, lo cual quiere decir que utilizaban los valores esperados. En la figura 5, el origen representa la opción de no acuerdo, los ejes: los valores excedentes esperados por los contendientes, en comparación con el no contrato; cualquier punto en el primer cuadrante que se encuentre por debajo o en la frontera (línea *KNLT*) representa una evaluación conjunta de un contrato viable superior al no contrato. Así V es mejor para cada uno de los contendientes que la opción de no contrato, sin embargo no es V, sino *N* el mejor contrato viable que puede alcanzarse y está relacionado con el contrato que requiere pagos al vendedor sólo si se dan los estados Q = 18 450 000 dólares y R = 13 840 000 dólares; de aquí a un año.

Con frecuencia las partes de una negociación pueden obtener mejores resultados refinando el problema y convirtiéndolo de un problema de un sólo factor a uno de factores múltiples.

1.5 INTERVENCIÓN DE UNA TERCERA PARTE

A continuación señalaremos varias de las formas en las que puede ayudar la intervención de una tercera parte en negociaciones en donde las partes son monolíticas, hay un sólo factor a determinar conjuntamente del cual una de las partes quiere más y la otra menos; y el único potencial de amenaza para ambos contendientes es el término del regateo formal.

Reuniendo las partes. Un mediador puede identificar a los jugadores ideales, ya sea para negociación, fusión o inicio de discusión.

Estableciendo un ambiente constructivo para la negociación. Estableciendo el orden del día, como líder neutral de una discusión, sugiriendo procesos de negociación, manteniendo reglas para lograr un debate civilizado, como moderador, etc.

Reuniendo y revelando con juicio material confidencial y selecto, y así determinar una zona de acuerdo potencial.

Ayudando a las partes a esclarecer una postura responsable. Sobre sus valores y su precio reservado, analizando las implicaciones del no acuerdo.

No dando crédito a reclamaciones irracionales y reflejando compromisos. Reduciendo así al mínimo posturas endurecidas o barreras.

Buscando ganancias conjuntas. Alentando a los negociadores a que sean más creativos en la búsqueda de una solución; ayudando a convertir un problema de tema único en un problema integrativo con diversos factores negociables.

Manteniendo en marcha las negociaciones. Un mediador puede proporcionar a los negociadores un medio para salvar su imagen y mantener abiertos los medios de comunicación mientras esperan un mejor entorno externo.

Articulando la exposición razonada del acuerdo. Un mediador puede publicitar los resultados del acuerdo de tal modo que promocione su implementación y aceptación.

1.6 ARBITRAJE CONVENCIONAL Y DE OFERTA FINAL

Desde un punto de vista estratégico, el árbitro desempeña el papel de un juez y de un jurado: las partes contendientes deben de decidir si se avienen fuera de los tribunales y llegan conjuntamente a concesiones recíprocas sin el árbitro o llevan su caso a los tribunales.

El *arbitraje de oferta final* o de última oferta funciona de la manera siguiente:

En la fase uno las partes negocian con la ayuda de un interventor (mediador) o sin ella. Si las partes no llegan a un acuerdo entonces las negociaciones entran a la fase 2.

En la fase dos el árbitro determina los hechos y pide a cada una de las partes una oferta final sellada. Por lo general estas ofertas son presentadas simultáneamente y entonces el árbitro debe de seleccionar, por ley, una de estas dos ofertas finales; no esta permitido que en el ínterin se llegue a ninguna componenda y la oferta final seleccionada se torna obligatoria para ambas partes.

Ejemplo. La directiva D y el sindicato S se encuentran en un problema de avenencia por la tasa salarial básica, han pasado por negociaciones y concluido la primera fase, sin obtener resultados; y saben que tendrán que someterse a arbitraje de oferta final.

Tanto la directiva como el sindicato entregan su oferta final sellada **d** y **s**.

Supóngase ahora que el árbitro tiene en mente un valor ideal β, después de considerar los hechos elegirá **d** o **s** dependiendo de cual de las dos ofertas este más cerca de β.

Se conoce el valor del ideal.

(D y S conocen el valor ideal del árbitro β)

¿Cuál sería la mejor **d(s)** en contra de cualquier **s(d)** del oponente?

Donde D es la oferta final sellada de la directiva y S es la oferta final sellada del sindicato.

Pensando en una escala lineal la mejor **d(s)** a elegir es un valor cercano (por debajo en el caso de **d** o por arriba en el de **s**) a β que esté más cerca de β que la distancia a la que está **s(d)** de β. De esta manera D(S) garantiza un resultado no peor que β+(β-**d**) [β-(**s**-β)]. De manera que para optimizar su nivel de seguridad D(S) deberá ponerse igual en su oferta final **d(s)** con β. Así el par en equilibrio **d**=β y **s**=β son la mejor elección en contra de la oferta sellada del adversario.

Distribución de probabilidad comúnmente percibida por el ideal.

D y S advierten y cada uno de ellos sabe que el otro advierte que los valores ideales para el árbitro tienen la misma probabilidad de suceder en un intervalo [a,b].

¿Cuál sería la mejor **s(d)** en contra de una **d(s)** dada?.

Supongamos **d**=k, k∈[a,b], ahora **s** se establece en **s**=k+1, de esta manera el resultado podría ser k o k+1 dependiendo de si fuese β>**k** ó β<**k** la media de los valores de **s** y **d**.

Sea **p** la probabilidad de que β esté por debajo de **k** y (**1-p**) la probabilidad de que β esté por arriba de **k**.

De manera que si se escoge **s**=k+1 S queda expuesta a una lotería con las ganancias k y k+1 y las probabilidades **p** y (**1-p**) respectivamente.

Así, si S es neutral a los riesgos el valor esperado **p**(k) + (**1-p**)(k+1)= k´ , k´∈[a,b] es un índice adecuado para S y el mejor recurso para S dado **d** a medida que **s** crece en [a,b] es s=b. Análogamente si s es quien se establece en un valor fijo pero arbitrario, el mejor recurso monetario para D una vez **s** conocido se obtiene cuando **d**=a.

De tal manera que el par en equilibrio dada la probabilidad condicional de los sucesos es s=b y **d**=a.

Ahora, si la distribución para β no es igualmente probable entre un valor más bajo y un valor más alto, sino que toma una distribución normal; intuitivamente el recurso óptimo de **s** dado **d** estaría muy por encima de la media de la distribución de β tomando en cuenta que si β es N(μ,σ), la probabilidad de que β se encuentre a una, dos y tres veces la desviación estándar de la media está dada por:

$$
\begin{aligned}
P(\mu - \sigma \leq \beta \geq \mu + \sigma) &= P\,[(\mu - \sigma - \mu / \sigma) \leq Z \geq (\mu + \sigma - \mu / \sigma)] \\
&= P\,(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= Fz\,(1;0,1) - Fz\,(-1;0,1) \\
&= 0.6826
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\mu - 2\sigma \leq \beta \geq \mu + 2\sigma) &= P\,[(\mu - 2\sigma - \mu / \sigma) \leq Z \geq (\mu + 2\sigma - \mu / \sigma)] \\
&= P\,(-2 \leq Z \leq 2) \\
&= Fz\,(2;0,1) - Fz\,(-2;0,1) \\
&= 0.9544
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\mu - 3\sigma \leq \beta \geq \mu + 3\sigma) &= P\,[(\mu - 3\sigma - \mu / \sigma) \leq Z \geq (\mu + 3\sigma - \mu / \sigma)] \\
&= P\,(-3 \leq Z \leq 3) \\
&= Fz\,(3;0,1) - Fz\,(-3;0,1) \\
&= 0.9974
\end{aligned}
$$

Donde z es una variable aleatoria normal con media cero y varianza 1 y $Fz(x)$ es el área acumulada bajo la curva hasta el punto x.

Así a medida que **d** se acerque a la media y los valores de **s** estén más a la derecha de la media de la distribución de β, S obtendrá valores más altos; suponiendo que S es neutral a los riesgos.

Pero si S y/o D tienen aversión a los riesgos, entonces sus ofertas se tornaran más hacia la media de la distribución de β ya que es este valor de μ en donde ocurre el máximo de la función de densidad de probabilidad de β.

Distribuciones de probabilidad discrepantes para el ideal.

Las percepciones distintas acerca de un valor ideal β hacen que las distribuciones se desplacen en direcciones que favorezcan a los jugadores y ésto lo convierte en un problema en extremo complicado. Ya que si S ó D calculasen su mejor oferta dado D(S), lo haría con la evaluación que el tiene de β debiendo de ser muy concienzudo en su elección ya que lo más probable es que S y D tengan percepciones distintas acerca de la probabilidad de suceder de β; percepciones diferentes de las percepciones de el adversario y si hay aversión a los riesgos por parte de S y/o D seguramente las percepciones de la aversión al riesgo de la otra parte sean distintas de lo que en realidad son.

Ejemplos de arbitraje de oferta final.

La Procuraduría Federal del Consumidor (PROFECO), es un organismo público cuya función primordial es servir a la comunidad de manera directa en el marco de las funciones que la ley otorga. Con motivo de orientar a la población consumidora respecto de sus derechos la PROFECO ha publicado diversos documentos.

Dentro de lo que es la Ley Federal de Protección al Consumidor se enmarca la PROFECO en su artículo 20 como: Organismo descentralizado de servicio social con personalidad jurídica y patrimonio propio. Tiene funciones de autoridad administrativa y está encargada de promover y proteger los derechos e intereses del consumidor y procurar la equidad y seguridad jurídica en las relaciones entre proveedores y consumidores.

Observamos en el artículo 24 de la misma Ley como una de las atribuciones de la PROFECO:

X. Actuar como perito y consultor en materia de calidad de bienes y servicios.

Cabe señalar que en esta atribución y en los artículos que en adelante se mencionen de dicha Ley, la intervención de la PROFECO es de un tercero entre los que comercializan bienes y servicios y los consumidores.

Artículo 107.- En caso de requerirse prueba pericial, el consumidor y el proveedor podrán designar a sus respectivos peritos, quienes no tendrán obligación de presentarse a aceptar el cargo, sólo la de ratificar el dictamen al momento de su presentación. En caso de discrepancia en los peritajes de las partes la procuraduría designará un perito tercero en discordia.

Artículo 110.- Los convenios aprobados y los laudos emitidos por la procuraduría tienen fuerza de cosa juzgada y traen aparejada ejecución, lo que podrá promoverse ante los tribunales competentes en la vía de apremio o en juicio ejecutivo, a elección del interesado.

Los convenios aprobados y los reconocimientos de los proveedores y consumidores de obligaciones a su cargo, así como los ofrecimientos para cumplirlos que consten por escrito, formulados ante la procuraduría, y que sean aceptados por la otra parte, podrán hacerse efectivos mediante las medidas de apremio contempladas por esta Ley.

Aún cuando no medie reclamación, la Procuraduría estará facultada para aprobar los convenios propuestos por el consumidor y el proveedor, previa ratificación.

Los artículos de la Segunda Sección de esta Ley señalan la intervención de la PROFECO en el Procedimiento Conciliatorio, en la manera siguiente:

Artículo 111.- La Procuraduría señalará día y hora para la celebración de una audiencia de conciliación en la que se procurará avenir los intereses de las partes, la cual deberá tener lugar, por lo menos, cuatro días después de la fecha de notificación de la reclamación al proveedor.

La conciliación podrá celebrarse vía telefónica o por otro medio idóneo, en cuyo caso será necesario que se confirmen por escrito los compromisos adquiridos.

Artículo 113.- El conciliador expondrá a las partes un resumen de la reclamación y del informe presentado, señalando los elementos comunes y los puntos de controversia, y las exhortará para llegar a un arreglo. Sin prejuzgar sobre el conflicto planteado, les presentará una o varias opciones de solución.

Artículo 114.- El conciliador podrá en todo momento requerir a las partes los elementos de convicción que estime necesarios para la conciliación, así como para el ejercicio de las atribuciones que a la Procuraduría le confiere la Ley. Las partes podrán aportar las pruebas que estimen necesarias para acreditar los elementos de la reclamación y del informe.

El conciliador podrá suspender cuando lo estime pertinente o a instancias de ambas partes, la audiencia de conciliación hasta en dos ocasiones.

En caso de que se suspenda la audiencia, el conciliador señalará día y hora para su reanudación, dentro de los quince días siguientes.

De toda la audiencia se levantará el acta respectiva.

Artículo 116.- En caso de no haber conciliación, el conciliador exhortará a las partes para que se designe como árbitro a la Procuraduría, o a algún árbitro oficialmente reconocido o designado por las partes para solucionar el conflicto.

En caso de no aceptarse el arbitraje se dejarán a salvo los derechos de ambas partes.

En la Sección Tercera de esta Ley los artículos enmarcan el arbitraje que realiza la PROFECO bajo su misma Ley. Observando en el artículo 120 y 121 el juicio arbitral de estricto derecho como el arbitraje de última oferta.

Artículo 117.- La procuraduría podrá actuar como árbitro cuando los interesados así lo designen y sin necesidad de reclamación o procedimiento conciliatorio previos.

Artículo 118.- La designación de árbitro se hará constar mediante acta ante la Procuraduría, en la que se señalarán claramente los puntos esenciales de controversia y si el arbitraje es en estricto derecho o en amigable composición.

Artículo 119.- En la amigable composición se fijarán las cuestiones que deberán ser objeto del arbitraje y el árbitro tendrá libertad para resolver en conciencia y a buena fe guardada, sin sujeción a reglas legales, pero observando las formalidades esenciales del procedimiento. El árbitro tendrá la facultad de allegarse todos los elementos que juzgue necesarios para resolver las cuestiones que se le hallan planteado. No habrá términos ni incidentes.

Artículo 120.- En el juicio arbitral de estricto derecho las partes formularán compromiso en el que fijarán las del procedimiento que convencionalmente establezcan, aplicándose supletoriamente el Código de Comercio y a falta de disposición en dicho Código, el ordenamiento procesal civil aplicable.

Artículo 121.- El laudo arbitral emitido por la Procuraduría o por el árbitro designado por las partes deberá cumplimentarse o, en su caso, iniciar su cumplimentación dentro de los quince días siguientes a la fecha de notificación, salvo pacto en contrario.

Huelga en el Nacional Monte de Piedad.

Periódico: **unomásuno.**

19 de diciembre de 1997.

En los primeros minutos de esta madrugada estalló la huelga en la casa matriz y las 33 sucursales del Nacional Monte de piedad (NMP), después de un último intento de negociación que fracaso, entre la parte sindical y los integrantes del patronato de dicha institución.

Miembros del sindicato y del patronato del NMP explicaron que las causas del estallamiento de huelga se debe a un "choque de intereses" en el contrato colectivo de trabajo, fundamentalmente en la modificación de 40 cláusulas en las que el Patronato argumenta que son necesarias para el mejor funcionamiento de éste, mientras la parte de los empleados se oponen por considerarles negativas a sus intereses.

El NMP es una institución que cuenta con 2 sucursales en 16 estados de la República, y el resto en la ciudad de México. Aquí laboran alrededor de 2000 personas, de las cuales 1700 son sindicalizadas.

Alán de Torre Lovera, miembro del Patronato Nacional Monte de Piedad, precisó que el Patronato no sólo podría otorgar el 45% de aumento salarial, sino un porcentaje superior siempre y cuando la parte sindical esté de acuerdo en las modificaciones del clausurado para un mejor desarrollo de este patronato.

20 de diciembre de 1997.

El vocero del gremio **Pablo Medina** aseguró que el sindicato no ha sido llamado por la Junta Federal de Conciliación y Arbitraje (JFCA) para tener un acercamiento con el Patronato del NMP.

Alán de Torre Lovera aseveró que las pláticas entre ambas instancias están rotas desde hace mucho tiempo, y dijo desconocer si el actual oficial mayor del DDF, Jesús González, continúa asesorando al sindicato.

Reiteró el ofrecimiento del Patronato superior al 45% y aseguró que no serán afectadas prestaciones como aguinaldo, 40 días de vacaciones y 27 de prima vacacional, pero condicionó dicho incremento a la modificación del Contrato Colectivo del Trabajo (CCT), para que los puestos de confianza los ocupen personas ajenas al sindicato, con el propósito de lograr una buena administración de la institución; mencionó que si autoriza esta modernización el NMP se compromete a abrir 33 nuevas sucursales.

El presidente de la Junta de Asistencia Privada **Víctor García Lizama** negó las acusaciones que le hace el sindicato del NMP de que "tiene las manos metidas en el Patronato", ya que su administración es independiente de la junta que él preside.

Pablo Medina reiteró que el NMP no ha pagado bonificaciones a los trabajadores y que el Patronato antepone la modificación del CCT a las mejoras económicas de los trabajadores.

21 de diciembre de 1997.

El secretario general del Sindicato de Trabajadores del Nacional Monte de Piedad **Eugenio Joel González González**, denunció que el vocero del gremio Pablo Medina Maldonado, fue secuestrado la noche del viernes y no descartó que el Patronato del NMP esté detrás del atentado.

22 de diciembre de 1997.

Integrantes del Sindicato Nacional de Empleados y Trabajadores del Nacional Monte de Piedad y del Patronato del organismo acudirán hoy a la JFCA, a fin de discutir la existencia o no de la huelga.

Informó el dirigente del gremio **Eugenio Joel González González** que recibió una notificación de las autoridades laborales para acudir a una audiencia incidental, donde ambas partes en el conflicto expondrán sus razones sobre el movimiento.

23 de diciembre de 1997.

La Junta local de Conciliación y Arbitraje se reservó el derecho de calificar las pruebas aportadas por el Patronato y Sindicato del NMP, y 48 horas después se dará a conocer si la huelga en la institución es considerada como existente.

Eugenio Joel González González informó lo anterior y dijo buscará un acercamiento con el secretario del Trabajo y Previsión Social, **Javier Bonilla García**, y con el Jefe del Gobierno Capitalino Cuauhtémoc Cárdenas Solórzano, para plantearles los motivos de la huelga.

24 de diciembre de 1997.

La Comisión Laboral del Patronato emite un comunicado a los representantes de los medios de comunicación en donde enuncia:

- No haber entregado dinero a la dirigencia sindical con motivo de las revisiones del CCT.
- El Patronato nunca se ha negado al diálogo con la directiva sindical por lo cual extraña la prorroga a huelga hasta el 18 de diciembre, que en todo caso debió de haber estallado el 18 de Octubre.
- El Patronato reitera estar dispuesto a otorgar un aumento salarial superior al demandado por el Sindicato si se moderniza el CCT.
- Puestos de confianza sindicalizados.
- Seguridad en el Empleo.
- Abundantes prestaciones.
- Los donativos no afectan el aumento salarial.
- Y más empleos con la modernización.

26 de diciembre de 1997.

Las autoridades y los trabajadores tuvieron un segundo encuentro, sin haber llegado a ningún acuerdo.

Eugenio Joel González González recordó que el día 23 tuvo una reunión con el secretario A del Trabajo, Javier Moctezuma Barragán y el representante del Monte de Piedad, Carlos Rosel por instrucciones del titular de la dependencia **Javier Bonilla García**; encuentros que han sido informales promovidos por las autoridades de la Secretaría de Trabajo y Previsión Social (STYPS) a fin de que las partes hagan un esfuerzo por levantar la huelga, ya que hasta el momento cada cual sigue en su postura.

27 de diciembre de 1997.

El dirigente sindical dijo que el Patronato del NMP esta violando la ley, al anunciar que los pignorantes utilicen los bancos para pagar sus intereses o el total de su prenda empeñada. Debido a la huelga en su casa matriz y 32 sucursales, "por ley las fechas se tendrán que correr en sus respectivos pagos, para no afectar a miles de pignorantes".

28 de diciembre de 1997.

Posterior a una reunión entre 40 delegados y 120 coordinadores del SNMP acordaron mantener su demanda hasta ahora prevaleciente en las negociaciones y pidieron la destitución del funcionario **Víctor García Lizama** ante la STPS argumentando que no tiene representación legal y lejos de ayudar perjudica a los trabajadores.

Fernando López Álvarez vocal del comité general de huelga, informó que el día de ayer (27) entregaron toda la documentación de sus planteamientos sindicales a la STPS y será mañana 29 cuando se conozca la respuesta del Patronato de la institución.

Aseveró que de las 165 cláusulas que contiene el contrato, la institución quiere mutilar el 80% con engaños mediante una modernización.

2 de enero de 1998.

Sindicato y autoridades del NMP continuarán las pláticas este día en las instalaciones de la STPS con miras a solucionar la huelga.

Fernando López Álvarez explicó que el próximo día 9 se efectuará el recuento de los empleados en cada una de las 34 sucursales y la matriz del NMP. Los trabajadores del NMP están en espera del llamado de la STPS para continuar con las pláticas interrumpidas desde el día 27 de diciembre.

3 de enero de 1998.

Pablo Medina aseveró que falta voluntad por parte patronal, para resolver el conflicto laboral; confirmando esta información en la STPS; menciona así mismo que no ha habido acercamiento entre el patronato y los trabajadores debido a que la parte patronal está de vacaciones.

Agregó que el Patronato ha pretendido una acción "rompe huelgas" al decir que los pignorantes pueden pagar sus refrendos en Bital, lo cual no ha funcionado.

6 de enero de 1998.

El Patronato del NMP emite una información para el público usuario la cual es considerada acción rompe huelgas por el Sindicato, en la cual se menciona lo siguiente entre otra información :

Recuerde: El contrato de prenda celebrado con la institución, sigue vigente en todos sus términos, por lo que para evitar la comercialización de sus prendas deberán hacer oportunamente sus pagos mediante depósito a la cuenta indicada, en cualquier sucursal del Banco Bital.

7 de enero de 1998.

En este día, el Patronato emite un aviso a los trabajadores del NMP, pues uno de los representantes del Patronato dará un mensaje, con motivo del conflicto colectivo que se vive actualmente, dicho mensaje fue emitido por radio.

9 de enero de 1998.

El Patronato del NMP desistió del recuento de los trabajadores programado para el día de hoy a la 1:00 p.m.. Además en el mensaje radiofónico hizo un llamado a los empleados a que regresen a sus respectivos centros de trabajo y a cambio recibirán sus pagos salàriales y sus aguinaldos, así como aumentos salàriales sustantivos. A este respecto **Pablo Medina**, dijo que **Víctor García Lizama**, miente categóricamente y adelantándose al Juicio de la Junta Federal de Conciliación y Arbitraje quiere mantener inexistente la huelga.

Alán de Torre Lloverá explicó que si los trabajadores aceptan la modernización de CCT respetarán la fuente de empleo y recibirán prestaciones económicas, como tres y medio meses de sueldo por aguinaldo, 40 días de vacaciones por año, 27 días de salario por prima vacacional, 48 días de salario por premio de puntualidad, 60 días de salario por el Fondo de ahorro y los servicios médicos en hospitales privados.

En este sentido es que **Pablo Medina** asegura que los recursos utilizados por el Patronato son intimidatorios. Y que el Sindicato confía en la JFCA la cual es la encargada de dar a conocer su fallo ya se a en favor o en contra de los trabajadores.

Indica que en el momento están en revisión salarial tal como lo establece el CCT.

A su vez en el mensaje radiofónico el Patronato consideró que en el caso de que la JFCA declaré existente la huelga, el sindicato tendrá que promover, vía ordinaria el juicio de imputabilidad de la huelga y ésta podría durar muchos meses en perjuicio de los trabajadores y de los pignorantes.

La JFCA mediante la Secretaría Auxiliar de Huelgas Estalladas, emitió un comunicado del expediente número 111/5220/97, en el cual informa que Lorenzo de Jesús Roel Hernández, apoderado del NMP desistió del recuento de los trabajadores programado para hoy en cada una de las sucursales.

10 de enero de 1998.

La JFCA declaró legalmente existente la huelga del NMP que se mantiene desde el pasado 22 de diciembre. De esta manera el presidente de la JFCA, Alfredo Farid Barquet envió dicha notificación a la representación del Sindicato y del Patronato del NMP. Por lo que la STPS procederá a revisar la mesa de revisión contractual para que empresa y sindicato inicien las pláticas a fin de discutir la petición de 45% de aumento salarial que solicita el gremio de los 1800 trabajadores. A este respecto el titular de la STPS **Javier Bonilla García** instó a las partes a buscar en el diálogo una pronta solución a su conflicto, para lo cual las autoridades están en disposición de coadyuvar en su función de conciliación.

Eugenio Joel González González reiteró la propuesta hecha por parte del Sindicato de incremento del 45% y no a la mutilación.

El Patronato reitera su oferta salarial de 45% a cambio que la dirigencia salarial acepte negociar el CCT, pero comentó que se interpondrá una demanda de amparo ante las autoridades. Anunció que en 15 días presentarán un amparo ante los tribunales civiles, ya que el recuento de trabajadores, no es el único argumento para declarar válida una huelga. Confía en que el Sindicato cambie su postura, ya que con su actitud los trabajadores están perdiendo salario, prestaciones y comisiones, y si los tribunales "nos conceden el amparo lo único que les quedará es regresar a laborar".

11 de enero de 1998.

Joel González González, informó que mañana la STPS instalará la mesa de negociaciones para discutir la petición del gremio; y que están dispuestos a negociar con equidad, cordialidad y responsabilidad, pero no aceptarán la mutilación al CCT.

18 de enero de 1998.

El sindicato sigue con su postura y el Patronato, dice estar dispuesto a aumentar mas del 45% a cambio del recorte de 120 cláusulas del CCT porque "lastiman el funcionamiento de la institución". Y se compromete a basificar a 900 trabajadores, pagar el aguinaldo al siguiente día de que se levante la huelga, así como otras prestaciones económicas.

Por parte del Sindicato **Pablo Medina**, dice que el gremio encontró apoyo del gobierno capitalino y ayer llegaron los comités de huelga de otros estados, para ratificar apoyo.

20 de enero de 1998.

A pesar de haber flexibilizado sus posiciones ambas partes aún no hay acuerdos.

Joel González González reconoció que las negociaciones están "un poco enturbiadas" espera el Sindicato que el Patronato presente una respuesta definitiva a fin de que los representantes sindicales dialoguen con sus bases para explicarles cuales son las contrapuestas de la parte Patronal.

24 de enero de 1998.

El Patronato en voz de **Alán de Torre** menciona la existencia de un CCT y reglamento interior desproporcionado, fuera de realidad obtenido al amparo de componendas con Patronos anteriores, por un dirigente sindical que tiene más de 20 años de control corporativo sobre sus agremiados, por razones obvias el proceso de modernización administrativa afecta costos de poder de grupos que han querido convertir al NMP en un botín apoyándose en la impunidad de candados laborales del CCT.

Por su parte **Joel González González** denunció ante las autoridades de la STPS: "quieren obligarnos a firmar un convenio en donde se plasman los puros intereses del Patronato y con ello quieren dejar fuera a 900 trabajadores", lo cual no lo permitiremos.

26 de enero de 1998.

Las autoridades de la institución dan a conocer 26 cláusulas del contrato laboral que los líderes sindicales, "obstinadamente defienden" a pesar de las aberraciones jurídicas y administrativas que tiene.

Entre ellas, el nivel de educación mínima que requiere una persona para laborar ahí es la primaria, que el personal ocupe puestos de confianza, violando el artículo noveno de la Ley Federal del Trabajo; el goce de un número exagerado de días de descanso obligatorios - 17 - con pago de salario; así como permisos con goce de sueldo a los trabajadores que asistan a los congresos sindicales. Además la existencia de un escalafón ciego; que los mozos de la institución cubran temporalmente puestos de confianza cuando no haya personal de emergencia suficiente; la imposibilidad de que el patrón pueda invocar una causa de rescisión de contrato sin responsabilidad para la parte laboral, aún cuando el trabajador cometa una falta de suma gravedad por negligencia, y que la parte Patronal pague a cualquier trabajador seis meses de sueldo cuando se encuentre privado de su libertad a consecuencia de un delito imprudencial, entre otras.

28 de enero de 1998.

Mientras las negociaciones entre Patronato y Sindicato siguen estancadas; más de 2000 trabajadores marcharán en este día apoyados por sindicatos independientes, para pedir la destitución del actual Patronato de la institución y del presidente de la junta de asistencia privada **Víctor García Lizama**, apoyados por la UNT y de la Coordinadora intersindical Primero de Mayo.

Por otra parte el patronato anunció que iniciará el pago a jubilados de aguinaldos y las pensiones al día último de este mes, pues ellos son trabajadores inactivos y no tienen la culpa de los problemas laborales de la empresa.

29 de enero de 1998.

La marcha del día de ayer por parte del Sindicato fue apoyada por trabajadores de la U.N.A.M., del IMSS, de la UNT y de la Federación de Sindicatos de Bienes y Servicios.

Joel González González señaló que presentaron una demanda ante la PROFECO, con el propósito de que los pignorantes no se vean afectados por las disposiciones del Patronato, en el sentido de que si no paga los intereses o el valor de la prenda en una institución credicticia, la prenda empeñada será rematada al mejor postor.

15 de febrero de 1998.

COPARMEX Ante la Huelga en el Monte de Piedad.

En su carácter de sindicato de empleadores hacen pública su posición ante la huelga del NMP.

Entre algunas de sus observaciones y petición dice la COPARMEX:

Sabemos que el principal obstáculo que ha enfrentado el Patronato para lograr el pleno desarrollo del NMP lo constituye el actual CCT, plagado de vicios y anomalías que impide el correcto desempeño institucional.

Expresamos nuestro desacuerdo con las organizaciones sindicales, que no obstante con los nuevos tiempos laborales de nuestro país, se empeñan en seguir conservando anacrónicos esquemas de relaciones y costumbres entre los patrones y la planta laboral.

La situación que vive el NMP, afecta seriamente el entorno laboral, ya que de no encontrarse una solución apegada al derecho y a la razón, cualquier resultado negativo repercutirá invariablemente, como ejemplo en el sector productivo de nuestro país.

Exhortamos a las autoridades del trabajo para que en el ámbito legal de su competencia, facultades y atribuciones, intervengan decididamente en el conflicto colectivo coadyuvando a su pronta solución mediante la modernización del CCT en beneficio de los trabajadores de la institución, del proceso de la misma y de los fines asistenciales y humanitarios que le dan significado.

25 de febrero de 1998.

La comisión laboral del patronato emite un comunicado a los pignorantes en el cual garantiza la seguridad de las prendas durante el tiempo de la huelga.

26 de febrero de 1998.

La PROFECO y el NMP establecieron objetivos que garantizan la seguridad de los bienes de los pignorantes.

Entre esos acuerdos destacan que el dueño del artículo podrá venderlo al Montepío hasta el 100% del valor, y al término de la huelga puede recuperarlo mediante la compra o que el producto sea refrendado automáticamente. En caso de que el pignorante quiera vender su producto deberá presentar la boleta de empeño acompañada de la ficha de depósito del pago del préstamo, así como una identificación que le acredite como propietario. En caso de que el expropietario del artículo quiera recuperarlo deberá comprarlo en un término de 30 días a partir del fin de la huelga, y el precio que deberá pagar es el mismo en que lo vendió.

28 de febrero de 1998.

Joel González González propuso al Patronato ante la STPS que otorguen el aumento salarial del 45% a cambio de la firma de un documento en el cual se comprometen a reabrir las sucursales y una semana después continuar con las pláticas sin presión. Aseguró que si el Patronato acepta la propuesta, trabajarían a marchas forzadas en la revisión, punto por punto del contrato ley para que el conflicto ya no se alargue más.

El Comité Ejecutivo Nacional del Sindicato y el Comité Nacional de Huelga reanudaron la propuesta presentada en las instalaciones de la STPS.

3 de marzo de 1998.

Fueron insuficientes los recursos del Monte de Piedad en las 27 delegaciones de la PROFECO, pues se agotaron en las primeras horas de la aplicación del convenio de resguardo de objetos entre ambas instituciones, debido a la fuerte demanda por parte de los pignorantes que solicitaron prestamos sin intereses sobre sus prendas ya empeñadas.

Se habían destinado 20 000 pesos en cada delegación para realizar nuevos prestamos a pignorantes que habían pagado sus deudas anteriores pero con la excesiva demanda se espera incrementar los recursos, dijo Roberto Campa Cifrián procurador federal del consumidor.

5 de marzo de 1998.

La PROFECO rechazó las acusaciones del Sindicato del NMP que aseguran que con el programa de resguardo la PROFECO trata de obstaculizar la huelga. Lo único que está haciendo la institución es dar cumplimiento a la Ley Federal de Protección al Consumidor en lo concerniente al resguardo de derechos de los consumidores, aclaró.

8 de marzo de 1998.

La PROFECO informó que a partir del 9 de marzo suspenderá en forma temporal el servicio a pignorantes lo que implica que no comprará boletas y se mantiene vigente el sistema de refrendo automático. Asentó que el NMP reportó haber recibido una notificación de la agencia especial 14 de la JFCA, en el sentido de que giró oficios a los bancos en la

República Mexicana para que no paguen los cheques o los títulos de crédito expedidos por el Montepío. En virtud de esa resolución, el NMP solicitó a la PROFECO suspenda de manera temporal a partir de esta fecha, la aplicación en favor de los pignorantes.

10 de marzo de 1998.

La COPARMEX exigió a las autoridades de la STPS que revoquen inmediatamente el congelamiento de cuentas bancarias a nivel nacional del NMP, que fue emitido el pasado 4 de marzo, por la JFCA, ya que esto viola las normas y procedimientos establecidos en la Ley Federal del Trabajo.

En un comunicado, el sector patronal estableció que esa disposición además de representar un grave error que se convierte en una acción anticonstitucional, también es violatorio de las normas jurídicas y ocasiona graves perjuicios al sector productivo y a millones de mexicanos.

11 de marzo de 1998.

5 trabajadores inconformes del NMP, lidereados por Jesús Juárez vigilante de la institución se presentaron acompañados por 25 personas armados con palos, piedras, otros objetos y tres perros de ataque y quitaron las banderas de huelga, lo que casi ocasiona un enfrentamiento con los trabajadores que apoyan el movimiento de huelga. No paso a mayores al presentarse el director general de Trabajo y Previsión Social, Manuel Fuentes Muñiz, quien instó a ambas partes al diálogo. Luego de una hora de que el grupo disidente permaneció en el sitio el funcionario los invitó a retirarse y advirtió que de no hacerlo así utilizaría la fuerza pública.

A su vez el subsecretario de Trabajo y Previsión Social, Saúl Escobar Toledano dijo que el Gobierno capitalino garantizará el derecho de huelga y que se buscará privilegiar al diálogo antes que a la fuerza pública, pero advirtió que nadie puede entrar en un centro de trabajo que se encuentre en huelga.

Mientras tanto el STNMP presentó una demanda penal contra los responsables de la toma de la sucursal 17.

Por otra parte Javier Moctezuma Barragán subsecretario A del Trabajo informó que la STPS autorizó al gobierno capitalino para que intervenga en el movimiento de la huelga y rechazó que la decisión de congelar las cuentas bancarias de la institución sea ilegal.

12 de marzo de 1998.

El NMP abandonará la Confederación Revolucionaria de Obreros y Campesinos (CROC) por considerar una traición el que el dirigente de la CROC fuera quien patrocinara al grupo que intentó romper la huelga.

1o. de abril de 1998.

Los avances obtenidos en el conflicto del NMP son "insuficientes" para resolver la huelga en la institución, afirmó **Javier Bonilla García** y reconoció que subsisten rigideces fuertes.

17 de abril de 1998.

Bonilla García convocó al Sindicato y al Patronato del NMP para que a la brevedad establezcan un compromiso mínimo de arreglo".

22 de abril de 1998.

Alán de Torre acusa a la dirigencia gremial de mantener una actitud poco seria e irresponsable ya que había hecho la propuesta concreta de que aceptaba que los puestos que se encontraban pendientes pasaran a un grupo de confianza único. Posterior a ésto el Patronato hizo una oferta de incremento salarial (70%) la cual fue rechazada por el dirigente sindical quien demandó un aumento del 75%, el Patronato ofreció estudiar dicha demanda pero antes de que ésto sucediera ya el líder sindical había retirado su propuesta y en consecuencia ya no estaba de acuerdo en celebrar el convenio conciliatorio.

27 de abril de 1998.

Las autoridades del Distrito Federal solicitaron a las partes involucradas en el conflicto hagan un esfuerzo para conciliar sus posturas y poner fin a la huelga.

30 de abril de 1998.

Luego de la junta especial número 14, ésta junta y la JFCA acordaron poner fin al conflicto si la representación patronal acepta en el término de tres días a Cuauhtémoc Cárdenas como árbitro en el conflicto laboral.

9 de mayo de 1998.

El NMP solicitó el 1o. de mayo al Gobierno del D.F., Cuauhtémoc Cárdenas Solórzano que se desempeñara como árbitro en el conflicto laboral que afecta a esa institución.

El laudo que se emita, dice la solicitud presentada por el patrono residente apoderado general de la institución, deberá tratar sobre las reformas al CCT, el incremento salarial, y en su caso la huelga.

También la junta especial número 14 de la Junta Federal de Conciliación y Arbitraje fue informada de la notificación al Jefe del Gobierno Capitalino.

3 de junio de 1998.

El día 2 de junio Cuauhtémoc Cárdenas Solórzano emitió el laudo arbitral en torno al conflicto en el que establece un aumento global del 83% sobre el salario vigente; un incremento del 45% que deberá ser retroactivo a partir del 18 de octubre de 1997; el pago del 50% de los salarios caídos y 20% de aumento salarial a todos los trabajadores. Se decretó levantar la huelga a la una de la tarde; sin embargo se abrirá al público en un periodo de 10 a 15 días.

Además se prevé otro incremento salarial del 18% y quedará revisado de manera anticipada el CCT correspondiente del 9 de octubre de 1998 al 18 de octubre de 1999 con vigencia al día siguiente de la emisión del dictamen.

En el comunicado se mencionan las violaciones al CCT denunciadas por el Sindicato y el árbitro resolvió que el NMP tiene que cumplir estrictamente y en general con dicho contrato y con la Ley Federal del Trabajo.

Coma parte de la revisión anticipada del contrato también se resuelve un incremento de 300 a 500 pesos mensuales a los vales de despensa por parte de la institución y que tendrá vigencia a partir de hoy.

Se señaló que las plazas de gerentes e inspectores serán de confianza y en el caso de las categorías de perito valuador y perito valuador-inspector serán consideradas de confianza pero de obligada extracción sindical.

Se resolvió que no pueden ser consideradas de confianza las plazas de jefe de almoneda de sucursales locales y foráneas, ayudante de inspector y vigilantes, que se mantendrán dentro del régimen sindical en cuanto a los puestos de subcontador, auxiliar de contabilidad, jefe de seguridad y encargado de vigilancia diurna se resolvió que deben de ser considerados puestos de confianza.

Respecto a la jornada de trabajo se resolvió que la máxima permanecerá en 40 horas, por lo que se declara improcedente la solicitud de la institución de incrementar la jornada y la petición sindical para contabilizar la jornada extraordinaria a partir de 32.5 horas.

Sobre la seguridad social, el árbitro resolvió en torno a la modificación de la cláusula 105 del contrato de trabajo que es improcedente, por lo que se deberán conservar los derechos de seguridad social que prevé dicho contrato, sin menoscabo de que se proceda a la inscripción de los trabajadores al IMSS, previo acuerdo entre la institución y el sindicato.

Este laudo consta de 121 páginas, también señala la consecuencia del impacto social del conflicto y de los conflictos ocasionados a los pignorantes, por lo que se otorga un período especial de 15 días para regularizar las labores del Montepío, durante ese lapso se incluye la fijación de una jornada de trabajo con el pago de las respectivas horas extra, de 8 a 19 horas y los sábados de 8 a 15 horas.

Minutos antes de que se diera a conocer de manera oficial el laudo arbitral Cuauhtémoc Cárdenas Solórzano dijo que de existir inconformidad por las partes procedería a las autoridades laborales emitir un dictamen, situación que fue rechazada por el subsecretario del Trabajo Saúl Escobar y por el director general del Trabajo y Previsión Social, quienes reiteraron que el laudo debe ser aceptado por ambas partes.

En el documento se indica que el dictamen tiene carácter de cosa juzgada e inapelable, por lo que las partes asumieron que con éste se daría por terminado el conflicto.

4 de julio de 1998.

El NMP cumplió con los pagos saláriales a todos los trabajadores sindicalizados, así como los aguinaldos correspondientes a 1997 y salarios caídos del periodo de huelga, informó el coordinador jurídico de la institución Justo Manzur, quien afirmó que con ello se ha cumplido de manera estricta con el laudo arbitral. Anunció además que a partir del día 6 estarán abiertas las puertas todas las sucursales para que los pignorantes puedan realizar sus operaciones de empeño, desempeño y refrendo de forma ágil.

Agosto de 1998.

Joel González González advirtió que podrían iniciar una nueva huelga, puesto que no ha sido cumplido en su totalidad el laudo arbitral, ya que se han encontrado con irregularidades en el pago salarial de varios de los trabajadores, con descuentos indebidos.

1.7 CONSEJO A LOS NEGOCIADORES

¿Cuáles serían los atributos, las capacidades, el comportamiento, que harán que un negociador fuese más efectivo? ¿Hay algún tipo de persona que sea mejor negociador que los demás? ¿Influyen los papeles del sexo en la dinámica de la negociación?, por último, ¿hay reglas o lineamientos generales que pueden ser utilizados por cualquier negociador en situaciones de regateo distributivo?.

El cuadro siguiente representa las calificaciones que da un grupo de 32 altos funcionarios a las características de un negociador efectivo. Las cuales son calificadas sobre la base de una escala de cinco puntos. En el cuadro las siglas SI, SGI, I, MI y EI significan: sin importancia, sin gran importancia, importante, muy importante y extremadamente importante.

		Calificación					
		SI	SGI	I	MI	EI	
	Características	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Media
1.	Preparación y capacidad de planificación.	0	0	0	6	26	4.8
2.	Conocimiento del tema que se está negociando.	0	0	1	10	21	4.5
3.	Capacidad para pensar clara y rápidamente bajo presión.	0	1	1	10	20	4.5
4.	Capacidad para expresar ideas verbalmente.	0	0	3	12	1	4.4
5.	Habilidad para escuchar.	0	0	4	12	16	4.4
6.	Juicio e inteligencia general.	0	0	6	11	14	4.3
7.	Integridad.	0	0	8	9	15	4.2
8.	Capacidad de convencimiento.	0	1	6	14	11	4.1
9.	Paciencia.	1	2	8	8	12	4.0
10	Decisión.	0	3	6	13	9	3.9
11	Capacidad para ganar el respeto y la confianza del oponente	0	1	12	10	9	3.8
12	Capacidad analítica para resolver problemas generales.	0	2	11	11	8	3.8
13	Autocontrol, especialmente de emociones y su visibilidad.	2	3	7	9	11	3.8
14	Percepción de los sentimientos de otras personas.	1	3	6	13	9	3.8
15	Persistencia y determinación.	0	1	12	15	4	3.7
16	Capacidad para percibir y explotar las facultades disponibles para alcanzar el objetivo.	0	2	12	11	7	3.7
17	Percepción de necesidades y reacciones escondidas propias y de la organización del oponente.	0	4	12	10	6	3.6
18	Capacidad para conducir y controlar los miembros de su propio equipo o grupo.	0	4	12	11	5	3.6
19	Experiencia de negociación previa.	0	3	8	13	8	3.5
20	Sentido de seguridad personal.	2	3	8	13	5	3.5
21	Amplitud de criterio(tolerancia de otros puntos de vista).	0	0	3	12	17	3.5
22	Competitividad (deseos de competir y ganar).	1	2	14	10	5	3.5
23	Habilidad en cuanto a comunicar y coordinar diversos objetivos dentro de la propia organización.	0	5	15	9	3	3.3
24	Capacidad de debate(habilidad para formular preguntas y respuestas en la mesa).	0	6	16	7	3	3.2
25	Voluntad de que se esté en control del riesgo.	2	6	13	9	2	3.2
26	Capacidad para representar varios papeles o posturas de negociación.	2	7	15	4	4	3.0
27	Status o rango de la organización.	5	7	11	6	3	2.8
28	Tolerancia a la ambigüedad e incertidumbre.	5	7	14	5	1	2.7
29	Capacidad para comunicarse mediante lenguaje no verbal.	5	10	8	6	2	2.7
30	Temperamento para transigir.	5	12	5	7	3	2.7
31	Personalidad atractiva y sentido del humor	6	6	12	7	1	2.7
32	Temperamento confiable.	9	5	12	5	1	2.5
33	Disposición para asumir riesgos por arriba del promedio de los riesgos de negocios o carrera.	5	10	13	4	0	2.5
34	Disposición para evitar el empleo de la fuerza y amenazas.	6	10	11	3	2	2.5

Fuente: Adaptado por John Hammond de la obra de Karrass (1968), pp. 242-244.

Figura 6. Características de un negociador efectivo.

Capítulo 2.

Introducción a la Teoría de Gráficas y a la Teoría de Juegos.

2.1 TEORÍA DE GRÁFICAS

En esta sección se analizan relaciones entre miembros de un conjunto dado, para lo cual es necesario saber aritmética de matrices.

Observemos que existe un gran número de conjuntos numerables los cuales guardan relaciones entre sus elementos. Por ejemplo un conjunto cuyos elementos son países, líneas aéreas, industrias y equipos deportivos, y la manera en que éstos se relacionan podría ser en que el país A tiene libre comercio con el país B, la línea aérea K tenga un vuelo directo del país B al país C, entre otras. Para modelar en forma matemática estas relaciones se utiliza Teoría de Gráficas. Una ***gráfica dirigida*** consta de un conjunto de elementos $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ y parejas distintas (P_i, P_j) llamados vértices y aristas con dirección, respectivamente, así la pareja (P_i, P_j) indica que la arista esta dirigida del vértice P_i al vértice P_j y se denota $P_i \rightarrow P_j$ lo cual leemos "P_i esta conectado a P_j". Para visualizar una gráfica dirigida hagamos corresponder a cada vértice con un punto en el plano y cada arista con una línea o un arco al cual adicionamos una flecha que indica la dirección de la conexión, sucede también en gráficas dirigidas que $P_i \rightarrow P_j$ y $P_j \rightarrow P_i$ en cuyo caso esto de denota $P_i \leftrightarrow P_j$ y geométricamente a la arista se le adicionan dos flechas que apuntan en sentidos opuestos. Es posible también en una gráfica dirigida que existan vértices que están conectados entre sí mismos y/o que haya vértices aislados. *Para ejemplificar* esto observemos la figura 7. En donde P_5 y P_6 están conectados sólo entre sí mismos y P_7 esta aislado. De lo dicho anteriormente subrayamos que la pareja (P_i, P_i) no existe gráficamente, es decir P_i no puede estar conectado así mismo por sólo una arista.

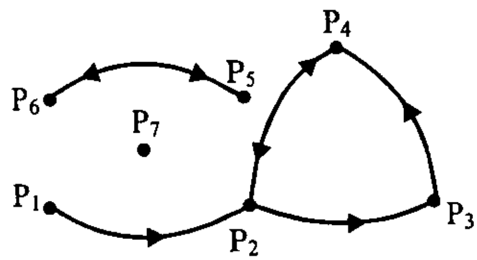


Figura 7.

Sí se tiene una gráfica dirigida con n vértices es posible asociar a ésta una matriz M_{nxn} llamada ***matriz de vértices*** de una gráfica dirigida y sus elementos se definen:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } P_i \rightarrow P_j, \forall i, j = 1, \cdots, n \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Así la matriz de vértices de la gráfica dirigida de la figura 7 es:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \end{array} \\
M = & \left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{array}
\end{array}
$$

Figura 8.

Así como fue definida la matriz de vértices este tipo de matrices tienen las dos siguientes propiedades:

1°. Cada entrada de la matriz o es cero o es uno.

2°. Las entradas de la diagonal son todas iguales a cero.

Inversamente, sí una matriz M tiene las dos propiedades anteriores, determina una gráfica dirigida de la que M es matriz de vértices. Tómese como *ejemplo* la siguiente matriz M que determina la gráfica dirigida de la figura 9.

$$
M = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

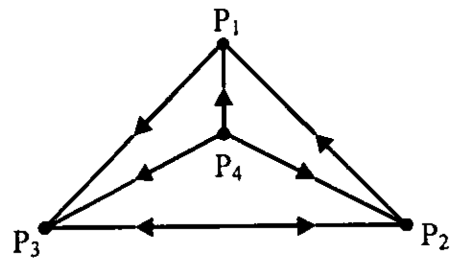


Figura 9.

Ejemplo: en ajedrez el caballo (C) se mueve en un aspecto configurado "L", haciendo referencia a la figura 10, puede moverse verticalmente un cuadro y entonces horizontalmente dos cuadros u horizontalmente un cuadro y entonces verticalmente dos cuadros. Así del cuadro central en el que se encuentra el caballo en la figura 10 puede moverse a cualquiera otro de los 8 cuadros con dibujo del tablero. Supongamos que el caballo es restringido a los 9 cuadros de la figura 11, denotamos $i \rightarrow j$ el movimiento del caballo del cuadro i al cuadro j, si este movimiento existe. En la figura 12 se dan todos los posibles movimientos que puede hacer en estos 9 cuadros el caballo y en la figura 13 se encuentra desenredada la gráfica dirigida de la figura 12.

	C		C	
C				C
		C		
C				C
	C		C	

Figura 10.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 11.

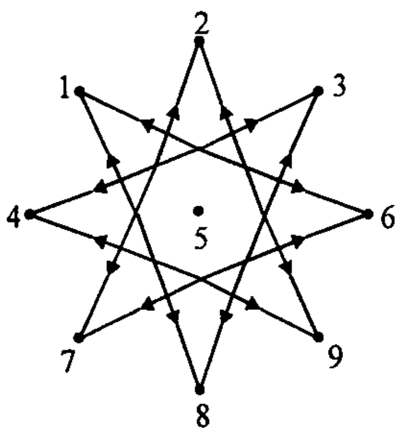


Figura 12.

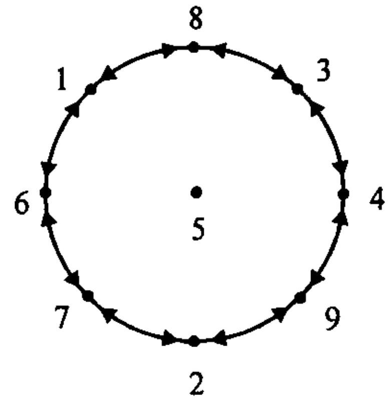


Figura 13.

Y la matriz asociada a la gráfica dirigida de la figura 13 es:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 14.

Una pequeña línea aérea tiene vuelos desde las siguientes ciudades: D.F., Guadalajara, Sonora, Colima, Mérida y Tabasco y da servicios de vuelos directos del D.F. a Guadalajara y Tabasco, de Guadalajara a Sonora, Tabasco, D.F y Colima, de Sonora a Colima, de Colima a Guadalajara, de Tabasco a Mérida, Guadalajara, Colima y D.F. y de Mérida a Colima.

Mediante una gráfica dirigida podemos modelar el patrón de vuelos de esta pequeña línea aérea, en donde los vértices son las ciudades y estos son nombrados mediante la letra inicial del nombre de la ciudad que representan; denotamos $A \to B$, si hay un vuelo directo de la ciudad A a la ciudad B, tal gráfica dirigida es representada en la figura 15 y su matriz de vértices es la siguiente:

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} D & G & M & T & C & S \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

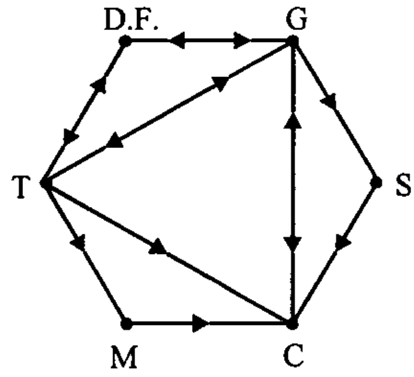


Figura 15.

Observamos que la línea aérea no tiene un vuelo directo del D.F a Sonora, sin embargo si alguna persona quisiera viajar en esta línea aérea del D.F. a Sonora, primero tendría que viajar del D.F. a Guadalajara y entonces de Guadalajara viajar a Sonora, tal recorrido lo escribimos de la siguiente manera $D \to G \to S$ y lo llamamos una conexión 2-pasos del D.F. a Sonora, así mismo $T \to M$ lo llamamos una conexión 1-paso de Tabasco a Mérida y $C \to G \to T \to M$, conexión 3-pasos y por tanto fortaleza. Ahora consideramos una técnica para identificar las conexiones r-pasos de una gráfica dirigida arbitraria (incluye el caso en que un vértice esta conectado consigo mismo mediante una o varias conexiones r-pasos). La conexión 1-paso de P_i a P_j es $1 = m_{ij} \in M$, con M matriz de vértices de la gráfica dirigida dada. Para determinar el número de conexiones 2-pasos de P_i a P_j, consideremos M^2, permítase ser $m_{ij}^{(2)}$ el (i,j)-ésimo elemento de M^2, así:

$$m_{ij}^{(2)} = m_{i1}m_{1j} + \cdots + m_{in}m_{nj}$$

Sí $m_{i1} = m_{1j} = 1$ existe una conexión 2-pasos de P_i a P_j: $P_i \to P_l \to P_j$; pero si $m_{i1} = 0$ ó $m_{1j} = 0$, entonces no es posible tal conexión. De esta forma hay una conexión 2-pasos de P_i a P_j sí y solo sí $m_{i1} * m_{1j} = 1$, en el lado derecho de la ecuación, en otro caso el término es cero. Análogamente para cualquier k=1,...,n, $P_i \to P_k \to P_j$ es una conexión 2-pasos de P_i a P_j si y sólo sí $m_{ik} * m_{kj} \neq 0$. Así el número de conexiones 2-pasos de P_i a P_j es el lado derecho de la ecuación.

Para determinar las conexiones de 3-,4-, ..., n-pasos de P_i a P_j se utiliza un argumento análogo al anterior. En general se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1

Permítase ser M la matriz de vértices de una gráfica dirigida y permítase ser $m_{ij}^{(r)}$ el (i,j)-ésimo elemento de M^r. Entonces $m_{ij}^{(r)}$ es igual a el número de conexiones r-pasos de P_i a P_j.

Ejemplo. Tenemos la matriz de vértices M de la gráfica dirigida de la figura 16.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

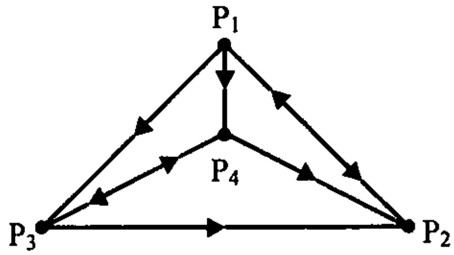


Figura 16.

se tiene:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 17.

Si lo que requerimos es saber el número de conexiones de P_4 a P_3, utilicemos el Teorema 2.1.1; así ya que $m_{43} = 1$, hay una conexión 1-paso de P_4 a P_3, como $m_{43}^{(2)} = 0$, no hay conexiones 2-pasos de P_4 a P_3 y puesto que $m_{43}^{(3)} = 2$ hay dos conexiones tres pasos de P_4 a P_3. Para verificarlo se tiene de la gráfica (figura 16):

Conexiones 1-paso de P_4 a P_3: $P_4 \to P_3$

Conexiones 3-pasos de P_4 a P_3: $P_4 \to P_2 \to P_1 \to P_3$ y $P_4 \to P_3 \to P_4 \to P_3$.

Cliques.

Un ***clique*** es un grupo de personas (no menos de tres) estrechamente unido que tiende a comunicarse dentro de sí mismo y no tiene lugar para extraños. En Teoría de Gráficas este concepto es definido de la siguiente manera:

Definición 2.1.2

Un subconjunto de una gráfica dirigida es llamado un ***clique*** si este satisface las siguientes tres condiciones:

i) El subconjunto contiene al menos tres vértices.

ii) Para cada par de vértices P_i y P_j en el subconjunto, ambas $P_i \to P_j$ y $P_j \to P_i$ son ciertas.

iii) El subconjunto es lo más grande posible, es decir no es posible agregar otro vértice al subconjunto y siempre satisface la condición ii).

Supongamos *por ejemplo* una gráfica dirigida en donde los vértices representan países y las aristas representan el libre comercio entre los países, sí $P_i \rightarrow P_j$ quiere decir que el país P_i tiene libre comercio con el país P_j, entonces hay libre comercio entre los dos países en un clique en cualquiera de las dos direcciones.

La figura 18 muestra una gráfica dirigida con dos cliques: $\{P_2, P_4, P_6, P_8\}$ y $\{P_4, P_5, P_6\}$.

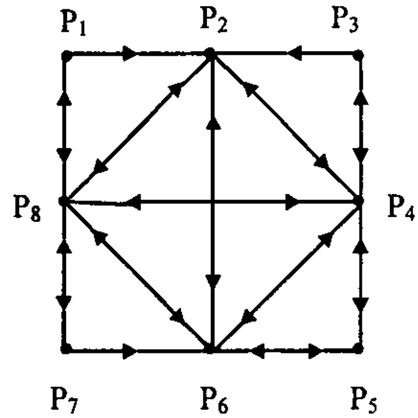


Figura 18.

De esta figura observamos que en una gráfica dirigida puede haber más de un clique y que un vértice puede pertenecer a más de un clique a la vez en una gráfica dirigida.

Identificar cliques por observación puede no resultar tan sencillo; sobretodo si la gráfica dirigida es muy grande. Analizaremos un teorema que sirve para identificar vértices que pertenecen a cliques, para el cual nos será de gran utilidad definir la matriz $S=[s_{ij}]$ correspondiente a la gráfica dirigida dada de la manera siguiente:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } P_i \leftrightarrow P_j \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz S puede obtenerse de la matriz de vértices M de la gráfica dirigida dada, escribiendo $s_{ij} = 1$, sí $m_{ij} = m_{ji} = 1$ y $s_{ij} = 0$ en otro caso.

La gráfica dirigida determinada por S se obtiene a través de la gráfica dirigida original borrando de ella las aristas que no tengan flechas en dos sentidos.

Por ejemplo, sí la gráfica dirigida está ilustrada en la figura 19(a), la gráfica dirigida determinada por S esta ilustrada en la figura 19(b).

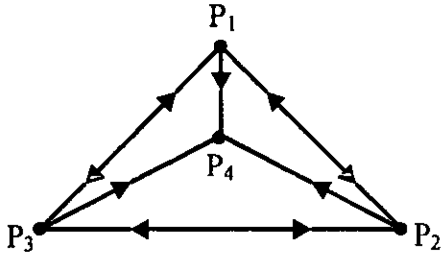


Figura 19 (a).

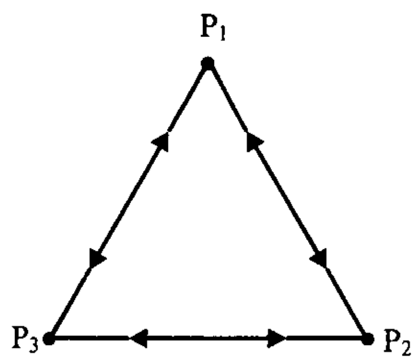


Figura 19 (b).

Teorema 2.1.3

Permítase ser $s_{ij}^{(3)}$ el (i,j)-ésimo elemento de S^3. Entonces un vértice Pi pertenece a algún clique sí y sólo sí $s_{ii}^{(3)} \neq 0$.

Demostración:

$\Leftarrow$] Sí $s_{ii}^{(3)} \neq 0$ quiere decir que Pi tiene almenos una conexión 3-pasos consigo mismo en la gráfica dirigida modificada determinada por S. Podría ser $P_i \rightarrow P_j \rightarrow P_k \rightarrow P_i$, pero en una gráfica dirigida modificada todas las relaciones dirigidas son dos caminos, así que $P_i \leftrightarrow P_j \leftrightarrow P_k \leftrightarrow P_i$ es cierta. Pero esto significa que $\{P_i, P_j, P_k\}$ es un clique o un subconjunto de un clique, en cualquier caso P_i debe pertenecer a algún clique.

$\Rightarrow$] Supongamos que P_i pertenece a algún clique. Supongamos que tal clique es $\{P_i, P_j, P_k\}$, podemos suponer sin perder generalidad que tal clique es único en la gráfica dirigida y por tanto en la gráfica dirigida modificada, ya que si no fuera único, y concluimos que $s_{ii}^{(3)} = c \neq 0$, entonces el valor c de $s_{ii}^{(3)}$ podría ser mayor del valor que tiene por pertenecer solamente al clique $\{P_i, P_j, P_k\}$ dependiendo de sí P_i pertenece simultáneamente a más de un clique. Por definición debe ser que $P_i \leftrightarrow P_j$, $P_j \leftrightarrow P_k$ y $P_k \leftrightarrow P_i$ lo cual en la gráfica dirigida modificada son las dos conexiones 2-pasos de los vértices P_i, P_j y P_k consigo mismos. Para comprobarlo basta con observar las entradas $s_{ii}^{(2)}$, $s_{jj}^{(2)}$ y $s_{kk}^{(2)}$ de S^2 donde S es la matriz de vértices de la gráfica dirigida modificada, ya que por el Teorema 2.1.1 sabemos que $k = s_{ii}^{(2)}$ es el número de conexiones 2-pasos de P_i a P_j que incluye el caso en que $P_i = P_j$. Por el mismo teorema sabemos que las entradas de la matriz S^3 representan en valor la cantidad de conexiones 3-pasos que el vértice P_i tiene hacia el vértice P_j. En particular nos damos claramente cuenta que P_i tiene dos conexiones 3-pasos consigo mismo, ya que $s_{ii}^{(3)} = 2$. Esto prueba que si P_i pertenece a un clique $s_{ii}^{(3)} \neq 0$. Para verificar se tienen S, S^2 y S^3.

$$S = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & i & & & & j & & & & k & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$S^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & i & & & & j & & & & k & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$
S^3 = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & i & & & & j & & & & k & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Figura 20.

Ejemplo. Considere la siguiente matriz de vértices; empleando el teorema 2.1.3 encuentre los cliques en la correspondiente gráfica dirigida.

$$
M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 7 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 8 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 8 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}
$$

Figura 21.

Como los elementos $s_{33}{}^{(3)} = 2$, $s_{44}{}^{(3)} = 2$ y $s_{66}{}^{(3)} = 2$ de la matriz S^3 son diferentes de cero, quiere decir que P_3, P_4 y P_6 pertenecen a un clique. Y puesto que un clique debe contener al menos tres vértices, entonces la gráfica dirigida cuya matriz de vértices es M tiene sólo un clique: $\{P_3, P_4, P_6\}$.

Gráficas Predominio-Dirigidas.

En muchos grupos de personas o animales hay definida una relación predominio entre cualesquiera dos miembros del grupo, es decir, dados A y B miembros cualesquiera del grupo sucede sólo una de las dos relaciones siguientes: A domina a B ó B domina a A. En términos de una gráfica dirigida en la cual $P_i \rightarrow P_j$ significa que P_i domina a P_j y que para todo par de vértices sucede sólo una de las dos conexiones siguientes: $P_i \rightarrow P_j$ ó $P_j \rightarrow P_i$. Enunciamos a continuación la definición general de esta relación.

Definición 2.1.4

Una ***gráfica predominio-dirigida*** es una gráfica dirigida tal que para todo par distinto de vértices P_i y P_j una de dos $P_i \rightarrow P_j$ ó $P_j \rightarrow P_i$ pero no ambas.

Un ejemplo de gráfica dirigida que satisface esta definición es la de un torneo de n equipos deportivos en el que juegan uno a otro sólo una vez y no son admitidos los empates. Sí $P_i \to P_j$ quiere decir que P_i vence a P_j en su simple juego. Por esto una gráfica predominio-dirigida es algunas veces llamada torneo.

Las siguientes dos gráficas dirigidas de la figura 22 tienen contenidos en círculos alguno o algunos de sus vértices los cuales poseen la siguiente característica: de cada uno de ellos hay una conexión 1-paso o una conexión 2-pasos a cualquier otro vértice de la gráfica. En un torneo deportivo estos vértices corresponderían a los más "poderosos" equipos en el sentido que estos equipos venzan a un equipo dado o venzan a un equipo que venza al equipo dado.

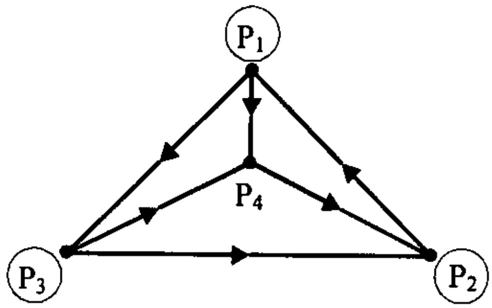


Figura 22(a).

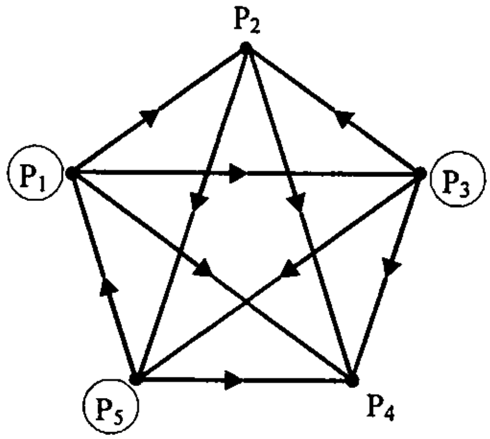


Figura 22(b).

El siguiente Teorema garantiza que en toda gráfica predominio-dirigida existe por lo menos un vértice con esta propiedad.

Teorema 2.1.5

En cualquier gráfica predominio-dirigida hay al menos un vértice del cual hay una conexión 1-paso o una conexión 2-pasos a cualquier otro vértice.

Demostración.

Considere un vértice con el mayor número total de conexiones 1-paso y 2-pasos a otros vértices (pueden considerarse más de uno). Sí numeramos los vértices de forma decreciente por el número de conexiones 1-paso y 2-pasos que cada uno tiene, podemos suponer que P_l es este vértice. Supongamos que P_i es un vértice para el cual P_l no tiene conexiones 1-paso y 2-pasos, en particular $P_l \to P_i$ es falso, entonces por definición de gráfica predominio-dirigida debe ser que $P_i \to P_l$. Permítase ser P_k un vértice tal que $P_l \to P_k$ es cierto, no podría ser que $P_k \to P_i$, pues si fuera cierto P_l tendría una conexión 2-pasos a P_i, debe entonces ser que $P_i \to P_k$ significa que P_i tiene conexiones 1-paso a cada uno de los vértices a los cuales P_l tiene conexiones 1-paso, en consecuencia P_i tiene conexiones 2-pasos a todos los vértices a los cuales P_l tiene conexiones 2-pasos. Por tanto $P_i \to P_l$ significa que P_i tiene más conexiones 1-paso y 2-pasos a otros vértices que P_l. Pero esto contradice el hecho bajo el cual se eligió a P_l. Por lo que no puede ser P_i el vértice para el cual P_l no tiene conexión 1-paso o conexión 2-pasos en la gráfica predominio-dirigida. Por lo tanto $P_l \to P_i$ ó $P_l \to P_k \to P_i$.

Se concluye de la demostración anterior que un vértice con el mayor número total de conexiones 1-paso y 2-pasos a otros vértices en una gráfica predominio-dirigida tiene la propiedad enunciada en el Teorema.

Para identificar de manera fácil tales vértices se utiliza M la matriz de vértices de la gráfica dirigida y M^2; es decir sí sumamos los elementos de la i-ésima línea de M obtenemos el total de conexiones 1-paso que tiene el vértice P_i a otros vértices, así mismo la suma de los elementos de la i-ésima línea de M^2, nos da el total de conexiones 2- pasos que tiene el vértice P_i a otros vértices; en consecuencia la suma de los elementos de la i-ésima línea de $A = M + M^2$ es el total de conexiones 1-paso y 2-pasos que tiene el vértice i a otros vértices. De esta manera la línea de A que tenga la suma mayor identifica un vértice con la propiedad enunciada en el Teorema 2.1.5.

Ejemplo. Supongamos que cuatro jugadores de tenis juegan uno contra otro solamente una vez, los resultados de estos juegos se representan en la gráfica predominio-dirigida de la figura 23 cuya matriz de vértices es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

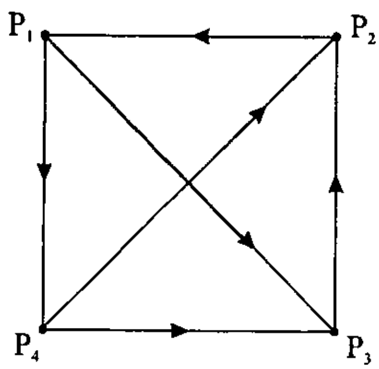


Figura 23.

entonces:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = M + M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo la suma de los elementos de A por línea se tiene que:

1ª. Suma línea = 5

2ª. Suma línea = 3
3ª. Suma línea =2
4ª. Suma línea =4

Ya que la primera suma línea es la mayor de A, esta indica que el vértice 1 tiene una conexión 1-paso o una conexión 2-pasos a cualquier otro vértice.

Para formalizar ahora el concepto de un vértice poderoso tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.6

El ***poder de un vértice*** de una gráfica predominio-dirigida es el número total de conexiones de 1-paso y 2-pasos de éste a otros vértices. Alternativamente, el poder de un vértice P_i es la suma de las entradas de la i-ésima línea de la matriz $A = M + M^2$, en donde M es la matriz de vértices de la gráfica dirigida.

Del ejemplo anterior se tiene que:
El poder del tenista $P_1 = 4$
El poder del tenista $P_2 = 3$
El poder del tenista $P_3 = 2$
El poder del tenista $P_4 = 0$

Y una clasificación a los tenistas de acuerdo a sus poderes es:
P_1 primer lugar, P_4 segundo lugar, P_2 tercer lugar y P_3 cuarto y último lugar.

2.2 TEORÍA DE JUEGOS

En esta sección se analiza un juego en general, de dos personas en el cual cada uno de los jugadores elige su estrategia óptima de manera independiente. En algunos casos la estrategia óptima de cada jugador es encontrada utilizando técnicas de matrices. Por lo que es requisito en esta sección saber multiplicación de matrices y conceptos básicos de probabilidad.

Para introducir los conceptos de Teoría de Juegos supongamos que dos personas acuerdan en jugar el siguiente juego de ruleta. Llamemos a dichas personas: jugador R y jugador C. Cada jugador tiene un círculo fijo con una flecha detenida de su centro pero movible, él círculo del jugador R está dividido en tres sectores numerados 1, 2 y 3 y el del jugador C en 4 sectores numerados1, 2, 3 y 4, como se indica en la figura 24; en ambos casos la fracción de área que ocupa cada sector esta indicada por fuera del círculo correspondiente, próxima al sector.

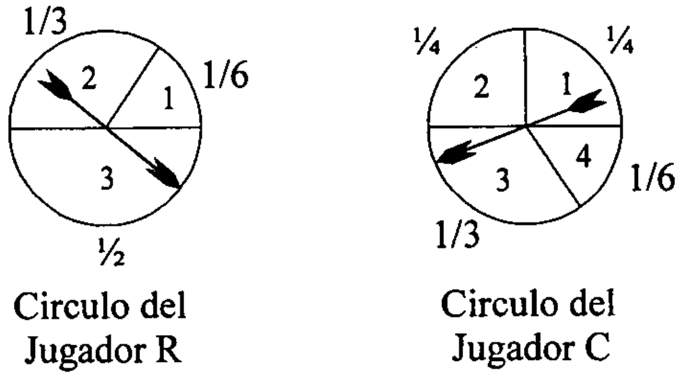


Figura 24.

Para jugar: cada jugador hace girar la flecha de su respectivo círculo y en el sector que ésta se detiene (al azar) es llamado el ***movimiento*** del jugador correspondiente; de esta manera cada jugador puede hacer tantos movimientos como sectores tenga su círculo. Depende del movimiento hecho por cada jugador, el jugador C hace un ***pago*** al jugador R en dinero, tal como está indicado en la siguiente tabla.

		Movimientos del jugador C			
		1	2	3	4
Movimientos	1	\$3	\$5	-\$2	-\$1
Del	2	-\$2	\$4	-\$3	-\$4
jugador R	3	\$6	-\$5	\$0	\$3

Figura 25. Tabla de pagos de C a R.

Por ejemplo sí la flecha del circulo del jugador R se detiene en el sector 3 y sí la flecha del circulo del jugador C se detiene en el sector 1, significa que el jugador C pagará al jugador R \$6. Algunas de las entradas de la tabla son negativas lo que indica que el jugador R hará el pago al jugador C nombrado pago negativo del jugador C. Por lo cual las entradas positivas de

Llamamos a el vector línea p la ***estrategia del jugador R*** y al vector columna q la ***estrategia del jugador C***.

Así las estrategias de los jugadores del juego de la ruleta son:

$$p = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad\qquad q = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Tenemos que si la probabilidad de que el jugador R haga el movimiento i es p_i e independientemente la probabilidad de que el jugador C haga el movimiento j es q_j, entonces la probabilidad de que en una jugada cualquiera del juego el jugador R haga el movimiento i y el jugador C haga el movimiento j es $p_i q_j$.

Puesto que a_{ij} es el pago que el jugador C hace al jugador R, sí R hace el movimiento i y C hace el movimiento j, entonces $p_i q_j$ también es la probabilidad de que en una jugada cualquiera del juego el pago al jugador R sea $a_{ij} \in M_{m\times n}$. Para determinar el valor esperado del pago o el pago promedio para el jugador R, después de un número muy grande de juegos, se determina multiplicando cada uno de los pagos por su correspondiente probabilidad y sumando los resultados. De esta manera el ***pago esperado*** para el jugador R es:

$$a_{11} p_1 q_1 + a_{12} p_1 q_2 + \cdots + a_{1n} p_1 q_n + \cdots + a_{m1} p_m q_1 + \cdots + a_{mn} p_m q_n$$

El cual denotamos por ***E(p,q)***. Es claro que el pago esperado para el jugador C es ***-E(p,q)***.

En base a las definiciones de la matriz de pagos y las estrategias p y q, podemos expresar matricialmente $E(p,q)$ como:

$$E(p,q) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = pAq$$

Ejemplo. Supóngase que un juego tiene la siguiente matriz de pagos:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -4 & 1 \\ 5 & -7 & 3 & 8 \\ -8 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Figura 27.

Y los jugadores R y C usan respectivamente las estrategias:

$$p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces que el pago esperado para el jugador R por jugada es:

$$E(p,q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 6 & -4 & 1 \\ 5 & -7 & 3 & 8 \\ -8 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = -\frac{5}{8} = -.625$$

Y el pago esperado para el jugador C por jugada es: .625

Supongamos ahora que ambos jugadores pueden cambiar sus estrategias de manera independiente. Por ejemplo; que en el juego de la ruleta se permitiera a ambos jugadores alterar las áreas de los sectores de sus círculos, con esto alterarían las probabilidades de sus movimientos; lo cual cambia cualitativamente el problema. Asumimos que cada jugador hará el mejor cambio de estrategia, lo cual sabe el otro jugador, asumimos también que ningún jugador conoce la estrategia que el otro jugador empleará. Así el jugador R pretende elegir una estrategia p tal que $E(p,q)$ sea lo mayor posible para la mejor estrategia q que el jugador C pueda elegir, así mismo, el jugador C pretende elegir una estrategia q tal que $E(p,q)$ sea lo menor posible para la mejor estrategia p que el jugador R pueda elegir. Para comprender tales cambios será necesario el siguiente teorema, llamado Teorema fundamental de juegos de suma cero de dos personas.

Teorema 2.2.1

Existen estrategias p^* y q^* tales que

(1) $$E(p^*,q) \geq E(p^*,q^*) \geq E(p,q^*)$$

para todas las estrategias p y q.

p^* y q^* en este teorema son las estrategias óptimas de los jugadores R y C respectivamente. Para verlo, asignemos $v = E(p^*,q^*)$, de esta forma, la desigualdad izquierda de la expresión (1) queda:

$$E(p^*,q)\geq v \qquad \text{para toda estrategia } q$$

significando que el pago esperado para el jugador R nunca será menor que v. Además tampoco podrá ser mayor que v. Veamos por qué; supongamos que existe p^{**} tal que:

$$E(p^{**},q)> v \qquad \text{para toda estrategia } q$$

En particular:

$$E(p^{**},q^*)> v$$

Lo cual contradice la desigualdad derecha de la expresión (1), que requiere que:

$$E(p^{**},q^*)\leq v$$

Así lo mejor que puede hacer el jugador R es elegir una estrategia tal que impida que el pago esperado sea menor que el valor de v. De forma semejante, si el jugador C escoge la estrategia q^*, por la desigualdad (1) se tiene se tiene

$$v\geq E(p,q^*) \qquad \text{para toda estrategia } p$$

Es decir, el pago esperado por el jugador R nunca será mayor que v si el jugador C escoge la estrategia q^*, sin importar la estrategia que escoja el jugador R.

En forma similar, el jugador R debe siempre escoger la estrategia p^* para forzar que su pago sea por lo menos igual a v, éste será el valor del juego.

Con base en lo anterior pueden darse las siguientes definiciones:

Definición 2.2.2

Sí p^* y q^* son estrategias tales que

$$E(p^*,q)\geq E(p^*,q^*)\geq E(p,q^*)$$

para todas estrategias p y q, entonces:

i) p^* es llamada una ***estrategia óptima para el jugador R***

ii) q^* es llamada una ***estrategia óptima para el jugador C***

iii) $v = E(p^*,q^*)$ es llamado el ***valor del juego***.

Esta definición no indica que las estrategias óptimas tengan que ser únicas. Sin embargo puede verificarse que cualquier par de estrategias óptimas siempre resultan en el mismo valor del juego. Así sí p^* y q^* y p^{**} y q^{**} son estrategias óptimas, entonces:

$$E(p^{**},q^{**})= E(p^*,q^*)$$

Lo cual es un resultado de la demostración de la unicidad del valor de un juego; que demostraremos en el apartado siguiente de esta sección.

De esta manera el pago esperado para el jugador R es el valor del juego cuando ambos jugadores eligen cualquier estrategia óptima.

Juegos Estrictamente Determinados.

Definición 2.2.3

Una entrada a_{rs} en una matriz de pagos A es llamada un ***punto silla*** sí:

i) a_{rs} es la menor entrada de su fila y

ii) a_{rs} es la mayor entrada de su columna.

Un juego del que la matriz de pagos tiene un punto silla es llamado estrictamente determinado.

Por ejemplo el elemento resaltado en las matrices de pagos de la figura 28 es un punto silla.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & \mathbf{3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ \mathbf{-2} & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$
$$(a) \qquad\qquad (b)$$

Figura 28.

La dirección de un punto silla a_{rs} en una matriz muestra que las siguientes estrategias son óptimas para ambos jugadores.

$$p^* = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{r-ésima entrada}}}{1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad q^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{s-ésima entrada} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Así una estrategia óptima para el jugador R es hacer siempre el movimiento r-ésimo y una estrategia óptima para el jugador C es hacer siempre el movimiento s-ésimo. Una estrategia óptima en la cual sólo es posible un movimiento es llamada ***estrategia pura*** y una estrategia óptima en la que más de un movimiento es posible es llamada ***estrategia mixta***.

Para verificar que p^* y q^* estrategias puras, son óptimas, verifiquemos:

(2) $\quad E(p^*,q^*) = p^* A q^* = a_{rs}$

(3) $\quad E(p^*,q) = p^* A q \geq a_{rs}$ para cualquier estrategia q

(4) $\quad E(p,q^*) = p A q^* \leq a_{rs}$ para cualquier estrategia p.

Para ello utilicemos las estrategias puras $p_{m\times 1}^*$ y $q_{1\times n}^*$ y la matriz de pagos $A_{m\times n}$.

$$p_{m\times 1}^* = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{r-ésima entrada}}}{1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad q_{1\times n}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{s-ésima entrada} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces que:

$$E(p^*,q^*) = p^* A q^* = \begin{bmatrix} a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{rs}$$

con lo que (2) es verificada. Ahora si la entrada que es 1 en $q_{1\times n}^*$ es una cualquiera de sus n, entradas y dado que p^* es óptima, entonces:

$$E\left(p^{*},q\right)=p^{*}Aq=\begin{bmatrix}a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{m}\end{bmatrix}\begin{array}{r}\\ \\ \\ \text{i - ésima entrada}\rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=a_{ri},\ i=1,\ldots,n.$$

Por el teorema 2.2.1 tenemos:

$$E\left(p^{*},q\right)\geq E\left(p^{*},q^{*}\right)$$

en donde,

$$E\left(p^{*},q^{*}\right)=a_{rs}\ \text{ y }\ E\left(p^{*},q\right)=a_{ri}$$

por lo que concluimos que:

$$E\left(p^{*},q\right)=p^{*}Aq\geq a_{rs}\qquad \text{para cualquier estrategia q.}$$

Sí la entrada que es 1 en $p_{m\times l}$ es cualquiera de sus m entradas tenemos que:

$$E\left(p,q^{*}\right)=pAq^{*}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & \underset{\substack{\uparrow\\ \text{j - ésima entrada}}}{1} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=a_{js},\ j=1,\ldots,m.$$

Por el Teorema 2.2.1 sabemos que:

$$E\left(p^{*},q^{*}\right)\geq E\left(p,q^{*}\right)$$

lo cual implica que,

$a_{rs}\geq a_{js}$ con $j=1,\ldots,m.$

por tanto,

$$E(p,q^*) = pAq^* \leq a_{rs} \qquad \text{para cualquier estrategia } p.$$

Las ecuaciones (2),(3) y (4) simultáneamente implican:

$$E(p^*,q) \geq E(p^*,q^*) \geq E(p,q^*)$$

para todas estrategias p y q.

Pero ésta es la expresión (1) del teorema 2.2.1 por lo que concluimos que p^* y q^* son estrategias óptimas.

De la expresión (2) tenemos que el valor de un juego estrictamente determinado es el valor numérico del punto silla. Es posible que una matriz de pagos tenga varios puntos silla, pero la unicidad del valor de un juego garantiza que todos tengan el mismo valor numérico.

Teorema 2.2.4

El valor de un juego es único.

Demostración.

Supongamos que no es cierto que el valor de un juego es único, es decir, supongamos que existe un juego que tiene los valores v y w tal que $v \neq w$.

Por definición tenemos:

Sí p^* y q^* y p^{**} y q^{**} son estrategias tales que

$$E(p^{**},q) \geq E(p^{**},q^{**}) \geq E(p,q^{**}) \tag{5}$$

para todas estrategias p y q, y

$$E(p^*,q) \geq E(p^*,q^*) \geq E(p,q^*) \tag{6}$$

para todas estrategias p y q, entonces:

i) p^* es llamada una estrategia óptima para el jugador R
ii) q^* es llamada una estrategia óptima para el jugador C
iii) p^{**} es llamad a una estrategia óptima para el jugador R
iv) q^{**} es llamada una estrategia óptima para el jugador C
v) $v = E(p^*,q^*)$ es llamado el valor del juego, y
vi) $w = E(p^{**},q^{**})$ es llamado el valor del juego.

Rescribiendo (5) y (6) en (7) y (8), se tiene de la definición:

$$E(p^{**},q) \geq w \geq E(p,q^{**}) \tag{7}$$

para todas estrategias p y q, y

(8) $$E(p^*,q) \geq v \geq E(p,q^*)$$

para todas estrategias p y q.

La desigualdad izquierda de la expresión (7) y la desigualdad derecha de la expresión (8) se leen:

$$E(p^{**},q) \geq w \qquad \text{para toda estrategia } q, \text{ y}$$

$$E(p,q^*) \leq v \qquad \text{para toda estrategia } p.$$

En particular se tiene que:

$$E(p^{**},q^*) \geq w \quad \text{y} \quad E(p^{**},q^*) \leq v$$

Lo cual implica que:

$v \geq w$

La desigualdad derecha de la expresión (7) y la desigualdad izquierda de la expresión (8) se leen:

$$E(p,q^{**}) \leq w \qquad \text{para toda estrategia } q, \text{ y}$$

$$E(p^*,q) \geq v \qquad \text{para toda estrategia q.}$$

En particular se tiene que:

$$E(p^*,q^{**}) \leq w \quad \text{y} \quad E(p^*,q^{**}) \geq v$$

Lo cual implica que:

$v \leq w$

Así las expresiones (7) y (8) implican que:

$v \geq w$ y $v \leq w$

Por lo que se concluye que: $v = w$.

Lo cual es una contradicción a nuestra suposición de que $v \neq w$; por lo tanto si un juego tiene dos valores(o más) éstos son el mismo. Por lo tanto el valor de un juego es único.

De esta demostración se concluye también que si un juego tiene dos pares de estrategias óptimas p^* y q^* y p^{**} y q^{**}, entonces:

$$E(p^{**},q^{**}) = E(p^*,q^*)$$

Ejemplo. Un juego tiene la matriz de pagos que se ilustra en la figura 29 con varios e iguales puntos silla con lo que se muestra que las estrategias óptimas no son únicas.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -13 & 2 & 6 \\ 7 & 14 & 8 & 7 \\ 1 & 6 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Figura 29.

Aplicación real de un problema de punto silla. A fines de los años 40 el General George C. Kenney, comandante de las fuerzas aéreas aliadas del pacífico sudoriental durante la segunda guerra mundial, utilizó intuitivamente la teoría de juegos para ganar una de las batallas más importantes de dicha zona. Ese conflicto se conoce como la "batalla del mar de Bismark". Este evento histórico ocurrió en los últimos días de febrero de 1943. Las fuerzas japonesas agrupadas en Rabul, isla de Nueva Inglaterra, pretendían apoderarse de Lae, Nueva Guinea, que estaba en manos de los aliados. El general Kenney dedujo, mediante el análisis de ciertos reportes de inteligencia, que los japoneses tenían sólo dos estrategias posibles, atacar por la ruta 1, mar de coral, o por la 2 mar de Bismark. Ambas rutas requerían de tres días (aproximadamente 72 horas) para alcanzar Lae.

El general Kenney quería bombardear el convoy japonés antes de su llegada a Lae. La ruta 2 ofrecía poca visibilidad; la visibilidad de la ruta 1 era buena. El objetivo era maximizar el número de horas efectivas de bombardeo del convoy enemigo.

El general Kenney pensó así: "Sí concentro un ataque aéreo de la ruta 2 y, en efecto, los japoneses eligen esa ruta, la búsqueda del convoy será obstaculizada por una visibilidad pobre y esto se descubrirá hasta el segundo día, permitiéndonos dos días de bombardeo; sí por el contrario el convoy elige la ruta 1 (mientras yo concentro mi búsqueda en la 2), una pequeña escuadrilla aérea de reconocimiento descubrirá el convoy después de un día, permitiendo, dos días de bombardeo. Por el contrario, si concentro el ataque en la ruta 1 y los japoneses eligen esa ruta serán descubiertos de inmediato permitiendo tres días de bombardeo; en cambio si eligen la ruta 2, una pequeña escuadrilla de reconocimiento descubrirá el convoy tras dos días de búsqueda, permitiendo un sólo día de bombardeo".

La intuición del general Kenney se puede escribir como la matriz de consecuencias o pagos de la figura 30.

$$\begin{array}{lc} & \text{Convoy Japónes} \\ & \begin{array}{cc} \text{Ruta 1} & \text{Ruta2} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Concentración del} \\ \text{bombardeo aliado} \end{array} \begin{array}{l} \text{Ruta 1} \\ \text{Ruta 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ & \text{Días de bombardeo} \end{array}$$

Figura 30.

La decisión del general Kenney fue la entrada a_{22} idéntica a la que seleccionó el comandante Japonés, y dicha entrada es un punto silla. El resultado de esta decisión fue una derrota para el ejercito japonés en la "batalla del mar de Bismak".

Juegos matriciales de 2×2.

Otra manera de encontrar estrategias óptimas es por medio de técnicas elementales y ésto es posible cuando ambos jugadores tienen sólo dos posibles movimientos. Así la matriz de pagos del juego resulta ser una matriz de 2×2. Sí el juego es estrictamente determinado tendrá al menos un punto silla en cuyo caso el método anterior proporciona las estrategias óptimas de ambos jugadores. Sí el juego no es estrictamente determinado, calculamos entonces el pago para estrategias p y q arbitrarias:

$$(9) \quad E(p,q) = pAq = [p_1 \quad p_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2$$

Puesto que:

$$(10) \quad p_1 + p_2 = 1 \quad \text{y} \quad q_1 + q_2 = 1$$

podemos sustituir $p_2 = 1 - p_1$ y $q_2 = 1 - q_1$ en (9) para obtener:

$$(11) \quad E(p,q) = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1(1-q_1) + a_{21}(1-p_1)q_1 + a_{22}(1-p_1)(1-q_1)$$

reacomodando estos términos tenemos,

$$(12) \quad E(p,q) = [(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})p_1 - (a_{22} - a_{21})]q_1 + (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22}$$

Examinando el coeficiente del término q_1 en (12), vemos que fijando:

$$(13) \quad p_1 = p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Entonces este coeficiente es cero y (12) se reduce a (14)

$$(14) \quad E(p,q) = a_{12} - a_{22}\left[\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}\right] + a_{22}$$

$$= \frac{a_{22}a_{12} - \left(a_{22}^{2}\right) - a_{12}a_{21} + a_{22}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} + a_{22} =$$

$$= \frac{a_{22}(a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}) + a_{22}a_{12} - \left(a_{22}^{2}\right) - a_{12}a_{21} + a_{22}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} =$$

$$= \frac{a_{22}a_{11} + \left(a_{22}^{2}\right) - a_{22}a_{12} - a_{22}a_{21} + a_{22}a_{12} - \left(a_{22}^{2}\right) - a_{12}a_{21} + a_{22}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} =$$

$$= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = E\left(p^{*}, q\right)$$

La ecuación (14) es independiente de q; es decir, sí el jugador R elige la estrategia determinada por (13) el jugador C no puede cambiar el pago esperado cambiando su propia estrategia. Similarmente puede verificarse que sí el jugador C elige la estrategia determinada por $q^{*} = q_{1}$, el jugador R no puede cambiar el pago esperado cambiando su estrategia.

$$(15) \qquad q_{1} = q_{1}^{*} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Sustituyendo en (12) se tiene:

$$(16) \qquad E\left(p^{*}, q\right) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

De las ecuaciones (14) y (16) observamos que:

$$(17) \qquad E\left(p^{*}, q\right) = E\left(p^{*}, q^{*}\right) = E\left(p, q^{*}\right)$$

Para todas estrategias p y q.

Así las estrategias (13) y (15) son estrategias óptimas de los jugadores R y C respectivamente.

De las expresiones (13), (15) y (10) se tiene como resultado el siguiente teorema.

Teorema 2.2.5

Para un juego de 2×2 que no está estrictamente determinado, las estrategias óptimas de los jugadores R y C son

$$p^{*} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} & \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \end{bmatrix} \qquad q^{*} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \\ \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \end{bmatrix}$$

El valor del jego es :

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Para ser completado mostremos que las entradas de los vectores p^{*} y q^{*} son números estrictamente entre cero y uno.

Sumando las entradas de los vectores p^* y q^* tenemos :

$$p_1^* + p_2^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} + \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = 1 \qquad \text{y}$$

$$q_1^* + q_2^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} + \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = 1$$

por lo que :

$$p_2^* = 1 - p_1^* \Rightarrow \begin{cases} sí\; p_1^* = 1 \Rightarrow p_2^* = 0 \\ sí\; p_1^* = 0 \Rightarrow p_2^* = 1 \\ sí\, 0 < p_1^* < 1 \Rightarrow 0 < p_2^* < 1 \end{cases}$$

$$p_1^* = 1 - p_2^* \Rightarrow \begin{cases} sí\; p_2^* = 1 \Rightarrow p_1^* = 0 \\ sí\; p_2^* = 0 \Rightarrow p_1^* = 1 \\ sí\, 0 < p_2^* < 1 \Rightarrow 0 < p_1^* < 1 \end{cases}$$

concluimos entonces que las entradas del vector p^* son números entre cero y uno; y

$$q_2^* = 1 - q_1^* \Rightarrow \begin{cases} sí\; q_1^* = 1 \Rightarrow q_2^* = 0 \\ sí\; q_1^* = 0 \Rightarrow q_2^* = 1 \\ sí\, 0 < q_1^* < 1 \Rightarrow 0 < q_2^* < 1 \end{cases}$$

$$q_1^* = 1 - q_2^* \Rightarrow \begin{cases} sí\; q_2^* = 1 \Rightarrow q_1^* = 0 \\ sí\; q_2^* = 0 \Rightarrow q_1^* = 1 \\ sí\, 0 < q_2^* < 1 \Rightarrow 0 < q_1^* < 1 \end{cases}$$

concluimos entonces que las entradas del vector q^* son números entre cero y uno.

Es claro de la ecuación (17) que cualquiera de los dos jugadores puede forzar el pago esperado para ser el valor del juego jugando su propia estrategia óptima independientemente de la estrategia con la que el otro jugador juegue. Esto no es cierto en juegos en los cuales los jugadores tienen más de dos movimientos.

Ejemplo. El jugador R juega con dos cartas, una negro A y una roja 4; el jugador C tiene también dos cartas una negra 2 y una roja 3. Cada jugador selecciona secretamente una de sus cartas. Si ambos seleccionan cartas que son del mismo color el jugador C paga al jugador r la suma de los valores de las cartas en dólares; sí las cartas no son del mismo color, entonces el jugador R paga al jugador C el valor de las caras de las cartas en dólares. ¿Qué estrategias son óptimas para ambos jugadores? y ¿Cuál es el valor del juego?

A continuación tenemos la matriz de pagos del juego:

Elecciones del jugador C

$$
\text{Elecciones del jugador R}\quad
\begin{array}{c}
 \\ NA \\ R4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} N2 & R3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Figura 31.

De la matriz de la tabla se tiene:

$$p^{*}=\begin{bmatrix}\dfrac{7+6}{7+3+4+6} & \dfrac{3+4}{7+3+4+6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{13}{20} & \dfrac{7}{20}\end{bmatrix}$$

$$q^{*}=\begin{bmatrix}\dfrac{7+4}{20}\\ \dfrac{3+6}{20}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{11}{20}\\ \dfrac{9}{20}\end{bmatrix}\quad \text{y} \quad v=\begin{bmatrix}\dfrac{21+24}{20}\end{bmatrix}=\dfrac{54}{20}.$$

Capítulo 3

Teoría de Juegos.

3.1 GANAR

Durante esta sección sólo se tendrán en consideración juegos de dos jugadores, estrictamente competitivos, de información perfecta y sin jugadas de azar.

Los juegos estrictamente competitivos son juegos en donde los jugadores tienen intereses diametralmente opuestos.

Se llaman de información perfecta por que cada vez que a alguien le toca jugar sabe toda la información de lo que hasta ese momento ha ocurrido en el juego.

Reglas del juego.

Las reglas de un juego, indican quien puede jugar y, cómo lo hará y en qué momento debe de hacerlo, así como cuánto gana cada cual al final del juego. Esta información se expresa en Teoría de Juegos mediante un árbol.

Un ***árbol*** es un grafo conexo y sin ciclos.

Un ***grafo*** es un conjunto de nodos conectados por aristas.

El grafo de un árbol es ***conexo***, si para todo par de nodos existe una cadena que los une.

Una cadena es una secuencia de aristas que unen un par de nodos en un grafo.

Un ***ciclo*** es una cadena de aristas en donde el nodo inicial es el nodo final.

La primera jugada la representa un nodo llamado: ***raíz*** del árbol, señalado de manera especial.

Una partida del juego consiste de una cadena conexa de aristas que empiezan en la raíz del árbol y terminan, si el juego es finito, en un nodo terminal.

Las jugadas posibles durante el juego, son representadas por nodos.

Las acciones en cada jugada las representan las aristas.

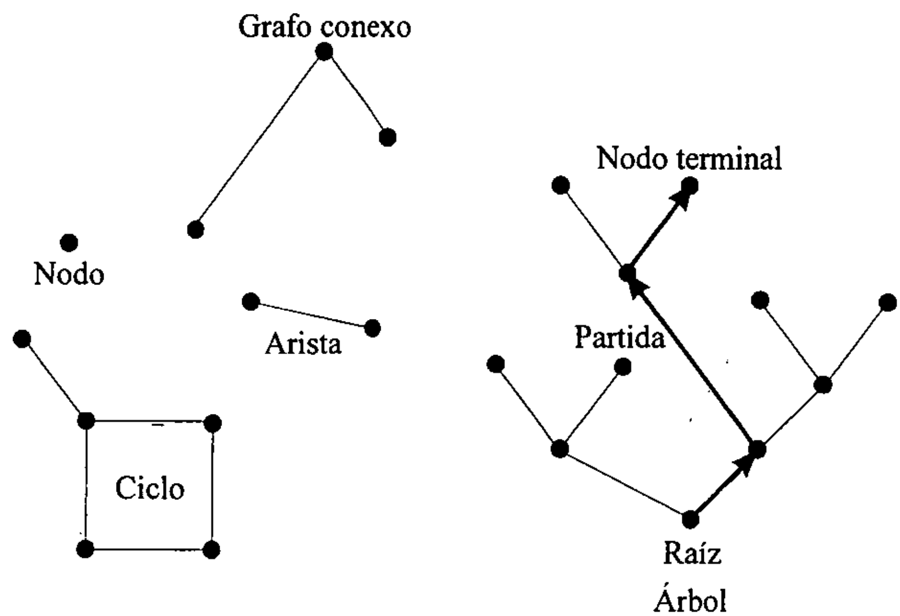


Figura 32. Grafos

Los posibles resultados del juego están representados por los nodos terminales.

Para saber ¿quien juega? En una jugada determinada a cada nodo no terminal se le asigna el número de un jugador.

¿Quién gana, quien pierde o empatan? Cada uno de los nodos terminales está marcado con las consecuencias que tiene para cada jugador que el juego termine con el resultado de ese nodo.

Ejemplo. **Nim** Un número de cerillos están en 2 conjuntos, y dos jugadores toman alternadamente cerillos de los conjuntos. En cada turno un jugador debe tomar al menos un cerillo, puede tomar más siempre que ellos sean todos del mismo conjunto. El ganador es el jugador que tomó el último cerillo.

Tomemos el muy sencillo *ejemplo* en donde son dos los cerillos en cada conjunto de este árbol donde (=,=) es la situación con dos cerillos en cada conjunto.

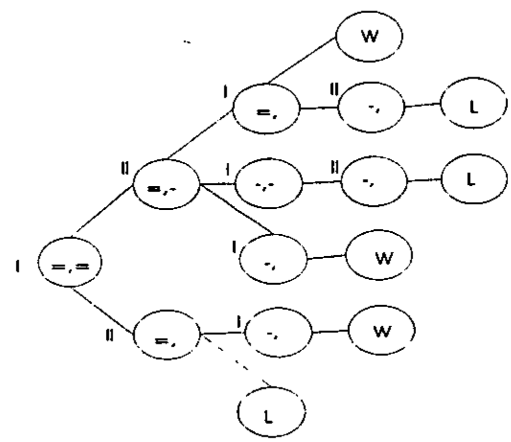


Figura 33. Árbol del juego Nim.

Estrategias.

Para los juegos de este capítulo una ***estrategia pura*** para el jugador ***i*** es un plan que especifica una acción para cada uno de los nodos en los que el jugador ***i*** debería de tomar una decisión, si es que el nodo fuera alcanzado en realidad.

Un juego sin jugadas de azar queda bien determinado, si una vez que todos los jugadores han elegido una de sus estrategias puras no la cambian durante el juego.

Consideremos *por ejemplo*, el juego G. Los nodos en los que a I corresponde tomar una decisión son **a** y **b**. Una estrategia pura para I debe especificar una acción tanto en el nodo **a** como en el nodo **b**. Ya que son dos las acciones posibles para I en cada uno de los nodos, entonces I dispone de $2\times2=4$ estrategias puras en total, que se representan como sigue: *ll*, *lr*, *rl*, *rr*..

(Aunque que si I utiliza *lr*, entonces no alcanzará **b**. Independientemente de la estrategia de II, pero así lo exige la definición de estrategia pura)

Ahora a II corresponde decidir en los nodos **c**, **d** y **e**, ya que en **c** son 2 las posibles acciones, en **d** 3 y en **e** 2, el total de estrategias puras de que dispone II son $2\times3\times2= 12$.

Que se representan como sigue: LLL, LLR, LML, LMR, LRL, LRR, RLL, RLR, RML, RMR, RRL, RRR.

Los resultados *W* y *L* son resultados para ambos jugadores que representan el valor del juego, de lo que hablaremos un poco más adelante.

La partida del juego se representa por la serie de acciones que la generan.

En G la partida es: [rLR].

El par de estrategias dado por los jugadores I y II que podría producir esta partida está dado por cualquier estrategia de I en que la acción que tenga en el nodo **a** sea *r*(*rr* y *rl*) y cualquier estrategia de II que tenga las acciones L en el nodo **d** y R en el nodo **e**(LRL y RLR) y se representa (rx,XLR).

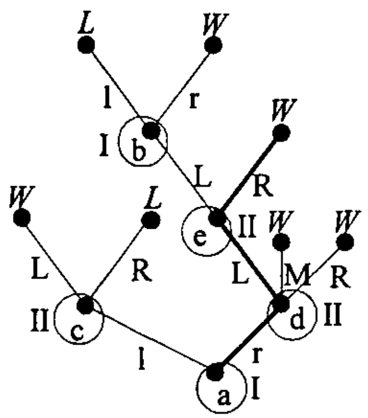


Figura 34. Árbol del juego G.

Ya que el número de estrategias del jugador uno son 2 y las de II también son 2 se sigue que son 4 los pares de estrategias que podrían producir esta partida.

La forma estratégica de un juego se representa en forma matricial, en donde las columnas de la matriz representan las estrategias del jugador II y los renglones las estrategias del jugador I, y cada entrada de la matriz contiene el resultado de jugar las 2 estrategias puras de columna y renglón correspondientes a esta entrada de la matriz, en el juego G.

	LLL	LLR	LML	LMR	LRL	LRR	RLL	RLR	RML	RMR	RRL	RRR
ll	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*L*	*L*	*L*	*L*	*L*	*L*
lr	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*L*	*L*	*L*	*L*	*L*	*L*
rl	*L*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*L*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*
rr	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*	*W*

Figura 35. La forma estratégica del juego G.

El algoritmo de Zermelo.

Zermelo utilizó este método en 1912, para analizar el ajedrez. El método requiere empezar por el final del juego y marchar hacia atrás hasta su principio (a veces esta técnica es llamada inducción hacia atrás). Lo que se quiere demostrar es que el jugador I tiene una estrategia ganadora sea cual sea la estrategia del jugador II en el juego G.

Analizando el juego G.

Un ***subjuego*** consiste de un nodo **x** no terminal junto con el árbol que viene a continuación.

Llamemos **v(H)** al ***valor*** de H subjuego de G; $v(H)= W$ si el jugador I (JI) dispone de una estrategia para H que le hace ganar H sea cual sea la estrategia del Jugador II(JII) y $v(H)= L$ si JII dispone de una estrategia para H que le hace ganar H sea cual sea la estrategia de JI.

Una característica de los juegos estrictamente competitivos es que siempre tienen un valor.

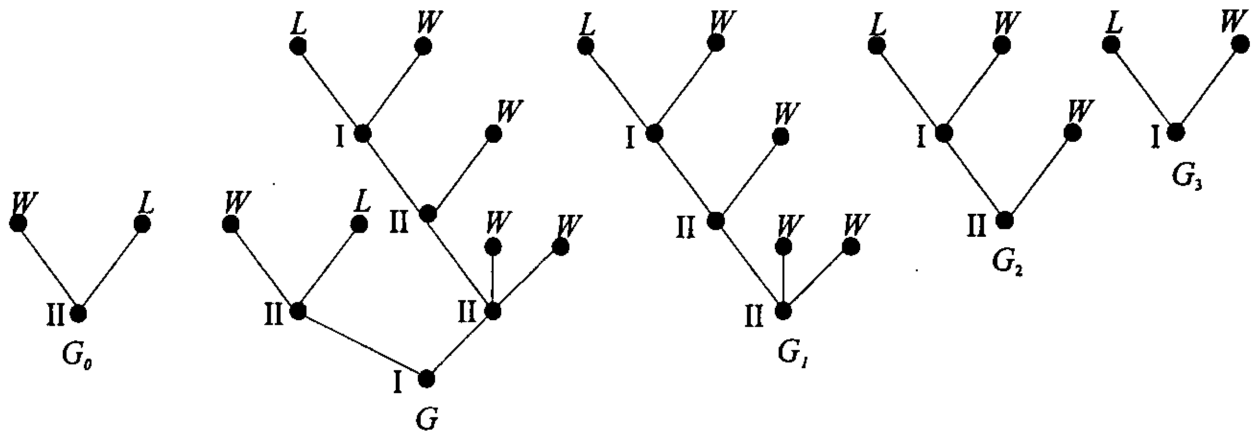


Figura 36. El juego *G* y sus subjuegos.

Considérense los subjuegos G_0 en donde gana JII eligiendo R y G_3 en donde gana JI eligiendo *r*, entonces $v(G_0)=L$ y $v(G_3)=W$.

Reemplacemos en G, G_0 y G_3 por nodos terminales marcados con valores *L* y *W* respectivamente, obteniendo así G'. Se afirma que si JI tiene una estrategia s' que siempre gana en G', entonces tiene una estrategia s que siempre gana G.

El uso de la estrategia s' por JI en G' resultará en una partida de G' que conduce a un nodo terminal x de G' marcado con *W* dada cualquier estrategia utilizada por JII. Este nodo puede corresponder o no a un subjuego G_x de G. Si corresponde, entonces $v(G_x)=W$. Luego el jugador JI tiene una estrategia ganadora s_x en G_x. Por tanto si JI juega s′ en G′ llegando a un G_x de G y juega s_x en G_x, JI tiene una estrategia ganadora s en G.

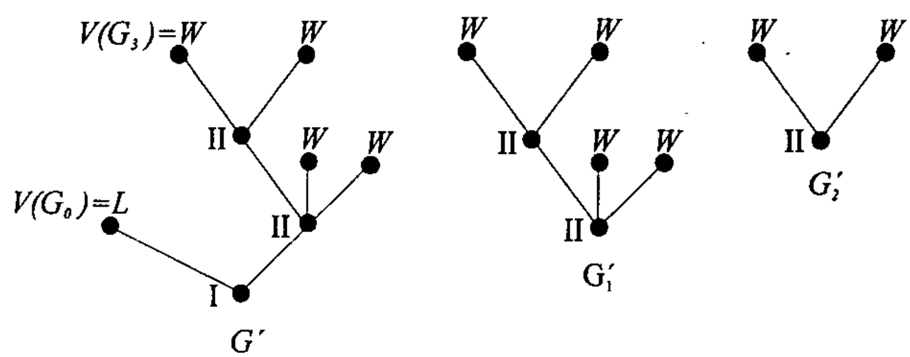


Figura 37. El juego *G′* y sus subjuegos.

Análogamente, si JII dispone de una estrategia t' que siempre gana en G', y si el nodo terminal de dicha estrategia corresponde a un subjuego G_x de G que sea optimo para JII, entonces dispone de una estrategia t que siempre gana en G. Se sigue que si G' tiene un valor, entonces también G lo tiene y $v(G')= v(G)$.

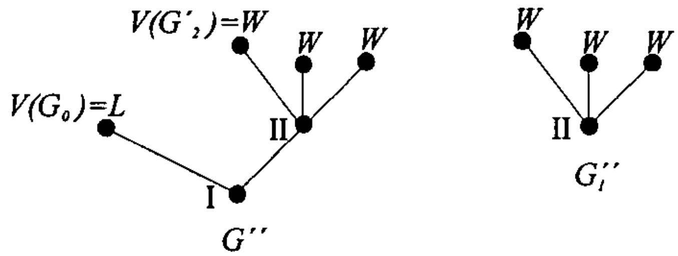


Figura 38. El juego G'' y sus subjuegos.

Ahora G'' es el juego que resulta de reemplazar en G' el subjuego G_2', por el nodo terminal marcado con *W*. Por el razonamiento anterior si G'' tiene un valor, entonces $v(G')= v(G'')$.

Por último el juego G''' es obtenido a partir de G'' al reemplazar el subjuego G_1'' por un nodo terminal marcado con *W*. Como antes, si G''' tiene un valor, entonces $v(G''')= v(G'')$.

Así, sí JI puede ganar G''' eligiendo *r* entonces $v(G''')=W$. Por el análisis hecho, G tiene un valor, y $W=v(G''')=v(G'')=v(G')=v(G)$. Por tanto JI dispone de una estrategia que gana en G sea cual sea la estrategia de JII.

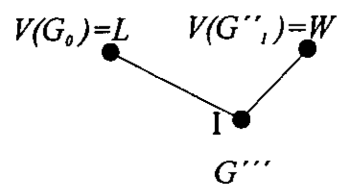


Figura 39. El juego G'''.

¿Qué es una estrategia ganadora para G?

Una forma de descubrir una estrategia ganadora para JI en G, es a partir de la forma estratégica de G. Cuando la sencillez de su construcción lo permita.

Por ejemplo, observamos de la representación estratégica del juego G (figura 35), que la estrategia ganadora para el jugador I es su estrategia pura *rr* ya que con ésta él gana el juego sea cual sea la estrategia que utilice el jugador II.

Aún mejor sería copiar el método con el que se probó que existe una estrategia ganadora en G.

1. Consideremos los menores subjuegos de G.
2. En cada uno de ellos, doblemos los segmentos que corresponden a elecciones óptimas en el subjuego.
3. Ahora hagamos como si los segmentos no doblados no existieran, esto produce G^* un nuevo subjuego.
4. Repetir el proceso en G^*, hasta que ya no se pueda hacer nada.

5. Al final existirá por lo menos una partida de G en que los segmentos han sido todos doblados. Estas son las únicas partidas que hay que seguir.

Hexágonos.

El juego de los hexágonos se juega sobre un tablero que consiste de $n \times n$ hexágonos dispuestos en un paralelogramo. Una jugada consiste en marcar en el tablero un hexágono vacío con un círculo o una cruz de manera alternada por los jugadores I y II respectivamente; incorporándose así un hexágono a su territorio cada uno. Al principio del juego el territorio de cada uno de ellos consiste de dos lados opuestos del tablero. Gana quien una primero sus lados correspondientes en el tablero por medio de una cadena continua de hexágonos marcados con su símbolo.

Por qué los hexágonos no pueden terminar en empate.

El algoritmo de David Gale muestra que una vez que todos los hexágonos han sido marcados con un círculo o una cruz, entonces uno de los dos pares de lados opuestos deben estar unidos. Comienza la construcción de un camino en una esquina, de manera que éste pase entre dos hexágonos tales que uno esté marcado con una cruz y el otro con un círculo; un camino así no puede terminar dentro del tablero y tampoco puede pasar por un lugar por el cual ya haya pasado. En el diagrama (a) de la figura 40, se muestra un camino que ha alcanzado el punto a y para llegar ahí tuvo que pasar entre los hexágonos A y B, marcados con cruz y círculo respectivamente. Además hay un hexágono C del cual a es un vértice (común con A y B); sólo si C esta marcado con cruz como en (a), entonces el camino puede continuar entre B y C, cuando a se encuentre en algún borde, entonces se modifica ligeramente el algoritmo, pero continua siendo válido, el camino termina cuando a es uno de los puntos extremos del tablero.

Cuando el camino pasa por algún punto ya visitado, como se cita en el diagrama (b) de la figura 40, lo ha hecho violando el requerimiento de pasar por entre dos hexágonos que no están marcados con símbolos diferentes.

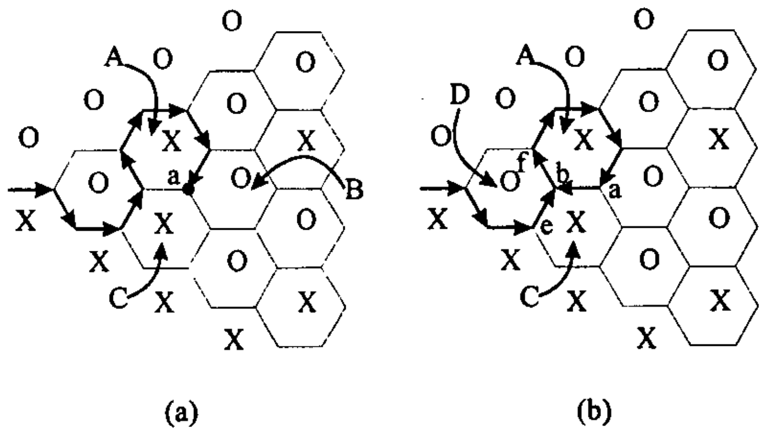


Figura 40. El algoritmo de Gale para los hexágonos.

Se quiere demostrar que un camino nunca puede describir un circuito cerrado sin haber pasado por alto el requerimiento del algoritmo de que un camino podrá pasar sólo por entre dos hexágonos que estén marcados con símbolo diferente.

Supongamos que es b (vértice común de A, C y D) refiriéndonos a la figura 40(b), el primer punto que vuelve a ser visitado por el camino. Para que b fuese visitado por primera vez por el camino, fue necesario que estos tres hexágonos A, C y D estuviesen marcados con símbolos distintos (D con círculo y los otros con cruz), para así el camino pasar por entre D y C y D y A, ahora para que b fuese el primer punto vuelto a visitar, el camino debe haber llegado a b ahora desde a, pero A y C contienen cruz y esto no es válido en el algoritmo. Como antes sólo si se encuentra b en los bordes del tablero, entonces podrá ser modificado el algoritmo ligeramente.

Por tanto, como el camino no puede detenerse, no puede pasar por donde ha pasado previamente y el tablero es finito, el camino debe de terminar en alguna de las esquinas del tablero, distinta de donde comenzó.

Por tanto uno de los pares de los lados opuestos del tablero debe de estar unido.

Así el juego de los hexágonos no puede terminar en empate.

¿Por que el jugador I tiene una estrategia ganadora?

Se quiere demostrar que el jugador I tiene una estrategia ganadora.

La demostración es por contradicción. Supongamos verdadero que I no posee dicha estrategia o lo que es lo mismo es II quien posee una estrategia ganadora, la lógica de la demostración indica que si se supone verdadera la negación de lo que se desea demostrar se llegará a una contradicción por lo que la negación es falsa y la proposición verdadera es la que se quiere demostrar, basándose en esto tendríamos que II no tiene una estrategia ganadora, pero si II no la tiene, entonces I tiene una estrategia ganadora para los hexágonos, ya que se trata de un juego estrictamente competitivo.

Falta demostrar que si II tiene una estrategia ganadora, entonces I también tiene una estrategia ganadora.

Nash ideo un argumento para robarle la estrategia al jugador oponente y con esto lo demuestra:

En un juego, si un jugador, en este caso II dispone de una estrategia ganadora, entonces habrá que robársela tomando orden en los siguientes pasos:

1. En la primera jugada, toma un hexágono al azar y tira un círculo.
2. Posteriormente, en alguna otra jugada haz como si el último hexágono que tu marcaste, no estuviera marcado, y supón que los Hexágonos que ahora están marcados con ceros están marcados con cruces y los de cruces lo están con ceros, desde este punto de vista elige tu siguiente jugada como si fueras II, empleando su estrategia ganadora y marca ese hexágono con un cero, de esta manera te estás posicionando en el lugar de II y estás retomando su estrategia ganadora, o lo que es lo mismo la estás robando. Si al seleccionar este hexágono, te encuentras que es el mismo que supusiste estar en blanco querrá esto decir que habías ya robado la estrategia al otro jugador, en tal caso elige algún otro hexágono al azar y márcalo con un cero.

Esta estrategia asegura para I una estrategia ganadora ya que esta siguiendo el mismo procedimiento que II para ganar el juego. Y no sólo así, lo esta haciendo una jugada antes.

Como podríamos explicarnos el robo de la estrategia propuesto por Nash:

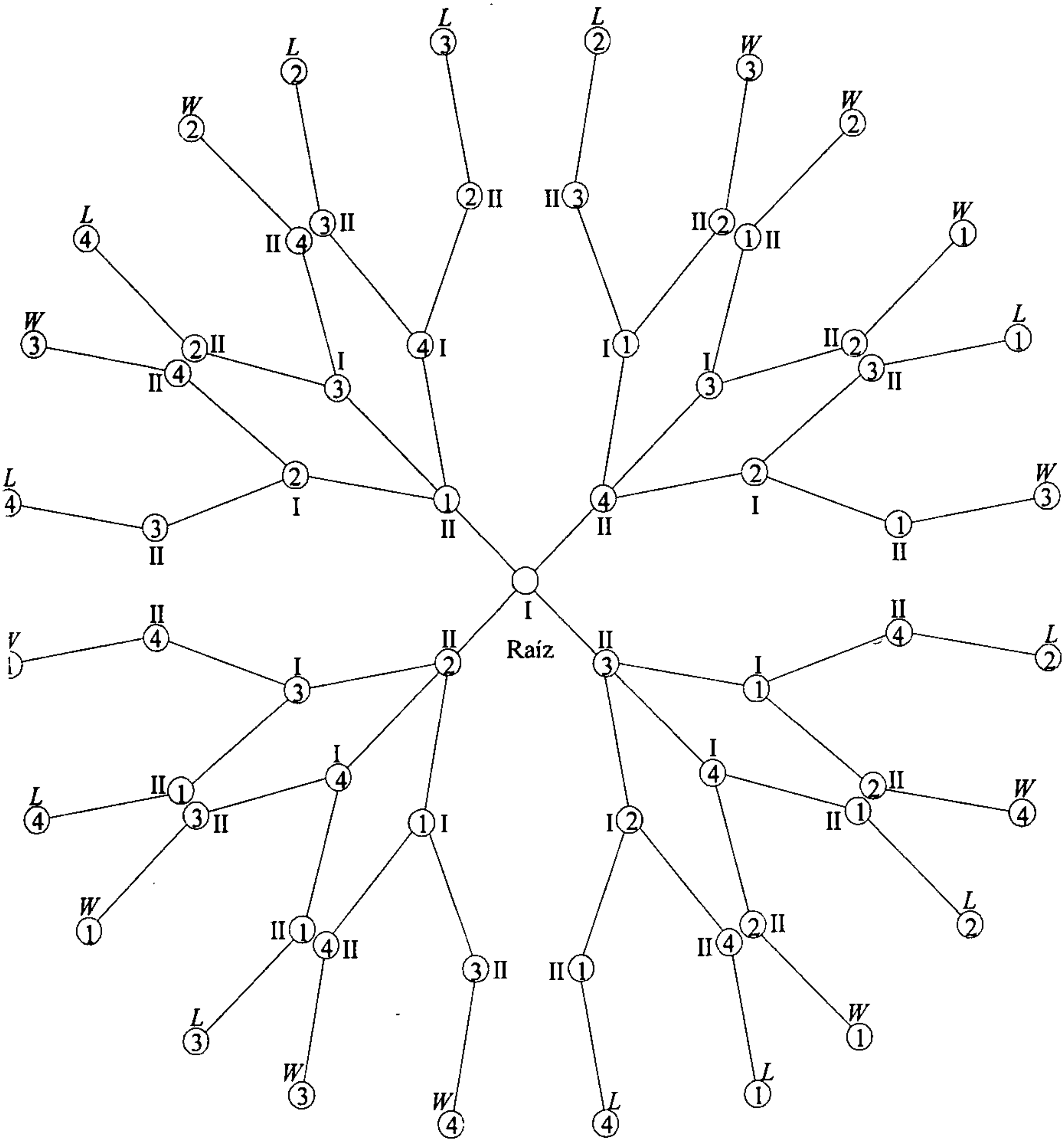
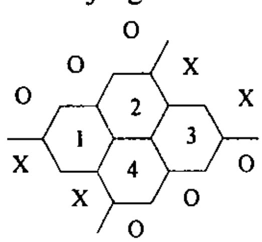


Figura 41. Árbol del juego de los hexágonos de 2 × 2.



Una ***estrategia pura real*** para el jugador i es aquella que especifica una acción para cada uno de los nodos en los que el jugador i tiene que tomar una decisión siempre que estos nodos estén contenidos en una partida del juego.

Basándonos en el árbol de la figura 41, se tiene que las partidas del juego son tantas como las permutaciones del número de hexágonos en el tablero, éstas son $4!=24$ y están representadas en la tabla de partidas del juego de los hexágonos de 2×2.

En cada partida (P) esta indicada la posición (I y II) en que cada uno de los jugadores tira, esto nos permite ver la estrategia pura real utilizada por cada jugador en cada partida.

También está indicado el resultado(R=L o R=W) que cada jugador obtiene al emplear su estrategia pura real x en el juego.

P	I	II	I	II	R	P	I	II	I	II	R	P	I	II	I	II	R	P	I	II	I	II	R
1	1	2	3	4	*L*	7	2	3	4	1	*W*	13	3	4	2	1	*W*	19	4	3	2	1	*W*
2	1	2	4	3	*W*	8	2	3	1	4	*L*	14	3	4	1	2	*L*	20	4	3	1	2	*W*
3	1	3	4	2	*W*	9	2	4	1	3	*L*	15	3	2	4	1	*L*	21	4	1	3	2	*L*
4	1	3	2	4	*L*	10	2	4	3	1	*W*	16	3	2	1	4	*L*	22	4	1	2	3	*W*
5	1	4	3	2	*L*	11	2	1	3	4	*W*	17	3	1	2	4	*W*	23	4	2	3	1	*L*
6	1	4	2	3	*L*	12	2	1	4	3	*W*	18	3	1	4	2	*L*	24	4	2	1	3	*W*

Figura 42. Tabla de las partidas del juego de los hexágonos de 2×2.

Observamos del árbol del juego de los hexágonos de 2×2 de la figura 41, que los nodos que son raíz de los subjuegos del árbol, son intersección de las partidas del subjuego.

Visto a través de las permutaciones en las posibles acciones que tiene el jugador I para elegir su primera tirada en el juego, están contenidas las posibles acciones de entre las cuales tendría que elegir el jugador II alguna como su primera tirada en el juego. Para la primera elección que debe hacer el jugador II sucede que las posibles acciones de las cuales dispone para elegir el jugador I en su segunda posición se encuentran contenidas en las acciones de entre las cuales tiene que elegir el jugador II.

Análogamente para la segunda elección del jugador I en el juego; no así para la segunda elección del jugador II (y última tirada del juego).

De esta manera la intersección de las partidas de los subjuegos se encuentra en las posiciones en donde tienen que elegir los jugadores siempre y cuando para esta posición el jugador que tiene que elegir disponga de entre sus posibles acciones a elegir de las posibles acciones por elegir de las cuales dispone el otro jugador para la siguiente tirada.

Así para cada estrategia de la cual disponga el jugador II con la cual gane el juego, el jugador I podrá robársela, abordando él, con anticipación la jugada ganadora de la estrategia del jugador II para la posición en que I se encuentre. Con lo cual I se adjudica la victoria en el juego.

En general para el juego de los hexágonos de $n\times n$ el razonamiento hecho sobre la base de las permutaciones para conocer las partidas del juego y todas las posibles estrategias puras reales utilizadas por ambos jugadores es válido.

Por tanto el robo de la estrategia ganadora sucede en la intersección de las partidas de un subjuego.

Lo que garantiza al jugador I adjudicarse la victoria es que para cualquier posición en la que él juegue siempre es posible que él robe la jugada ganadora de la estrategia del jugador II de la siguiente tirada en el juego. Lo cual además da la anticipación a la victoria al jugador I.

Ajedrez.

Los juegos hasta ahora considerados terminan con la victoria de alguno de los jugadores. En ajedrez se tiene que agregar la posibilidad que el resultado sea empate, representándolo con D.

Las preferencias del jugador I en cuanto a resultados del juego son:

$$L \preccurlyeq_1 D \preccurlyeq_1 W$$

y las del jugador II son:

$$L \succcurlyeq_2 D \succcurlyeq_2 W$$

Observamos que dadas las preferencias de los jugadores, el ajedrez es un juego estrictamente competitivo. Significa que para cualesquiera resultados a y b:

$$a \prec_1 b \quad \Leftrightarrow \quad b \prec_2 a$$

En general:

$a \preccurlyeq_i b$ significa que el jugador i prefiere el resultado b por lo menos tanto como el de a.

$a \prec_i b$ significa que el jugador i prefiere b a a estrictamente.

$a \sim_i b$ significa que el jugador i es indiferente entre b y a.

Sí $a \preccurlyeq_i b$ significa que $a \prec_i b$ o que $a \sim_i b$.

Teorema 3.1.1 (ZERMELO)

Sea T un conjunto cualquiera de resultados de un juego finito de dos jugadores, de información perfecta y sin jugadas de azar. Entonces, o bien el jugador I puede forzar un resultado en T o el jugador II puede forzar un resultado en T^c.

Demostración.

Sean $W \in T$ y $L \in T^c$ y H un juego de dos jugadores, finito. Sea $v(H)$ el valor del juego H. Definimos $v(H)=W$, sí I puede forzar una victoria en H y $v(H)=L$ sí II puede forzar la victoria en H.

Tenemos que demostrar que para cualquier juego H del tipo aquí estudiado, H tiene un valor.

Llamemos rango del juego al número de segmentos en la partida más larga de todas. En un juego de rango uno, sí JI elige, y alguno de los nodos terminales esta marcado con W, JI ganará inmediatamente, pero si ninguno de los nodos esta marcado con W sino con L entonces JII forzará una victoria sin hacer nada. Análogamente si es JII quien elige en un juego de rango uno, dicho juego tiene un valor.

Supongamos que cualquier juego de rango n tiene un valor.

P. D. que todos los juegos de rango $n+1$ también tienen un valor.

Sea H un juego de rango $n+1$. Sea x el último nodo no terminal de cada partida de H de longitud $n+1$, sea H' el juego que se deriva de H al marcar a cada nodo x como nodo terminal de H'. Marquemos cada uno de estos nodos con $v(H_x)$ del subjuego H_x con raíz en el nodo x; estos subjuegos tienen un valor pues son de rango uno. Como H' es de rango n también tiene un valor. Supongamos que es I quien posee una estrategia s' que gana en H' dada cualquier estrategia t' que II emplee. Así s' terminará en un nodo terminal marcado con W de H', si este nodo terminal corresponde a un subjuego H_x de H, entonces $W = v(H_x)$ y I tiene una estrategia ganadora s_x en H_x.

Por tanto I puede forzar una victoria en H jugando s' en H' y s_x en cada H_x en que dispone de una estrategia ganadora.

Análogamente si es II quien dispone de la estrategia ganadora en H' podrá forzar una victoria en H.

Así uno de los dos jugadores puede forzar una victoria en H, entonces H tiene un valor.

Valores de juegos estrictamente competitivos.

Decimos que v es valor de G (G un juego finito estrictamente competitivo) si y sólo si, I puede forzar un resultado en $W_v = \{u\!: u \succcurlyeq_1 v\}$ y II puede forzar un resultado en $L_v = \{u\!: u \succcurlyeq_2 v\}$. Sin perder generalidad supondremos que I no es indiferente entre cualesquiera dos resultados de G. Así los resultados en el conjunto $U=\{u_1, u_2, u_3,..., u_k\}$ de todos los posibles resultados de G pueden ser representados según las preferencias de I y II cómo sigue:

$$u_1 \prec_1 u_2 \prec_1 u_3 \prec_1, \dots, \prec_1 u_k$$

$$u_1 \succ_2 u_2 \succ_2 u_3 \succ_2, \dots, \succ_2 u_k$$

La figura 43 ilustra el valor de un juego estrictamente competitivo.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & v = u_j \end{bmatrix}}^{\text{El jugador II puede forzar un resultado aquí}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} v = u_j & u_{j+1} & \cdots & u_k \end{bmatrix}}_{\text{El jugador I puede forzar un resultado aquí}}$$

Figura 43. El valor v de un juego estrictamente competitivo.

Corolario 3.1.2

Todos los juegos finitos estrictamente competitivos de información perfecta y sin jugadas de azar tienen un valor.

Dem. Veasé Ken Binmore, "Teoría de Juegos", M^c Graw Hill.

Corolario 3.1.3

El ajedrez tiene un valor.

Dem. Veasé Ken Binmore, "Teoría de Juegos", M^c Graw Hill.

Puntos de silla.

Diremos que un par de estrategias (s,t) es un punto de silla de la forma estratégica de un juego estrictamente competitivo, si desde el punto de vista del jugador I, el resultado v que se deriva de usar (s,t) no es peor que ninguno de los resultados de la columna correspondiente a t, y no es mejor que ninguno de los de la fila correspondiente a s.

Corolario 3.1.4

La forma estratégica de un juego finito estrictamente competitivo, de información perfecta y sin jugadas de azar tiene un punto de silla (s,t).

Demostración.

Supongamos que v es el valor del juego que está representado estratégicamente; sea s una estrategia que asegura a I un resultado $u \succcurlyeq_1 v$. Ninguna de las entradas de s es menor que v, en todo caso será mayor o igual que v para él. Sea t una estrategia que asegura a II un resultado $u \succcurlyeq_2 v$. Ninguna de las entradas de t es menor que v para II. Por ser el juego estrictamente competitivo, cada entrada en la columna t es mayor o a lo más igual que v para I. Por tanto el resultado de jugar (s,t) noes ni mejor ni peor que v para I. Y ya que los jugadores no son indiferentes entre los resultados que pueden obtener se tiene que el resultado de jugar (s,t) debe ser v.

Teorema 3.1.5

Supongamos que la forma estratégica de un juego estrictamente competitivo G tiene un punto de silla (s,t) para el cual el resultado correspondiente es v. Entonces G tiene valor v.

Demostración.

Ya que v es el peor resultado de su fila para el jugador I, este puede forzar un resultado jugando s, por lo menos tan bueno como v, puesto que v es mejor resultado de su columna para I, es el peor resultado de su columna para II. Entonces II puede forzar un resultado jugando t, por lo menos tan bueno como v.

Equilibrios de Nash.

En un juego estrictamente competitivo la condición para que un par (s,t) sea un equilibrio de Nash, es que sea un punto de silla de la forma estratégica del juego.

Equilibrio subjuego perfecto.

Los equilibrios de Nash plantean que la conducta de los jugadores debe de ser en todo momento racional en su estrategia de equilibrio. Si ambos la siguen estarán en la partida del juego; fuera de ésta las estrategias del juego pueden tener cualquier conducta.

El algoritmo de Zermelo no sólo selecciona estrategias que son equilibrios de Nash en todo el juego, sino además inducen equilibrios de Nash en cada subjuego.

Conflicto y cooperación.

En los juegos de negociación lo racional es que los jugadores cooperen y lleguen a un acuerdo, no así en los juegos estrictamente competitivos. Sin embargo las negociaciones no carecen de conflicto ya que no siempre los jugadores coinciden en el acuerdo que hay que alcanzar.

Equilibrios múltiples.

Un par de estrategias puras (s,t) es un equilibrio subjuego perfecto, si s le asegura al jugador I un resultado no inferior a el valor de éste en cualquier subjuego; así mismo t para JII. De esta forma si (s,t) y (s´, t´) son equilibrios subjuegos perfectos, ambos jugadores pueden en cualquier momento del juego utilizar cualquiera de sus dos estrategias, ya que el uso de cada una de ellas garantiza al jugador *i* un valor no inferior al valor del subjuego; de tal suerte que las estrategias puedan entonces ser utilizadas por los jugadores en cualquiera de las posibles combinaciones, es decir son intercambiables.

3.2 ARRIESGARSE

En esta sección se estudian los juegos que admiten jugadas de azar y están limitados a los resultados *L* y *W*. En estos juegos la motivación de un jugador racional es maximizar la probabilidad de ganar.

Loterías.

Nos referiremos frecuentemente a una lotería (**L**) en lugar de la variable aleatoria que es igual al premio obtenido cuando se usa la lotería. Por ejemplo en la figura 44 la fila superior contiene los resultados posibles y la fila inferior contiene las probabilidades con que ocurre cada uno de ellos. Si los premios de una lotería tienen valor numérico, puede entonces calcularse su esperanza *E*(L); la cual es obtenida al multiplicar el valor del premio por la probabilidad correspondiente que tiene de suceder y sumando estos resultados. Una lotería compuesta es una lotería en la que los premios son loterías. Salvo que se diga lo contrario siempre se supone que todas las loterías son independientes.

\$3	-\$2
½	1/2

Figura 44. Lotería **L**.

Valores del juego.

En juegos con jugadas de azar lo único que queda determinado una vez que los jugadores han elegido su estrategia pura; es una lotería. Por tanto el valor de un juego estrictamente competitivo es una lotería. Supondremos que lo que un jugador racional persigue es la probabilidad de ganar. El jugador I prefiere la lotería **p** tanto como **q** si y sólo si $p \geq q$. Ya que la lotería **p** asigna al jugador II la probabilidad (1-p) de ganar, entonces II prefiere la lotería **p** tanto como **q** si y solo si $p \leq q$. Aun si existen jugadas aleatorias:

$$\mathbf{p} \preccurlyeq_1 \mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} \succcurlyeq_2 \mathbf{q}$$

en juegos en los que sólo los resultados a considerar son *L* y *W*. El juego es considerado estrictamente competitivo.

3.3 SOBRE GUSTOS

Funciones de utilidad.

Una función $u{:}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa la preferencia $\preccurlyeq$, sí y sólo sí:

$$u(a) \leq u(b) \quad \Leftrightarrow \quad a \preccurlyeq b.$$

Un problema de decisión se traduce en encontrar el resultado $w \in$S, S$\subset\Omega$ de forma tal que quien toma la decisión prefiera w a cualquier otro resultado de S. Así, sí la función de utilidad representa la preferencia $\preccurlyeq$, el problema de encontrar $w \in$S óptimo se traduce en encontrar:

$$u(w) = \max_{s \in S} u(s)$$

Construcción de funciones de utilidad.

Supóngase que 5 conjuntos contienen los mismos tipos de mercancías diferentes, pero que cada uno de ellos contienen cantidades diferentes de las mercancías; designamos a los conjuntos por a, b, c, d y e. Si tenemos preferencia racional por estas mercancías lo podemos escribir en orden creciente de los conjuntos como sigue:

$$\mathrm{b} \prec \mathrm{c} \sim \mathrm{d} \prec \mathrm{a} \prec \mathrm{e}.$$

Para encontrar una función de utilidad U: {a, b, c, d, e}$\rightarrow\mathbb{R}$ que represente nuestras preferencias, observamos que el peor conjunto es b y el mejor es e, entonces asignémosles los valores u(b)=0 y u(e)=1, ya que d esta en medio de b y e le asignamos el valor u(d)=1/2= u(c), esto por la indiferencia que hay entre los resultados c y d y ya que el conjunto a esta entre d y e, le asignamos la utilidad de u(a)=3/4. Y las utilidades asignadas a los conjuntos se ordenan de menor a mayor. Sabemos que no importa el número de conjuntos por que por la densidad de los reales siempre es posible asignarles una utilidad a cada uno de ellos.

Utilidades de Von Neumann y Morgenstern.

Neumann y Morgenstern dieron una lista de postulados de racionalidad sobre preferencias en situaciones de riesgo que tienen implícito el hecho de que una persona racional se comporta como si estuviera maximizando algo.

Se supone que $W \succ L$. Sí una función u:$\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ representa la preferencia $u(L)$=a y $u(W)$=b donde a < b; **p** denota la lotería en que W ocurre con probabilidad p, consecuentemente L ocurre con probabilidad 1-p. El conjunto de loterías con premios en Ω lo denotaremos por lot$\{\Omega\}$, entonces **p**$\in$lot$\{\Omega\}$. Así la utilidad esperada obtenida de **p** es:

$$\begin{aligned} (1) \qquad Eu(\mathrm{p}) &= \mathrm{p}u(W) + (1-\mathrm{p})u(L) \\ &= \mathrm{pb} + (1-\mathrm{p})\mathrm{a} \\ &= \mathrm{pb} + \mathrm{a} - \mathrm{pa} \\ &= \mathrm{a} + \mathrm{p}(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \end{aligned}$$

dado que b – a >0, entonces $E\,u$(**p**) es máximo si p es máximo.

1er. Supuesto: Es el supuesto de que entre dos loterías cuyos únicos premios están dados por los resultados W y L, un jugador racional preferiría la que asigne mayor probabilidad a W. Sí esto ocurre (1) dice que Eu es necesariamente una función de utilidad para las preferencias de un jugador racional sobre lot$\{\Omega\}$. Así el jugador racional actúa como si maximizará la utilidad esperada cuando toma decisiones sobre loterías con premios en $\Omega=\{W, L\}$.

Pero si además Ω fuera mayor y tuviera premios intermedios entre W y L y éstos tuvieran que ser considerados; las cosas se complican y tiene que seleccionarse una función de utilidad $u{:}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cuidadosamente de entre las muchas utilidades que representan las preferencias del jugador sobre los premios; si lo que se quiere es que Eu represente las preferencias de un jugador racional sobre las loterías. A la función de utilidad seleccionada se le llama una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern.

2°. Supuesto: consiste en que cada premio intermedio entre el mejor W y el peor L es alguna otra lotería cuyos únicos premios son W y L, es decir, para cada $w \in \Omega$ existe q talque: $w \sim \mathbf{q}$.

Una función $u{:}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de utilidad de Von Neumann y Morgenstern se define: $u(w)$=q, de tal forma que sea cierto que el jugador es indiferente entre conseguir w con seguridad y conseguir la lotería en que W ocurre con probabilidad q y L con probabilidad (1-q).

Para comprobar que u es de Neumann y Morgenstern hay que asegurarse que Eu es una función de utilidad para las preferencias del jugador sobre las loterías. La siguiente figura ilustra esta conclusión.

Lotería L

w_1	w_2	w_3	...	w_n
p_1	P_2	P_3	...	p_n

~

<table>
<tr><td>W</td><td>L</td><td>W</td><td>L</td><td>W</td><td>L</td><td rowspan="2">...</td><td>W</td><td>L</td></tr>
<tr><td>q_1</td><td>$1-q_1$</td><td>Q_2</td><td>$1-q_2$</td><td>q_3</td><td>$1-q_3$</td><td>q_n</td><td>$1-q_n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">p_1</td><td colspan="2">p_2</td><td colspan="2">p_3</td><td>...</td><td colspan="2">p_n</td></tr>
</table>

~

W	L
$p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n$	$1-(p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n)$

Figura 45. Razonamiento de Von Neumann y Morgenstern.

Cada paso de la figura 45 requiere de un supuesto adicional.

El primer paso requiere el supuesto de que a un jugador racional no le importa que en una lotería un premio sea sustituido por otro que él considere igualmente importante.

Así en la figura los premios de la lotería **L** son $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Sustituimos cada w_k por otra lotería $\mathbf{q}_k$, que el jugador R considera equivalente a w_k. Es decir q_k, se elige de forma tal que $w_k \sim \mathbf{q}_k$; en la lotería compuesta que resulta: $r = p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n$; donde r es la probabilidad de que W suceda.

Aquí entra el 2° supuesto, que es, que a un jugador no le importa que la lotería L sea sustituida por la lotería simple **r**. Entonces va a ser cierto que la lotería **L** original es equivalente a una lotería compuesta que a su vez es equivalente a una lotería simple **r**.

De esta manera dadas dos loterías como **L** el jugador preferiría aquella en la que el valor de r sea mayor teniendo así un comportamiento como de querer maximizar.

$$\begin{aligned} r &= p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n \\ &= p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2) + \cdots + p_n u(w_n) \\ &= Eu(L). \end{aligned}$$

Entonces Eu: lot$\{\Omega\} \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa las preferencias del jugador sobre las loterías; entonces $u:\Omega \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad de Neumann y Morgenstern para las preferencias del jugador sobre los premios.

Escalas de utilidad.

Dada la condición para que $u:\Omega \to \mathbb{R}$ sea una función de utilidad que represente la preferencia $\preccurlyeq$ definida en Ω; las funciones $v:\Omega \to \mathbb{R}$ definida por $(u(s))^3 = u(s)$ y $w:\Omega \to \mathbb{R}$ definida por $w(s) = 2u(s)+7$, entre otras, son funciones de utilidad para la preferencia $\preccurlyeq$.

Ya que $u(a) \leq u(b) \Leftrightarrow (u(a))^3 \leq (u(a))^3$. Y $u(a) \leq u(b) \Leftrightarrow 2u(a)+7 \leq 2u(b)+7$.

Sin embargo una función de utilidad de Neumann y Morgenstern $u:\Omega \to \mathbb{R}$ no puede elegirse tan libremente; es cierto que $(Eu)^3$ y $2(Eu)+5$ representan las preferencias de un jugador racional también como Eu cuando u es de Neumann y Morgenstern. Pero en general no es cierto que u^3 es de Neumann y Morgenstern; esto es Eu^3, en general no representa las preferencias de un jugador sobre loterías.

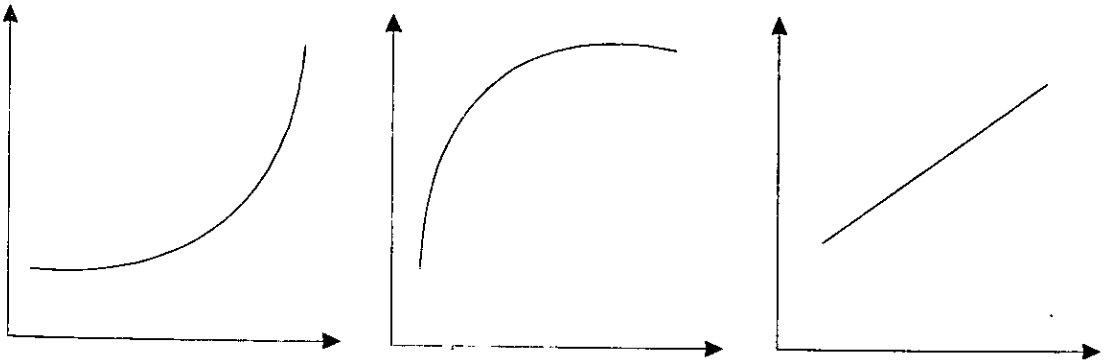
Pero $2u+5$ es una función de utilidad de Neumann y Morgenstern siempre que u lo sea ya que para todo $A>0$, $A\in\mathbb{R}$ y $B\in\mathbb{R}$, siempre se cumple que $E(Au + B) = A(Eu) + B$. Así que maximizar Eu es lo mismo que maximizar $E(Au+B)$ siempre que $A>0$.

La unidad de una escala de utilidad de Neumann y Morgenstern es llamada un útil. No debe de asumirse que los útiles del jugador I pueden compararse directamente con los útiles del jugador II.

Aversión al riesgo.

Una persona que siempre esta dispuesta a vender la oportunidad de participar en una lotería con premios monetarios por una cantidad igual a su valor esperado, se dice que es aversa al riesgo con el dinero y la persona que siempre esta dispuesta a comprar la oportunidad de participar en una lotería con premios monetarios por una cantidad igual a su valor esperado, se dice que es amante del riesgo. Una persona que es indiferente entre comprar y vender se dice que es neutral al riesgo.

Las gráficas de la figura 46 determinan las actitudes hacia el riesgo.



Convexa. Muestra gusto por el riesgo.

Cóncava. Muestra Aversión al riesgo.

Afin. Muestra neutralidad al riesgo.

Figura 46.

3.4 COBRAR

Pagos.

Suponemos que todos los jugadores son racionales en el sentido de Neumann y Morgenstern y que actúan para maximizar u_i:$\Omega \to \mathbb{R}$, u_i función de utilidad de Neumann y Morgenstern. El pago para el jugador i en el resultado w es $u_i(w)$ de Neumann y Morgenstern.

Funciones de pagos.

Sean S y T los conjuntos de estrategias puras de los jugadores I y II respectivamente en un juego de dos jugadores; si I elige s y II elige t, entonces el juego esta determinado; ya que el par (s,t) determina una lotería **L** sobre Ω conjunto de resultados finales del juego. El pago que recibirá el jugador i por el uso de las estrategias (s,t)es $\pi_i(s,t)$que es la utilidad esperada de la lotería **L**. Es decir,

$$\pi_i(s,t) = Eu_i(L).$$

El equilibrio de Nash.

El equilibrio de Nash en un juego sucede cuando el par de estrategias puras (σ,τ) son respuesta óptima una de la otra, se puede expresar la noción de equilibrio de Nash en términos de funciones de pagos, que equivale a requerir que se satisfagan las siguientes dos desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1(\sigma,\tau) \geq \pi_1(s,\tau) \\ \pi_2(\sigma,\tau) \geq \pi_2(\sigma,t)\end{array}\right\}$$

para toda s y t, estrategias puras.

Juegos bimatriciales.

Las funciones de pagos π_i:$S \times T \to \mathbb{R}$ representan simbólicamente la forma estratégica de un juego. Supóngase la siguiente forma estratégica de un juego.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad t_1 & \quad t_2 & \quad t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ \\ s_2 \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} & 1 & & 0 & & -1 \\ 1 & & 2 & & 3 & \\ & 0 & & 0 & & 0 \\ 2 & & 4 & & 6 & \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 47. Un juego bimatricial.

La forma estratégica también es llamada juego bimatricial porque esta construido por las dos matrices de pagos A y B de los jugadores I y II respectivamente. La matriz A está conformada por los elementos que se encuentran en la esquina suroeste de cada una de las entradas del juego bimatricial y la matriz B está conformada por los elementos que encuentran en la esquina noreste de cada una de las entradas del mismo juego bimatricial. Mostramos a continuación las matrices de pagos A y B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el juego bimatricial de la figura 47, s_i y t_i son las estrategias puras de los jugadores I y II respectivamente; y sus funciones de pagos están definidas por:

$$\pi_1(s_i, t_j) = ij$$
$$\pi_2(s_i, t_j) = (i-2)(j-2)$$

Dominación.

Decimos que una estrategia pura s_i de un jugador domina fuertemente a otra de sus estrategias puras s_j sí:

$$\pi_1(s_i, t) \ > \ \pi_1(s_j, t)$$

para todas las estrategias puras t del jugador II. Y decimos que la dominación es débil sí:

$$\pi_1(s_i, t) \geq \pi_1(s_j, t)$$

para todas las estrategias puras t del jugador II. En la dominación débil debe de cumplirse la desigualdad estricta en al menos uno de los valores de s_i.

Observemos del juego bimatricial anterior que la estrategia s_2 domina fuertemente a la estrategia s_1 y t_2 domina débilmente a t_3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una manera de encontrar equilibrios de Nash en un juego bimatricial es a través de la eliminación sucesiva de estrategias fuertemente dominadas; y en el juego resultante se encontrará al menos un equilibrio de Nash , si es que hay equilibrios de Nash en el juego.

Se puede también hacer eliminación de estrategias débilmente dominadas en el juego ya reducido; tras este procedimiento se llegará a una casilla del juego original la cual debe ser un equilibrio de Nash.

Ejemplo. Observemos que en el juego bimatricial de la figura 48 ha sido encerrado en cada columna en un paréntesis el pago que es la respuesta óptima del jugador I a la utilización de esa estrategia (columna) por parte del jugador II. Y también ha sido encerrado en cada renglón en un paréntesis el pago que es la respuesta óptima del jugador II a la utilización de esa estrategia por parte del jugador I.

No es para extrañarse que nos encontremos con más de una respuesta óptima en ambos casos.

Observemos que en el juego bimatricial sólo en la casilla correspondiente a la columna t_3 y a ala fila s_3 los pagos de ambos jugadores están encerrados en un paréntesis; ésto significa que el uso de la estrategia s_3 por parte del jugador I es una respuesta óptima al uso de la estrategia t_3 por parte del jugador II; y el uso de la estrategia t_3 por parte del jugador II es una respuesta óptima al uso de la estrategia s_3 por parte del jugador I. Es decir. Ambas son respuesta óptima una de la otra y por tanto el par de pagos (s_3,t_3) es un equilibrio de Nash.

		t_1		t_2		t_3		t_4		t_5
		(2)		(2)		(2)		(2)		(2)
s_1	.1		.1		.1		.1		.1	
		.38		(1.6)		(1.6)		(1.6)		(1.6)
s_2	(1.6)		.4		.4		.4		.4	
		.38		1.1		(1.2)		(1.2)		(1.2)
s_3	(1.6)		(1)		(.8)		.8		.8	
		.38		1.1		1(.5)		.8		.8
s_4	(1.6)		(1)		.5		(1.2)		1.2	
		.38		1.1		1.5		(1.8)		.4
s_5	(1.6)		(1)		.5		.2		(1.6)	

Figura 48. Juego bimatricial.

Veamos ahora que es posible encontrar el equilibrio de Nash en el juego bimatricial de la figura 48 mediante la eliminación sucesiva de estrategias fuertemente dominadas y débilmente dominadas.

1. Eliminemos la fila s_1 que esta fuertemente dominada por la fila s_2.
2. En la matriz de 4×5 que resulta de la primera eliminación eliminemos la columna t_1 que está fuertemente dominada por la columna t_2.
3. Ahora en la matriz resultante de 4×4 eliminemos s_2 que está fuertemente dominada por s_3.
4. De la matriz resultante de 3×4 eliminemos t_2 que está fuertemente dominada por t_3.

En la matriz de 3×3 que resulta ya no hay estrategias s_i ni t_i que dominen fuertemente a otra estrategia s_j ni t_j; por lo que ahora haremos la eliminación de las estrategias débilmente dominadas.

5. Entonces, de la matriz de 3×3 eliminemos t_5 que está débilmente dominada por t_3.
6. En el juego de 3×2 resultante, eliminemos s_5 que está fuertemente dominada por s_3.
7. De la matriz de 2×2 resultante eliminemos la estrategia t_4 que está débilmente dominada por la estrategia t_3.
8. Para terminar con la eliminación en este juego, eliminemos la estrategia s_4 que está fuertemente dominada por s_3.

Finalmente observamos que tras la eliminación sucesiva de las estrategias dominadas queda solamente una matriz de 1×1 que es una casilla que pertenece al juego original y corresponde a las estrategias t_3 y s_3. Esta casilla tiene que ser un equilibrio de Nash.

Capítulo 4

Negociación, Juegos y Teorema de Equilibrio de Nash.

4.1 CERRAR TRATOS

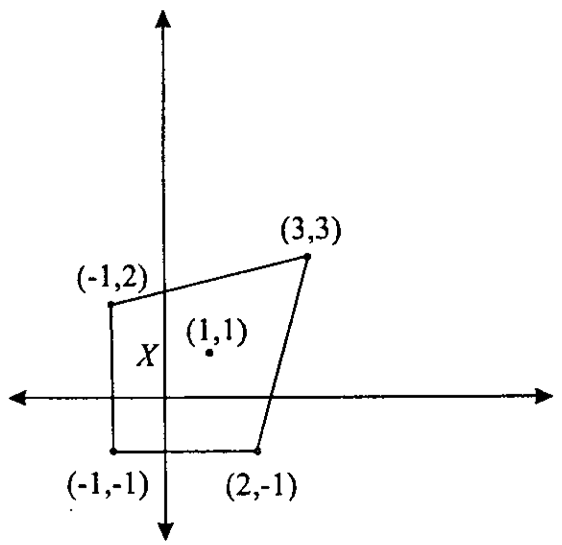
La teoría de juegos también se ocupa de la cooperación, en la primera parte de esta sección se describe un tratamiento axiomático del problema de negociación.

Regiones de beneficio cooperativo.

Supongamos que previo al juego, los jugadores firman un acuerdo en el que ellos mismos se obligan a seguir una estrategia. Al conjunto de pares de pagos que se pueden obtener de esta forma se le llama región de pagos cooperativos del juego. Se tiene el juego bimatricial de la figura 49(a) y la cerradura convexa de los pares de pagos de este juego bimatricial en la figura 49(b).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \quad t_1 & & \quad t_2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ \\ s_2 \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} & -1 & & 2 \\ 2 & & -1 & \\ & -1 & & 3 \\ -1 & & 3 & \end{array}\right] \end{array}$$

(a)



(b)

Figura 49. Una región de pagos.

Si por ejemplo el par de pagos es el (2,-1), entonces se especifica en el contrato que las estrategias que usarán serán (s_1,t_1). Sin embargo no hay un par de estrategias puras que conduzcan al par de pagos (1,1); para conseguir éste será necesario que los jugadores utilicen loterías lo cual deberá quedar especificado en el contrato. Podrán por ejemplo lanzar una moneda y si el resultado es sol, entonces usar las estrategias puras (s_2,t_1) y si es águila, entonces usar (s_2,t_2). De esta forma la utilidad de Neumann y Morgenstern que consiguen los jugadores será:

$$\tfrac{1}{2}\pi_1(s_2,t_1)+\tfrac{1}{2}\pi_1(s_2,t_2)=\tfrac{1}{2}(-1)+\tfrac{1}{2}(3)=1$$

y

$$\tfrac{1}{2}\pi_2(s_2,t_1)+\tfrac{1}{2}\pi_2(s_2,t_2)=\tfrac{1}{2}(-1)+\tfrac{1}{2}(3)=1\,.$$

La lotería $\frac{1}{2}\pi_i(s_2,t_1)+\frac{1}{2}\pi_i(s_2,t_2)$ es una combinación convexa de los pagos (s_2,t_1) y (s_2,t_2); similarmente cualquier combinación convexa de X se puede obtener firmando un contrato que especifique loterías adecuadas.

Conjunto de negociación.

¿Cuál sería el contrato que debería de firmar un jugador racional? Según Neumann y Morgenstern el resultado se encontrará en lo que ellos llamaron el ***conjunto de negociación***; el cual consta de todos los pares de pagos individualmente racionales y Pareto eficientes en X.

Eficiencia de Pareto.

Sí X es un conjunto de pares de pagos y $x \in X, x$ es Pareto-eficiente si para todo, $y > x \Rightarrow y \notin X$.

La condición dice que x es Pareto-eficiente cuando no son posibles mejoras de Pareto de x.

Decimos que $x \in X$ es una mejora de Pareto de $z \in X$ si y sólo si $x > z$.

Nota: Wilfrido Pareto introdujo la idea de óptimo de Pareto también llamado Pareto-eficiente.

Racionalidad individual.

Un acuerdo es individualmente racional si cada jugador obtiene por él, una utilidad al menos tan buena como la que pudiera conseguirse si no existiera el acuerdo.

Supondremos que existe un punto de desacuerdo d cuyos pagos son (d_1,d_2). Un par de pagos $x \in X$, corresponde a un ***contrato individualmente racional*** sí y sólo sí $x \geq d$.

Soluciones de negociación de Nash.

Nash afirmó que se puede decir más del punto en el que se pondrán de acuerdo los jugadores, que el simple hecho de pertenecer al conjunto de negociación.

Nash enunció cuatro axiomas que el punto mencionado debe de satisfacer en un problema de negociación abstracto y demostró que sólo un punto satisface sus axiomas; tal punto es llamado la solución de negociación de Nash para el problema.

Problemas de negociación de Nash.

Los problemas de negociación de Nash se representan por el par (X,d); donde X es la región de pagos factible y $d \in X$ es la consecuencia de desacuerdo.

Sólo se consideran conjuntos factibles con las siguientes características:

- X es convexo.
- X es cerrado y acotado superiormente.
- Se permite la eliminación libre.

La ***eliminación libre*** es la posibilidad en un juego de que cada jugador se comprometa a deshacerse de una cantidad x de dinero, antes del juego.

El conjunto de todos los problemas de negociación (X,d) que satisfacen estas tres condiciones se representa por B.

Soluciones de negociación.

Una función F: $B \to \mathbb{R}^2$ es una solución de negociación que tiene la característica que el par de pagos $F(X,d) \in X$ en el que el par de jugadores se pondrían de acuerdo si se enfrentan a (X,d) pertenece a X.

Recordemos que una recta soporte divide a $\mathbb{R}^2$ en dos semi-espacios. Si el interior de un conjunto convexo C es uno de los semi-espacios definidos por l que pasa por un punto frontera de C digamos $c \in C$; decimos entonces que l es una recta soporte de $c \in C$.

Supongamos $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$, definimos G: $B \to \mathbb{R}^2$ igual a s en la figura 50 en este caso s es un punto frontera de X y la recta que pasa por r, s y t, es una recta soporte de X en s; s y la recta soporte se eligen de forma que:

$$s = \alpha r + \beta t$$

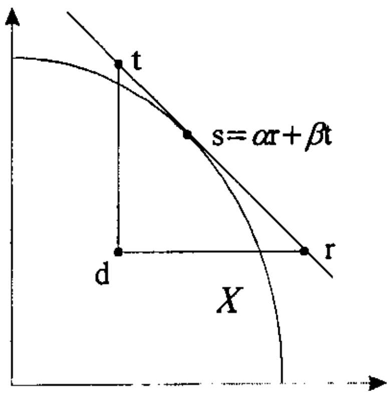


Figura 50. Problema de Negociación de Nash.

la función G: $B \to \mathbb{R}^2$ definida así se llama la solución de negociación de Nash generalizada correspondiente a los poderes de negociación de α y β.

Nash sólo consideró el caso en que $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, la cual es llamada la solución regular de negociación de Nash.

Los axiomas de Nash.

Nash enuncia las propiedades que debe de satisfacer un procedimiento racional para resolver problemas de negociación:

- El resultado final no debe depender de cómo están calibradas las escalas de utilidad de los jugadores.
- El par de pagos acordados siempre deberá de pertenecer al conjunto de negociación.
- Si los jugadores a veces se ponen de acuerdo en el par de pagos s cuando t es factible, entonces nunca se ponen de acuerdo en t cuando s es factible.
- En situaciones simétricas, ambos jugadores obtienen lo mismo.

Enunciando en axiomas las propiedades anteriores se tiene:

Supóngase las transformaciones afines estrictamente crecientes $\tau_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\tau_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; donde $\tau_i(x)=A_i(x)+B_i$, con $0>A_i\in\mathbb{R}$ y $B_i\in\mathbb{R}$; de estas construimos la función $\tau:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definida por:

$$\tau(x)=(\tau_1(x_1),\tau_2(x_2))=(A_1(x_1)+B_1,A_2(x_2)+B_2).$$

Axioma 4.1.1

Dadas cualesquiera transformaciones afines estrictamente crecientes τ_1 y τ_2

$$F(\tau(x),\tau(d))=\tau(F(X,d)).$$

Axioma 4.1.2

$i)$ $\quad F(X,d)\geq d.$

$ii)$ $\quad y>F(X,d)\Rightarrow y\notin X.$

Nota: $(a_1,a_2)\geq(b_1,b_2)$ *sí* $\|(a_1,a_2)\|\geq\|(b_1,b_2)\|.$

Axioma 4.1.3

Sí $d\in Y\subseteq X$, entonces,

$$F(X,d)\in Y\Rightarrow F(Y,d)=F(X,d).$$

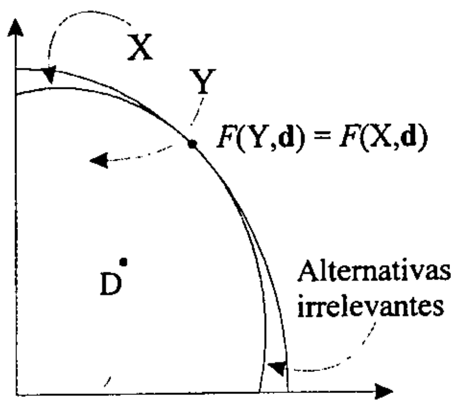


Figura 51. Independencia de alternativas irrelevantes.

Cualquier solución de Nash generalizada G: $B\to\mathbb{R}^2$ satisface los axiomas 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3. Además éstas son las únicas soluciones que satisfacen los 3 axiomas, lo cual afirma el siguiente teorema.

Teorema 4.1.4 (Nash)

Sí G: $B\to\mathbb{R}^2$ satisface los axiomas 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3, entonces F es una solución de negociación de Nash generalizada para los poderes de negociación α y β.

Demostración.

Supongamos el problema de negociación $(Z,0)$ ilustrado en la figura 52(a). Sabemos por el axioma 2 que la solución $s' = F(Z,0)$ se encuentra sobre el segmento que une a r' y t'.

Sean $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$, tales que,

$$s' = \alpha r' + \beta t'.$$

Consideremos ahora el problema de negociación típico (X,d) ilustrado en la figura 52(c); y sea $G = (X,d)$ la solución de negociación de Nash generalizada para los poderes de negociación α y β. Entonces,

$$s = \alpha r + \beta t.$$

Por demostrar que $F = (X,d) = G = (X,d)$.

Cambiamos las escalas de utilidad de los jugadores I y II por medio de las transformaciones afines estrictamente crecientes $\tau_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\tau_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; tales que $\tau_1(d_1) = 0$ y $\tau_1(r_1) = 1$ y $\tau_2(d_2) = 0$ y $\tau_2(t_2) = 1$. Entonces la función afín $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad $\tau(d) = 0$ y $\tau(r) = r'$ y $\tau(t) = t'$, como se muestra en la figura 52(b). Ya que se trata de una función afín, la imagen de la recta que pasa por r, s y t es una recta soporte $\tau(x)$ de la imagen del conjunto X; en particular $s' = \tau(s)$. Entonces por el axioma 4.1.1,

(1) $$F(Z,0) = \tau(G(X,d)).$$

Ya que $X' \subseteq Z$ se tiene por el axioma 4.1.3 que $F(X',0) = F(Z,0)$. Como $\tau(d) = 0$ y $\tau(X) = X'$ se sigue de (1) que:

$$F(\tau(X), \tau(d)) = \tau(G(X,d))$$

así,

(2) $$G(X,d) = \tau^{-1}(F(\tau(X), \tau(d)))$$

con τ^{-1} función inversa de τ.

Nota. La función $\tau_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, definida por $\tau_i(x) = A_i(x) + B_i$, con $0 > A_i \in \mathbb{R}$ y $B_i \in \mathbb{R}$. Como τ_i es una función estrictamente creciente, significa que $\forall x_i \in D_\tau$ y $\forall x_j \in D_\tau, x_i < x_j$, se tiene que $\tau_i(x_i) < \tau_i(x_j)$, ya que a elementos diferentes corresponden imágenes diferentes bajo la función, se tiene que τ_i es una función inyectiva.

Dado que τ_i es inyectiva de $\tau_i(x) = y = A_i(x) + B_i \Rightarrow x = \dfrac{y - B_i}{A_i}$, sabemos que x es única para cada y; por lo que podemos definir la función inversa de τ_i como $\tau_i^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\tau_i^{-1}(y) = \dfrac{y - B_i}{A_i}$.

La inversa de $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $\tau^{-1}(x) = (\tau_1^{-1}(x_1), \tau_2^{-1}(x_2))$.

Apliquemos el axioma 4.1.1 al lado derecho de la expresión (2), sólo que en vez de aplicar τ, aplicaremos τ^{-1},

$$G(X,d) = F(\tau^{-1}(\tau(X)), \tau^{-1}(\tau(d))) = F(X,d).$$

Por lo tanto F es una solución de negociación de Nash generalizada para los poderes de negociación α y β.

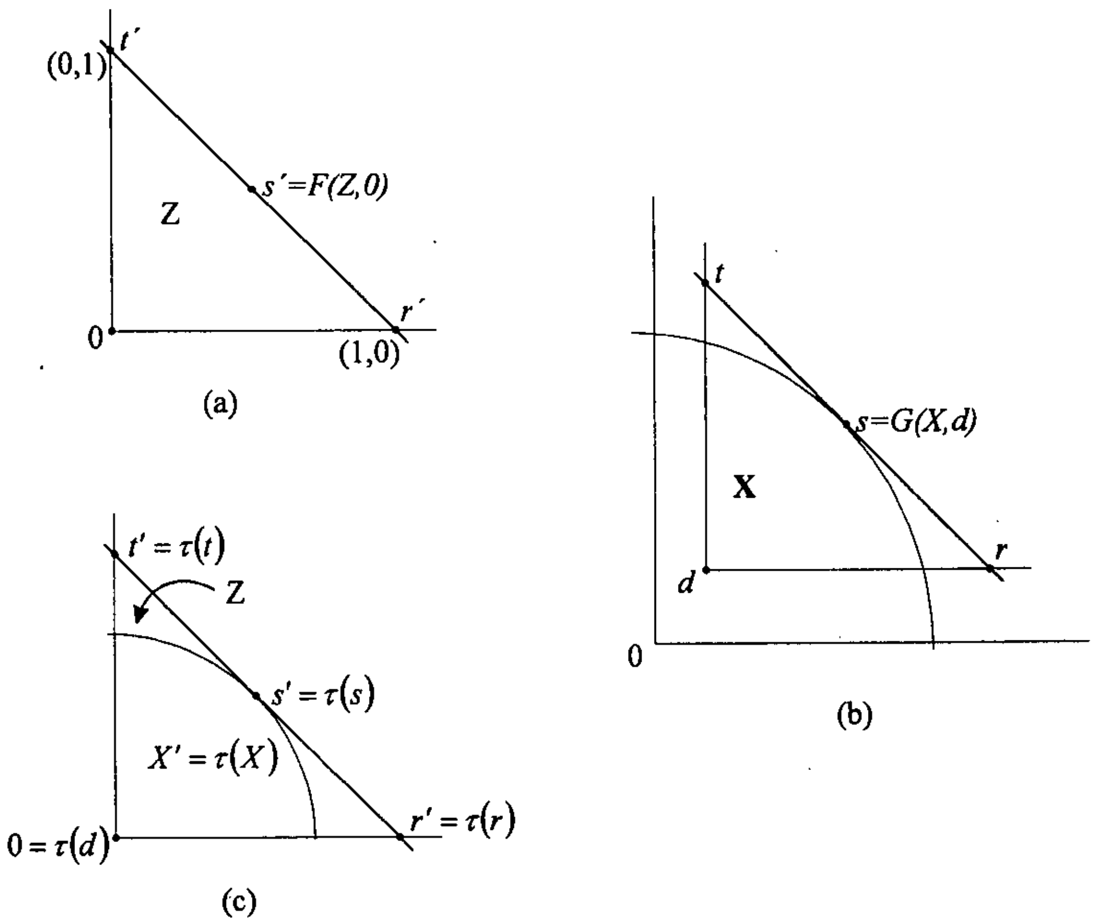


Figura 52. Maximizando un producto de Nash.

Simetría.

Recordemos que en la solución de negociación de Nash regular, los poderes de negociación son iguales, lo que hace que el trato para los jugadores sea simétrico y se puede expresar por medio de la función $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por:

$$\rho(x_1, x_2) = (x_2, x_1).$$

Particularmente la solución de negociación de Nash regular satisface el siguiente axioma.

Axioma 4.1.5

$$F(\rho(X), \rho(d)) = \rho(F(X, d)).$$

Corolario 4.1.6 (Nash)

Si F: B $\rightarrow \mathbb{R}^2$ satisface los axiomas 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3y 4.1.5, entonces F es una solución de negociación de Nash regular.

Demostración.

El problema de negociación $(Z,0)$ en la demostración del teorema 4.1.4 es simétrico; como el problema de negociación de Nash regular con poderes de negociación $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ es un caso especial del problema negociación de Nash generalizado para los poderes de negociación α y β; ya sólo tenemos que probar que la solución $s' = F(Z,0)$ satisface el axioma 4.1.5, si lo satisface, entonces $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ por lo que F será una solución de Negociación de Nash regular.

Se tiene que:

$$F(Z,0) = s' = \alpha r' + \beta t' = \alpha(1,0) + \beta(0,1) = (\alpha,0) + (0,\beta) = (\alpha,\beta)$$

apliquemos ahora $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $\rho(x_1,x_2) = (x_2,x_1)$ a la solución $s' = F(Z,0)$:

$$\rho(F(Z,0)) = \rho(\alpha,\beta) = (\beta,\alpha) = (\beta,0) + (0,\alpha) = \beta(1,0) + \alpha(0,1) = \beta r' + \alpha t' = F(\rho(Z),\rho(0))$$

Ya que el trato para los jugadores es simétrico, se tiene que $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ por lo que F es una solución de negociación de Nash regular.

Productos de Nash.

A la solución de negociación de Nash $G(X,d)$ es posible caracterizarla como el punto s en donde se alcanza el

$$\max_{\substack{x \in X \\ x \geq d}} (x_1 - d_1)^{\alpha} (x_2 - d_2)^{\beta}$$

el cual es llamado un producto de Nash generalizado.

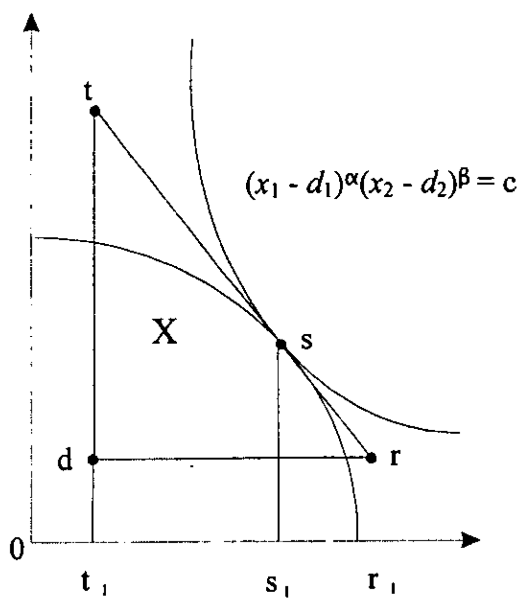


Figura 53. Maximizando un producto de Nash.

Tenemos que asegurar que si r y t se encuentran sobre la tangente a $(x_1 - d_1)^{\alpha}(x_2 - d_2)^{\beta} = c$ en s, entonces $s = \alpha r + \beta t$ tal como se definió $G(X,d)$.

Sea f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1,x_2)=(x_1-d_1)^\alpha (x_2-d_2)^\beta$ donde $f(x_1,x_2)$ es diferenciable, entonces:

$$\nabla f(x_1,x_2)=\left((x_2-d_2)^\beta \alpha (x_1-d_1)^{\alpha-1}, \beta (x_2-d_2)^{\beta-1}(x_1-d_1)^\alpha\right)$$

el gradiente de f en el punto (s_1,s_2) es :

$$\nabla f(s_1,s_2)=\left((s_2-d_2)^\beta \alpha (s_1-d_1)^{\alpha-1}, \beta (s_2-d_2)^{\beta-1}(s_1-d_1)^\alpha\right)$$

por tanto la tangente a $f(x_1,x_2)$ en s es:

$$0=(s_2-d_2)^\beta \alpha (s_1-d_1)^{\alpha-1}(x_1-s_1)+\beta (s_2-d_2)^{\beta-1}(s_1-d_1)^\alpha (x_2-s_2)$$

$$\Rightarrow \quad (s_2-d_2)^\beta \alpha (s_1-d_1)^{\alpha-1}(x_1-s_1)=-\beta (s_2-d_2)^{\beta-1}(s_1-d_1)^\alpha (x_2-s_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(s_2-d_2)^\beta \alpha (s_1-d_1)^{\alpha-1}}{\beta (s_2-d_2)^{\beta-1}(s_1-d_1)^\alpha}=-\frac{(x_2-s_2)}{(x_1-s_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\alpha (s_1-d_1)^{\alpha-1-\alpha}\right)\left(\frac{(s_2-d_2)^{\beta-\beta+1}}{\beta}\right)=-\frac{(x_2-s_2)}{(x_1-s_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\alpha}{(s_1-d_1)}\right)\left(\frac{(s_2-d_2)}{\beta}\right)=-\frac{(x_2-s_2)}{(x_1-s_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\left[\frac{(x_1-s_1)}{(s_1-d_1)}\right]=-\beta\left[\frac{(x_2-s_2)}{(s_2-d_2)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\left[\frac{(x_1-s_1)}{(s_1-d_1)}\right]+\beta\left[\frac{(x_2-s_2)}{(s_2-d_2)}\right]=0$$

ya que $d=(d_1,d_2)=(t_1,r_2)$, podemos escribir la tangente como:

$$\alpha\left[\frac{(x_1-s_1)}{(s_1-t_1)}\right]+\beta\left[\frac{(x_2-s_2)}{(s_2-r_2)}\right]=0$$

como r y t se encuentran sobre la tangente, se tienen las siguientes dos ecuaciones:

(1) $$\alpha\left[\frac{(r_1-s_1)}{(s_1-t_1)}\right]+\beta\left[\frac{(r_2-s_2)}{(s_2-r_2)}\right]=\alpha\left[\frac{(r_1-s_1)}{(s_1-t_1)}\right]-\beta=0$$

(2) $$\alpha\left[\frac{(t_1-s_1)}{(s_1-t_1)}\right]+\beta\left[\frac{(t_2-s_2)}{(s_2-r_2)}\right]=-\alpha+\beta\left[\frac{(t_2-s_2)}{(s_2-r_2)}\right]=0$$

resolviendo (1) para s_1 y (2) para s_2, obtenemos

de (1):

$$\alpha\left[\frac{(r_1-s_1)}{(s_1-t_1)}\right]=\beta$$

$$\Rightarrow \quad \beta(s_1-t_1)=\alpha(r_1-s_1)$$

$$\Rightarrow \quad \beta s_1-\beta t_1=\alpha r_1-\alpha s_1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha s_1+\beta s_1=\beta t_1+\alpha r_1$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)s_1=\beta t_1+\alpha r_1$$

de (2):

$$\alpha=\beta\left[\frac{(t_2-s_2)}{(s_2-r_2)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \alpha(s_2-r_2)=\beta(t_2-s_2)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha s_2-\alpha r_2=\beta t_2-\beta s_2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha s_2+\beta s_2=\beta t_2+\alpha r_2$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)s_2=\beta t_2+\alpha r_2$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = \frac{\beta t_1 + \alpha r_1}{(\alpha+\beta)} \qquad\qquad \Rightarrow \quad s_2 = \frac{\beta t_2 + \alpha r_2}{(\alpha+\beta)}$$

pero $(\alpha+\beta)=1$, así: $\qquad$ pero $(\alpha+\beta)=1$, así:

$$s_1 = \beta t_1 + \alpha r_1 \qquad\qquad s_2 = \beta t_2 + \alpha r_2$$

Por lo tanto $s = \alpha r + \beta t$, que es lo que queríamos demostrar.

Así la solución de Nash regular se caracteriza como el punto s en el que se alcanza el

$$\max_{\substack{x\in X\\ x\geq d}} (x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$$

el cual es llamado un producto de Nash.

Si ahora se pidiera que los poderes de negociación fueran $a \geq 0$ y $b \geq 0$ con $a+b \geq 0$, la solución de negociación de Nash generalizada se supone la misma que la que tiene los poderes $\alpha = \dfrac{a}{a+b}$ y $\beta = \dfrac{b}{a+b}$ y funciona con productos generalizados de Nash porque,

$$(x_1-d_1)^a (x_2-d_2)^b = \left\{(x_1-d_1)^\alpha (x_2-d_2)^\beta\right\}^{a+b}$$

así la expresión de la igualdad es maximizada siempre que $(x_1-d_1)^\alpha \beta (x_2-d_2)^\beta$ se maximiza. Además ya que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ la solución de negociación continúa dependiendo únicamente de los poderes de negociación.

La división del dólar.

Nos interesamos en saber como la aversión al riesgo influye en la parte del excedente que el jugador consigue.

Monetariamente los jugadores I y II pueden ponerse de acuerdo en cualquier par $m = (m_1, m_2)$ de cantidades de dólar en el conjunto $M = \{m \text{ tal que } m_1 + m_2 \leq 1\}$.

Para utilizar la teoría de Nash es necesario traducir la situación de los jugadores en términos de funciones de utilidad de Neumann y Morgenstern. Supongamos que $v_i{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ representa la utilidad del dinero del jugador i. Cada jugador esta interesado en el beneficio propio que pueda obtener y no en perjudicar al contrario, amenos que ésto le proporcione un mejor beneficio.

Con estos supuestos la función u_i: $M\to\mathbb{R}$ sobre acuerdos para un jugador está dada por:

$$u_i(m) = v_i(m_i)$$

Significa que la utilidad para el jugador i en el acuerdo m, sólo depende de la cantidad m_i que él mismo consigue.

En equilibrio, quien ofrece siempre quiere ofrecer a quien responde una cantidad que lo deje indiferente entre aceptar y rechazar. En equilibrio, quien responde siempre quiere aceptar una oferta así o una mejor, y rechazar cualquiera que sea peor.

Jugadores aversos al riesgo.

Supóngase las funciones $v_{1,2}{:}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ definidas por $v_1(z) = z^\gamma$ y $v_2(z) = z^\delta$ donde $0\leq\gamma\leq 1$ y $0\leq\delta\leq 1$, entonces v_1 y v_2 son estrictamente crecientes y cóncavas. Las cantidades

en X Pareto eficientes son $\left(z^{\gamma},(1-z)^{\delta}\right)$ con desacuerdo en d=(0,0) y el valor del producto generalizado de Nash $(x_1-d_1)^{\alpha}\,\beta(x_2-d_2)^{\beta}$ con $x_1=z^{\gamma}$ y $x_2=(1-z)^{\delta}$ es $z^{\alpha\gamma}(1-z)^{\beta\delta}$.
La solución de Nash generalizada $G=(X,d)$ en donde el producto alcanza el máximo es:

$$\frac{d}{dz}z^{\alpha\gamma}(1-z)^{\beta\delta}=-z^{\alpha\gamma}\left(\beta\delta(1-z)^{(\beta\delta)-1}\right)+(1-z)^{\beta\delta}\left(\alpha\gamma(z)^{(\alpha\gamma)-1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -z^{\alpha\gamma}\left(\beta\delta(1-z)^{(\beta\delta)-1}\right)+(1-z)^{\beta\delta}\left(\alpha\gamma(z)^{(\alpha\gamma)-1}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad z^{\alpha\gamma}\left(\beta\delta(1-z)^{(\beta\delta)-1}\right)=(1-z)^{\beta\delta}\left(\alpha\gamma(z)^{(\alpha\gamma)-1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(\beta\delta(1-z)^{(\beta\delta)-1}\right)}{(1-z)^{\beta\delta}}=\frac{\left(\alpha\gamma(z)^{(\alpha\gamma)-1}\right)}{z^{\alpha\gamma}}$$

$$\Rightarrow \quad \beta\delta\left(1-z\right)^{(\beta\delta)-1-(\beta\delta)}=\alpha\gamma\left(z\right)^{(\alpha\gamma)-1-(\alpha\gamma)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\beta\delta}{(1-z)}=\frac{\alpha\gamma}{z}$$

$$\Rightarrow \quad z\beta\delta=(1-z)\alpha\gamma$$

$$\Rightarrow \quad z\beta\delta=\alpha\gamma-z\alpha\gamma$$

$$\Rightarrow \quad z\beta\delta+z\alpha\gamma=\alpha\gamma$$

$$\Rightarrow \quad z(\beta\delta+\alpha\gamma)=\alpha\gamma$$

$$\Rightarrow \quad z=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta+\alpha\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad (1-z)=\frac{\beta\delta}{\beta\delta+\alpha\gamma}.$$

Juegos cooperativos y no cooperativos.

La teoría de juegos no cooperativos requiere una descripción completa de las reglas del juego de forma que las estrategias de las cuales disponen los jugadores puedan ser estudiadas detalladamente. El objetivo es entonces encontrar un par de estrategias de equilibrio las cuales son llamadas la solución del juego.

La teoría cooperativa se ocupa de situaciones en las que los jugadores pueden negociar previo al juego y además pueden concluir firmando un acuerdo vinculante que los obligue. Aquí lo más importante es la estructura de preferencias del juego ya que ésta determina los contratos factibles.

El programa de Nash.

Nash consideró que las teorías cooperativa y no cooperativa proporcionan visiones complementarias; reconoció que la plausibilidad de sus axiomas es discutible y propuso ponerlos a prueba construyendo modelos de negociación no cooperativos y modelar las diferentes alternativas que tienen los jugadores cuando negocian con estrategias de un juego de negociación dónde las reglas se especifican explicita y detalladamente. Si en la prueba un número suficientemente grande de problemas de negociación satisface los axiomas de Nash, entonces su teoría de negociación quedaría justificada, de lo contrario sería mejor abandonarla. Tal investigación es llamada ***el programa de Nash***.

El juego de horizonte infinito.

El problema continúa siendo la división del dólar. Los jugadores son aversos al riesgo, lo que significa que v_i es cóncava. La utilidad de Neumann y Morgenstern del jugador i por conseguir $x en el instante t es $v_i(x)\delta_i^t$; $v_i(0)=0$ y $v_i(1)=1$. El tiempo es importante para los jugadores. Los acuerdos monetarios factibles para los jugadores son $m=(m_1, m_2)\in M$. Las utilidades para los jugadores cuando es alcanzado el acuerdo m en el instante t son: $u_i(m,t)=v_i(m_i)\delta_i^t$.

El factor δ_i^t donde $0<\delta_i^t<1$, es un factor de descuento que refleja la impaciencia del jugador i en el tiempo t; Si δ_i^t es próximo a cero, entonces el jugador i es muy impaciente, pero si $\delta_i^t=1$, entonces el jugador i no es nada impaciente.

Los jugadores no sólo prefieren más dinero, también lo prefieren lo antes posible.

En esta negociación (juego G) el jugador I hace una oferta a II en t=0, si II la rechaza, entonces II hace una contra oferta a I en t=τ, sí I rechaza, entonces I hace una contra oferta a II en t=2τ, así sucesivamente. Ambos jugadores consideran la eventualidad de rechazo indefinida con utilidad cero; sin perder generalidad consideramos el caso en que τ=1. Tambien utilizaremos además el juego acompañante H=G, sólo que en H es II quien hace la primera propuesta. La figura 54 muestra el conjunto de los pares de utilidades factibles en el instante i=0,1,2; $X_i=(M,i)$

Se dice que una ***estrategia es estacionaria*** cuando ignora la historia de un jugador en el juego.

Por ejemplo los jugadores I y II utilizan estrategias estacionarias, si cada que a I le toca proponer, propone m independientemente de las ofertas y contra ofertas hechas con anterioridad en el juego; y cada que a II le toca proponer, propone n con independencia de las ofertas y contra ofertas anteriores.

Veamos el caso en que II ha decidido aceptar sólo m u otra cosa mejor para él, análogamente I aceptará solamente n u otra cosa mejor para él.

¿Constituyen estas estrategias puras un equilibrio subjuego perfecto?. Definimos los vectores $a=u(m,0)$ y $b=u(n,0)$. Los valores $a_2=u_2(m,0)$ y $a_1=u_1(m,0)$ son las utilidades que los jugadores II y I reciben en el instante cero si el acuerdo m es aceptado.

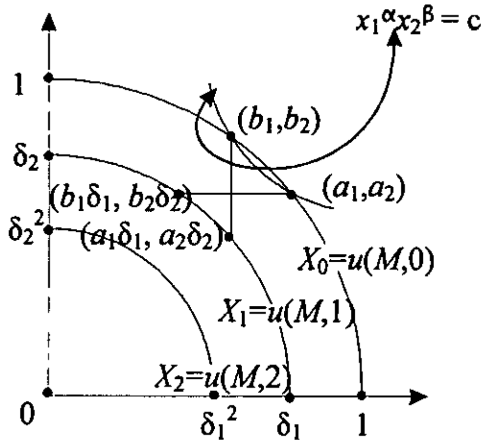


Figura 54. Conjunto de utilidades de los pares factibles en los instantes 0,1 y 2.

Sabemos que una propuesta de equilibrio es la que hace que el jugador que responde sea indiferente entre aceptar y rechazar. Si I propone m en el instante t=0 en el juego G y II acepta, entonces II obtendrá una utilidad a_2; si II rechaza, entonces II hará una propuesta en el instante t+1 y I aceptará, entonces II tendrá una utilidad $b_2\delta_2$ por rechazar. Para que II sea indiferente entre aceptar y rechazar m se requiere que $a_2\delta_2^t = b_2\delta_2^{t+1}$ para cada t; y para que I sea indiferente entre aceptar y rechazar n se requiere que $a_1\delta_1^t = b_1\delta_1^{t+1}$ para cada t.

En la figura 54 están ilustradas estas ecuaciones; la primera ecuación sólo exige que los puntos (a_1, a_2) y $(b_1\delta_1, b_2\delta_2)$ se encuentren en la misma recta horizontal y la segunda que los puntos (b_1, b_2) y $(a_1\delta_1, a_2\delta_2)$ se encuentren en la misma recta vertical.

Las ecuaciones caracterizan el acuerdo de equilibrio en el caso en que el intervalo de propuestas sucesivas es $\tau = 1$. Para obtener el valor real fijamos la atención en el caso límite cuando $\tau \to 0$. Para el caso $\tau \neq 1$ sustituimos δ_1^t y δ_2^t en las ecuaciones anteriores por δ_1^τ y δ_2^τ. Si ahora escribimos simultáneamente $\delta_1 = e^{-\rho_1}$ y $\delta_2 = e^{-\rho_2}$ donde ρ_1 y ρ_2 son tasas de descuento. Tenemos que:

$$a_2 = b_2 e^{\tau(-\rho_2)}$$
$$b_1 = a_1 e^{\tau(-\rho_1)}$$

Teorema 4.1.7

Supongamos que el equilibrio estacionario y subjuego perfecto determinado por las ecuaciones anteriores conducen al par de pagos $s(\tau)$. Entonces,

$$s(\tau) \to s \quad \text{sí} \quad \tau \to 0$$

donde s es la solución de negociación de Nash generalizada correspondiente a los poderes de negociación $\alpha = \dfrac{1}{\rho_1}$ y $\beta = \dfrac{1}{\rho_2}$ para el problema de negociación $(X,0)$.

<u>Demostración:</u>

$$\left\{\begin{array}{lll} a_2 = b_2 e^{\tau(-\rho_2)} & \Rightarrow & \dfrac{a_2}{b_2} = e^{\tau(-\rho_2)} \\ b_1 = a_1 e^{\tau(-\rho_1)} & \Rightarrow & \dfrac{b_1}{a_1} = e^{\tau(-\rho_1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{a_2}{b_2}\right)^{\alpha} = e^{-\tau} \\ \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^{\beta} = e^{-\tau} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_2^{\alpha}}{b_2^{\alpha}} = \frac{b_1^{\beta}}{a_1^{\beta}} \quad \Rightarrow \quad a_2^{\alpha} a_1^{\beta} = b_2^{\alpha} b_1^{\beta}$$

por tanto los puntos (a_1, a_2) y (b_1, b_2) se encuentran en la curva $x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = c$ de los productos de Nash, cuando el intervalo es $\tau = 1$.

Cuando $\tau \to 0 \Rightarrow e^{-\tau} \to 1$ y $\frac{a_2}{b_2} \to 1$ y $\frac{b_1}{a_1} \to 1$, entonces a y b tienden hacia el mismo valor s.

Si en la figura 54 cuando δ_i es sustituida por δ_i^τ en todas partes cuando $\tau \to 0$, entonces la figura correspondiente sería la figura 53, donde X=X$_o$ y d=0. Así $s(\tau) \to s$ cuando $\tau \to 0$.

Nota: como ρ_i es la tasa de descuento del jugador *i*, una tasa alta corresponde a un factor de descuento alto que corresponde a una persona impaciente.

Un jugador con un factor de descuento δ_i próximo a cero es muy impaciente, pero si $\delta_i = 1$ el jugador no es impaciente en lo absoluto.

Unicidad del equilibrio.

Al probar que el resultado corresponde a un único equilibrio subjuego perfecto se estará comprobando que si los jugadores usan estrategias equilibrio subjuego perfectas, entonces llegaran a la solución de negociación de Nash generalizada.

Consideremos que la utilidad de Neumann y Morgenstern para un jugador en el instante cero por una cantidad de dinero x es $v_i(x) = x$ de esta manera el jugador I asignará $x\delta_1^t$ a un acuerdo que asigna una cantidad x del dólar a él y (1-x) a II en el instante t, y II asignará la utilidad $(1-x)\delta_2^t$ para el mismo acuerdo en el mismo instante.

Teorema 4.1.8 (Rubinstein)

El juego de negociación de horizonte infinito *G* tiene un único resultado que sea equilibrio subjuego perfecto.

Demostración.

G puede tener muchos resultados que sean equilibrio subjuego perfecto, en cada caso los jugadores obtienen cada uno pagos distintos. Sea A_1 el mayor de los pagos del jugador I y a_1 el menor; y B_2 el mayor de los pagos del jugador II y b_2 el menor, en el juego acompañante *H*.

Por demostrar que $A_1 = a_1$ y $B_2 = b_2$.

En un equilibrio subjuego perfecto en *G* lo mínimo que el jugador II puede obtener es $b_2\delta_2$ porque siempre puede rechazar cualquier propuesta de I en t=0. En el juego H que comienza en $\tau = 1$ (por simplificar el álgebra) II lo mínimo que puede obtener es b_2 por el descuento δ_2 por el retraso de longitud 1; esto significa que lo más que puede obtener I es $(1-b_2\delta_2)$, entonces,

(1) $$A_1 \le (1-b_2\delta_2)$$

Supongamos que $x \le (1-B_2\delta_2)$, mostremos que x no es un elemento del conjunto de los pagos de I. Sea $x < y < (1-B_2\delta_2) \Rightarrow y-1 < -B_2\delta_2 \Rightarrow -y+1 > B_2\delta_2$, entonces una propuesta de y en t=0 de I sería aceptada por II. Entonces no es óptimo para I hacer una propuesta x pues puede tener y; por consiguiente x no está en los posibles pagos de I. Se debe entonces de satisfacer:

(2) $$a_1 \ge (1-B_2\delta_2)$$

intercambiando los papeles de G y H se tiene:

(3) $$B_2 \leq (1 - a_1\delta_1)$$
(4) $$b_2 \geq (1 - A_1\delta_1)$$
de la desigualdad (4) se tiene que $-b_2 \leq -(1 - A_1\delta_1)$, al sustituir en (1) obtenemos,
$$A_1 \leq (1 - b_2\delta_2) \leq (1 - \delta_2(1 - A_1\delta_1)) = 1 - \delta_2 + A_1\delta_1\delta_2$$
en particular,
$$A_1 \leq 1 - \delta_2 + A_1\delta_1\delta_2 \Rightarrow A_1 - A_1\delta_1\delta_2 \leq 1 - \delta_2 \Rightarrow A_1(1 - \delta_1\delta_2) \leq 1 - \delta_2 \Rightarrow (5)$$
(5) $$A_1 \leq \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}$$
de la desigualdad (3) se tiene que $-B_2 \geq -(1 - a_1\delta_1)$, al sustituir en (2) obtenemos,
$$a_1 \geq (1 - B_2\delta_2) \geq (1 - \delta_2(1 - a_1\delta_1)) = 1 - \delta_2 + a_1\delta_1\delta_2$$
en particular,
$$a_1 \geq 1 - \delta_2 + a_1\delta_1\delta_2 \Rightarrow a_1 - a_1\delta_1\delta_2 \geq 1 - \delta_2 \Rightarrow a_1(1 - \delta_1\delta_2) \geq 1 - \delta_2 \Rightarrow (6)$$
(6) $$a_1 \geq \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}$$
de (5) y (6) se tiene :
$$a_1 \geq \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2} \geq A_1$$
pero A_1 es máximo en S y a_1 mínimo, entonces $a_1 \leq A_1$ y de (5) y (6) se tiene que $a_1 \geq A_1$, por tanto
$$a_1 = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2} = A_1$$
de la desigualdad (1) se tiene que $-A_1 \geq -(1 - b_2\delta_2)$, al sustituir en (4) obtenemos,
$$b_2 \geq (1 - A_1\delta_1) \geq (1 - \delta_1(1 - b_2\delta_2)) = 1 - \delta_1 + b_2\delta_1\delta_2$$
en particular,
$$b_2 \geq 1 - \delta_1 + b_2\delta_1\delta_2 \Rightarrow b_2 - b_2\delta_1\delta_2 \geq 1 - \delta_1 \Rightarrow b_2(1 - \delta_1\delta_2) \geq 1 - \delta_2 \Rightarrow (7)$$
(7) $$b_2 \geq \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1\delta_2}$$
de la desigualdad (2) se tiene que $-a_1 \leq -(1 - B_2\delta_2)$, al sustituir en (3) obtenemos,
$$B_2 \leq (1 - a_1\delta_1) \leq (1 - \delta_1(1 - B_2\delta_2)) = 1 - \delta_1 + B_2\delta_1\delta_2$$
en particular,
$$B_2 \leq 1 - \delta_1 + B_2\delta_1\delta_2 \Rightarrow B_2 - B_2\delta_1\delta_2 \leq 1 - \delta_1 \Rightarrow B_2(1 - \delta_1\delta_2) \leq 1 - \delta_1 \Rightarrow (8)$$
(8) $$B_2 \leq \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1\delta_2}$$
de (7) y (8) se tiene :
$$B_2 \leq \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1\delta_2} \leq b_2$$
pero B_2 es máximo en el conjunto de pagos de equilibrios subjuegos perfectos del juego H para el jugador II y b_2 mínimo, entonces $b_2 \leq B_2$ y de (7) y (8) setiene que $b_2 \geq B_2$ por tanto,
$$B_2 = \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1\delta_2} = b_2.$$

4.2 MIXTURAS

Una estrategia mixta es una estrategia pura usada aleatoriamente. Por ejemplo suponga que un jugador que dispone de dos estrategias puras puede utilizar una con probabilidad 1/3 y la otra con probabilidad 2/3.

Cálculo de valores minimax y maximín.

El teorema de Minimax de Von Neumann es quizá uno de los resultados más famosos de Teoría de Juegos.

Denotamos por S al conjunto de filas en una matriz y por T al conjunto de las columnas; al elemento correspondiente a la fila s y a la columna t lo designamos por $\pi(s,t)$.

Así,

$$\max_{s\in S}\pi(s,t) \qquad \text{y} \qquad \min_{t\in T}\pi(s,t)$$

son la mayor casilla de la columna t y la menor casilla de la fila s respectivamente. En la matriz (a) de la figura 55 se encuentran subrayados los mayores valores de cada columna y en la matriz (b) los menores valores de cada fila.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \underline{6} & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ \underline{3} & 2 & \underline{4} \end{bmatrix} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 6 & \underline{0} \\ 2 & \underline{0} & 3 \\ 3 & \underline{2} & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$\overline{m} = \min_{t\in T}\max_{s\in S}\pi(s,t) \qquad\qquad \underline{m} = \max_{s\in S}\min_{t\in T}\pi(s,t)$$

$$(a) \qquad\qquad\qquad\qquad (b)$$

Figura 55.

Se tiene que:

$$\max_{s\in S}\pi(s,t_1)=3 \qquad \min_{t\in T}\pi(s_1,t)=0$$
$$\max_{s\in S}\pi(s,t_2)=6 \qquad \min_{t\in T}\pi(s_2,t)=0$$
$$\max_{s\in S}\pi(s,t_3)=4 \qquad \min_{t\in T}\pi(s_3,t)=2$$

entonces,

$$\overline{m} = \min_{t\in T}\left\{\max_{s\in S}\pi(s,t)\right\} = \min\{3,6,4\} = 3$$
$$\underline{m} = \max_{s\in S}\left\{\min_{t\in T}\pi(s,t)\right\} = \max\{0,0,2\} = 2$$

$\overline{m}$ es llamado el ***valor minimax*** de la matriz M y $\underline{m}$ es llamado el ***valor maximín*** de la matriz M.

Teorema 4.2.1

$\overline{m} \geq \underline{m}$

Demostración.

Para todo $t \in T$, $\min\limits_{t \in T} \pi(s,t) \leq \pi(s,t)$. Entonces,

$$\max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s,t) \leq \max_{s \in S} \pi(s,t)$$

en particular,

$$\max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s,t) \leq \min_{t \in T} \max_{s \in S} \pi(s,t)$$

Nota: puede darse el caso en que $\overline{m} \leq \underline{m}$ y que $\overline{m} = \underline{m}$.

Puntos de silla.

El punto (σ, τ) de una función continua $\pi : S \times T \to \mathbb{R}$ (donde S y T son intervalos cerrados en $\mathbb{R}$) es un punto de silla si $\pi(\sigma, \tau)$ es el mayor en su columna y menor en su fila; matemáticamente,

(1) $$\pi(\sigma,t) \geq \pi(\sigma,\tau) \geq \pi(s,\tau) \quad \text{para todo } s \in S \text{ y } t \in T$$

En la siguiente matriz se muestra subrayado un punto de silla donde $\sigma = s_2$ y $\tau = t_2$,

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 4 & \underline{2} & 3 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 56.

(σ, τ) satisfacen:

(2) $$\min_{t \in T} \pi(\sigma,t) = \max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s,t) = \underline{m}$$

(3) $$\max_{s \in S} \pi(s,\tau) = \min_{t \in T} \max_{s \in S} \pi(s,t) = \overline{m}$$

Para confirmar la relación entre los valores minimax y maximín y los puntos de silla, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.2.2

Una condición necesaria y suficiente para que (σ, τ) sea un punto de silla, es que:

$$\sigma = \min_{t \in T} \pi(\sigma,t) = \max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s,t) = \underline{m}$$

$$\tau = \max_{s \in S} \pi(s,\tau) = \min_{t \in T} \max_{s \in S} \pi(s,t) = \overline{m}$$

y que $\overline{m} = \underline{m}$. Cuando (σ, τ) es un punto de silla, $\overline{m} = \pi(\sigma, \tau) = \underline{m}$.

Demostración.

1°. Supongamos que (σ, τ) es un punto de silla, es decir:

$$\pi(\sigma,t) \geq \pi(\sigma,\tau) \geq \pi(s,\tau) \quad \text{para todo } s \in S \text{ y } t \in T$$

Entonces,

$$\min_{t\in T}\pi(\sigma,t)\geq\pi(\sigma,\tau)\geq\max_{s\in S}\pi(s,\tau)$$

por definición el valor maximín y el valor minimax satisfacen:

$$\underline{m}=\max_{\sigma\in S}\min_{t\in T}\pi(\sigma,t)\geq\min_{t\in T}\pi(\sigma,t)\geq\max_{s\in S}\pi(s,\tau)\geq\min_{\tau\in T}\max_{s\in S}\pi(s,\tau)=\overline{m}$$

Por el teorema 4.2.2 se tiene que $\overline{m}\geq\underline{m}$ y acabamos de mostrar que $\overline{m}\leq\underline{m}$, por lo tanto $\overline{m}=\underline{m}$.

2°. Supongamos ahora que $\overline{m}=\underline{m}$.

Por demostrar que existe (σ,τ) un punto de silla. Elijamos σ y τ que satisfagan las ecuaciones (2) y (3) para cualesquiera $s\in S$ y $t\in T$,

$$\pi(s,\tau)\leq\max_{s\in S}\pi(s,\tau)=\overline{m}=\underline{m}=\min_{t\in T}\pi(\sigma,t)\leq\pi(\sigma,t).$$

Si en la desigualdad anterior tomamos $\sigma=s$ y $\tau=t$, tenemos que $\overline{m}=\pi(\sigma,\tau)=\underline{m}$; por tanto (σ,τ) es un punto de silla.

Supremos e ínfimos.

En los ejemplos finitos planteados hasta ahora siempre existen; pero también hay que considerar conjuntos infinitos de estrategias puras en donde la noción de máximo y mínimo deberán de ser reemplazadas por la de supremo (sup) e ínfimo (inf). Además habrá que pedir características especiales a las funciones de pagos $\pi:S\times T\rightarrow\mathbb{R}$, en caso de así requerirlo para poder obtener resultados.

Niveles de seguridad.

El ***nivel de seguridad*** en un juego es el máximo pago esperado que el jugador I pueda asegurarse independientemente de que hagan los demás jugadores. Para obtener este nivel de seguridad el jugador deberá de ponerse en el peor de los casos.

Por ejemplo, considérese el juego bimatricial donde la matriz de pagos del jugador I es la de la figura 56.

El peor de los casos significa para el jugador I es que su oponente se olvide de maximizar su utilidad por minimizar la de él. Así que poniéndose I en el peor de los casos hace un análisis por fila de pago asegurado que podría obtener; de esta manera el conjunto de pagos que podría obtener sería el $\{0,2,0\}$, en cuyo caso el mejor de los pagos sería 2 usando la estrategia s_2, pero $2=\underline{m}$. En general el argumento es cierto y muestra que I siempre dispone de una estrategia que le asegura un pago por lo menos igual al del valor maximín de su matriz.

Teorema 4.2.3

Sí la matriz de pagos del jugador I tiene un punto de silla (σ,τ), entonces su nivel de seguridad es $\overline{m}=\pi_1(\sigma,\tau)=\underline{m}$ y σ es una de sus estrategias de seguridad.

<u>Demostración.</u>

Supongamos que la matriz tiene un punto de silla (σ,τ), es decir,

$$\pi(\sigma,t)\geq\pi(\sigma,\tau)\geq\pi(s,\tau)\quad\text{para todo } s\in S \text{ y } t\in T.$$

El lado izquierdo de la desigualdad significa que I debe de conseguir por lo menos $\underline{m} = \pi(\sigma,\tau)$ por jugar σ para toda estrategia t∈T que use II. El lado derecho de la desigualdad dice que I no puede asegurarse conseguir más que $\underline{m} = \pi(\sigma,\tau)$ si usa otra $s \in S$ en lugar de usar $\sigma \in S$ siempre II use τ.

Una estrategia de un equilibrio de Nash es de seguridad en un juego estrictamente competitivo. En juegos no estrictamente competitivos el equilibrio de Nash proporciona a los jugadores algo más que sus niveles de seguridad.

Estrategias mixtas.

Una ***estrategia mixta*** para el jugador I (jugador II) en un juego bimatricial, es un vector renglón p (es un vector renglón q) de entradas positivas de m×1(n×1), con la propiedad de que la suma de las entradas es 1. p_j (q_k) se define,

p_j = probabilidad con la que el jugador I utiliza la estrategia pura s_j

(q_k = probabilidad con la que el jugador II utiliza la estrategia pura t_k).

Denotamos por $P(Q)$el conjunto de todas las estrategias mixtas del jugador I (II).

Dominación y estrategias mixtas.

Una estrategia pura que no está dominada por otra estrategia pura puede estar dominada por una estrategia mixta. Supóngase el siguiente juego bimatricial de la figura 57(a).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & t_1 & & t_2 & & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ s_1 \\ \\ s_2 \\ \\ s_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} & 0 & & 4 & & 9 \\ 1 & & 6 & & 0 & \\ & 1 & & 2 & & 0 \\ 2 & & 0 & & 3 & \\ & 7 & & 3 & & 0 \\ 3 & & 2 & & 4 & \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & t_1 & & t_2 & & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ s_1 \\ \\ s_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} & 0 & & 4 & & 9 \\ 1 & & 6 & & 0 & \\ & 7 & & 3 & & 0 \\ 3 & & 2 & & 4 & \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & t_1 & & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ s_1 \\ \\ s_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} & 0 & & 9 \\ 1 & & 0 & \\ & 7 & & 0 \\ 3 & & 4 & \end{array}\right] \end{array}$$

(a) (b) (c)

Figura 57.

La estrategia pura s_3 de I domina fuertemente a su estrategia pura s_2, eliminando s_2 obtenemos la matriz (b). Ninguna de las estrategias puras del jugador II domina a otra de sus estrategias puras; pero si pensamos en la estrategia mixta $q = {}^{T}\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ que asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ al uso de t_1 de II y asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ al uso de t_3 de II, se tendría la estrategia $t_q = \left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right)$, con estos valores la estrategia t_q domina fuertemente a la estrategia t_2, por lo que eliminamos t_2, obteniendo la matriz (c), donde s_3 domina fuertemente a s_1, sí eliminamos s_1, en el juego que queda t_1 domina fuertemente a t_3, eliminando t_3 queda el único par de estrategias puras (s_3,t_1).

Pagos asegurados con estrategias mixtas.

Ya que la estrategia s_2 de I es fuertemente dominada por s_3, entonces s_2 es eliminada. Supongamos ahora que s_1 es usada por I con probabilidad $(1-r)$ y s_3 con probabilidad r. Así I usará la estrategia mixta $p=(1-r,0,r)$; en donde el pago esperado de I, $x=E_k(r)$ por el uso de t_k de II será:

$$E_1(r)=1(1-r)+3r=1+2r;$$
$$E_2(r)=6(1-r)+2r=6-4r;$$
$$E_3(r)=0(1-r)+4r=4r.$$

En la gráfica de la figura 58 se muestran estas tres rectas.

Como I debe de determinar su nivel de seguridad poniéndose en el peor de los casos él calcula que su pago esperado será:

$$m(r)=\min\{E_1(r),E_2(r),E_3(r)\}$$

$m(r)$ en la gráfica está en negrito. Así, si $r=r_0$, entonces $E_3(r)=m(r)$, pero si $r=r_1$, entonces $E_1(r)=m(r)$, así el valor de r que asegura a I un pago mayor es aquel que maximiza $m(r)$; es decir, I puede asegurarse un pago de al menos,

$$\underline{v}=\max_r m(r)=\max_r \min_r E_k(r)$$

escogiendo un r adecuado.

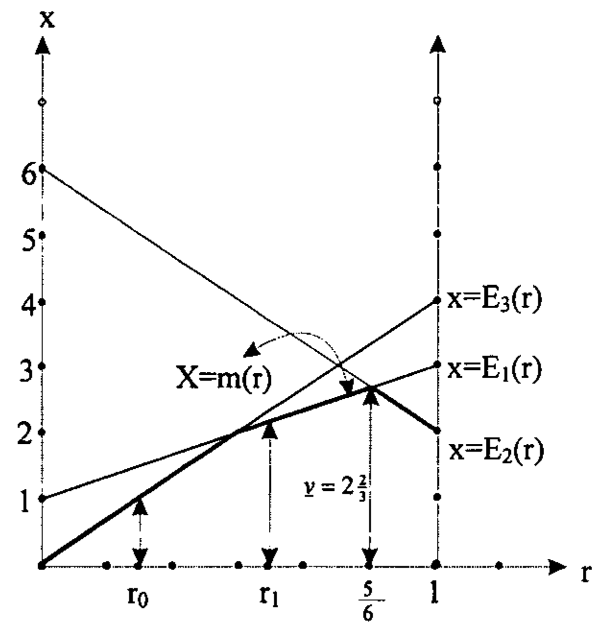


Figura 58. Cálculo de una estrategia de seguridad mixta para el jugador I

Se puede observar en la figura 58 que el valor de r que maximiza $m(r)$ es $r=\frac{5}{6}$, que corresponde a la intersección de $E_1(r)$ y $E_2(r)$.

Por tanto I se asegura un pago esperado de:

$$\underline{v}=m\left(\tfrac{5}{6}\right)=E_2\left(\tfrac{5}{6}\right)=6-4\left(\tfrac{5}{6}\right)=\tfrac{16}{6}=\tfrac{8}{3}$$

o mayor por el uso de p.

Funciones de pagos para estrategias mixtas.

Una función de pagos del jugador i por el uso de una estrategia mixta esta dada por $\Pi_i: P\times Q \to \mathbb{R}$ y $\Pi_i(p,q)$ denota la utilidad esperada del jugador i cuando I usa la estrategia mixta p y II usa la estrategia mixta q.

Para saber la probabilidad de que en un juego el resultado esté dado por el uso de s_j de I y t_k de II, necesitamos de la hipótesis estándar sobre el análisis no cooperativo de un juego; que es que los mecanismos aleatorios que utilizan los jugadores para el uso de sus estrategias mixtas son independientes.

La probabilidad del suceso s_j y t_k está dada por $p_j q_k$; así I tendrá un pago de $\pi_1(s_j,t_k) = k$, con probabilidad $p_j q_k = c$, $0 \le c \le 1$ y $k \in \mathbb{C}$. Así pueden ser calculados cada uno de los pagos de I y su utilidad esperada $\Pi_1(p,q)$ se expresa mediante su matriz de pagos con la siguiente fórmula:

$$\Pi_1(p,q) = p^T Aq.$$

El pago esperado para II es:

$$\Pi_2(p,q) = p^T Bq.$$

Minimax y Maximín con estrategias mixtas.

Sea A una matriz de nxm y definamos una función de pagos $\Pi: P\times Q \to \mathbb{R}$ por,

$$\Pi(p,q) = p^T Aq\,.$$

Sea $\bar{v}$ el valor minimax de Π y $\underline{v}$ su valor maximín. Así,

$$\underline{v} = \max_{p\in P}\min_{q\in Q}\Pi(p,q) = \min_{q\in Q}\Pi(\tilde{p},q)$$

$$\bar{v} = \min_{q\in Q}\max_{p\in P}\Pi(p,q) = \max_{p\in P}\Pi(p,\tilde{q})$$

$\tilde{p}$ es la estrategia mixta $p \in P$ para la cual $\min_{q\in Q}\Pi(p,q)$ es mayor y $\tilde{q}$ es la estrategia mixta $q \in Q$ para la cual $\max_{p\in P}\Pi(p,q)$ es menor.

Un punto de silla para la función Π es $(\tilde{p},\tilde{q})$ tal que:

$$\Pi(\tilde{p},q) \ge \Pi(\tilde{p},\tilde{q}) \ge \Pi(p,\tilde{q})$$

para todas estrategias mixtas $p \in P$ y $q \in Q$.

Teorema 4.2.4

$\underline{v} \le \bar{v}$.

Teorema 4.2.5

Una condición necesaria y suficiente para que $(\tilde{p},\tilde{q})$ sea un punto de silla es que $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ estén dados por:

$$\underline{v} = \max_{p\in P}\min_{q\in Q}\Pi(p,q) = \min_{q\in Q}\Pi(\tilde{p},q)$$

$$\bar{v} = \min_{q\in Q}\max_{p\in P}\Pi(p,q) = \max_{p\in P}\Pi(p,\tilde{q})$$

y que $\underline{v} = \bar{v}$. Cuando $(\tilde{p},\tilde{q})$ es un punto de silla $\underline{v} = \Pi(\tilde{p},\tilde{q}) = \bar{v}$.

Teorema 4.2.6

Si la función de pagos Π del jugador I tiene un punto de silla $(\bar{p},\bar{q})$, entonces su nivel de seguridad es $\underline{v}=\Pi(\bar{p},\bar{q})=\bar{v}$ y $\bar{p}$ es una de sus estrategias de seguridad.

El teorema del minimax de Von Neumann dice que si el número de estrategias puras es finito, la respuesta es siempre $\underline{v}=\bar{v}$.

En juegos finitos $\underline{v}$ siempre es el nivel de seguridad del jugador I.

Teorema 4.2.7 (Von Neumann)

$\underline{v}=\bar{v}$.

Demostración.

Por el Teorema 4.2.4 $\underline{v}\leq\bar{v}$; la demostración del teorema consiste en mostrar que si $\underline{v}<\bar{v}$ entonces P y Q se pueden sustituir por $\Phi\neq P'\subseteq P$ y $\Phi\neq Q'\subseteq Q$ y P' y Q' convexos; uno de los cuales es estrictamente menor, sin que esto haga menor la diferencia $\bar{v}-\underline{v}$. Esto es; $\bar{v}'-\underline{v}'\geq\bar{v}-\underline{v}$. Entonces se puede hacer lo mismo con P' y Q' y así sucesivamente.

Tenemos que el menor conjunto no vacío contiene un sólo punto. Si el teorema del minimax es falso para una matriz de $j\times k$, en particular lo es para una de 1×1 en donde el valor minimax y el maximín son el mismo; así suponer que $\underline{v}\langle\bar{v}$ lleva a una contradicción y por tanto se cumple el teorema.

Sí $\underline{v}\langle\bar{v}$, entonces $\underline{v}\langle\Pi(\bar{p},\bar{q})$ o $\bar{v}\rangle\Pi(\bar{p},\bar{q})$. Supongamos cierta la primera desigualdad, si se cumple la segunda, un razonamiento análogo muestra que P se hace más pequeño.

Sea Q' el conjunto convexo formado por todos los $q\in Q$ tales que:

(1) $$\Pi(\bar{p},q)\leq\underline{v}+\varepsilon$$

y $0\langle\varepsilon\langle\Pi(\bar{p},\bar{q})-\underline{v}$. $Q'\subset Q$ pues $q\notin Q'$. Sea $P=P'$; definimos $\bar{p}'\in P'$ y $\bar{q}'\in Q'$ como fueron definidas $\bar{p}\in P$ y $\bar{q}\in Q$. Consideremos las combinaciones convexas $\hat{p}=\alpha\bar{p}+\beta\bar{p}$ y $\hat{q}=\alpha\bar{q}+\beta\bar{q}$; se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{v}=\min_{q\in Q}\max_{p\in P}\Pi(p,q)&\leq\max_{p\in P}\Pi(p,\hat{q})\\&=\max_{p\in P}\{\alpha\Pi(p,\bar{q})+\beta\Pi(p,\bar{q}')\}\\&\leq\alpha\max_{p\in P}\Pi(p,\bar{q})+\beta\max_{p\in P}\Pi(p,\bar{q}')\end{aligned}$$

(2) $$=\alpha\underline{v}+\beta\bar{v}'.$$

Ahora una desigualdad para $\underline{v}$. Pero antes veamos que

$$\begin{aligned}\min_{q\in Q'}\Pi(\hat{p},q)&\geq\alpha\min_{q\in Q'}\Pi(\bar{p},q)+\beta\min_{q\in Q'}\Pi(\bar{p}',q)\\&\geq\alpha\min_{q\in Q}\Pi(\bar{p},q)+\beta\min_{q\in Q}\Pi(\bar{p}',q)\end{aligned}$$

(3) $$\geq\alpha\underline{v}+\beta\underline{v}'$$

también;

$$\begin{aligned}\inf_{q\notin Q'}\Pi(\hat{p},q) &\geq \alpha\inf_{q\notin Q'}\Pi(\tilde{p},q)+\beta\inf_{q\notin Q'}\Pi(\tilde{p}',q)\\ &\geq \alpha(\underline{v}+\varepsilon)+\beta c\end{aligned}\tag{4}$$

con $c=\inf_{q\notin Q'}\Pi(\tilde{p}',q)$.

Necesitamos que (3)<(4). Elijamos $\alpha=1-\beta$ y β cuidadosamente. Sí $\beta\neq 0$ es muy pequeño (3) se aproxima a $\underline{v}$ tanto como β sea pequeño; del mismo modo podemos aproximar (4) a $\underline{v}+\varepsilon$.

$$\begin{aligned}\underline{v}=\max_{p\in P}\min_{q\in Q}\Pi(p,q) &\geq \min_{q\in Q}\Pi(\hat{p},q)\\ &=\min_{q\in Q}\left\{\min_{q\in Q'}\Pi(\hat{p},q),\inf_{q\notin Q'}\Pi(\hat{p},q)\right\}\\ &\geq \min\left\{\alpha\underline{v}+\beta\underline{v}',\alpha(\underline{v}+\varepsilon)\beta c\right\}\\ &=\alpha\underline{v}+\beta\underline{v}'\end{aligned}\tag{5}$$

Multiplicando (5) por (-1) y sumándole (2) tenemos:

$$\begin{aligned}\bar{v}-\underline{v} &\leq \left(\alpha\bar{v}-\alpha\underline{v}\right)+\left(\beta\bar{v}'-\beta\underline{v}'\right)\\ &=\alpha\left(\bar{v}-\underline{v}\right)+\beta\left(\bar{v}'-\underline{v}'\right)\\ &=(1-\beta)\left(\bar{v}-\underline{v}\right)+\beta\left(\bar{v}'-\underline{v}'\right)\\ &=\left(\bar{v}-\underline{v}\right)-\beta\left(\bar{v}-\underline{v}\right)+\beta\left(\bar{v}'-\underline{v}'\right)\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\left(\bar{v}-\underline{v}\right)-\left(\bar{v}-\underline{v}\right) &\leq -\beta\left(\bar{v}-\underline{v}\right)+\beta\left(\bar{v}'-\underline{v}'\right)\\ &\Rightarrow \beta\left(\bar{v}-\underline{v}\right)\leq\beta\left(\bar{v}'-\underline{v}'\right)\\ &\therefore \left(\bar{v}-\underline{v}\right)\leq\left(\bar{v}'-\underline{v}'\right).\end{aligned}$$

Juegos de suma cero.

En los juegos de suma cero, llamados también estrictamente competitivos, el comportamiento racional del jugador II implica minimizar el beneficio del jugador I y ésto es porque los intereses son diametralmente opuestos.

Preferencias diametralmente opuestas.

Un juego de suma cero es un juego en el que la suma de los pagos de los jugadores es cero; así lo que es ganancia para uno es pérdida para el otro, es decir,

$$u_1(w)+u_2(w)=0\quad\forall w\in\Omega.$$

Cuando el juego contiene sucesos al azar los dos jugadores tienen preferencias diametralmente opuestas también sobre las loterías.

Si $u_1 + u_2 = 0$ entonces $E(u_1) + E(u_2) = 0$. Así,

$$
\begin{aligned}
& L \preccurlyeq_1 W \\
\Leftrightarrow\ & E u_1(L) \leq E u_1(M) \\
\Leftrightarrow\ & E u_1(L) \geq -E u_1(M) \\
\Leftrightarrow\ & E u_2(L) \geq E u_2(M) \Leftrightarrow \\
& L \succcurlyeq_2 W.
\end{aligned}
$$

Ya que $u_1 = -u_2$, la función de utilidad de un jugador es cóncava y la del otro es convexa; lo cual habla de las actitudes hacia el riesgo de los jugadores.

Juegos de suma constante.

Estos son juegos en los que los pagos de los jugadores siempre suman una constante determinada k. Pueden transformarse en un juego estrictamente equivalente de suma cero, sustrayendo la constante k de todos los pagos de uno de los jugadores.

Valores de juegos de suma cero.

Redefinimos el valor v de un juego de suma cero de dos jugadores como un pago del jugador I.

Para que v sea el valor de un juego de suma cero se requiere que $v = \underline{v}$ el nivel de seguridad del jugador I y que sea $-\bar{v}$, el nivel de seguridad del jugador II; σ y τ son sus estrategias de seguridad correspondientes.

Para que un juego de suma cero tenga un valor v, se requiere que $\underline{v} = v = \bar{v}$. Lo que se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.8

Cualquier juego finito de suma cero con dos jugadores tiene un valor $v = \underline{v} = \bar{v}$.

Para asegurarse de que obtiene un pago esperado de por lo menos v, el jugador I puede usar cualquiera de sus estrategias de seguridad $\tilde{p}$. Para asegurarse de que obtiene por lo menos $-v$, el jugador II puede usar cualquiera de sus estrategias de seguridad $\tilde{q}$.

Puntos de silla y equilibrios de Nash.

Algunas matrices de pagos de juegos de suma cero con dos jugadores tienen un punto de silla (σ, τ).

Recordemos:

Sí $\pi(\sigma, \tau) \in A$, la condición para que (σ, τ) sea un punto de silla de A es que:

$$\pi(\sigma, t) \geq \pi(\sigma, \tau) \geq \pi(s, \tau) \quad \text{para todo } s \in S \text{ y } t \in T.$$

Si existe un punto de silla por el teorema 4.2.2, sabemos que v, el valor del juego es $\pi(\sigma, \tau)$.

El teorema del minimax nos dice que $\underline{v} = \bar{v}$, entonces se tiene por 4.2.5 que cualquier par $(\tilde{p}, \tilde{q})$ de estrategias de seguridad es un punto de silla para la función de pagos de estrategia mixta Π, es decir;

$$\bar{p}^T A q \geq \bar{p}^T A\bar{q} \geq p^T A\bar{q} \quad \text{para todo } p \in P \text{ y } q \in Q.$$

El valor del juego es $v = \bar{p}^T A\bar{q}$.

Vimos anteriormente que la condición para que un par $(\bar{p},\bar{q})$ de estrategias sea un equilibrio de Nash es:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_1(\bar{p},\bar{q}) \geq \Pi_1(p,\bar{q}) \\ \Pi_2(\bar{p},\bar{q}) \geq \Pi_2(\bar{p},q)\end{array}\right\} \quad \text{para todo } p \in P \text{ y } q \in Q.$$

Donde la 1ª desigualdad dice que $\bar{p}$ es respuesta optima a $\bar{q}$ y la 2ª desigualdad dice que $\bar{q}$ es respuesta optima a $\bar{p}$.

También sabemos que $\Pi_1(p,q) = p^T Aq$ y $\Pi_2(p,q) = -p^T Aq$; las desigualdades anteriores se pueden rescribir como:

$$\left.\begin{array}{r}-\bar{p}^T A\bar{q} \geq -\bar{p}^T Aq \Rightarrow \bar{p}^T Aq \geq \bar{p}^T A\bar{q} \\ \bar{p}^T A\bar{q} \geq p^T A\bar{q}\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{p}^T Aq \geq \bar{p}^T A\bar{q} \geq p^T A\bar{q}$$

lo cual es la condición para un punto de silla.

Teorema 4.2.9

Si A es la matriz de pagos del jugador I en un juego de suma cero, con dos jugadores, entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1°. para el jugador I $\bar{p}$ es una estrategia de seguridad y $\bar{q}$ es una estrategia de seguridad para el jugador II y el valor del juego es $v = \bar{p}^T A\bar{q}$.

2°. El par $(\bar{p},\bar{q})$ es un punto de silla.

3°. El par $(\bar{p},\bar{q})$ es un equilibrio de Nash.

El teorema anterior es un teorema sólo para juegos de suma cero con dos jugadores racionales.

Hiperplanos separadores.

Teorema 4.2.10 (Teorema del hiperplano separador)

Sean H y K conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que K tiene puntos interiores, pero que ninguno de ellos pertenece a H. Entonces existe un hiperplano $p^T x = c$ que separa H y K.

Separación y puntos de silla.

Trataremos de expresar aquí la conexión del teorema del minimax y el teorema del hiperplano separador. Esta conexión proporciona una interpretación geométrica de los vectores $\bar{p}$ y $\bar{q}$ de la expresión $\bar{p}^T Aq \geq \bar{p}^T A\bar{q} \geq p^T A\bar{q}$ de un punto de silla.

Sabemos que $v = \bar{p}^T A\bar{q}$ es el valor del juego de suma cero de una matriz A. Lo que trataremos de ver es como las desigualdades: $\bar{p}^T Aq \geq v \geq p^T A\bar{q}$ se expresan geométricamente; lo que nos proporcionará un método para encontrar $\bar{p}$, $\bar{q}$ y v.

Tenemos la siguiente matriz de pagos de un juego de suma cero

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 0\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

Vimos anteriormente que $\bar{p}=\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)^T$, $\bar{q}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)^T$ y $v=2\frac{2}{3}$. Supongamos que H es la cerradura convexa de las columnas de A. Así para algún $q\in Q, h\in H$ es:

$$h=q_1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+q_2\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}+q_3\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6 & 0\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix}=qA.$$

Denotamos entonces a la cerradura convexa de las columnas de A, como el conjunto H:

$$H=\{Aq:q\in Q\}$$

lo cual se muestra en la figura 59(a).

El conjunto K aparece en la figura 59(b), y se define:

$$K=\{K:K_1\le v \text{ y } K_2\le v\}$$

con $v=\bar{p}^T A\bar{q}$. Observemos que $k\in K \Leftrightarrow p^T k\le v, \forall p\in P$.

El hiperplano $\bar{p}^T x=v$ separa a H y K; K se encuentra por debajo del hiperplano, haciendo $\bar{p}^T=p^T$ y H por encima. La desigualdad izquierda de la expresión de un punto de silla dice que:

$$\bar{p}^T Aq\ge v \quad \forall q\in Q.$$

Haciendo $h=Aq$ se tiene que:

$$\bar{p}^T h\ge v \quad \forall h\in H.$$

La desigualdad derecha de la expresión de un punto de silla, expresa que $p^T A\bar{q}\le v \quad \forall p\in P$. Pero $A\bar{q}\in H$ esto significa que $p^T h\le v$, que dijimos pertenece a K.

Entonces el conjunto $H\cap K$ contiene a $A\bar{q}$. A pesar de que H y K están separados por el hiperplano $\bar{p}^T x=v$, también el punto $A\bar{q}$ es común como muestra la figura 59(c).

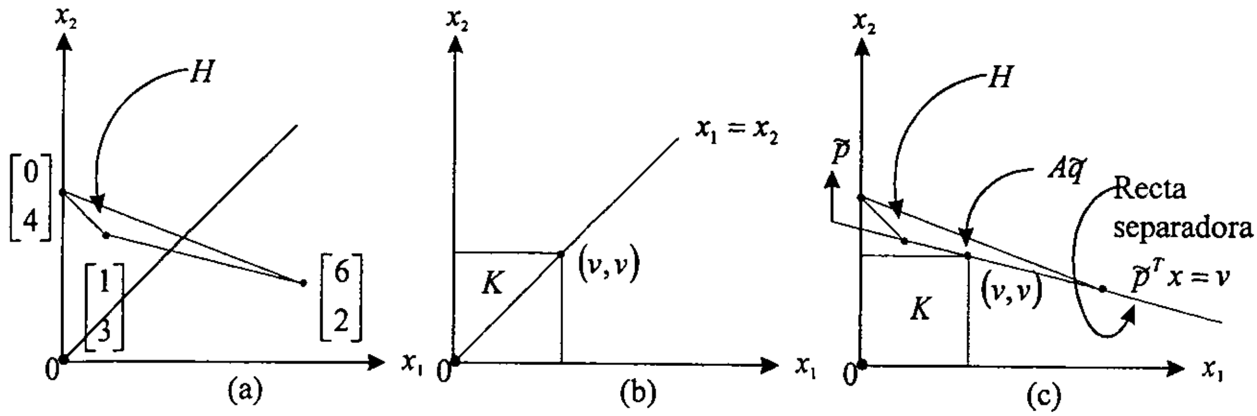


Figura 59.

La separación en la resolución de juegos.

Este método funciona para cualquier matriz de pagos de un juego de suma cero para dos personas con dos filas.

1°. Consideramos la matriz de pagos del juego anterior de suma cero con dos jugadores.

2°. En un plano señalamos las posiciones de las columnas de la matriz A, como puntos y dibujamos la cerradura convexa de H.

3°. Dibujamos la recta $x_1 = x_2$. El punto $(v,v)^T$ está en esta recta, K es como en 59(b); a v se le asigna el menor valor talque H y K tienen al menos un punto en común.

4°. Dibujamos la recta separadora $\bar{p}^T x = v$ como en (c), con ecuación $x_1 + 5x_2 = 16$.

5°. Encontramos $\bar{p}$; sabemos que $\bar{p}$ es un vector ortogonal a la recta separadora, este es $(1,5)^T$; como necesitamos que satisfaga que $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ y $p_1 + p_2 = 1$. Por ésto, reemplazamos al vector $(1,5)^T$ por el vector $\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)^T = \bar{p}$.

6°. Hallar v; $v \in x_1 = x_2 \cap x_1 + 5x_2 = 16 \Rightarrow 6v = 16 \Rightarrow v = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$.

7°. Hallar $\bar{q}$. Como $A\bar{q}$ pertenece a $H \cap K$ y el único punto en esta intersección es $v = \left(2\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}\right)$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 2\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Pero H es la cerradura convexa de las columnas de A, $A\bar{q} \in H$ y de hecho $A\bar{q}$ se encuentra en el centro de gravedad de los pesos $\bar{q}_1, \bar{q}_2$ y $\bar{q}_3$ colocados en la situación de las columnas como puntos. En la figura 59(c) $A\bar{q} = (v,v)^T$, parece encontrarse a $\frac{1}{3}$ del segmento comprendido entre los puntos que representan las dos primeras columnas. Si ésto es real, entonces los pesos apropiados son $\bar{q}_1 = \frac{2}{3}$, $\bar{q}_2 = \frac{1}{3}$ y $\bar{q}_3 = 0$.

De esta manera,

$$\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 2\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Queda así establecida la única estrategia de seguridad del jugador II $\bar{q} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$. Rescribiendo, $v = 2\frac{2}{3}$, $\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)^T = \bar{p}$ y $\bar{q} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$; que habíamos obtenido previamente.

4.3 MANTENER EL EQUILIBRIO

En teoría de juegos el tipo de equilibrio más importante es el equilibrio de Nash.

Estos se dan en donde se cortan las curvas de respuestas óptimas (los economistas las llaman curvas de reacción) de los jugadores; sí las intersecciones son varias, ¿cuál de estos equilibrios debemos seleccionar?, ¿y sí no hay equilibrios de Nash(cortes)?. Nash demostró que en un juego finito no es posible que no haya equilibrio; tal prueba está basada en el importante teorema del punto fijo de Brouwer.

Curvas de reacción con estrategias puras.

Considérese la matriz de pagos del juego de suma cero de dos jugadores de la figura 56.

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} [\ ] & & (\ ) \\ & [(\ )] & \\ (\ ) & [\ ] & [\ ] \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) (b)

Figura 60. Curvas de reacción.

Si los jugadores sólo pueden usar estrategias puras, las correspondencias de respuestas óptimas de los jugadores I y II son:

$$R_1 : T \to S$$
$$R_2 : S \to T$$

dadas por,

$$\begin{array}{ll} R_1(t_1) = \{s_3\}, & R_2(s_1) = \{t_1\} \\ R_1(t_2) = \{s_2\}, & R_2(s_2) = \{t_2\} \\ R_1(t_3) = \{s_1\}, & R_2(s_3) = \{t_2, t_3\} \end{array}$$

$R_1(t_1) = \{s_3\}$, es el conjunto de respuestas óptimas de I a la elección t_1 de II. Análogamente $R_2(s_2) = \{t_2\}$.

Nota. Las correspondencias de respuesta óptima no son funciones.

En correspondencias $R_1(t) \subseteq S$ y $R_2(s) \subseteq T$.

En la figura 60(b) se muestran las curvas de reacción de los dos jugadores, la del jugador I encierra en un paréntesis a cada uno de sus elementos y la del jugador II en un corchete. Así para que (s,t) pertenezca a la curva de reacción del jugador I se requiere que $s \in R_1(t)$; y para que (s,t) pertenezca a la curva de reacción del jugador II se requiere que $t \in R_2(s)$.

Un par (s,t) de estrategias es un equilibrio de Nash si y sólo sí:

$$s \in R_1(t) \text{ y } t \in R_2(s)$$

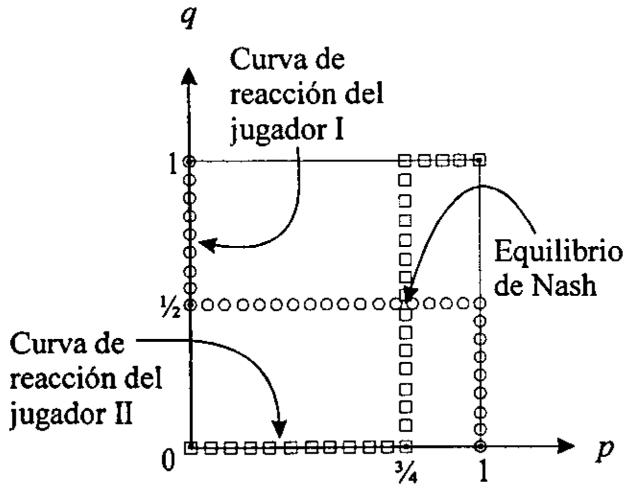
de forma que s y t son respuesta óptima una de la otra. Por tanto los equilibrios de Nash se dan donde se intersectan las curvas de reacción. En el ejemplo el único equilibrio de Nash es en (s_2, t_2).

Curvas de reacción con estrategias mixtas.

Consideremos la siguiente matriz de pagos de un juego de suma cero de dos jugadores. Sin equilibrio de Nash con estrategias puras. Por lo que consideraremos estrategias mixtas.

$$\begin{array}{c|cc} & t_1 & t_2 \\ \hline s_1 & 1 & 4 \\ s_2 & 3 & 2 \end{array}$$

(a)



(b)

Figura 61. Curvas de reacción con estrategias mixtas.

Cada estrategia mixta de la forma $(1-p,p)^T$ del jugador I corresponde a un número real $p \in [0,1]$y cada estrategia mixta de II corresponde a un número real $q \in [0,1]$; cada par de estrategias mixtas (p,q) corresponde a un par en el cuadro de la figura 61(b).

Elegido q por el jugador II, el pago esperado para el jugador I por el uso de su estrategia pura 1 es:

$$E_1(q) = 1(1-q) + 4q = 1 + 3q.$$

El pago esperado para el jugador I por el uso de su estrategia pura 2 es:

$$E_2(q) = 3(1-q) + 2q = 3 - q.$$

Tenemos que $1+3q > 3-q$ si y sólo sí $q > \frac{1}{2}$; por tanto será optimo para el usar su estrategia pura 1 si $q > \frac{1}{2}$ y usar su estrategia pura 2 si $q < \frac{1}{2}$. Si $q = \frac{1}{2}$, I será indiferente en usar cualquiera de sus dos estrategias puras por lo que cualquiera es una respuesta óptima a q y cualquier combinación de ellas también es una respuesta óptima. Tenemos el siguiente principio.

Una estrategia mixta A del jugador M es una respuesta óptima a otra estrategia mixta B del jugador N, si y sólo si cada una de las estrategias puras a las que A asigna probabilidad positiva, también es una respuesta óptima A B. Así un jugador que optimiza por medio de la utilización de una estrategia mixta es indiferente entre todas las estrategias puras a las que la estrategia mixta asigna probabilidad positiva.

La correspondencia de respuesta óptima del jugador I esta dada por:

$$R_1(q) = \begin{cases} \{1\} & \text{sí} \quad 0 \le q \langle \frac{1}{2} \\ [0,1] & \text{sí} \quad q = \frac{1}{2} \\ \{0\} & \text{sí} \quad \frac{1}{2} \langle q \le 1. \end{cases}$$

La curva de reacción que representa esta correspondencia está representada por círculos en la figura 61(b).

Análogamente, una vez elegido p por el jugador I, el jugador II obtiene por el uso de su estrategia pura 1:

$$E_1(p) = -(1-p) + (-3p) = -1-2p.$$

El pago esperado para el jugador II por el uso de su estrategia pura 2 es:

$$E_2(p) = -4(1-p) + (-2p) = -4+2p.$$

Tenemos también que $-1-2p > -4+2p$ si y sólo sí $p < \frac{3}{4}$ por tanto su estrategia pura 1 es una respuesta óptima a p sí $p < \frac{3}{4}$ pero sí $p > \frac{3}{4}$ entonces su estrategia pura 2 es una respuesta óptima y sí $p = \frac{3}{4}$, la respuesta óptima es cualquiera de sus estrategias puras y cualquiera de sus estrategias mixtas.

Así su correspondencia de respuesta óptima esta dada por:

$$R_2(p) = \begin{cases} \{0\} & \text{sí} \quad 0 \le p \langle \frac{3}{4} \\ [0,1] & \text{sí} \quad p = \frac{3}{4} \\ \{1\} & \text{sí} \quad \frac{3}{4} \langle p \le 1. \end{cases}$$

La curva de reacción que representa está correspondencia esta representada por cuadros en la figura 61(b).

Los equilibrios de Nash se dan donde las curvas de reacción se cortan; en la figura 61(b), sólo en $(\tilde{p},\tilde{q}) = (\frac{3}{4},\frac{1}{2})$ hay un equilibrio de Nash y $p = \frac{3}{4}$ y $q = \frac{1}{2}$ son estrategias de seguridad para los jugadores I y II respectivamente.

Juegos para pájaros.

Los mismos métodos que hasta ahora se han usado en los juegos de suma cero pueden ser usados en cualquier juego de dos jugadores.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Paloma} & \textit{Halcón} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Paloma} \\ \\ \textit{Halcón} \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} & \frac{1}{2}v & & v \\ \frac{1}{2}v & & 0 & \\ & 0 & & w \\ v & & w & \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Paloma} & \textit{Halcón} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Paloma} \\ \\ \textit{Halcón} \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} & 1 & & 2 \\ 1 & & 0 & \\ & 0 & & -1 \\ 2 & & -1 & \end{array}\right] \end{array}$$

Gallina

(a) (b)

Figura 62. Juego de halcones y palomas.

La matriz (a) de la figura 62 representa la disputa de dos pájaros de una misma especie por el territorio; cuyo valor en términos de adaptación es v cada uno puede adoptar la estrategia de halcón o paloma; si ambos eligen paloma, se reparten el territorio, si uno elige paloma y el otro halcón, halcón se queda con el territorio, pero si ambos se comportan como halcón se produce una lucha cuyo valor de adaptación evolutiva es $w = \frac{1}{2}v - c$, donde c es el costo de luchar.

Observamos el juego de la gallina (figura 62(b)), obtenido del juego anterior con los valores $v = 2$ y $c = 2$.

Obtenemos las correspondencias de respuesta óptima de los jugadores I y II respectivamente, a partir de sus pagos esperados por el uso de sus estrategias puras.

Para I:

$$E_1(q)=1(1-q)+0q=1-q$$

y

$$E_2(q)=2(1-q)+(-1)q=2-3q.$$

Tenemos que:

$$1-q\rangle 2-3q \Leftrightarrow q\rangle \tfrac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$R_1(q)=\begin{cases}\{1\} & \text{sí} \quad 0\le q\langle \tfrac{1}{2}\\ [0,1] & \text{sí} \quad q=\tfrac{1}{2}\\ \{0\} & \text{sí} \quad \tfrac{1}{2}\langle q\le 1.\end{cases}$$

Para II:

$$E_1(p)=1(1-p)+(0p)=1-p$$

y

$$E_2(p)=2(1-p)+(-1)p=2-3p$$

Tenemos que:

$$1-p\rangle 2-3p \Leftrightarrow p\rangle \tfrac{1}{2}$$

Por tanto,

$$R_2(p)=\begin{cases}\{1\} & \text{sí} \quad 0\le p\langle \tfrac{1}{2}\\ [0,1] & \text{sí} \quad p=\tfrac{1}{2}\\ \{0\} & \text{sí} \quad \tfrac{1}{2}\langle p\le 1.\end{cases}$$

Representamos estas correspondencias por sus curvas de reacción en la figura 63.

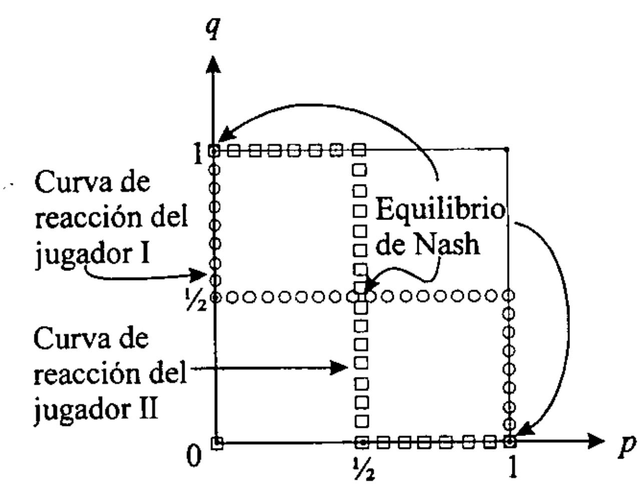


Figura 63. Las curvas de reacción para el juego de la gallina.

La correspondencia óptima del jugador I $R_1(q)$ es representada con circulitos y la correspondencia óptima del jugador II $R_2(p)$ con cuadritos. Observamos que dichas curvas se cortan en los puntos $(\bar{p},\bar{q})=(0,1),(\bar{p},\bar{q})=(1,0)$ y $(\bar{p},\bar{q})=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$ los dos primeros equilibrios de Nash son con estrategias puras y el tercer equilibrio de Nash es con estrategias mixtas.

Oligopolios y competencia perfecta
Modelos de Cournot.

La conducta de los consumidores potenciales de un cierto artículo de costo c llamado widget (widget es una palabra inventada por Binmore sin significado) se describe por la siguiente ecuación de demanda: $p+q=M$, con $M>c$.

Si el precio de este artículo es p la ecuación de demanda nos dice que el número de artículos vendidos $q=M-p$.

Monopolio. ¿Cuántos widgets producirá un monopolista si su objetivo es maximizar beneficios?. Si produce q el precio será $p=M-q$. El beneficio esta dado por la diferencia entre los ingresos por la venta y el costo de producción:

$$\pi(q)=pq-cq=(p-c)q=(M-q-c)q.$$

Utilizamos el criterio de la primera derivada para encontrar $\tilde{q}$ que maximiza el beneficio, esto es:

$$\frac{\partial\pi}{\partial q}=(M-q-c)+(-1)q=M-c-2q$$

entonces,

$$0=M-c-2q \Leftrightarrow \tilde{q}=\left[\frac{M-c}{2}\right].$$

Así;

$$\tilde{p}=M-\left[\frac{M-c}{2}\right]=\left[\frac{2M-M+c}{2}\right]=\left[\frac{M-c}{2}\right]$$

y

$$\pi=(M-q-c)q=\left[M-\frac{M-c}{2}-c\right]\left[\frac{M-c}{2}\right]=\left[\frac{2M-M+c-2c}{2}\right]\left[\frac{M-c}{2}\right]=\left[\frac{M-c}{2}\right]^2.$$

Duopolio. Es el caso de dos productores de widgets. Ambos deciden de manera independiente cual será su producción. El precio se determina por la demanda de los widgets y se va ajustando hasta que la oferta iguala a la demanda. La oferta es el número total de widgets producidos $q=q_1+q_2$. La demanda cuando el precio es p es $M-p$. El precio al que se venden los widgets satisface: $p=M-q_1-q_2$.

Analizando la situación como un juego: las empresas se convierten en los jugadores I y II que juegan en un juego de jugadas simultáneas en donde cada uno escoge $q_i\in[0,M]$; y sus pagos son sus beneficios. Las funciones de pagos son:

$$\pi_1(q_1,q_2)=(p-c)q_1=(M-c-q_1-q_2)q_1$$
$$\pi_2(q_1,q_2)=(p-c)q_2=(M-c-q_1-q_2)q_2.$$

Se trata de un juego infinito, en este caso es fácil calcular el único equilibrio de Nash $(\tilde{q}_1,\tilde{q}_2)$. Utilizamos nuevamente el criterio de la primera derivada para encontrar las respuestas óptimas $q_1=R_1(q_2)$ y $q_2=R_2(q_1)$:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = (M - c - q_1 - q_2) + (-1)q_1 = M - c - 2q_1 - q_2$$

entonces,

$$q_1 = R_1(q_2) = \left[\frac{M - c - q_2}{2}\right]$$

y

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = (M - c - q_1 - q_2) + (-1)q_2 = M - c - q_1 - 2q_2$$

entonces,

$$q_2 = R_2(q_1) = \left[\frac{M - c - q_1}{2}\right].$$

Para hallar $\overline{q}_1$ y $\overline{q}_2$ debemos resolver las ecuaciones $q_1 = R_1(q_2)$ y $q_2 = R_2(q_1)$; simultáneamente; entonces,

$$\left.\begin{aligned} 2\overline{q}_1 + \overline{q}_2 &= M - c \\ \overline{q}_1 + 2\overline{q}_2 &= M - c \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\overline{q}_1 + \overline{q}_2 = \overline{q}_1 + 2\overline{q}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\overline{q}_1 + \overline{q}_2 - \overline{q}_1 - 2\overline{q}_2 = 0 \Rightarrow \overline{q}_1 - \overline{q}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{q}_1 = \overline{q}_2.$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación se tiene:

$$2\overline{q}_1 + \overline{q}_1 = [M - c] \Rightarrow 3\overline{q}_1 = [M - c],$$

$$\therefore \overline{q}_1 = \overline{q}_2 = \left[\frac{M - c}{3}\right].$$

Por tanto el número total de widgets producidos es $\frac{2}{3}[M - c]$. Su precio es:

$$\overline{p} = M - \overline{q}_1 - \overline{q}_2 = M - \left[\frac{M - c}{3}\right] - \left[\frac{M - c}{3}\right] =$$

$$= \left[\frac{3M - [M - c] - [M - c]}{3}\right] = \left[\frac{M + 2c}{3}\right].$$

Y el beneficio para cada uno de ellos es:

$$\pi = (M - q_1 - q_2 - c)q_1 = \left[M - c - \left[\frac{M - c}{3}\right] - \left[\frac{M - c}{3}\right]\right]\left[\frac{M - c}{3}\right] = \left[\frac{M - c}{3}\right]\left[\frac{M - c}{3}\right] = \left[\frac{M - c}{3}\right]^2.$$

Oligopolio. Ahora es el caso con n jugadores donde la función de beneficio para el jugador i esta dada por:

$$\pi_i(q_1, \cdots, q_n) = (p - c)q_i = (M - c - q_1 - q_2 - \cdots - q_n)q_i.$$

Los equilibrios de Nash se encuentran resolviendo simultáneamente las siguientes n ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2\overline{q}_1 + \overline{q}_2 + \cdots + \overline{q}_n &= M - c \\ \overline{q}_1 + 2\overline{q}_2 + \cdots + \overline{q}_n &= M - c \\ &\vdots \\ \overline{q}_1 + \overline{q}_2 + \cdots + 2\overline{q}_n &= M - c \end{aligned}\right\}$$

tenemos que para i=2,...,n,

$$\left.\begin{aligned}\bar{q}_1+\bar{q}_2+\cdots+2\bar{q}_i+\bar{q}_{i+1}+\cdots+\bar{q}_n=M-c\\ \bar{q}_1+\bar{q}_2+\cdots+\bar{q}_i+2\bar{q}_{i+1}+\cdots+\bar{q}_n=M-c\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{q}_1+\bar{q}_2+\cdots+\bar{q}_{i-1}+2\bar{q}_i+\cdots+\bar{q}_n=\bar{q}_1+\bar{q}_2+\cdots+2\bar{q}_{i+1}+\bar{q}_{i+2}+\cdots+\bar{q}_n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{q}_1+\bar{q}_2+\cdots+\bar{q}_{i-1}+2\bar{q}_i+\cdots+\bar{q}_n-\bar{q}_1-\bar{q}_2-\cdots-2\bar{q}_{i+1}-\bar{q}_{i+2}-\cdots-\bar{q}_n=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{q}_i=\bar{q}_{i+1}.$$

$$\therefore \bar{q}_1=\bar{q}_2=\cdots=\bar{q}_n;$$

sustituyendo en la 1ª. ecuación se tiene:

$$2\bar{q}_1+\underbrace{\bar{q}_1+\cdots+\bar{q}_1}_{(n-1)\text{veces}}=M-c\Rightarrow(n+1)\bar{q}_1=M-c\Rightarrow\bar{q}_1=\bar{q}_2=\cdots=\bar{q}_n=\left[\frac{M-c}{n+1}\right].$$

El total de widgets producidos es $\frac{n}{n+1}[M-c]$; el precio al que son vendidos es:

$$\bar{p}=M-(\bar{q}_1+\bar{q}_2+\cdots+\bar{q}_n)=M-\frac{n[M-c]}{n+1}=\left[\frac{M(n+1)-nM+nc}{n+1}\right]=$$

$$=\left[\frac{M+nc}{n+1}\right]=\left[\frac{M}{n+1}\right]+\left[\frac{nc}{n+1}\right].$$

Y el beneficio para el jugador i es:

$$\pi_i=\left(M-c-\left[\sum_{i=1}^{n}q_i\right]\right)q_i=\left[M-c-\left[\frac{n(M-c)}{n+1}\right]\right]\left[\frac{M-c}{n+1}\right]=$$

$$\left[\frac{n+1(M-c)-n(M-c)}{n+1}\right]\left[\frac{M-c}{n+1}\right]=\left[\frac{M-c}{n+1}\right]\left[\frac{M-c}{n+1}\right]=\left[\frac{M-c}{n+1}\right]^2.$$

Competencia perfecta.

En un sector perfectamente competitivo las empresas aceptan precios. Esto es porque $p=M-q$, se supone que ninguna empresa es capaz de producir tanto como para modificar q. Al intentar maximizar los beneficios; $\pi(q)=(\bar{p}-c)q$, $\bar{p}$ es tratado como una constante. Si $\bar{p}<c$ lo mejor es no producir y no hay empresas en el sector. Si $\bar{p}>c$ no se puede maximizar por que aumentaría cualquier empresa sus beneficios produciendo más. Luego el valor para $\bar{p}$ en una competencia perfecta es $\bar{p}=c$, la producción total es $q=M-c$ y las empresas obtienen cero beneficios. Es decir, este caso es cuando $n\to\infty$.

Selección de Equilibrios.

Con frecuencia las curvas de reacción se cortan más de una vez, entonces se tienen varios equilibrios de Nash; ¿cuál es el que tenemos que elegir?.

Intercambiabilidad y equivalencia.

Algunas veces no importa que equilibrio se escoge, si los equilibrios de Nash en un juego tienen la característica de que todos los pares son equivalentes e intercambiables, entonces no existe el problema de la selección.

Convenciones.

Cuando dos personas acuerdan reunirse en la intersección de dos avenidas, cualquiera de las personas elegiría un puente que una a éstas; esto es llamado por Schelling un punto focal.

Dominación de Pareto.

En ocasiones un equilibrio de Nash (s,t) es una mejora de Pareto sobre los demás equilibrios de Nash en el juego. Se dice que (s,t) Pareto-domina a los demás equilibrios de Nash. Se argumenta que esto es suficiente para asegurar el estatus de punto focal a (s,t), y además que la selección de algún otro equilibrio es de alguna manera irracional.

Consideremos el juego bimatricial de la figura 64. Si $0 \le x \le 10$, entonces hay dos equilibrios de Nash con estrategias puras (s_1,t_1) y (s_2,t_2). Si $x \le 10$, entonces (s_1,t_1) es una mejora de Pareto sobre(s_2,t_2).

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ \\ s_2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 10 & & x \\ 10 & & 0 & \\ & 0 & & x \\ x & & x & \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 64. Punto focal.

Juego de las demandas de Nash.

El juego de las demandas de Nash es un juego de jugadas simultáneas que se basa en el problema de negociación de Nash(X,d).

Ambos jugadores anuncian simultáneamente una demanda; x_1 y x_2 respectivamente, que pueden ser compatibles o incompatibles. Son compatibles sí $(x_1,x_2) \in X$. Si son compatibles, cada jugador consigue su demanda. Si son incompatibles los jugadores reciben sus pagos de desacuerdo. Las funciones de pagos $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de los jugadores I y II están definidas por:

$$\pi_i(x) = \begin{cases} x_i & \text{si } x_i \in X \\ d_i & \text{si } x_i \notin X. \end{cases}$$

En la figura 65(a) se representa un juego de negociación (X,d). Donde la frontera de X pasa por $(0,1)$ y $(1,0)$; para simplificar $d=0$ y los jugadores I y II hacen sus demandas sólo en el intervalo $[0,1]$. En la figura 65(b) se muestran las curvas de reacción de ambos jugadores. Sí II demanda $0 \le x_2 < 1$; para I será óptimo escoger x_i talque (x_1,x_2) sea Pareto-eficiente en X. Sería irracional que I demandara menos o más. Y si II demandará 1, entonces I no conseguiría nada.

La figura 65(b) muestra que cualquier punto del conjunto de negociación (X,d) del problema corresponde a un equilibrio de Nash para el juego de las demandas de Nash. Incluso hay un equilibrio de Nash no cooperativo$(1,1)$.

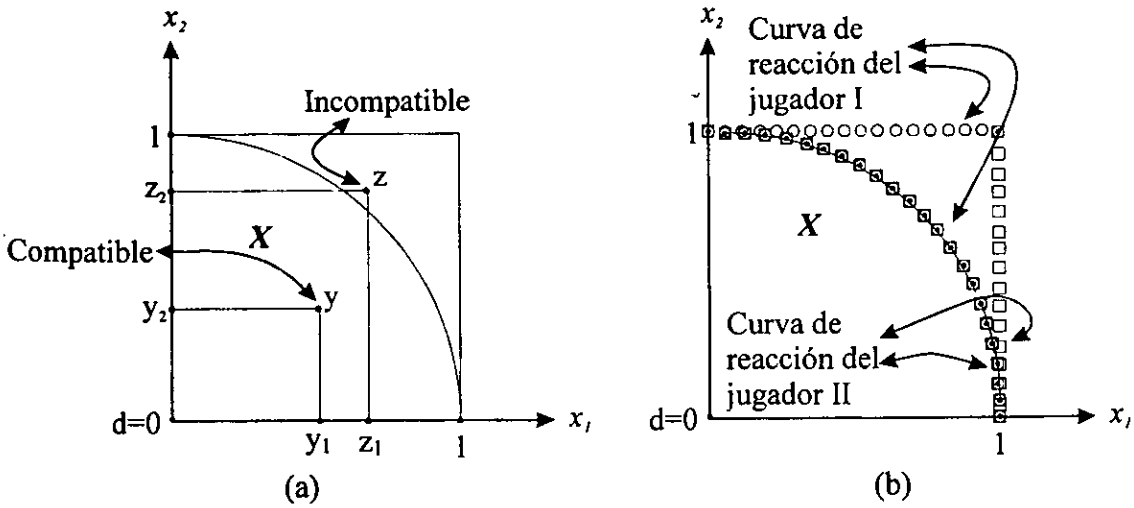


Figura 65. El juego de demandas de Nash.

Por tanto existe un número infinito de equilibrios de Nash en este juego, lo cual genera un problema de selección. Según Nash sólo hay una convención que es "estable" para elegir un equilibrio.

El juego de las demandas de Nash "suavizado".

Para ver en que sentido es usada la palabra estable consideraremos una versión suavizada del juego de las demandas de Nash en el que los jugadores no saben como es el conjunto de factibles X, no saben si (x_1, x_2) es o no compatible. Lo que hacen entonces es asignar una probabilidad $p(x_1, x_2)$ al suceso de que el par de demandas (x_1, x_2) sea compatible.

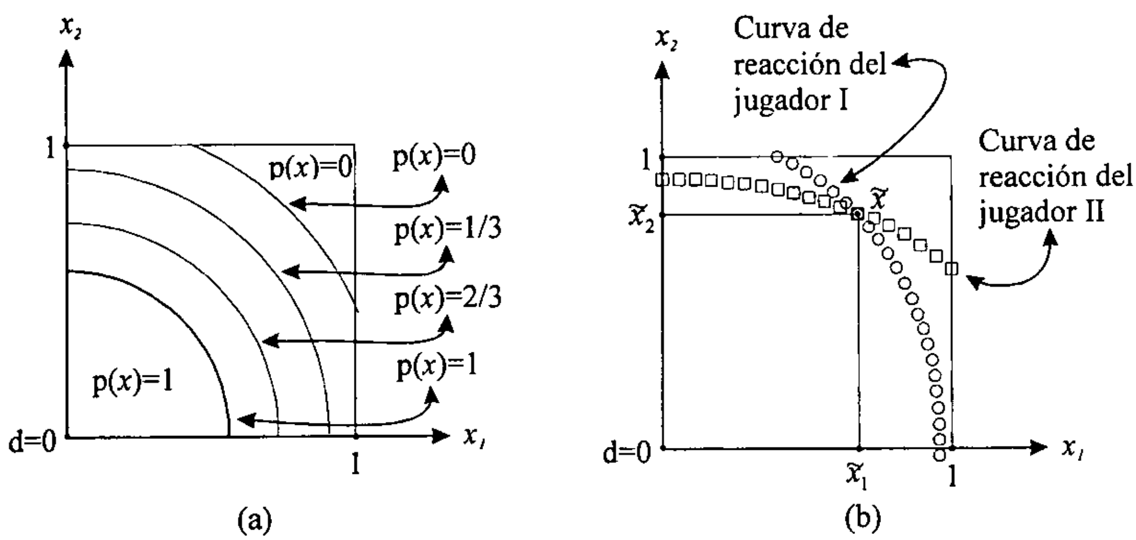


Figura 66. El juego de demandas de Nash "suavizado".

En la figura 66(a) están indicadas algunas gráficas para la función $p:[0,1]^2 \to [0,1]$. De esta manera si un par(x_1,x_2)se encuentra en o por debajo de $p(x)=\frac{1}{3}$, la probabilidad de que el par $x=(x_1,x_2)$ sea compatible es al menos de $\frac{1}{3}$. Los jugadores saben que la frontera de X se encuentra en la franja limitada por las regiones representadas por $p(x)=0$ y $p(x)=1$. Si el grado de incertidumbre es pequeño, la franja será estrecha.

El análisis se centrará en saber que ocurre cuando su amplitud se hace infinitamente pequeña.

La función de pagos en la versión suavizada para el jugador i es:

$$\pi_i(x_1,x_2)=x_i p(x_1,x_2).$$

Ya que si son escogidas las demandas (x_1,x_2) el resultado es una lotería en la que el jugador i recibe x_i con probabilidad $p(x_1,x_2)$ y nada con probabilidad $1-p(x_1,x_2)$.

Suponiendo que $p:[0,1]^2 \to [0,1]$ es diferenciable, se tiene que la curva de reacción del jugador I (son las respuestas óptimas a las demandas de x_2 del jugador II) está dada por:

(1) $$x_1 p_{x_1}(x_1,x_2)+p(x_1,x_2)=0.$$

La curva de reacción del jugador II está dada por:

(2) $$x_2 p_{x_2}(x_1,x_2)+p(x_1,x_2)=0.$$

Un equilibrio de Nash $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ se da en donde se cortan estas dos curvas; lo cual se muestra en la figura 66(b).

A continuación se muestra que por muchos equilibrios de Nash que haya todos se aproximan a la solución de Nash regular cuando los jugadores saben bien como es X.

Tenemos que la tangente a $p(x)=p(\tilde{x})$ en $\tilde{x}$, tiene por ecuación a $\nabla p(\tilde{x})^T(x-\tilde{x})=0$. Es decir:

(3) $$p_{x_1}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)(x_1-\tilde{x}_1)+p_{x_2}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)(x_2-\tilde{x}_2)=0.$$

Si $\tilde{x}$ es un equilibrio de Nash, $\tilde{x}$ pertenece a las curvas de reacción de I y II, entonces (1) y (2) se cumplen con $x=\tilde{x}$; así de (1) y (2) se tiene que:

(4) $$p_{x_1}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)=-\frac{p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)}{\tilde{x}_1}$$

(5) $$p_{x_2}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)=-\frac{p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)}{\tilde{x}_2}$$

Sí sustituimos(4) y (5) en (3). Tenemos,

$$\frac{p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)}{\tilde{x}_1}(x_1-\tilde{x}_1)+\frac{p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)}{\tilde{x}_2}(x_2-\tilde{x}_2)=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x_1 p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)}{\tilde{x}_1}-\frac{\tilde{x}_1 p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)}{\tilde{x}_1}+\frac{x_2 p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)}{\tilde{x}_2}-\frac{\tilde{x}_2 p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)}{\tilde{x}_2}=0$$

$$\Rightarrow \qquad p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)[(x_1/\tilde{x}_1)-1+(x_2/\tilde{x}_2)-1]=0$$

ya que $p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\neq 0$, entonces:

$$[(x_1\ \tilde{x}_1)-1+(x_2\ \tilde{x}_2)-1]=0$$

$$\Rightarrow \qquad [(x_1\ \tilde{x}_1)-1+(x_2\ \tilde{x}_2)-1]=$$

$$=[(x_1\ \tilde{x}_1)+(x_2\ \tilde{x}_2)-2]=$$

$$= \frac{x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1 - 2\bar{x}_1\bar{x}_2}{\bar{x}_1\bar{x}_2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1}{\bar{x}_1\bar{x}_2} = \frac{2\bar{x}_1\bar{x}_2}{\bar{x}_1\bar{x}_2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x_1\bar{x}_2}{2\bar{x}_1\bar{x}_2} + \frac{\bar{x}_1 x_2}{2\bar{x}_1\bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1\bar{x}_2}{\bar{x}_1\bar{x}_2} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x_1}{2\bar{x}_1} + \frac{x_2}{2\bar{x}_2} = 1.$$

Esta es la ecuación de la tangente a $p(x) = p(\bar{x})$ en el punto $\bar{x}$. Lo cual se muestra en la figura 67.

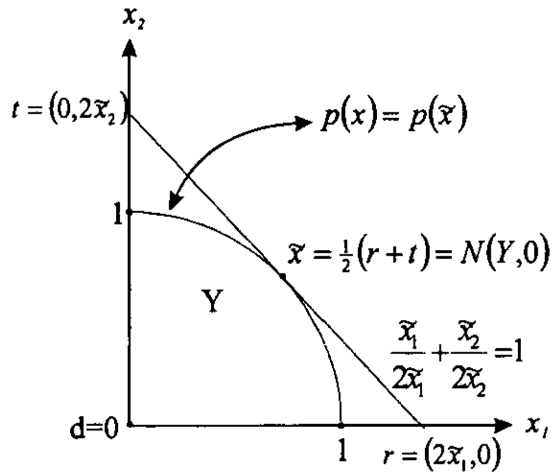


Figura 67. Caracterización de los equilibrios de Nash en el juego "suavizado".

En la figura 67 la tangente corta al eje $\bar{x}_1$ en el punto $r = (2\bar{x}_1,0)$ y al eje $\bar{x}_2$ en $t = (0,2\bar{x}_2)$. El equilibrio de Nash $\bar{x} = (\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ se encuentra en el punto medio del segmento que une a r y t. Si Y es la región, entonces $\bar{x}$ es la solución de negociación de Nash regular para el problema de negociación $(Y,0)$.

La frontera de Y es una gráfica de probabilidad, todas estas graficas convergen hacia la frontera de X cuando la amplitud de la franja representada en 66(a) tiende a cero. Entonces $N(Y,0)$ converge a $N(X,0)$. Es decir, cuando el grado de la incertidumbre sobre la situación de X es muy pequeño; todos los equilibrios de Nash del juego suavizado se aproximan a la solución de negociación de Nash regular del problema de negociación $(X,0)$.

Nash da esta conclusión como justificación para usar la solución de negociación de Nash como convención para elegir un equilibrio de Nash en el juego (no suavizado) de las demandas de Nash. Nash expresa que cualquier otra convención sería necesariamente inestable porque aunque fuera un buen instrumento para seleccionar un equilibrio de Nash sobre el conjunto de factibles X, a la menor duda no serviría siquiera para elegir un equilibrio de Nash.

Por tanto la solución de negociación de Nash es la única convención estable cuando hay dudas.

Compromiso y cooperación.

En teoría de juegos cooperativa, un acuerdo previo al juego es un compromiso para ambas partes.

El estudio de los equilibrios de Nash pertenece a la teoría de juegos no cooperativa. En esta teoría nada de lo que se diga en una negociación previa al juego obliga a nadie. Si alguien cumple con algo acordado previamente no es por compromiso sino por que ello representa ventaja para él.

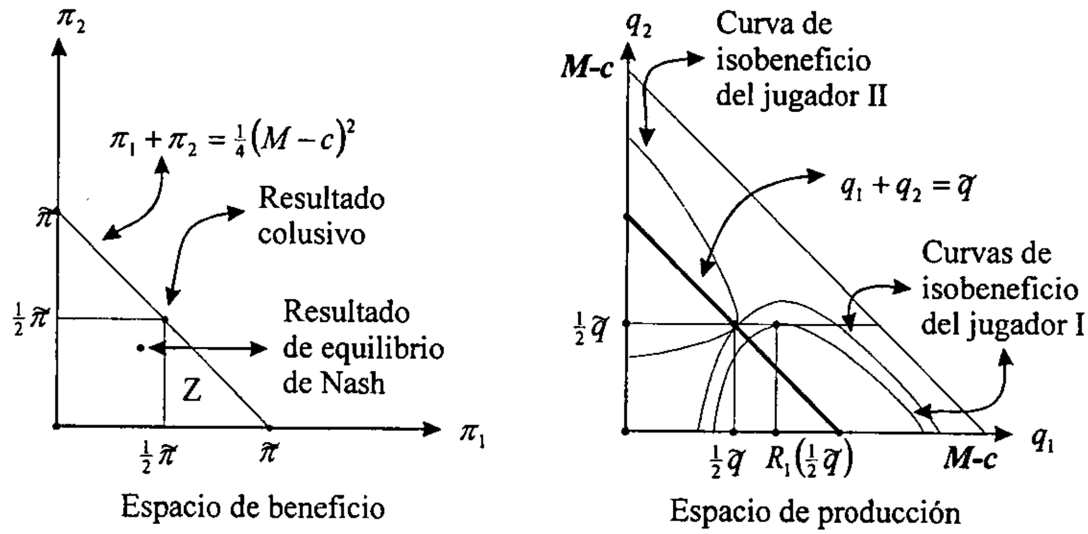
Los únicos acuerdos valiosos que se pueden obtener con las "palabras", son acuerdos para coordinarse en un equilibrio.

Regiones de pagos cooperativos.

Adquirir compromisos previos al juego puede ser muy útil, si los jugadores tienen habilidad. Y no limitarse a considerar los equilibrios de Nash del jugo que tendrán próximamente.

Colusión en el duopolio de Cournot.

Supongamos que cada empresa sólo está interesada por maximizar sus beneficios. La región de pagos cooperativos del duopolio esta representada en la figura siguiente.



(a) (b)

Figura 68. Colusión en el duopolio de Cournot.

$\bar{\pi}$ es la cantidad que se obtiene de un monopolio que maximice beneficios; el cual se consigue con la producción monopolista $\bar{q} = \frac{1}{2}(M-c)$(dicho anteriormente). Así dos duopolistas en colusión estarán seguros de maximizar sus beneficios si se aseguran de que $q_1 + q_2 = \bar{q}$.

Así el beneficio total que consiguen satisfacera $\pi_1 + \pi_2 = \tilde{\pi}$. En la figura 68(b) se muestran pares de producción(q_1, q_2). Se ha señalado la recta$q_1 + q_2 = \tilde{q}$ de acuerdos de producción Pareto-eficientes.

¿Qué par de beneficios de Z se obtendría si los duopolistas negocian en el supuesto de que su acuerdo es vinculante? El resultado más probable es que se dividieran el mercado al 50%. Sin embargo cualquier resultado colusivo es inestable. Los acuerdos conseguidos no obligarán. Así que si alguno de los jugadores tiene incentivos para no cumplir el acuerdo, no lo cumplirá. En la figura 68(b) ninguno de los jugadores tiene incentivos para respetar el acuerdo de producción$\left(\frac{\tilde{q}}{2}, \frac{\tilde{q}}{2}\right)$. I tiene incentivos para desviarse a$R_1\left(\frac{\tilde{q}}{2}\right)$, que es su respuesta óptima a la elección de II; II tiene los mismos incentivos para desviarse. Sólo hay un acuerdo en el cual ninguno de los dos tiene incentivos para desviarse, es$\left(\frac{2\tilde{q}}{3}, \frac{2\tilde{q}}{3}\right)$que es el equilibrio de Nash del juego del duopolio de Cournot no colusivo.

Aleatorización previa al juego.

En esta sección se presentan ejemplos simples de lo que se puede conseguir si las circunstancias son favorables.

Tirar monedas.

Consideremos la versión del juego del gallina y su región de pagos en la siguiente figura.

$$\begin{array}{cc} & \text{Paloma} \quad \text{Halcón} \\ \begin{array}{c} \text{Paloma} \\ \\ \text{Halcón} \end{array} & \begin{bmatrix} & 2 & & 3 \\ 2 & & 0 & \\ & 0 & & -1 \\ 3 & & -1 & \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $\qquad\qquad$ (b)

Figura 69. Una segunda versión de la gallina.

Este juego tiene tres equilibrios de Nash (paloma, halcón), (halcón, paloma) y uno en el que cada jugador usa paloma y halcón con la misma probabilidad.

Si son posibles los acuerdos podrían convenir sobre el resultado$(2,2)$, si no, están en el problema de la selección de equilibrios; que podría no ser fácil de resolver si no hay una convención que permita romper la simetría. Sin embargo si los acuerdos son posibles, los jugadores pueden inventarse una convención.

Por ejemplo pueden convenir en lanzar una moneda al aire y observarla conjuntamente; si el resultado es cara, jugarán (paloma, halcón) y si es cruz (halcón, paloma). Cada uno valora la lotería acordada en $1\frac{1}{2}$; $\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ no es mejor resultado que $(2,2)$ pero sí mejor que $(1,1)$ (resultado de usar el equilibrio mixto de Nash).

La figura 70(a) muestra la cerradura convexa de los equilibrios de Nash para este juego. En este conjunto, están todos los resultados que se pueden obtener de esta forma.

Por ejemplo los jugadores pueden observar conjuntamente el lanzamiento de dos monedas independientes y acuerdan jugar (paloma, halcón), si el resultado es cara-cara y el equilibrio mixto de Nash, si el resultado es cara-cruz y (halcón, paloma) para los demás resultados. Obteniendo así el siguiente resultado

$$\left(1,\tfrac{7}{4}\right)=\tfrac{1}{4}(0,3)+\tfrac{1}{4}(1,1)+\tfrac{1}{2}(3,0).$$

Equilibrios correlacionados.

Incluso si se permiten las negociaciones previas al juego puede no ser fácil encontrar un mecanismo aleatorio. Sin embargo en situación favorable podríamos dispóner del conjunto de resultados de la figura 70(b), donde el resultado $\left(1\tfrac{2}{3},1\tfrac{2}{3}\right)$ mejora al $\left(1\tfrac{1}{2},1\tfrac{1}{2}\right)$ mediante el uso de los equilibrios de Nash (paloma, halcón) y (halcón, paloma) con la misma probabilidad.

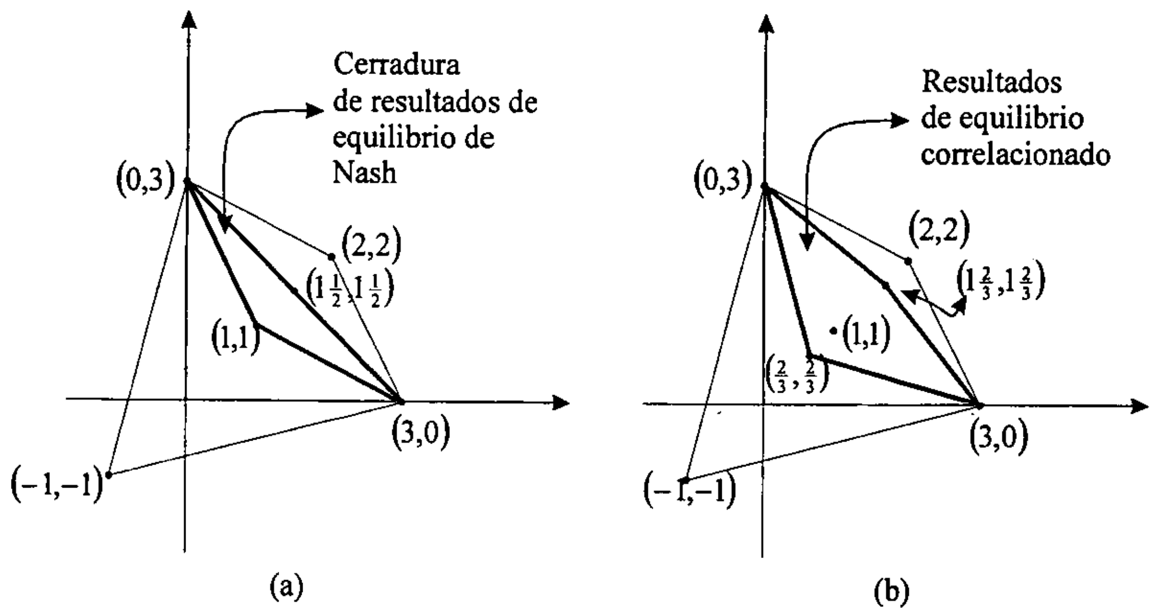


Figura 70. Regiones de pagos para el gallina.

Supongamos que en una negociación previa al juego, los jugadores pueden contratar a un árbitro con la instrucción de que éste ha de usar un mecanismo aleatorio para seleccionar una casilla del juego del gallina con las probabilidades de la figura 69(b).

El acuerdo es que ambos harán lo que les diga el árbitro; éste no dirá a ninguno de los dos la casilla seleccionada, pero si dirá a I sólo la fila en la que se encuentra la casilla y a II sólo la columna. Si ambos respetan el acuerdo, será:

$$\left(1\tfrac{2}{3},1\tfrac{2}{3}\right)=\tfrac{1}{3}(0,3)+\tfrac{1}{3}(2,2)+\tfrac{1}{3}(3,0).$$

Lo importante es que este acuerdo se autorregula. Es óptimo para cada jugador respetar el acuerdo. Para ver porque es cierto utilicemos probabilidad condicional.

Supongamos que el árbitro dice a II que use paloma, entonces calculará:

$$\text{prob}(\text{I oye paloma/II oye paloma})\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\tfrac{1}{2}$$

$$\text{prob}(\text{I oye halcón/II oye paloma})\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\tfrac{1}{2}.$$

El pago esperado de II por cumplir el acuerdo es $2(\tfrac{1}{2})+0(\tfrac{1}{2})=1$. Si hace trampa su pago esperado es $3(\tfrac{1}{2})-1(\tfrac{1}{2})=1$. Por tanto no pierde nada si respeta el acuerdo.

Si el árbitro le dice que juegue halcón, él calculará:

$$\text{prob}(\text{I oye paloma/II oye halcón})\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+0}=1$$

$$\text{prob}(\text{I oye halcón/II oye halcón})\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+0}=1.$$

Su pago esperado por respetar el acuerdo es $3(1)+0(-1)=3$. Si no respeta el acuerdo, su pago esperado es $1(2)+0(0)=2$. Por tanto es mejor para él respetar el acuerdo.

Ya que la situación es simétrica, el jugador I tampoco ganará nada si se desvía del acuerdo.

Este resultado es un ejemplo de lo que Aumann llama un equilibrio correlacionado.

¿Cuándo existen equilibrios de Nash?

Dicho anteriormente, los equilibrios de Nash se dan donde se cortan las curvas de reacción. Puede darse el caso en que las curvas no se corten y no existan equilibrios de Nash; esto sucede con frecuencia en juegos infinitos aunque se admitan estrategias infinitas.

Nash demostró que en juego finito no es posible que no haya equilibrio.

Estrategias y pagos.

La siguiente prueba esquemática no sólo funciona para juegos finitos; también para cualquier juego en el que los jugadores I y II eligen sus estrategias en los conjuntos P y Q respectivamente; con la condición de que dichos conjuntos y las funciones de pagos $\Pi_{1,2}: P\times Q \rightarrow \mathbb{R}$; satisfacen determinadas condiciones simples.

Recordemos que una estrategia mixta en un juego de 2×2 queda determinada una vez que I elige $p\in[0,1]$; es posible entonces en juegos bimatriciales hacer $P=Q=[0,1]$. Si I elige p y II elige q. El pago esperado para el jugador I en términos matriciales es:

$$\Pi_1(p,q)=[1-p,p]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-q \\ q \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo en el juego del gallina:

$$\Pi_1(p,q)=(1-q)+p(1-2q).$$

Esta conclusión ilustra que para cada valor fijo de q, $\Pi_1(p,q)$es una función afín de p. Las funciones afines siempre son continuas, cóncavas y convexas.

En lo siguiente, las cosas importantes sobre conjuntos de estrategias y funciones de pagos son:

- El conjunto de estrategias de cada jugador debe ser convexo y compacto. Esto es automáticamente cierto para los conjuntos P y Q de un juego finito.

- La función de pagos de cada jugador debe ser continua. También debe ser cóncava cuando las estrategias de los demás jugadores se mantienen constantes.

Estas propiedades son necesarias para asegurar que $R_2 : P \to Q$ y $R_1 : Q \to P$, se comportan bien.

Paréntesis Topológico.
Puntos fijos.

Una correspondencia F: $P \subseteq \mathbb{R} \to Q \subseteq \mathbb{R}$ no es una función, ya que una función es una regla de correspondencia que asigna un único elemento $q \in Q$, $q = f(p)$ a cada $p \in P$; y en una correspondencia $f(p)$ no es un único elemento $q \in Q$, $f(p)$ en una correspondencia es un subconjunto A de Q, es decir $f(p)$=A$\subseteq Q$.

Por ejemplo la correspondencia F:$[a,b] \subseteq \mathbb{R} \to [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \{(x,y) \text{ tal que } x \in [a,b] \text{ y } y = [c,d] \subseteq [a,b]\}$

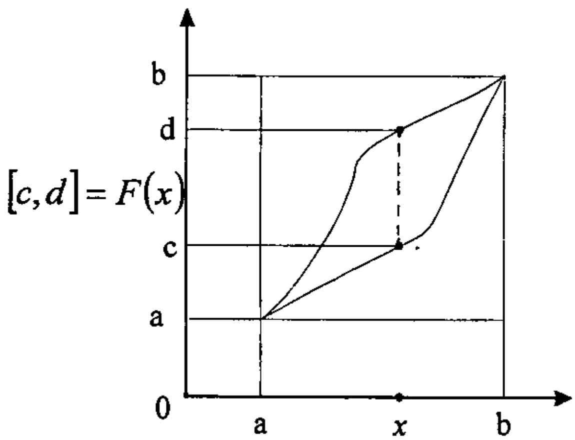


Figura 71. Correspondencia F.

Decimos que una correspondencia $F : X \to Y$ se comporta bien si cuando X y Y son conjuntos convexos y compactos:

- Para cada $x \in X$ el conjunto $F(x)$ es convexo y no vacío.
- El grafo G de $F : X \to Y$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.

La figura siguiente ilustra la correspondencia $F : X \to X$ que se comporta bien aplicando X en sí mismo.

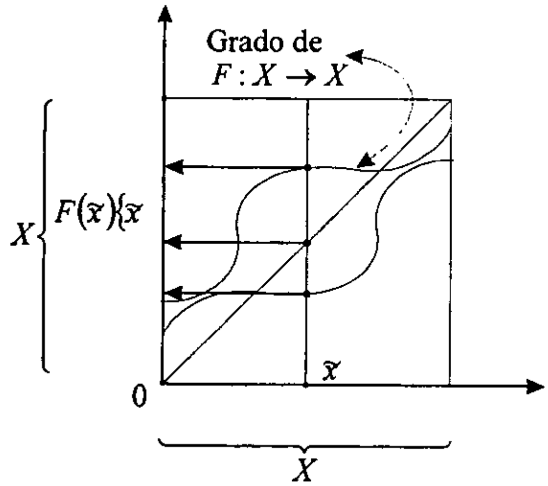


Figura 72. Correspondencia que se comporta bien y punto fijo.

Si $(x,x) \in G$ la gráfica cerrada de la correspondencia F entonces, x es un punto fijo, es decir,

$$F(x) = x.$$

Gráficamente tiene que haber intersección del grafo G con la recta a 45°.

Definición.

Una familia $\mathfrak{G}$ de transformaciones lineales en un espacio $\mathfrak{X}$ lineal topológico se dice que es equicontinuo en un subconjunto $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{X}$, si para cualquier vecindad $\mathfrak{V}$ del origen en $\mathfrak{X}$ existe una vecindad $\mathfrak{U}$ del origen tal que si $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2 \in \mathfrak{K}$ entonces $\mathfrak{G}(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2) \subseteq \mathfrak{V}$; es decir, $\mathfrak{T}(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2) \in \mathfrak{V}$ para toda $\mathfrak{T} \in \mathfrak{G}$.

Teorema de Kakutani.

Sea $\mathfrak{K}$ un subconjunto convexo y compacto de $\mathfrak{X}$ un espacio topológico lineal localmente convexo; y sea $\mathfrak{G}$ un grupo de mapeos lineales el cual es equicontinuo en $\mathfrak{K}$ y tal que $\mathfrak{G}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{K}$. Entonces ahí existe un punto $\mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ tal que $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

Teorema de Brouwer.

Supongamos que X es un conjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$. Si la función $f: X \to X$ es continua, entonces existe un punto fijo x que satisface

$$x = f(x).$$

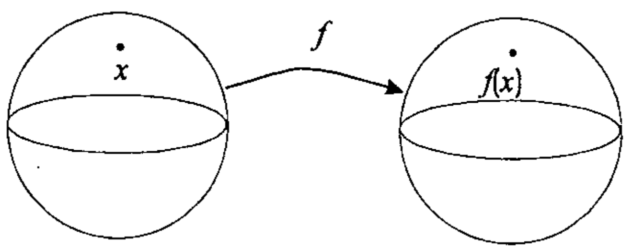


Figura 73. Punto fijo de Brouwer.

Nota. El teorema de Kakutani está hecho para funciones cuya gráfica es cerrada y el teorema de Brouwer es para funciones continuas. Las funciones con gráfica cerrada pueden no ser continuas, ver Nathan, se requieren poner más condiciones a una función con gráfica cerrada para que la función resulte continua. De cualquier manera la idea de Nash es usar el punto fijo que nos garantiza estos teoremas para encontrar el punto de equilibrio de negociaciones. Esta es la relación entre un fenómeno social y un par de teoremas topológicos.

Cierre de paréntesis topológico.

Teorema 4.3.1 (Nash).
Si se admiten estrategias mixtas, todo juego finito tiene por lo menos un equilibrio de Nash.

Demostración.
Esta es una versión esquemática de la prueba para el caso de dos jugadores.

1. Hay que comprobar que en el caso finito, las correspondencias de respuestas óptimas $R_2 : P \to Q$ y $R_1 : Q \to P$ se comportan bien.
   1°. Hay que mostrar que los conjuntos de estrategias P y Q son convexos y compactos. Sin perder generalidad sea $P = Q = [0,1]$; P es convexo ya que se admiten estrategias mixtas y estas son combinaciones convexas de las estrategias puras, es decir P es la cerradura convexa de las estrategias puras del jugador I. Es cerrado ya que la cerradura convexa del conjunto de estrategias puras contiene a todas las estrategias puras y a todas las combinaciones convexas de estas estrategias puras, con esto se asegura que P contiene todos sus puntos frontera. Denotemos con P_f al conjunto de los puntos frontera de P, $P_f = \{p \in P \text{ tal que } p \text{ es un punto frontera de } P\}$, observemos que P_f acota al conjunto P. Ya que P es cerrado y acotado, entonces P es compacto.
   2°. Tenemos que probar que la función de pagos de cada jugador debe de ser continua. También debe de ser cóncava cuando las estrategias de los demás jugadores se mantienen constantes. Recordemos que las funciones de pagos $\Pi_1(p,q)$ y $\Pi_2(p,q)$ de los jugadores I y II respectivamente se pueden expresar matricialmente de la siguiente manera:

$$\Pi_1(p,q) = p^T A q = [1-p, p]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-q \\ q \end{bmatrix} =$$

$$= [(1-p)a_{11} + pa_{21}, (1-p)a_{12} + pa_{22}]\begin{bmatrix} 1-q \\ q \end{bmatrix} =$$

$$= [a_{11} - pa_{11} + pa_{21}][1-q] + q[a_{12} - pa_{12} + pa_{22}] =$$

$$= a_{11} - pa_{11} + pa_{21} - qa_{11} + qpa_{11} - qpa_{21} + qa_{12} - qpa_{12} + qpa_{22} =$$

(1) $$= (a_{11} - qa_{11} + qa_{12}) + p(a_{21} - a_{11} + qa_{11} - qa_{21} - qa_{12} + qa_{22})$$

$$\Pi_2(p,q)=p^TBq=[1-p,p]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-q\\ q\end{bmatrix}=$$

$$=[(1-p)b_{11}+pb_{21},(1-p)b_{12}+pb_{22}]\begin{bmatrix}1-q\\ q\end{bmatrix}=$$

$$=[b_{11}-pb_{11}+pb_{21}][1-q]+q[b_{12}-pb_{12}+pb_{22}]=$$

$$=b_{11}-pb_{11}+pb_{21}-qb_{11}+qpb_{11}-qpb_{21}+qb_{12}-qpb_{12}+qpb_{22}=$$

(2) $$=(b_{11}-pb_{11}+pb_{21})+q(b_{12}-pb_{12}-pb_{21}-b_{11}+pb_{11}+pb_{22})$$

La expresión (1) ilustra que para cada valor fijo de q, $\Pi_1(p,q)$ es una función afín de p; similarmente la expresión 2 ilustra que para cada valor fijo de p, $\Pi_2(p,q)$ es una función afín de q. Pero las funciones afines, no sólo son siempre continuas, además son cóncavas y convexas simultáneamente. Por tanto $R_2:P\to Q$ y $R_1:Q\to P$ se comportan bien.

2. Hay que construir una correspondencia $F:P\times Q\to P\times Q$ a la que se pueda aplicar el teorema de punto fijo de Kakutani-Brouwer. Para cada $(p,q)\in P\times Q$, $F(p,q)\subseteq P\times Q$; más precisamente:
$$F(p,q)=R_1(q)\times R_2(p)$$
esta definición se ilustra en la figura 72(a) para el caso del juego bimatricial de 2×2 con $P=Q=[0,1]$
3. Hay que deducir que F se comporta bien, pensando que esto es cierto para R_1 y R_2. Para que F se comporte bien, se deben satisfacer las siguientes propiedades cuando $P\times Q$ es conjunto convexo y compacto. $P\times Q=[0,1]^2$ es convexo ya que para cualesquiera dos puntos (p,q) y (p',q'), el segmento que los une esta en $P\times Q$; es cerrado ya que por la definición de producto cruz entre dos conjuntos $P\times Q$ contiene todos sus puntos frontera. Y el conjunto $P\times Q$ está acotado por el conjunto de sus puntos frontera. Por lo tanto $P\times Q$ es compacto.
1ª. Para cada $(p,q)\in P\times Q, P\times Q\supseteq F(p,q)=R_1(q)\times R_2(p)$ es convexo y no vacío.
Es no vacío ya que para cada elección $p\in P$ del jugador I, el jugador II tiene en su correspondencia de respuesta óptima al menos un $q\in Q$; y para cada elección $q\in Q$ del jugador II, el jugador I tiene en su correspondencia de respuesta óptima por lo menos un $p\in P$. Por tanto $F(p,q)$ tiene al menos un elemento.
Es convexo ya que si el jugador I es indiferente entre usar su estrategia pura $p_1\in R_1(q)$ y su estrategia pura $p_2\in R_1(q)$, también es indiferente en usar cualquier otra estrategia mixta $p_i\in R_1(q)$ donde $p_1\le p_i\le p_2$, es decir p_i se encuentra en la cerradura convexa de p_1 y p_2, es decir $p_i\in conv(\{p_1,p_2\})$. Esto hace que $R_1(q)$ sea convexo. Análogamente, si II es indiferente entre usar su estrategia pura $q_1\in R_2(p)$ y su estrategia pura $q_2\in R_2(p)$, entonces es indiferente en usar cualquiera de sus estrategias $q_i\in R_2(p)$ donde $q_1\le q_i\le q_2$, es decir q_i se encuentra

en la cerradura convexa de q_1 y $q_2, q_i \in conv(\{q_1, q_2\})$. Esto hace que $R_2(p)$ sea convexo. De esta manera $R_1(q)$ y $R_2(p)$ son subintervalos cerrados de P y Q. Entonces $R_1(q)\times R_2(p) = conv(\{(p_1,q_1),(p_2,q_1),(p_1,q_2),(p_2,q_2)\})$. Por lo tanto $R_1(q)\times R_2(p)$ es convexo. En el caso en que $R_1(q)$ ($R_2(p)$) constase de tan sólo un elemento y $R_2(p)$ ($R_1(q)$) de más de un elemento, entonces $R_1(q)\times R_2(p) = conv(\{(p,q_i) \text{ tal que } q_i \in R_2(p)\})$
($R_1(q)\times R_2(p) = conv(\{(p_i,q) \text{ tal que } p_i \in R_1(q)\})$). Por tanto, $R_1(q)\times R_2(p)$ es un conjunto convexo. Y si $R_1(q)$ y $R_2(p)$ de un sólo $p\in P$ y un sólo $q \in Q$, entonces $R_1(q)\times R_2(p) = \{(p,q)\}$, que es convexo por vacuidad.

2ª. El grafo $F: P\times Q \to P\times Q$ es un subconjunto cerrado de $P\times Q$.

En el caso en que $F(p,q) = R_1(q)\times R_2(p) = conv(\{(p_1,q_1),(p_2,q_1),(p_1,q_2),(p_2,q_2)\})$, este conjunto contiene todos sus puntos frontera por como está definido el producto cruz; por tanto $F(p,q) \subseteq P\times Q$ es un conjunto cerrado.

Si $P\times Q \supseteq F(p,q) = R_1(q)\times R_2(p) = conv(\{(p,q_i) \text{ tal que } q_i \in R_2(p)\})$ o $P\times Q \supseteq F(p,q) = R_1(q)\times R_2(p) = conv(\{(p,q_i) \text{ tal que } q_i \in R_2(p)\})$; tales conjuntos son intervalos cerrados y éstos contienen sus puntos frontera, por lo que $F(p,q) \subseteq P\times Q$ es un conjunto cerrado de $P\times Q$.

Y si $P\times Q \supseteq F(p,q) = R_1(q)\times R_2(p) = \{(p,q)\}$, este conjunto es cerrado ya que contiene a su único punto frontera (p,q).

De 1ª y 2ª se concluye que $F: P\times Q \to P\times Q$ se comporta bien.

4. Este paso consiste en aplicar el teorema de punto fijo de Kakutani-Brouwer; éste demuestra que existe un punto fijo $(\bar{p},\bar{q})$ que satisface:
$$(\bar{p},\bar{q}) \in F(\bar{p},\bar{q}) = R_1(\bar{q})\times R_2(\bar{p}),$$
tal situación se ilustra a continuación en la figura 74(b).

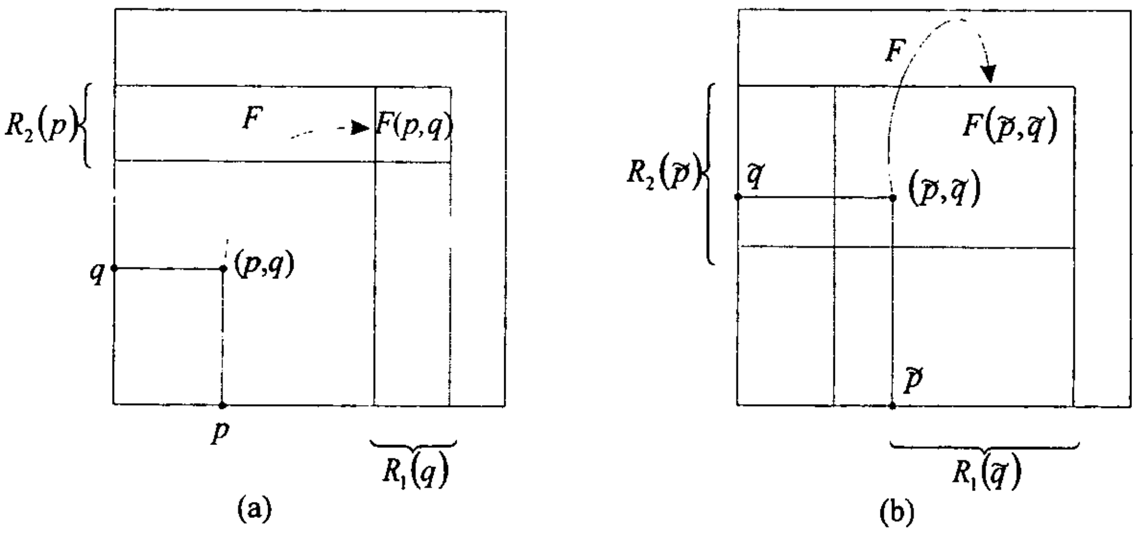


Figura 74. La correspondencia *F* del teorema de Nash.

5. Finalmente observamos que $(\tilde{p}, \tilde{q})$ es un equilibrio de Nash, ya que la estrategia mixta $\tilde{p} \in R_1(\tilde{q})$ y la estrategia mixta $\tilde{q} \in R_2(\tilde{p})$.

Este teorema es muy importante por la revolución que genera su aplicación en diversas áreas del conocimiento humano.

Como hemos visto éste importante resultado de teoría de equilibrio de Nash no sólo garantiza que todos los contendientes obtengan ganancia en el punto de equilibrio; además asegura que el punto de equilibrio siempre existe, si el juego es finito. Y éste punto da finalmente sistemas de equilibrio.

FIN.

Referencia Bibliográfica

LIBROS

1. Antón H. y Rorres C. "Aplicaciones de Álgebra Lineal," Limusa.
2. Antón H. y Rorres C. "Elementary linear algebra," versión de aplicaciones, John Wiley & sons, INC, New York, p.p. 553-575, 1991.
3. Binmore K.. "Teoría de Juegos," M^c Graw Hill.

D1 4. Dawkins R. "The Seifish Gene," Oxford Univ. Press,1976

5. Dunford N. y Schwartz J. Serie: Pure and applied mahematics, vol VII, R. Courant, L. Bers, J. J. Stoker, New York, 1957.

N10 6. F. Nash J. Jr. con Kalish C., Milnor J. y Nering E. "Some experimental n-person games," Decisión Processes, (Thrall, Cooms and Davis, eds.), Wiley, pp.301-327, 1954.

N21 7. F. Nash J. Jr. con Kuhn H., Harnasy J. , Selten R. , Weibull J. , Van Damme E., y Hammerstein P. "The work of John F. Nash Jr. In game theory," Duke J. Math 81, p. p. 1-29, 1995.

HS 8. Hammerstein P. y Selten R. "Game theory and evolutiorary biology," Handbook of Game theory with Economic Aplications, vol.2, (Aumann and Hart, eds.), Elsevier, pp.929-993, 1994.

k1 9. Kuhn H. Introduction to, "A celebration of John F. Nash Jr.", Duke J. Math.81, 1995; dedicated to Nash.

MS 10. Maynard S. J. "Revolution and the theory of games," Cambridge Univ. Press, 1982.

M 11. Milnor J. "A Nobel prize for John Nash," Math. Inteligencer 17, p.p. 11-17 1995.

12. Nasar S. "A Beautiful Mind," Touchtone Book, 1998.

OR 13. Osborne M. y Rubinstein A. "A course in game theory," MIT Press, 1994.

14. Raifa H. "El arte y la Ciencia de la Negociación.", Fondo de Cultura Económico, México, 1991.

U 15. Umbhauer G. "John Nash,un vissionaire de l'economie," Gaz. Math. 65, p.p. 47-69, 1995.

W 16. Weibull J. "Evolutionary game theory," MIT Press,1995.

ARTÍCULOS

1. Comité gallego del año mundial de las matemáticas "El personaje de la semana," John Forbes Nash, http://www.udc.es/gallega 2000/gal/pers_nash.htm
2. Milnor J., John Nash and "A Beautiful Mind", Notices of the AMS, vol 45, num. 10, p.p. 1329-1332, Noviembre, 1998.

N5 3. Nash J. Jr., "The Bargaining Problem", Econometrica, 18 pp. 155-162, 1950.

4. O'Connor J. J. y Robertson E. F. "John Forbes Nash," http://www-groups.dcs.st-and.ac.ok/~history/Methematicians/Nash.html.

PELÍCULA

1. A Beautiful Mind, (2001)
   Dirigida por Ron Howard.

Índice Analítico

J

L

M