

0116 / 19



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

T E S I S

***Respuesta Dinámica de Plataformas Marinas
Sometidas a Oleaje Aleatorio de Banda Angosta***

P R E S E N T A D A P O R:

Teresa del Rosario Salazar Carrillo

P A R A O B T E N E R E L G R A D O D E:

M A E S T R O E N I N G E N I E R I A

(E S T R U C T U R A S)

DIRIGIDA POR: Dr. Ernesto Heredia Zavoni

300015

Ciudad Universitaria, Diciembre 2001



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En este trabajo se presenta el estudio del comportamiento dinámico de plataformas típicas de la Sonda de Campeche evaluando su respuesta ante modelos de oleaje aleatorio de banda angosta y ante oleaje de banda ancha, con el espectro de Pierson Moskowitz. Las plataformas marinas se modelan como sistemas de un grado de libertad y de varios grados de libertad. Se hace esta consideración con el fin de evaluar el efecto de simplificar el modelado estructural de las plataformas y estimar el error que se introduce producto de dicha simplificación en el cálculo de la respuesta. En estos modelos se resuelven mediante el método de linealización estocástica equivalente. En el caso de varios grados de libertad se considera solamente el primer modo de vibrar. En este trabajo se plantea las ecuaciones de movimiento que gobiernan los modelos estructurales para la solución de las mismas, con el fin de determinar la respuesta máxima desde el un punto de vista probabilístico.

Los resultados mostraron en modelos de 1GDL y VGDL, que la respuesta estructural es máxima cuando el periodo del oleaje está cerca del periodo de la estructura y se produce el fenómeno de resonancia. Es válido el uso de modelos simplificados de 1GDL considerando el oleaje de banda angosta y Pierson Moskowitz, siempre que se usen factores de corrección adecuados que dependerá del tipo de plataforma y la altura de ola a considerar. El error en el cálculo de respuesta de VGDL es muy grande en la zona de resonancia para los modelos de oleaje como proceso de banda angosta. La diferencia entre los modelos de 1GDL y VGDL para valores de periodos de oleaje mayores que el periodo fundamental es pequeña y se recomienda el uso de la simplificación de la estructura como un modelo de 1GDL. Es válido el uso de modelos de 1GDL aplicando el espectro de Pierson Moskowitz; la respuesta del sistema de VGDL se puede obtener corrigiendo la de modelos de 1GDL mediante factores de corrección que dependerán del tipo de plataforma a considerar.

A DIOS

*POR SU INFINITA BONDAD DE GUIARME POR EL SENDERO DE LA VERDAD Y
CAMINAR A TRAVEZ DE LA LUZ QUE ILUMNINA MI VIDA*

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Ernesto Heredia Zavoni por su gran apoyo y dedicación para la realización de esta tesis

A los doctores Sonia Ruiz, Luis Esteva, Francisco Sánchez Sesma y David de León, por la revisión de este trabajo, comentarios y sugerencias.

A mi familia

A mis amigos

INDICE

Capítulo 1	Introducción	1
1.1	Fundamentos teóricos del oleaje	7
1.2	Teoría de Pequeña Amplitud de Airy	10
1.2.1	Velocidad y aceleraciones locales de un fluido	10
1.3	Ecuación de Morison	13
1.4	Descripción General de una Plataforma Marina Fija	15
Capítulo 2	Respuesta Estructural ante oleaje de banda angosta	20
2.1	Oleaje Aleatorio	20
2.2	Respuesta dinámica de sistemas de un grado de libertad	23
2.2.1	Linealización Estocástica Equivalente	25
2.2.2	Determinación de la función de transferencia	28
2.2.3	Predicción de la respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad	30
2.3	Respuesta dinámica de sistemas de varios grados de libertad considerando el primer modo de vibrar	34
2.3.1	Linealización Estocástica Equivalente	36
2.3.2	Solución de la ecuación de movimiento	38
2.3.3	Predicción de Respuestas Máximas	42

Capítulo 3	Respuesta Estructural ante oleaje de banda ancha	45
3.1	Espectro de Oleaje	45
3.2	Predicción de la respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad	49
3.3	Predicción de la respuesta máxima de un sistema de n grados de libertad considerando el primer modo de vibrar	51
Capítulo 4	Aplicación	54
4.1	Idealización estructural: sistemas de un grado de libertad	54
4.2	Amortiguamiento	59
4.3	Parámetros de la Fuerza de Oleaje	61
4.4	Diámetro Equivalente	63
4.5	Espectro de Pierson Moskowitz	69
4.6	Resultados	70
4.6.1	Respuesta máxima de varias plataformas de un grado de libertad considerando un diámetro equivalente de 4 metros	70
4.6.2	Respuesta máxima de varias plataformas de un grado de libertad considerando un diámetro equivalente de 6 metros	79
4.6.3	Respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad con rigidez constante y masa variable	81
4.6.4	Respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad con rigidez variable y masa constante	84

4.6.5	Respuesta máxima de plataformas marinas modeladas como sistemas de varios grados de libertad	87
4.6.6	Respuesta máxima de la Plataforma Perforación 1	87
4.6.7	Respuesta máxima de la Plataforma Habitacional	98
4.6.8	Factor de Amplificación Dinámica	108
Capítulo 5 Conclusiones y Recomendaciones		113
Bibliografía		116
Apéndice 1	La altura de ola significativa (H_s) y la desviación estándar del perfil de la ola σ_η	122
Apéndice 2	Demostración $E[\ddot{r}] = 0$	125
Apéndice 3	Demostración $E[\dot{r}^2 \dot{r}] = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_r^3$	127
Apéndice 4	Varianza de la primera derivada de la respuesta relativa, $\sigma_{\dot{r}}$	130
A.2.1	Determinación de la varianza de la primera derivada de la respuesta relativa, $\sigma_{\dot{r}}$	130
A.2.2	Procedimiento iterativo para determinar la varianza de la primera derivada de la respuesta relativa, $\sigma_{\dot{r}}$	133
A.2.3	Determinación de la varianza de la primera derivada de r de un sistema de varios grados de libertad considerando el primer	135

modo de vibrar

A.2.4	Procedimiento iterativo para determinar la varianza de la primera derivada de la respuesta relativa, $\sigma_{\ddot{r}_i}$	138
-------	--	-----

Apéndice 5 Densidad espectral de la excitación 140

A.5.1	Densidad espectral de la excitación para varios grados de libertad considerando el primer modo	143
-------	--	-----

Apéndice 6 145

A.6.1	Respuesta máxima de plataformas modeladas como sistemas de un grado de libertad; $D_e = 6$ m	145
A.6.2	Respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad con rigidez constante y masa variable	149
A.6.3	Respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad con rigidez variable y masa constante	151
A.6.4	Respuesta máxima de la Plataforma Perforación 1 aplicando un sistema de varios grados de libertad	153
A.6.5	Respuesta máxima de la Plataforma Habitacional aplicando un sistema de varios grados de libertad	163

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, se busca un crecimiento dinámico de la industria petrolera mexicana mediante la ejecución de importantes proyectos dirigidos a la optimización de la producción y explotación de hidrocarburos. La gran demanda de petróleo ha incrementado la búsqueda de nuevos yacimientos de extracción de crudo y gas adyacentes al fondo marino, así como la modernización de los ya existentes. Por tal motivo se ha desarrollado tecnología para la perforación en aguas más profundas venciendo los obstáculos que representan las condiciones meteorológicas, la magnitud de los tirantes de agua y la distancia en que se encuentran de la línea de costa.

Los primeros pozos perforados se instalaron en 1887 en California. Posteriormente la primera cubierta alejada de la costa apoyada sobre pilotes de madera fue construida en 1933 frente a las costas de Luisiana, a un tirante de 3.5 metros y a 1 km de tierra firme.

Con los avances tecnológicos logrados en la Segunda Guerra Mundial, durante 1946 se construyó una cubierta en el Golfo de México para un tirante de 4.3 metros y a 8 km mar adentro. Al siguiente año se introdujo el concepto de estructura denominado "jacket", mismo que se sigue utilizando hasta nuestros días.

En nuestro país se inició la explotación de yacimientos de hidrocarburos fuera de la costa en 1958. Se instalaron las primeras plataformas marinas en el Golfo de México localizadas frente a la barra de Santa Ana en el estado de Tabasco. Entre 1964 y 1970, se impulsaron las actividades exploratorias y la perforación, descubriéndose el campo Reforma, en los límites de Chiapas y Tabasco, y el campo Arenque, en el Golfo de México, y, en 1966, se creó el Instituto Mexicano del Petróleo.

A partir de 1976 se dio un gran salto a la producción petrolera y en las reservas de hidrocarburos, por lo que el petróleo se convirtió en la principal fuente de divisas del país. El aumento productivo de esta época estuvo ligado al descubrimiento de los campos de la Sonda de Campeche, considerada hasta la fecha como la provincia petrolera más importante del país y una de las más grandes del mundo. Para 1977 se descubrieron dos campos más, con la perforación de los pozos Akal-1 y Batab-1. El siguiente año se descubrió el cuarto campo productivo, Nohoch, que junto con Chac y Akal integran lo que se ha denominado el complejo Cantarell.

El año de 1997 marcó el inicio de una nueva fase de expansión de la industria petrolera mexicana mediante la ejecución de importantes proyectos de gran envergadura para incrementar los volúmenes de producción de crudo y gas y mejorar la calidad de los combustibles. Por su importancia estratégica y económica se inicia el "Proyecto Cantarell" para renovar, modernizar y ampliar la infraestructura de este complejo, con el fin de mantener la presión en este yacimiento ubicado en la Sonda de Campeche, a través de la inyección de nitrógeno.

En la actualidad existen en la Sonda de Campeche 225 plataformas fijas y aproximadamente 2000 km de ductos marinos. La producción actual en la Sonda de Campeche es de 2.6 millones de barriles de petróleo diarios y 1.5 billones de pies cúbicos de gas por día, aproximadamente, lo cual corresponde al 80 % de la producción del país. Debido a la importancia económica que representan las plataformas marinas en nuestra nación, es necesario intensificar la modernización para que el nivel de servicio de las mismas sea el óptimo.

Las plataformas marinas tipo "jacket" (fijas) son estructuras a base de elementos reticulares que trabajan en flexocompresión y flexotensión ante las solicitaciones que se les impone a lo largo de su vida útil. Las dificultades en el diseño y construcción de este tipo de estructuras son considerables, particularmente en aquellas localizadas a grandes profundidades y bajo condiciones ambientales severas. Estas estructuras están compuestas por miembros tubulares por lo que presentan flexibilidad ante excitaciones dinámicas. Una plataforma marina puede estar sujeta a una o varias fuerzas que la estructura debe de resistir. Estas fuerzas pueden ser debido al oleaje, viento, corriente marina o sismo. Las fuerzas a considerar en el diseño dependen de la posición geográfica en que se encuentra localizada cada plataforma.

El comportamiento dinámico de las plataformas fijas bajo la acción del oleaje ha sido estudiado por Harleman, Nolan and Honsinger (1963), Gaither and Billington (1964), Billington, Gaither, and Ebner (1966) para el caso de oleaje determinístico; Nath and Harleman (1969), Foster (1967), Malhotra and Penzien (1970) estudiaron el caso de oleaje y viento aleatorio; Penzien, Kaul and Berge (1972) estudiaron los efectos del sismo. Ertas and Lee (1989) consideraron el efecto del oleaje y la corriente marina.

El oleaje representa la carga dinámica más significativa sobre las plataformas marinas en la Sonda de Campeche. Este actúa de manera constante en la superficie del mar y a su vez ejerce una fuerza aplicada en toda la estructura. El oleaje de la superficie del mar se

puede modelar como un proceso aleatorio a fin de considerar las incertidumbres asociadas con las amplitudes, longitudes, periodos y ángulos de fase. Las características de la excitación del oleaje se pueden representar mediante un espectro de oleaje. El espectro de oleaje muestra la distribución de la energía del tren de olas en el dominio de la frecuencia. En el desarrollo de este trabajo se considera únicamente la fuerza debido al oleaje.

El análisis dinámico de plataformas marinas sometidas a oleaje es complejo debido a que las ecuaciones de movimiento son no-lineales y a que el número de grados de libertad del sistema estructural puede ser muy grande. Por ello se han propuesto métodos de análisis aproximados para determinar la respuesta dinámica de la estructura ante el oleaje. Chang y Tung (1989) propusieron simplificar el modelado del oleaje y considerarlo como un proceso aleatorio de banda angosta. En esta simplificación el oleaje se representa como una onda armónica con amplitud y ángulo de fase aleatorios. La ventaja de considerar el oleaje como un proceso de banda angosta radica en que se pueden obtener ciertas expresiones analíticas de la respuesta y en consecuencia reducir el cálculo numérico. Chan y Tung compararon la desviación estándar y los desplazamientos pico esperados de cuatro estructuras marinas en aguas intermedias modelando el oleaje como un proceso de banda angosta, y como un proceso de banda ancha utilizando el espectro de JONSWAP; dichos resultados muestran que se comete un error en el cálculo de la respuesta estructural del orden del 23% al simplificar el oleaje y modelarlo como un proceso de banda angosta. Estos resultados sugieren que para un diseño preliminar de estructuras marinas el oleaje se podría considerar como un proceso de banda angosta.

Esta tesis se relaciona con el estudio del comportamiento dinámico de plataformas de la Sonda de Campeche. El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento dinámico de plataformas típicas de la Sonda de Campeche evaluando su respuesta ante diferentes modelos de oleaje. Se analizará la respuesta ante oleaje aleatorio de banda angosta y

ante oleaje de banda ancha, con el espectro de Pierson-Moskowitz, con el objeto de evaluar la posibilidad de usar el modelo de banda angosta a fin de simplificar el análisis de la respuesta dinámica. Las plataformas marinas se modelarán como sistemas de un grado de libertad y de varios grados de libertad. Se hace esta consideración con el fin de evaluar el efecto de simplificar el modelado estructural de las plataformas y estimar el error que se introduce producto de dicha simplificación en el cálculo de la respuesta. Para llevar a cabo estos objetivos se plantearán las ecuaciones de movimiento que gobiernan los modelos estructurales así como la solución de las mismas y se determinará la respuesta máxima desde un punto de vista probabilístico. Se considerarán modelos de plataformas típicas de Enlace, Producción, Perforación, Recuperación y Habitacional de la Sonda de Campeche.

A continuación, en este capítulo, se presentan en forma resumida la descripción de las características de las olas, la Teoría de Oleaje de Pequeña Amplitud, la evaluación de fuerzas de oleaje mediante la ecuación de Morison y la descripción general de las plataformas marinas utilizadas en este trabajo. En el Capítulo 2 se presentan los modelos estructurales de las plataformas marinas y se deducen las ecuaciones de movimiento considerando oleaje aleatorio de banda angosta. Se resuelven las ecuaciones mediante el método de linealización equivalente y se obtiene la respuesta máxima de modelos de un grado de libertad y de varios grados de libertad. En el caso de varios grados de libertad se considera solamente el primer modo de vibrar, lo cual implica una simplificación del problema estructural. En el Capítulo 3 se trata el problema de la plataforma marina sometida a oleaje aleatorio de banda ancha aplicando el espectro de oleaje de Pierson-Moskowitz. Se consideran los casos de modelos de uno y de varios grados de libertad.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados de los análisis de la respuesta estructural de modelos de uno y de varios grados de libertad de las plataformas marinas en estudio. Se

analizan los casos de oleaje de banda angosta y de banda ancha (espectro de Pierson-Moskowitz) y se discute la influencia de la masa y rigidez en el comportamiento dinámico de las plataformas. Finalmente, en el Capítulo 5, se presentan las conclusiones y recomendaciones surgidas de este trabajo.

1.1 Fundamentos teóricos del oleaje

Las olas pueden ser producidas por ciertos disturbios artificiales sobre la superficie del mar como barcos en movimiento o explosiones; o bien por disturbios naturales como sismos o vientos. Las olas creadas por sismos u otros disturbios tectónicos en el fondo del mar son conocidas como Tsunamis. La longitud y el periodo de este tipo de olas pueden viajar a través de océanos enteros con grandes velocidades. Los Tsunamis causan grandes daños, la ventaja es que ocurren rara vez. El viento produce las olas que tienen mayor influencia en el diseño de puertos y de estructuras marinas. Por otro lado, las fuerzas gravitacionales de la luna, del sol y de otros cuerpos astronómicos forman las mareas, que son olas de grandes longitudes. El intervalo en que varía la elevación de las mareas es grande y depende de la localización geográfica.

Como se puede ver en la naturaleza, raramente se encuentran cuerpos de agua abiertos a la atmósfera que no tengan oleaje en su superficie. Estos oleajes son una manifestación de fuerzas actuantes en la superficie del fluido, que tiende a deformarse por la acción del disturbio y a equilibrarse debido a la acción de la gravedad y la tensión superficial. Dependiendo de la magnitud de las fuerzas actuantes en el fluido, el oleaje puede presentarse en diversos tamaños y formas este, determina la cantidad de energía y esta, a su vez es un parámetro importante para el diseño de estructuras marinas, con el fin de resistir severas tormentas sin dañarse.

A pesar de que en algunas ocasiones el oleaje se idealiza como una sucesión de olas regulares (funciones senoidales), el oleaje real raramente muestra regularidad y no siempre se propaga en la misma dirección. Por ejemplo, si colocamos un aparato para medir el oleaje en una plataforma en medio del mar, obtendremos un registro del oleaje semejante al de la Figura 1. 1.

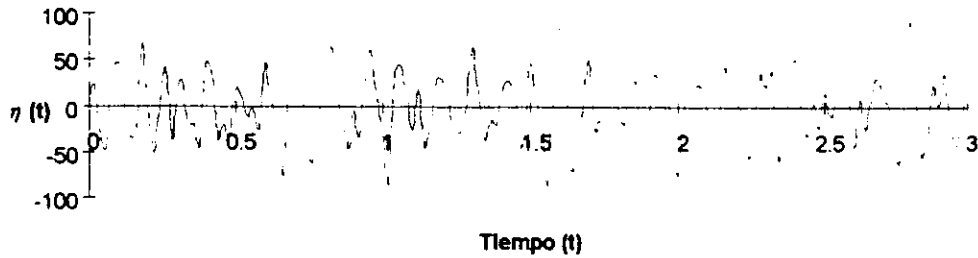


Figura 1. 1 Ejemplo de un registro de oleaje.

donde η es el desplazamiento vertical de la superficie del agua, relativo al nivel medio, el cual esta en función de la dirección de la propagación del oleaje x y del tiempo t . El oleaje irregular se puede ver como una superposición de numerosas funciones senoidales con diferentes amplitudes y fases. Con la ayuda del análisis de Fourier y técnicas espectrales se puede describir el oleaje a través de una sumatoria de funciones senoidales (ver Figura 1. 2).

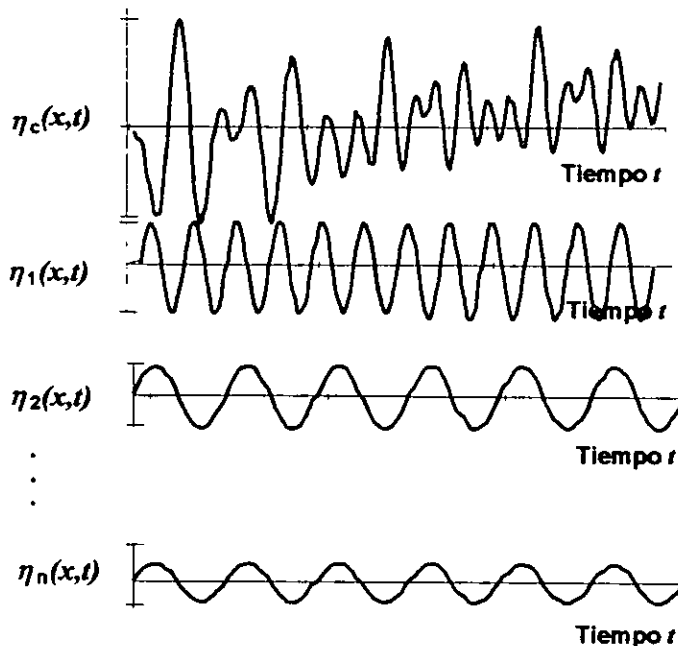


Figura 1. 2 La forma de la ola resulta de la suma de varias funciones senoidales.

Los parámetros más importantes para describir el oleaje regular son la longitud de la ola, la altura de la ola y la profundidad del agua en el cual se están propagando. Otros

parámetros, como velocidades y aceleraciones de las partículas de agua debidas al oleaje, se pueden determinar teóricamente a partir de los parámetros básicos mencionados anteriormente. En la Figura 1. 3, se esquematizan los principales parámetros de la ola.

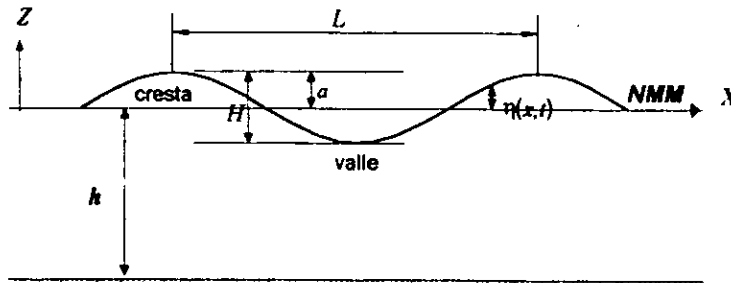


Figura 1. 3 Parámetros característicos de la ola.

En la figura 2.2.3, L es la longitud de la ola, o sea la distancia horizontal entre dos crestas o dos valles de ola sucesivos, h es la profundidad del agua, a es la amplitud de la ola, H es la altura de ola y η describe el perfil de la ola. El origen de los ejes coordenados que se utilizan generalmente para describir el movimiento del oleaje se localizan en el nivel medio del mar *NMM*. El fondo marino se encontrará a una profundidad $z = -h$.

La profundidad del agua tiene un efecto sobre las características de la ola. Las olas de aguas profundas son las que ocurren en aguas que tienen una profundidad mayor que la mitad de la longitud de onda L ($h > L/2$). A tales profundidades, el fondo no tiene una influencia significativa en el movimiento de las partículas de agua. Las olas de aguas someras se presentan a una profundidad menor que $1/20$ de la longitud de onda L ($h < L/20$). La influencia del fondo afecta la dirección del oleaje, y este fenómeno se le conoce como refracción.

Las olas rompen cuando la velocidad horizontal de las partículas de la cresta excede la velocidad de propagación de la onda misma. Esto ocurre normalmente cuando la altura de la ola H excede aproximadamente el 80% de la profundidad. En otras palabras, la ola rompe donde la profundidad es aproximadamente igual a $1.25 H$. La ola puede romper en aguas más profundas, dependiendo de la influencia local del viento.

1.2 Teoría de Pequeña Amplitud de Airy

Desde el siglo pasado se han desarrollado varias teorías para tratar de describir las características y el comportamiento del oleaje, que en la mayoría de los casos es de forma irregular y aleatorio. Con estas teorías este fenómeno se analiza matemáticamente.

La teoría más simple es la desarrollada por Airy en 1854, la cual también se le ha llamado " *Teoría lineal o de pequeña amplitud* ". Los méritos que tiene esta teoría es que describe bastante bien el comportamiento de las olas cuando se encuentran a grandes profundidades y su utilización no es tan complicada.

Para poder desarrollar esta teoría, Airy estableció las siguientes hipótesis:

- a) El fluido es homogéneo e incompresible.
- b) Se desprecia la tensión superficial.
- c) Se desprecia el efecto de Coriolis.
- d) La presión en la superficie es uniforme y constante.
- e) El fluido es ideal.
- f) El fondo es horizontal, fijo e impermeable, $w=0$.
- g) $H \ll h$ y $H = \text{constante}$.
- h) Las ondas son bidimensionales (X, Z) .

1.2.1. Velocidad y aceleraciones locales de un fluido

Con las hipótesis descritas anteriormente y considerando las teorías de oleaje finito tomando en cuenta la velocidad potencial $\phi(x, z, t)$, ver ecuación (1. 1), se determina la componente vertical de la velocidad y aceleración de las partículas del fluido, por definición están dadas por: $\dot{u} = -\partial\phi / \partial x$ y $\ddot{u} = \partial\dot{u} / \partial t$ respectivamente.

La velocidad potencial, la ecuación de Laplace y la ecuación dinámica de Bernoulli y junto con las condiciones de frontera establecen la base teórica para la determinación de las mismas. La aplicación de estas dos componentes de velocidad y aceleración locales del fluido para valores de x , z y t durante paso de una ola, contribuye a la obtención de la fuerza de oleaje (se explica en el siguiente inciso) aplicada a un elemento estructural que se encuentra sumergido en el fluido. La componente horizontal \dot{u} y la componente vertical \dot{w} de la velocidad local del fluido están dadas por las siguientes ecuaciones

$$\phi = -\frac{H}{2} \omega \frac{\cosh k'[h+z]}{\cosh k'h} \text{sen}(k'x - \omega t) \quad (1.1)$$

$$\dot{u} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{H}{2} \omega \frac{\cosh k'[h+z]}{\sinh k'h} \cos(k'x - \omega t) \quad (1.2)$$

$$\dot{w} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{H}{2} \omega \frac{\sinh k'[h+z]}{\cosh k'h} \text{sen}(k'x - \omega t) \quad (1.3)$$

donde $H/2$ representa la amplitud de la ola, ω es la frecuencia de la ola y k' es el número de la ola representado por

$$k' = 2\pi / L \quad (1.4)$$

La longitud de la ola, L , esta dada por

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (1.5)$$

La relación de dispersión, ω_o^2 es

$$\omega_o^2 = gk' \tanh k'h \quad (1.6)$$

La velocidad horizontal máxima ocurre cuando $k'x - \omega t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$, etc, esto ocurre cuando las partículas de la superficie del agua, η , se encuentran en la cresta o en el valle de una ola progresiva. Por otro lado, la velocidad vertical máxima ocurre cuando $k'x - \omega t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$, quiere decir que las partículas de la superficie del agua están sobre el nivel medio del mar o sea el desplazamiento es cero (ver Figura 1. 4).

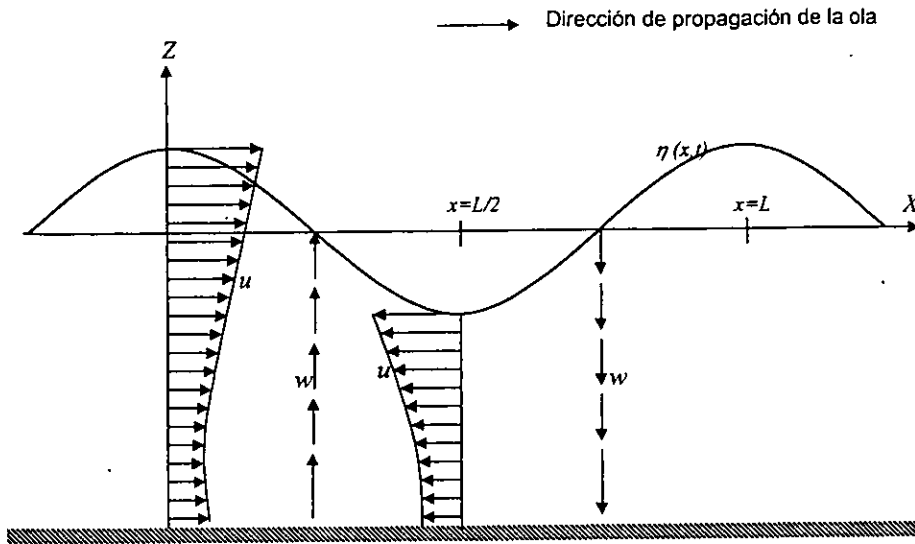


Figura 1. 4 Velocidad de las partículas del agua en una ola progresiva.

La aceleración local de las partículas del fluido se determina derivando las ecuaciones (1.

2) y (1. 3) tenemos

$$\ddot{u}_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{H}{2} \omega^2 \frac{\cosh k'[h+z]}{\sinh k'h} \text{sen}(k'x - \omega t) \quad (1.7)$$

$$\ddot{w}_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{H}{2} \omega^2 \frac{\sinh k'[h+z]}{\sinh k'h} \cos(k'x - \omega t) \quad (1.8)$$

1.3 Ecuación de Morison

La ecuación de Morison está en función de la fuerza de inercia y la fuerzas de arrastre las cuales en el campo del oleaje ambas fuerzas ocurren y varían continuamente con el tiempo. Morison y al. (1950) propusieron la siguiente ecuación para la fuerza de oleaje dF , la cual esta en función de la fuerza de inercia df_i , y la fuerza de arrastre df_d .

$$dF = dF_d + dF_i \quad (1.9)$$

Para determinar la fuerza total en una sección circular vertical, la fuerza por unidad de longitud debe integrarse sobre la longitud sumergida de la sección circular (ver Figura 1.5),

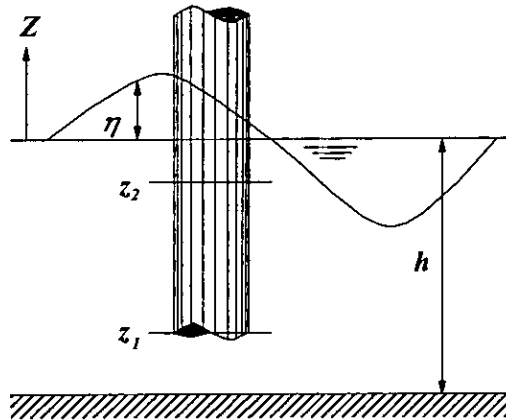


Figura 1.5 Límites de integración en un cilindro sumergido.

donde consideraremos la fuerza F en la porción (z_1, z_2) que son los límites de la integral

$$F = \int_{z_1}^{z_2} dF \quad (1.10)$$

donde la fuerza de inercia está dada por

$$F_i(t) = \rho V \ddot{v} + \rho(C_m - 1)V(\ddot{v} - \ddot{u}) \quad (1.11)$$

$$F_d(t) = \frac{1}{2} \rho C_d A_p \{(\dot{v} - \dot{u})|\dot{v} - \dot{u}|\}$$

donde \ddot{v}, \dot{v}, v representan la aceleración, velocidad y desplazamiento de las partículas del agua; ρ es la densidad del agua; V es el volumen de cilindro equivalente de la estructura el cual es función de un diámetro equivalente, D_e ; A_p es el área proyectada o área hidráulica del tubo equivalente de la estructura; C_m es el coeficiente de inercia y C_d es el coeficiente de arrastre, estos varían con respecto a la longitud de la sección circular, por lo que en general la función no se puede integrar analíticamente.

Utilizando la teoría lineal (Airy) en la ecuación (1. 11), se considera que C_d y C_m son constantes y únicamente tomaremos en cuenta la aceleración local.

$$F(t) = \rho V \ddot{v} + \rho(C_m - 1)V(\ddot{v} - \ddot{u}) + \frac{1}{2} \rho C_d A_p \{(\dot{v} - \dot{u})|\dot{v} - \dot{u}|\} \quad (1. 12)$$

La ecuación (1. 12) representa la fuerza de oleaje en la sección circular.

1.4 Descripción General de una Plataforma Marina Fija

Un sistema de explotación marino se define como el conjunto de equipos necesarios para producir, procesar y transportar hidrocarburos que se localizan en mantos petrolíferos cuya extensión total o parcial queda comprendida bajo las aguas del océano.

Diversos tipos de sistemas marinos de explotación han sido propuestos, sin embargo de dichos sistemas son fijos, propiamente conocidos como Plataformas Marinas y de ellos se mencionan dos grupos principales:

A) Los construidos a base de acero y que son el principal objetivo de nuestro estudio, cuya parte característica es la subestructura (jacket) que proporciona la rigidez requerida ante las cargas laterales y sirve de guía para el hincado de pilotes, los cuales transmiten las cargas al terreno y soportan a la superestructura formada con marcos de acero. Las plataformas marinas tipo "jacket" (fijas) son estructuras a base de elementos reticulares que trabajan en flexocompresión y flexotensión ante las solicitaciones que se les impone a lo largo de su vida útil. Estas instalaciones están formadas por tres componentes estructurales principales:

- i) Superestructura
- ii) Subestructura (jacket)
- iii) Infraestructura (Pilotes de sustentación, cimentación)

También cuentan con elementos no estructurales, como son los paquetes que integran el equipo de la plataforma y accesorios. Están formados generalmente de varios ejes longitudinales y transversales y el número de estos depende del tipo de estructuración, ya sea octápodo (ocho columnas), tetrápodo (cuatro columnas), tripode (tres columnas), etc., según sean los requerimientos de la Plataforma. La subestructura (que es el componente de la instalación que queda bajo el agua) tiene la función entre otras de guiar durante el hincado a los pilotes, estos se realiza a través de las piernas de la misma, las cuales son

tubos de gran diámetro. La subestructura es un sistema estructural muy eficiente para resistir las fuerzas de oleaje, ya que ofrece poca área expuesta por la forma circular de sus secciones que hacen mínimos los empujes de las olas; proporcionando rigidez ante cargas laterales. Los pilotes sobresalen de la subestructura para recibir a la superestructura. El sistema transmite directamente las cargas verticales al terreno por medio de los pilotes, los que además absorben los momentos de volteo y cortantes debidos a las cargas horizontales.

La superestructura típica está formada generalmente por dos niveles estructurales a base de vigas soldadas de alma llena con el fin de contar con el mayor espacio para la instalación de equipo y tuberías. El sistema constructivo implica la fabricación en tierra de la subestructura y las cubiertas completas, las que son transportadas en barcasas y montadas en el lugar de la instalación.

B) Los construidos por concreto (gravedad), que equilibran las cargas laterales por el solo efecto de gravedad y que transmiten las cargas al subsuelo a través de una base muy amplia, sobre la que se desplantan las columnas que soportan a la superestructura.

Dentro de la clasificación de sistemas fijos, construidos a base de acero (plataformas fijas tipo jacket) se mencionan las siguientes, de acuerdo a su función:

1) *Plataformas de perforación*

Estas plataformas son utilizadas para la perforación de pozos y la extracción de crudo de los yacimientos marinos. Existen octápodos y tetrápodos que se utilizan dependiendo de la importancia del manto y del número de pozos a perforar. En general los tetrápodos sirven de apoyo en labores de perforación a estructuras más grandes dentro del mismo complejo. Las plataformas de perforación son las más importantes dentro del esquema de los sistemas de explotación, ya que a partir de ellas se generan otro tipo de plataformas para el proceso del crudo y los recursos para subsanarlas. Es por ello que estas

plataformas son las primeras en construirse dentro de cualquier complejo petrolero. Las plataformas de perforación se caracterizan por tener una zona de ductos verticales de extracción de crudo (conductores) cuyo producto es regulado y enviado a plataformas de enlace o de producción.

2) *Plataformas de Enlace*

Como su nombre lo indica, estas plataformas sirven de enlace entre las diferentes plataformas perforadoras y productoras. Su función es recibir el crudo vía ductos y enviarlo por el mismo medio a las plataformas de producción para la separación y transporte subsecuente a terminales en tierra o en mar. Estas plataformas generalmente cuentan con una sola cubierta que se apoya sobre 8 piernas.

3) *Plataformas de Producción*

Las plataformas de producción contienen equipos e instalaciones que separan la mezcla de petróleo, gas, agua y sedimentos que constituye al crudo recién extraído con el fin de darle un tratamiento preliminar para después poder transportarlo (petróleo, gas), quemarlo (gas) o reinyectarlo al suelo (agua, sedimentos).

Dependiendo de la capacidad de manejo y separación de crudo, estas plataformas se subdividen en productoras tempranas y productora permanentes. Su clasificación influye en el espacio requerido de cubiertas: la de producción temprana consta regularmente de 2 cubiertas soportadas por 8 columnas. Por su parte, las productoras permanentes instaladas a la fecha, tienen 3 cubiertas. Estas cubiertas están apoyadas sobre 12 columnas.

4) *Plataformas de apoyo intermedio*

Cuando los claros a librar con puentes son muy grandes, resulta necesario contar un apoyo intermedio a dicho claro. Así, esta es la única función de estas plataformas y sólo cuentan con una cubierta a una elevación que depende de la que tengan los puntos a unir. Esta cubierta está apoyada en la mayoría de los casos en 3 columnas. En otros de los casos, muy pocos, constan de 4 columnas.

5) *Plataformas quemador*

Estas plataformas sólo soportan un puente de comunicación que lleva una línea hacia el quemador, una torre para quemador y el quemador del gas excedente que no puede ser aprovechado, producto de la separación de éste con el crudo. Están constituidas por una cubierta soportada por 3 columnas. No cuentan con ningún tipo de equipo.

Es común que una plataforma desarrolle dos o más funciones de las anteriores descritas o que al paso del tiempo cambie su uso. Cuando esto sucede se le da el nombre de plataforma mixta o de servicios múltiples.

6) *Plataformas de compresión de gas*

Estas plataformas soportan equipo de compresión para presurizar al gas proveniente de las plataformas productoras y enviarlo a las terminales en tierra a través de los gasoductos submarinos. También se realizan procesos de purificación para evitar corrosión en las tuberías. Estas plataformas cuentan con 2 cubiertas apoyadas sobre 8 columnas.

7) *Plataformas de rebombeo*

Esta estructura soporta turbobombas para impulsar el crudo a través de los oleogasoductos submarinos y hacerlo llegar a las terminales de destino. Constan de 2 cubiertas por 8 columnas.

8) *Plataformas de inyección*

La misión de estas plataformas es la de perforar pozos para inyectar agua presurizada a los estratos productores de crudo cuya producción ha sido mermada y así incrementar el rendimiento de otros pozos. Estas plataformas tienen cubiertas y capacidades de perforación prácticamente idénticas a las de las plataformas de perforación.

9) *Plataformas habitacionales*

Las plataformas habitacionales soportan módulos de vivienda únicamente, con diferentes capacidades y están instaladas dentro de los complejos productores. Cuentan con 2 cubiertas apoyadas sobre 8 columnas, aunque también existen algunas apoyadas sobre 4 columnas.

10) *Plataformas de telecomunicaciones*

Estas tienen como objetivo el soportar la torre de telecomunicaciones, el módulo de telecomunicaciones, módulo de radares, y en algunos casos, módulo habitacional y helipuerto. Estas estructuras comúnmente soportan una sola cubierta en 3 piernas, aunque existen también casos con 4 piernas.

11) *Plataformas recuperadoras*

Estas estructuras, también llamadas protectoras de pozos, tienen como función la de proteger a un pozo que se ha perforado con fines exploratorios. En caso de resultar productivo dicho pozo, se procede a la instalación de esta plataforma así como la tubería ascendente y la línea submarina para el envío de los hidrocarburos y, en algunas ocasiones se adicionan más pozos. Cuentan con una sola cubierta y un helipuerto soportados por 3 piernas. Aunque menos comunes, también las hay con 4 piernas.

Capítulo 2

Respuesta Estructural ante oleaje de banda angosta

2.1 Oleaje Aleatorio

El oleaje de la superficie del mar se puede modelar como un proceso aleatorio para tomar en cuenta las incertidumbres asociadas con las amplitudes, longitudes, períodos y ángulos de fase. Supongamos que la elevación de la superficie libre del mar $\eta(t)$ se modela como un proceso estacionario de banda angosta, homogéneo, gaussiano, y con media cero, de la siguiente manera:

$$\eta(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (2.1)$$

donde ω_0 es la frecuencia de la ola. La amplitud A y el ángulo de fase ϕ son variables aleatorias estadísticamente independientes; ϕ tiene una distribución uniforme entre 0 y 2π .

La frecuencia de la ola está dada por:

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_p} \quad (2.2)$$

donde T_p es el periodo pico, el cual se puede calcular aproximadamente como

$$T_p = \sqrt{13H_s} \quad (2.3)$$

donde H_s es la altura de la ola significativa que representa la media del tercio superior de las alturas de ola. Sustituyendo (2.3) en (2.2)

$$\omega_o = \frac{2\pi}{\sqrt{13H_s}} \quad (2.4)$$

La relación que existe entre altura de ola significativa y altura de ola máxima es

$$H_s = 1.72H_{max} \quad (2.5)$$

Por definición, la función de autocorrelación de $\eta(t)$ es

$$R_{\eta\eta}(\tau) = E[\eta(t)\eta(t + \tau)] \quad (2.6)$$

En el caso de procesos de banda angosta como $\eta(t)$, la función de autocorrelación es igual a

$$R_{\eta\eta}(\tau) = \frac{\sigma_A^2}{2} \cos(\omega_o \tau) \quad (2.7)$$

donde σ_A es la desviación estándar de la amplitud A . La varianza del perfil de la ola, σ_η^2 , se obtiene de la función de autocorrelación haciendo $\tau=0$,

$$R_{\eta\eta}(0) = \frac{\sigma_A^2}{2} = \sigma_\eta^2 \quad (2.8)$$

La desviación estándar del perfil de la ola se puede expresar en función de la altura de la ola significativa, H_s (ver deducción en el Apéndice 1).

$$H_s = 4\sigma_\eta \quad (2.9)$$

Sustituyendo la ecuación(2.8) en (2.9) se obtiene que

$$\sigma_A = \frac{\sqrt{2}H_s}{4} \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) permite asignar valores a σ_A en el modelo de banda-angosta si se conoce la altura de ola significativa en una cierta zona marina.

Las componentes horizontales de la velocidad y aceleración de las partículas del fluido se obtiene según se muestra en el Capítulo 1 suponiendo olas pequeñas, por lo que se considera la teoría de "Pequeña amplitud o de Airy",

$$\dot{v}(t) = A\omega_n \frac{\cosh k'[h+z]}{\sinh k'h} \cos(k'x - \omega_0 t + \phi) \quad (2.11)$$

$$\ddot{v}(t) = A\omega_n^2 \frac{\cosh k'[h+z]}{\sinh k'h} \sin(k'x - \omega_0 t + \phi) \quad (2.12)$$

donde \dot{v}, \ddot{v} representan la aceleración y velocidad de las partículas del agua; g es la aceleración de la gravedad; h es la profundidad del agua; z y x son la posición del eje vertical y la posición del eje horizontal donde se requiere obtener la aceleración y velocidad de las partículas del agua, y k' es el número de ola.

$$\omega_n^2 = gk' \tanh k'h \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) representa la relación de dispersión. Sustituyendo (2.13) en las ecuaciones (2.11), (2.12) y considerando $x=0$, por simplicidad tenemos

$$\dot{v}(t) = \frac{Agk' \cosh k'[h+z]}{\omega_n \cosh k'h} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.14)$$

$$\ddot{v}(t) = \frac{-Agk' \cosh k'[h+z]}{\cosh k'h} \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (2.15)$$

La velocidad y aceleración de las partículas de la ola con respecto al nivel medio del mar, ($z=0$) se pueden escribir como,

$$\dot{v}(t) = A\alpha \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.16)$$

$$\ddot{v}(t) = -\omega_o A \alpha \text{sen}(\omega_o t + \phi) \quad (2. 17)$$

donde

$$\alpha = \frac{gk'}{\omega_o} \quad (2. 18)$$

2.2 Respuesta dinámica de sistemas de un grado de libertad.

La ecuación de movimiento de un sistema estructural de un grado de libertad es:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \quad (2. 19)$$

donde \ddot{u}, \dot{u}, u representan la aceleración, velocidad y desplazamiento de la estructura, respectivamente; m es la masa de la estructura; c y k son el coeficiente de amortiguamiento de la estructura y la rigidez lateral de la estructura, y $F(t)$ representa la fuerza de oleaje que resulta de las fuerzas de arrastre y de inercia. Para el cálculo de la masa se considera el peso propio de la estructura (tanto la subestructura, que es la parte de la estructura que se ubica del nivel medio de mar hacia el fondo marino, como de la superestructura, que es la parte de la estructura que se ubica arriba del nivel medio del mar y aloja el equipo de proceso de la plataforma), el peso de equipos, la carga viva, el peso de conductores (ductos verticales de extracción de crudo para el caso de plataformas de perforación, el peso del crecimiento marino (fauna marina que se adhiere a los elementos estructurales sumergidos) y el peso del agua que se encuentra en el interior de los pilotes, las piernas y los conductores.

De acuerdo con la ecuación de Morison, la fuerza de oleaje está dada por la siguiente ecuación:

$$F(t) = \rho V \ddot{v} + \rho(C_m - 1)V(\ddot{v} - \ddot{u}) + \frac{1}{2} \rho C_d A_p \{(\dot{v} - \dot{u})\dot{v} - \dot{u}\} \quad (2.20)$$

donde \ddot{v}, \dot{v}, v representan la aceleración, velocidad y desplazamiento de las partículas del agua; ρ es la densidad del agua; V es el volumen de cilindro equivalente de la estructura el cual es función de un diámetro equivalente, D_e ; A_p es el área proyectada o área hidráulica del tubo equivalente de la estructura; C_m es el coeficiente de inercia y C_d es el coeficiente de arrastre. Sea r la respuesta relativa definida como la diferencia entre el desplazamiento de las partículas del fluido, v , y el desplazamiento de la estructura, u .

$$r = v - u \quad (2.21)$$

El uso de esta relación simplifica el procedimiento de solución del problema. Sustituyendo (2.21) en (2.19) y (2.20) tenemos:

$$m(\ddot{v} - \ddot{r}) + c(\dot{v} - \dot{r}) + k(v - r) = F(t) \quad (2.22)$$

$$F(t) = \rho V \ddot{v} + \rho(C_m - 1)V(\ddot{r}) + \frac{1}{2} \rho C_d A_p \{\dot{r}|\dot{r}\} \quad (2.23)$$

Desarrollando las ecuaciones (2.22) y (2.23), e igualando términos se obtiene

$$m\ddot{v} - \rho V \ddot{v} + c\dot{v} + kv = m\ddot{r} + \rho(C_m - 1)V(\ddot{r}) + \frac{1}{2} \rho C_d A_p \{\dot{r}|\dot{r}\} + c\dot{r} + kr \quad (2.24)$$

Definiendo los parámetros

$$M_s = m + C_M \quad (2.25)$$

$$C_M = \rho(C_m - 1)V$$

$$C_D = \frac{1}{2} \rho C_d A_p$$

$$M = m - \rho V$$

La ecuación (2.24) se reduce a

$$M_s \ddot{r} + c\dot{r} + C_D \dot{r}|\dot{r}| + kr = M\ddot{v} + c\dot{v} + kv \quad (2.26)$$

2.2.1 Linealización Estocástica Equivalente

La ecuación (2. 26) es una ecuación diferencial estocástica no lineal. Un posible método de solución de este tipo de ecuaciones es el de linealización equivalente. El método fue desarrollado inicialmente por Krylov y Bogoliubov (1947) para la solución de problemas de sistemas no lineales bajo excitaciones determinísticas. Posteriormente Booton (1954), Caughey (1963) y Crandall (1963) consideraron problemas de oscilaciones aleatorias. Métodos para resolver problemas no lineales de sistemas de un grado de libertad fueron desarrollados luego por Lin (1967). El método consiste en reemplazar el sistema no lineal por uno lineal con parámetros equivalentes que se seleccionan de manera de minimizar el error que se origina al resolver el problema equivalente. La ecuación lineal equivalente de (2. 26) es

$$M_S \ddot{r} + \bar{c} \dot{r} + kr = M\ddot{v} + c\dot{v} + kv \tag{2. 27}$$

donde \bar{c} es un parámetro de amortiguamiento equivalente y el error e está dado por

$$e = (c - \bar{c})\dot{r} + C_D \dot{r}|\dot{r}| \tag{2. 28}$$

El parámetro \bar{c} se selecciona de manera que la media cuadrada del error $E[e^2]$ sea mínima, es decir se satisface que

$$\frac{\partial E[e^2]}{\partial \bar{c}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 E[e^2]}{\partial \bar{c}^2} > 0 \tag{2. 29}$$

Usando la ecuación (2. 28) obtenemos la media cuadrada del error

$$E[e^2] = (c - \bar{c})^2 E[\dot{r}^2] + 2(c - \bar{c})C_D E[\dot{r}^2|\dot{r}|] + C_D^2 E[(\dot{r}|\dot{r}|)^2] \tag{2. 30}$$

y entonces

$$\frac{\partial E[e^2]}{\partial \bar{c}} = (-c + \bar{c})E[\dot{r}^2] - C_D E[\dot{r}^2|\dot{r}|] = 0 \tag{2. 31}$$

Despejando \bar{c} de la ecuación (2. 31) se tiene que

$$\bar{c} = c + C_D \frac{E[\dot{r}^2, \dot{r}]}{E[\dot{r}^2]} \quad (2.32)$$

La segunda derivada del error es

$$\frac{\partial^2 E[e^2]}{\partial \bar{c}^2} = 2E[\dot{r}^2] > 0 \quad (2.33)$$

y por lo tanto \bar{c} en (2.32) garantiza que $E[e^2]$ es un mínimo. Se minimiza con respecto al amortiguamiento ya que es el término de la ecuación de movimiento que contiene el término \dot{r} . Supongamos que se trata de procesos estacionarios y gaussianos. Se puede demostrar que $E[\dot{r}] = 0$ (ver Apéndice 2). La varianza de \dot{r} es entonces

$$\sigma_{\dot{r}}^2 = E[\dot{r}^2] \quad (2.34)$$

La función densidad de probabilidad de \dot{r} es

$$P(\dot{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{r}}} \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\sigma_{\dot{r}}^2}\right) \quad (2.35)$$

Por definición, el valor esperado de $\dot{r}|\dot{r}|$ está dado por

$$E[\dot{r}^2|\dot{r}|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{r}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{r}^2|\dot{r}| \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\sigma_{\dot{r}}^2}\right) d\dot{r} \quad (2.36)$$

La ecuación (2.36) se puede reescribir como

$$E[\dot{r}^2|\dot{r}|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{r}}} \left\{ \int_0^{\infty} \dot{r}^3 \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\sigma_{\dot{r}}^2}\right) d\dot{r} + \int_{-\infty}^0 -\dot{r}^3 \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\sigma_{\dot{r}}^2}\right) d\dot{r} \right\} \quad (2.37)$$

En el Apéndice 3 se muestra la solución de la integral de la ecuación (2.37) obteniéndose que

$$E[\dot{r}^2|\dot{r}|] = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{\dot{r}}^3 \quad (2.38)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2. 34) y (2. 38) en (2. 32),

$$\bar{c} = c + C_D \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_r \quad (2. 39)$$

El amortiguamiento "equivalente" \bar{c} en (2. 39) es función del amortiguamiento de la estructura, de el coeficiente de arrastre y de la varianza de la velocidad de respuesta relativa, σ_r , la cual es una incógnita.

Haciendo el cambio de variable de la ecuación (2. 21) en (2. 27)

$$M_S(\ddot{v} - \ddot{u}) + \bar{c}(\dot{v} - \dot{u}) + k(v - u) = M\ddot{v} + c\dot{v} + kv \quad (2. 40)$$

desarrollando y factorizando términos semejantes tenemos

$$M_S\ddot{u} + \bar{c}\dot{u} + ku = C_{mv}\ddot{v} + \hat{c}\dot{v} \quad (2. 41)$$

Donde

$$C_{mv} = \rho C_m V \quad (2. 42)$$

$$\hat{c} = C_D \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_r$$

o también

$$M_S\ddot{u} + \bar{c}\dot{u} + ku = F_e(t) \quad (2. 43)$$

donde

$$F_e(t) = C_{mv}\ddot{v} + \hat{c}\dot{v} \quad (2. 44)$$

La ec (2. 41) representa la ecuación de movimiento del sistema de un grado de libertad linealizado y (2. 44) es la fuerza equivalente de oleaje.

2.2.2 Determinación de la función de transferencia

Una vez conocida la ecuación de movimiento de la estructura, se puede obtener la función de transferencia entre excitación y respuesta del sistema. Si consideramos que la excitación es armónica, digamos

$$F(t) = e^{i\omega t} \quad (2.45)$$

La solución de la ecuación de movimiento es de la forma

$$u(t) = H(\omega)e^{i\omega t} \quad (2.46)$$

Sustituyendo (2.45) y (2.46) en (2.43)

$$-\omega^2 M_s H(\omega)e^{i\omega t} + i\omega \bar{c} H(\omega)e^{i\omega t} + kH(\omega)e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \quad (2.47)$$

de donde se obtiene que

$$H(\omega) = \frac{1}{M_s \left[\left(\frac{k}{M_s} - \omega^2 \right) + i\omega \left(\frac{\bar{c}}{M_s} \right) \right]} \quad (2.48)$$

Usando la ecuación (2.25)

$$\frac{k}{M_s} = \frac{k}{m + \rho(C_m - 1)V} = \frac{k}{m + C_M} = \omega_m^2 \quad (2.49)$$

donde

$$\frac{k}{M_s} = \omega_m^2 \quad (2.50)$$

es la frecuencia natural modificada del sistema. La rigidez de la estructura en la ecuación (2.49) se puede escribir como

$$\frac{k}{m} = \omega_m^2 + \omega_m^2 \frac{C_M}{m} \quad (2.51)$$

Sea ω_n la frecuencia natural de la estructura

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (2.52)$$

Sustituyendo (2.52) en (2.51) podemos escribir la frecuencia de la estructura en función de la frecuencia modificada.

$$\omega_n = \omega_m \sqrt{1 + \frac{C_M}{m}} \quad (2.53)$$

De la misma manera, para el término asociado con el amortiguamiento en el denominador de la ecuación (2.48), podemos obtener la siguiente relación

$$\frac{\bar{c}}{M_s} = 2\zeta_m \omega_m (1 + \gamma \sigma_i) \quad (2.54)$$

donde

$$\gamma = \frac{C_D}{c} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \quad (2.55)$$

y ζ_m es el porcentaje de amortiguamiento modificado de la estructura,

$$2\zeta_m \omega_m = \frac{c}{M + C_M} \quad (2.56)$$

Despejando c de la ecuación (2.56)

$$\frac{c}{m} = 2\zeta_m \omega_m + 2\zeta_m \omega_m \frac{C_M}{m} \quad (2.57)$$

Sea ζ el coeficiente de amortiguamiento crítico del sistema

$$\frac{c}{m} = 2\zeta \omega_n \quad (2.58)$$

Sustituyendo la ecuación (2.58) en (2.57)

$$\zeta \omega_n = \zeta_m \omega_m \left(1 + \frac{C_M}{m}\right) \quad (2.59)$$

Usando (2. 53) en (2. 59) podemos escribir el porcentaje de amortiguamiento en función del porcentaje de amortiguamiento modificado.

$$\zeta = \zeta_m \sqrt{1 + \frac{C_M}{m}} \tag{2. 60}$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (2. 50) y (2. 54) en (2. 48), la función de transferencia queda de la siguiente manera:

$$H(\omega) = \frac{1}{M_S \left[(\omega_m^2 - \omega_n^2) + i\omega_n (2\zeta_m \omega_m (1 + \gamma\sigma_r)) \right]} \tag{2. 61}$$

Esta ecuación es una función compleja, que depende de la frecuencia natural de la estructura, ω_n , de la frecuencia modificada, ω_m , del amortiguamiento modificado, ζ_m , de la masa equivalente, M_S y de la varianza de la velocidad de respuesta relativa σ_r , que es una incógnita a determinar (ver Apéndice 4).

2.2.3 Predicción de la Respuesta Máxima de un sistema de un grado de libertad

Para caracterizar la respuesta es necesario determinar su función de densidad espectral, $S_{uu}(\omega)$. En general,

$$S_{uu}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{FF}(\omega) \tag{2. 62}$$

donde $|H(\omega)|$ es la norma de la función de transferencia (ecuación (2. 61)) y $S_{FF}(\omega)$ es la densidad espectral de la excitación. Según la ecuación de la velocidad de las partículas del fluido (ecuación (2. 16))

$$\dot{v}(t) = A\alpha \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{2. 16}$$

La función de autocorrelación de \dot{v} es por lo tanto igual a

$$R_{\ddot{v}}(\tau) = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \quad (2.63)$$

donde

$$\alpha = \frac{gk'}{\omega_0} \quad (2.64)$$

La función de densidad espectral de \dot{v} se calcula como la transformada de Fourier de $R(\tau)$ dada en (2.63).

$$S_{\dot{v}}(\omega) = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (2.65)$$

donde δ es la delta de Dirac. En el Apéndice 5 se muestra que si

$$F(t) = C_{mv} \ddot{v} + \hat{c} \dot{v} \quad (2.66)$$

entonces la función de densidad espectral de la excitación es igual a

$$S_{FF}(\omega) = (a^2 \omega^2 + b^2) \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (2.67)$$

Sustituyendo la ecuación (2.67) en (2.62) obtenemos la función de densidad espectral de la respuesta

$$S_{uu}(\omega) = |H(\omega)|^2 (a^2 \omega^2 + b^2) \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (2.68)$$

La varianza de la respuesta se obtiene de

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(\omega) d\omega \quad (2.69)$$

Sustituyendo (2.68) en (2.69)

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} |H(\omega_0)|^2 (a^2 \omega_0^2 + b^2) \quad (2.70)$$

La varianza de la derivada de la respuesta está dada por

$$\sigma_{\dot{u}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{uu}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(\omega)|^2 S_{FF}(\omega) d\omega = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} |H(\omega_o)|^2 (a^2 \omega_o^2 + b^2) \omega_o^2 \quad (2.71)$$

La tasa de cruces con pendiente positiva por cero es

$$v^+(0) = \frac{\omega_a}{2\pi} \quad (2.72)$$

y la frecuencia aparente, ω_a , es entonces igual a la frecuencia de la excitación

$$\omega_a = \frac{\sigma_{\dot{u}}}{\sigma_u} = \omega_o \quad (2.73)$$

La respuesta máxima media se puede calcular con las siguientes ecuaciones

$$E[u_{max}] = K \sigma_u \quad (2.74)$$

$$K = \sqrt{2 \ln(v^+(0)D)} + \frac{0.5227}{\sqrt{2 \ln(v^+(0)D)}} \quad (2.75)$$

donde K es el factor pico y D es la duración de la excitación de análisis. Sustituyendo la ecuación (2.70) en (2.74) obtenemos que

$$E[u_{max}] = K \frac{\sigma_A \alpha}{\sqrt{2}} |H(\omega_o)| \sqrt{a^2 \omega_o^2 + b^2} \quad (2.76)$$

donde

$$H(\omega_o) = \frac{1}{M_s [(\omega_m^2 - \omega_o^2) + i \omega_o (2\zeta_m \omega_m (1 + \gamma \sigma_r))]} \quad (2.77)$$

Para la solución del problema es necesario determinar el valor de σ_r según se muestra en el Apéndice 4. El procedimiento de solución para obtener σ_r es el siguiente:

1. Se considera la frecuencia inicial de excitación como nula o sea $\omega_o=0$ con el fin de obtener un primer valor de $\sigma_{r,1}$.
2. Con el valor inicial de la varianza de la velocidad de respuesta relativa, σ_r , se calcula el nuevo valor de σ_r , (ver ecuación en el Apéndice 4):

$$\sigma_r^2 = \sigma_v^2 + \sigma_u^2 - 2E[\dot{v}u]$$

3. El procedimiento se resuelve de manera iterativa hasta que en el ciclo n el valor de $\sigma_r(n)$ sea igual a $\sigma_r(n-1)$.

2.3. Respuesta dinámica de sistemas de varios grados de libertad considerando el primer modo de vibrar

Consideremos un modelo idealizado de una plataforma marina como un sistema de varios grados de libertad tal como se muestra en la Figura 2. 1

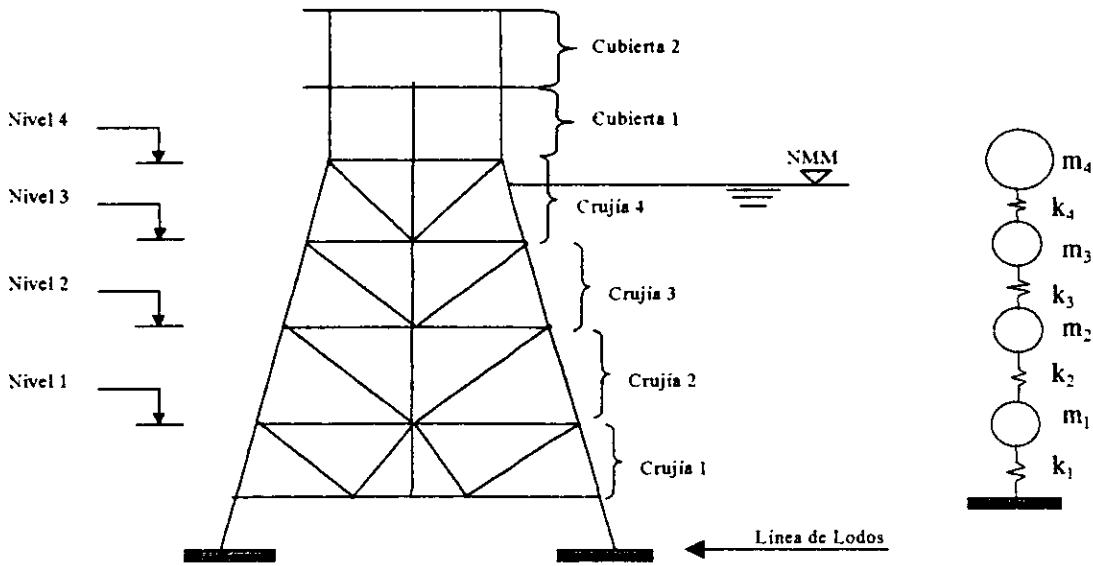


Figura 2. 1 Representación de una plataforma en un sistema de varios grados de libertad.

En este modelo sólo se considera el "jacket" o "subestructura" de la plataforma que consiste de las crujeas y las cubiertas. Se consideran como grados de libertad los desplazamientos horizontales de los niveles formados por las crujeas. Las masas asociadas con cada grado de libertad corresponden a la masa de la mitad de la cruja inferior más aquella de la mitad de la cruja superior. La masa del nivel 4 se considera como la suma de las masas de las cubiertas de la superestructura más la mitad de la masa de la última cruja. La rigidez lateral también se le puede llamar rigidez de entrepiso correspondiente a cada cruja (ver Figura 2. 1) y se puede determinar estáticamente aplicando la siguiente ecuación:

$$k = \frac{F}{d} \tag{2. 78}$$

donde F es la fuerza aplicada a la estructura en el punto de trabajo. Este último es el punto de unión de la subestructura y superestructura. Con la fuerza F , en un análisis estático, se produce un desplazamiento relativo, d , para cada grado de libertad. En la base el modelo estructural se supone empotrado ya que no se consideran efectos de interacción suelo-estructura.

La ecuación dinámica del sistema de "n" grados de libertad puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{F(t)\} \quad (2.79)$$

donde $\{\ddot{u}\}, \{\dot{u}\}, \{u\}$ son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento de la estructura, respectivamente; $[m], [c], [k]$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez lateral de la estructura, respectivamente, y $\{F(t)\}$ representa el vector de fuerzas de oleaje correspondiente a cada grado de libertad. De acuerdo con la ecuación de Morison (ver Capítulo 1), la fuerza de oleaje está dada por la siguiente ecuación:

$$\{F(t)\} = \rho[V]\{\ddot{v}\} + \rho(C_m - 1)[V]\{(\ddot{v} - \ddot{u})\} + \frac{1}{2}\rho C_d [A_p]\{(\dot{v} - \dot{u})|\dot{v} - \dot{u}|\} \quad (2.80)$$

donde $\{\ddot{v}\}, \{\dot{v}\}, \{v\}$ son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento de las partículas del fluido correspondientes a los grados de libertad; $[V]$ es la matriz de volumen de cilindro equivalente de la estructura el cual es función de un diámetro equivalente, D_e ; $[A_p]$ es la matriz de área proyectada para cada grado de libertad; C_m es el coeficiente de inercia y C_d es el coeficiente de arrastre. Consideremos el vector $\{r\}$ de respuesta relativa

$$\{r\} = \{v\} - \{u\} \quad (2.81)$$

Sustituyendo (2.80) en (2.79) y simplificando se tiene

$$[M_s]\{\ddot{r}\} + [c]\{\dot{r}\} + [C_D]\{\dot{r}|\dot{r}|\} + [k]\{r\} = [M]\{\ddot{v}\} + [c]\{\dot{v}\} + [k]\{v\} \quad (2.82)$$

donde

$$\begin{aligned}
 [M_s] &= [m] + [C_M] & (2.83) \\
 [C_M] &= \rho(C_m - 1)[V] \\
 [C_D] &= \frac{1}{2} \rho C_d [A_p] \\
 [M] &= [m] - \rho[V]
 \end{aligned}$$

2.3.1. Linealización Estocástica Equivalente

Bajo la hipótesis de oleaje aleatorio, la ecuación (2. 82) es una ecuación diferencial estocástica no lineal. Un posible método de solución es el de linealización equivalente. Como sabemos, el método consiste en reemplazar el sistema no lineal por uno lineal con parámetros equivalentes que se seleccionan de manera de minimizar el error que se origina al resolver el problema equivalente. Se seguirá el mismo procedimiento que el empleado para el análisis de sistemas de un grado de libertad. La ecuación lineal equivalente de (2. 82) es

$$[M_s] \{\ddot{r}\} + [\bar{c}] \{\dot{r}\} + [k] \{r\} = [M] \{\ddot{v}\} + [c] \{\dot{v}\} + [k] \{v\} \quad (2.84)$$

donde la matriz de amortiguamiento equivalente $[\bar{c}]$ tiene como elementos

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & i \neq j \\ \bar{c}_{ij} & i = j \end{cases} \quad (2.85)$$

\bar{c}_{ij} es un parámetro de amortiguamiento equivalente y el error e está dado por

$$e_j = (c_{jj} - \bar{c}_{jj}) \dot{r}_j + C_{D_{jj}} \dot{r}_j | \dot{r}_j |, \quad j=1,2,\dots, n \quad (2.86)$$

El parámetro \bar{c}_{jj} se selecciona de manera que la media cuadrada del error $E[e_j^2]$ sea mínima; entonces

$$\frac{\partial E[e_j^2]}{\partial \bar{c}_{jj}} = (-c_{jj} + \bar{c}_{jj})E[\dot{r}_j^2] - C_{D_{jj}}E[\dot{r}_j^2 \dot{r}_j] = 0 \quad (2.87)$$

Despejando \bar{c}_{jj} de la ecuación (2.87) se tiene que

$$\bar{c}_{jj} = c_{jj} + C_{D_{jj}} \frac{E[\dot{r}_j^2 \dot{r}_j]}{E[\dot{r}_j^2]} \quad (2.88)$$

La segunda derivada del error es

$$\frac{\partial^2 E[e_j^2]}{\partial \bar{c}^2} = 2E[\dot{r}_j^2] > 0 \quad (2.89)$$

y por lo tanto \bar{c}_{jj} en (2.88) garantiza que $E[e_j^2]$ es un mínimo. Supongamos que se trata de procesos estacionarios y gaussianos donde $E[\dot{r}_j] = 0$; la varianza de \dot{r} es entonces

$$\sigma_{\dot{r}_j}^2 = E[\dot{r}_j^2] \quad (2.90)$$

Por definición, el valor esperado de $\dot{r}_j \dot{r}_j$ está dado por

$$E[\dot{r}_j^2 \dot{r}_j] = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{\dot{r}_j}^3 \quad (2.91)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.90) y (2.91) en (2.88)

$$\bar{c}_{jj} = c_{jj} + C_{D_{jj}} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{\dot{r}_j} \quad (2.92)$$

Haciendo el cambio de variable de la ecuación (2.81) en (2.84) se obtiene

$$[M_S]\{\ddot{v}\} - \{\ddot{u}\} + [\bar{c}]\{\dot{v}\} - \{\dot{u}\} + [k]\{v\} - \{u\} = [M]\{\ddot{v}\} + [c]\{\dot{v}\} + [k]\{v\} \quad (2.93)$$

Desarrollando y factorizando términos semejantes tenemos que

$$[M_S]\{\ddot{u}\} + [\bar{c}]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{F_e\} \quad (2.94)$$

donde

$$\{F_e\} = [C_{mv}]\{\ddot{v}\} + [\hat{c}]\{\dot{v}\} \quad (2.95)$$

$$[C_{mv}] = \rho C_m [V] \quad (2.96)$$

$$[\bar{c}] - [c] = [C_D] \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{i_j} \quad (2.97)$$

$$[\hat{c}] = [C_D] \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{i_j} \quad (2.98)$$

La ecuación (2.94) representa la ecuación de movimiento del sistema de varios grados de libertad linealizado; (2.95) es el vector de fuerza de oleaje equivalente correspondiente a cada grado de libertad; (2.96) y (2.98) son matrices diagonales.

2.3.2. Solución de la ecuación de movimiento

El método de superposición modal se aplica para la solución de la ecuación diferencial de movimiento linealizada, (2.94), del sistema de varios grados de libertad. La respuesta de la estructura se puede escribir como

$$\{u\} = [\Phi]\{y\} \quad (2.99)$$

donde $\{u\}$ es el vector de desplazamiento de la estructura, $\{y\}$ es el vector de coordenadas generalizadas y $[\Phi]$ es la matriz modal. Las frecuencias naturales y formas modales de vibración de un sistema de varios grados de libertad obtienen resolviendo el problema característico,

$$[k_e][\phi] = [M_s][\phi][\omega_n^2] \quad (2.100)$$

donde $[\omega_n^2]$ es la matriz diagonal de todos los eigenvalores ω_n^2 y $[\phi]$ es la matriz cuadrada de todos los eigenvectores. Sustituyendo (2.99) en (2.94) y premultiplicando por $[\Phi]^T$, la ecuación de movimiento puede expresarse como sigue

$$[M_s^*]\{\ddot{y}\} + [c_o]\{\dot{y}\} + [k^*]\{y\} = \{F^*\} \quad (2.101)$$

donde $[M_s^*]$, $[c_o]$, $[k^*]$ son las matrices generalizadas de masa, amortiguamiento y rigidez, $\{F^*\}$ es el vector de fuerza generalizada del fluido,

$$[M_s^*] = [\phi]^T [M_s] [\phi] \tag{2. 102}$$

$$[c_o] = [\phi]^T [\bar{c}] [\phi] \tag{2. 103}$$

$$[k^*] = [\phi]^T [k] [\phi] \tag{2. 104}$$

$$\{F^*\} = [\phi]^T \{F_e\} \tag{2. 105}$$

Dada las propiedades de ortogonalidad de los modos, la matriz de masa generalizada y la matriz de rigidez generalizada son matrices diagonales. En cambio la matriz de amortiguamiento $[c_o]$ no es una matriz diagonal. El procedimiento para obtener una matriz de amortiguamiento diagonal, $[c^*]$, es el siguiente:

$$[c_o] \{\dot{y}\} = [c^*] \{\dot{y}\} + \{e'\} \tag{2. 106}$$

donde $\{e'\}$ es el vector error. Los elementos en la diagonal de $[c^*]$, c_{ij}^* se obtienen minimizando la media cuadrática del error.

$$\frac{\partial E[e_j'^2]}{\partial c_{ij}^*} = 2E \left[\left(\sum_{k=1}^n c_{o,k} \dot{y}_k - c_{ij}^* \dot{y}_j \right) (-\dot{y}_j) \right] = 0 \tag{2. 107}$$

Despejando c_{ij}^* se obtiene que

$$c_{ij}^* = \sum_{k=1}^n c_{o,k} \frac{E[\dot{y}_j \dot{y}_k]}{E[\dot{y}_j^2]} \tag{2. 108}$$

Se considerará solamente el primer modo de vibrar de la plataforma, lo cual implica una simplificación del problema estructural. Sin embargo, la consideración de los primeros modos de vibrar en plataformas tipo jacket sometidas a oleaje permite obtener buenos resultados en el análisis estructural (Song C. Wu, 1976). La respuesta de la estructura se aproxima entonces como

$$\{u\} = \phi y \tag{2. 109}$$

La ecuación de movimiento queda entonces de la siguiente manera

$$M_S^* \ddot{y} + c_o \dot{y} + k^* y = F^* \tag{2. 110}$$

donde

$$M_S^* = \phi^T [M_S] \phi \tag{2. 111}$$

$$c_o = \phi^T [\bar{c}] \phi \tag{2. 112}$$

$$k^* = \phi^T [k] \phi \tag{2. 113}$$

$$F^* = \phi^T \{F_e\} \tag{2. 114}$$

Nótese que en este caso la ecuación (2. 108) se reduce a que

$$c_{11}^* = \sum_{j=1}^n c_{o_{jj}} \frac{E[\dot{y}_j \dot{y}_j]}{E[\dot{y}_j^2]} = c_{o_1} \tag{2. 115}$$

La matriz $[\bar{c}]$ para el cálculo de c_{o_1} , en (2. 112) está dada por (ver ecuación (2. 92))

$$[\bar{c}] = [c] + C_D \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{r_j} \tag{2. 116}$$

donde $[c]$ es la matriz de amortiguamiento de la estructura y el segundo término es una matriz diagonal que depende del coeficiente de arrastre y de la desviación estándar de la velocidad de respuesta relativa, σ_{r_j} , correspondiente a cada grado de libertad, la cual es una incógnita a determinar (ver Apéndice 4).

Finalmente, la ecuación de movimiento para el sistema de varios grados de libertad considerando el primer modo de vibrar es

$$M_S^* \ddot{y} + c^* \dot{y} + k^* y = F^* \tag{2. 117}$$

La ecuación lineal desacoplada puede escribirse como

$$\ddot{y} + 2\zeta^* \omega^* \dot{y} + \omega^{*2} y = \frac{F^*}{M_s^*} \quad (2.118)$$

donde ω^* y ζ^* representan la frecuencia y coeficiente de amortiguamiento crítico del primer modo respectivamente,

$$\omega^{*2} = \frac{k^*}{M_s^*} \quad (2.119)$$

$$\zeta^* = \frac{c^*}{2M_s^* \omega^*} \quad (2.120)$$

La ecuación de movimiento del sistema de varios grados de libertad se simplifica y convierte en la de un sistema de un grado de libertad.

Se puede obtener a continuación la función de transferencia entre la excitación y la respuesta del sistema. Si consideramos que la excitación es armónica, digamos

$$F^*(t) = e^{i\alpha t} \quad (2.121)$$

La solución de la ecuación de movimiento es de la forma

$$y(t) = H(\omega)e^{i\alpha t} \quad (2.122)$$

Sustituyendo (2.121) y (2.122) en (2.118)

$$-\omega^2 M_s^* H(\omega)e^{i\alpha t} + i\omega \bar{c}^* H(\omega)e^{i\alpha t} + k^* H(\omega)e^{i\alpha t} = e^{i\alpha t} \quad (2.123)$$

de donde se obtiene que

$$H(\omega) = \frac{1}{M_s^* \left[(\omega^{*2} - \omega^2) + i\omega(2\zeta^* \omega^*) \right]} \quad (2.124)$$

Como se observa en (2.124), la función de transferencia depende de la frecuencia, amortiguamiento y masa del primer modo.

2.3.3. Predicción de Respuestas Máximas

La función de densidad espectral de la respuesta modal, considerando el primer modo de vibrar, está dada por

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{F^*F^*}(\omega) \quad (2.125)$$

donde $|H(\omega)|$ es la norma de la función de transferencia (ecuación (2.124)) y $S_{F^*F^*}(\omega)$

es la densidad espectral de la excitación F^* en (2.114). Según la ecuación (2.16), la velocidad de las partículas del fluido asociadas con los grados de libertad i y j son

$$\dot{v}_i(t) = A\alpha_i \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.126)$$

$$\dot{v}_j(t + \tau) = A\alpha_j \cos(\omega_0(t + \tau) + \phi) \quad (2.127)$$

La función de correlación cruzada entre de \dot{v}_i y \dot{v}_j es por lo tanto igual a

$$R_{\dot{v}_i \dot{v}_j}(\tau) = \frac{\sigma_A^2 \alpha_i \alpha_j}{2} \cos(\omega_0 \tau) \quad (2.128)$$

donde

$$\alpha_i = \frac{gk' \cosh k'[h + z_i]}{\omega_0 \cosh k'h}, \quad \alpha_j = \frac{gk' \cosh k'[h + z_j]}{\omega_0 \cosh k'h} \quad (2.129)$$

La función de densidad espectral cruzada de \dot{v}_i y \dot{v}_j se calcula como la transformada

de Fourier de $R_{\dot{v}_i \dot{v}_j}(\tau)$ en (2.128)

$$S_{\dot{v}_i \dot{v}_j}(\omega) = \frac{\sigma_A^2 \alpha_i \alpha_j}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (2.130)$$

La excitación del primer modo es igual a (ver Apéndice 5)

$$F^* = \{\phi^T\} \{Fe\} = \{\phi^T\} \{[c_{mv}]\{\ddot{v}\} + [\hat{c}]\{\dot{v}\}\} \quad (2.131)$$

donde $[c_{mv}]$ es la matriz diagonal del coeficiente de inercia cuyo valor no cambia con los grados de libertad; $[\hat{c}]$ es una matriz diagonal que depende del coeficiente de arrastre y de la varianza de la velocidad de respuesta relativa $\sigma_{r,i}$ correspondiente a cada grado de libertad, (ver Apéndice 2). La función de densidad espectral de la excitación del primer modo es igual a

$$S_{F^*F^*}(\omega) = \{\phi^T\} [S_{Fe}(\omega)] \{\phi\} \tag{2. 132}$$

Los elementos de la matriz de función de densidad espectral $[S_{Fe}(\omega)]$ están dados por

$$S_{Feij}(\omega) = (a^2\omega^2 + b_ib_j) \frac{\sigma_A^2 \alpha_i \alpha_j}{4} [\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)] \tag{2. 133}$$

Sustituyendo (2. 132) en (2. 125) se tiene que

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \{\phi^T\} [S_{Fe}(\omega)] \{\phi\} \tag{2. 134}$$

Las varianzas de la respuesta y su primer derivada, para cada grado de libertad (ver ecuación (2. 109), son iguales a

$$\sigma_{u_i}^2 = \phi_i^2 \sigma_y^2 = \phi_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega \tag{2. 135}$$

$$\sigma_{\dot{u}_i}^2 = \omega_o^2 \sigma_{u_i}^2 \tag{2. 136}$$

Y la tasa de cruces por cero con pendiente positiva es

$$v^+(0) = \frac{\omega_a}{2\pi} \tag{2. 137}$$

La frecuencia aparente, ω_a , es entonces igual a la frecuencia del oleaje

$$\omega_a = \frac{\sigma_{\dot{u}_i}}{\sigma_{u_i}} = \omega_o \tag{2. 138}$$

La respuesta máxima media para cada grado de libertad se puede calcular con las siguientes ecuaciones

$$E[u_{max}]_i = K \sigma_{u_i} \quad (2. 139)$$

$$K = \sqrt{2 \ln(v^*(0)D)} + \frac{0.5227}{\sqrt{2 \ln(v^*(0)D)}} \quad (2. 140)$$

donde K es el factor pico y D es la duración equivalente de la excitación de análisis.

Capítulo 3

Respuesta Estructural ante oleaje de banda ancha

3.1 Espectro de Oleaje

El oleaje en el mar aparece regularmente como un confuso y constante cambio de crestas y valles de la ola de la superficie del agua debido a la irregularidad de las formas de la ola y la variabilidad de la dirección de propagación. Estas características de la ola se debe, regularmente, a la combinación de efectos del viento y la interacción de olas individuales. No obstante debido a un gran número de procesos físicos que contribuyen a la variación de la elevación de la superficie del mar, se ha buscado describir probabilísticamente el oleaje basado en teorías de procesos aleatorios y estacionarios.

La teoría de procesos aleatorios es aplicable para determinar la descripción estadística de oleaje irregular unidireccional, tomando en cuenta las siguiente hipótesis:

- 1) El oleaje se considera como un proceso débilmente estacionario, ergódico, gaussiano y media cero.
- 2) La función de densidad espectral es de banda angosta.

- 3) La elevación máxima de las crestas de un registro de oleaje es estadísticamente independiente.
- 4) Las propiedades estadísticas de la ola son homogéneas, o sea que estas son independientes de la posición a considerar.

El primer intento contemporáneo de predicción de las características de las olas aleatorias se debe a los trabajos realizados por Svedrup y Munk durante La Segunda Guerra Mundial, como parte de la preparación del desembarco aliado en las costas de Normandía. Estos trabajos, parte del secreto militar fueron puestos a disposición al público hasta 1947. Un notable adelanto respecto a este tipo de trabajos, fue Bretschneider (1952-1957). Los trabajos de Newman (1953), Pierson (1954) y Pierce (1957) introducen el concepto de representación espectral de las ondas oceánicas en el dominio de la frecuencia. El primer estudio de las propiedades estadísticas de la altura de ola de un registro de oleaje fue realizado por Longuet-Higgins (1952). El enfoque estocástico para ondas aleatorias fue iniciado por St. Denis y Pierson (1953), con el fin de solucionar problemas de ingeniería para evaluar la respuesta de los sistemas marinos. Posteriormente les siguieron Walden (1964) y Hogben y Lumb (1967). Entre los que trabajaron sobre modelos estadísticos y estocásticos fueron Pierson (1955), Borgman (1972) y Battjes (1977).

Con base a las hipótesis mencionadas anteriormente y el parámetro físico del oleaje, como la altura de ola significativa la cual a su vez depende de la velocidad del viento y el "fetch" (longitud de la superficie del agua en la cual el viento sopla), se determina la forma del espectro de oleaje. Los modelos espectrales están basados generalmente en uno o más parámetros. El modelo espectral más común de un solo parámetro es el de Pierson-Moskowitz (1964), en el que utiliza la altura de ola significativa o la velocidad del viento. Entre los modelos de dos parámetros se puede mencionar el de Bretschneider (1969), Scott (1965), ISSC (1964) y ITTC (1966). El espectro JONSWAP (Hasselmann, 1967) y el

espectro TMA (1985) dependen de cinco parámetros, usualmente tres de ellos son constantes.

Pierson y Moskowitz en 1964 estudiaron los espectros de oleaje del Atlántico Norte y desarrollaron una fórmula para representar estados de mar completamente desarrollados, generados por el viento. Es decir el espectro depende de la velocidad del viento no depende del fetch.

Para nuestro caso de estudio, utilizaremos la densidad espectral de Pierson-Moskowitz (1964), representada por

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{(0.0081)g^2}{\omega^5} \exp\left[-1.25\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\right] \quad (3.1)$$

donde ω_0 es la frecuencia de excitación, g es la aceleración de la gravedad. El espectro esta definido sólo de cero a infinito, y el área bajo el espectro define la varianza del perfil de la ola, σ_η^2 . Suponiendo que el perfil de la ola es de la forma

$$\eta(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \phi) \quad (3.2)$$

La función de autocorrelación del perfil de la ola es

$$R_{\eta\eta}(\tau) = \frac{\sigma_A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \quad (3.3)$$

Si τ es igual a cero,

$$\sigma_\eta^2 = \frac{\sigma_A^2}{2} \quad (3.4)$$

donde σ_η^2 representa la varianza del perfil de la ola, que por definición es igual a

$$\sigma_\eta^2 = \int_0^\infty S_{\eta\eta}(\omega) d\omega = m_0 \quad (3.5)$$

y m_0 es el momento de orden cero.

Por otro lado la ecuación de la velocidad de las partículas del fluido es (ver ecuación 2.16)

$$\dot{v}(t) = A\alpha \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (3.6)$$

donde

$$\alpha = \frac{gk'}{\omega_0} \quad (3.7)$$

La función de autocorrelación de \dot{v} es

$$R_{\dot{v}\dot{v}}(\tau) = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \quad (3.8)$$

Sustituyendo la ecuación (3.3) en (3.8)

$$R_{\dot{v}\dot{v}}(\tau) = \alpha^2 R_{\eta\eta}(\tau) \quad (3.9)$$

Si la densidad espectral de la velocidad de las partículas de la ola es

$$S_{\dot{v}\dot{v}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\dot{v}\dot{v}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.10)$$

y la densidad espectral del perfil de la ola es

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta\eta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.11)$$

Sustituyendo la ecuación (3.9) en (3.10)

$$S_{\dot{v}\dot{v}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 R_{\eta\eta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \alpha^2 S_{\eta\eta}(\omega) \quad (3.12)$$

3.2 Predicción de la respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad

Para caracterizar la respuesta es necesario determinar su función de densidad espectral $S_{uu}(\omega)$. En general,

$$S_{uu}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{FF}(\omega) \quad (3.13)$$

donde $|H(\omega)|$ es la norma de la función de transferencia (ver ecuación 2.61), y $S_{FF}(\omega)$ es la densidad espectral de la excitación, según como se muestra en el Apéndice 5 es igual a

$$S_{FF}(\omega) = (a^2\omega + b^2) S_{\ddot{w}}(\omega) \quad (3.14)$$

Sustituyendo la ecuación (3.12) en (3.14) se tiene

$$S_{FF}(\omega) = (a^2\omega^2 + b^2) \alpha^2 S_{\eta\eta}(\omega) \quad (3.15)$$

En (3.15) es la densidad espectral de la excitación. Sustituyendo (3.15) en (3.13)

$$S_{uu}(\omega) = |H(\omega)|^2 (a^2\omega^2 + b^2) \alpha^2 S_{\eta\eta}(\omega) \quad (3.16)$$

La varianza de la respuesta se obtiene de

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(\omega) d\omega \quad (3.17)$$

Sustituyendo (3.16) en (3.17)

$$\sigma_u^2 = (a^2\omega^2 + b^2) \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{\eta\eta}(\omega) d\omega \quad (3.18)$$

La varianza de la derivada de la respuesta está dada por

$$\sigma_{\dot{u}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{uu}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(\omega)|^2 S_{FF}(\omega) d\omega = (a^2\omega_n^2 + b^2) \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(\omega)|^2 S_{\eta\eta}(\omega) d\omega \quad (3.19)$$

La tasa de cruces con pendiente positiva por cero es

$$v^+(0) = \frac{\omega_a}{2\pi} \quad (3.20)$$

y la frecuencia aparente, ω_a , es entonces igual a la frecuencia de la excitación

$$\omega_a = \frac{\sigma_{\dot{u}}}{\sigma_u} = \omega_o \quad (3.21)$$

La respuesta máxima media se puede calcular con las siguientes ecuaciones

$$E[u_{max}] = K\sigma_u \quad (3.22)$$

$$K = \sqrt{2 \ln(v^+(0)D)} + \frac{0.5227}{\sqrt{2 \ln(v^+(0)D)}} \quad (3.23)$$

donde K es el factor pico y D es la duración equivalente de la excitación de análisis. La función de transferencia está dada por

$$H(\omega) = \frac{1}{M_s \left[(\omega_m^2 - \omega^2) + i\omega(2\xi_m \omega_m (1 + \gamma\sigma_r)) \right]} \quad (3.24)$$

Esta ecuación es una función compleja, que depende de la frecuencia modificada, ω_m , del amortiguamiento modificado, ξ_m , de la masa equivalente, M , y de la varianza de la velocidad de respuesta relativa σ_r que es una incógnita a determinar (ver Apéndice 4).

3.3 Predicción de la respuesta máxima de un sistema de n grados de libertad considerando el primer modo de vibrar

La función de densidad espectral de la respuesta modal, considerando el primero modo de vibrar, se tiene

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{F^*F^*}(\omega) \quad (3.25)$$

donde $|H(\omega)|$ es la norma de la función de transferencia y $S_{F^*F^*}(\omega)$ es la densidad espectral de la excitación F^* en (2.114). Según la ecuación de la velocidad de las partículas del fluido (ecuación (2.16)), para el grado de libertad i y j , son

$$\dot{v}_i(t) = A\alpha_i \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (3.26)$$

$$\dot{v}_j(t + \tau) = A\alpha_j \cos(\omega_0(t + \tau) + \phi) \quad (3.27)$$

La función de autocorrelación de \dot{v}_i, \dot{v}_j es por lo tanto igual a

$$R_{\dot{v}_i \dot{v}_j}(\tau) = \frac{\sigma_A^2 \alpha_i \alpha_j}{2} \cos(\omega_0 \tau) \quad (3.28)$$

donde

$$\alpha_i = \frac{gk' \cosh k'[h + z_i]}{\omega_0 \cosh k'h}, \quad \alpha_j = \frac{gk' \cosh k'[h + z_j]}{\omega_0 \cosh k'h} \quad (3.29)$$

Sustituyendo la ecuación (3.3) en (3.28)

$$R_{\dot{v}_i \dot{v}_j}(\tau) = \alpha_i \alpha_j R_{\eta\eta}(\tau) \quad (3.30)$$

La función de densidad espectral de \dot{v}_i, \dot{v}_j se calcula como la transformada de Fourier de

$R(\tau)$ en (3.30)

$$S_{\dot{v}_i \dot{v}_j}(\omega) = \alpha_i \alpha_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta\eta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.31)$$

$$S_{\dot{v}_{ij}}(\omega) = \alpha_i \alpha_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta\eta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.31)$$

En el Apéndice 5 se muestra que si la excitación del primer modo es igual a

$$F_i^* = \{\phi_i^T\} \{F_e\} = \{\phi_i^T\} \{[c_{mv}]\{\dot{v}\} + [\hat{c}]\{v\}\} \quad (3.32)$$

donde $[c_{mv}]$ es la matriz diagonal del coeficiente de inercia y no cambia de valor con respecto a cada grado de libertad; $[\hat{c}]$ es una matriz diagonal que depende del coeficiente de arrastre y de la varianza de la velocidad de respuesta relativa $\sigma_{\dot{v}_i}$ correspondiente a cada grado de libertad, que es una incógnita a determinar (ver Apéndice 4).

La función de densidad espectral de la excitación del primer modo es igual a

$$S_{F^*F^*}(\omega) = \{\phi_i^T\} \{S_{F_e}(\omega)\} \{\phi_i\} \quad (3.33)$$

Cada término de la matriz de la función de densidad espectral $[S_{F_e}(\omega)]$ está dado por

$$S_{F_eij}(\omega) = (a^2 \omega^2 + b_i b_j) \alpha_i \alpha_j S_{\eta\eta}(\omega) \quad (3.34)$$

La varianza de la respuesta modal esta dada por

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega \quad (3.35)$$

Considerando el primer modo, la varianza de la respuesta para cada grado de libertad es

$$\sigma_{u_i}^2 = \phi_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega = \phi_i^2 \sigma_y^2 \quad (3.36)$$

La varianza de la derivada de la respuesta para cada grado de libertad está dada por

$$\sigma_{\dot{u}_i}^2 = \omega_o^2 \sigma_{u_i}^2 \quad (3.37)$$

La tasa de cruces con pendiente positiva por cero es

$$v^+(0) = \frac{\omega_a}{2\pi} \quad (3.38)$$

y la frecuencia aparente, ω_a , es entonces igual a la frecuencia de la excitación

$$\omega_a = \frac{\sigma_{\dot{u}_i}}{\sigma_{u_i}} = \omega_o \quad (3.39)$$

La respuesta máxima media para grado de libertad se puede calcular con las siguientes ecuaciones

$$E[u_{max}]_i = K \sigma_{u_i} \quad (3.40)$$

$$K = \sqrt{2 \ln(v^*(0)D)} + \frac{0.5227}{\sqrt{2 \ln(v^*(0)D)}} \quad (3.41)$$

donde K es el factor pico y D es la duración equivalente de la excitación de análisis.

Capítulo 4

Aplicación

4.1 Idealización estructural: sistemas de un grado de libertad

En este capítulo se considera siete plataformas marinas representativas de la Sonda de Campeche: Enlace, Producción 1, Perforación 1, Perforación 2, Habitacional, Recuperador y Producción 2. La descripción de las características generales del servicio de estos tipos de plataformas se presenta en el Capítulo 1. Las profundidades a las que se encuentran cada una de estas plataformas son: 37.795, 35.966, 42.06, 33.832, 31.00, 45.72 y 33.832 metros, respectivamente. El tamaño y forma de las plataformas varían de acuerdo a su número de piernas. En nuestro caso las plataformas de Enlace, Producción 1, Perforación 1, Perforación 2 y Habitacional son octápodos (8 piernas). Las plataformas Recuperador y Producción 2 son tetrápodos (4 piernas). La selección de estas plataformas se basó en la disponibilidad de información de las propiedades mecánicas y geométricas de cada estructura para su modelación dinámica. Cada plataforma se idealizó como un sistema de un grado de libertad (1GDL).

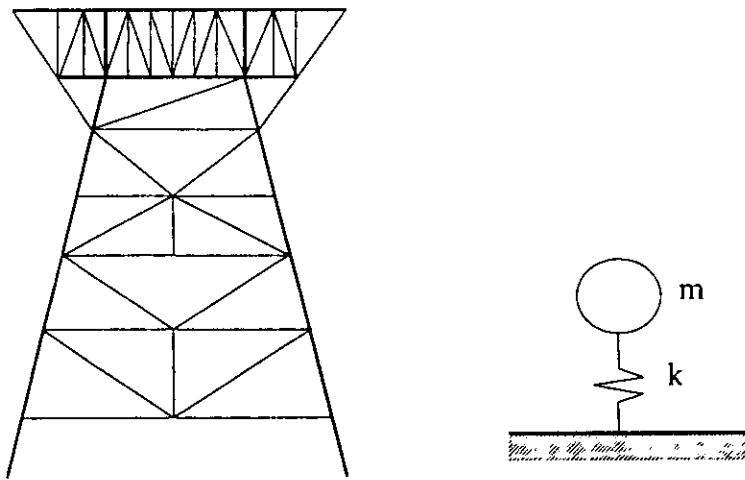


Figura 4. 1 Representación de la plataforma marina en un sistema de un grado de libertad.

Para el cálculo de la masa del 1GDL se consideró el peso propio de la estructura (tanto la subestructura, que es la parte de la estructura que se ubica del nivel medio de mar hacia el fondo marino, como de la superestructura, que es la parte de la estructura que se ubica arriba del nivel medio del mar y aloja el equipo de proceso de la plataforma), el peso de equipos, la carga viva, el peso de conductores (ductos verticales de extracción de crudo) para el caso de plataformas de perforación, el peso del crecimiento marino (fauna marina que se adhiere a los elementos estructurales sumergidos) y el peso del agua que se encuentra en el interior de los pilotes, la piernas y los conductores.

Las propiedades geométricas y mecánicas de cada estructura se obtuvieron del proyecto de "Diseño de Reparación de Daños a Subestructuras de Plataformas de la Región Marina Suroeste por el paso del Huracán Roxanne, Definición de Código Propio para el Diseño y Evaluación de 25 plataformas Book 1 of 3", realizado por la compañía Brown & Root International, Inc. (1997).

La rigidez de estas plataformas se obtuvo estáticamente considerando el desplazamiento máximo en el "Punto de Trabajo" bajo la acción de una fuerza aplicada en dicho punto. El

La rigidez de estas plataformas se obtuvo estáticamente considerando el desplazamiento máximo en el "Punto de Trabajo" bajo la acción de una fuerza aplicada en dicho punto. El "Punto de Trabajo" se define como el punto de intersección de los ejes de pilote, piernas de la subestructura y columnas de la superestructura. Este es un punto singular y puede representar el desplazamiento de la superestructura ya que ésta tiene gran rigidez. La rigidez lateral, k , se calculó como

$$k = \frac{F}{d} \quad (4. 1)$$

donde F es la fuerza aplicada en el punto de trabajo y d es el desplazamiento correspondiente.

La masa de cada una de las plataformas de estudio se muestran en la Tabla 4. 1. Los datos de la rigidez lateral están en función de la dirección de análisis. Se consideró la dirección "X" y la dirección "Y" según se muestra en la Figura 4. 2. Al análisis en la dirección transversal o lado corto (End-on) le corresponde la rigidez en la dirección "Y" (K_y) y a la dirección longitudinal o lado largo (Broadside) le corresponde la rigidez en la dirección "X" (K_x). Los valores de masa y rigidez lateral considerando las plataformas como sistemas de un grado de libertad se muestran en la Tabla 4. 1.

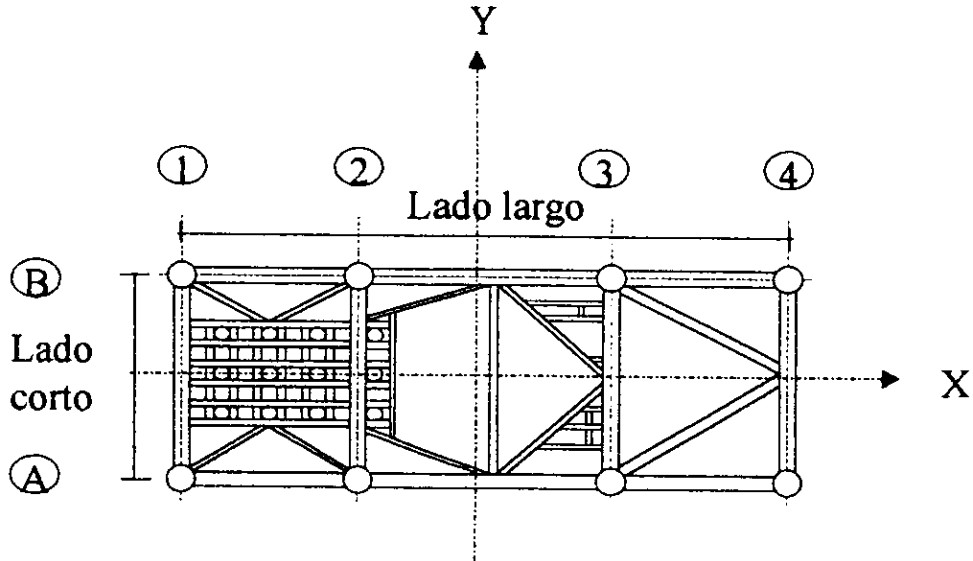


Figura 4. 2 Vista de planta de una plataforma y la dirección de análisis a considerar.

Tabla 4. 1 Características estructurales de las plataformas marinas.

Enlace				
Masa Total Ton*seg ² /m	Desplazamiento m	Fuerza Ton		Rigidez Ton/m
2896.838	0.135	Dirección X	1398.592	10328.774
	0.148	Dirección Y	1641.982	11059.872

Producción 1				
Masa Total Ton*seg ² /m	Desplazamiento m	Fuerza Ton		Rigidez Ton/m
1643.7936	0.216	Dirección X	895.197	4150.746
	0.218	Dirección Y	1004.43	4601.94

Perforación 1				
Masa Total Ton*seg ² /m	Desplazamiento m	Fuerza Ton		Rigidez Ton/m
1061.09	0.391	Dirección X	2500	6393.862
	0.302	Dirección Y	2500	8278.146

Perforación 2				
Masa Total Ton*seg ² /m	Desplazamiento m	Fuerza Ton		Rigidez Ton/m
2955.078	0.178	Dirección X	1116.976	6289.394
	0.144	Dirección Y	1357.415	6289.394

Habitacional				
Masa Total Ton*seg ² /m	Desplazamiento m	Fuerza Ton		Rigidez Ton/m
473.8	0.018	Dirección X	96.70	5329.78
	0.0156	Dirección Y	92.35	5902.217

Recuperador				
Masa Total Ton*seg ² /m	Desplazamiento m	Fuerza Ton		Rigidez Ton/m
783.342	0.300	Dirección X	575.354	1917.526
	0.178	Dirección Y	526.685	2951.693

Producción 2				
Masa Total Ton*seg ² /m	Desplazamiento m	Fuerza Ton		Rigidez Ton/m
1798.3224	0.257	Dirección X	1087.966	4237.144
	0.258	Dirección Y	1258.624	4881.022

4.2 Amortiguamiento

En todas las estructuras, la presencia de fuerzas de amortiguamiento producen una disipación de energía que reduce progresivamente la amplitud de vibración de la misma. La mayor fuente de amortiguamiento en estructuras marinas está dado por el amortiguamiento en la cimentación, el amortiguamiento hidrodinámico y el amortiguamiento estructural.

El amortiguamiento estructural se debe a la fricción interna que existe dentro del material del sistema estructural. Entre los parámetros que afectan la respuesta de la estructura ante cargas dinámicas, el amortiguamiento estructural es uno de los más difíciles de determinar. Las estructuras que se encuentran sumergidas en un fluido tienen la influencia de un amortiguamiento hidrodinámico proveniente del mismo fluido. Este amortiguamiento tiene dos componentes: una que considera los efectos de radiación de la propagación de las ondas del oleaje y la otra que considera los efectos de viscosidad y de la velocidad relativa entre el movimiento estructural y del fluido. El amortiguamiento por radiación generalmente es muy pequeño, en cambio el amortiguamiento debido a los efectos de viscosidad depende del valor de la misma y puede llegar a ser significativo.

El amortiguamiento en la cimentación incluye dos componentes muy importantes. Éstas son: el amortiguamiento histerético y el amortiguamiento geométrico. El amortiguamiento histerético es debido a la acción de cargas dinámicas, su respuesta esfuerzo-deformación se caracteriza por la aparición de ciclos de histéresis. Esto quiere decir que cuando pasa una onda de vibración a través del suelo, el amortiguamiento histerético será una manifestación de la capacidad que tiene el mismo para disipar energía, o sea es la relación entre la energía disipada y la energía almacenada. El amortiguamiento

geométrico o por radiación se considera como la cantidad de energía de la estructura que se pierde a través de la radiación de ondas que se alejan de la cimentación. El amortiguamiento geométrico es equivalente al amortiguamiento por radiación descrito anteriormente.

En la práctica, el amortiguamiento se expresa como una fracción del amortiguamiento crítico viscoso. Ruhl, propuso un intervalo de valores estimados de 1 % a 5 % del amortiguamiento crítico (Shell Oil Co., 1976); este intervalo depende del método de análisis a usar. En el API, RP 2A "Planning, Designing, and Constructing Fixed Offshore Platforms" se considera el 5 % del amortiguamiento crítico para oleaje extremo y 2 % del amortiguamiento crítico para análisis de fatiga, (API, 1984). El valor que se toma en cuenta para el desarrollo de este trabajo es de 3% del amortiguamiento crítico considerando el promedio de los valores anteriormente referidos.

4.3 Parámetros de la Fuerza de Oleaje

Para nuestro caso, el oscilador estará sometido a una fuerza de oleaje que se aplica directamente en la masa concentrada de un sistema de un grado de libertad (1GDL). La fuerza de oleaje es el resultado de la fuerza de arrastre y la fuerza de inercia. De acuerdo con la ecuación de Morison (ver Capítulo 1), la fuerza de oleaje está dada por:

$$F(t) = \rho V \ddot{v} + \rho(C_m - 1)V(\ddot{v} - \ddot{u}) + \frac{1}{2} \rho C_d A_p \{(\dot{v} - \dot{u})\dot{v} - \dot{u}\} \quad (4.2)$$

donde el volumen del cilindro equivalente de la estructura, V , y el área proyectada o área hidráulica del tubo equivalente, A_p , por unidad de longitud, son función del diámetro equivalente, D_e .

$$V = \frac{\pi D_e^2}{4} \quad (4.3)$$

$$A_p = D_e \quad (4.4)$$

Sustituyendo (4.3) y (4.4) en (4.2) se tiene,

$$F(t) = \rho \left(\frac{\pi D_e^2}{4} \right) \ddot{v} + \rho(C_m - 1) \left(\frac{\pi D_e^2}{4} \right) (\ddot{v} - \ddot{u}) + \frac{1}{2} \rho C_d (D_e) \{(\dot{v} - \dot{u})\dot{v} - \dot{u}\} \quad (4.5)$$

Los coeficientes hidrodinámicos C_m y C_d se pueden determinar con base en la experiencia o experimentalmente. Los valores recomendados para el coeficiente de inercia y de arrastre propuestos por Dao and Penzien (1980) son:

$$\begin{aligned} 1.0 &\leq C_d \leq 1.4 \\ 1.5 &\leq C_m \leq 2.0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

La variación de estos valores depende de las irregularidades del oleaje, de la variación en las teorías usadas, del efecto de la superficie libre del agua, del crecimiento marino y de la

rugosidad del objeto en estudio. En el Instructivo de Trabajo para el Análisis Sísmico de Plataformas Marinas Fijas utilizando el programa SACS (Inda y Rodríguez, 1998), según establece la norma para diseño y evaluación de plataformas marinas en la Sonda de Campeche, NRF-003-PEMEX-2000, se proponen coeficientes de arrastre e inercia asociados con una superficie rugosa con valores de 1.05 y 1.2 respectivamente. Estos valores coinciden con los propuestos en el API-RP-2^a (WSD) para un crecimiento marino hasta 64.5 metros bajo el Nivel Medio del Mar. El diámetro equivalente, D_e , se define en la siguiente sección. El agua de mar tiene una densidad $\rho = 0.1025 \text{ ton seg}^2/\text{m}^4$.

4.4 Diámetro Equivalente

En el análisis y diseño de plataformas marinas se cuenta con varias herramientas de trabajo en las cuales se puede modelar en forma detallada cada elemento que conforma a la estructura.

Entre las herramientas de trabajo disponibles se encuentra el programa de análisis estructural MARCS (Marine Structures Computer System; Synercom Technology, Inc. MARCS, 1988). Las teorías de oleaje que utiliza este programa son: Stokes 5to Orden, Airy, Stream Function y Onda Cnoidal.

El SESAM (User manual Preframe, 1996 y User manual Wajac, 1992) es un programa de análisis y diseño estructural con mayores opciones de análisis, tales como simulación de oleaje, análisis de resistencia última y análisis dinámico no lineal. Las teorías de oleaje utilizadas en este programa son: Stokes 5to Orden, Airy y Stream Function.

El TOP-CAT (Template Offshore Platform Capacity Assessment Tools; TOPCAT, V 0.80., Marine Technology and Management Group, University of California, Berkeley, 1999) es un programa de análisis simplificado de cargas laterales de sismo y oleaje sobre la plataforma con el fin de determinar el comportamiento de la estructura. La ventaja que tiene este programa es la aplicación de un modelo muy simplificado de la plataforma. Las teorías de oleaje que se pueden utilizar son: Stokes 5to Orden y Onda Cnoidal.

La elección de la teoría de oleaje a usar para el análisis de una plataforma depende de la profundidad del agua, del periodo y la altura de la ola. En el Shore Protection Manual (1984), se describe gráficamente el régimen de aplicación de cada teoría de oleaje. Para alturas de ola pequeñas la Teoría de Airy y Stokes 5to Orden dan resultados similares, (Dao, 1980).

La teoría de Morison (ver ecuación (4. 5)) permite calcular la fuerza de oleaje de un tubo sumergido en un fluido. Para nuestro caso se requiere que el jacket de las plataformas en estudio se idealice como una sección circular vertical con un diámetro equivalente, de tal manera que la fuerza de oleaje sea igual a la fuerza de oleaje sobre la plataforma real, (ver Figura 4. 3.).

Se utilizó la plataforma de Perforación 3, con el fin de encontrar un intervalo de valores realistas para el diámetro equivalente. Se escogió esta plataforma ya que se contaba con suficiente información para modelar completamente su geometría en el programa de análisis TOP-CAT y obtener la fuerza cortante total por oleaje.

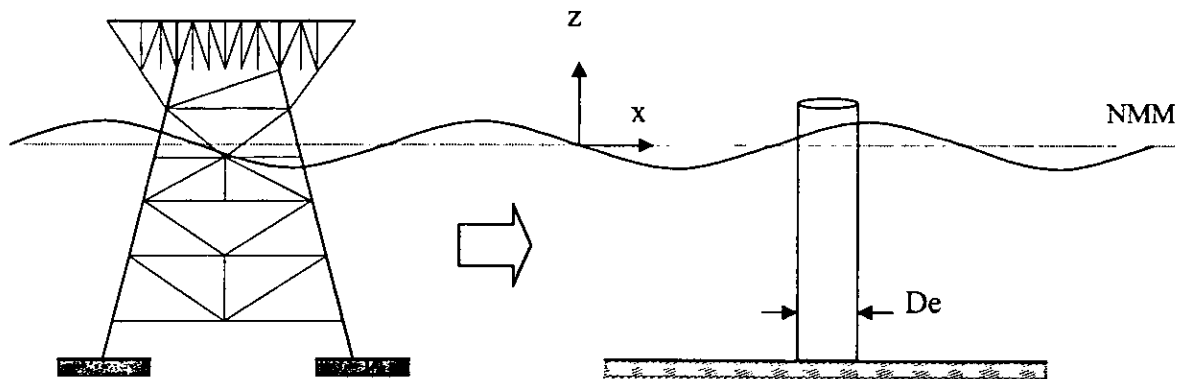


Figura 4. 3 Representación de la plataforma como una sección tubular vertical

Usando el programa TOP-CAT se obtuvo la fuerza de oleaje en la plataforma de Perforación 3 para un intervalo de altura máxima de 1 a 15 metros, ver Figura 4. 4. En este análisis se consideró la teoría de Stokes 5to Orden.

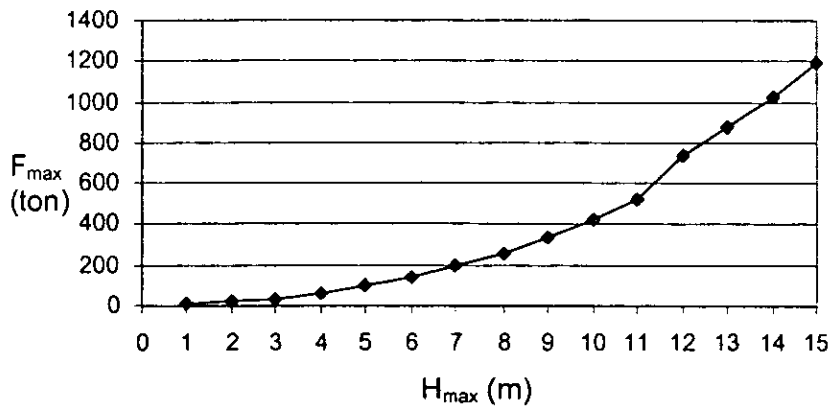


Figura 4. 4 Fuerza máxima de oleaje correspondiente a cada altura de ola utilizando el programa TOP-CAT de la plataforma de Perforación 3.

Con los programas MARCS y SESAM se idealizó la plataforma como una sección circular vertical de diámetros equivalente de 3 a 8 metros considerando alturas de ola máxima de 1 a 15 metros. En estos programas se utilizó la teoría de oleaje de Stokes 5to Orden. Con los diámetros utilizados anteriormente se obtuvo adicionalmente la fuerza de oleaje sobre un cilindro vertical con un diámetro equivalente aplicando la Teoría de Morison y la Teoría lineal de Airy.

En las Figura 4. 5 a la 10 se muestra la comparación de resultados de la fuerza de oleaje en la plataforma con las fuerzas sobre el cilindro equivalente, para diferentes valores de diámetro equivalente. En todos los casos la fuerza de oleaje en el cilindro equivalente calculada con los programas MARCS, SESAM y la teoría de Morison es mayor que la fuerza calculada con el programa TOP-CAT para alturas de ola pequeñas. La representación de la estructura como una sección tubular para alturas de ola pequeñas sobreestima la fuerza aplicada con respecto a la fuerza calculada con el programa TOP-CAT. Conforme se aumenta el diámetro equivalente, la fuerza es mayor debido a que el área expuesta al fluido aumenta. A medida que aumenta la altura de ola la fuerza aplicada a la estructura calculada con MARCS, SESAM y la teoría de Morison, con respecto a la

fuerza calculada con el programa TOP-CAT. La altura de ola a partir de la cual se produce tal sobre estimación es mayor para diámetros equivalentes más grandes. La diferencia de valores de la fuerza resultante y la fuerza "real" de la estructura se debe a que el programa TOP-CAT modela completamente la geometría de la plataforma y los programas MARCS, SESAM y la teoría de Morison modelan a la plataforma como un cilindro vertical.

Se seleccionaron valores del diámetro equivalente entre 4 y 6 metros para los cuales los modelos de cilindro vertical estiman de manera conservadora las fuerzas de oleaje sobre la plataforma para alturas de ola máxima menores que 8 metros o 4.65 m de altura de ola significativa.

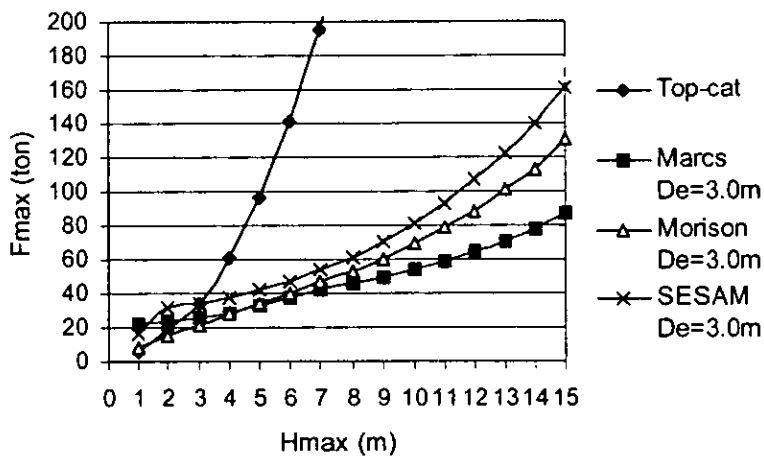


Figura 4. 5 Fuerza máxima de oleaje correspondiente a cada altura de ola utilizando el programa TOP-CAT y los programas MARCS, SESAM y ecuación de Morison para un diámetro equivalente $D_e = 3 \text{ m}$

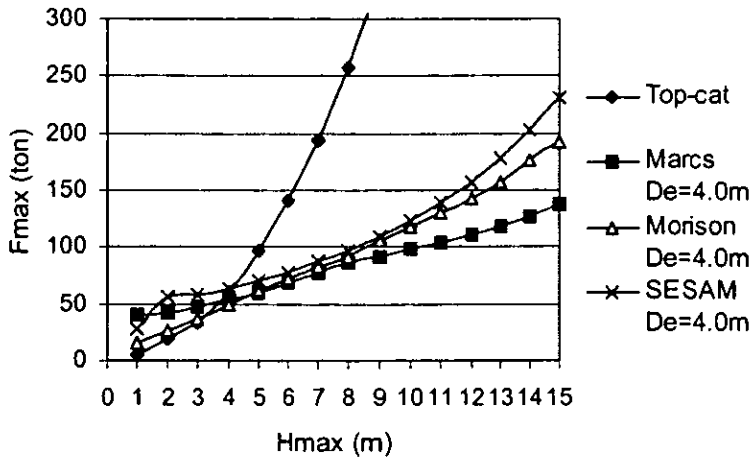


Figura 4. 6 Fuerza máxima de oleaje correspondiente a cada altura de ola utilizando el programa TOP-CAT y los programas MARCS, SESAM y ecuación de Morison para un diámetro equivalente $D_e = 4 \text{ m}$

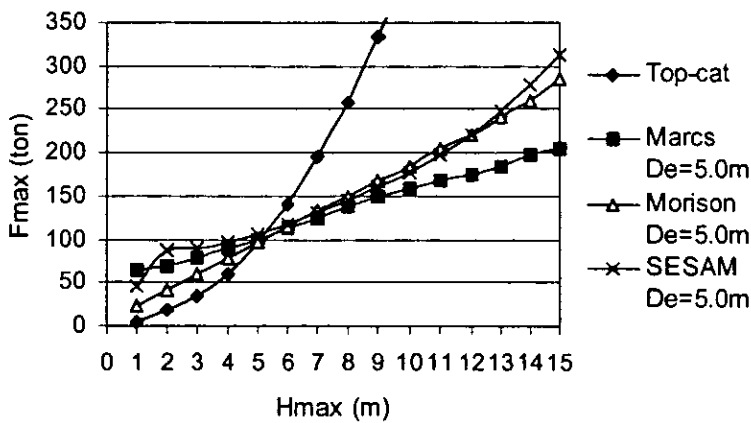


Figura 4. 7 Fuerza máxima de oleaje correspondiente a cada altura de ola utilizando el programa TOP-CAT y los programas MARCS, SESAM y ecuación de Morison para un diámetro equivalente $D_e = 5 \text{ m}$

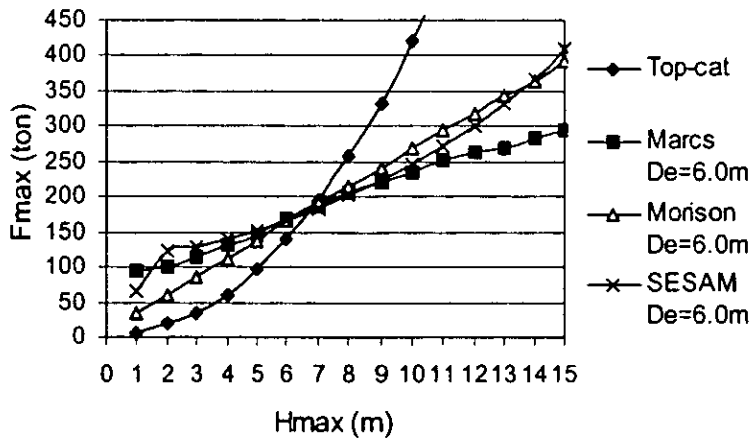


Figura 4. 8 Fuerza máxima de oleaje correspondiente a cada altura de ola utilizando el programa TOP-CAT y los programas MARCS, SESAM y ecuación de Morison para un diámetro equivalente $D_e = 6\text{ m}$

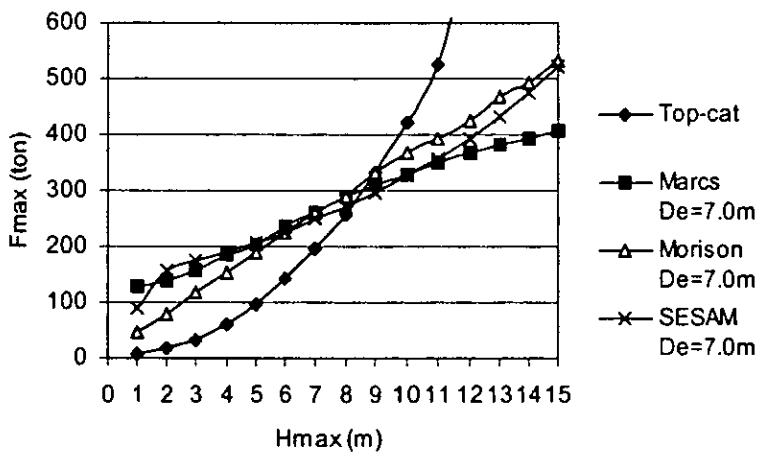


Figura 4. 9 Fuerza máxima de oleaje correspondiente a cada altura de ola utilizando el programa TOP-CAT y los programas MARCS, SESAM y ecuación de Morison para un diámetro equivalente $D_e = 7\text{ m}$

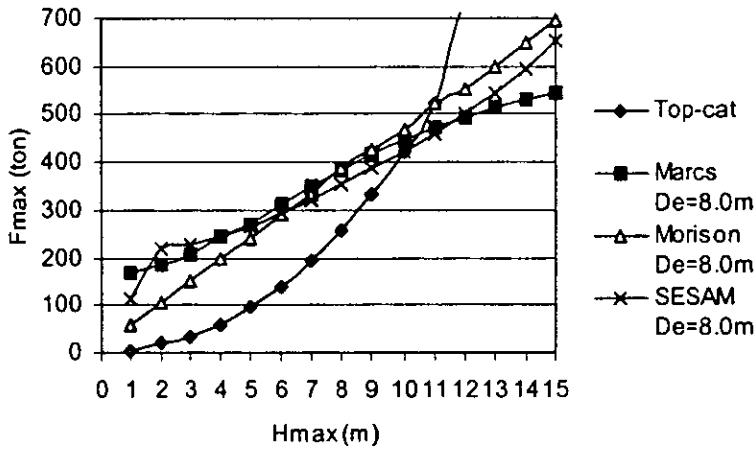


Figura 4. 10 Fuerza máxima de oleaje correspondiente a cada altura de ola utilizando el programa TOP-CAT y los programas MARCS, SESAM y ecuación de Morison para un diámetro equivalente $D_e = 8\text{ m}$

4.5 Espectro de Pierson Moskowitz

La densidad espectral de Pierson-Moskowitz esta representada por (ver ecuación 3.1)

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{(0.0081)g^2}{\omega^5} \exp\left[-1.25\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\right] \tag{4.7}$$

donde ω_0 es la frecuencia de excitación, g es la aceleración de la gravedad con un valor de 9.81 m/s^2 y el valor de 0.0081 es un parámetro adimensional establecido por el autor. Este parámetro depende de la longitud del "feth" y el valor promedio del viento.

4.6 Resultados

A continuación se muestra las gráficas de respuesta máxima de las plataformas antes mencionadas representadas como un sistema de un grado de libertad. La ecuación que determina la respuesta máxima media es

$$E[u_{max}] = K \sigma_u \quad (4.8)$$

$$K = \sqrt{2 \ln(v^*(0))D} + \frac{0.5227}{\sqrt{2 \ln(v^*(0))D}} \quad (4.9)$$

Donde K es el factor pico, D es la duración equivalente de la excitación de análisis, σ_u , es la desviación estandar de la respuesta (desplazamiento) de la estructura y $v^*(0)$ es la tasa de cruces con pendiente positiva por cero. La duración estándar de un registro de oleaje es normalmente de 20 minutos. La duración promedio de una tormenta o Huracán, a su paso por la zona de interés, se estima en 1 hora. En este trabajo se consideró 1 hora (3600 seg) como valor representativo de la duración.

4.6.1. Respuesta Máxima de varias plataformas de un grado de libertad considerando un diámetro equivalente de 4 metros.

Las figuras 4.11 a la 4.13 representan la respuesta máxima de varias plataformas de un grado de libertad considerando la excitación como un proceso de banda angosta, el espectro de Pierson Moskowitz, y un diámetro equivalente $D_e = 4$ metros. En cada caso de estudio presentado en esta tesis se realiza un análisis longitudinal y transversal (direcciones "x" y "y", respectivamente).

En las gráficas siguientes, la altura de ola significativa, H_s , se considera en el eje de ordenadas, con un intervalo de valores de 0.1 y 10 metros a fin de observar la tendencia de la respuesta para alturas de ola grandes. En todo caso, como se observará en las gráficas siguientes, la respuesta máxima (u_{max}) a alturas de ola significativa mayores de 4.65 metros permanece constante en todos los casos. El periodo pico, T_p , del oleaje es función de H_s (ver ecuación Capítulo 2). Por tal motivo se puede representar en el eje de ordenadas T_p ó T con el fin facilitar el análisis de los resultados. Las Tabla 4. 2 y 4.3 muestran los valores de las frecuencias y los periodos de vibrar de cada plataforma en las direcciones "x" y "y".

Tabla 4. 2 Frecuencias y periodos de vibrar dirección X

PLATAFORMA	FRECUENCIA (rad/seg)	PERIODO (seg)
Habitacional	3.354	1.873
Perforación 1	2.455	2.559
Enlace	1.888	3.327
Perforación 2	1.785	3.520
Producción 1	1.589	3.950
Recuperador	1.564	4.017
Producción 2	1.534	4.095

Tabla 4. 3 Frecuencias y periodos de vibrar dirección Y

PLATAFORMA	FRECUENCIA (rad/seg)	PERIODO (seg)
Habitacional	3.529	1.780
Perforación 1	2.793	2.249
Enlace	1.954	3.216
Perforación 2	1.458	4.309
Producción 1	1.673	3.756
Recuperador	1.941	3.237
Producción 2	1.647	3.815

La frecuencia de la estructura es función de la rigidez y de la masa modificada. La masa modificada es la suma de la masa de la estructura de 1GDL y de la masa adherida. La masa adherida está representada por la masa del agua de mar que se adhiere al elemento sumergido.

En la Figura 4. 11 se muestra el desplazamiento lateral máximo esperado (u_{max}) de la estructura versus la altura de ola significativa y el periodo pico, considerando un proceso de banda angosta, y la dirección de estudio "x".

La respuesta máxima pico de cada una de las plataformas se presenta cuando la frecuencia de excitación se encuentra cerca de la frecuencia de la estructura. A medida que el periodo de la excitación crece por encima del periodo de la estructura, y eventualmente tiende al infinito, la respuesta máxima (u_{max}) tiende a ser constante. Por lo anterior, se hace notar que la respuesta máxima pico representa el punto donde la

estructura se encuentra en resonancia ya que el periodo de la excitación y el periodo de la estructura coinciden. Cuando la respuesta máxima tiende a ser constante quiere decir que, conforme la frecuencia de excitación se va alejando de la frecuencia natural de vibrar de la estructura, la influencia de la variación del periodo del oleaje en la respuesta estructural tiende a ser pequeña. Se puede notar que para alturas de ola o periodos de valor infinito, la respuesta de la estructura se puede calcular como una carga estática.

En la Tabla 4. 3 se muestra que la plataforma Perforación 2 tiene un periodo de vibrar de $T=4.309$ segundos. Esta presenta el periodo de vibrar más largo de las plataformas consideradas en este análisis. De lo anterior se puede notar que para valores del periodo de la excitación menor de 4.4 segundos se presentan los máximos valores de la respuesta estructural (u_{max}) de cada plataforma analizada; para valores mayores de periodo la respuesta estructural de las mismas tiende a permanecer constante. La respuesta máxima pico (desplazamiento pico) de estas plataformas para periodos menores de 4.4 segundos oscilan entre 0.5 a 4 cm. El valor de la respuesta para periodos mayores de 4.4 segundos es menor que 0.5 cm; además se puede observar que a pesar de la variación de masas y rigidez de las plataformas en estudio, la respuesta es menor de 0.5 cm. Por otro lado, al considerar el periodo como infinito la respuesta equivaldría a aplicar una carga estática cuyo desplazamiento estático es menor que 0.5 cm. Estos valores de desplazamientos son similares a los obtenidos recientemente en el monitoreo de vibraciones por oleaje operacional de la plataforma Habitacional (IMP, 2001).

En la Figura 4. 12 se muestra el desplazamiento lateral máximo esperado de las plataformas considerando el espectro de Pierson-Moskowitz. En estas gráficas la respuesta de la estructura aumenta con T hasta llegar a un máximo (menor de 1.2 cm) que corresponde al periodo de vibrar de cada plataforma. Para periodos mayores que 4

segundos la respuesta tiende a ser constante y pequeña, con valores menores de 0.08 cm cuando T es muy grande en comparación con el período de la estructura, T_0 .

En la Figura 4. 11 a la Figura 4. 12 se observa que las plataformas Recuperador y Enlace tienen la mayor y menor respuesta, respectivamente. La diferencia de respuestas máximas se debe a la rigidez lateral de cada plataforma. La plataforma Recuperador tiene una rigidez lateral $K_x = 1917.526$ ton/m mientras que la plataforma Enlace tiene una rigidez lateral de $K_x = 10328.774$ ton/m. Nótese que las plataformas Producción 1 y Producción 2, tienen aproximadamente la misma respuesta máxima; esto se debe a que la masa y la rigidez lateral es similar para las dos estructuras.

En la Figura 4. 13 se muestra la relación de la respuesta ante el espectro de banda angosta y el de Pierson Moskowitz. La relación de respuesta es grande para altura de ola pequeñas, menores de 2 metros, o períodos menores de 6 segundos. Para alturas mayores, la relación de respuesta es aproximadamente constante menor que la unidad y con un valor promedio de 0.5 en el intervalo de altura de ola de 2 a 6 metros. En el intervalo de 6 a 10 metros, la relación de respuesta se incrementa aproximadamente de forma lineal con el aumento de altura de ola. Para alturas de ola significante menores de 3 metros, o períodos menores de 6 segundos, el error que se comete al considerar el oleaje como un proceso de banda angosta es grande: es del orden de 5 en resonancia y conforme aumenta el período T , disminuye a 0.5.

Al concentrar la frecuencia de la excitación en una frecuencia dominante se introduce un error considerable para frecuencias de la estructura donde los efectos dinámicos son importantes.

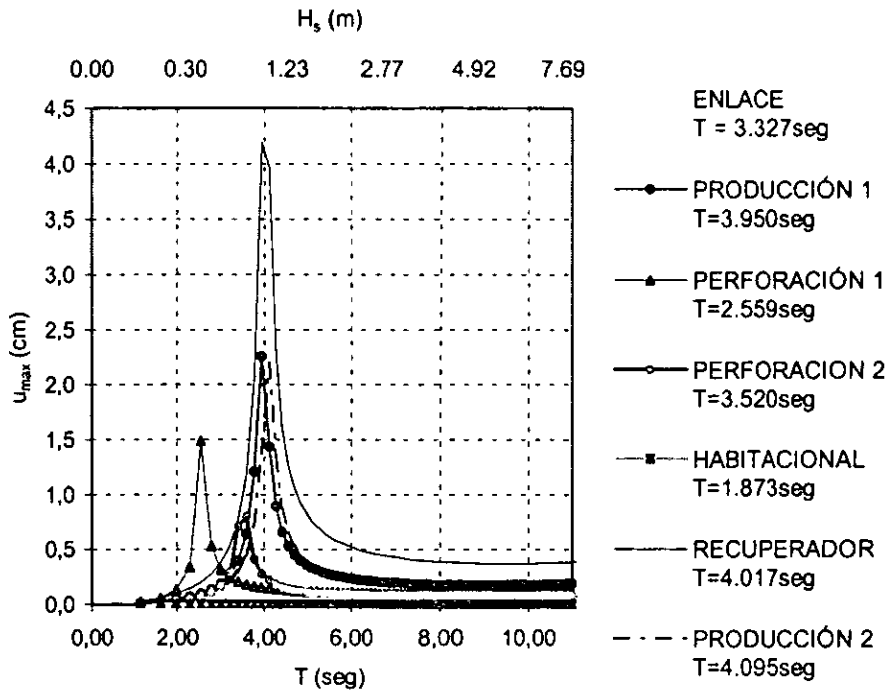


Figura 4. 11 Respuesta máxima aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=4m$ y dirección X.

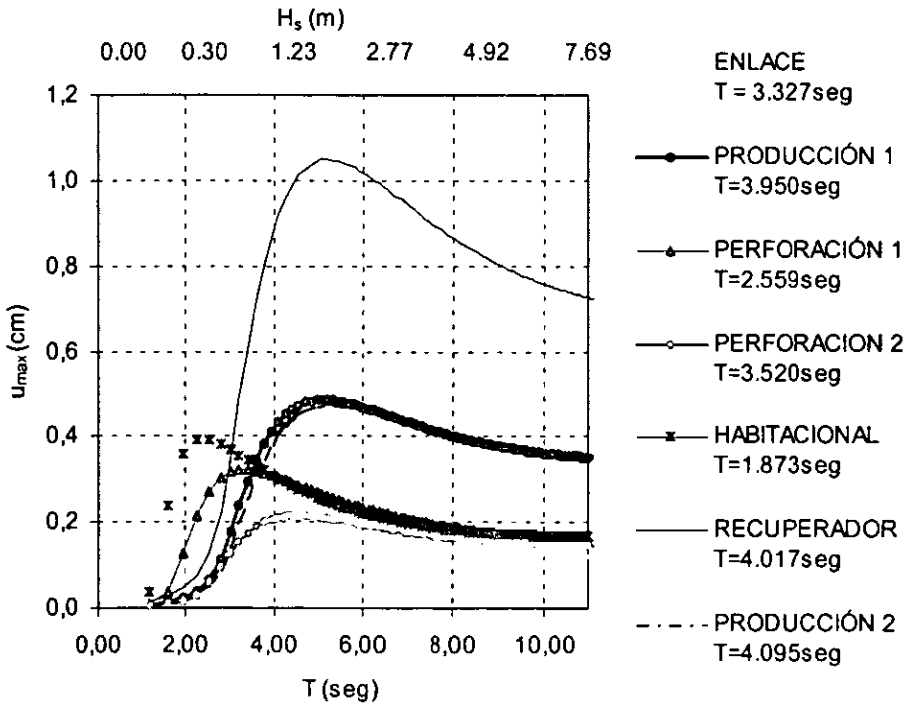


Figura 4. 12 Respuesta máxima aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=4m$ y dirección X.

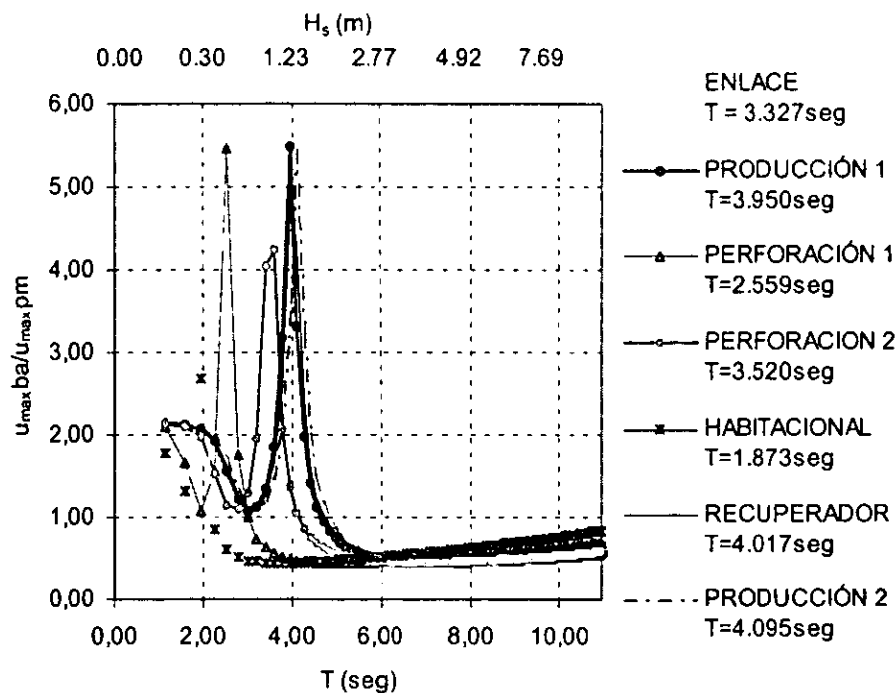


Figura 4. 13 Relación de respuestas, banda angosta y Pierson Moskowitz, $D_e=4m$ y dirección X.

En la Figura 4. 14 se muestra la respuesta estructural máxima versus la altura de ola significativa y el periodo pico considerando un proceso de banda angosta, dirección de estudio "y". Comparando con las Figura 4. 11 y 4.14 se observa que en la mayoría de los casos la respuesta es mayor para la dirección "x"; esto se debe a que la rigidez es menor que en la dirección "y", como se puede ver en la Tabla 4. 1.

En la Figura 4. 15 se muestra la respuesta máxima de varias plataformas considerando el espectro de Pierson-Moskowitz, dirección de estudio "y". Comparando estos resultados con la Figura 4. 12 se observa que en la mayoría de los casos la respuesta es mayor en la dirección "x" debido a que se tiene menor rigidez que en la dirección "y". En la Figura 4. 16 se muestra la relación de la respuesta de banda angosta y Pierson Moskowitz. Con base en los resultados mostrados en las figuras se puede plantear lo siguiente:

- 1) El comportamiento dinámico es similar en las dos direcciones de estudio.

- 2) La respuesta estructural es máxima cuando el periodo pico del oleaje está cerca del periodo de la estructura (resonancia). Conforme el periodo pico del oleaje se incrementa la respuesta estructural tiende a ser constante.
- 3) La respuesta de la estructura se puede calcular en un análisis ante carga de oleaje estático cuando el periodo pico de excitación es muy largo, digamos mayor que 6 segundos.
- 4) El error que se comete al considerar el oleaje como un proceso de banda angosta es del orden de 5 en resonancia y conforme aumenta el periodo, disminuye a 0.5.
- 5) El error al utilizar el proceso de banda angosta es similar para las dos direcciones de análisis.

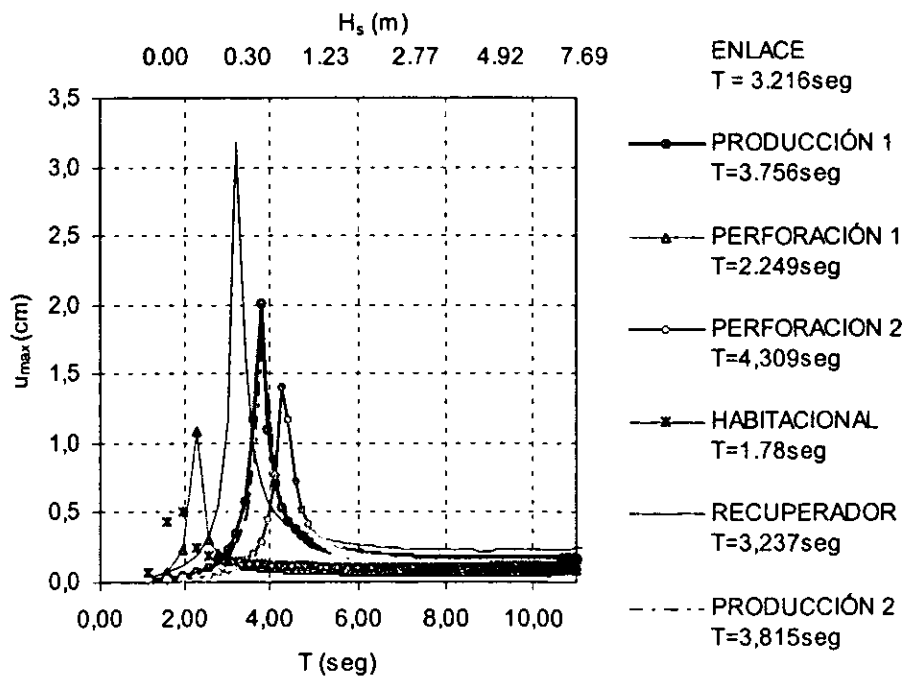


Figura 4. 14 Respuesta máxima aplicando el proceso de banda angosta, $D_o=4m$ y dirección Y.

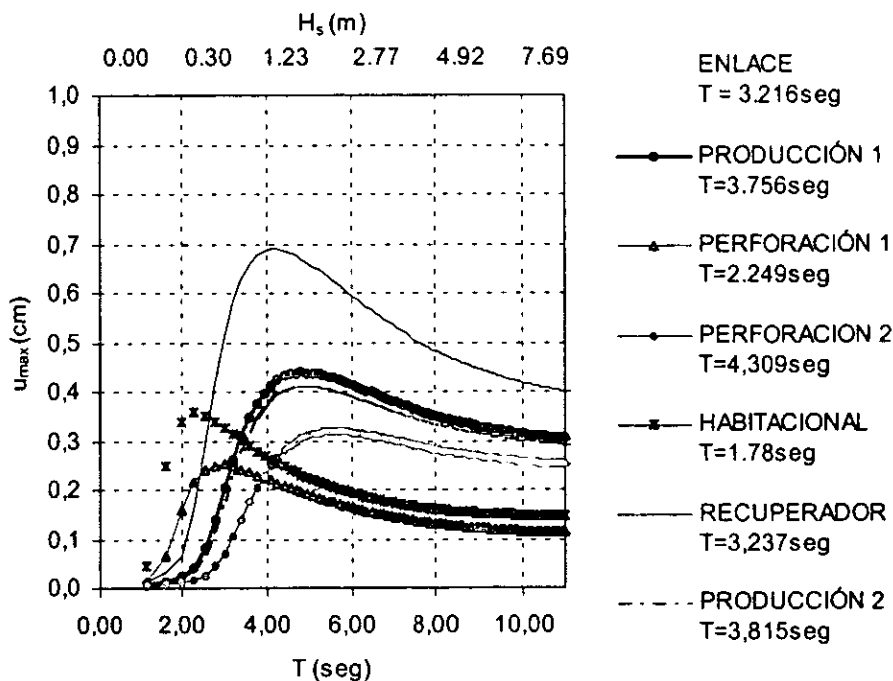


Figura 4. 15 Respuesta máxima aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=4m$ y dirección Y.

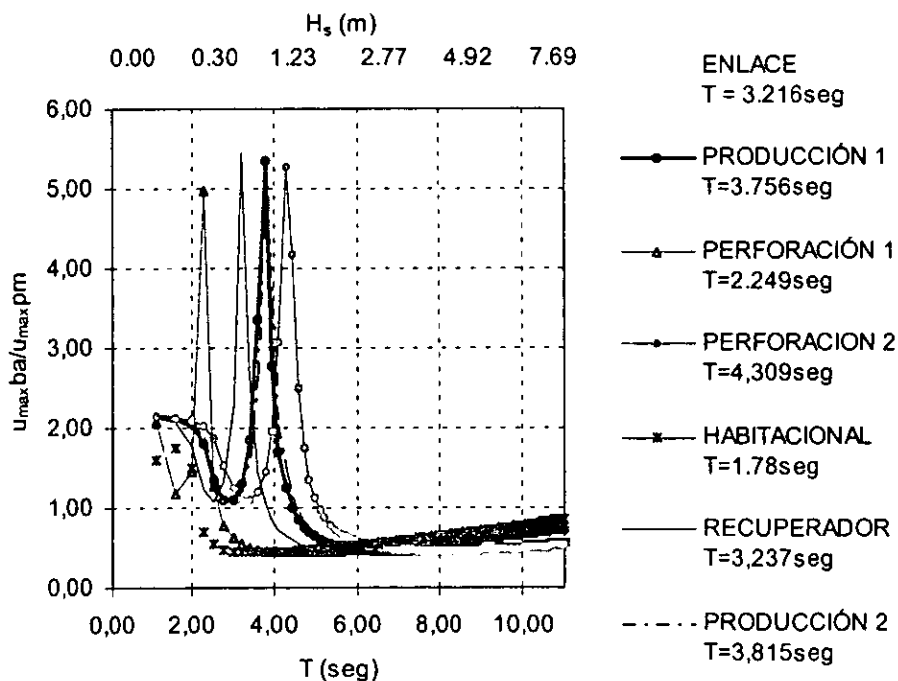


Figura 4. 16 Relación de respuestas, banda angosta y Pierson Moskowitz, $D_e=4m$ y dirección Y.

4.6.2. Respuesta máxima de varias plataformas de un grado de libertad considerando un diámetro equivalente de 6 metros.

En el caso de los modelos de plataformas considerando un diámetro equivalente $D_e = 6$ metros se obtuvo valores de respuesta del orden del doble que para $D_e = 4$ metros. Esto se debe evidentemente a que al considerar un diámetro mayor el área de impacto de la fuerza de oleaje sobre la sección circular es mayor y por ende la respuesta. Las figuras A.6.1 y A.6.2 del Apéndice 6 muestra la respuesta máxima de los modelos de un grado de libertad considerando la excitación como un proceso de banda angosta y el espectro de Pierson Moskowitz para un diámetro equivalente $D_e = 6$ metros.

La Figura 4. 17 muestra el error en el uso del proceso de banda angosta para la dirección de análisis "x". Comparando las figuras 4.13 para $D_e = 4$ metros y 4.17 para $D_e = 6$ metros se puede observar que el error es similar independientemente del valor del diámetro equivalente. Se obtuvieron resultados similares al considerar la dirección "y".

ESTE TEXTO NO SE
DE LA BIBLIOTECA

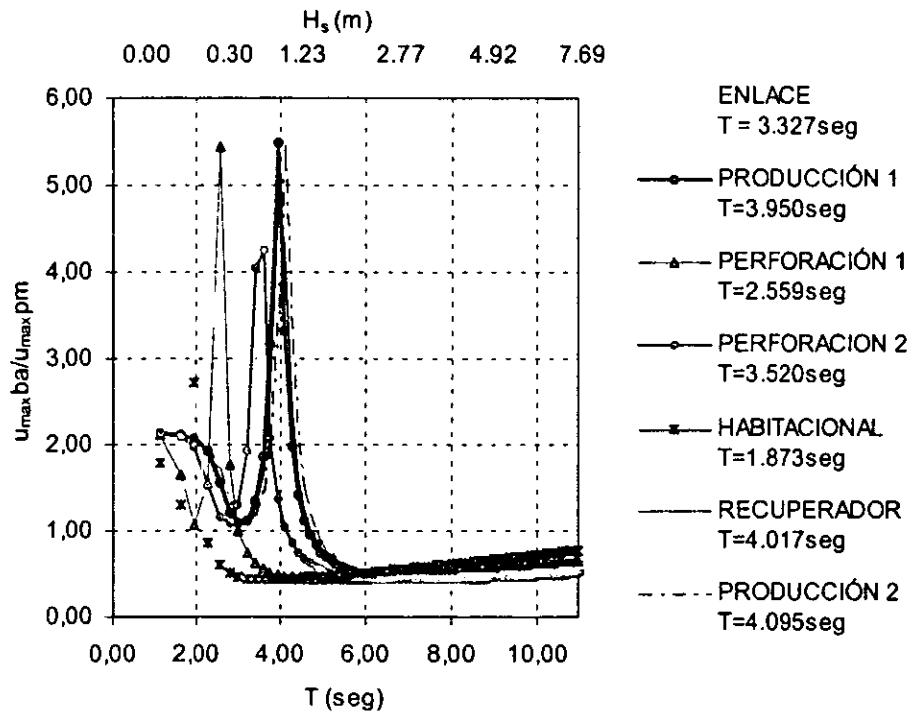


Figura 4. 17 Relación de respuestas, banda angosta y Pierson Moskowitz, $D_s=6m$ y dirección X.

4.6.3. Respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad con rigidez constante y masa variable

La finalidad de estos estudios fue analizar el comportamiento de una plataforma modelada como un sistema de un grado de libertad considerando variaciones de rigidez y masa.

En la Figura 4. 18 se muestra la respuesta máxima de una plataforma modelada como un sistema de un grado de libertad con rigidez lateral $K=2500$ ton/m y masa variable en el intervalo de 450 a 2350 ton seg^2 /m sometida a oleaje de banda angosta y el espectro de Pierson-Moskowitz. Se consideró un diámetro equivalente de 4 metros y un intervalo de alturas de ola de 0.1 a 10 metros. El periodo y la frecuencia natural de estos sistemas de un grado de libertad se muestran en la Tabla 4. 4.

Tabla 4. 4 Frecuencias y periodos de vibración, $K=2500$ ton/m.

1GDL (MASA VARIABLE) ton m/seg ²	FRECUENCIA (rad/seg)	PERIODO (seg)
450	2.357	2.665
550	2.132	2.947
650	1.963	3.200
850	1.826	3.441
950	1.622	3.873
1050	1.543	4.072
1150	1.474	4.261
1250	1.414	4.443
1350	1.361	4.617
1450	1.313	4.785
1550	1.270	4.947
1650	1.231	5.104
1750	1.195	5.257

1850	1.162	5.405
1950	1.132	5.549
2050	1.104	5.689
2150	1.078	5.827
2250	1.054	5.961
2350	1.031	6.092

En las figuras se observa que la respuesta de la estructura cuando el periodo pico del oleaje alcanza un máximo valor coincide con el período de vibrar de cada plataforma. La respuesta estructural máxima se obtiene para alturas de ola menores de 4 metros. Los desplazamientos máximos son aproximadamente iguales a 3.8 cm y 0.85 cm en el caso de los espectros de banda angosta y Pierson Moskowitz, respectivamente. A medida que el periodo pico del oleaje crece por encima de los periodos naturales de la estructura, en el intervalo entre 2 y 8 segundos, la respuesta disminuye y tiende a ser constante. En el caso de banda angosta, u_{\max} tiende a 0.5 cm cuando T es muy grande en comparación con el periodo de la estructura, T_0 . En estos casos la respuesta estructural se puede calcular con un análisis de carga estática.

Es interesante señalar que la respuesta máxima de cada sistema estructural casi no varía a pesar del cambio de masa.

En las figuras A.6.6 y A.6.7 del Apéndice 6 se muestra la respuesta de una plataforma modelada como un sistema de un grado de libertad con rigidez lateral $K=2500$ ton/m, masa variable y $D_e=6$ m. Se observa que la tendencia de los resultados es similar que para $D_e=4$ metros.

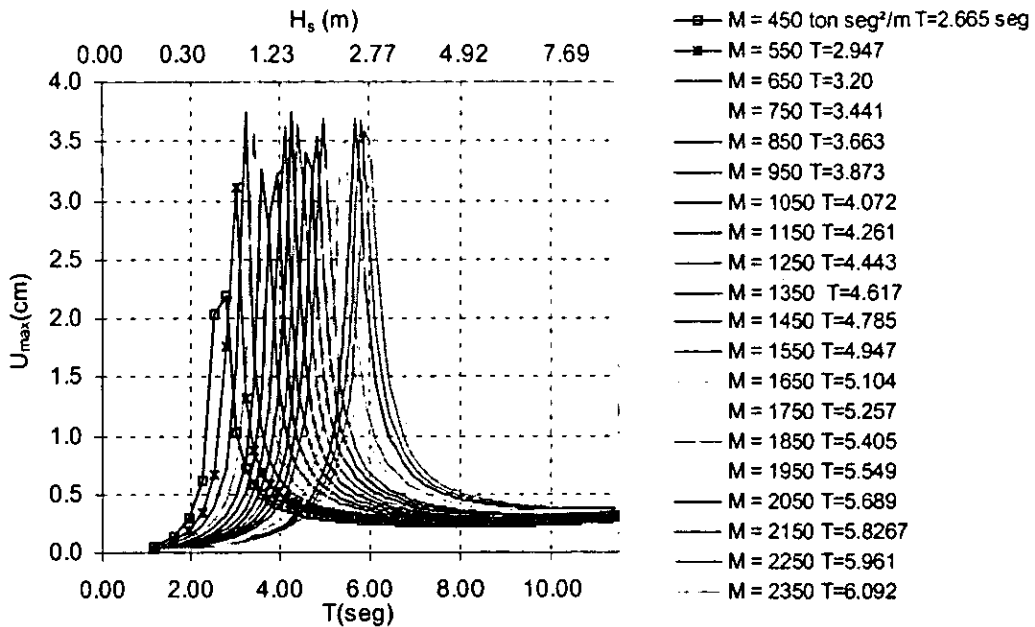


Figura 4. 18 Respuesta máxima aplicando el proceso de Banda Angosta, $D_e=4m$ con rigidez constante y masa

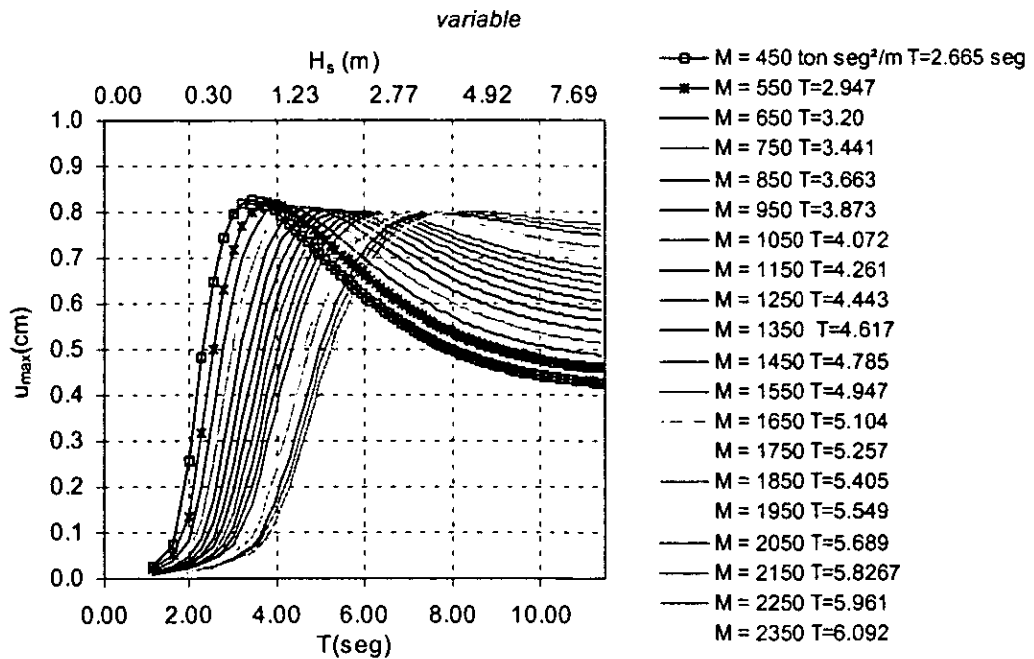


Figura 4. 19 Respuesta máxima aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=4m$ con rigidez constante y masa variable.

4.6.4. Respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad con rigidez variable y masa constante

En este caso, la plataforma se modela como un sistema de un grado de libertad con una masa $M=2500 \text{ ton seg}^2/\text{m}$ y rigidez lateral variable en el intervalo 2500 a 12000 ton/m.

En la Figura 4. 20 y 21 se muestra la respuesta máxima de una plataforma modelada como un sistema de un grado de libertad sometida a oleaje de banda angosta y el espectro de Pierson Moskowitz y un diámetro equivalente $D_e= 4$ metros.

El periodo y la frecuencia natural de estos sistemas de un grado de libertad se muestran en la Tabla 4. 5.

Tabla 4. 5 Frecuencias y periodos de vibración, $M=2500 \text{ ton m/seg}^2$.

1GDL (RIGIDEZ VARIABLE) ton/m	FRECUENCIA rad/seg	PERIODO seg
2500	1.000	6.283
3000	1.095	5.735
3500	1.183	5.31
4000	1.266	4.963
4500	1.341	4.683
5000	1.414	4.443
5500	1.483	4.236
6000	1.549	4.055
6500	1.613	3.896
7000	1.673	3.755
7500	1.732	3.627

8000	1.789	3.512
8500	1.844	3.407
9000	1.897	3.311
9500	1.949	3.223
10000	2.000	3.141
10500	2.049	3.066
11000	2.097	2.995
11500	2.145	2.929
12000	2.191	2.867

En las figuras se observa que la respuesta estructural máxima se obtiene para alturas de ola menores de 4 metros y conforme el periodo de excitación es mayor que los periodos naturales de la estructura, en el intervalo entre 2 y 8 segundos, la respuesta disminuye y tiende a ser constante. Los desplazamientos máximos de cada plataforma disminuyen conforme aumenta la rigidez lateral de la estructura. Los desplazamientos máximos varían en el intervalo de 0.8 cm a 3.6 cm y 0.18 cm a 0.8 cm en el caso de los espectros de banda angosta y Pierson Moskowitz, respectivamente.

En las figuras A.6.8 y A.6.9 del Apéndice 6 se muestra la respuesta de una plataforma modelada como un sistema de un grado de libertad con una masa $M=2500 \text{ ton m/seg}^2$, rigidez variable y $D_e=6 \text{ m}$. Se observa que la tendencia de los resultados es similar que para $D_e=4 \text{ metros}$.

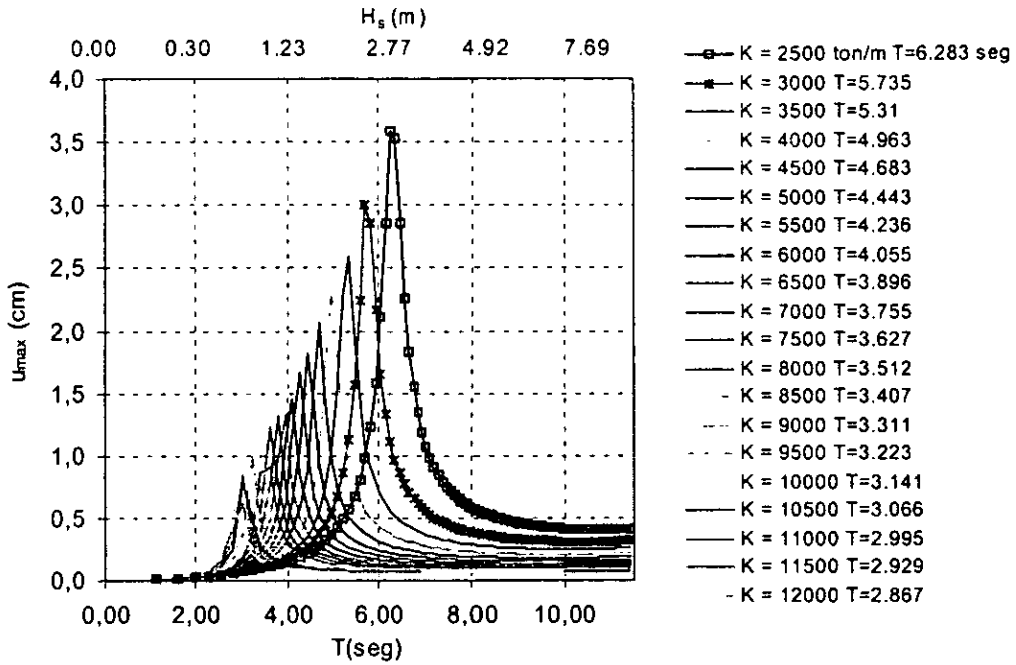


Figura 4. 20 Respuesta máxima aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=4m$ con rigidez variable y masa constante.

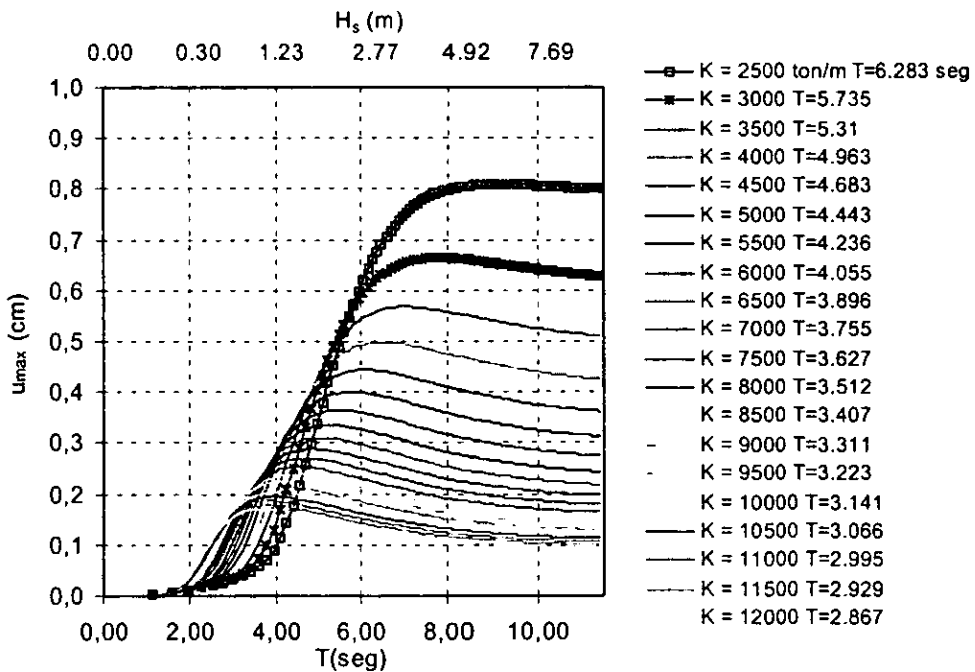


Figura 4. 21 Respuesta máxima aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=4m$ con rigidez variable y masa constante.

4.6.5. Respuesta máxima de plataformas marinas modeladas como sistemas de varios grados de libertad

En el análisis estructural de modelos de varios grados de libertad se consideraron dos plataformas marinas: Perforación 1 y Habitacional. La selección de estas plataformas se basó en la disponibilidad de información sobre las propiedades mecánicas y geométricas de cada estructura.

4.6.6. Respuesta máxima de la Plataforma Perforación 1

La plataforma Perforación 1 es un octápodo cuyo servicio es el de perforación. La plataforma se encuentra en un tirante de agua de 42.06 metros. La superestructura está formada por cuatro marcos longitudinales y cuatro transversales de acero rígidos, y soporta dos cubiertas principales con elevaciones de +15.240 y +21.030 metros. La subestructura la constituye un conjunto de cuatro marcos longitudinales y cuatro transversales. Dichos marcos están formados con elementos tubulares de acero y rigidizados por medio de un sistema de contraventeos verticales. La subestructura cuenta con 5 niveles de arriostramiento horizontal en las siguientes elevaciones: +6.096, -6.096, -18.898, -33.528 y -42.062 metros. En la Tabla 4. 6 se muestra las características geométricas y mecánicas asociadas con cada grado de libertad de la plataforma Perforación 1. Los datos mostrados en esta tabla se obtuvieron de análisis estructurales de esta plataforma realizados por la compañía Brown & Root International, (1997).

Tabla 4. 6 Masa y rigidez de cada grado de libertad de la plataforma Perforación 1

Nivel	Masa (ton seg ² /m)	Rigidez dirección X (ton/m)	Rigidez dirección Y (ton/m)
1	109.7	78125.00	96153.84
2	124.6	48076.92	67567.56
3	113.5	52083.33	75757.57
4	594.7	41666.67	80645.16

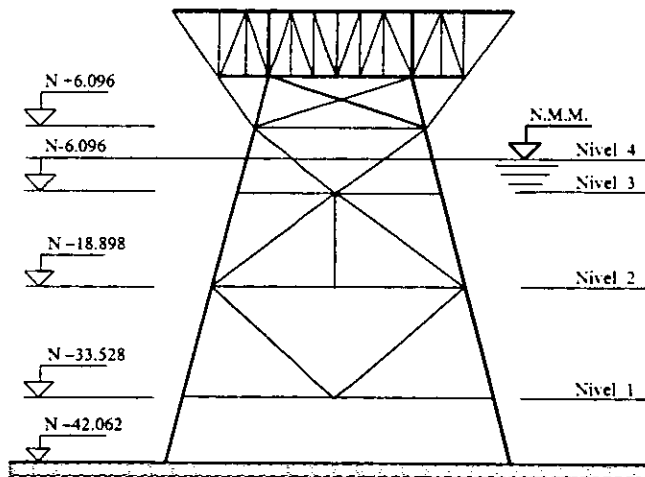


Figura 4. 22 Representación de la plataforma Perforación 1.

Tabla 4. 7 Periodo y Frecuencia modal de cada grado de libertad de la plataforma Perforación 1

Modo	Periodo	Frecuencia modal	Periodo	Frecuencia modal
	Dirección X (seg)	Dirección X (rad/seg)	Dirección Y (seg)	Dirección Y (rad/seg)
1	1.439	4.3661	1.187	5.2897
2	0.363	17.3062	0.288	21.7601
3	0.199	31.4502	0.164	38.1817
4	0.161	38.9101	0.135	46.4277

En la Tabla 4. 7 se listan los periodos y frecuencias modales de la plataforma Perforación

1. Las matrices modales $[\Phi_x]$ y $[\Phi_y]$ correspondientes a las direcciones "x" y "y" están dadas por,

$$\Phi_x = \begin{bmatrix} 7.0647E-3 & 3.3088E-2 & -6.1506E-2 & 6.3954E-2 \\ 1.8234E-2 & 6.3999E-2 & -2.1133E-2 & -5.5450E-2 \\ 2.7705E-2 & 4.6238E-2 & 6.6619E-2 & 3.7087E-2 \\ 3.8090E-2 & -1.4081E-2 & -5.0674E-3 & -1.7956E-3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_y = \begin{bmatrix} 8.5200E-3 & 3.900E-2 & -6.9085E-2 & 5.1362E-2 \\ 2.0255E-2 & 6.5635E-2 & -2.1419E-3 & -5.7174E-2 \\ 2.9783E-2 & 3.7040E-2 & 6.2752E-2 & 5.0723E-2 \\ 3.7554E-2 & -1.4743E-2 & -6.3882E-3 & -3.3815E-3 \end{bmatrix}$$

Las figuras 4.23 y 4.24 muestran las formas de vibrar en las direcciones "x" y "y".

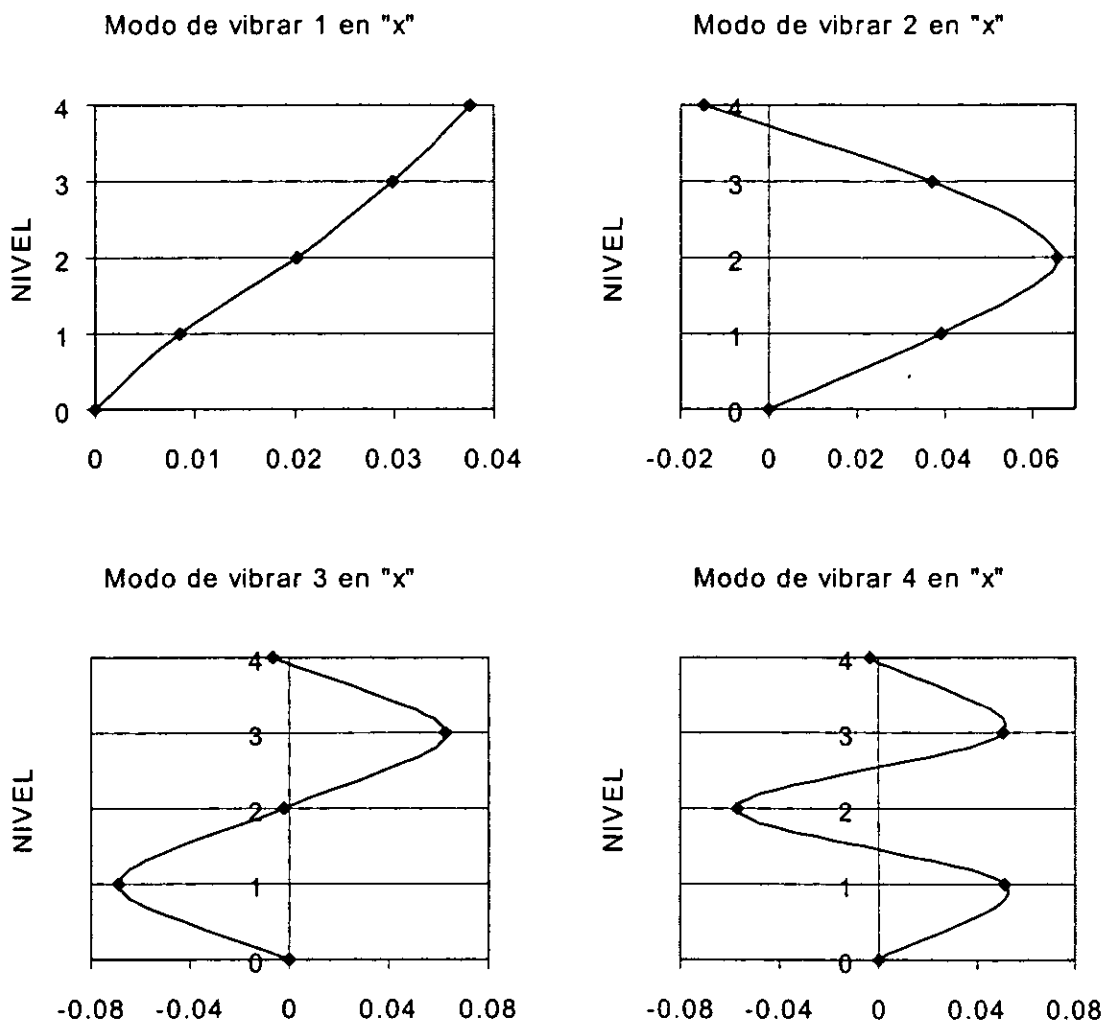


Figura 4. 23 Modos de vibrar en la dirección X de la plataforma Perforación 1

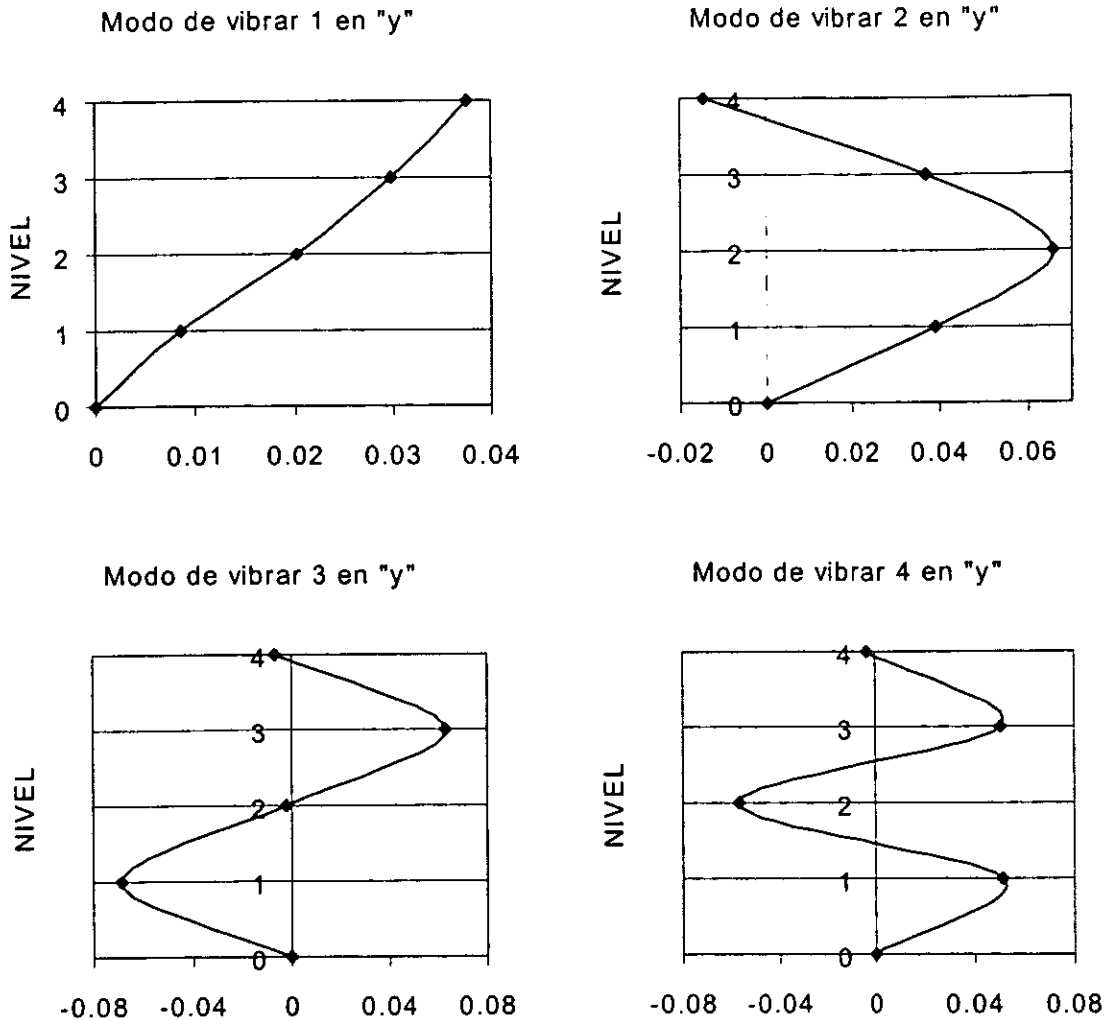


Figura 4. 24 Modos de vibrar en la dirección Y de la plataforma Perforación 1

En la Figura 4. 25 se muestra la respuesta máxima versus la altura de ola significativa y el periodo pico del oleaje para los grados de libertad de la plataforma Perforación 1 ante el oleaje de banda angosta en la dirección "x". La respuesta máxima pico se presenta cuando la frecuencia de excitación se encuentra cerca de la frecuencia de la estructura, específicamente para alturas de ola significativa menores de 0.3 metros o 2.0 segundos. La resonancia se produce para periodos de oleaje cercanos al periodo de la estructura

($T_0=1.439$ seg). Lo anterior quiere decir que la respuesta tiende a aumentar a medida que el periodo de la excitación (T) sea cerca al periodo de la estructura (T_0); conforme el periodo de excitación aumenta y se hace mucho mayor que el de la estructura, la respuesta tiende a disminuir hasta llegar aproximadamente a ser constante. Los valores de respuesta máxima pico para cada grado de libertad son: nivel 1= 0.48 cm, nivel 2= 1.23 cm, nivel 3= 1.88 cm y nivel 4= 2.60 cm. Los valores de la respuesta en cada grado de libertad para periodos significativamente mayores que el periodo de la estructura son los siguientes: nivel 1= 0.02 cm, nivel 2= 0.05 cm, nivel 3= 0.07 cm y nivel 4= 0.1 cm. Se puede observar que la respuesta estructural es mayor en el nivel 4 que en el nivel 1; esto se debe a que asociado con el nivel 1 se tiene una mayor rigidez lateral (Tabla 4. 6).

En la Figura 4. 26 se muestra la respuesta de la plataforma Perforación 1 modelada como un sistema de un grado de libertad y varios grados de libertad aplicando el proceso de banda angosta. Para aplicar la comparación de un sistema de un grado de libertad y el de varios grados de libertad (VGDL) se utiliza la respuesta del último nivel del modelo de VGDL ya que éste es el que se encuentra más cerca del nivel medio del mar; haciendo notar que el sistema de 1GDL se considera en el nivel medio del mar. En esta gráfica se observa que la frecuencia pico para la respuesta estructural (u_{max}) de un modelo simplificado de un grado de libertad es menor que para el sistema de varios grados de libertad. Se puede notar que la respuesta en el modelo de VGDL es aproximadamente el doble que la del modelo de 1GDL en la zona de resonancia. Esto se debe a las diferentes simplificaciones de masa y rigidez consideradas para cada caso. En consecuencia no se considera apropiado el uso de modelos simplificados de 1GDL para frecuencias de vibrar de la estructura cercanos a la frecuencia fundamental del oleaje. Para valores de frecuencia mayores que la de resonancia la diferencia entre los modelos de 1GDL y VGDL es pequeña.

En la Figura 4. 27 se muestra la respuesta máxima versus la altura de ola significativa y el periodo pico de la plataforma Perforación 1 sometida a oleaje con el espectro de Pierson Moskowitz. La respuesta tiende a aumentar a medida que el periodo del oleaje (T) sea acerca al periodo de la estructura de la excitación ($T_0=1.439$ seg). Conforme el periodo de la excitación se incrementa por encima de la estructura, la respuesta (u_{max}) tiende a disminuir hasta llegar aproximadamente a ser constante para periodos mucho mayores que T_0 . Como ya se dijo anteriormente la respuesta estructural es mayor en el nivel 4 que en el nivel 1. Los valores de respuesta máxima pico para cada grado de libertad son: nivel 1= 0.04 cm, nivel 2= 0.11 cm, nivel 3= 0.16 cm y nivel 4= 0.22 cm. Los valores de la respuesta máxima de cada grado de libertad para periodos mucho mayores que el periodo de la estructura son los siguientes: nivel 1=0.03 cm, nivel 2= 0.06 cm, nivel 3= 0.08 cm y nivel 4= 0.11 cm.

En el caso de la Figura 4. 28 se compara la respuesta de la plataforma Perforación 1 con el modelo de un sistema de un grado de libertad aplicando el espectro de Pierson Moskowitz. En esta figura se observa que la frecuencia pico de la respuesta estructural de un modelo de 1GDL es 1.55 veces la del modelo de VGDL. Se puede hacer notar que el error en el uso de modelos de 1GDL considerando oleaje de banda angosta es menor que el caso del espectro de Pierson Moskowitz. La diferencia de estos valores se debe al tipo de transformación de masas y rigideces.

En la Figura 4. 29 se muestra el error al utilizar el proceso de banda angosta considerando el modelo de plataformas de varios grados de libertad. Para alturas de ola significativa menores que 1 metro, o periodos menores que 3.6 segundos, el error que se comete al considerar el oleaje como un proceso de banda angosta es grande. El error es del orden de 13.5 en periodos de resonancia; conforme aumenta el periodo de oleaje el error varía entre 0.35 a 0.6. Esta diferencia radica en que en el caso de procesos de

banda angosta la densidad espectral se concentra en frecuencias cercanas a la de resonancia y para el caso del espectro de Pierson Moskowitz la densidad espectral está distribuida en un intervalo grande de frecuencias.

En el Apéndice 6 se muestra las figuras correspondientes a la dirección "y" y el diámetro equivalente de 6 metros en el que se encontraron resultados con tendencia similar a los discutidos en esta sección.

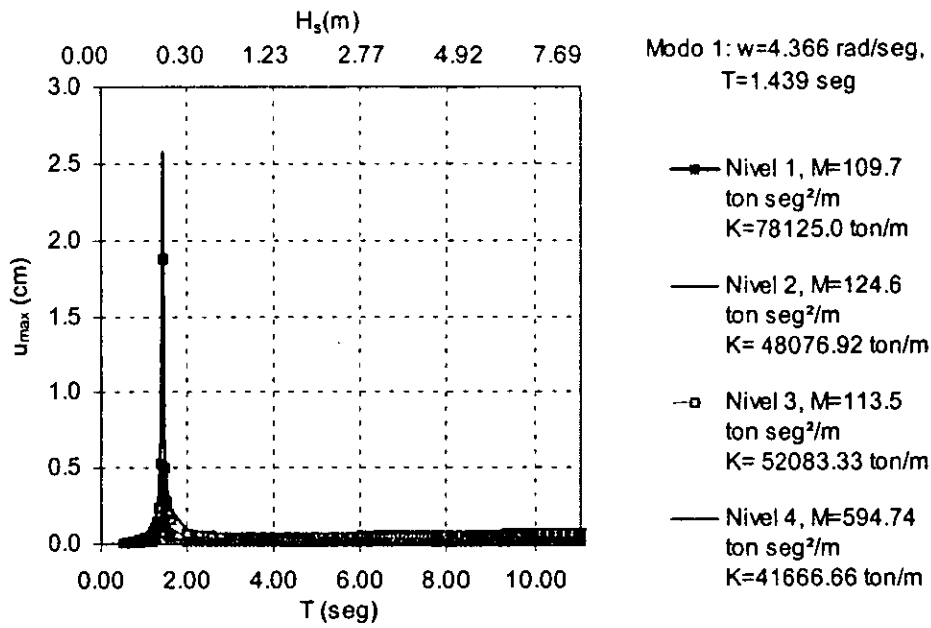


Figura 4. 25 Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL), banda angosta en "x".

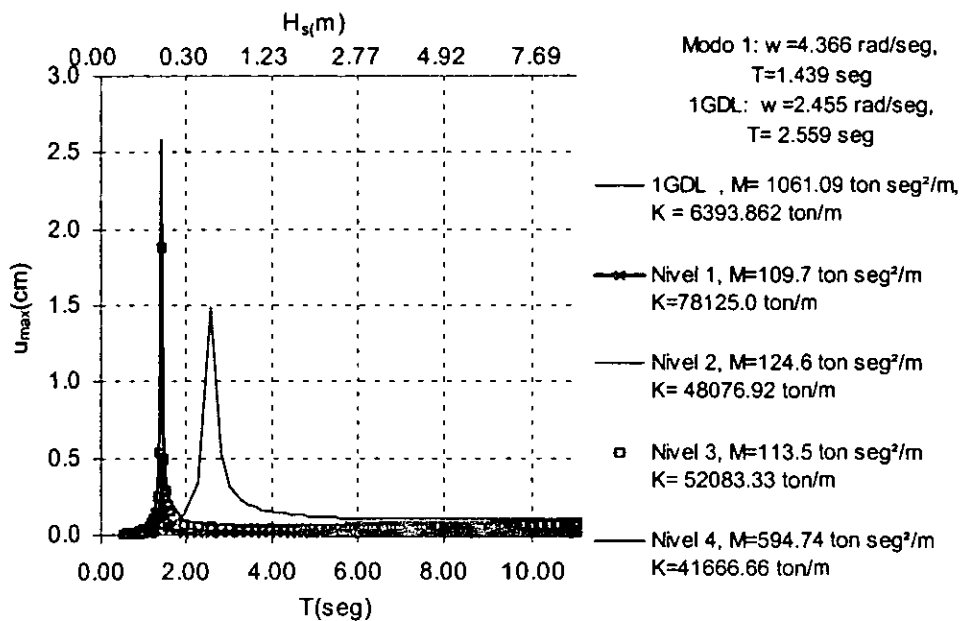


Figura 4. 26 Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL y 1GDL), banda angosta en "X".

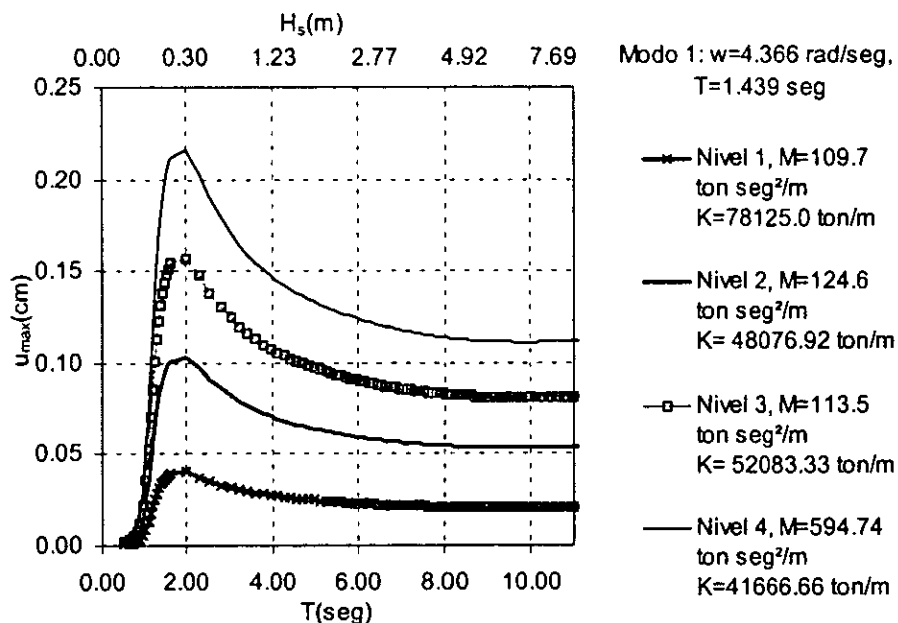


Figura 4. 27 Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL), Pierson Moskowitz en "X".

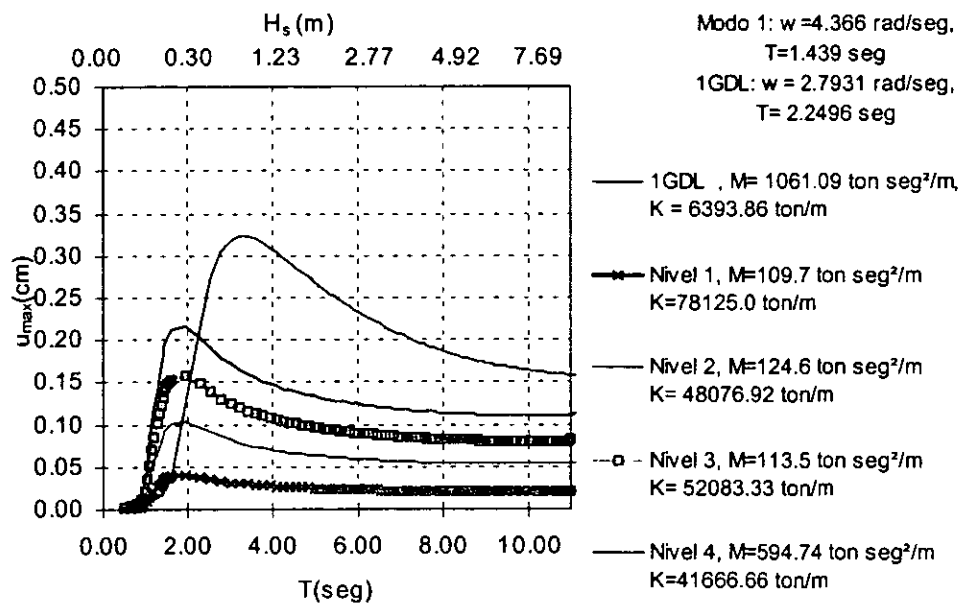


Figura 4. 28 Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL y 1GDL), Pierson Moskowitz, en "X".

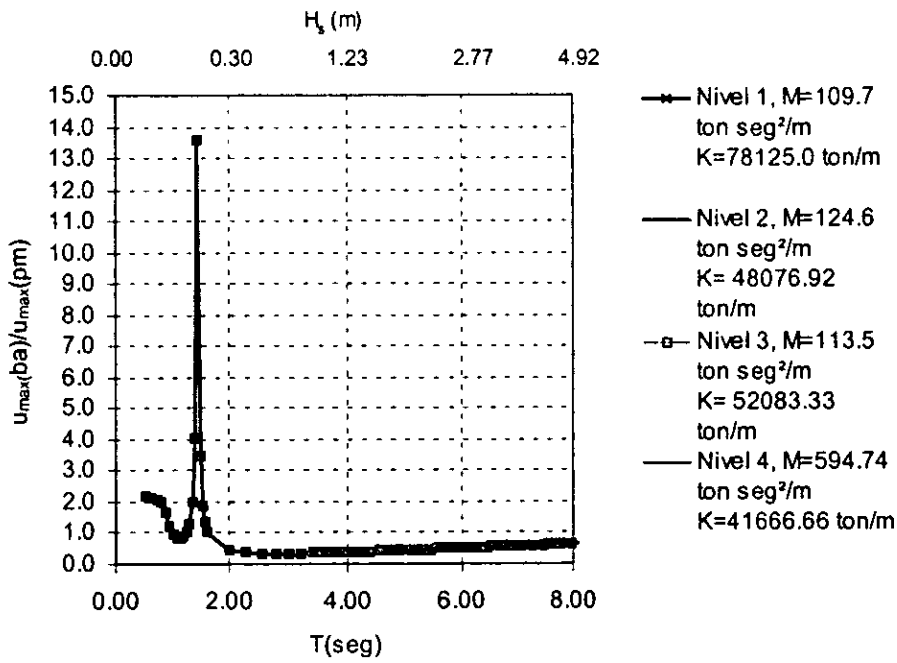


Figura 4. 29 Relación de respuesta máxima (banda angosta / Pierson Moskowitz) de la plataforma Perforación 1 en dirección "X".

4.6.7. Respuesta Máxima de la Plataforma Habitacional

En la Región Marina Noreste de la Sonda de Campeche se localiza la plataforma Habitacional cuyo servicio es habitacional. La plataforma se encuentra en un tirante de agua de 31.0 metros. La superestructura está formada por cuatro marcos rígidos longitudinales y cuatro transversales, estructurados mediante columnas tubulares de 48" de diámetro y traveses de la serie W que soportan tres cubiertas principales correspondientes a las elevaciones +15.399, +19.788 y +26.211 metros y varios voladizos sobre dichas cubiertas y consta de un subnivel a la elevación +9.584 metros. La subestructura es del tipo Jacket y la constituye un conjunto de marcos que siguen el arreglo dispuesto para la superestructura, dichos marcos están formados con elementos tubulares de acero y rigidizados por medio de un sistema de contraventeos verticales. La subestructura cuenta con 4 niveles de arriostramiento horizontal en las siguientes elevaciones +6.096, -5.178, -17.678, -31.0 metros. Las columnas o piernas tienen un diámetro de 52" para permitir el paso por su interior al conjunto de pilotes que conforman la cimentación.

La cimentación está formada por un sistema de ocho pilotes construidos con elementos tubulares de acero de 48" localizados en el interior de las piernas de la subestructura y penetran en el suelo marino hasta una profundidad promedio de 117.65 metros.

En la *Tabla 4. 8* se muestra las características geométricas y mecánicas asociadas con cada grado de libertad de la plataforma Habitacional.

Tabla 4. 8 Masa y rigidez de cada grado de libertad de la plataforma Habitacional

Nivel	Masa (ton seg ² /m)	Rigidez dirección X (ton/m)	Rigidez dirección Y (ton/m)
1	76.96	39168.0	49939.20
2	56.47	48960.0	55569.60
3	284.71	46512.0	52632.00

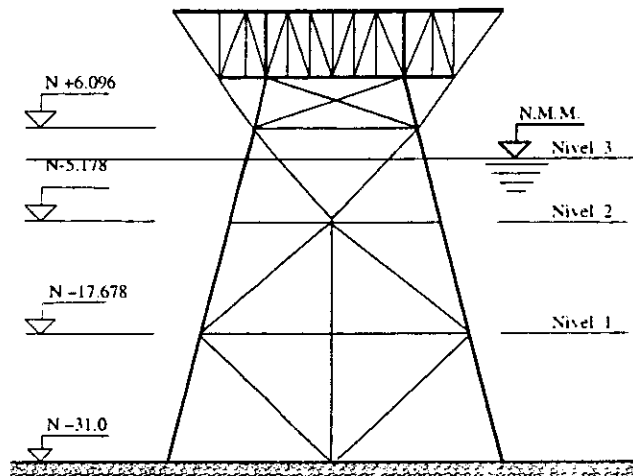


Figura 4. 30 Representación de la plataforma Habitacional.

Tabla 4. 9 Frecuencia modal de cada grado de libertad de la plataforma Habitacional

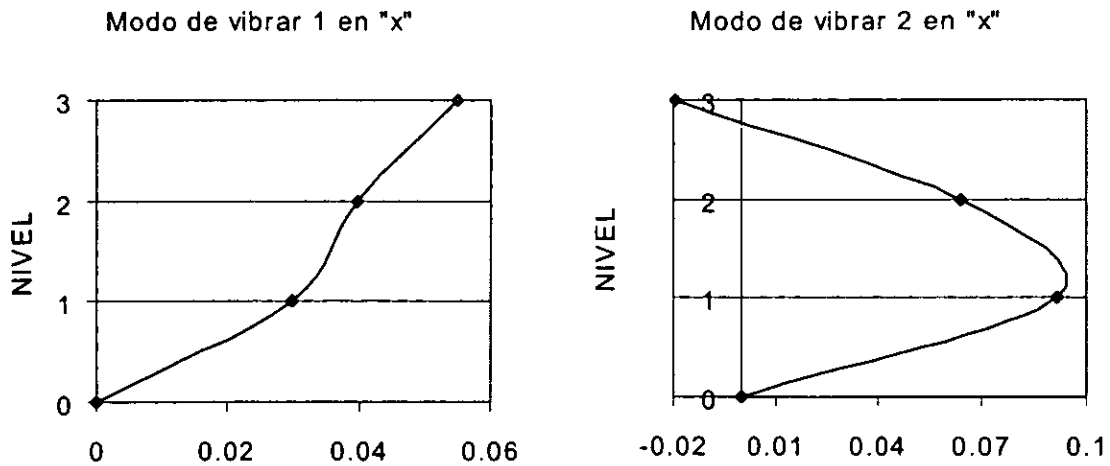
Modo	Periodo	Frecuencia modal	Periodo	Frecuencia modal
	Dirección X (seg)	Dirección X (rad/seg)	Dirección Y (seg)	Dirección Y (rad/seg)
1	0.932	6.7376	0.853	7.3611
2	0.239	26.2644	0.218	28.7613
3	0.133	47.0205	0.125	50.2624

En la Tabla 4. 9 se listan los periodos y las frecuencias modales de la plataforma Habitacional. Las matrices $[\Phi_x]$ y $[\Phi_y]$ correspondientes a las direcciones "x" y "y" se muestran a continuación:

$$\Phi_x = \begin{bmatrix} 2.2991E-2 & 9.1433E-2 & -6.2508E-2 \\ 3.9718E-2 & 6.3903E-2 & 1.0808E-1 \\ 5.5091E-2 & -1.9722E-2 & -8.5846E-3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_y = \begin{bmatrix} 2.1434E-2 & 9.0537E-2 & -6.4338E-2 \\ 3.9063E-2 & 6.6575E-2 & 1.0669E-1 \\ 5.5357E-2 & -1.9057E-2 & -8.3755E-3 \end{bmatrix}$$

Las figuras 4.31 y 4.32 muestran las formas de vibrar en las dirección "x" y "y".



Modo de vibrar 3 en "x"

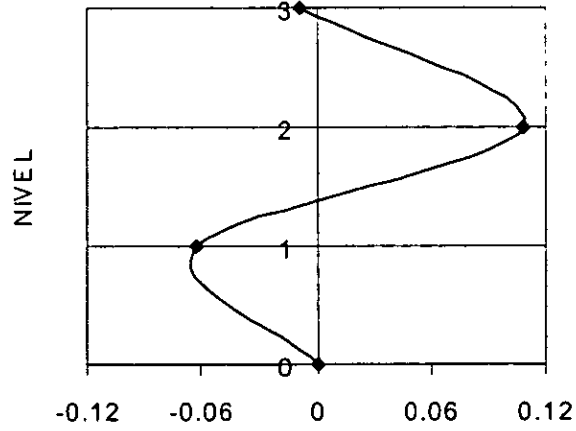
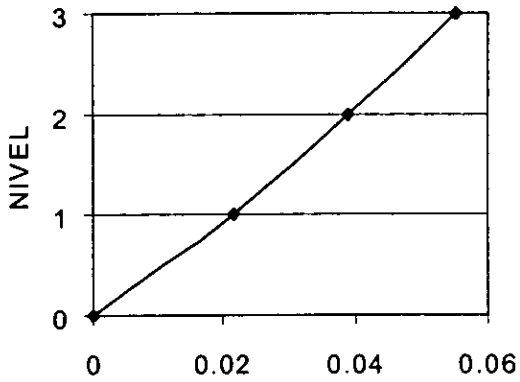
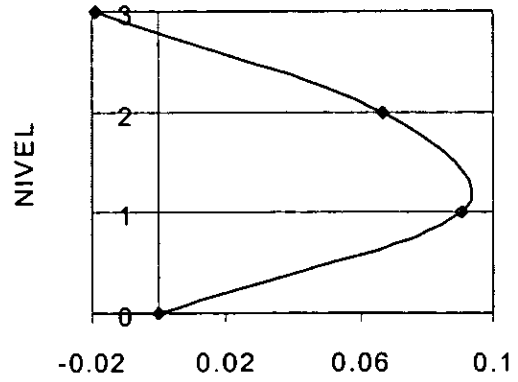


Figura 4. 31 Modos de vibrar en la dirección X de la plataforma Habitacional

Modo de vibrar 1 en "y"



Modo de vibrar 2 en "y"



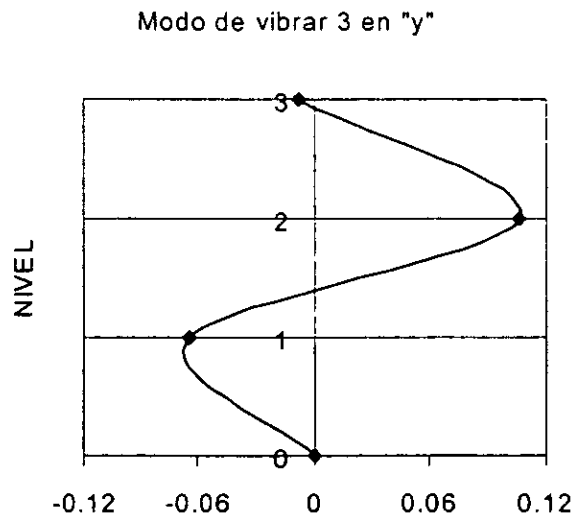


Figura 4. 32 Modos de vibrar en la dirección Y de la plataforma Habitacional

En la Figura 4. 33 se muestra la respuesta máxima versus la altura de ola significativa y el periodo del oleaje para los grados de libertad de la plataforma Habitacional ante el oleaje de banda agosta en la dirección "x". La respuesta máxima pico se presenta para alturas de ola significativa menores de 0.3 metros o 2 segundos. La resonancia se produce para periodos de oleaje cercanos al periodo $T_0 = 0.932$ seg. La configuración de la respuesta estructural tiende a aumentar a medida que aumentamos T , cerca de T_0 la respuesta llega a un máximo (resonancia); conforme T es mucho mayor que T_0 , la respuesta tiende a disminuir hasta llegar aproximadamente a ser constante. Los valores de respuesta máxima pico para cada grado de libertad son: nivel 1= 0.33 cm, nivel 2= 0.57 cm y nivel 3= 0.80 cm. Los valores de la respuesta máxima de cada grado de libertad para periodos mucho mayores que le periodo de la estructura son los siguientes: nivel 1= 0.04 cm, nivel 2= 0.07 cm y nivel 3= 0.09 cm. Estos valores de desplazamientos son similares a los obtenidos recientemente en el monitoreo de vibraciones por oleaje operacional de la plataforma Habitacional (IMP, 2001).

En la Figura 4. 34 se muestra una comparación con la respuesta de la plataforma Habitacional modelada como un sistema un grado de libertad. Como se explicó en la sección anterior, para aplicar ésta comparación fue necesario tomar en cuenta la respuesta del último nivel del modelo de VGDL. En ésta figura se observa claramente que la frecuencia pico para el modelo de VGDL es menor que el modelo de 1GDL. La diferencia de frecuencias se debe a las simplificaciones utilizadas para cada caso. La respuesta en el modelo de 1GDL es 1.21 veces que el de VGDL en la zona de resonancia.

En la Figura 4. 35 se muestran la respuesta máxima versus altura de ola significativa y periodo pico de la plataforma Habitacional ante el espectro de Pierson Moskowitz en la dirección "x". En este caso las respuestas máximas se encuentran a alturas de ola menores de 0.3 metros o 2 segundos. Los valores de respuesta máxima pico para cada grado de libertad son: nivel 1= 0.07 cm, nivel 2= 0.13 cm y nivel 3= 0.18 cm. Los valores de la respuesta máxima de cada grado de libertad para periodos mucho mayores que el periodo de la estructura son: nivel 1= 0.03 cm, nivel 2= 0.06 cm y nivel 3= 0.08 cm.

En la Figura 4. 36 se compara la respuesta de la plataforma Habitacional con el modelo de 1GDL. La respuesta estructural de 1GDL es 2.2 veces la de VGDL en la zona de resonancia, pasando ésta la diferencia disminuye. Como se observa en la Figura 4. 34 y 4.36 el error cometido al usar modelos de 1GDL considerando oleaje de banda angosta es menor que el caso del espectro de Pierson Moskowitz.

La diferencia de la respuesta al usar el modelo de 1GDL y VGDL depende de las simplificaciones de masa y rigidez consideradas en cada caso. En consecuencia no se considera apropiado el uso de modelos simplificados de 1GDL para frecuencias de excitación cercanas a la frecuencia de vibrar de la estructura. En cambio para valores de

frecuencias mayores a la de resonancia, la diferencia entre modelos de 1GDL y VGDL es pequeña.

En la Figura 4. 37 se muestra el cociente de respuestas al utilizar el proceso de banda angosta considerando el modelo de plataformas de varios grados de libertad. Para alturas de olas significantes menores que 1.3 m ó 2 segundos, el error es del orden de 500% en resonancia; conforme aumenta el periodo de oleaje el error varía entre 0.38 a 0.9.

En el Apéndice 6 se muestra las figuras correspondientes a la dirección “y” y el diámetro equivalente de 6 metros en el que se encontraron resultados con tendencia similar a los discutidos en esta sección.

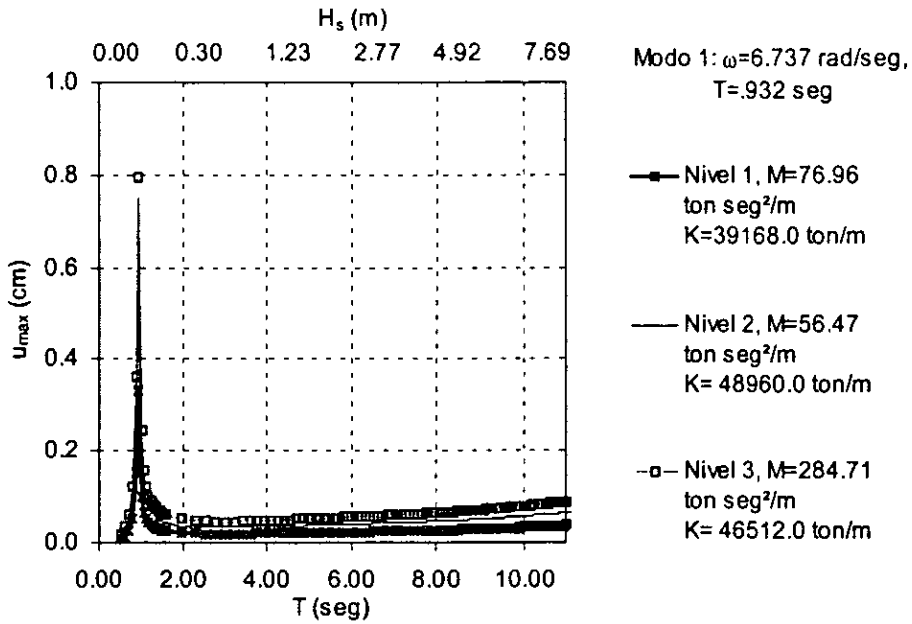


Figura 4. 33 Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL), banda angosta en "x".

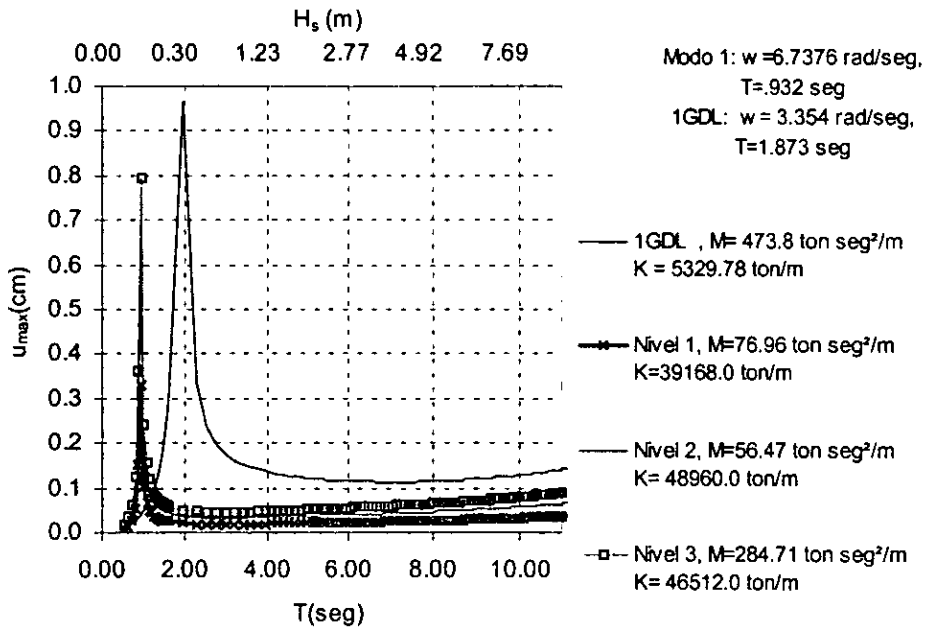


Figura 4. 34 Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL y 1GDL), banda angosta en "X".

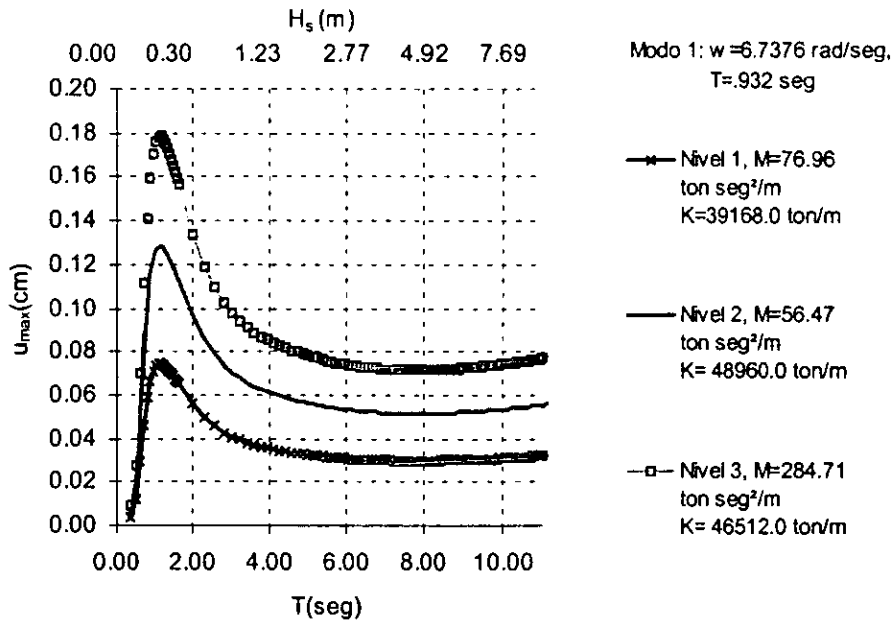


Figura 4. 35 Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL), Pierson Moskowitz en "X".

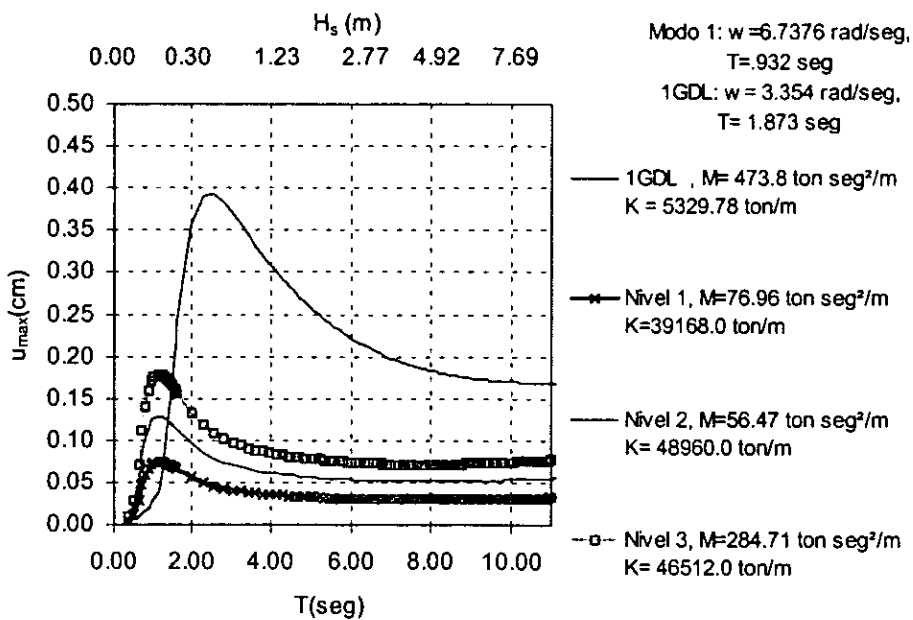


Figura 4. 36 Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL y 1gfdl), Pierson Moskowitz, en "X".

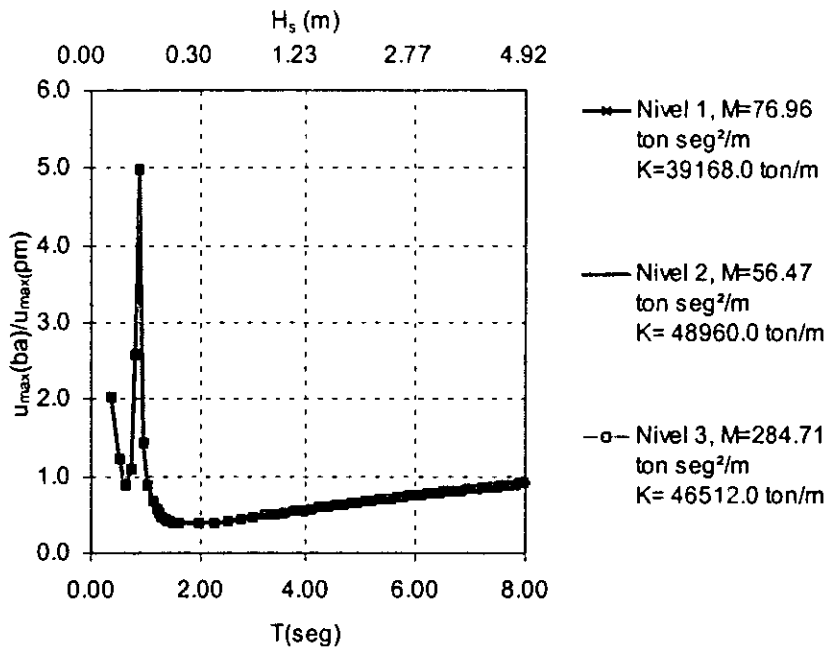


Figura 4. 37 Relación de respuesta máxima (banda angosta/Pierson Moskowitz) de la plataforma Habitacional en dirección "X".

4.6.8. Factor de Amplificación Dinámica

En secciones anteriores se mencionó que la respuesta de la estructura se puede calcular como una carga estática, para alturas de ola de valor infinito. Por lo anterior, el Factor de Amplificación Dinámica, (FAD), se puede calcular tomando en cuenta el valor de la respuesta dinámica para cada altura de ola significativa entre el valor de la misma para periodos de ola muy grande, dado por:

$$FAD = \frac{u_{\max}(\text{dinámico})}{u_{\max}(\text{estático})}$$

En la figura 4.38 a la 4.43 se muestra el FAD de cada plataforma considerando el oleaje como un proceso de banda angosta y Pierson Moskowitz, diámetro equivalente $D_e=4$ m y dirección "X". En la Figura 4. 38 se muestra el FAD, en la zona de resonancia considerando el oleaje como un proceso de banda angosta, de la plataforma Enlace el FAD es 8.21, Producción 1 es 11.4, Perforación 1 es 13.2, Recuperación es 10.5, Habitacional es 6.54, Perforación 2 es 9.25 y Producción 2 es 11.0. En la Figura 4. 39 se muestra el FAD, en la zona de resonancia considerando el espectro de oleaje de Pierson Moskowitz, de la plataforma Enlace es 1.6, Producción 1 es 1.39, Perforación 1 es 2.05, Recuperación es 1.46, Habitacional es 2.33, Perforación 2 es 1.51, Producción 2 es 1.32. Como se puede observar el FAD es mayor para el caso del oleaje de banda angosta. En la Figura 4. 40 se muestra el FAD de la plataforma Perforación 1 aplicando el proceso de banda angosta con un valor máximo en la zona de resonancia de 25.5. En la Figura 4. 41 se muestra el FAD de la plataforma Perforación 1 aplicando el espectro de Pierson Moskowitz el cual tiene un valor máximo en zona de resonancia de 1.92. En la Figura 4. 42 se muestra el FAD de la plataforma Habitacional aplicando el proceso de banda angosta con un valor máximo en la zona de resonancia de 8.43. Figura 4. 43 se muestra

el FAD de la plataforma Perforación 1 aplicando el espectro de Pierson Moskowitz el cual tiene un valor máximo en zona de resonancia de 2.26. Los valores de FAD aplicando el espectro de Pierson Moskowitz son similares a los obtenidos por Granell y Silva (1986). Como ya se dijo anteriormente el FAD considerando el proceso de banda angosta es mayor para todos los casos.

Para el caso del FAD de la plataforma Perforación 1 modelada como un sistema de un grado de libertad y varios grados de libertad, considerando el proceso de banda angosta tiene como valores 13.2 y 25.5 respectivamente y para el caso del espectro de Pierson Moskowitz tiene como valores 2.05 y 2.26 respectivamente. En el caso de la plataforma Habitacional el FAD para un sistema de un grado de libertad y varios grados de libertad, considerando el proceso de banda angosta tienen como valores 6.54 y 8.43 respectivamente y para el caso del espectro de Pierson Moskowitz tienen como valores 2.33 y 2.26 respectivamente. Se puede observar que el FAD, aplicando el modelo de 1GDL y VGDL considerando el oleaje de banda angosta, se tiene una variación considerable, por otro lado al considerar el espectro de Pierson Moskowitz, la variación del FAD para 1GDL y VGDL es muy pequeña.

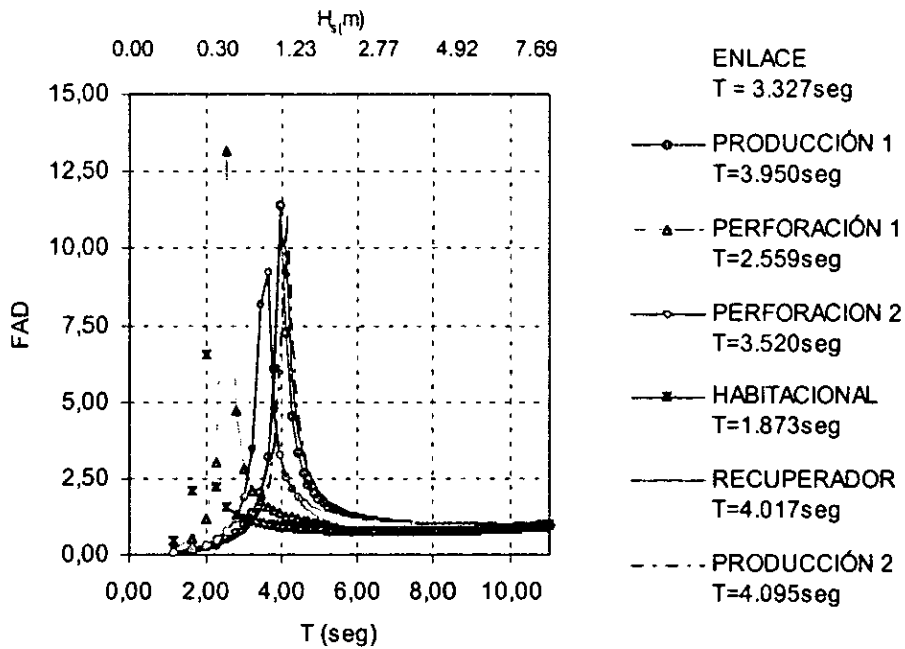


Figura 4. 38 FAD de las plataformas, oleaje de banda angosta, $D_e = 4$ m y dirección "x".

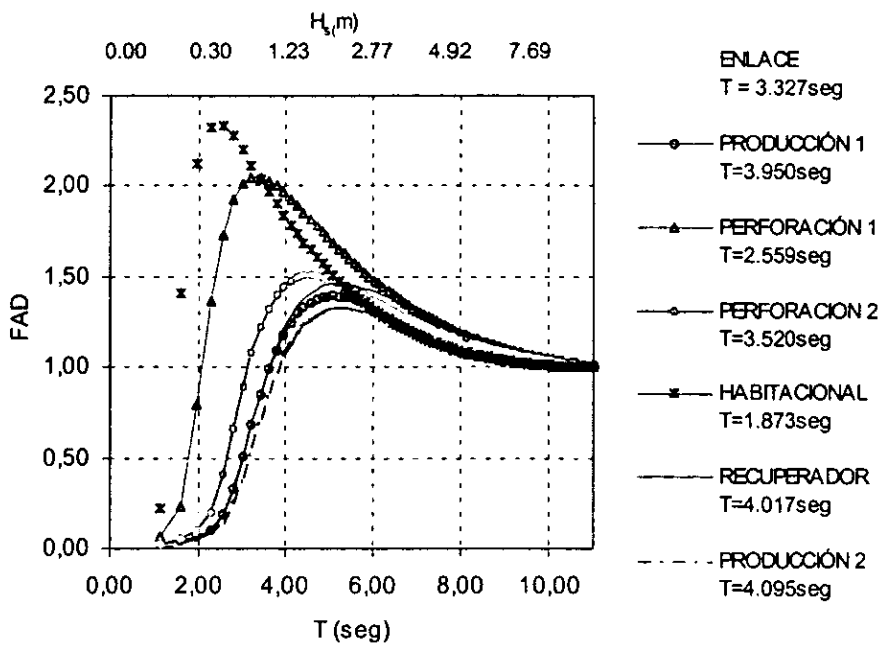


Figura 4. 39 FAD de las plataformas, oleaje de Pierson Moskowitz, $D_e = 4$ m y dirección "x".

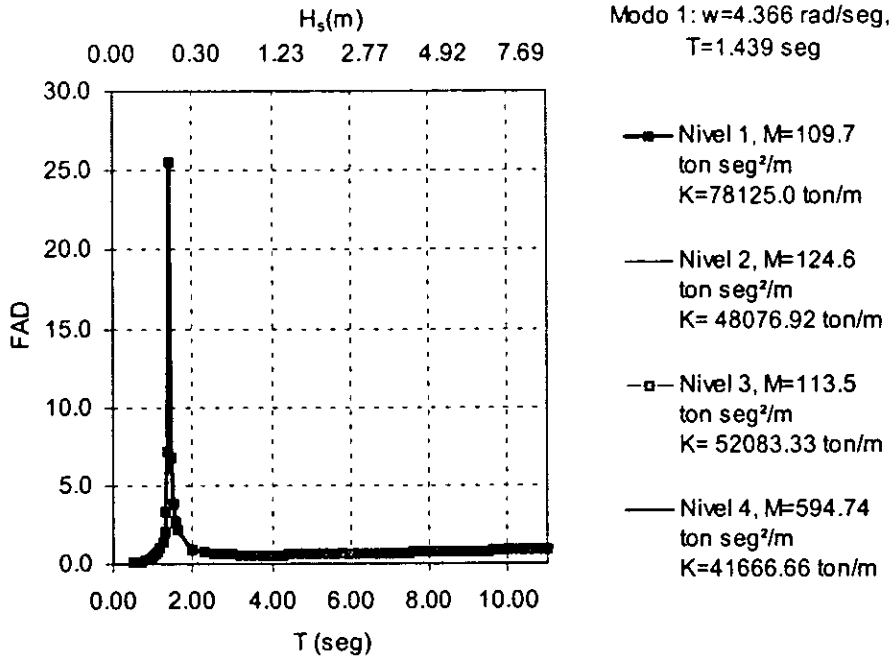


Figura 4. 40 FAD de PERFORACIÓN 1, oleaje de banda angosta, $D_e = 4$ m y dirección "x".

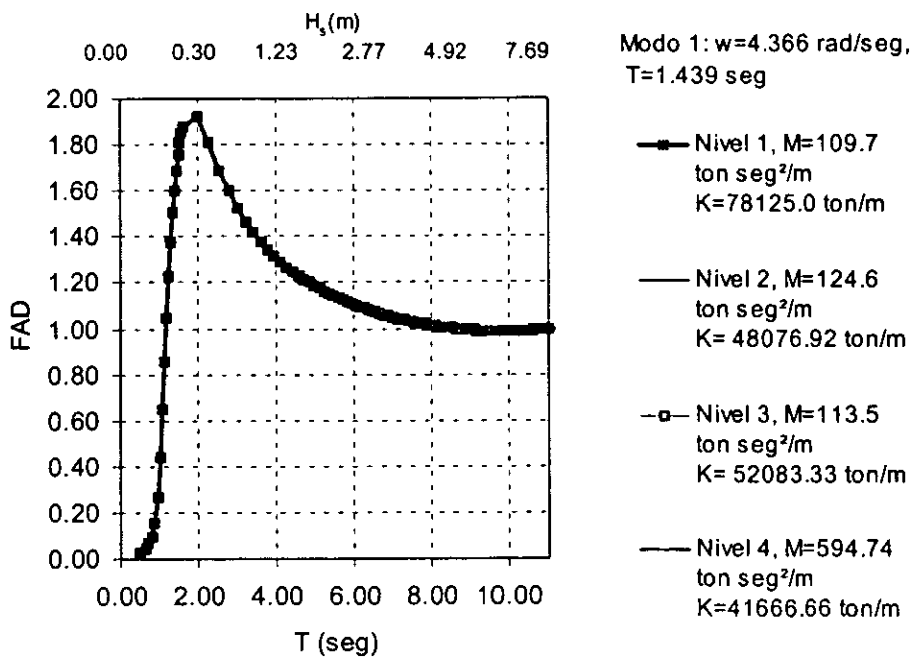


Figura 4. 41 FAD de PERFORACIÓN 1, oleaje de Pierson Moskowitz, $D_e = 4$ m y dirección "x".

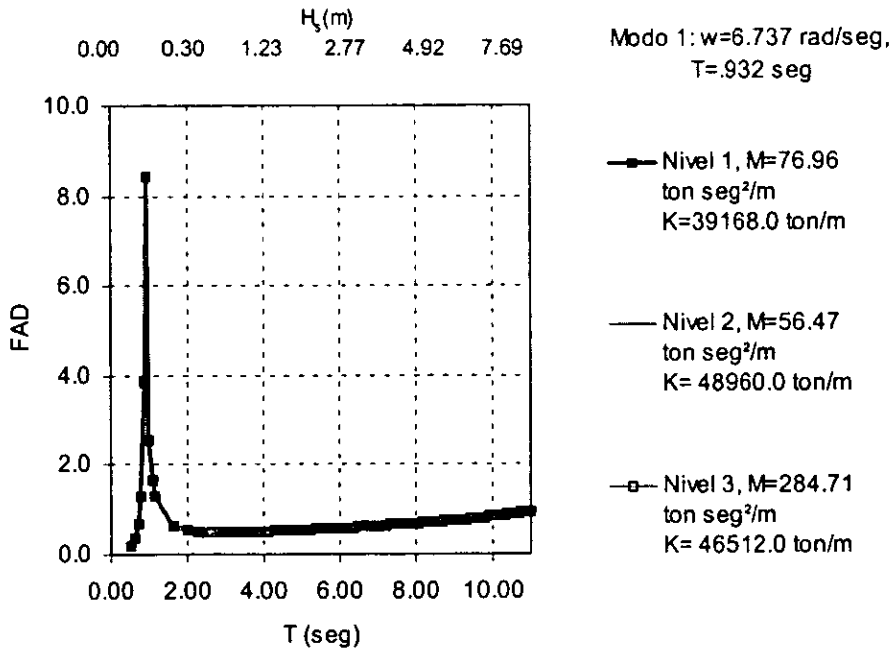


Figura 4. 42 FAD de HABITACIONAL, oleaje de banda angosta, $D_o=4$ m y dirección "x".

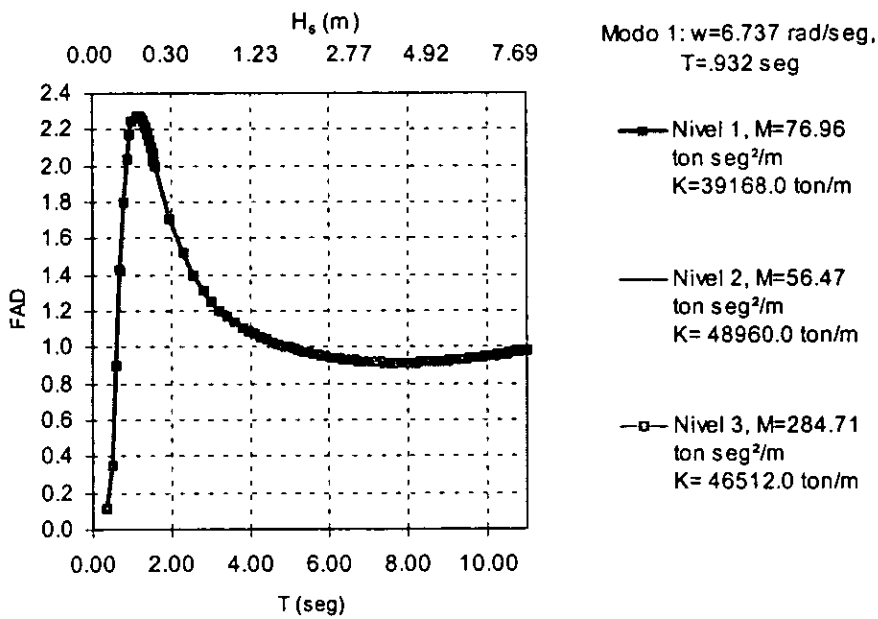


Figura 4. 43 FAD de HABITACIONAL, oleaje de Pierson Moskowitz, $D_o=4$ m y dirección "x".

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo se estudió el comportamiento dinámico de siete plataformas típicas de la Sonda de Campeche. Se evaluó la respuesta dinámica bajo la acción de oleajes modelados como: (1) un proceso aleatorio de banda angosta, homogéneo y gaussiano; y (2) un proceso homogéneo y gaussiano de banda ancha utilizando el espectro de Pierson Moskowitz. El modelo del oleaje como un proceso de banda angosta está en función del periodo pico del oleaje y éste a su vez de la altura de ola significativa, la cual para este trabajo se consideró en un intervalo de 0.02 metros a 11 metros de altura de ola significativa. En el caso del oleaje como un proceso de banda ancha se utilizó la densidad espectral de Pierson Moskowitz.

Para la solución de la respuesta dinámica se utilizó en ambos casos el método de linealización estocástica equivalente. Las plataformas se modelaron como sistemas de un

grado de libertad y de varios grados de libertad. La respuesta dinámica de interés fue el desplazamiento lateral máximo esperado.

En los modelos de 1GDL los resultados mostraron que la respuesta estructural es máxima cuando el periodo del oleaje está cerca del periodo de la estructura y se produce el fenómeno de resonancia. La respuesta tiende a ser constante para periodos de oleaje muy largos comparados con el de la estructura. El error al considerar el oleaje como un proceso de banda angosta respecto del oleaje de banda ancha (Pierson Moskowitz) es del orden de 500 % en los periodos de resonancia y disminuye aproximadamente a 50 % cuando el periodo del oleaje es muy largo. El factor de amplificación dinámica (FAD) para modelos de 1GDL, varía entre 7 y 13 para el oleaje de banda angosta y entre 1 y 2.3 para el caso del espectro de Pierson Moskowitz, en resonancia. La respuesta estructural se puede calcular mediante un análisis ante carga de oleaje estático cuando el periodo de la excitación es muy grande en comparación con el periodo de resonancia; en general esto ocurre para alturas de ola mayores que 4.9 metros donde FAD es cercano a 1.

En el caso de los modelos de VGDL, se observa también que la respuesta dinámica es máxima en resonancia, es decir cuando el periodo del oleaje está cerca del periodo fundamental, y tiende a ser constante cuando el periodo es mucho mayor que el periodo fundamental. Se comparó la respuesta estructural de modelos de 1GDL y VGDL ante la acción de los espectros de oleaje de banda angosta y Pierson Moskowitz. Se obtuvo como resultado para la plataforma Perforación 1, que la respuesta del modelo de 1GDL, en resonancia, es igual al 40% de la del modelo de VGDL para el oleaje de banda angosta y 1.55 veces mayor para el espectro de oleaje de Pierson Moskowitz. En el caso de la plataforma Habitacional, la respuesta modelo de 1GDL, en resonancia, es 1.21 veces mayor que la del modelo de VGDL para el oleaje de banda angosta y 2.2 veces mayor para el oleaje de Pierson Moskowitz. Las diferencias que observan en la respuesta de los

modelos de 1GDL respecto de los modelos de VGDL se debe principalmente a la tipo de transformación de masas y rigideces consideradas.

Según lo anterior se puede decir que es válido el uso de modelos simplificados de 1GDL considerando el oleaje de banda angosta y Pierson Moskowitz, siempre que se usen factores de corrección adecuados que dependerá del tipo de plataforma y la altura de ola a considerar. La diferencia entre los modelos de 1GDL y VGDL para valores de periodos de oleaje mayores que el periodo fundamental es pequeña y se recomienda el uso de la simplificación de la estructura como un modelo de 1GDL. El FAD, para la plataforma Perforación 1 modelada como un sistema de VGDL en resonancia, es igual a 25.5 para oleaje de banda angosta y 2.26 para el espectro de Pierson Moskowitz. El error que se comete al considerar el oleaje de banda ancha (Pierson Moskowitz) como un proceso de banda angosta es grande; este error es del orden del 500% (Habitacional) y 1400% (Perforación 1) en resonancia; conforme aumenta el periodo de oleaje el error es del orden del 35 % y 90%.

Se recomienda el uso de modelos de 1GDL aplicando el espectro de Pierson Moskowitz; la respuesta del sistema de VGDL se puede obtener corrigiendo la de modelos de 1GDL mediante factores de corrección que varían entre 0.5 y 0.7 como valor promedio de las dos plataformas consideradas. El factor de amplificación dinámica que se puede considerar para el caso del espectro de Pierson Moskowitz es 2.3 en resonancia, lo que representa un resultado razonable. Finalmente, no es recomendable modelar el oleaje como proceso de banda angosta para modelos de VGDL ya que el error en el cálculo de respuesta es muy grande en la zona de resonancia.

Bibliografía

Bea R. G. and Audibert J. M. E. (1980). "Dynamic response of laterally and axially loaded piles." *Offshore Technology Conference*, Houston Tx USA. OTC 3749.

Blumberg R. and Strader II N. R. (1969). "Dynamic analyses of offshore structures." *Offshore Technology Conference*, Houston Tx USA. OTC 1009.

Bootton, R. C., Jr. (1954). "Non linear control systems with random inputs." *IRE Transaction on Circuit Theory*.

Borgman L. E. (1967). "Spectral analysis of ocean wave forces on piling." *J. Waterways and Harbors Division*, ASCE, Vol. 93, No. WW2. Paper 5247, pp. 129-156..

Borgman L. E. (1969). "Ocean wave simulation for engineering design." *J. Waterways and Harbors Division*, ASCE, Vol. 95, No. WW4. Paper 6925, pp. 557-582.

Bui, V. D. and Penzien J. (1982). "Comparison of treatments of non-linear drag forces acting on fixed offshore platforms." *Applied Ocean Research*, Vol. 4, No. 2.

Burke B. G. and Tighe J. T. (1971). "A Time series modal for dynamic behavior of offshore structures." Offshore Technology Conference, Houston Tx USA. OTC 1403.

Chang M. T. and Tung C. C. (1990). "An approximate method for dynamic analysis of offshore structures to wave action." *Eng. Struct*, Vol 12, pp. 120-123.

Caughey, T. K. (1963). "Equivalent linearization techniques." *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 35 No. 11, 1706-1711.

Connor J. J. And Sunder S. S. (1991). "Wave theories, wave statistics, and hydrodynamic loads." Offshore Structures. D. V. Reddy and M. Arockiasamy, Editors.

Dao B. V. and Penzien J. (1980). "Treatment of non-linear drag forces acting on offshore platforms." *Earthquake Eng. Res. Center*. Report No. EERC-80/13. Colleg of Engineering University of California Berkely.

Dean R. and Dalrymple R. A. (1992). "*Water wave mechanics for engineers and scientists*." Advanced Series on Ocean Engineering. Vol. 2.

Ertas A. (1986). "Linearization technique for probabilistic riser frequency domain analysis." Transactions of the ASME. Vol. 108, pp. 292-296.

Granell E. and Silva J. (1986). "Análisis sísmico dinámico de una plataforma marina en 150 m. de profundidad de agua." Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Veracruz, México.

-
- Gu. G. Z. Et al. (1995). "Model test of wave forces on a structurally dense jacket platform." *Offshore Technology Conference*, Houston Tx USA. OTC 8065, pp. 341-347.
- Gudmestad O. T. and Connor J. J. (1983) "Linearization methods and the influence of current on the nonlinear hydrodynamic drag force". *Applied Ocean Research*. Vol. 5, No. 4.
- Hallam M. G et al. (1978). "*Dynamics of Marine Structure: Methods of calculating the dynamic response of fixed structures subject to wave and current action.*" Ciria Underwater Engineering Group.
- Hasselmann K. et al. (1973). "Measurements of wind wave growth and swell decay during the joint North sea wave project (JONSWAP)", *Deutsche Hydro, Zeitschr, Reche*, A8, 12.
- Hogben, N and Lumb, F. E. (1967). "*Ocean wave statistics*", HMSO, London.
- Instituto Mexicano de Petróleo, (2001). "Evaluación de Vibraciones en la Plataforma Habitacional Nohoch-A." Proyecto IMP F.00612.
- Inda G. and Rodriguez J. L. (1998). "Instructivo de trabajo para el análisis sísmico de plataformas marinas fijas utilizando el programa SACS." Instituto Mexicano del Petróleo.
- Inda G. and Rivera A. (1996). "Análisis sísmico estático de plataformas marinas fijas". X Congreso Nacional de Ingeniería Estructural. Mérida, México.
- Issacson M. (1993). "Wave effects on offshore structures, some recent research." *Proceeding of the International Conference Civil Engineering in the Oceans*.
- Krylov, N. and Bolgoliubov N. (1947). "Introduction to Nonlinear Mechanics Approximate Asymptotic Methods." Trans. by S. Lefshetz in *Annals of Mathematical Studies*, Vol. 11, Princeton Univ. Press.
- Krolikowski L. P. and Gay T. A. (1980). "An improved linearization technique for frequency domain riser analysis." *Offshore Technology Conference*, Houston Tx USA. OTC 3777.

Liaw C. Y. and Chopra A. K. (1973). "Dynamics of towers surrounded by water." *Earthquake engineering and structural dynamics*. Vol. 3, pp. 33-49.

Liaw C. Y. and Reimer R. B. (1975). "Hydrodynamic interaction effects on the cylindrical legs of deepwater platforms." *Offshore Technology Conference*, Houston Tx USA. OTC 2324.

Lin, Y. K. (1967). *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, McGraw-Hill.

Longuet-Higgins, M.S. (1952). "On the statistical distribution of the heights of sea waves", *Journal of Marine Research*, 11, (3), 245-266.

Malhotra, A. K. and Penzien, J. (1969). "Stochastic analysis of offshore tower structures." *Earthquake Eng. Res. Center*, Report No. EERC-69-6, College of Engineering University of California, Berkeley.

Malhotra, A. K. And Penzien, J. (1970). "Nondeterministic analysis of offshore structures." *J. Engng Mech. Div.*, ASCE, Vol. 96, 985-1003.

Morison, J.R. et al. (1950). "The force exerted by surface wave on piles", *Petroleum Transaction*, AIME, Vol. 189, pp. 149-154.

Neumann G. (1953). "On ocean wave spectra and a new method of forecasting wind generated sea", Tech Ment. 43, Beach Erosion Board, Corps of Engineers.

Nair D. and Kallaby J. (1986). "Earthquake, wave, and other dynamic considerations." *Planning and Design of fixed Offshore Platforms*. Mc Clelland, Reifel, Van Nostrand Reinhold, New York, pp. 720-759.

Patel M. H. (1989). *"Dynamics of offshore structures"*, Butterworths.

Penzien J. et al. (1972). "Stochastic response of offshore towers to random sea waves and strong motion earthquakes." *Computer & Structures*, Vol. 2, pp. 733-756.

Pierson W. J. and Holmes P. (1965). "Irregular wave forces on a pile." *J. Waterways and Harbors Division*, Vol. 91, No. WW4. Paper 4528, pp. 1-10.

Pierson, W.J. Jr. (1955). "Wind-generated gravity waves", *Adv. Geophys*, 2, 93-178.

Pierson W. J. and Moskowitz L. (1964). "A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii." *J. Geophys. Res.*, Vol. 69, No. 24.

Pierson W.J. Jr, Newmann G., James R.W. (1955). "Practical methods for observing and forecasting waves by means of wave spectra and statistics", U.S. Navy Hydrographic Office Publ, 603.

Ramos-Heredia R. (1995). "Comparisons on offshore structure response to random wave using linear and high-order, wave theories". M. of Sc. Thesis, Texas A&M University.

Rice, S.O. (1945). "Mathematical analysis of random noise", Part III, *Bell System Tech.*, 24, 46-156.

RP 2 A (1984). "Planning, designing, and constructing fixed offshore platforms."

Ruhl J. A. (1976). "Offshore platforms: observed behavior and comparisons with theory." *Offshore Technology Conference*, Houston Tx USA. OTC 2553.

SESAM (1996). "User Manual Preframe." Preprocessor for generation of frame structures. Developed and marketed by Det Norske Veritas. Version 6.4, november.

SESAM (1992). "User Manual Wajac." Wave and Current Loads on Fixed Rigid Frame Structures. Developed and marketed by Det Norske Veritas. Version 5.4-02, may.

Silva J. and Granell E. (1986). " Respuesta dinámica máxima probable de una plataforma marina ante la acción del oleaje." Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Veracruz, México.

Tayfun, M. A. (1986). "On narrow-band representation of ocean waves, 1 Theory." *J. Geophysical Res.*, 91, 7743-7782.

Valdes V. and Ortega R. (1998). "Issues and challenges in the requalification of offshore platforms in Mexico." Proceedings of the International Workshop on Platform Requalification. 17-th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering. OMAE.

Wade B. G. and Dwyer M. (1976). "On the application of Morison's Equation to fixed offshore platforms." *Offshore Technology Conference*, Houston Tx USA. OTC 2723.

Wu, S. C. (1975). "Random response of offshore structures to wave and current forces." Ph. D. Thesis, North Carolina State University. *Offshore Technology Conference*, Houston Tx USA. OTC 2723.

Wu, S. C. (1976). "The Effects of Current on Dynamic Response of Offshore Platforms." *Offshore Technology Conference*, Houston Tx USA. OTC 2540.

Apéndice 1

La altura de ola significativa (H_s) y la desviación estándar del perfil de la ola σ_η

Las propiedades del oleaje real no son realmente definibles en una base determinista. La elevación de la ola se puede representar mediante una descripción probabilística suponiendo que se trata de un proceso aleatorio, estacionario, ergódico, gaussiano, con media cero. La Figura A.3. 1 muestra una realización del proceso.

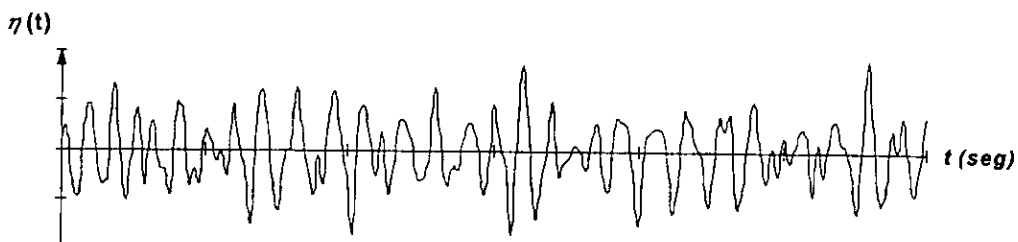


Figura A.3. 1 Elevación de la ola y función de densidad de probabilidad del perfil de la ola

La elevación de la superficie libre del agua se supone que tiene una densidad de probabilidad de primer orden gaussiana con media cero.

$$P(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma_\eta} \exp\left[-\frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}\right] \tag{A.1.1}$$

donde η es el perfil de la ola y σ_η es la desviación estandar. La función de densidad de probabilidad de la altura de ola, dada por Longuet-Higgins (1952) y Cartwright and Longuet-Higgins (1956), es

$$P(H) = \frac{H}{4\sigma_\eta^2} \exp\left[-\frac{H^2}{8\sigma_\eta^2}\right] \tag{A.1.2}$$

que corresponde a una distribución de Rayleigh. Con esta información, se puede calcular la función de densidad de probabilidad de la altura de ola significativa, definida como el promedio del tercio superior de las alturas de ola más altas.

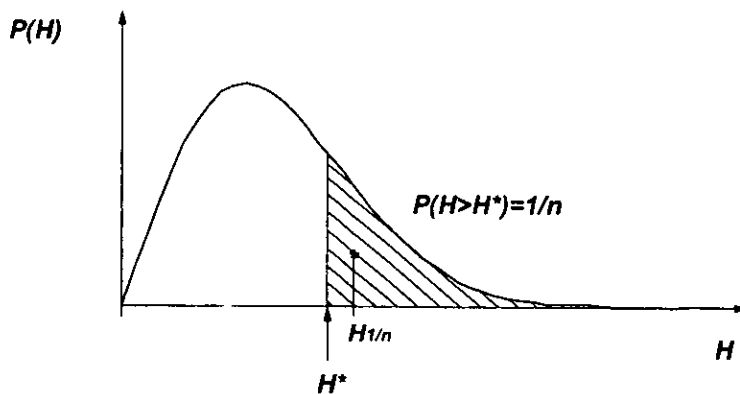


Figura A.3. 2 Función de densidad de probabilidad de Rayleigh

Generalizando, se define el concepto de la altura de ola $H_{1/n}$, como el promedio de las $(1/n)$ alturas de ola más altas. La altura de ola $H_{1/n}$, es el centroide del área bajo la función

de densidad de probabilidad de Rayleigh por encima de $H = H_n^*$ (ver Figura A.3. 2) donde el límite inferior, H_n^* , es tal que:

$$Prob(H > H_n^*) = \int_{H_n^*}^{\infty} \frac{H}{4\sigma_\eta^2} \exp\left[-\frac{H^2}{8\sigma_\eta^2}\right] dH = \frac{1}{n} \tag{A.1.3}$$

Resolviendo la integral, tenemos

$$H_n^* = \sqrt{8\sigma_\eta^2 \ln(n)} \tag{A.1.4}$$

Una vez calculado H_n^* , se calcula el centroide a través de la siguiente ecuación:

$$H_{1/n} = \frac{\int_{H_n^*}^{\infty} HP(H)dH}{\int_{H_n^*}^{\infty} P(H)dH} \tag{A.1.5}$$

La altura de ola significativa H_s se determina cuando $n=3$, $H = H_{1/3}$; sustituyendo el valor de $n=3$ en (A.1.4) y (A.1.2) en (A.1.5) se obtiene que

$$H_{1/3} = H_s = 4.004\sigma_\eta \tag{A.1.6}$$

La ecuación (A.1.6) relaciona la altura de ola significativa con la desviación estándar de la altura de la ola.

Apéndice 2

Demostración

$$E[\ddot{r}] = 0$$

El parámetro \dot{r} está en función de la velocidad de las partículas del fluido, \dot{v} , y la solución de la primera derivada del sistema estructural, \dot{u} , es decir

$$\dot{r} = \dot{v} - \dot{u} \quad (\text{A.2. 1})$$

cada término de la ecuación (A.2. 1) se representa por

$$\dot{v} = \alpha \cos(\omega_o t + \phi) \quad (\text{A.2. 2})$$

$$\dot{u} = i\omega_o H(\omega_o) e^{i(\omega_o t - \theta)} \quad (\text{A.2. 3})$$

donde ω_o es la frecuencia de la ola, ω_n es la frecuencia natural del sistema, $H(\omega_o)$ es la función de transferencia evaluada en ω_o y α es un parámetro en función de ω_o . De lo anterior los términos que están en función de ω_o y ω_n son constantes ya que no cambian en el tiempo. Por definición, el valor esperado de \dot{r} se evalúa como

$$E[\dot{r}] = E[\dot{v}] - E[\dot{u}] \quad (\text{A.2. 4})$$

Sustituyendo (A.2. 2) y (A.2. 3) en (A.2. 4)

$$E[\dot{r}] = E[\alpha \cos(\omega_o t + \phi)] - E[i\omega_o H(\omega_o) e^{i(\omega_o t - \phi)}] \quad (\text{A.2. 5})$$

La ecuación (A.2. 5) se puede escribir de la siguiente manera

$$E[\dot{r}] = \alpha E[\cos(\omega_o t + \phi)] - i\omega_o H(\omega_o) E[\cos(\omega_o t - \phi) - i \text{sen}(\omega_o t - \phi)] \quad (\text{A.2. 6})$$

Si ϕ , tiene una distribución uniforme de 0 y 2π , entonces el valor esperado de \dot{r} queda de la siguiente manera

$$E[\dot{r}] = 0 \quad (\text{A.2. 7})$$

Por lo tanto, la media de \dot{r} es constante.

Apéndice 3

Demostración

$$E[\dot{r}^2|\dot{r}] = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_{\dot{r}}^3$$

Por definición, el valor esperado de $\dot{r}|\dot{r}|$ se evalúa como

$$E[\dot{r}^2|\dot{r}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{r}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{r}^2 |\dot{r}| \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\sigma_{\dot{r}}^2}\right) d\dot{r} \quad (\text{A.3. 1})$$

Desarrollando la ecuación

$$E[\dot{r}^2|\dot{r}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{r}}} \left\{ \int_0^{\infty} \dot{r}^3 \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\sigma_{\dot{r}}^2}\right) d\dot{r} + \int_{-\infty}^0 -\dot{r}^3 \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\sigma_{\dot{r}}^2}\right) d\dot{r} \right\} \quad (\text{A.3. 2})$$

Integrando por separado cada término de la ecuación (A.3. 2) se tiene que

$$\int_0^{\infty} \dot{r}^3 \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\sigma_{\dot{r}}^2}\right) d\dot{r} \quad (\text{A.3. 3})$$

Haciendo un cambio de variable

$$u = \frac{-\dot{r}^2}{2\sigma_r^2}, \quad du = \frac{-\dot{r}^2}{\sigma_r^2} dr \tag{A.3. 4}$$

Sustituyendo (A.3. 4) en (A.3. 3) se obtiene

$$\int_0^\infty -\dot{r}^2 \sigma_r^2 \exp(u) du \tag{A.3. 5}$$

Para la solución de la integral de la ecuación (A.3. 5), aplicamos el método de integración por partes, por lo que es necesario realizar un nuevo cambio de variable de la siguiente manera

$$w = -\sigma_r^2 \dot{r}^2, \quad dw = -2\dot{r} \sigma_r^2 dr \tag{A.3. 6}$$

$$dv = \exp(u) du, \quad v = \exp(u)$$

La solución esta dada por

$$-2\dot{r}^2 \sigma_r^2 \exp\left(\frac{-\dot{r}^2}{2\sigma_r^2}\right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -2\dot{r} \sigma_r^2 \exp\left(\frac{-\dot{r}^2}{2\sigma_r^2}\right) dr \tag{A.3. 7}$$

La segunda integral se resuelve de la siguiente manera, considerando un nuevo cambio de variable

$$u = \frac{-\dot{r}^2}{2\sigma_r^2}, \quad du = \frac{-\dot{r}^2}{\sigma_r^2} dr \tag{A.3. 8}$$

La solución es

$$-2\dot{r}^2 \sigma_r^2 \exp\left(\frac{-\dot{r}^2}{2\sigma_r^2}\right) \Big|_0^\infty - 2\dot{r} \sigma_r^4 \exp\left(\frac{-\dot{r}^2}{2\sigma_r^2}\right) \Big|_0^\infty \tag{A.3. 9}$$

Aplicando límites en la ecuación (A.3. 9), la solución final de la ecuación (A.3. 2)

$$E[\dot{r}^2 | \dot{r}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} (4\sigma_r^4) \tag{A.3. 10}$$

Simplificando la ecuación (A.3. 10)

$$E[r^2|r_i] = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_r^3 \quad (\text{A.3. 11})$$

La ecuación (A.3. 11) es el valor esperado de $r^2|r_i$.

Apéndice 4

Varianza de la primera derivada de la respuesta relativa,

$$\sigma_{\dot{r}}$$

A.4.1 Determinación de la varianza de la primera derivada de la respuesta relativa, $\sigma_{\dot{r}}$.

La primera derivada de la respuesta relativa r está en función de la velocidad de las partículas del fluido, \dot{v} , y la solución de la derivada de la respuesta estructural, \dot{u} .

$$\dot{r} = \dot{v} - \dot{u} \quad (\text{A.4.1})$$

Su varianza es

$$\sigma_{\dot{r}}^2 = \sigma_{\dot{v}}^2 + \sigma_{\dot{u}}^2 - 2E[\dot{v}\dot{u}] \quad (\text{A.4.2})$$

La velocidad de las partículas del fluido es igual a (ecuación (2.16))

$$\dot{v}(t) = A\alpha \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{A.4.3}$$

y su función de autocorrelación está dada por (ecuación (2.63))

$$R_{\dot{v}\dot{v}}(\tau) = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \tag{A.4.4}$$

La varianza de \dot{v} se calcula considerando $\tau=0$ en la ecuación (A.4.4)

$$R_{\dot{v}\dot{v}}(0) = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} = \sigma_{\dot{v}}^2 \tag{A.4.5}$$

Por otro lado, la derivada de la respuesta, \dot{u} , se puede escribir como una convolución de la función de respuesta a impulsos unitarios y la fuerza equivalente de oleaje.

$$\dot{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) F(t - \tau_1) d\tau_1 \tag{A.4.6}$$

La varianza de \dot{u} , está dada por la ecuación (2.71)

$$\sigma_{\dot{u}}^2 = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} |H(\omega_0)|^2 (a^2 \omega_0^2 + b^2) \omega_0^2 \tag{A.4.7}$$

Usando las ecuaciones (A.4.3) y (A.4.6), la función de correlación cruzada de \dot{v} y \dot{u} es

$$E[\dot{v}(t)\dot{u}(t + \tau)] = A\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) E[F(t + \tau - \tau_1) \cos(\omega_0 t + \phi)] d\tau_1 \tag{A.4.8}$$

Sustituyendo la ecuación (2.44) para $F(t)$ en (A.4.8)

$$E[\dot{v}(t)\dot{u}(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) \{ aE[\dot{v}(t + \tau - \tau_1)\dot{v}(t)] + bE[\dot{v}(t + \tau - \tau_1)\dot{v}(t)] \} d\tau_1 \tag{A.4.9}$$

donde

$$a = \rho C_m V \tag{A.4.10}$$

$$b = C_d \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_s$$

Los valores esperados en el lado derecho de la ecuación (A.4.9) corresponden a las siguientes funciones de autocorrelación y correlación cruzada.

$$R_{\ddot{v}\ddot{v}}(\tau - \tau_1) = E[\ddot{v}(t + \tau - \tau_1)\ddot{v}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{v}\ddot{v}}(\omega) e^{i\omega(\tau - \tau_1)} d\omega \quad (\text{A.4.11})$$

$$R_{\dot{v}\ddot{v}}(\tau - \tau_1) = E[\dot{v}(t + \tau - \tau_1)\ddot{v}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{v}\ddot{v}}(\omega) e^{i\omega(\tau - \tau_1)} d\omega \quad (\text{A.4.12})$$

Sustituyendo (A.4.11) y (A.4.12) en (A.4.9)

$$E[\dot{v}(t)\ddot{v}(t + \tau)] = a \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{v}\ddot{v}}(\omega) e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) e^{-i\omega\tau_1} d\omega d\tau_1 + b \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{v}\ddot{v}}(\omega) e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) e^{-i\omega\tau_1} d\omega d\tau_1 \quad (\text{A.4.13})$$

En términos de la función de transferencia $H(\omega)$,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) e^{-i\omega\tau_1} d\tau_1 \quad (\text{A.4.14})$$

La ecuación (A.4.13) se puede escribir como

$$E[\dot{v}(t)\ddot{v}(t)] = a \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{v}\ddot{v}}(\omega) H(\omega) d\omega + b \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{v}\ddot{v}}(\omega) H(\omega) d\omega \quad (\text{A.4.15})$$

La función de densidad espectral de \dot{v} es (ver ecuación (2.65))

$$S_{\dot{v}\dot{v}}(\omega) = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (\text{A.4.16})$$

Dado que

$$S_{\dot{v}\ddot{v}}(\omega) = i\omega S_{\dot{v}\dot{v}}(\omega) \quad (\text{A.4.17})$$

Entonces

$$S_{\dot{v}\ddot{v}}(\omega) = i\omega \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (\text{A.4.18})$$

Sustituyendo (A.4.16) y (A.4.18) en (A.4.15) e integrando se obtiene

$$E[\dot{v}(t)\dot{u}(t)] = a\lambda_1 + b\lambda_2 \tag{A.4.19}$$

donde

$$\lambda_1 = -\frac{\sigma_A^2 \alpha^2 \omega_0}{2} \text{Im}[H(\omega_0)] \tag{A.4.20}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} \text{Re}[H(\omega_0)] \tag{A.4.21}$$

A.4.2 Procedimiento iterativo para determinar la varianza de la primera derivada de la respuesta relativa, $\sigma_{\dot{r}}$.

El valor inicial de $\sigma_{\dot{r}}$ para el procedimiento iterativo se toma considerando que $\omega_0 \neq 0$.

Entonces de la ecuación (A.4.7)

$$\sigma_v^2 = 0 \tag{A.4.22}$$

y de (A.4.20) y (A.4.21)

$$\lambda_1 = 0 \tag{A.4.23}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} \frac{1}{M_S \omega_m^2} \tag{A.4.24}$$

Sustituyendo en (A.4.19) tenemos

$$E[\dot{v}(t)\dot{u}(t)] = C_d \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{\dot{r}} \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} \frac{1}{M_S \omega_m^2} \tag{A.4.25}$$

Utilizando las ecuaciones (A.4.5), (A.4.22) y (A.4.25) en (A.4.2) se obtiene que

$$\sigma_{\dot{r}}^2 + C_d \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_A^2 \alpha^2 \frac{1}{M_S \omega_m^2} \sigma_{\dot{r}} - \frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2} = 0 \tag{A.4.26}$$

La ecuación cuadrática (A.4.26) permite determinar un primer valor de σ_f . La solución de dicha ecuación es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{A.4.27})$$

donde

$$a = 1 \quad (\text{A.4.28})$$

$$b = C_d \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_A^2 \alpha^2 \frac{1}{M_S \omega_m^2}$$

$$c = -\frac{\sigma_A^2 \alpha^2}{2}$$

Con los valores de a , b y c por medio de (A.4.27) se determina el primer valor de σ_f (1).

Este valor se utiliza para evaluar el lado derecho de la ecuación (A.4.2), de donde obtiene

un segundo valor σ_f (2). Se continúa con la iteración hasta que se satisfaga la siguiente

igualdad:

$$\sigma_{f(n)} = \sigma_{f(n-1)} \quad (\text{A.4.29})$$

donde n es el número de iteraciones necesarias para obtener σ_f .

A.4.3 Determinación de la varianza de la primera derivada de r de un sistema de varios grados de libertad considerando el primer modo de vibrar

El vector de la primera derivada de la respuesta relativa $\{\dot{r}\}$ está en función del vector de velocidad de las partículas del fluido, $\{\dot{v}\}$, y el vector de la solución de la derivada de la respuesta estructural, $\{\dot{u}\}$.

$$\{\dot{r}\} = \{\dot{v}\} - \{\dot{u}\} \quad (\text{A.4.30})$$

La respuesta de la estructura considerando solamente el primer modo de vibrar se aproxima como (ver ecuación (2.109))

$$\{u\} = \{\phi\} y, \quad \{\dot{u}\} = \{\phi\} \dot{y} \quad (\text{A.4.31})$$

donde ϕ es el vector del primer modo de la matriz modal, y es la coordenada generalizada.

Sustituyendo la ecuación (A.4.31) en (A.4.30)

$$\{\dot{r}\} = \{\dot{v}\} - \{\phi\} \dot{y} \quad (\text{A.4.32})$$

El valor esperado del vector de la primera derivada de r es

$$E[\{\dot{r}\}\{\dot{r}\}^T] = E[\{\dot{v}\}\{\dot{v}\}^T] - E[\{\dot{v}\}\dot{y}] \phi^T - \phi E[\{\dot{v}\}^T \dot{y}] + \phi \phi^T E[\dot{y}^2] \quad (\text{A.4.33})$$

La varianza de \dot{r}_i es

$$\sigma_{\dot{r}_i}^2 = \sigma_{\dot{v}_i}^2 - 2E[\dot{v}_i \dot{y}] \phi_i - \phi_i E[\dot{v}_i \dot{y}] + \phi_i^2 \sigma_{\dot{y}}^2 \quad i=1, \dots, n \quad (\text{A.4.34})$$

donde n representa los grados de libertad a considerar. La velocidad de las partículas del fluido es igual a (ecuación 2.126))

$$\dot{v}_i(t) = A \alpha_i \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (\text{A.4.35})$$

Y su función de autocorrelación está dada por (ecuación 2.128)

$$R_{\dot{v}_i \dot{v}_i}(\tau) = \frac{\sigma_A^2 \alpha_i^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \tag{A.4.36}$$

La varianza de \dot{v}_i es

$$R_{\dot{v}_i \dot{v}_i}(0) = \frac{\sigma_A^2 \alpha_i^2}{2} = \sigma_{\dot{v}_i}^2 \tag{A.4.37}$$

La derivada de la respuesta \dot{y} , se puede escribir como una convolución de la función de respuesta a impulsos unitarios y la fuerza equivalente de oleaje.

$$\dot{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) F^*(t - \tau_1) d\tau_1 \tag{A.4.38}$$

La varianza de \dot{y} , es

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega \tag{A.4.39}$$

$$\sigma_{\dot{y}}^2 = \omega_o^2 \sigma_y^2 \tag{A.4.40}$$

donde la densidad espectral $S_{yy}(\omega)$ es (ver ecuación 2.134)

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \{ \phi^T \} [S_{Fe}(\omega)] \{ \phi \} \tag{A.4.41}$$

Los términos de la matriz $[S_{Fe}(\omega)]$ se determinan de la siguiente manera

$$S_{Feij}(\omega) = (a^2 \omega^2 + b_i b_j) \frac{\sigma_A^2 \alpha_i \alpha_j}{4} [\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)] \tag{A.4.42}$$

Usando las ecuaciones (A.4.35) y (A.4.38), la función de correlación cruzada de \dot{v}_i y \dot{y} es

$$E[\dot{v}_i(t) \dot{y}(t + \tau)] = A \alpha_i \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) E[F(t + \tau - \tau_1) \cos(\omega_o t + \phi)] d\tau_1 \tag{A.4.43}$$

Sustituyendo la ecuación (2.131) para $F^*(t)$ en (A.4.43)

$$E[\dot{v}_i(t)\dot{v}_i(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t)\{\phi\}^T [a] E[\{\ddot{v}(t+\tau+\tau_1)\}\dot{v}_i(t)] d\tau_1 \tag{A.4.44}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t)\{\phi\}^T [b] E[\{\dot{v}(t+\tau+\tau_1)\}\dot{v}_i(t)] d\tau_1$$

donde

$$[a] = [\rho C_m V] \tag{A.4.45}$$

$$[b] = [C_d \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{\dot{v}_i}]$$

En (A.4.45) $[a]$ y $[b]$ representan una matriz diagonal con los valores que se encuentran en el lado derecho de esta ecuación.

Los valores esperados en el lado derecho de la ecuación (A.4.44) corresponden las siguientes funciones de autocorrelación y correlación cruzada

$$R_{\{\ddot{v}\}\dot{v}_i}(\tau - \tau_1) = E[\{\ddot{v}(t + \tau - \tau_1)\}\dot{v}_i(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\{\ddot{v}\}\dot{v}_i}(\omega) e^{i\omega(\tau - \tau_1)} d\omega \tag{A.4.46}$$

$$R_{\{\dot{v}\}\dot{v}_i}(\tau - \tau_1) = E[\{\dot{v}(t + \tau - \tau_1)\}\dot{v}_i(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\{\dot{v}\}\dot{v}_i}(\omega) e^{i\omega(\tau - \tau_1)} d\omega \tag{A.4.47}$$

Sustituyendo (A.4.46) y (A.4.47) en (A.4.44)

$$E[\dot{v}_i(t)\dot{v}_i(t+\tau)] = \{\phi\}^T [a] \int_{-\infty}^{\infty} S_{\{\ddot{v}\}\dot{v}_i}(\omega) e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) e^{-i\omega\tau_1} d\omega d\tau_1 \tag{A.4.48}$$

$$+ \{\phi\}^T [b] \int_{-\infty}^{\infty} S_{\{\dot{v}\}\dot{v}_i}(\omega) e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) e^{-i\omega\tau_1} d\omega d\tau_1$$

La ecuación (A.4.48) se puede escribir en términos de la función de transferencia $H(\omega)$,

$$E[\dot{v}_i(t)\dot{v}_i(t)] = \{\phi\}^T [a] \int_{-\infty}^{\infty} S_{\{\ddot{v}\}\dot{v}_i}(\omega) H(\omega) d\omega + \{\phi\}^T [b] \int_{-\infty}^{\infty} S_{\{\dot{v}\}\dot{v}_i}(\omega) H(\omega) d\omega \tag{A.4.49}$$

La función de densidad espectral de $\{\dot{v}\}\dot{v}_i$ es

$$S_{\{\dot{v}\}\dot{v}_i}(\omega) = \frac{\sigma_A^2 \{\alpha\} \alpha_i}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (\text{A.4.50})$$

Dado que

$$S_{\{\dot{v}\}\dot{v}_i}(\omega) = i\omega S_{\{v\}v_i}(\omega) \quad (\text{A.4.51})$$

Entonces

$$S_{\{v\}v_i}(\omega) = i\omega \frac{\sigma_A^2 \{\alpha\} \alpha_i}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (\text{A.4.52})$$

Sustituyendo (A.4.50) y (A.4.52) en (A.4.49) e integrando se obtiene

$$E[\dot{v}_i(t)\dot{u}(t)] = \{\phi^T\} [a] \{\lambda_1\} + \{\phi^T\} [b] \{\lambda_2\} \quad (\text{A.4.53})$$

donde

$$\{\lambda_1\}_i = -\frac{\sigma_A^2 \{\alpha\} \alpha_i \omega_0}{2} \text{Im}[H(\omega_0)] \quad (\text{A.4.54})$$

$$\{\lambda_2\}_i = \frac{\sigma_A^2 \{\alpha\} \alpha_i}{2} \text{Re}[H(\omega_0)] \quad (\text{A.4.55})$$

A.4.4 Procedimiento iterativo para determinar la varianza de la primera

derivada de la respuesta relativa, $\sigma_{\dot{r}_i}$.

En este caso se considerará un valor inicial del vector $\{\sigma_r\}$, para el procedimiento iterativo de cada término de este vector se toma considerando que $\omega_0=0$. Entonces de la ecuación (A.4.40)

$$\sigma_{\dot{y}}^2 = 0 \quad (\text{A.4.56})$$

y de (A.4.54) y (A.4.55)

$$\{\lambda_1\}_i = 0 \tag{A.4.57}$$

$$\{\lambda_2\}_i = \frac{\sigma_A^2 \{\alpha\} \alpha_i}{2} \frac{1}{M_S \omega_m^2} \tag{A.4.58}$$

Sustituyendo en (A.4.53) tenemos

$$E[\dot{y}_i(t)\dot{y}(t)] = \{\phi^T\} [b] \frac{\sigma_A^2 \{\alpha\} \alpha_i}{2} \frac{1}{M_S \omega_m^2} \tag{A.4.59}$$

Utilizando las ecuaciones (A.4.37), (A.4.56) y (A.4.59) en (A.4.34) se obtiene que

$$\sigma_{\ddot{r}i}^2 + \{\phi^T\} [b] \{\alpha\} \alpha_i \sigma_A^2 \frac{1}{M_S \omega_m^2} \phi_i - \frac{\sigma_A^2 \alpha_i^2}{2} = 0 \tag{A.4.60}$$

En la ecuación (A.4.60) no se puede resolver utilizando la ecuación cuadrática como en el caso de un grado de libertad, esto es debido a que la matriz $[b]$ (ver ecuación (A.4.45)) está en función de $\sigma_{\ddot{r}i}$. Por lo tanto, el primer valor a considerar para $\sigma_{\ddot{r}i}$ es

$$\sigma_{\ddot{r}i} = \frac{\sigma_A^2 \alpha_i^2}{2} \tag{A.4.61}$$

Este valor se utiliza para evaluar el lado derecho de la ecuación (A.4.34), de donde obtiene un segundo valor para el vector $\sigma_{\ddot{r}i}$ (2). Se continúa con la iteración hasta que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\sigma_{\ddot{r}i(n)} = \sigma_{\ddot{r}i(n-1)} \tag{A.4.62}$$

donde n es el número de iteraciones necesarias para obtener el vector $\sigma_{\ddot{r}i}$.

Apéndice 5

Densidad espectral de la excitación

La ecuación de la fuerza equivalente de oleaje según la ecuación de Morison es,

$$F(t) = a\ddot{v}(t) + b\dot{v}(t) \quad (\text{A.5. 1})$$

donde

$$a = \rho c_m V \quad (\text{A.5. 2})$$

$$b = C_D \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_i$$

Por definición la función de autocorrelación de $F(t)$ es,

$$E[F(t)F(t + \tau)] = a^2 E[\ddot{v}(t + \tau)\ddot{v}(t)] + b^2 E[\dot{v}(t + \tau)\dot{v}(t)] + abE[\dot{v}(t + \tau)\ddot{v}(t)] + abE[\ddot{v}(t + \tau)\dot{v}(t)] \tag{A.5. 3}$$

Los valores esperados en el lado derecho de (A.5. 4) corresponden a las funciones de autocorrelación y correlación cruzada de \dot{v} y \ddot{v} .

$$R_{FF}(\tau) = a^2 R_{\ddot{v}\ddot{v}}(\tau) + b^2 R_{\dot{v}\dot{v}}(\tau) + abR_{\dot{v}\ddot{v}}(\tau) + abR_{\ddot{v}\dot{v}}(\tau) \tag{A.5. 4}$$

Por definición la función de densidad espectral del proceso F está dada por:

$$S_{FF}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{FF}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{A.5. 5}$$

Sustituyendo (A.5. 4) en (A.5. 5)

$$S_{FF}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\begin{aligned} &a^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{\ddot{v}\ddot{v}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + b^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{\dot{v}\dot{v}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + ab \int_{-\infty}^{\infty} R_{\dot{v}\ddot{v}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &+ ab \int_{-\infty}^{\infty} R_{\ddot{v}\dot{v}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \end{aligned} \right) \tag{A.5. 6}$$

Del último término de la ecuación (A.5. 6), haciendo un cambio de variables tenemos

$$- \int_{\infty}^{-\infty} R_{\ddot{v}\dot{v}}(-\varphi) e^{i\omega\varphi} d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\ddot{v}\dot{v}}(-\varphi) e^{i\omega\varphi} d\varphi \tag{A.5. 7}$$

Dado que

$$R_{\ddot{v}\dot{v}}(-\varphi) = R_{\dot{v}\ddot{v}}(\varphi) \tag{A.5. 8}$$

Sustituyendo (A.5. 8) en (A.5. 7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{\ddot{v}\dot{v}}(-\varphi) e^{i\omega\varphi} d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\dot{v}\ddot{v}}(\varphi) e^{i\omega\varphi} d\varphi \tag{A.5. 9}$$

De lo anterior podemos simplificar la ecuación (A.5. 6)

$$S_{FF}(\omega) = a^2 S_{\ddot{v}\ddot{v}}(\omega) + b^2 S_{\dot{v}\dot{v}}(\omega) + 2ab \operatorname{Re}[S_{\dot{v}\ddot{v}}(\omega)] \tag{A.5. 10}$$

Por otro lado, si consideramos que $S_{\dot{v}\dot{v}}(\omega)$ es dato, entonces la densidad espectral de la derivada de la respuesta es

$$S_{\ddot{w}}(\omega) = \omega^2 S_{\dot{w}}(\omega) \quad (\text{A.5. 11})$$

Dado que

$$S_{\dot{w}}(\omega) = -i\omega S_{w}(\omega) \quad (\text{A.5. 12})$$

entonces

$$\text{Re}[S_{\ddot{w}}(\omega)] = 0 \quad (\text{A.5. 13})$$

Sustituyendo (A.5. 13) en (A.5. 10)

$$S_{FF}(\omega) = a^2 S_{\ddot{w}}(\omega) + b^2 S_{\dot{w}}(\omega) \quad (\text{A.5. 14})$$

y de (A.5. 11)

$$S_{FF}(\omega) = a^2 \omega^2 S_{\dot{w}}(\omega) + b^2 S_{\dot{w}}(\omega) \quad (\text{A.5. 15})$$

Factorizando la ecuación (A.5. 15) se tiene

$$S_{FF}(\omega) = (a^2 \omega^2 + b^2) S_{\dot{w}}(\omega) \quad (\text{A.5. 16})$$

Donde $S_{FF}(\omega)$ es la función de densidad espectral de la excitación por oleaje.

A.5.1 Densidad espectral de la excitación para varios grados de libertad considerando el primer modo

El vector de fuerza generalizada del fluido está dado por

$$\{F_e\} = [a]\{\ddot{v}\} + [b]\{\dot{v}\} \tag{A.5. 17}$$

donde

$$\begin{aligned} [a] &= [c_{mv}] \\ [b] &= [\hat{c}_j] \end{aligned} \tag{A.5. 18}$$

Considerando el primer modo de la plataforma, la fuerza de oleaje se simplifica como (ver ecuación 2.114)

$$F^* = \phi^T \{F_e\} \tag{A.5. 19}$$

donde ϕ es el vector del primer modo de la matriz modal

Por definición la función de autocorrelación de F^* es

$$E[F^*(t)F^*(t + \tau)] = \phi^T E[\{F_e(t)\}\{F_e(t + \tau)^T\}]\phi \tag{A.5. 20}$$

El segundo término de la ecuación (A.5. 20) representa el producto de dos vectores para formar una matriz cuadrada de $n \times n$. El valor de n corresponde al número de grados de libertad.

$$\{F_e(t)\}\{F_e(t + \tau)^T\} = \begin{bmatrix} F_{e1}F_{e1} & F_{e1}F_{e2} & \dots & F_{e1}F_{en} \\ F_{e2}F_{e1} & F_{e2}F_{e2} & \dots & F_{e2}F_{en} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{en}F_{e1} & F_{en}F_{e2} & \dots & F_{en}F_{en} \end{bmatrix} \tag{A.5. 21}$$

Cada término de la matriz de la ecuación (A.5. 21) se determina de la siguiente manera

$$F_{ei}(t) = a\ddot{v}_i(t) + b_i\dot{v}_i(t) \quad i=1,2,\dots, n \tag{A.5. 22}$$

$$F_{ej}(t + \tau) = a\ddot{v}_j(t + \tau) + b_j\dot{v}_j(t + \tau) \quad j=1,2,\dots,n \tag{A.5. 23}$$

Los valores de la matriz diagonal [a] de la ecuación (A.5. 18) son todos los mismos por lo que se simplifica la ecuación (A.5. 22) y (A.5. 23)

$$E[F_{ei}(t)F_{ej}(t + \tau)] = a^2 E[\ddot{v}_j(t + \tau)\ddot{v}_i(t)] + b_j b_i E[\dot{v}_j(t + \tau)\dot{v}_i(t)] + ab_j E[\dot{v}_j(t + \tau)\ddot{v}_i(t)] + ab_i E[\ddot{v}_j(t + \tau)\dot{v}_i(t)] \quad (A.5. 24)$$

Considerando la función de autocorrelación y correlación cruzada de \dot{v} y \ddot{v} en la ecuación (A.5. 24)

$$R_{F_{ej}}(\tau) = a^2 R_{\ddot{v}\ddot{v}}(\tau) + b_i b_j R_{\dot{v}\dot{v}}(\tau) + ab_i R_{\dot{v}\ddot{v}}(\tau) + ab_j R_{\ddot{v}\dot{v}}(\tau) \quad (A.5. 25)$$

Por definición la función de densidad espectral del proceso F_{ej} es

$$S_{F_{ej}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{F_{ej}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (A.5. 26)$$

Sustituyendo la ecuación (A.5. 25) en (A.5. 26)

$$S_{F_{ej}}(\omega) = a^2 S_{\ddot{v}\ddot{v}}(\omega) + b_i b_j S_{\dot{v}\dot{v}}(\omega) + ab_i S_{\dot{v}\ddot{v}}(\omega) + ab_j S_{\ddot{v}\dot{v}}(\omega) \quad (A.5. 27)$$

Simplificando la ecuación (A.5. 27)

$$S_{F_{ej}}(\omega) = a^2 S_{\ddot{v}\ddot{v}}(\omega) + b_i b_j S_{\dot{v}\dot{v}}(\omega) + a(i\omega) S_{\dot{v}\ddot{v}}(\omega) [-b_i + b_j] \quad (A.5. 28)$$

donde

$$S_{\dot{v}\ddot{v}}(\omega) = -i\omega S_{\ddot{v}\dot{v}}(\omega) \quad (A.5. 29)$$

$$S_{\ddot{v}\dot{v}}(\omega) = i\omega S_{\dot{v}\ddot{v}}(\omega) \quad (A.5. 30)$$

Dado que sólo se considera la parte real de la función de densidad espectral del proceso F_{ej} entonces la ecuación (A.5. 28) queda como

$$S_{F_{ej}}(\omega) = (a^2 \omega^2 + b_i b_j) S_{\dot{v}\dot{v}}(\omega) \quad (A.5. 31)$$

donde $S_{F_{ej}}(\omega)$ es la función de densidad espectral del proceso F_{ej} .

Con la ecuación (A.5. 31) se resuelve cada término de la matriz de la ecuación (A.5. 21).

Apéndice 6

A.6.1 Respuesta máxima de plataformas modeladas como sistemas de un grado de libertad; $D_e = 6$ m

Las figuras A.6.1 a la A.6.5 representan la respuesta máxima de varias plataformas de un grado de libertad considerando la excitación como un proceso de banda angosta y el espectro de Pierson Moskowitz, diámetro equivalente $D_e = 6$ metros, dirección de análisis "x" y "y".

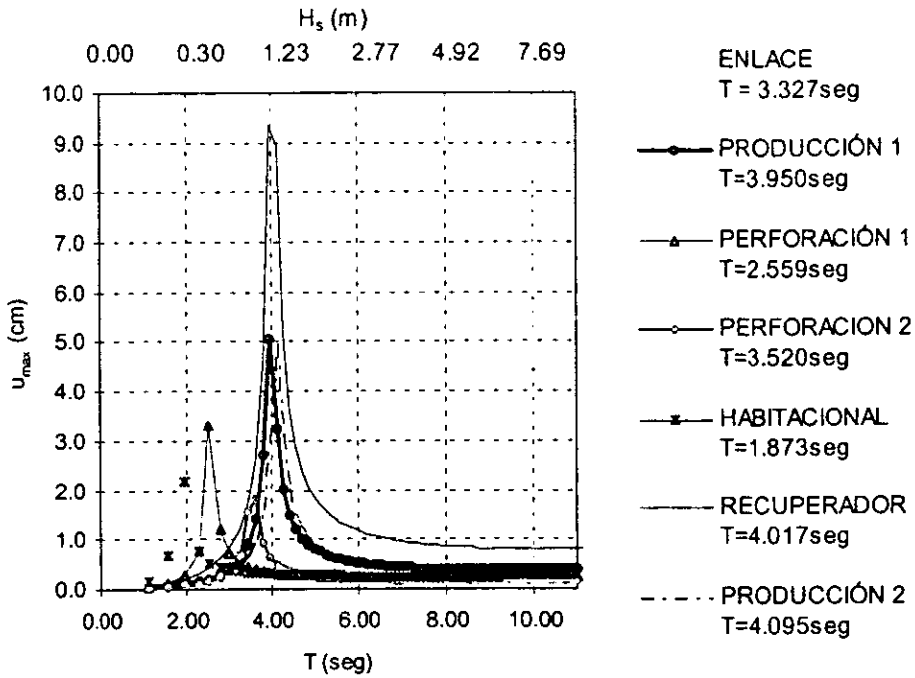


Figura A.6. 1. Respuesta máxima aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=6m$ y dirección X.

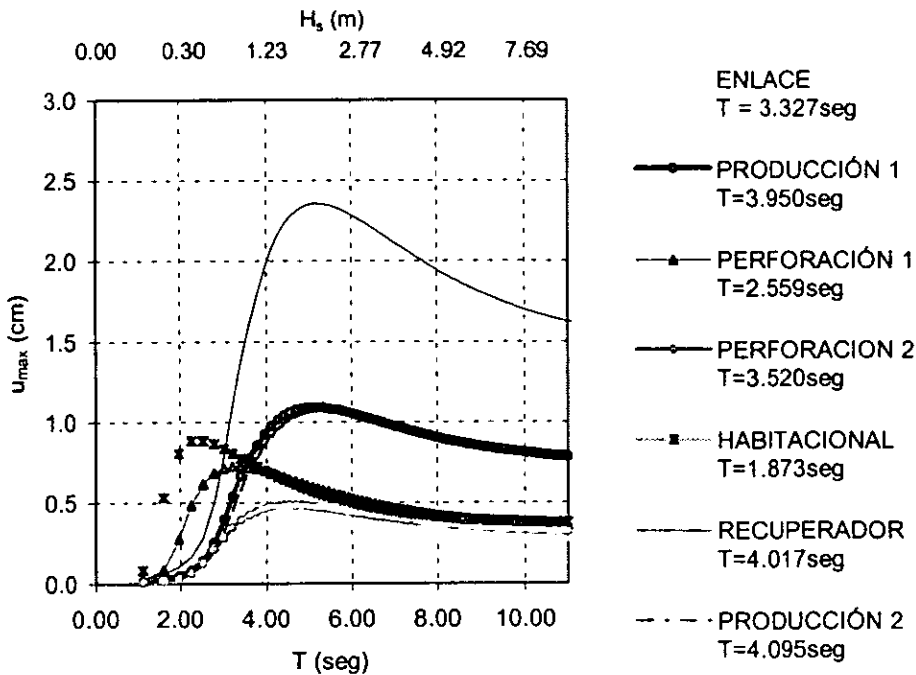


Figura A.6. 2. Respuesta máxima aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=6m$ y dirección X.

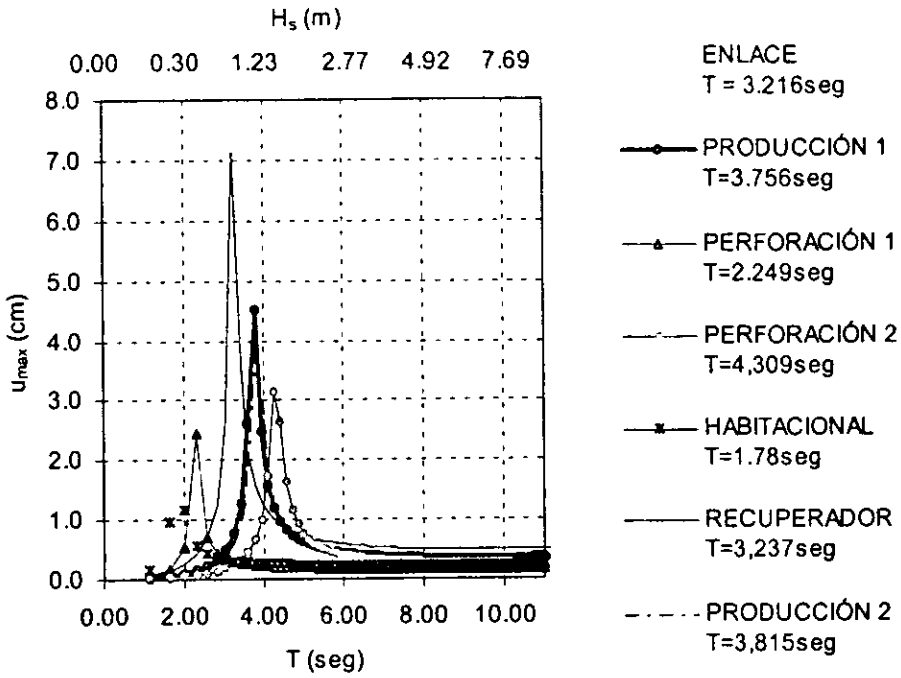


Figura A.6. 3. Respuesta máxima aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=6m$ y dirección Y.

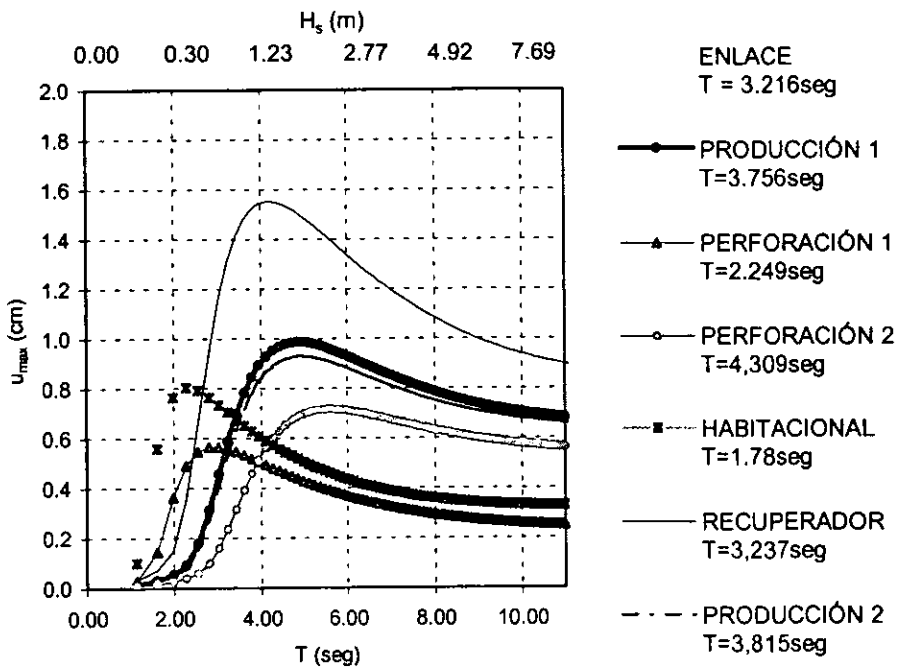


Figura A.6. 4. Respuesta máxima aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=6m$ y dirección Y.

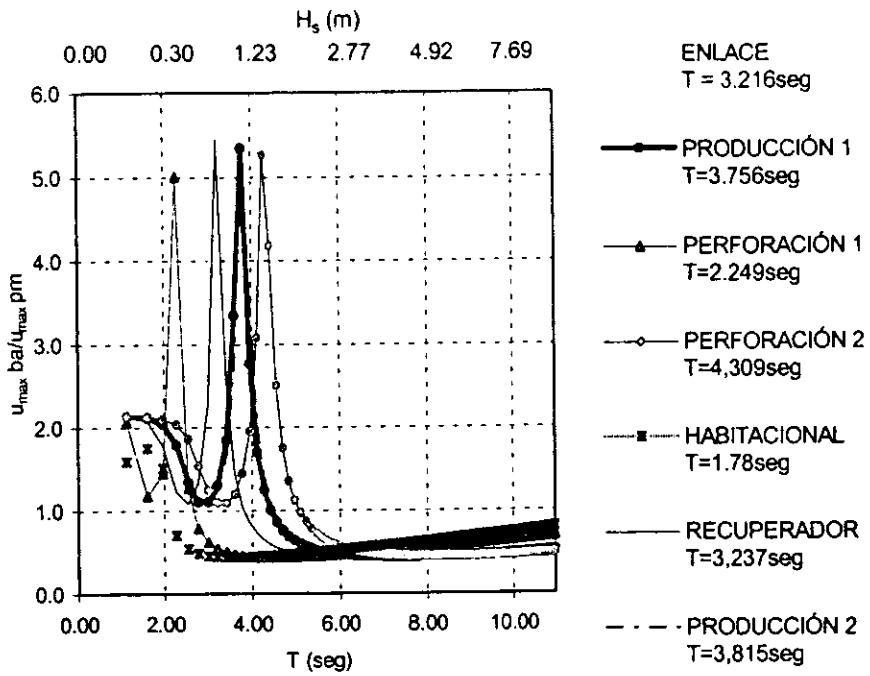


Figura A.6. 5 Relación de respuestas, banda angosta y Pierson Moskowitz, $D_e=6m$ y dirección Y.

A.6.2 Respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad con rigidez constante y masa variable

Las figuras A.6.6 a la A.6.7 representan la respuesta máxima de una plataforma modelada como un sistema de un grado de libertad considerando la excitación como un proceso de banda angosta y el espectro de Pierson Moskowitz, diámetro equivalente $D_e = 6$ metros, considerando la rigidez lateral $K=2500$ ton/m y la masa variable.

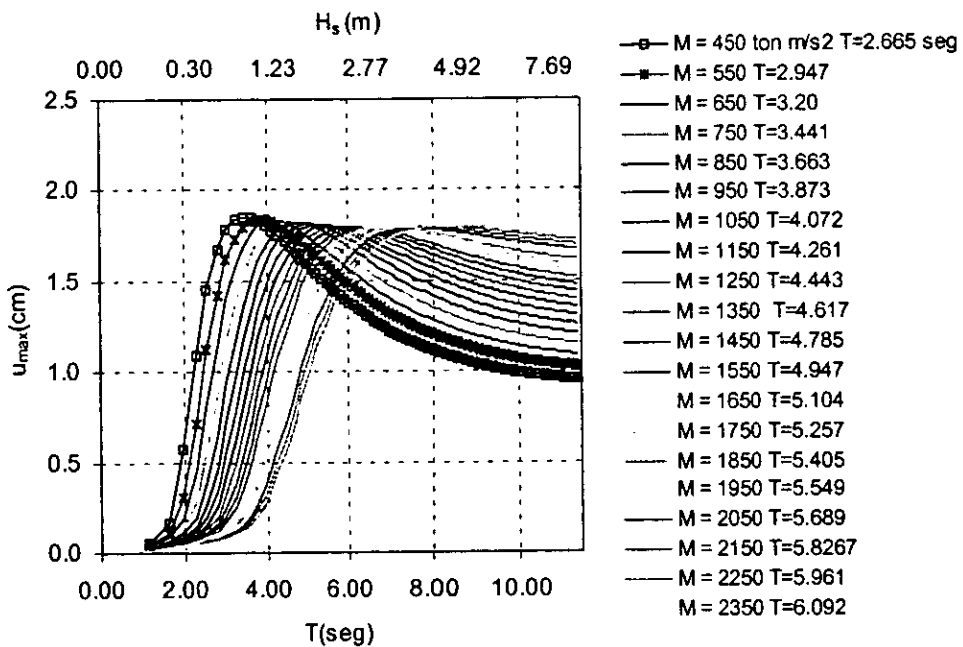


Figura A.6. 6. Respuesta máxima aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=6m$ con rigidez constante y masa variable.

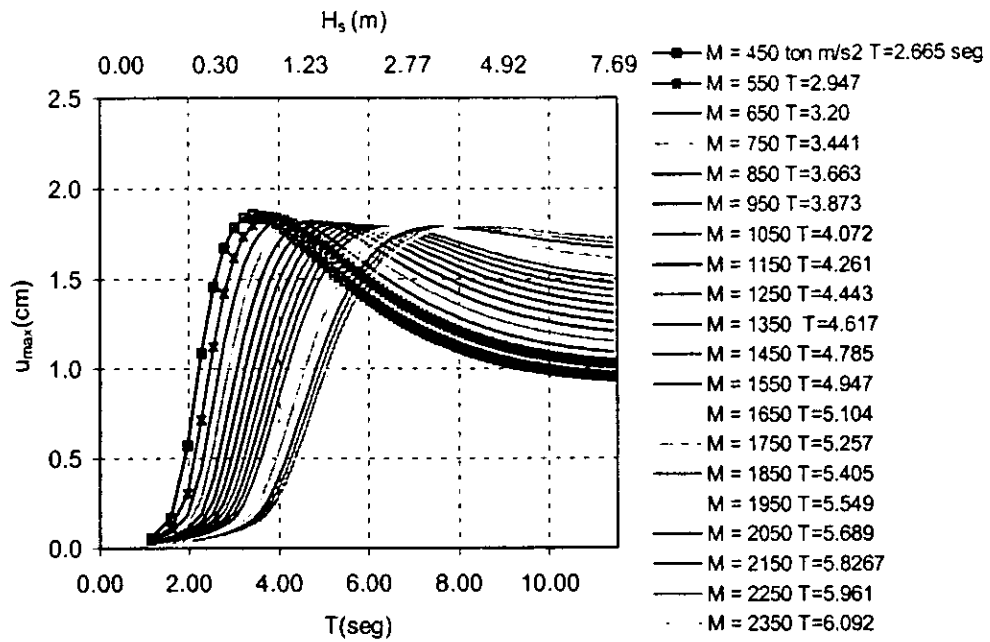


Figura A.6. 7. Respuesta máxima aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_w=6m$ con rigidez constante y masa variable.

A.6.3 Respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad con rigidez variable y masa constante

Las figuras A.6.8 a la A.6.9 representan la respuesta máxima de una plataforma modelada como un sistema de un grado de libertad considerando la excitación como un proceso de banda angosta y el espectro de Pierson Moskowitz, diámetro equivalente $D_e = 6$ metros, considerando la rigidez lateral variable y la masa constante $M=2500$ ton m/seg^2 .

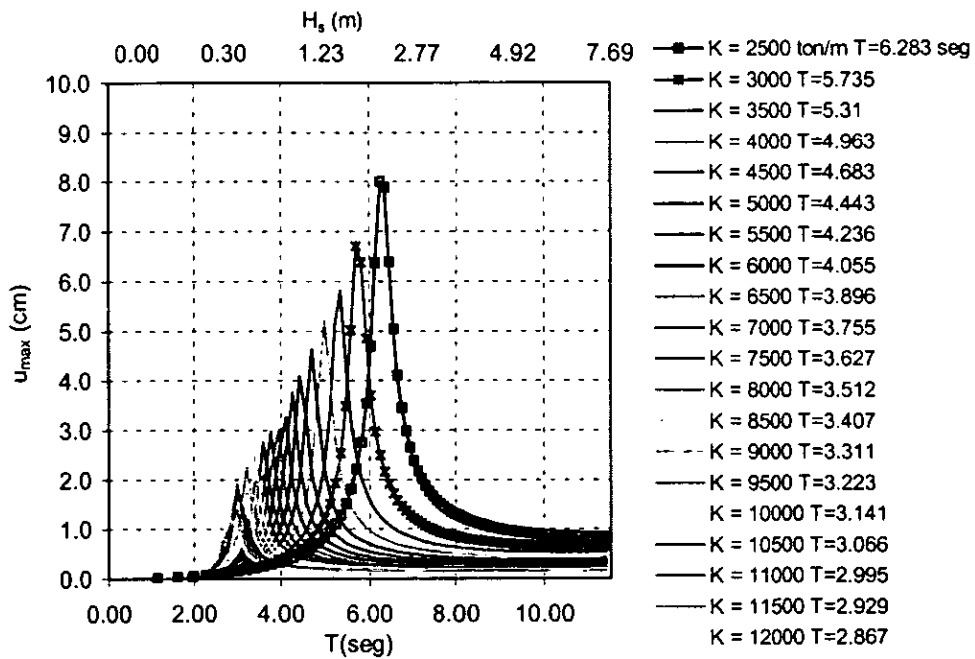


Figura A.6. 8. Respuesta máxima aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=6m$ con rigidez variable y masa constante.

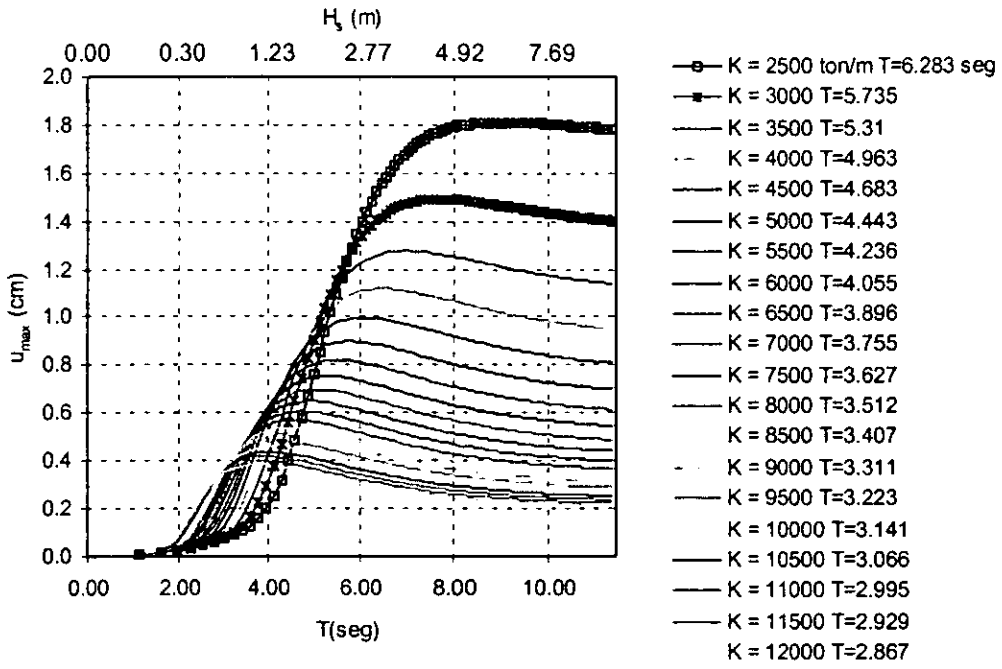


Figura A.6. 9. Respuesta máxima aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_s=6m$ con rigidez variable y masa constante.

A.6.4 Respuesta máxima de la Plataforma Perforación 1 aplicando un sistema de varios grados de libertad

Las figuras (A.6.10 a la A.6.13) representan la respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 considerando la excitación como un proceso de banda angosta y el espectro de Pierson Moskowitz, diámetro equivalente $D_e = 4$ m, dirección de análisis "y". En la Figura A.6. 14 muestra el error al aplicar el oleaje de banda angosta.

En la figuras A.6.15 a la A.6.18 y A.6. 20 a la A.6.23 representan la respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 considerando la excitación como un proceso de banda angosta y el espectro de Pierson Moskowitz, diámetro equivalente $D_e = 6$ m, dirección de análisis "x" y "y". En las figuras A.6.20 Y A.6.24 se muestra el error al aplicar el oleaje de banda angosta.

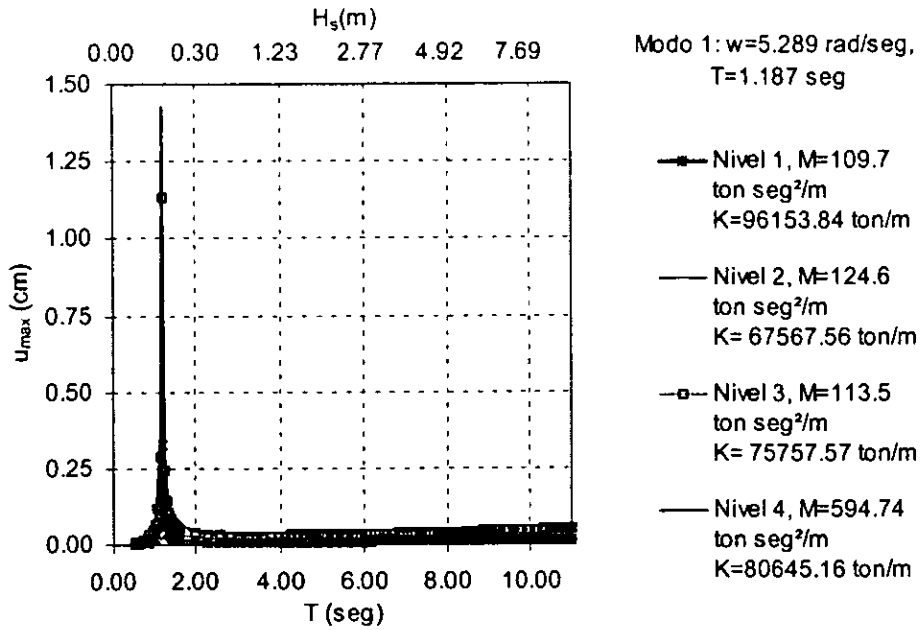


Figura A.6. 10. Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL) aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=4$ m y dirección "Y".

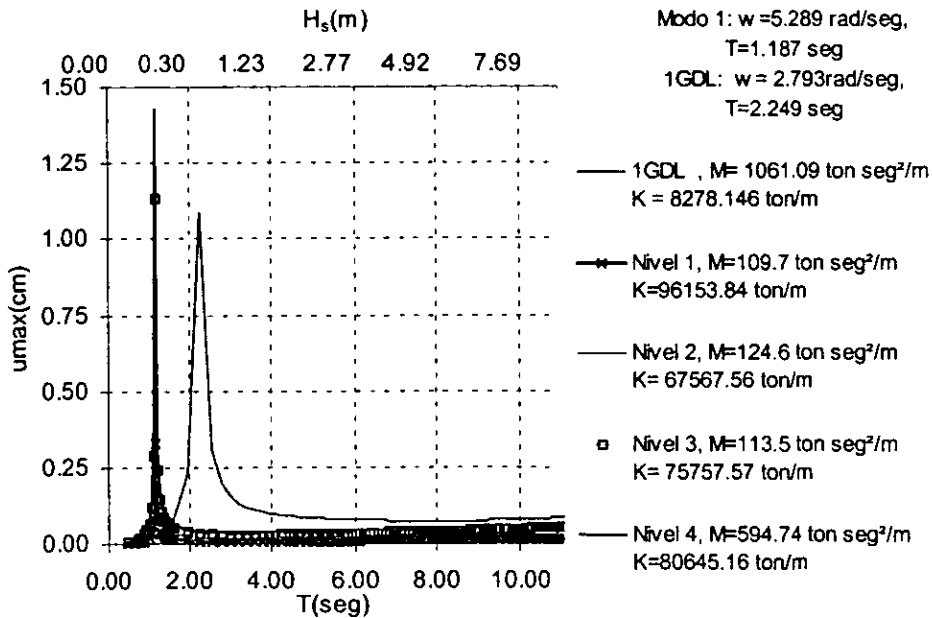


Figura A.6. 11. Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL y 1GDL) aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=4$ m y dirección "Y".

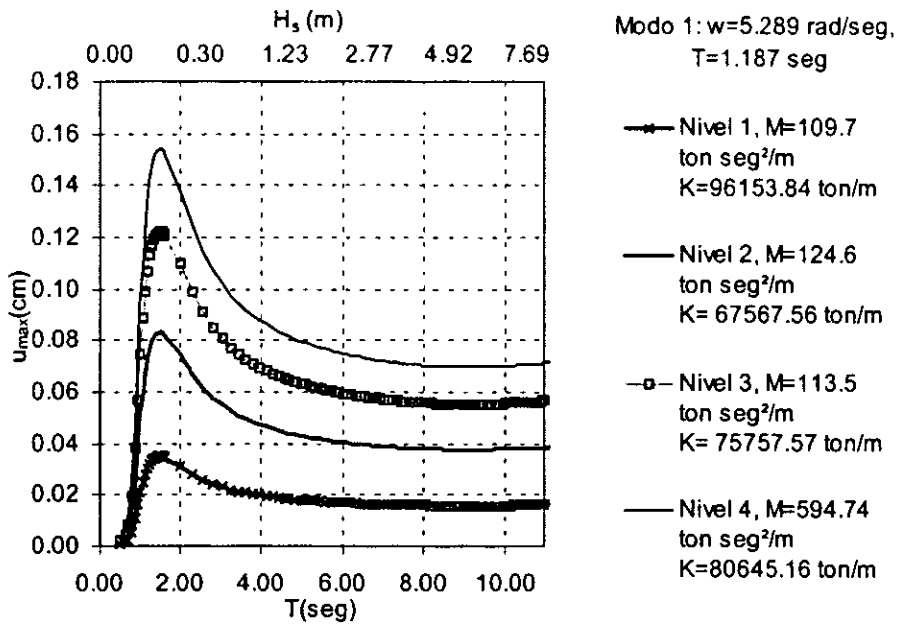


Figura A.6. 12. Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL) aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=4$ m y dirección "Y".

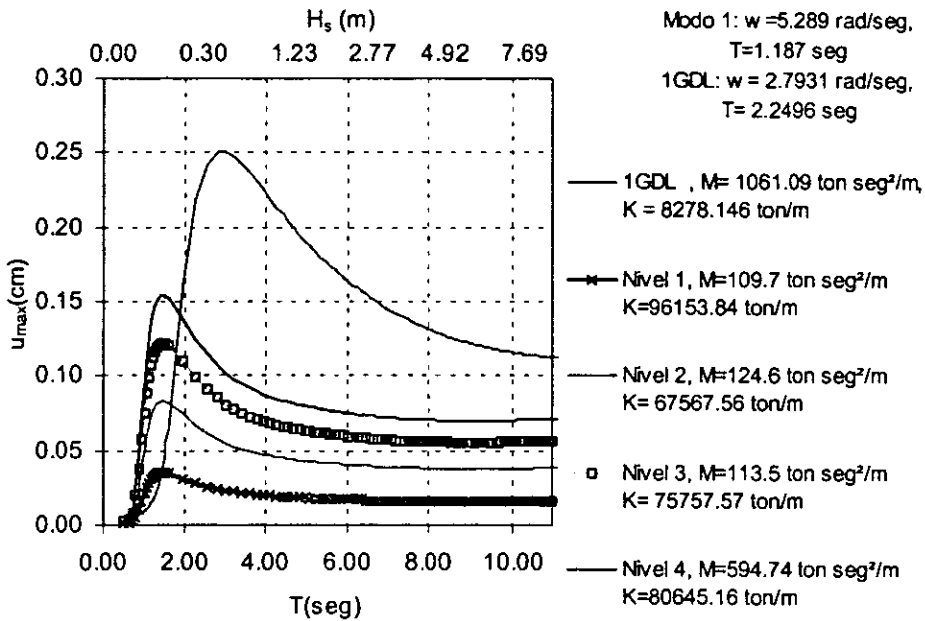


Figura A.6. 13. Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL y 1GDL) aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=4$ m y dirección "Y".

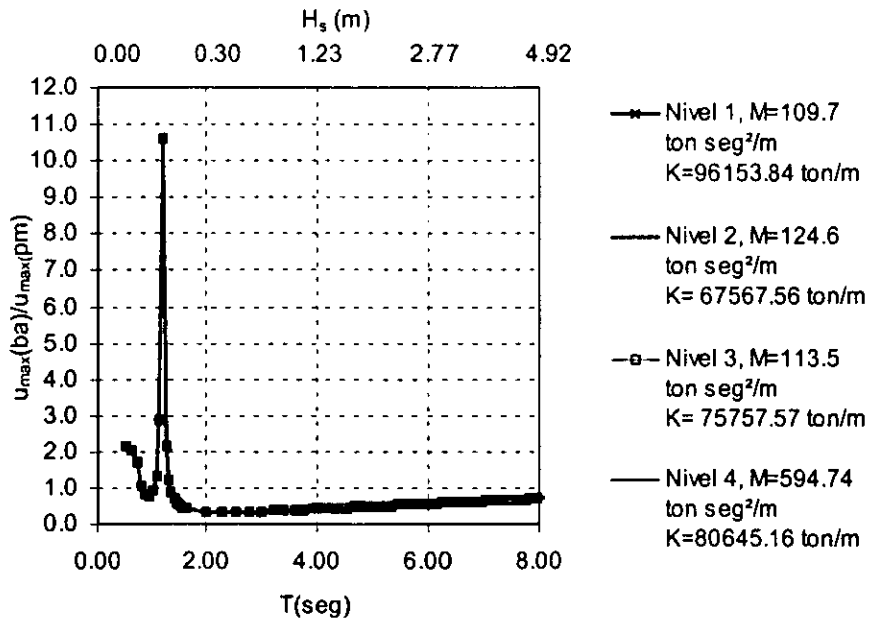


Figura A.6. 14 Relación de respuesta máxima (banda angosta / Pierson Moskowitz) de Perforación 1, $D_e=4m$ en la dirección "Y".

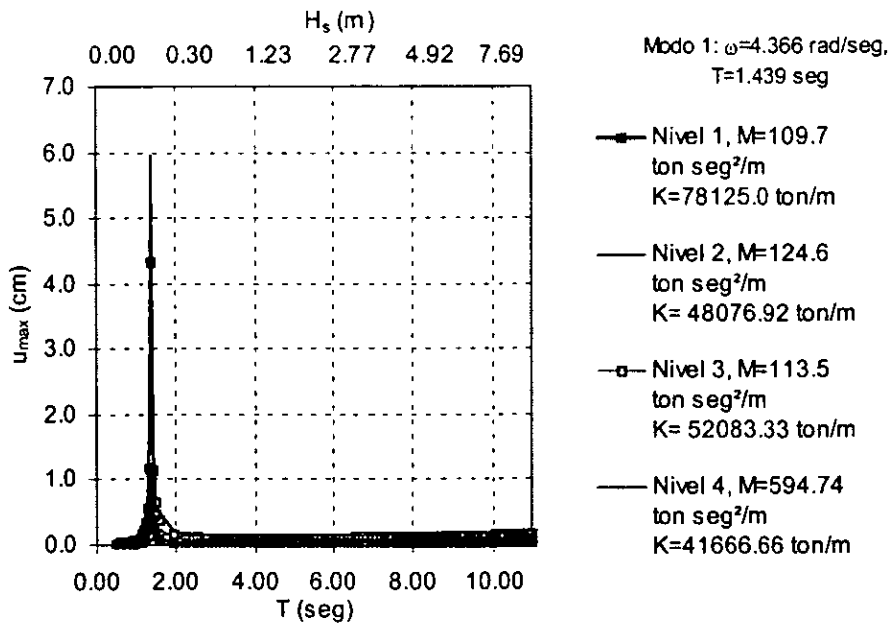


Figura A.6. 15. Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL) aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=6$ m y dirección "X".

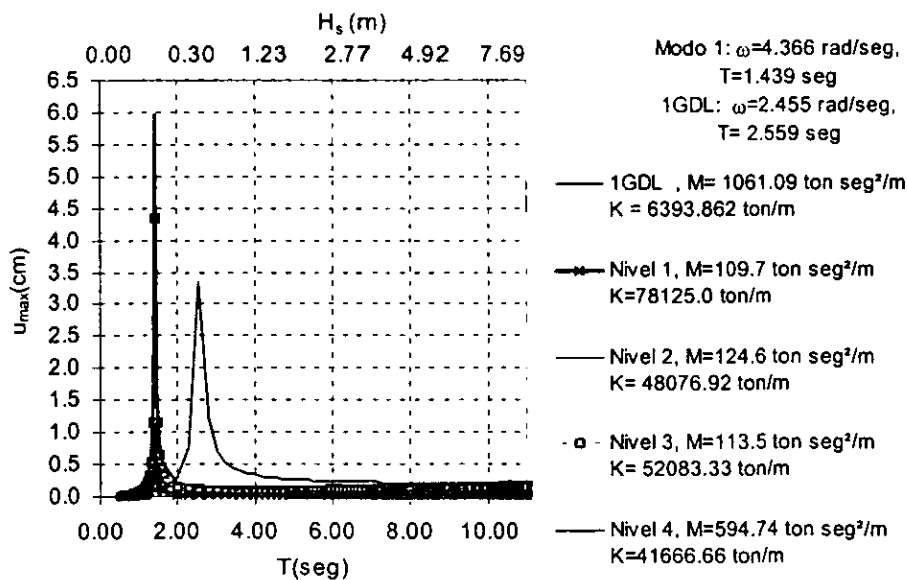


Figura A.6. 16 Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL y 1GDL) aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=6$ m y dirección "X".

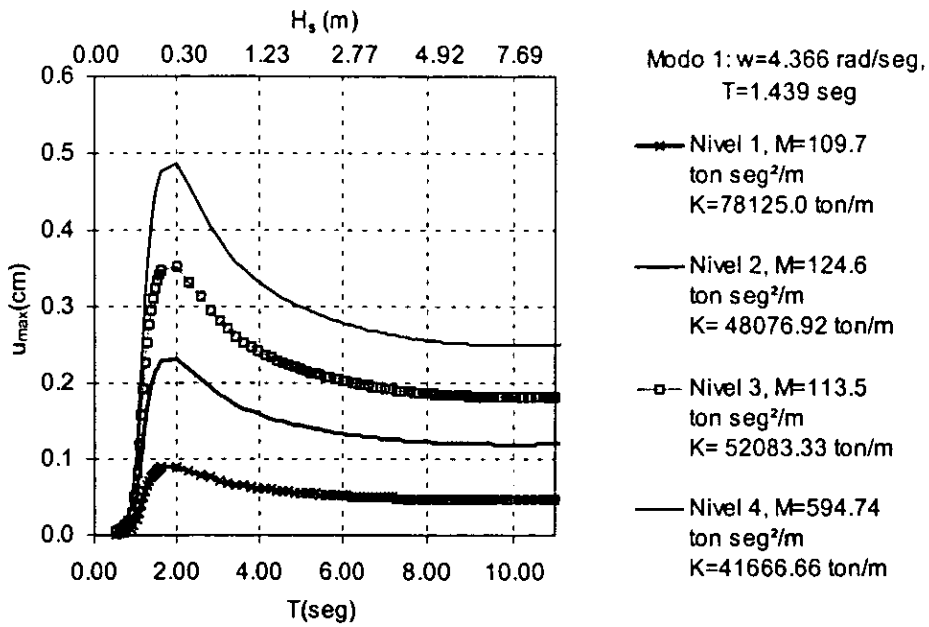


Figura A.6. 17 Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL) aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=6$ m y dirección "X".

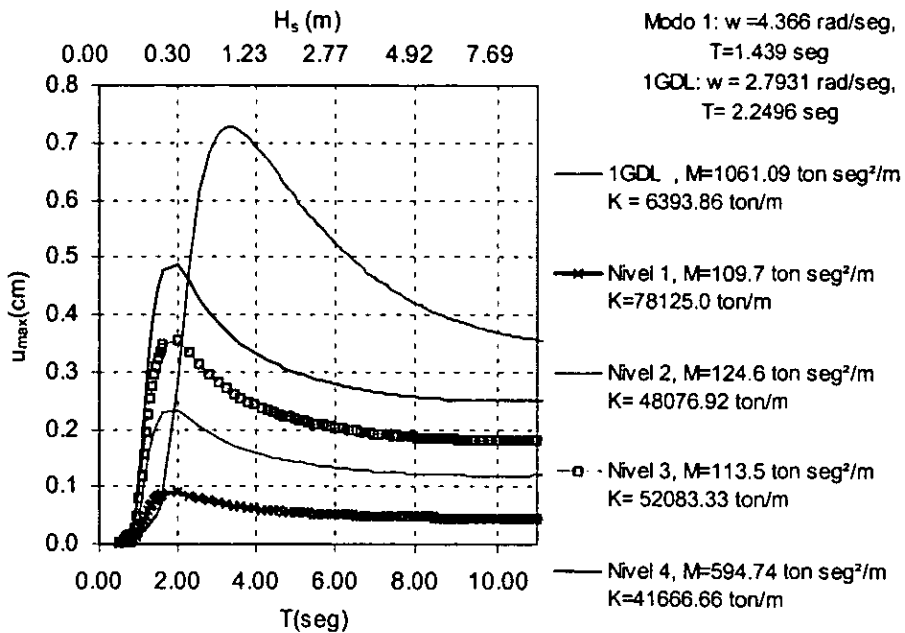


Figura A.6. 18 Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL y 1GDL) aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=6$ m y dirección "X".

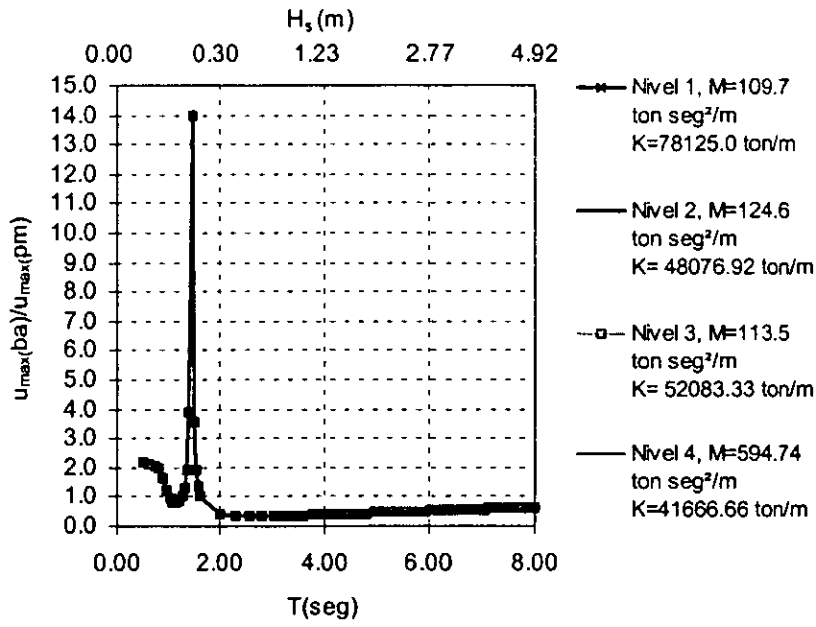


Figura A.6. 19 Relación de respuesta máxima (proceso de banda angosta / espectro de Pierson Moskowitz) de la plataforma Perforación 1, $D_e=6$ m y dirección "X".

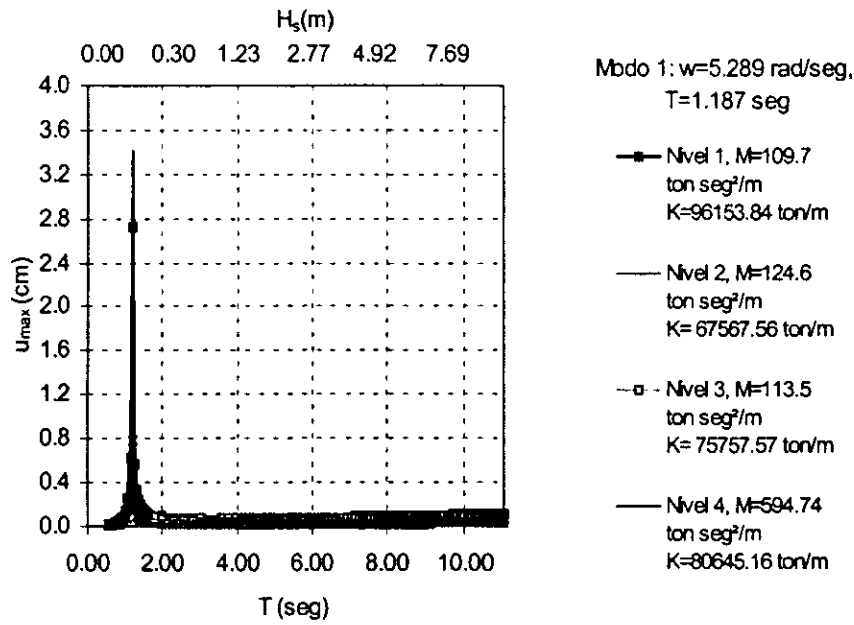


Figura A.6. 20. Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL) aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=6$ m y dirección "Y".

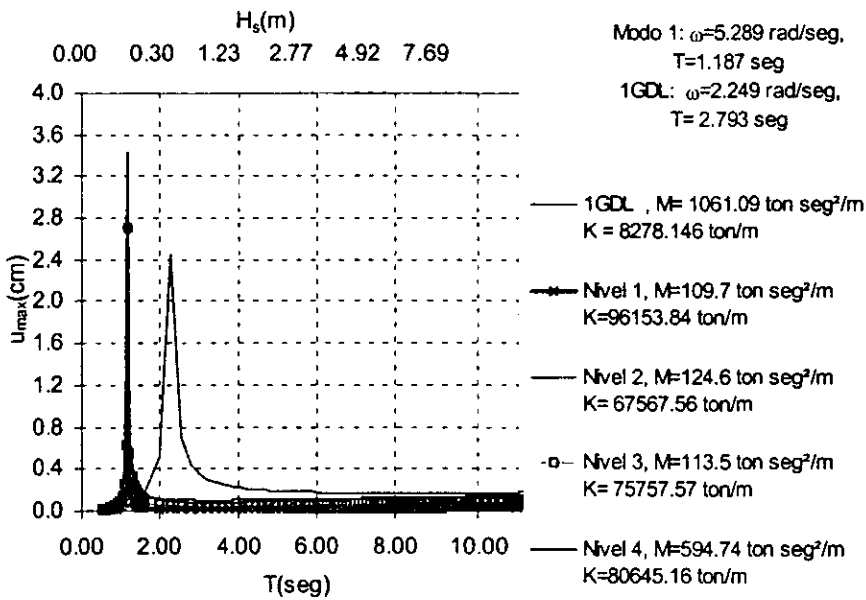


Figura A.6. 21. Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL y 1GDL) aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=6$ m y dirección "Y".

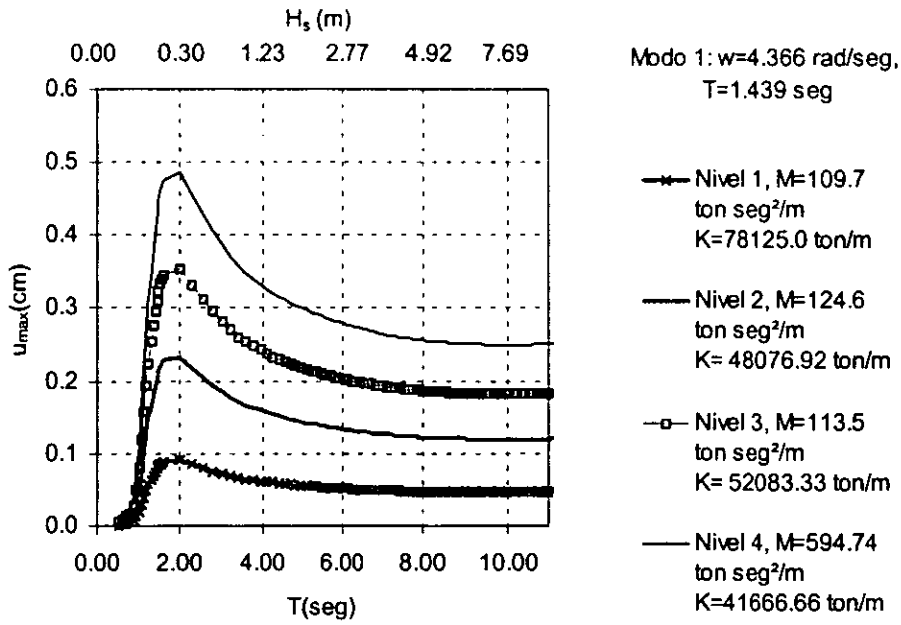


Figura A.6. 22. Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL) aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=6$ m y dirección "Y".

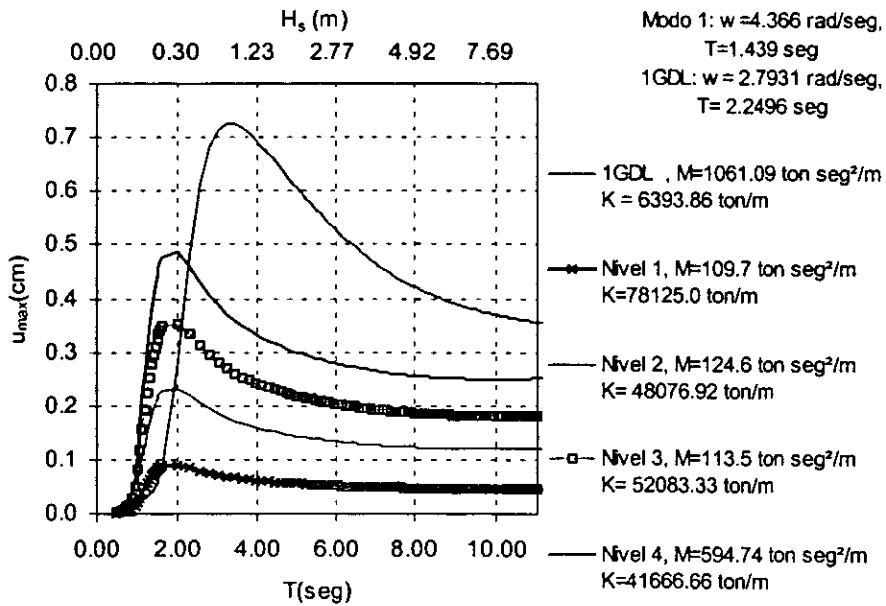


Figura A.6. 23. Respuesta máxima de la plataforma Perforación 1 (VGDL y 1GDL) aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=6$ m y dirección "Y".

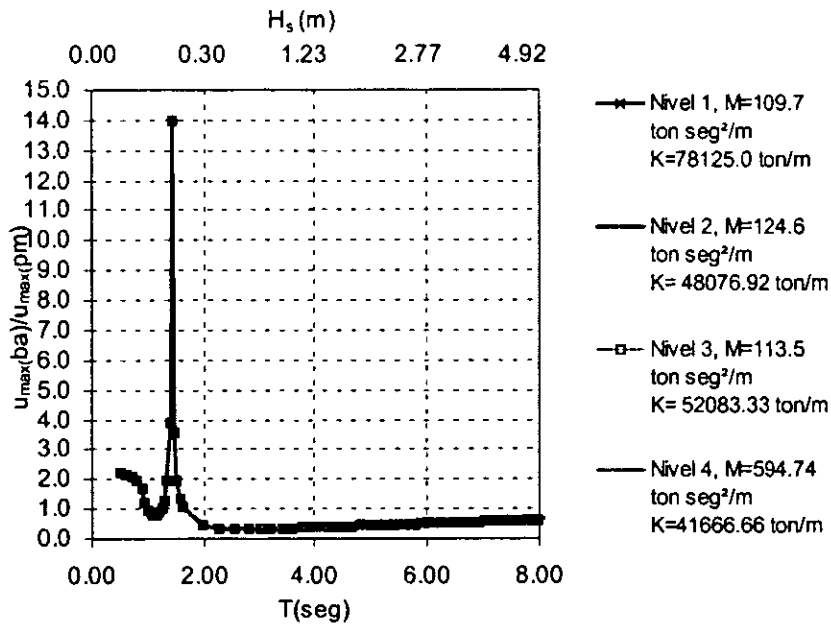


Figura A.6. 24. Relación de respuesta máxima (proceso de banda angosta / espectro de Pierson Moskowitz) de la plataforma Perforación 1, $D_e=6$ m y dirección "Y".

A.6.5 Respuesta Máxima de la Plataforma Habitacional aplicando un sistema de varios grados de libertad

Las figuras (A.6.25 a la A.6.28) representan la respuesta máxima de la plataformas Perforación 1 considerando la excitación como un proceso de banda angosta y el espectro de Pierson Moskowitz, diámetro equivalente $D_e = 4$ m, dirección de análisis "y". En la Figura A.6. 29 muestra el error al aplicar el oleaje de banda angosta.

En la figuras A.6.30 a la A.6.33 y A.6. 35 a la A.6.38 representan la respuesta máxima de la plataformas Perforación 1 considerando la excitación como un proceso de banda angosta y el espectro de Pierson Moskowitz, diámetro equivalente $D_e = 6$ m, dirección de análisis "x" y "y". En las figuras A.6.34 Y A.6.39 se muestra el error al aplicar el oleaje de banda angosta.

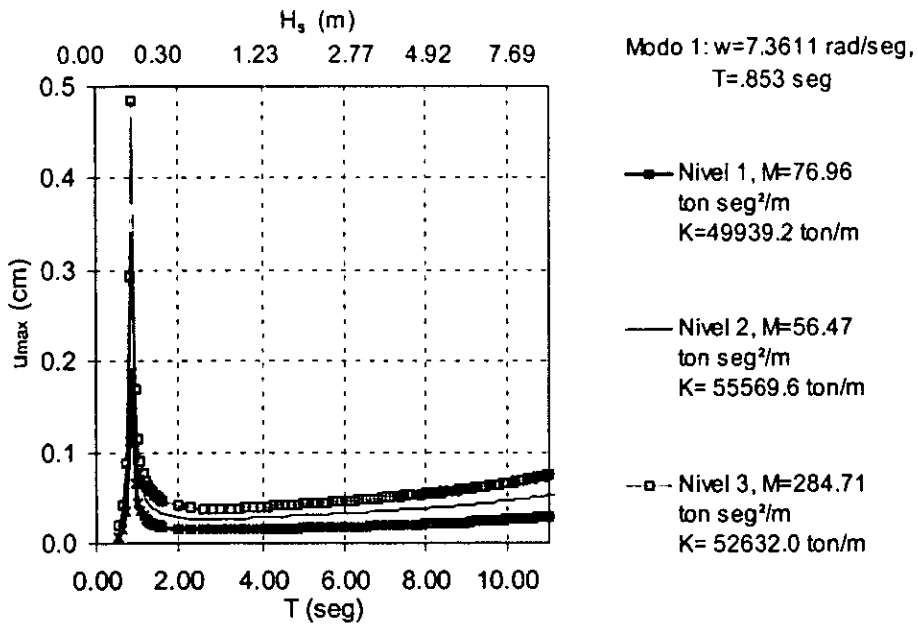


Figura A.6. 25 Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL) banda angosta, $D_e=4m$ en "Y".

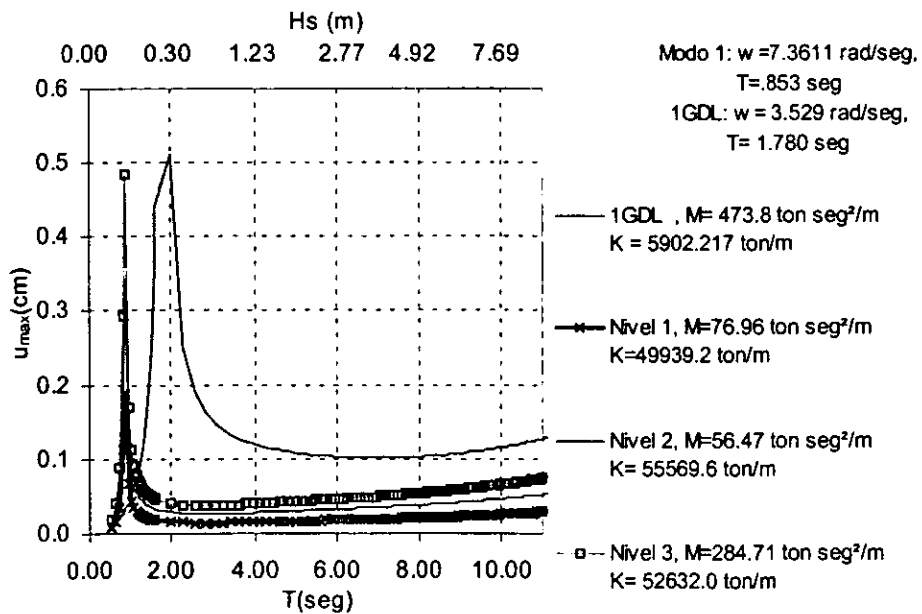


Figura A.6. 26 Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL y 1GDL) Banda angosta, $D_e=4m$ en

"Y".

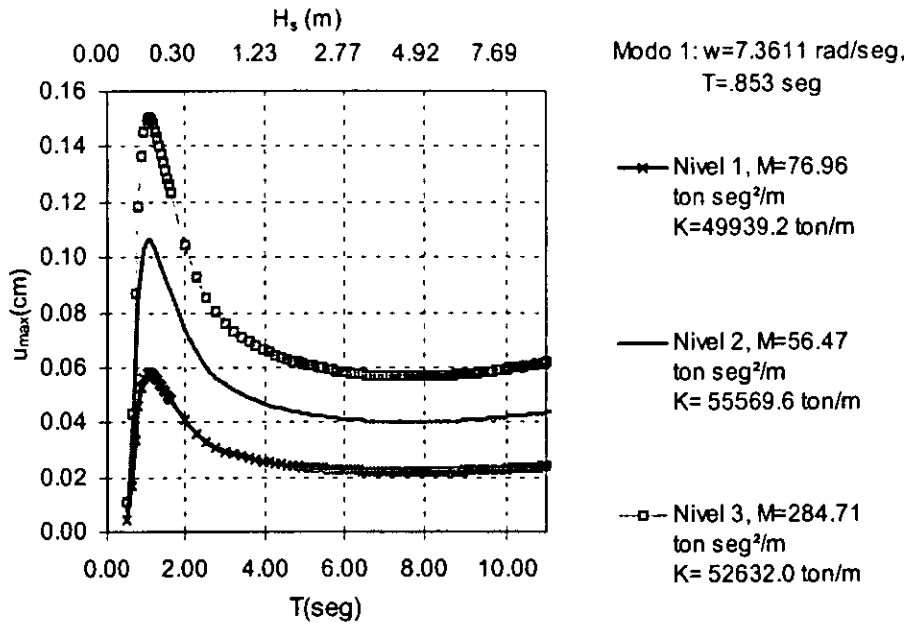


Figura A.6. 27 Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL) Pierson Moskowitz, $D_o=4m$ en "Y".

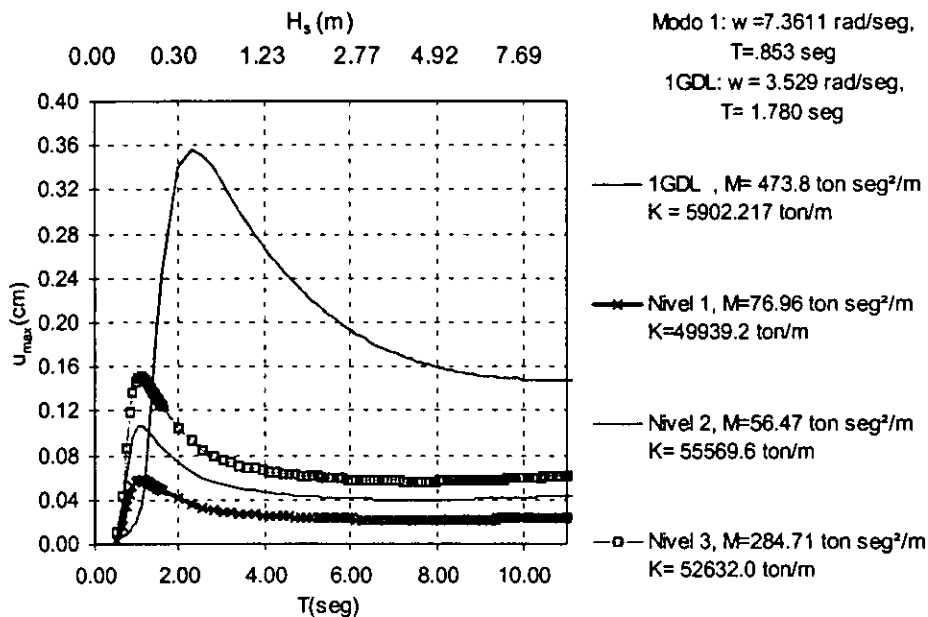


Figura A.6. 28 Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL y 1GDL) Pierson Moskowitz, $D_o=4m$ en

"Y".

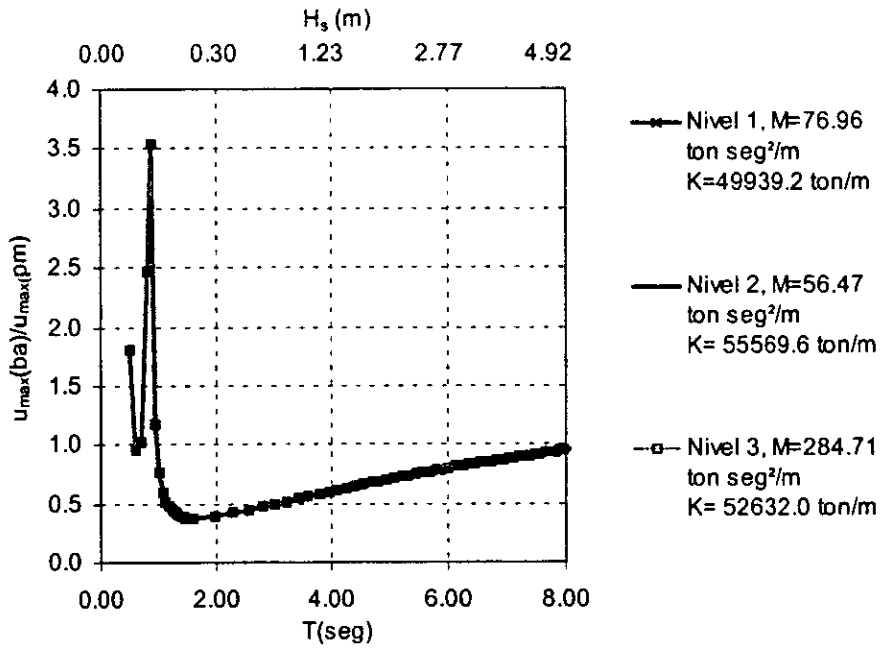


Figura A.6. 29 Relación de respuesta máxima (banda angosta /Pierson Moskowitz) de Habitacional, $D_e=4m$ en

"γ".

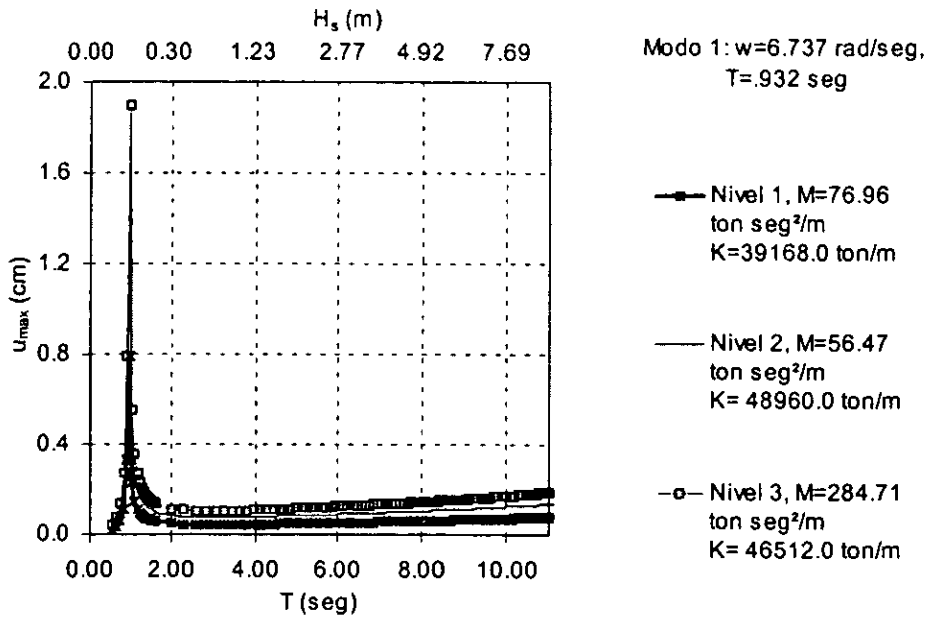


Figura A.6. 30. Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL) aplicando el proceso de banda angosta, $D_0=6$ m y dirección "X".

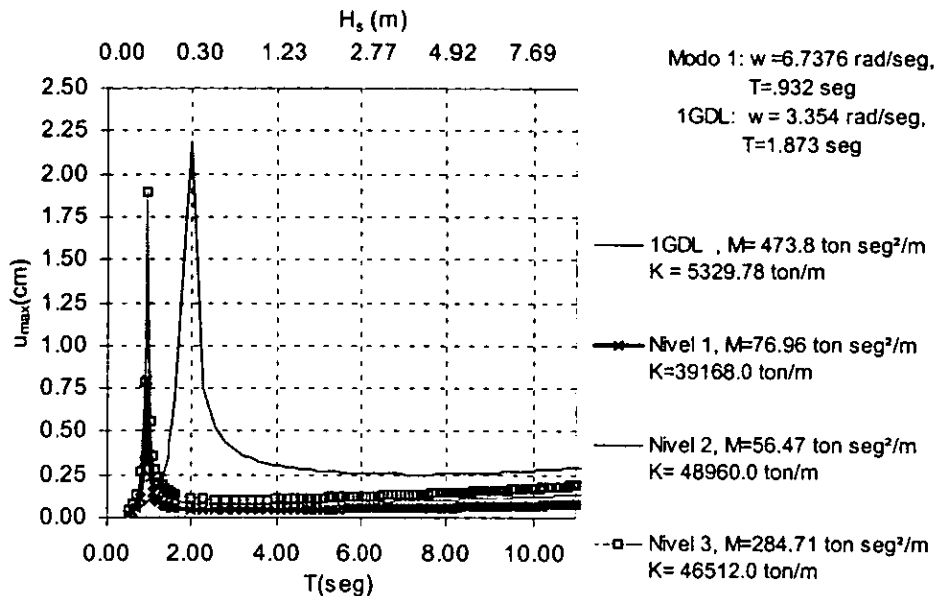


Figura A.6. 31. Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL y 1GDL) aplicando el proceso de banda angosta, $D_0=6$ m y dirección "X".

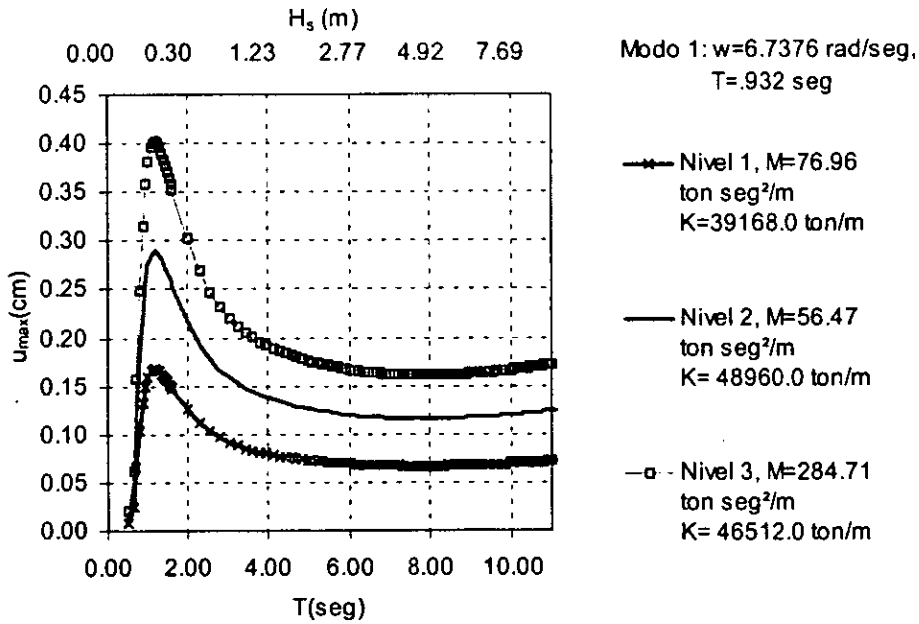


Figura A.6. 32. Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL) aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=6$ m y dirección "X".

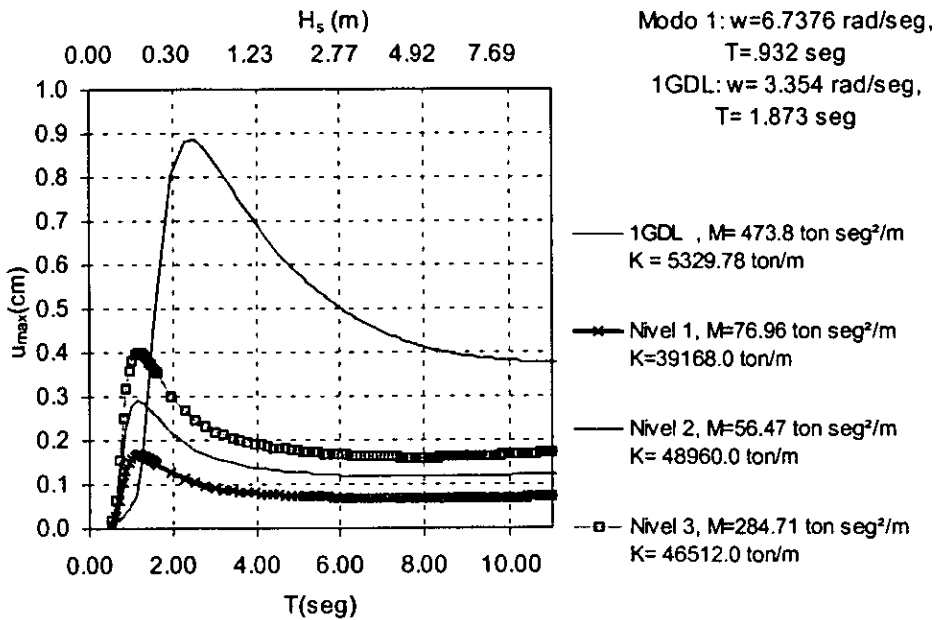


Figura A.6. 33 Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL y 1GDL) aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_e=6$ m y dirección "X".

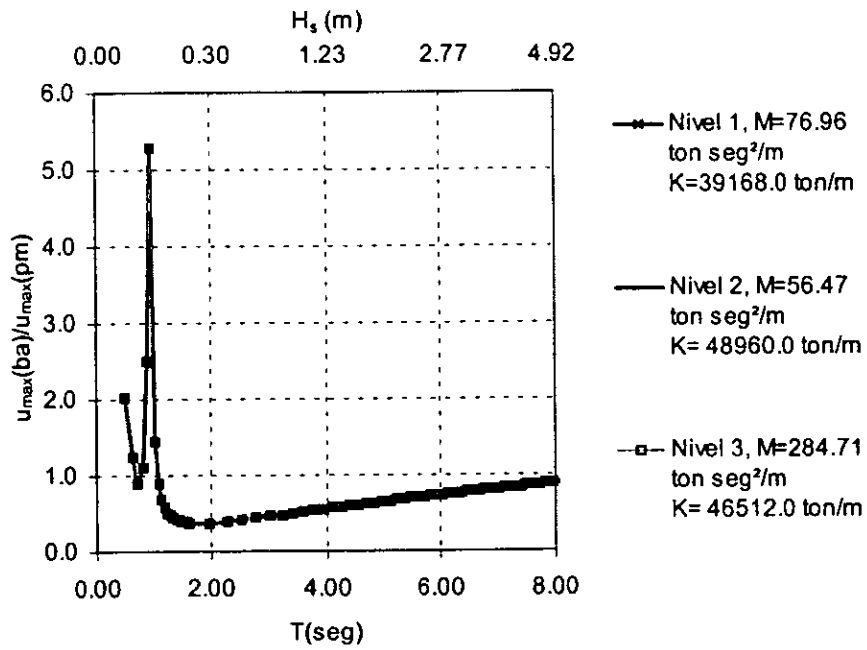


Figura A.6. 34. Relación de Respuesta máxima (proceso de banda angosta / espectro de Pierson Moskowitz) de la plataforma Habitacional, $D_o=6$ m y dirección "X".

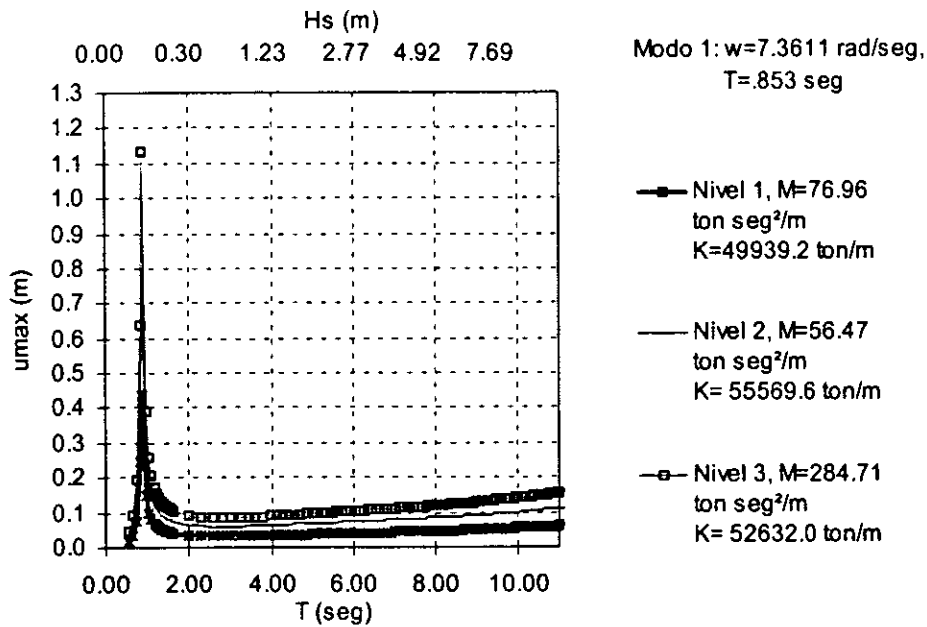


Figura A.6. 35. Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL) aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=6$ m y dirección "Y".

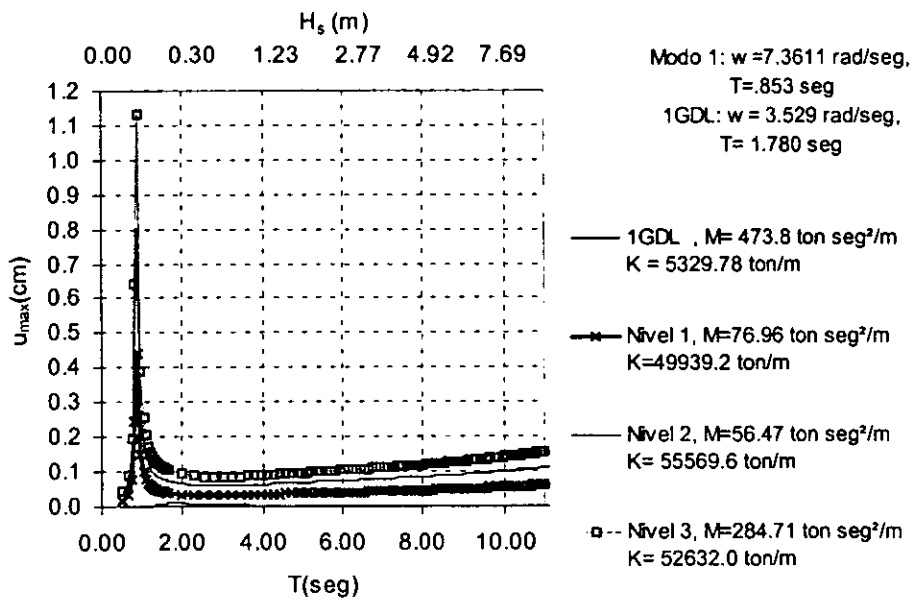


Figura A.6. 36. Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL y 1GDL) aplicando el proceso de banda angosta, $D_e=6$ m y dirección "Y".

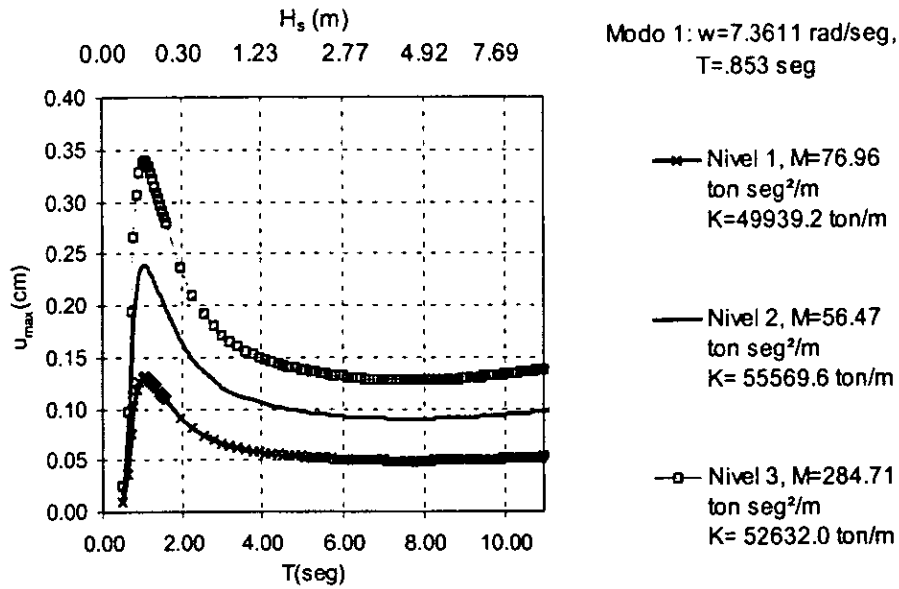


Figura A.6. 37 Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL) aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_0=6$ m y dirección "Y".

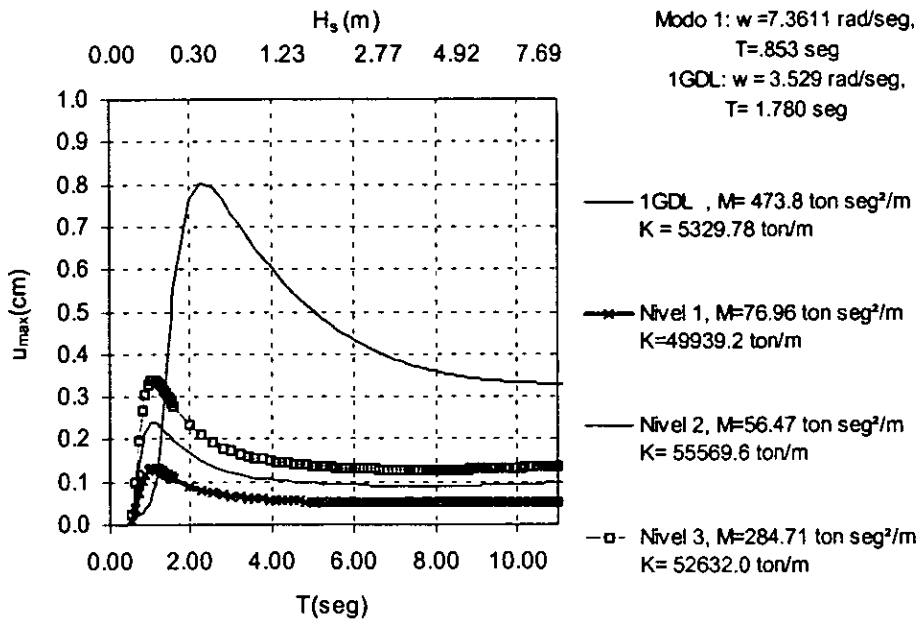


Figura A.6. 38. Respuesta máxima de la plataforma Habitacional (VGDL y 1GDL) aplicando el espectro de Pierson Moskowitz, $D_0=6$ m y dirección "Y".

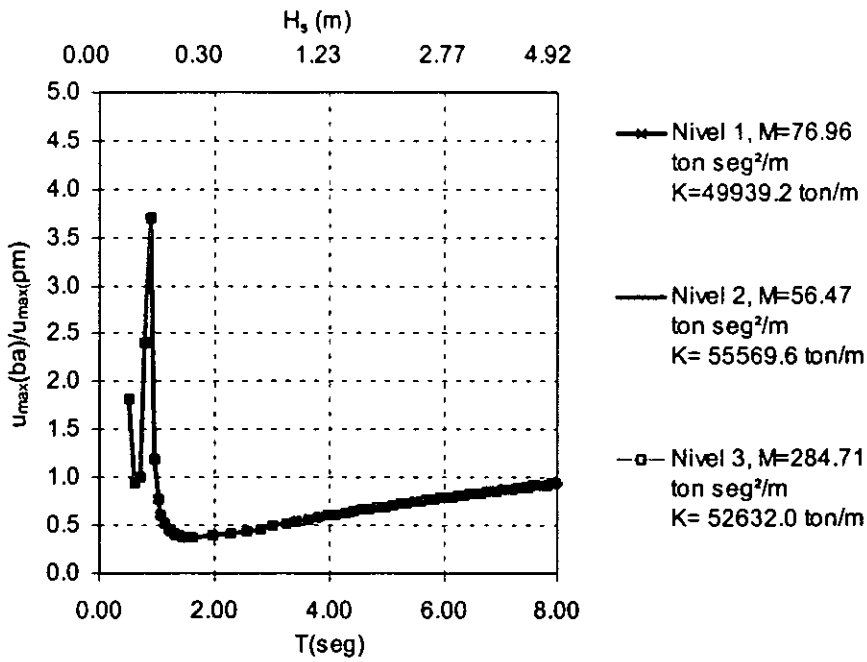


Figura A.6. 39 Relación de Respuesta máxima (proceso de banda angosta / espectro de Pierson Moskowitz) de la plataforma Habitacional, $D_e=6$ m y dirección "Y".