101

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOFTWARE DIDACTICO PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

CATALINA TREVILLA ROMAN

DIRECTOR DE TESIS M. en I. NORMA ELVIRA PERALTA MARQUEZ

2001

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Software didáctico para la resolución de problemas de transporte

realizado por Catalina Trevilla Román.

Con número de cuenta 9125114-3 , pasante de la carrera de Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis Propietario	M. en I. Norma Elvira Peralta Márquez.
Propietario	Mat. Adrián Girard Islas. Adrián Girard I.
Propietario	M. en I. Ricardo Hernández Barajas. 2/2/3/5
Suplente	Mat. Rosa Martha García de la Rosa. /02.
Suplente	Act. Jesús Aguamarina Flores Estrada.

Consejo Departamental de Matemáticas.

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Dedico esta tesis con amor y profundo agradecimiento

a mis padres Consuelo y Antonio,

y a mis hermanos Antonio, Jorge y Oscar.

AGRADECIMIENTOS

Antes que nada agradezco a Dios por ser luz en mi camino A mis padres y hermanos, quienes me han dado su amor, confianza, alegría, esfuerzo y apoyo en todo momento, en toda circunstancia

A quien me dirigió en esta tesis, la M. en I. Norma Elvira Peralta Márquez, le agradezco el tiempo, todo el apoyo, la confianza y su gran interés por concluir este trabajo. A los sinodales, les agradezco el aceptar serlo, su tiempo, el leer, corregir y enriquecer este trabajo.

Al Dr. Javier Páez Cárdenas, le agradezco sus enseñanzas, consejos y apoyo que me ha dado desde que tengo la fortuna de conocerlo.

A Erik le estoy eternamente agradecida por todo cuanto he recibido de él, por el apoyo que me ha brindado siempre; por escucharme, por sus consejos, sus ideas, por su tiempo y espacio, porque influyó en la existencia de esta tesis. También agradezco a sus padres el espacio que me dieron.

A Efraín le agradezco todo el apoyo y comprensión que siempre me ha dado.

A Robertín, por sus palabras decisivas y consejos.

A Mony le agradezco los consejos, el apoyo, la confianza y todo cuanto detalle ha tenido conmigo desde que nos conocemos.

A la M. en I. Ma. del Carmen Hernández Ayuso por su apoyo y comprensión.

A los profesores Hilda, Dávila y Jorge, de quienes recibí consejos y confianza, además de una excelente enseñanza.

A mis familiares, amigos y compañeros.

A todo aquél que ha influido, no sólo en la realización de este trabajo, sino en mi vida personal y profesional.

Al personal de servicios académicos y cómputo del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM, le agradezco el espacio y amabilidad. A la misma UNAM que tanto me ha dado.

Al Coordinador de Asuntos Laborales, el Lic. Miguel Ángel Flores Ramírez por considerar y aprobar mi solicitud de licencia para la conclusión de este trabajo durante 5 meses. Así mismo, agradezco a Ma. Elena Lupercio por su buena voluntad y atenciones que siempre ha tenido para conmigo

Y de manera muy especial.. agradezco a los ángeles que tengo a mi alrededor

CONTENIDO	PÁGINA

INTRODUCCIÓN I

CAPÍTULO 1. *EL PROBLEMA DE TRANSPORTE*

1 1. Motivación 1
1.2. Antecedentes 2
1 3. Formulación 3
1.4. Representación gráfica 4
1.5. Balanceo 5
1.6. Representación en una tabla 6

CAPÍTULO 2. *MÉTODOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE TRANSPORTE*

2.1 Solución básica inicial 10
2.1.1. Esquina noroeste 10
2.1.2. Costo mínimo 15
2.1 3. Aproximación de Vogel 25
2.2. Mejoramiento de la solución básica inicial 33
2.2.1. Modificated Distribution (MODI) 33
2.3. Métodos utilizados 38
2.3.1. Análisis del MAV 38
2.3.2. Análisis del método MODI 45

CAPÍTULO 3. *SOFTWARE*

3.1. Descripción 49

CAPÍTULO 4. *MANUAL DEL USUARIO*

4 1. Requerimientos 56

CAPÍTULO 5. *APLICACIONES Y EJERCICIOS* 58

CONCLUSIONES 73

BIBLIOGRAFÍA 76

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA 78

INTRODUCCIÓN

Existen diferentes paquetes de cómputo que resuelven el problema de transporte, entre los cuales se pueden mencionar el QSB (*Quantitative Systems for Business*) y *The Management Scientist*. Además, el hecho de que sea posible plantear un problema de transporte como uno de programación lineal, amplía aún más la paquetería que puede emplearse para resolverlo, por ejemplo, el LINDO ofrece una solución óptima, sin embargo rara vez es entera, puesto que es software para resolver problemas de programación lineal, como consecuencia se requiere de una segunda fase para la solución del problema, siendo necesario el uso de alguno de los algoritmos para resolver problemas de programación entera, como el de Ramificación y Acotamiento[1]. *The Management Scientist* o el QSB son mejores opciones; tienen una sección para problemas de transporte, y por ende la solución es entera y óptima; sin embargo, ninguno de estos paquetes muestran la manera en que se obtiene. El QSB muestra las iteraciones en el proceso de optimización, siempre que el problema sea de menos de seis orígenes y seis destinos. Otro inconveniente es que el software que se ha mencionado está en inglés.

Es muy importante contar con software educativo, que además de proporcionar al alumno el aprendizaje sobre cierto tema, permita reafirmarlo a través de ejemplos o prácticas y mejor aún, si está en español.

De lo anterior se deriva la importancia del software presentado en este trabajo, el cual, además de obtener una solución entera y óptima, muestra cómo se encuentra El software incluido en esta tesis utiliza el Método de Aproximación de Vogel (MAV) para la obtención de la solución básica inicial, y el Método de Distribución Modificada (MODI)[2] para optimizarla, de ser necesario.

La principal razón por la que se eligió el MAV es su efectividad en cuanto a su cercanía a la solución óptima, lo que ahorra iteraciones posteriores en el proceso de optimización (en el mejor de los casos, esta solución es la óptima) a diferencia de otros métodos. [3] En cuanto a la elección del método MODI, se debió a que

[1] Técnica que permite encontrar una solución entera a partir de una no entera. Se basa en ir acotando la región de soluciones factibles [14] y [7].

[2] MODI (*Modificated Distribution*)

[3] En la *sección 2.1* se exponen algunos de estos métodos.

proporciona un criterio para evaluar la optimalidad de la solución básica inicial y a que aprovecha la representación gráfica[4] del problema para obtener el óptimo

El objetivo de hacer un software para resolver este tipo de problemas, es apoyar la enseñanza de materias del área de Investigación de Operaciones como. *Introducción a la Investigación de Operaciones, Seminario de Investigación de Operaciones, Análisis de Redes, Programación Entera* y *Programación Lineal*, que se imparten en las Facultades de Ciencias, Ingeniería y, Contaduría y Administración, de la UNAM, y en general, como apoyo para todo aquel que le interese aprender la forma en que se resuelve un problema de transporte.

En el Capítulo 1 de esta tesis se abordan los antecedentes del problema, es decir, lo que motivó su existencia, así como su evolución y los primeros trabajos escritos acerca del mismo. También se define y presenta su formulación como un problema de programación lineal y como red, que son dos formas básicas y clásicas, pues mientras que la primera es útil en la medida que se puede resolver con el Método Simplex[5], la segunda permite visualizarlo de tal manera que resulta claro tanto su concepto como su solución.

Debido a que los métodos que se mencionan para resolver este problema requieren que las ofertas y las demandas estén balanceadas[6], es indispensable saber qué hacer cuando se presenta el caso en el que sean diferentes. Por lo que se incluye un apartado, en este mismo capítulo, que se refiere al *balanceo* de un problema de transporte.

También se incluye la representación de *tabla* del problema de transporte, que resulta idónea ya que contiene tanto los datos del problema como la solución.

En el Capítulo 2 se presentan algunos de los métodos que existen para resolver el problema de transporte así como las ventajas y desventajas de cada uno. El uso de estos métodos dependerá de las necesidades del usuario que lo desea resolver. Debido a que los métodos utilizados para la elaboración del software son: el MAV y el MODI, una vez que se describen, se procede a hacer un análisis de ambos.

---

[4] Ver *sección 1.4.*

[5] Método creado por George Dantzig en 1947 para resolver los problemas de programación lineal. Para mayor referencia ver en bibliografía cualquiera del tema: *"Introducción a la Investigación de Operaciones"* o *"Programación Lineal"*.

[6] Si la demanda es mayor que la oferta se crea un origen ficticio. Si por el contrario la oferta es mayor a la demanda, se crea un destino ficticio. Ver *sección 1 5*

Cabe mencionar que dado que el principal objetivo de este trabajo es proporcionar al usuario el software para resolver el problema de transporte, no se profundiza en conceptos de redes ni en métodos alternos de solución, no obstante, se proporciona bibliografía para quien así lo deseé.

En el Capítulo 3 se describe el software, dando al usuario un panorama general de la manera en que se programó De esta manera, el usuario que esté interesado en programación, tendrá la oportunidad de hacer modificaciones al programa si así lo desea

En el Capítulo 4 se presenta el manual para el usuario, en el que se encuentran los elementos necesarios que requiere para la utilización correcta de este software.

Finalmente en el Capítulo 5 se presentan algunas aplicaciones que pueden extenderse tanto como el lector quiera, pues son sólo la pauta para mostrar que este tipo de problemas no se limitan a un área determinada y para motivar al lector para que plateé sus propios problemas. También se presenta una gran gama de ejercicios para la aplicación del software y en general para que el alumno reafirme sus conocimientos sobre el problema de transporte

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

1.1. MOTIVACIÓN

Los *Problemas de Transporte* que se abordan en este trabajo, son aquellos cuya solución es un programa óptimo de abastecimiento entre orígenes y destinos. Por ejemplo:

México cuenta con 3 fábricas ubicadas en lugares diferentes para la elaboración de mantas, cada fábrica produce un cierto número de mantas al mes, mismas que son requeridas en 4 países. Egipto, Francia, Reino Unido y Estados Unidos. Además como es de suponer, existe un costo determinado para enviar una manta de una fábrica (puede ser vía aérea) a un país. Véase la siguiente figura.

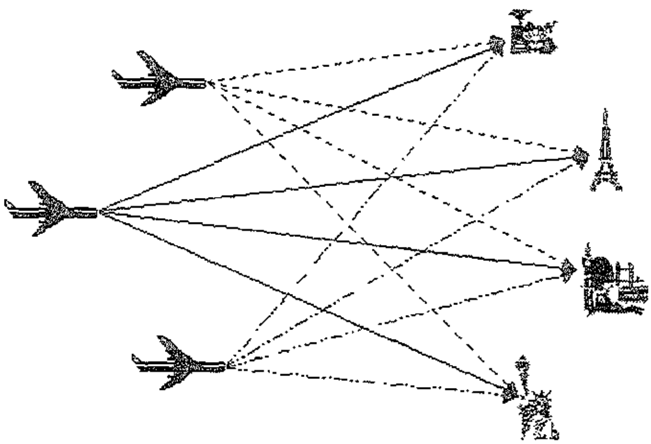

FIGURA 1.1. Ejemplo de introducción del problema de transporte. Cada avión representa una fábrica, las figuras de la derecha, los países y las flechas representan las conexiones entre las fábricas y los países

Lo que se desea saber es el número total de mantas a enviar de cada fábrica a cada país, minimizando los costos de envío y satisfaciendo las demandas.

Ejemplos como el anterior dan la pauta para definir el problema de transporte:

Dados m orígenes con oferta a_i ($i = 1, .., m$), n destinos, con demanda b_j ($j = 1, .., n$) y costos c_{ij} por transportar una unidad de producto del origen i al destino j, el problema de transporte consiste en determinar el número de unidades a enviar de cada uno de los orígenes a cada uno de los destinos, minimizando los costos totales y satisfaciendo los requerimientos [7].

En el ejemplo, las fábricas son los orígenes (m = 3), los países los destinos (n = 4), la oferta a_i es el número de mantas producidas en la fábrica i (i = 1, 2, 3) la demanda b_j es el número de mantas que requiere el país j (j = 1, 2, 3, 4), c_{ij} es el costo de enviar una unidad de la fábrica i al país j

1.2. ANTECEDENTES

Hacia el año de 1939, L. V Kantorovich en su publicación *"Mathematical Methods in the Organization and Planning or Production"*, estableció, aunque incompleto, un algoritmo que servía para resolver problemas de transporte, dejando notar las similitudes que tienen con los problemas de asignación Posteriormente en 1942 publicó su continuación: *"On the Translocation of Masses"*, y en 1948 publica con M. K. Gavurin, una aplicación de este problema: *"The Application of Mathematical Methods to Problems of Foreignt Flow Analysis"*. Como puede notarse, es obvia su preocupación por resolver problemas del tipo designar trabajos específicos a las máquinas.

La labor de Kantorovich fue importante, sin embargo, quien formuló el problema de transporte y estableció un método de solución, aunque análogo al Método Simplex al buscar una solución básica inicial, es Frank L. Hitchcock, en su publicación: *"The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities"*, en 1941 [2].

Como es bien sabido, la Segunda Guerra Mundial fue escenario del desarrollo de la Investigación de Operaciones, comenzando con la utilización de logística estratégica para vencer al enemigo (Teoría de Juegos) y más tarde al finalizar la guerra, en la logística de distribución de todos los recursos militares de los aliados dispersos por todo el mundo. Este problema motivó a la *Rand Corporation* de la fuerza aérea norteamericana, a comisionar a un grupo de matemáticos para que

[7] La mayoría de los libros de Investigación de Operaciones tienen un apartado del problema de transporte En

resolviera este problema, pues estaba consumiendo demasiados recursos humanos, financieros y materiales [10].

En 1944 T. C. Koopmans ayudó a reducir el tiempo de los embarques, y posteriormente en 1947 publicó *"Optimum Utilization of the Transportation System"*. Lo cual fue determinante para la definición y solución de este problema; de hecho, al problema clásico de transporte se le conoce como: *"Problema del Transporte de Hitchcock-Koopmans"* [2]. Fue en este mismo año que Dantzig inventó el Método Simplex, resumiendo el trabajo que muchas personas realizaron, dando origen a la Programación Lineal [10].

1.3. FORMULACIÓN

El problema de transporte puede plantearse como uno de programación lineal, debido a que es del tipo minimizar una función lineal, restringida por igualdades que también son lineales.

La función lineal que se quiere minimizar es la correspondiente a los costos, mientras que las igualdades lineales son: la suma de ofertas debe ser igual a la suma de las demandas (lo que requiere el destino j debe ser igual a la suma de los envíos de todos los orígenes a éste, de manera análoga, lo que envía el origen i, debe ser igual a lo que requieren los destinos de este origen). Por último, se agregan las restricciones que indican que no tiene sentido hablar de envíos o recepción de flujo negativo, esto es, las restricciones de no negatividad.

Antes de formularlo, se definirán las variables y constantes a utilizar:

Sean

m = número de orígenes ($m \in Z^+$),

n = número de destinos ($n \in Z^+$),

a_i = número de unidades disponibles en el origen i ($i=1, 2, \ldots, m$, $a_i \in Z^+$),

b_j = número de unidades requeridas en el destino j ($j=1, 2, \ldots, n$, $b_j \in Z^+$),

---

particular, se pueden consultar [1], [7] y [14].

c_{ij} = costo por transportar una unidad del origen i al destino j ($c_{ij} \geq 0$).

x_{ij} = número de unidades transportadas del origen i al destino j ($x_{ij} \in Z$, $x_{ij} \geq 0$).

El problema se modela como sigue [1]:

$$\begin{aligned}
&Minimizar \qquad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
&s.a \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,\ldots,m \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,\ldots,n \\
&\qquad x_{ij} \geq 0
\end{aligned}$$

Como puede observarse, tiene m x n variables de decisión[8], $m + n$ restricciones de igualdad y m x n restricciones de no negatividad.

1.4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

El hecho de que se cuente con un cierto número de orígenes para satisfacer un número de destinos, dio la pauta para pensar en dos conjuntos: el que envía y el que recibe. Si además se agrega la condición de que cada origen puede enviar producto a cada destino con cierto costo, entonces se establecen conexiones entre orígenes y destinos, cada una de las cuales tiene cierto peso, el costo

Dados m orígenes y n destinos, se puede representar el problema de transporte gráficamente como sigue [1]:

[8] En este problema, una variable de decisión x_{ij} es la cantidad de producto que se envía del origen i al destino j

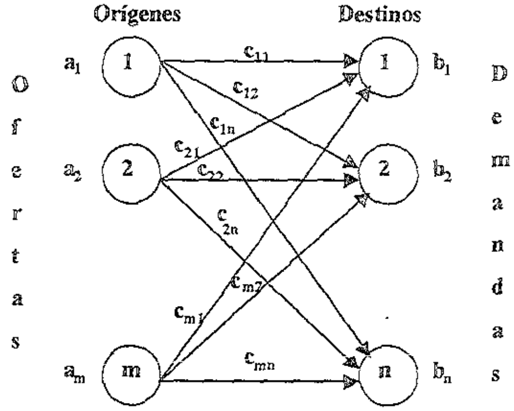

FIGURA 1 2 Representación gráfica

El tener una representación gráfica de este problema facilita su comprensión, pues en la misma red[9] se tienen todos los datos del problema

1.5. BALANCEO

DEFINICIÓN

Un problema está balanceado siempre que la oferta total (sobre todos los orígenes) sea igual a la demanda total (sobre todos los destinos). Si hay oferta faltante, se inventa un origen, el cual enviará la cantidad necesaria para igualarla con la demanda total, con lo que se logra balancear el problema. De manera análoga, si la demanda no es suficiente para la oferta que se tiene, se inventa un destino, que es el que recibirá el excedente de la oferta, para que de esta manera el problema esté balanceado.

Formalmente, se dice que el problema está balanceado, si

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

[9] Para conceptos de gráficas ver bibliografía [6]

De no ser así, se tienen dos casos: que las ofertas sean mayores que las demandas, o bien, que las demandas sean mayores que las ofertas

En el primer caso, el problema se balancea creando un destino ficticio, con demanda:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Entonces, se tendrían m orígenes y $n + 1$ destinos

Si por el contrario, las demandas superan a las ofertas, se crea un origen ficticio, con oferta.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Los costos asociados en ambos casos son cero para no alterar la solución final [14]

De manera más intuitiva, se "inventa" un origen con la oferta faltante, o un destino con la demanda necesaria.

En un problema que no está balanceado, debe tenerse mucho cuidado al interpretar la solución obtenida Dependerá del contexto del problema que se esté trabajando, el penalizar la falta o exceso del producto.

1.6. REPRESENTACIÓN EN UNA TABLA

Dado que este problema se puede formular como uno de programación lineal, se puede resolver usando el Método Simplex. De acuerdo a la formulación que se tiene en la *sección 1.3.*, se observa que es necesario introducir variables artificiales (debido a que las $m + n$ restricciones son igualdades y no puede hallarse una solución básica inicial factible)[10]. Dichas variables artificiales se denotan como y_k, donde k = 1, 2, ..., m + n. Posteriormente se procede a resolver con alguno de los métodos

[10] Ver bibliografía [1] o cualquiera del tema: *"Investigación de Operaciones"*.

conocidos, como el de *dos fases* o el de *la gran M*. Así pues, utilizando el método de dos fases, el primer problema a resolver es:

$$\text{Minimizar} \quad z_0 = \sum_{i=1}^{m+n} y_i$$

$$s\,a$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Una vez resuelto este problema, se procede a hacer los ajustes correspondientes para hallar la solución del problema original. A continuación se presenta el formato del *tableau*[11] que incluye ambas fases:

	z	z_0	x_{11}	...	x_{1n}	...	x_{m1}	...	x_{mn}	y_1	...	y_m	y_{m+1}	...	y_{m+n}	LD
z	1	0	$-c_{11}$	...	$-c_{1n}$	...	$-c_{m1}$	...	$-c_{mn}$	0	...	0	0	...	0	0
z_0	0	1	0	...	0	...	0	...	0	-1	...	-1	-1	...	-1	0
y_1	0	0	1	...	1	...	1	...	1	1	...	0	0	...	0	a_1
.	.	.	.		.		.		.	.		.	.		.	.
.	.	.	.		.		.		.	.		.	.		.	.
.	.	.	.		.		.		.	.		.	.		.	.
y_m	0	0	1	...	1	...	1	...	1	0	...	1	0	...	0	a_m
y_{m+1}	0	0	1	...	1	...	1	...	1	0	...	0	1	...	0	a_{m+1}
.	.	.	.		.		.		.	.			.		.	.
.	.	.	.		.		.		.			.	.		.	.
.	.	.	.		.		.		.	.		.	.		.	.
y_{m+n}	0	0	1	...	1	...	1	...	1	0	...	0	0	...	1	a_{m+n}

FIGURA 1 3 Tableau simplex (incluye método de dos fases)

Como puede observarse, es un proceso exhaustivo para este tipo de problemas, que por su estructura, pueden abordarse de otra forma.

En contraste, la representación en una tabla, como la que se muestra a continuación, permite visualizar fácilmente todos los datos y resultados del mismo El formato es el siguiente[14].

[11] Tabla del Metodo Simplex

DESTINO

ORIGEN

	1	2	...	n	OFERTA
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{23} x_{2n}	a_2
.					.
.					.
.					.
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}	a_m
DEMANDA	b_1	b_2	...	b_n	

FIGURA I 4. Representación en tabla

Donde:

x_{ij} = flujo del origen i al destino j,

c_{ij} = costo de enviar una unidad del origen i al destino j,

a_i = oferta del origen i,

b_j = demanda del destino j,

m = número de orígenes,

n = número de destinos,

$i = 1, 2, \ldots, m,$

$j = 1, 2, \ldots, n.$

Usando este formato para el problema de transporte, se han creado diferentes métodos para resolverlo. Algunos de los cuales sólo proporcionan una solución básica inicial factible[12], como son: el *Método de Aproximación de Vogel (*MAV*)*, el de *Esquina Noroeste* y el de *Costo Mínimo*. Tal solución inicial se mejora, de ser necesario, hasta encontrar la solución óptima a través de otros métodos, como: *MODI (Modificated Distribution), Método de Wagener y Primal Dual para el Transporte.* [8]

Cabe mencionar que el Método Simplex, proporciona tanto una solución básica inicial factible, como la óptima, que coincide con los anteriores en la manera general de resolver el problema. Esto es. **dar una solución básica inicial factible y después mejorarla hasta hallar la óptima, en caso de que la inicial no lo sea.**

Es importante recordar, que el número de variables básicas en un problema que se plantea con programación lineal, es de $m + n - 1$. Esto es, sabemos el número exacto de variables básicas que tendremos desde el momento que vemos el problema, y por ende, la dimensión y complejidad que conlleva el resolverlo por ciertos métodos (como el Método Simplex).

[12] Una solución básica inicial es aquella primer solución que se encuentra, esto es, que satisface las restricciones de oferta y de demanda y que es la primer candidata a ser el óptimo

CAPÍTULO 2

MÉTODOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

2.1. SOLUCIÓN BÁSICA INICIAL

En esta sección se describirán métodos para hallar una solución básica inicial, los cuales son aplicables a la representación que se muestra en la *Figura 1.4* De aquí en adelante, los rangos para i y j serán: $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$, respectivamente.

Antes de describirlos, cabe aclarar que un renglón (columna) tachado(a) es aquel (aquella) en el (la) cual fue satisfecha su oferta (demanda) y que por lo tanto no se considera en iteraciones posteriores [14].

2.1.1. ESQUINA NOROESTE

El método de la esquina noroeste es llamado también de la *esquina superior izquierda*[13] y consiste de los siguientes pasos:

Paso 0. Hacer $k = 0$

(k cuenta el número de variables básicas incluidas en la solución.)

Paso 1. Elegir el primer elemento de la tabla (recorriéndola de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo) que pertenezca a un renglón (o columna) que no esté tachado (a) Sean i y j el renglón y columna respectivamente, de dicho elemento.

Paso 2. Hacer $x_{ij} = \min \{a_i, b_j\}$.

Paso 3. Actualizar ofertas y demandas:

$a_i = a_i - x_{ij}$,

$b_j = b_j - x_{ij}$

Paso 4. Tachar el renglón con $a_i = 0$ ó la columna con $b_j = 0$.

Si ambos son cero, elegir uno arbitrariamente.

Hacer $k = k + 1$.

[13] Para escribir este algoritmo se tomó como base el texto de la bibliografía [14] pág. 122 a 123.

Paso 5. Si k = m + n - 1, terminar, la solución básica inicial se ha encontrado

Si no, ir al Paso 1.

La principal ventaja de utilizar este método, es que se encuentra la solución básica inicial de una manera muy rápida, en cuanto al número de iteraciones ($m + n - 1$) y en cuanto al procedimiento. Ventaja fuerte sobre el MAV, que se verá más adelante. Y su principal desventaja, es que no considera los costos en el proceso. Por lo que la solución obtenida generalmente no es buena, casi siempre dista considerablemente de la óptima.

EJEMPLO 1

0	1	2	3
2	5	6	1
3	0	7	4
2	2	4	

FIGURA 2.1. Tabla que representa el problema de transporte para el ejemplo1

Se tiene que $m = 3$, $n = 3$ y que el problema está balanceado.

ITERACIÓN 1

Paso 0. k = 0.

Paso 1. Se elige el primer elemento no tachado (recorriendo de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo) de la tabla, $i = 1, j = 1$.

Paso 2 $x_{11} = \min \{3, 2\} = 2$

Paso 3. $a_1 = 3 - 2 = 1$,

$b_1 = 2 - 2 = 0$.

Paso 4. Tachar la columna 1. $k = 0 + 1 = 1$.

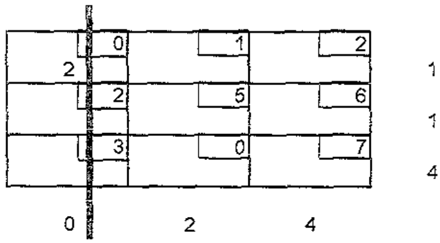

FIGURA 2 2 Ejemplo 1. Iteración 1. Esquina Noroeste.

Paso 5. $3 + 3 - 1 = 5$

$1 < (m + n - 1)$. Ir al paso 1

ITERACIÓN 2

Paso 1. $i = 1, j = 2$.

Paso 2. $x_{12} = \text{mín}\ \{1, 2\} = 1$.

Paso 3. $a_1 = 1 - 1 = 0$,

$b_2 = 2 - 1 = 1$.

Paso 4. Tachar el renglón 1 $\quad k = 1 + 1 = 2$.

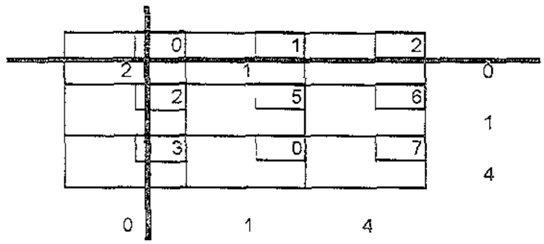

FIGURA 2.3 Ejemplo 1 Iteración 2 Esquina Noroeste

Paso 5. $2 < (m + n - 1)$ Ir al paso 1.

ITERACIÓN 3

Paso 1. $i = 2, j = 2$

Paso 2. $x_{22} = \text{mín}\ \{1, 1\} = 1$

Paso 3. $a_2 = 1 - 1 = 0$,

$b_2 = 1 - 1 = 0$.

Paso 4. Ambos valores son cero, se toma arbitrariamente el renglón.

Tachar el renglón 2 $k = 2 + 1 = 3$.

Paso 5. $3 < (m + n - 1)$

Ir al paso 1.

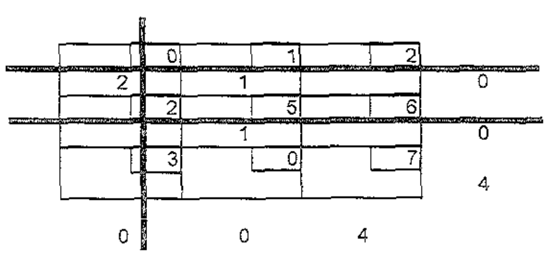

FIGURA 2.4 Ejemplo 1 Iteración 3. Esquina Noroeste

ITERACIÓN 4

Paso 1. $i = 3, j = 2$

Paso 2. $x_{32} = \text{mín}\ \{4, 0\} = 0.$

Paso 3. $a_2 = 4 - 0 = 4,$

$b_2 = 0 - 0 = 0.$

Paso 4. Tachar la columna 2. k = 3 + 1 = 4

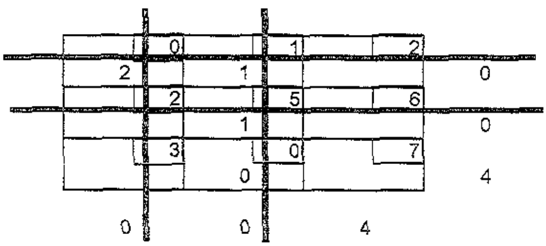

FIGURA 2 5. Ejemplo 1. Iteración 4. Esquina Noroeste.

Paso 5. $4 < (m + n - 1)$. Ir al paso 1

ITERACIÓN 5

Paso 1. $i = 3, j = 3.$

Paso 2. $x_{32} = \text{mín}\ \{4, 4\} = 4.$

Paso 3. $a_2 = 4 - 4 = 0,$

$b_2 = 4 - 4 = 0.$

Paso 4. Ambos valores son cero, se toma arbitrariamente el renglón

Tachar el renglón 3. k = 4 + 1 = 5

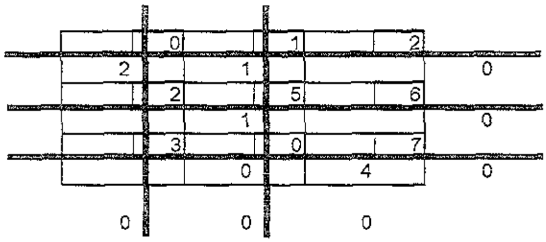

FIGURA 2.6. Ejemplo 1 Iteración 5. Esquina Noroeste

Paso 5. 5 = *(m + n − 1)* Terminar, se ha encontrado la solución básica inicial. A saber,

$x_{11} = 2$,

$x_{12} = 1$,

$x_{22} = 1$,

$x_{32} = 0$,

$x_{33} = 4$

con un costo total de 0(2) + 1(1) + 5(1) + 0(0) + 7(4) = 34.

2.1.2. COSTO MÍNIMO[14]

Paso 0. Hacer k = 0. (*k* cuenta el número de variables básicas en la solución).

Paso 1. Hacer $c_{ij}^* = \min \{c_{11}, \ldots, c_{1n}, \ldots, c_{m1}, \ldots, c_{mn} \mid c_{ij}$ pertenece a una columna (o renglón) no tachado (a)\}.

Los valores de *i* y *j* son los subíndices de c_{ij}^* respectivamente.

Paso 2. Hacer $x_{ij} = \min \{a_i, b_j\}$.

[14] Para escribir este algoritmo se tomó como base el texto de la bibliografía [14] pág 123 a 125.

Paso 3. Actualizar ofertas y demandas.

$a_i = a_i - x_{ij},$

$b_j = b_j - x_{ij}.$

Paso 4. Tachar el renglón con $a_i = 0$ ó la columna con $b_j = 0$

Si ambos son cero, elegir uno arbitrariamente. Hacer $k = k + 1$

Paso 5. Si $k = m + n - 1$, terminar, la solución básica inicial se ha encontrado.

Si no, ir al Paso 1

Este método es análogo al anterior y hace el mismo número de iteraciones, la diferencia radica en el criterio para elegir la casilla en la que se va a enviar el flujo. Esta diferencia lo hace mejor método que el anterior, puesto que considera los costos para dicha elección, que es precisamente lo que se quiere minimizar.

MÉTODO DE COSTO MÍNIMO PARA EL EJEMPLO 1

ITERACIÓN 1

Paso 0. $k = 0.$

Paso 1. mín $\{0, 1, 2, 2, 5, 6, 3, 0, 7\} = 0 = c_{11}*$

Paso 2. $x_{11} =$ mín $\{3, 2\} = 2.$

Paso 3. $a_1 = 3 - 2 = 1,$

$b_1 = 2 - 2 = 0.$

Paso 4. Tachar la columna 1. $k = 0 + 1 = 1.$

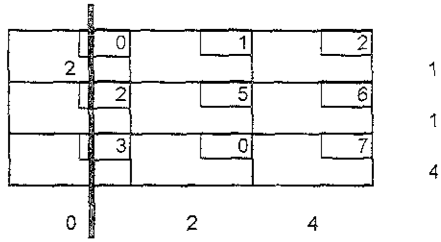

FIGURA 2.7 Ejemplo 1. Iteración 1. Costo Mínimo

Paso 5. $3 + 3 - 1 = 5$

$1 < (m + n - 1)$. Ir al paso 1

ITERACIÓN 2

Paso 1. mín $\{1, 2, 5, 6, 0, 7\} = 0 = c_{32}^*$

Paso 2. $x_{32} =$ mín $\{2, 4\} = 2$.

Paso 3. $a_3 = 4 - 2 = 2$,

$b_2 = 2 - 2 = 0$.

Paso 4. Tachar la columna 2. $k = 1 + 1 = 2$

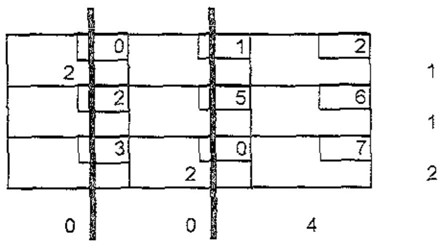

FIGURA 2.8 Ejemplo 1. Iteración 2. Costo Mínimo

Paso 5. $2 < (m + n - 1)$ Ir al paso 1.

ITERACIÓN 3

Paso 1. mín {2, 6, 7} = 2 = c_{13}*

Paso 2. x_{13} = mín {1, 4} = 1.

Paso 3. $a_1 = 1 - 1 = 0$,

$b_3 = 4 - 1 = 3$.

Paso 4. Tachar el renglón 1. $k = 2 + 1 = 3$

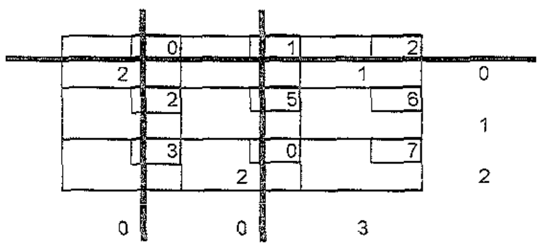

FIGURA 2.9. Ejemplo 1. Iteración 3 Costo Mínimo.

Paso 5. $3 < (m + n - 1)$. Ir al paso 1

ITERACIÓN 4

Paso 1. mín {6, 7} = 6 = c_{23}*.

Paso 2. x_{23} = mín {1, 3} = 1.

Paso 3. $a_2 = 1 - 1 = 0$,

$b_3 = 3 - 1 = 2$.

Paso 4. Tachar el renglón 2. $k = 3 + 1 = 4$.

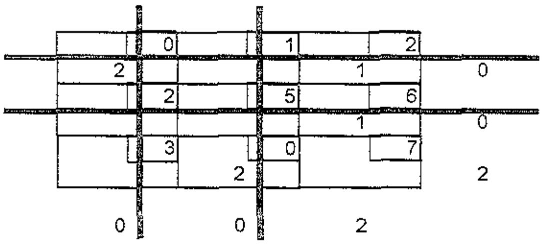

FIGURA 2 10. Ejemplo 1. Iteración 4. Costo Mínimo.

Paso 5. $4 < (m + n - 1)$ Ir al paso 1.

ITERACIÓN 5

Paso 1. mín $\{7\} = 7 = c_{33}*$.

Paso 2. $x_{33} =$ mín $\{2, 2\} = 2$.

Paso 3. $a_2 = 2 - 2 = 0$,

$b_2 = 2 - 2 = 0$.

Paso 4. Ambos valores son cero, se toma arbitrariamente el renglón

Tachar el renglón 3. $k = 4 + 1 = 5$

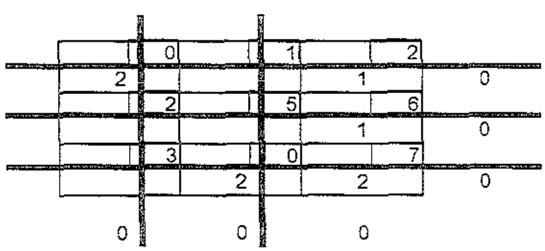

FIGURA 2.11. Ejemplo 1. Iteración 5 Costo Mínimo.

Paso 5. $5 = (m + n - 1)$ Terminar, se ha encontrado la solución básica inicial.

A saber,

$x_{11} = 2$,

$x_{13} = 1$,

$x_{23} = 1$,

$x_{32} = 2$,

$x_{33} = 2$.

con un costo total de $0(2) + 2(1) + 6(1) + 0(2) + 7(2) = 22$

Como puede observarse, este costo total es menor que el obtenido utilizando el método de Esquina Noroeste.

Es claro que se puede elegir la entrada con menor costo en una iteración y que en las siguientes iteraciones las únicas alternativas que haya sean mucho más costosas; esto es, que es posible que se hubiera elegido una con costo no necesariamente igual al menor, y que en otra u otras iteraciones posteriores, resulte mejor.

Por ejemplo:

0	1	3
2	5	1
2	2	

FIGURA 2 12. Ejemplo 2.

Resolviéndolo por este método se obtiene lo siguiente

ITERACIÓN 1

Paso 0. $k = 0$

Paso 1. $\text{mín } \{0, 1, 2, 5\} = 0 = c_{11}^*$.

Paso 2. $x_{11} = \text{mín } \{3, 2\} = 2$.

Paso 3. $a_1 = 3 - 2 = 1$,

$b_1 = 2 - 2 = 0$

Paso 4. Tachar la columna 1. k = 0 + 1 = 1.

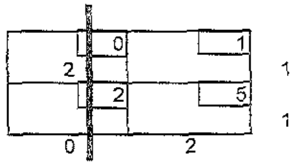

FIGURA 2.13 Ejemplo 2. Iteración 1 Costo Mínimo.

Paso 5. 2 + 2 – 1 = 3

1 < *(m + n – 1)*. Ir al paso 1.

ITERACIÓN 2

Paso 1. mín {1, 5} = 1 = c_{12}*.

Paso 2. x_{12} = mín {1, 2} = 1.

Paso 3. $a_1 = 1 - 1 = 0$,

$b_2 = 2 - 1 = 1$.

Paso 4. Tachar el renglón 1. k = 1 + 1 = 2.

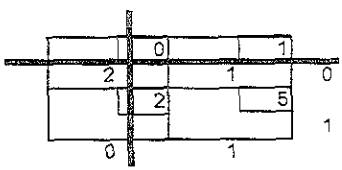

FIGURA 2.14. Ejemplo 2. Iteración 2. Costo Mínimo

Paso 5. 2 < *(m + n – 1)*. Ir al paso 1

ITERACIÓN 3

Paso 1. mín $\{5\} = 5 = c_{22}^*$

Paso 2. $x_{22} =$ mín $\{1, 1\} = 1$.

Paso 3. $a_2 = 1 - 1 = 0$,

$b_2 = 1 - 1 = 0$

Paso 4. Tachar el renglón 2. $k = 2 + 1 = 3$

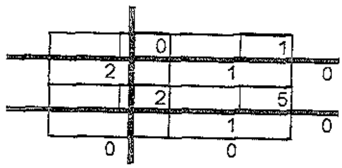

FIGURA 2.15 Ejemplo 2. Iteración 3. Costo Mínimo

Paso 5. $3 = (m + n - 1)$ Terminar, se ha encontrado la solución básica inicial

A saber,

$x_{11} = 2$,

$x_{12} = 1$,

$x_{22} = 1$,

con un costo total de $0(2) + 1(1) + 5(1) = 6$

Sin embargo, de haber comenzado con la entrada de costo 1, que no es la de costo mínimo y siguiendo después con el criterio de Costo Mínimo, se obtiene lo siguiente.

ITERACIÓN 1

Paso 0. $k = 0$

Paso 1. $c_{11}^* = 1$.

Paso 2. $x_{11} = \text{mín}\ \{3, 2\} = 2$.

Paso 3. $a_1 = 3 - 2 = 1$,

$b_2 = 2 - 2 = 0$.

Paso 4. Tachar la columna 2. $k = 0 + 1 = 1$

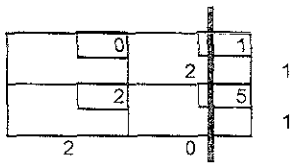

FIGURA 2.16 Ejemplo 2. Iteración 1. Costo Mínimo modificado.

Paso 5. $2 + 2 - 1 = 3$

$1 < (m + n - 1)$. Ir al paso 1

ITERACIÓN 2

Paso 1. $\text{mín}\ \{0, 2\} = 0 = c_{11}^*$.

Paso 2. $x_{11} = \text{mín}\ \{1, 2\} = 1$

Paso 3. $a_1 = 1 - 1 = 0$,

$b_1 = 2 - 1 = 1$.

Paso 4. Tachar el renglón 1. $k = 1 + 1 = 2$.

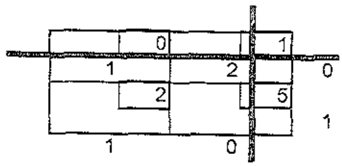

FIGURA 2.17 Ejemplo 2 Iteración 2. Costo Mínimo modificado.

Paso 5. $2 < (m + n - 1)$ Ir al paso 1.

ITERACIÓN 3

Paso 1. mín $\{2\} = 2 = c_{11}^*$

Paso 2. $x_{11} = \text{mín}\ \{1, 1\} = 1$

Paso 3. $a_2 = 1 - 1 = 0$,

$b_1 = 1 - 1 = 0$.

Paso 4. Tachar el renglón 2. $k = 2 + 1 = 3$.

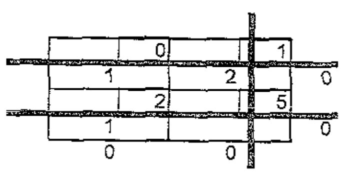

FIGURA 2 18. Ejemplo 2 Iteración 3 Costo Mínimo modificado

Paso 5. $3 = (m + n - 1)$ Terminar, se ha encontrado la solución básica inicial.

A saber,

$x_{11} = 1$,

$x_{12} = 2$,

$x_{21} = 1$,

con un costo total de $0(1) + 1(2) + 2(1) = 4$

Que es mejor solución que la anterior. Por lo que aunque el método de Costo Mínimo considere los costos, no garantiza obtener una mejor solución que el método de Esquina Noroeste, y mucho menos, el óptimo.

2.1.3. APROXIMACIÓN DE VOGEL[15]

La solución básica inicial que se obtiene por este método, conocido como MAV (Método de Aproximación de Vogel), es al menos tan buena, como la obtenida por los anteriormente descritos, esto se justifica empíricamente en la sección 2.3.1.

Notación:

k = número de variables básicas en la solución,
$cminr_i^1$ = costo mínimo del renglón i,
$cminr_i^2$ = siguiente costo mínimo del renglón i, si todos son iguales, tomar el mismo valor.
$cminc_j^1$ = costo mínimo de la columna j,
$cminc_j^2$ = siguiente costo mínimo de la columna j, si todos son iguales, entonces $cminc_j^1 = cminc_j^2$,
$difr_i$ = diferencia del renglón *i-ésimo* entre los costos mínimos,
$difc_j$ = diferencia de la columna *j-ésima* entre los costos mínimos,
pen = diferencia o penalización más grande entre los dos menores costos,

El algoritmo es el siguiente:

Paso 0. Hacer $k = 0$.

Paso 1. Para $i = 1, ..., m$, con $a_i > 0$ y correspondiente renglón no tachado, hacer:
$difr_i = cminr_i^2 - cminr_i^1$

[15] Basado en [14], pág. 125

Para $j = 1, \ldots, n$, con $b_j > 0$ y correspondiente columna no tachada, hacer

$difc_j = cminc_j^2 + cminc_j^1$

Hacer pen = máx $\{difr_i, difc_j \mid i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$.

Paso 2. Si pen = $difr_i$, hacer:

$c_{ij}^* = \text{mín}\{c_{ij} \mid j = 1, \ldots, n\}$.

Si no, si pen = $difc_j$, hacer.

$c_{ij}^* = \text{mín}\{c_{ij} \mid i = 1, \ldots, m\}$

Paso 3. Hacer $x_{ij} = \min \{a_i, b_j\}$.

Paso 4. Actualizar ofertas y demandas.

$a_i = a_i - x_{ij}$,

$b_j = b_j - x_{ij}$.

Paso 5. Tachar el renglón con $a_i = 0$ ó la columna con $b_j = 0$.

Si ambos son cero, elegir uno arbitrariamente

Hacer $k = k + 1$.

Paso 6. a) Si $k = m + n - 1$, terminar, la solución básica inicial se ha encontrado.

b) Si únicamente un renglón (columna) con oferta (demanda) positiva permanece sin estar tachado, determinar las variables básicas sobre el renglón (columna) que faltan, por el método de Costo Mínimo.

c) Si todos los renglones y columnas no tachados tienen oferta y demanda cero, determinar las variables básicas cero por el método

Una de las clarísimas desventajas que tiene este método con respecto a los anteriores (a pesar de que el número de iteraciones también es m + n - 1), es que requiere de más tiempo para hallar la solución básica inicial, debido a que el número de cálculos y comparaciones que se realizan son mayores. Sin embargo, su cercanía a la solución óptima lo hace ser mejor método. En la *sección 2.3.1*, se analizan las razones por las cuales este método es mejor que los anteriores.

Como acaba de mostrarse, existe más de un método para encontrar una solución básica inicial. Si bien es cierto que el más efectivo, en cuanto a la cercanía la óptimo, es el de Vogel, en muchas ocasiones puede no interesar encontrar una mejor solución básica inicial, tal vez baste con tener sólo alguna, si este es el caso, lo mejor es utilizar alguno de los otros dos métodos mencionados

MÉTODO DE APROXIMACIÓN DE VOGEL PARA EL EJEMPLO 1

En la notación utilizada en esta sección, las **penalizaciones** correspondientes a los renglones, aparecen en la segunda columna fuera de la tabla; y las de las columnas, están en el segundo renglón fuera de la tabla. La penalización mayor aparece con un color más oscuro

ITERACIÓN 1

Paso 1. $difr_1 = 1 - 0 = 1$,

$difr_2 = 5 - 2 = 3$,

$difr_3 = 3 - 0 = 3$.

$difc_1 = 2 - 0 = 2$,

$difc_2 = 1 - 0 = 1$,

$difc_3 = 6 - 2 = 4$.

$pen = \text{máx}\ \{1, 3, 3, 2, 1, 4\} = 4$.

0	1	2	3	1
2	5	6	1	3
3	0	7	4	3
2	2	4		
2	1	4		

FIGURA 2 19. Ejemplo 1. Iteración 1. MAV Penalizaciones.

Paso 2. Como pen = $\text{difc}_3 = 4$,

$\text{mín}\{2, 6, 7\} = 2 = c_{13}{}^*$.

Paso 3. $\text{mín}\{3, 4\} = 3 = x_{13}$.

Paso 4. $a_1 = 3 - 3 = 0$,

$b_3 = 4 - 3 = 1$

Paso 5. Tachar el renglón 1. $k = 0 + 1 = 1$.

~~0~~	~~1~~	~~2 3~~	~~0~~
2	5	6	1
3	0	7	4
2	2	1	

FIGURA 2 20. Ejemplo 1. Iteración 1. MAV. Tachado de renglón

Paso 6. d) Ir al paso 1

ITERACIÓN 2

Paso 1. $difr_2 = 5 - 2 = 3$,

$difr_3 = 3 - 0 = 3$.

$difc_1 = 3 - 2 = 1$,

$difc_2 = 5 - 0 = 5$,

$difc_3 = 7 - 6 = 1$

$pen = \text{máx}\ \{3, 3, 1, 5, 1\} = 5$.

~~0~~	~~1~~	~~2 3~~	~~0~~	
2	5	6	1	3
3	0	7	4	3
2	2	1		
1	5	1		

FIGURA 2 21 Ejemplo 1. Iteración 2 MAV. Penalizaciones

Paso 2. Como $pen = difc_2 = 5$,

$\text{mín}\{5, 0\} = 0 = c_{32}^*$.

Paso 3. $\text{mín}\{4, 2\} = 2 = x_{32}$

Paso 4. $a_3 = 4 - 2 = 2$,

$b_2 = 2 - 2 = 0$.

Paso 5. Tachar la columna 2 $k = 1 + 1 = 2$

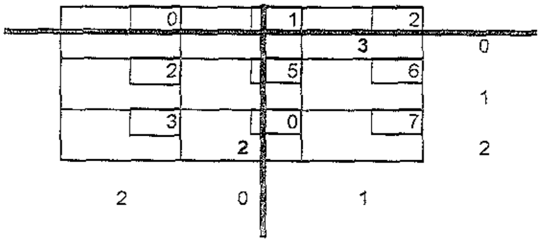

FIGURA 2.22. Ejemplo 1 Iteración 2. MAV. Tachado columna

Paso 6. d) Ir al paso 1.

ITERACIÓN 3

Paso 1. $\mathrm{difr}_2 = 6 - 2 = 4$,

$\mathrm{difr}_3 = 7 - 3 = 4$

$\mathrm{difc}_1 = 3 - 2 = 1$,

$\mathrm{difc}_3 = 7 - 6 = 1$

$\mathrm{pen} = \mathrm{máx}\ \{4, 4, 1, 1\} = 4$.

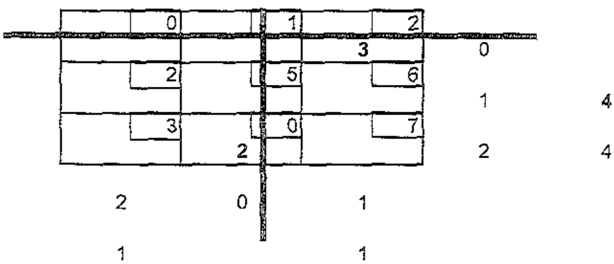

FIGURA 2.23. Ejemplo 1. Iteración 3. MAV. Penalizaciones.

Paso 2. $\mathrm{pen} = \mathrm{difr}_2 = 4$,

$\min\{2, 6\} = 2 = c_{21}{}^*$

Paso 3. $\min\{1, 2\} = 1 = x_{21}$

Paso 4. $a_2 = 1 - 1 = 0,$

$b_1 = 2 - 1 = 1.$

Paso 5. Tachar el renglón 2. $k = 2 + 1 = 3.$

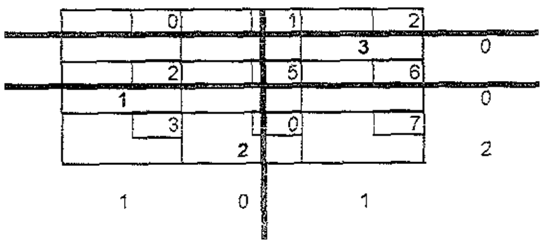

FIGURA 2.24. Ejemplo 1 Iteración 3. MAV. Tachado renglón

Paso 6. b) Determinar las variables que faltan por el método de Costo Mínimo.

ITERACIÓN 4

Paso 0. $k = 3.$

Paso 1. $\min\{3, 7\} = 3 = c_{31}^{*}$

Paso 2. $x_{31} = \min\{2, 1\} = 1.$

Paso 3. $a_3 = 2 - 1 = 1,$

$b_1 = 1 - 1 = 0.$

Paso 4. Tachar la columna 1. $k = 3 + 1 = 4$

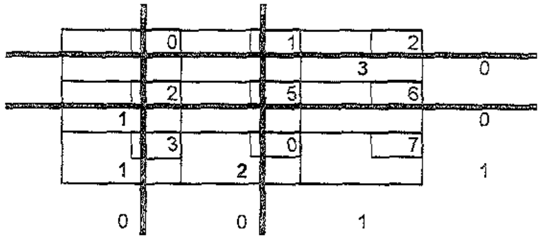

FIGURA 2 25 Ejemplo 1. Iteración 4 Costo Mínimo.

Paso 5. $3 + 3 - 1 = 5$

$4 < (m + n - 1)$. Ir al paso 1

ITERACIÓN 5

Paso 1. mín $\{7\} = 7 = c_{33}*$.

Paso 2. $x_{33} =$ mín $\{1, 1\} = 1$.

Paso 3. $a_3 = 1 - 1 = 0$,

$b_1 = 1 - 1 = 0$

Paso 4. Tachar el renglón 3 $k = 4 + 1 = 5$.

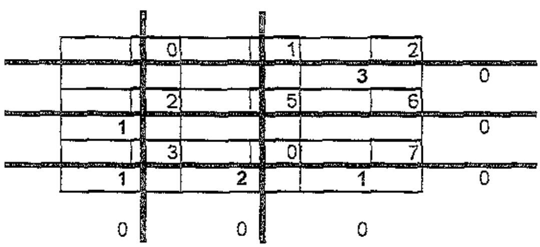

FIGURA 2.26. Ejemplo 1. Iteración 5 Costo Mínimo

Paso 5. $3 + 3 - 1 = 5$

$5 = (m + n - 1)$, por lo tanto, terminar, la solución es

$x_{13} = 3$,

$x_{21} = 1$,

$x_{31} = 1$,

$x_{32} = 2$,

$x_{33} = 1$,

con un costo total de $2(3) + 2(1) + 3(1) + 0(2) + 7(1) = 18$.

Esta solución es mejor que la obtenida por los dos métodos anteriores (34 con Esquina Noroeste y 22 con el de Costo Mínimo).

2.2. MEJORAMIENTO DE LA SOLUCIÓN BÁSICA INICIAL

2.2.1. *MODIFICATED DISTRIBUTION* (MODI)

Dada una solución inicial, este método permite encontrar una solución óptima o determinar si la que ya se encontró lo es. Se basa en el Método Simplex[16] y en la búsqueda de circuitos[17] formados por variables básicas, excepto en un elemento, el primero (y último por ser circuito) que es una variable no básica.

Partiendo del hecho que se cuenta con una solución básica inicial factible (encontrada con el Método de Vogel, $m + n - 1$ variables), el algoritmo puede describirse como sigue [3], [11] y [13]:

Paso 0. Encontrar el costo de la solución actual (si es la primera iteración, la solución actual es la inicial básica factible), de la siguiente manera:

costo = $c_{11}x_{11} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$ [18]

Paso 1. Para cada variable básica, resolver el sistema.

[16] Revisar bibliografía del tema: *"Investigación de Operaciones"*. Por ejemplo, [1], [7], [14].

[17] Un circuito es una sucesión de nodos en la que el nodo inicial es igual al nodo final. Para mayor referencia consultar [6].

[18] De hecho basta con considerar sólo las variables básicas, pues el resto tienen valor cero

$c_{ij} = u_i + v_j$, $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$

donde

c_{ij} = costo de enviar una unidad del origen *i* al destino *j*,

u_i, v_j = *variables duales*[19].

Paso 2. Para cada variable no básica calcular

$z_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$; $i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$

Paso 3. a) Si $z_{ij} \geq 0$, para toda variable no básica, terminar. La solución obtenida es la óptima.

b) En caso contrario, elegir x_{ij}^* tal que $z_{ij}^* = \text{mín} \{ z_{ij}$; para toda variable no básica $\}$. x_{ij}^* es el nuevo elemento de la base. Ir al Paso 4.

Paso 4. Hallar el circuito[20] de variables básicas, que tiene como inicio (y fin por ser circuito) a x_{ij}^*.

Paso 5. Numerar los elementos del circuito comenzando con x_{ij}^*.

Paso 6. Hacer $k = \text{mín} \{x_{ij} \mid x_{ij}$ corresponde a un número par en la numeración que se hizo en el Paso 5$\}$.

Paso 7. Actualizar cada elemento del circuito x_{ij}, de la siguiente manera:

Si x_{ij} corresponde a un número par en la numeración del *Paso 5*, $x_{ij} = x_{ij} - k$, entonces eliminar arbitrariamente de la base el primer elemento que se hace cero

Si x_{ij} corresponde a un número impar en la numeración del *Paso 5*, $x_{ij} = x_{ij} + k$, entonces ir al *Paso 0*.

[19] Revisar bibliografía del tema *"Investigación de Operaciones"* o las referencias que se indicaron al inicio de este algoritmo

[20] x_{ij} es el primer elemento, luego seguirá x_{ik} o x_{kj}, posteriormente x_{kj} o x_{ki} respectivamente según el caso, hasta que se cierra con x_{ij} Ver ejemplo en esta sección

USO DE MODI EN LA OPTIMIZACIÓN DEL EJEMPLO 1

Dada la solución básica inicial factible obtenida por el *MAV*, se tiene.

[0]	[1]	[2] 3
[2] 1	[5]	[6]
[3] 1	[0] 2	[7] 1

FIGURA 2.27 Ejemplo 1 Solución por el *MAV*

ITERACIÓN 1

Paso 0. costo = 0(0) + 1(0) + 2(3) + 2(1) + 5(0) + 6(0) + 3(1) + 0(2) + 7(1)

costo = 18

Paso 1. Para cada variable básica, resolver el sistema:

$2 = u_1 + v_3$ ....(1)

$2 = u_2 + v_2$ ....(2)

$3 = u_3 + v_1$ ....(3)

$0 = u_3 + v_2$ ....(4)

$7 = u_3 + v_3$ ....(5)

Si $u_3 = 0$ [21] $\Rightarrow v_1 = 3$ de (3)

$\Rightarrow v_2 = 0$ de (4)

$\Rightarrow v_3 = 7$ de (5)

$\Rightarrow u_1 = -5$ de (1)

$\Rightarrow u_2 = 2$ de (2)

Paso 2. Para cada variable no básica,

$z_{11} = 0 - (-5) - 3 = 2$

$z_{12} = 1 - (-5) - 0 = 6$

[21] Ver *sección 2.3 2*

$z_{22} = 5 - 2 - 0 = 3$

$z_{23} = 6 - 2 - 7 = -3$

Paso 3. b) $z_{23}{}^* = \text{mín}\ \{ 2, 6, 3, -3\} = -3$, $x_{23}{}^*$ es el nuevo elemento de la base

Paso 4. El circuito que se forma es:

$x_{23}, x_{33}, x_{31}, x_{21}, x_{23}$

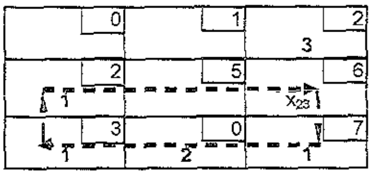

FIGURA 2.28. Ejemplo 1. MODI. Circuito encontrado

Paso 5. x_{23} 1

x_{33} 2

x_{31} 3

x_{21} 4

Paso 6. $1 = \text{mín}\ \{1, 1\}$.

Paso 7. $x_{33} = 1 - 1 = 0$

$x_{21} = 1 - 1 = 0$

$x_{23} = 0 + 1 = 1$

$x_{31} = 1 + 1 = 2$

x_{33} sale de la base.

0	1	2 3
2 0	5	6 1
3 2	0 2	7

FIGURA 2.29. Ejemplo 1 MODI Solución actualizada

ITERACIÓN 2

Paso 0. costo = 0(0) + 1(0) + 2(3) + 2(0) + 5(0) + 6(1) + 3(2) + 0(0) + 7(0)

costo = 15[22]

Paso 1. Para cada variable básica, resolver el sistema:

$2 = u_1 + v_3$ ....(1)

$2 = u_2 + v_1$ ....(2)

$6 = u_2 + v_3$ ....(3)

$3 = u_3 + v_1$ .... (4)

$0 = u_3 + v_2$ ....(5)

Si $u_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 2$ de (2) $\Rightarrow u_3 = 1$ de (4) $\Rightarrow v_2 = -1$ de (5)

$\Rightarrow v_3 = 6$ de (3) $\Rightarrow u_1 = -4$ de (1)

Paso 2. Para cada variable no básica,

$z_{11} = 0 - (-4) - 2 = 2$

$z_{12} = 1 - (-4) - (-1) = 7$

$z_{22} = 5 - 0 - (-1) = 6$

$z_{33} = 7 - 1 - 6 = 0$

Paso 3. a) $z_{ij} \geq 0$ para toda variable no básica. Por lo tanto la solución

$x_{13} = 3$,

$x_{23} = 1$,

$x_{31} = 2$,

[22] El costo se puede obtener también del *costo anterior* + z_{ij}**(número de unidades que se circulan).*

$x_{32} = 2$,

es la óptima con un costo total de 15.

$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$ 3
$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$ 1
$\boxed{3}$ 2	$\boxed{0}$ 2	$\boxed{7}$

FIGURA 2.30 Ejemplo 1. MODI Solución óptima.

2.3. MÉTODOS UTILIZADOS

2.3.1. ANÁLISIS DEL MAV

Los pasos que deben seguirse para hallar la solución básica inicial por este método, se enunciaron anteriormente. Ahora se describirán sin usar nombres de variables; esto con el propósito de tener en mente la idea general del algoritmo para posteriormente analizarlo.

Utilizando el formato de la representación en tabla, los pasos a seguir son:

Paso 1. Tomar las diferencias entre los dos costos menores de cada renglón y cada columna, a estas diferencias se les llama *penalizaciones*

Paso 2. Elegir el renglón o columna cuya penalización es mayor
Elegir el costo mínimo sobre dicho renglón o columna
Pasar el mayor flujo posible (mínimo entre oferta y demanda correspondiente).
Tachar el renglón o columna que corresponda a oferta o demanda cero, según el caso. Si ambos (as) son cero, tachar sólo uno (a).
No considerar renglones o columnas que tengan oferta o demanda cero,

---

En este caso sería · 18 + (-3)(1) = 15

para calcular las siguientes penalizaciones.

Paso 3. a) Si exactamente un renglón o columna no se ha tachado y tiene oferta o demanda cero, según el caso, parar, la solución obtenida es la deseada.

b) Si sólo un renglón o columna no se ha tachado y tiene oferta o demanda positiva, asignar los flujos correspondientes, hasta quedarse con ofertas y demandas cero y $m + n - 1$, variables básicas. La solución obtenida al final, es la deseada.

c) Si todos los renglones o columnas no tachados (as) tienen ofertas y demandas cero. Determinar las variables básicas que faltan dando prioridad a aquellas con costo menor.

d) En otro caso calcular las penalizaciones correspondientes e ir a 2.

La efectividad de este método sobre el de Costo Mínimo y Esquina Noroeste, radica en la manera en que se va eligiendo el origen (destino) por el que se enviará (recibirá) flujo En la representación de tabla, esto es equivalente a la manera en que se elige el renglón (columna) correspondiente al origen (destino), del que se enviarán (recibirán) un número de unidades determinadas de producto.

Antes de continuar, véase nuevamente el ejemplo 1:

0	1	2	3
2	5	6	1
3	0	7	4
2	2	4	

FIGURA 2 31. Ejemplo 1

Las penalizaciones se muestran a continuación y aparecen de color más oscuro en la segunda columna fuera de la tabla para los renglones, y en el segundo renglón, también fuera de la tabla, para las columnas.

0	1	2	3	1
2	5	6	1	3
3	0	7	4	3
2	2	4		
2	1	4		

FIGURA 2 32 Solución del ejemplo 1 por el MAV Penalizaciones

Según el MAV, se elige recibir flujo en el destino 3, que tiene la penalización más grande: 4. Como el origen con menor costo de envío al destino 3 es el 1, se envían 3 unidades de éste al destino 3 (mín {3,4}).

Se tacha el origen 1 que queda con oferta 0. Las actualizaciones y penalizaciones son

~~0~~	~~1~~	~~2 / 3~~	~~0~~	
2	5	6	1	3
3	0	7	4	3
2	2	1		
1	5	1		

FIGURA 2 33 Solución del ejemplo 1 por el MAV Iteración 1.

Se tiene un costo de *2(3) = 6*.

En la siguiente iteración el destino 2 recibe flujo del origen 3 Las actualizaciones son:

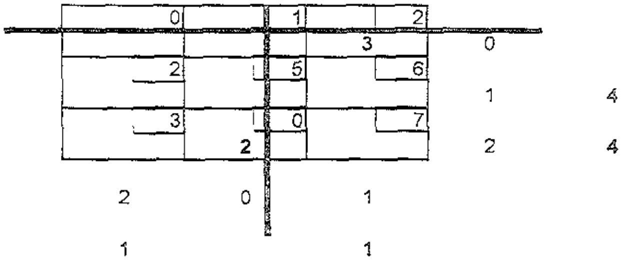

FIGURA 2.34 Solución del ejemplo 1 por el MAV Iteración 2.

Con un costo de $6 - 0(2) = 6$

Como se tiene empate en las penalizaciones más grandes, se toma arbitrariamente la primera, es decir, se envía flujo del origen 2 al destino 1. Las actualizaciones son

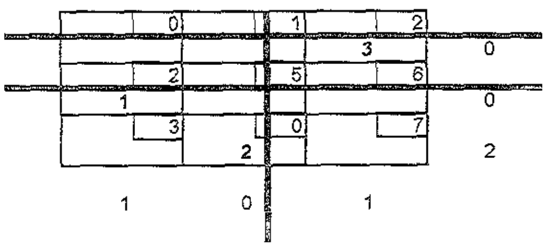

FIGURA 2.35 Solución del ejemplo 1 por el MAV Iteración 3.

Ahora el costo es: $6 - 2(1) = 8$

Como ya sólo se tiene un origen con oferta positiva, se asignan los flujos correspondientes

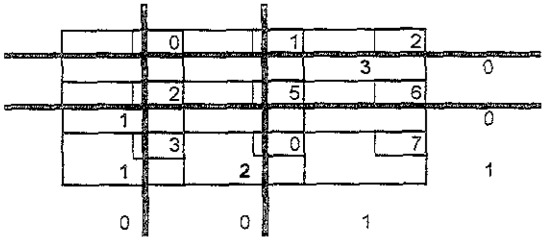

FIGURA 2.36. Solución del ejemplo 1 por el MAV. Iteración 4

El costo es: *8 + 3(1) = 11.*

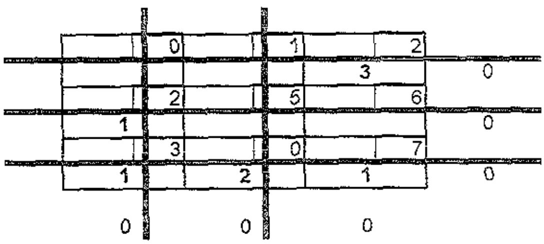

FIGURA 2.37. Solución del ejemplo 1 por el MAV Iteración 5.

Que es una solución básica inicial. Con un costo total de: *11 + 7(1) = 18*

Observación:

Cada origen debe enviar flujo por lo menos a un destino. De igual manera cada destino debe recibir flujo por lo menos de un origen. En su representación de tabla, significa que **en cada renglón y en cada columna, por lo menos debe haber una variable básica.**

Al elegir el nodo con mayor penalización, se está asegurando enviar o recibir la mayor cantidad de flujo posible de o al nodo que, al elegirlo en una iteración posterior, implicaría un costo más grande.

En el ejemplo anterior, si en lugar de tomar las penalizaciones más grandes, se toman las más pequeñas, se tiene que la primer iteración corresponde al primer renglón; al tomar el costo mínimo de éste, implica enviar flujo al destino 1·

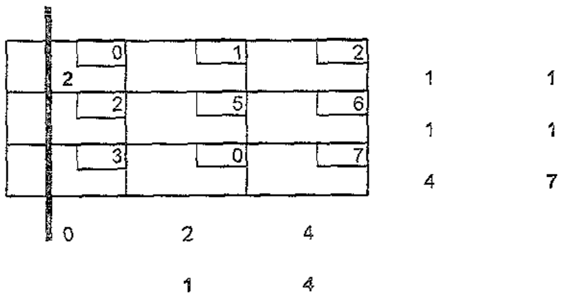

FIGURA 2.38. Solución del ejemplo 1 por el MAV modificado. Iteración 1 (considerando penalizaciones menores en lugar de mayores).

A continuación se muestran el resto de las iteraciones tomando penalizaciones pequeñas:

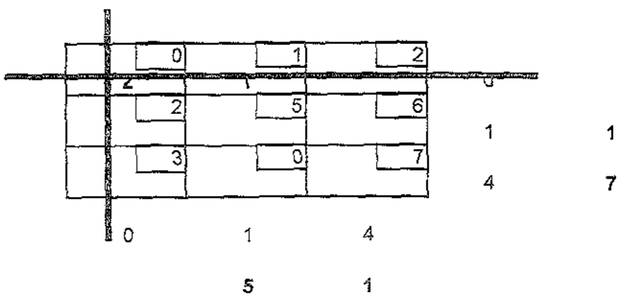

FIGURA 2.39. Solución del ejemplo 1 por el MAV modificado. Iteración 2 (considerando penalizaciones menores en lugar de mayores).

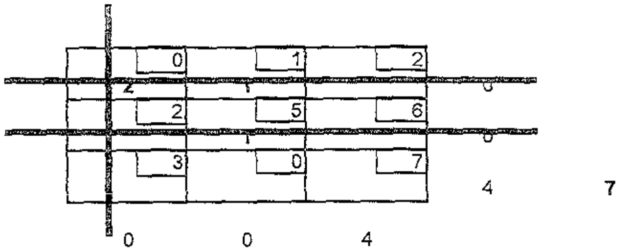

FIGURA 2.40. Solución del ejemplo 1 por el MAV modificado. Iteración 3 (considerando penalizaciones menores en lugar de mayores)

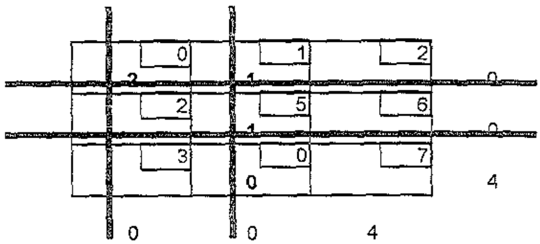

FIGURA 2 41. Solución del ejemplo 1 por el MAV modificado. Iteración 4 (considerando penalizaciones menores en lugar de mayores)

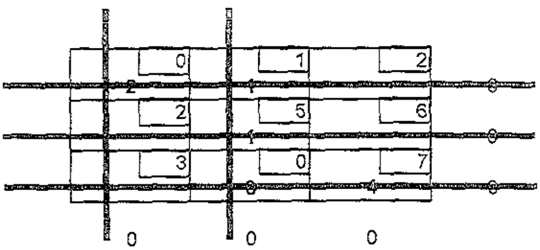

FIGURA 2.42. Solución del ejemplo 1 por el MAV modificado Iteración 5 (considerando penalizaciones menores en lugar de mayores)

Con un costo total de $0(2) + 1(1) + 5(1) + 0(0) + 7(4) = 34$

Que es casi el doble del costo obtenido utilizando el Método Vogel. Como puede observarse, al no considerar la mayor penalización en las iteraciones, no se envía el mayor flujo por donde pudiera resultar menos costoso. Por ejemplo, en la primer iteración, con Vogel, se prevé enviar al destino 3 la mayor cantidad de flujo posible del destino 1, que es el de menor costo. Al no considerar el criterio de la penalización más grande, resulta que al final, para satisfacer el destino 3, se recurre al destino 3 que es de mayor costo que el 1.

Observación:

Al sólo tachar un renglón o una columna, se asegura que en cada iteración se agregue sólo una variable básica, entonces el método termina en $m + n - 1$ iteraciones.

2.3.2. ANÁLISIS DEL MÉTODO DE MODI

La efectividad de este método consiste en la formación de circuitos con variables básicas sólo en el caso en el que al modificar la base actual, se logre una mejora en la solución O bien, la seguridad de que la que se obtuvo es la óptima.

Observación:

Debido a que el sistema de ecuaciones que se debe resolver para encontrar el valor de las variables duales tiene $m + n$ variables (hay tantas u_i como renglones y tantas v_j como columnas) y $m + n - 1$ ecuaciones, se puede resolver haciendo que la variable que más se repite tome el valor de cero (en caso de haber empates, es indistinto tomar cualquiera de éstas), el valor del resto de las variables se obtiene con despejes

Como se mencionó en la sección anterior, este método está basado en el Método Simplex, sólo que el número de operaciones se reduce al considerar la estructura del problema de transporte [3][8][13], sin embargo, tiene una "sutileza", y es que cuando se obtiene una solución degenerada[23] en el *MAV* o en alguna de las iteraciones intermedias del método *MODI*, hay que tener mucho cuidado en las posiciones en que se encuentran los ceros para la siguiente iteración, pues pudiera suceder que no se puede resolver el sistema de ecuaciones. Entonces, dado que no aportan valor a la solución se pueden reacomodar según convenga.

Por ejemplo,

3	7	6	4	5
2	4	3	2	2
4	3	8	5	3
3	3	2	2	

FIGURA 2 43. Ejemplo de degeneración.

La solución que se obtiene por el *MAV* es la que se muestra en la *figura 2.44*.

3 3	7	6	4 2
2 0	4	3 2	2 0
4	3 3	8	5

FIGURA 2 44. Ejemplo de degeneración Solución obtenida por el *MAV*.

Al plantear el sistema de ecuaciones se tiene.

$3 = u_1 + v_1,$

$4 = u_1 + v_4,$

$2 = u_2 + v_1,$

$3 = u_2 + v_3,$

$2 = u_2 + v_4,$

$3 = u_3 + v_2.$

Al hacer $u_1 = 0$, se obtienen los valores de v_1, v_4, u_2, v_3, pero no se puede obtener los valores de u_3 y v_2 Al hacer cero otras variables, tampoco es posible, esto se debe a que la variable x_{32}, no tiene al menos otra variable que esté en su renglón y/o columna con la que pueda formar la pareja de ecuaciones para resolver el sistema.

Dado que sólo se tienen 4 variables distintas de cero en la base, y hay 2 variables que están a nivel cero, se pueden acomodar según convenga. Si se acomoda una de ellas en la posición: (2,2) por ejemplo, se tendría resuelto el problema.

Así pues, considérese la siguiente solución básica inicial factible·

$\boxed{3}$ 3	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 2
$\boxed{2}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{3}$ 2	$\boxed{2}$
$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{8}$	$\boxed{5}$

FIGURA 2 45. Ejemplo de degeneración. Reacomodo de ceros.

El sistema queda entonces.

$3 = u_1 + v_1,$

$4 = u_1 + v_4,$

$2 = u_2 + v_1,$

$4 = u_2 + v_2,$

$3 = u_2 + v_3,$

$3 = u_3 + v_2.$

---

[23] Alguna variable básica está a nivel cero.

Si hacemos $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 3 \Rightarrow u_2 = -1 \Rightarrow v_2 = 5 \Rightarrow u_3 = -2$

$\Rightarrow v_4 = 4$

y como $u_2 = -1 \Rightarrow v_3 = 4$

y el sistema queda resuelto.

Entonces el algoritmo se continúa como siempre

Observación:

El número máximo de elementos en un circuito es el número de variables básicas más uno. Puesto que todo circuito se forma de básicas excepto por un elemento, la variable sobre la que se decidirá si entra o no a la base.

Observación:

Si en el circuito, existen variables básicas con valor de cero, y su posición es par, entonces el circuito no mejora la solución, pues lo que se enviaría a través de éste es cero

CAPÍTULO 3

SOFTWARE

3.1. DESCRIPCIÓN

El software se realizó en Matlab para Windows v 4 2c.1

El objetivo de este capítulo es dar una descripción del software que se implementó para la solución del problema de transporte, con el propósito de que el usuario que deseé estudiar el código, lo haga teniendo una idea general de la manera en que se programó y de este modo logre entenderlo sin problemas. Cabe mencionar que el código tiene comentarios que le ayudarán en la comprensión del mismo.

A continuación se muestra un diagrama de flujo con la estructura general del programa

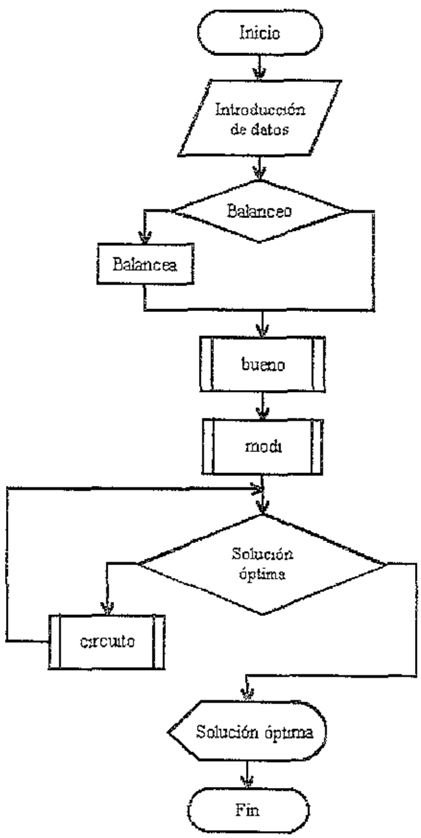

FIGURA 1 1 Diagrama de flujo del programa

En la codificación se usaron letras mayúsculas sólo para las variables de tipo matriz

Este software consta de 6 funciones.

1. datos.m
2. bueno.m
3. penal m
4. actual.m
5. modi.m
6. circuito m

las cuales se describen a continuación

1. **datos.m**

Esta función se encarga de solicitar los datos al usuario, validarlos y verificar que el problema esté balanceado

En el caso de que el usuario introduzca matrices con dimensión equivocada, le dará oportunidad de rectificarlas.

Así mismo, si el problema no está balanceado, lo balancea creando un origen o destino ficticio según sea el caso.

Datos de entrada:

Son aquellos que el usuario proporciona

- el número de orígenes (se almacena en la variable *origen*),
- el número de destinos (se almacena en la variable *destino*),
- la oferta (se almacena en la variable *OFERTA*),
- la demanda (se almacena en la variable *DEMANDA*),
- los costos (se almacenan en la variable *COSTO*),

Datos de salida:

Las variables globales (se mencionan enseguida) que pasan a la función *bueno m*

Variables globales:

origen Variable de tipo constante[24] que contiene el número de orígenes

destino. Variable de tipo constante que contiene el número de destinos

OFERTA Contiene las ofertas de los orígenes. Esta matriz es de dimensión. *origen x 1*

DEMANDA. Contiene las demandas de los destinos. Esta matriz es de dimensión *1 x destino*.

COSTO. Contiene los costos de pasar del origen *i* al destino *j*, para $i = 1, .., origen$; $j = 1, ..., destino$. Matriz de dimensión *origen x destino*

Función que llama: *bueno m*

2. bueno.m

Llamada por la función: *datos.m*

A través de esta función se encuentra la solución básica inicial por el Método de Vogel auxiliándose de las funciones *actual.m* y *penal.m*, y la despliega. Posteriormente llama a la función *modi m* para continuar la solución del problema.

Datos de entrada:

Las variables globales de la función anterior.

Datos de salida:

Las variables globales que se mencionan abajo y en pantalla se presenta la solución básica inicial obtenida por el *MAV*.

Variables globales:

COST. Al inicio tiene los mismos datos y las mismas características que la variable global COSTO. Esta variable se crea para modificar sus datos según se requiera

[24] En este caso la variable es de un número entero Para mayor referencia sobre términos y conceptos computacionales ver bibliografía complementaria [K].

durante la solución del problema, teniendo los datos originales en la variable global COSTO.

FLUJO. Variable que contiene la solución del problema. Matriz de dimensión *origen x destino* La entrada (i, j) representa la cantidad de flujo que se envía del origen *i* al destino *j*

OFER, DEM Variables que se crean con el mismo objetivo que COST. La correspondencia es OFERTA y DEMANDA respectivamente.

vb. Variable de tipo constante que va almacenando el número de variables básicas según se van encontrando en la solución del problema.

dim_vb. Variable de tipo constante que contiene el número de variables básicas del problema: *origen + destino – 1.*

max_C. Variable de tipo constante que contiene el valor máximo de la variable COSTO.

r Variable de tipo constante que contiene el renglón de la variable básica que entrará a la base

c. Variable de tipo constante que contiene la columna de la variable básica que entrará a la base.

ren. Variable de tipo constante que contiene el renglón en el que se encontró la penalización más grande al aplicar el Método de Vogel

col. Variable de tipo constante que contiene la columna en la que se encontró la penalización más grande al aplicar el Método de Vogel. Cabe mencionar que cuando *ren* tiene un valor positivo, no puede tenerlo *col*, puesto que la penalización más grande es sobre renglones y columnas y viceversa.

Funciones que llama:

penal.m cuando va a calcular la penalización más grande en el *MAV*

actual.m cuando va a ingresar una variable básica a la base.

modi.m para continuar la solución del problema. Esto es, la optimización o verificación de optimalidad de la solución inicial básica a través del método de *MODI*.

3. penal.m

Llamada por la función: *bueno m*

El objetivo de esta función es dar el renglón (***ren***) o la columna (***col***) en la que se encuentra la penalización más grande.

Datos de entrada:

Las variables globales. ***COST, DEM, OFER, origen, destino.***

Datos de salida:

ren y **col**, variables que se usan en la función *bueno.m* y que se describieron en esta misma función.

4. actual.m

Llamada por la función: *bueno.m*

Esta función agrega las variables básicas a la solución básica inicial factible. Cada vez que se va a agregar una, esta función es invocada; además, actualiza los valores correspondientes a la oferta y la demanda.

Datos de entrada:

Las variables globales: **COST, OFER, DEM, FLUJO, vb, r, c**

Datos de salida:

Las variables globales: **COST, OFER, DEM, FLUJO, vb** actualizadas.

5. modi.m

Llamada por la función: *bueno.m*

Esta función lleva a cabo el método *MODI*. Resuelve el sistema correspondiente para evaluar si la solución básica factible es la óptima, si no lo es, continúa el proceso hasta encontrarla. En caso de que la solución se pueda mejorar, esta función da la variable no básica que deberá salir de la base.

Datos de entrada:

Las variables globales. **FLUJO, COSTO, origen, destino, dim_vb**.

Datos de salida:

La posición de la variable no básica que va a entrar a la base en caso de poder mejorarse la solución. En caso contrario, la salida es la solución en pantalla.

Variables globales:

BUENO. Contiene la posición de la variable no básica que entrará a la base Tiene dimensión *1 x 2*.

IND. Contiene las posiciones de las variables básicas. Tiene dimensión *dim_vb x 2*

FLUJO_M. Variable auxiliar para esta función que tiene valores en la posición (i, j) de 1 ó 0 según si existe o no la variable básica. Se crea con el propósito de mantener la matriz *FLUJO* intacta.

Función que llama: *circuito.m*

En caso de que la solución que está analizando en ese momento se pueda mejorar

6. circuito.m

Llamada por la función: *modi.m*

Esta función encuentra el circuito correspondiente a la variable no básica *BUENO* Introduce a la base de la nueva solución a esta variable, saca de la base a la variable correspondiente y muestra en pantalla tanto el circuito como la mejora de la solución, tanto el flujo como el costo asociado

Datos de entrada:

BUENO, IND, COSTO, FLUJO, dim_vb, origen, destino.

Datos de salida:

El circuito (*CIRC_OUT*) que se formó con la variable *bueno.* Así como la actualización de la matriz *FLUJO* y el nuevo costo.

Ahora bien, si el usuario es amante de la programación y desea reprogramar estos algoritmos, podría hacerlo en C++ Builder de Borland, usando las librerías que se encuentran en la referencia [12].

CAPÍTULO 4

MANUAL DEL USUARIO

4.1. REQUERIMIENTOS

El usuario debe tener instalado *Matlab* en su computadora para poder correr el programa. La versión en la que se programó, requiere de 18 MB en disco duro para su instalación. Las características principales del equipo, que recomiendo por haber trabajado en una computadora de este tipo, son

- Procesador tipo Pentium a 300 MHZ.
- 32 megas de memoria RAM
- Disco duro de 3.2 GB.

4.2. INICIO

Este software es muy sencillo de utilizar. Una vez que el usuario ha abierto Matlab, debe asegurarse de que se encuentra en el directorio correcto en el que están los archivos que contienen las funciones de este software Para esto, debe "teclear" la palabra

dir

Si no están en ese directorio los archivos de este software Cambiarse al directorio en el que se encuentran con la instrucción

cd <nombre del directorio>

O bien colocar los archivos en el directorio en el que se encuentra posicionado Matlab en ese momento (puede ser vía *MS-DOS* o el explorador de Windows)

El siguiente paso es teclear la palabra

datos

con lo que comenzará a correr el programa.

Este programa "lo lleva de la mano" Lo primero que solicita es el número de origenes y de destinos. El usuario debe oprimir la tecla *intro* cada vez que ha introducido lo que se le pidió

Posteriormente se solicitan la oferta, la demanda y los costos, se indica el formato que debe seguir. Es muy importante respetar estos formatos para no incurrir en errores posteriores.

Una vez que se ingresaron los datos solicitados, el programa hace el resto. El usuario no volverá a introducir datos, lo único que deberá hacer es oprimir ciertas teclas para continuar con el procedimiento y permitirle que vaya observando las iteraciones

Una vez que ha terminado, aparece el "*prompt*" de Matlab que indica que ha regresado a su espacio de trabajo.

CAPÍTULO 5

APLICACIONES Y EJERCICIOS

APLICACIONES

Independientemente de que el presente software se realizó con fines didácticos existen diferentes tipos de problemas que se pueden plantear como problemas de transporte, por lo cual es posible utilizarlo para la solución de éstos.

Ejemplo 1. El flujo de información a través de un determinado cable. Supóngase que se tienen m servidores, para n PC's, y se requiere enviar la información del servidor i a la PC j, la información con que dispone el servidor i es I_i, y la que requiere la PC j es I_j', los tiempos de transferencia del servidor i a la PC j son t_{ij}, y lo que se requiere es minimizar esos tiempos.

Para resolverlo utilizando el *Software didáctico para resolución de problemas de transporte (SODIPT)*, basta con considerar a los servidores como orígenes, las PC's como destinos, las I_i como las ofertas, I_j' como las demandas y a los tiempos t_{ij} como los costos. El flujo requerido es F_{ij}.

Cabe mencionar que es necesario hacer suposiciones como:

- cada PC requiere información que se encuentra disponible en cualquier servidor,
- el orden en que se envíe y reciba esta información es indiferente.

Ejemplo 2. Elaboración de comprimidos en un laboratorio químico. Se tienen m máquinas, cada una con un molde distinto, en las que se fabrican los comprimidos de n medicamentos diferentes y tarda t_{ij} en fabricarse un comprimido en la máquina i del medicamento j. La máquina i tiene la capacidad C_i de procesar y se requiere R_j, del medicamento del tipo j.

En este caso, las equivalencias son:

número de máquinas = número de orígenes,

número de medicamentos distintos = número de destinos,

capacidad de procesar de la máquina i = oferta i,

cantidad requerida del medicamento j = demanda j,

tiempo en procesar en la máquina i el medicamento j = costo ij.

El problema consiste en minimizar los tiempos de fabricación. También podrían considerarse costos en lugar de tiempo.

Las suposiciones que son necesarias hacer son:

- no importa la forma del comprimido que tendrá el medicamento;
- todo medicamento se puede procesar en cualquier máquina.

Ejemplo 3. El abastecimiento de agua. Aquí los orígenes son los depósitos que se tienen, los destinos son los lugares a los que se debe abastecer, las ofertas son la cantidad de agua con que cuenta cada depósito, las demandas son la cantidad de agua que requiere cada lugar y los costos son en los que se incurre por enviar agua de un depósito a un lugar a abastecer Este problema es muy interesante, puesto que actualmente hay escasez en muchos lugares y una manera de resolverlo es considerar nuevas formas de abastecimiento

Finalmente es claro que los problemas clásicos de distribución de mercancía, operación de autobuses, entre otros, son candidatos ideales para resolverse con SODIPT

EJERCICIOS[25]

Utilice SODIPT para resolver los problemas que así lo solicitan.

1 Resuelva los siguientes problemas de transporte (los números en las celdas representas costos unitarios).

a

						Oferta
	73	40	9	79	20	8
	62	93	96	8	13	7
	96	65	80	50	65	9
	57	58	29	12	87	3
	56	23	87	18	12	5
Demanda	6	8	10	4	4	

b

							Oferta
	5	3	7	3	8	5	8
	5	6	12	5	7	11	7
	2	8	3	4	8	2	9
	9	6	10	5	10	9	3
Demanda	3	3	6	21	1	2	

c

[25] Ejercicios tomados de [M], [MS], [S], [T], [11] y [14]

						Oferta
	2	0	4	0	5	3	4
	1	6	6	0	1	6	3
	0	7	0	2	4	0	2
	2	6	5	4	1	3	4
	4	1	4	0	3	4	2
Demanda	5	2	3	1	2	2	

d.

							Oferta
	5	10	15	8	9	7	30
	14	13	10	9	20	21	40
	15	11	13	25	8	12	10
	9	19	12	78	6	13	100
Demanda	50	20	10	35	15	50	

2. Aplique el método de la esquina noroeste para encontrar la solución inicial para cada uno de los siguientes modelos de transporte. Indique si la solución es degenerada o no

a. $a_1 = 10, a_2 = 5, a_3 = 4, a_4 = 6$
$b_1 = 10, b_2 = 5, b_3 = 7, b_4 = 3$

b. $a_1 = 1, a_2 = 16, a_3 = 7, a_4 = 8$
$b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 5, b_4 = 2, b_5 = 8$

c. $a_1 = 10, a_2 = 3, a_3 = 7$
$b_1 = 14, b_2 = 3, b_3 = 4, b_4 = 9$

3 Considere la solución básica de la tabla

$\boxed{10}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{20}$	$\boxed{11}$	15
$\boxed{12}$	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{20}$ 10	25
$\boxed{0}$ 5	$\boxed{14}$	$\boxed{16}$	$\boxed{18}$	5
5	15	15	10	

a. Determine el circuito asociado a cada variable no básica.

b. Si cada variable no básica es utilizada como una variable de entrada, determine la variable asociada que sale. ¿En qué nivel cada variable no básica entra a la solución?

c. Para cada caso en *b.* determine el aumento o disminución total en el valor de la función objetivo

Obtenga la solución por el MAV y compare sus resultados

4 Resuelva cada uno de los modelos de transporte siguientes utilizando el método de la esquina noroeste, el método de costo mínimo y el MAV para obtener la solución inicial. Compare los resultados

a.

				Oferta
	1	2	6	7
	0	4	2	12
	3	1	5	11
Demanda	10	10	10	

b

				Oferta
	5	1	8	12
	2	4	0	14
	3	6	7	4
Demanda	9	10	11	

5. Encuentre la solución inicial en el siguiente problema de transporte con el:
   a. Método de esquina noroeste.
   b. Método de costo mínimo.
   c MAV.

					Oferta
	10	20	5	7	10
	13	9	12	8	20
	4	15	7	9	30
	14	7	1	0	40
	3	12	5	19	50
Demanda	60	60	20	10	

Obtenga la solución óptima utilizando la mejor solución inicial.

6. Resuelva el siguiente modelo de transporte no balanceado utilizando el MAV para encontrar la solución inicial. La demanda en el destino 1 debe transportase desde el origen 4.

				Oferta
	5	1	0	20
	3	2	4	10
	7	5	2	15
	9	6	0	15
Demanda	5	10	15	

7 En el modelo de transporte siguiente la demanda total excede a la oferta total. Supóngase que los costos unitarios de penalización por demanda insatisfecha son 5, 3 y 2 Calcule la solución óptima.

				Oferta
	5	1	7	**10**
	6	4	6	**80**
	3	2	5	**15**
Demanda	75	20	50	

8. En el problema anterior suponga que no existen costos de penalización y la demanda en el destino 3 debe satisfacerse de la manera exacta. Reformule el problema y obtenga la solución óptima.

9. En el problema de transporte no balanceado siguiente si una unidad de origen i no se transporta (a uno de los destinos) debe incurrirse en un costo de almacenamiento. Sean estos costos por unidad 5, 4 y 3 en los orígenes 1, 2 y 3 respectivamente. Si además toda la oferta en el origen 2 debe transportarse a fin de tener lugar para almacenar un nuevo producto, calcule la solución óptima.

				Oferta
	1	2	1	**20**
	0	4	5	**40**
	2	3	3	**30**
Demanda	30	20	20	

10 Supóngase que cierta empresa nacional tiene dos fábrica y tres centro de venta. La empresa está planeando la calendarización de su producción para los próximos cuatro meses. La oferta para los cuatro meses es: 4 000, 6 000, 3 000 y 2 000 toneladas del producto para la planta 1, y 7 000, 10 000, 8 000 y 6 000 toneladas para la planta 2. De la misma manera se han pronosticado las ventas para los períodos 1, 2, 3, 4 en cada uno de los centros de consumo. Para el primer centro serán de 5 000, 5 500, 4 000 y 3 000 toneladas; para el

segundo centro serán de 8 000, 9 000, 8 000 y 7 000 toneladas, y para el último centro serán de 1 000, 10 000, 11 000 y 7 000 toneladas. Se conoce el flete unitario de cada una de las fábricas a los centros de consumo

a. Formule, sin resolver, un modelo de transporte del problema mencionado
b. ¿cree usted que este problema, con los datos disponibles tiene una solución factible?
c. Si su respuesta a b. es negativa, explíquela y proponga un mecanismo que permita una solución.

11 Supóngase que la compañía nacional hotelera tiene que programar la utilización semanal de sábanas para su complejo turístico de Cancún, Quintana Roo Los requerimientos de sábanas blancas es de 1 000, 1 100, 1 200, 1 100, 1 300, 1 500 y 6 000 respectivamente para cada día de la semana La compañía nacional hotelera tiene 3 alternativas:

a. Ordenar sábanas de la ciudad de México, las cuales son entregadas a las 6 horas de ser ordenadas en uno de los múltiples vuelos que cubren el puente aéreo México-Cancún. El precio de cada sábana es de $100 00.
b. Mandar las sábanas sucias a la lavandería local de Cancún. El servicio demora 48 horas y cuesta $0.50 por sábana
c. Mandar las sábanas sucias a la ciudad de Mérida, donde todo el servicio, desde el momento en que se recogen sucias hasta que se devuelven limpias, es de 24 horas. El servicio de lavado, que ya incluye el servicio de flete aéreo, es de $5 00 por sábana.

Formule, sin resolver, un modelo de transporte que le indique a la compañía nacional hotelera cómo debe cubrir sus requerimientos semanales a costo mínimo.

12. La gerencia de la compañía manufacturera Austine está investigando si su programa es óptimo La empresa tiene tres fábricas y cinco almacenes. Los

datos necesarios en términos de los costos de transporte. capacidades de fábrica y necesidades del almacén son como sigue:

	Fábricas			Necesidades
Almacén	A	B	C	de almacén
1	$6	$4	$8	400
2	7	7	4	400
3	5	7	6	500
4	4	6	6	400
5	8	5	4	800
Capacidad	800	600	1,100	2,500

Resolver de acuerdo a un programa óptimo de embarque en función de los costos mínimos posibles de embarque.

13. La compañía de transporte Clover tiene cuatro terminales: A, B, C y D. Al comienzo de un día en particular, hay 8, 8, 6 y 3 tractores disponibles en las terminales A, B, C y D respectivamente.
Durante la noche anterior se cargaron en las plantas R, S T y U, 2, 12, 5 y 6 remolques, respectivamente. El despachador de la compañía elaboró la lista con las distancias ente las terminales y las plantas, la cual es como sigue:

Terminal \ Planta	R	S	T	U
A	22	46	16	40
B	42	15	50	18
C	82	32	48	60
D	40	40	36	30

¿Cuál es el programa óptimo de distribución para la compañía Clover?

14 Supóngase que la compañía de aceros nacionales produce mensualmente en cada una de sus tres plantas 50 000, 70 000 y 90 000 toneladas de acero. Esta empresa tiene cinco distribuidoras en diferentes partes del país, con una demanda mensual de 20 000. 60 000, 80 000, 40 000 y 10 000 toneladas de

acero, respectivamente El costo total de flete, por tonelada de acero que se transporta es:

		Miles de pesos / toneladas de acero				
		1	2	3	4	5
	1	7	3	2	4	2
Fábricas	2	6	5	8	3	4
	3	3	2	5	7	1

Calcule un programa de distribución mensual de acero que minimice los costos reales.

15 Una compañía de las instalaciones A, B y C suministra a los distribuidores D, E, F y G. Las capacidades mensuales son 20, 30 y 45 unidades, respectivamente. Los requerimientos mensuales de los distribuidores son 10, 15, 40 y 30 unidades, respectivamente. Los costos unitarios de envío son los siguientes.

Hacia / Desde	D	E	F	G
A	5	10	5	0
B	5	9	5	10
C	10	10	15	5

Determinar un plan óptimo de distribución. ¿Cuál es el mínimo costo de transporte?

16. La Santa Barbara Oil Company tiene refinerías en Los Ángeles, Houston y St. Louis. La gerencia necesita un plan de distribución óptimo entre las refinerías y las instalaciones regionales de almacenamiento, localizadas en Denver, Seattle, Chicago y Buffalo

Los datos siguientes son representativos para las operaciones de un mes típico:

Costo de envío ($/barril)

Desde \ Hacia	Buffalo	Sesttle	Chicago	Denver
Los Angeles	8	5	8	4
Houston	9	5	5	5
St Louis	9	8	4	4

Instalación regional de almacenamiento	Ventas mensuales (millones de barriles)
Buffalo	50
Seattle	100
Chicago	50
Denver	100

Refinería	Capacidad mensual disponible (millones de barriles)	Costos variables ($1 barril)
Los Angeles	150	5
Houston	80	4
St. Louis	100	3

Determinar el programa de distribución con un mínimo costo.

17. La Tyler Radio Company produce radios para automóviles en cuatro plantas: Oakland, Gary, Houston y Newark Los radios son enviados a tres ensambladoras de automóviles, localizadas en Denver, Philadelphia y Cleveland. Hasta ahora, la producción total no ha sido capaz de suplir la demanda ya sea en San Francisco o Atlanta.

    Las capacidades de producción, las demandas y los costos de transporte se dan enseguida.

	Datos de suministros (radio/mes)	Costos unitarios de producción
Oakland	15,000	5
Gary	10,000	40
Houston	10,000	40
Newark	15,000	50
TOTAL	50,000	

Demanda (radio/mes)	
Denver	20,000
Philadelphia	20,000
Cleveland	20,000
TOTAL	60,000

Costos unitarios de producción	
Atlanta	40
San Francisco	60

Costo de transporte (por radio)

Hacia / Desde	Cleveland	Denver	Philadelphia
Gary	10	14	11
Houston	11	13	1
Newark	12	12	13
Oakland	13	11	14
San Francisco	14	10	15
Atlanta	9	12	11

¿Cuál sitio puede ser seleccionado por la Tyler para ubicar la planta?

18. La Mercury Distributing Company suministra un solo producto a tres clientes en diversos sitios desde bodegas diferentes. Durante el período de planeación considerado, la compañía ha determinado que las demandas de ciertos clientes deben satisfacerse a expensas de otros. Para evitar desequilibrios serios es importante balancear la porción de demanda satisfecha entre ciertos clientes. También debido a acuerdos sindicales, la compañía debe satisfacer ciertos requisitos mínimos en los niveles de embarque en ciertas rutas. Finalmente, varias de las rutas sobre las cuales se podría embarcar el producto son peligrosas y deben evitarse

El problema de transporte de transporte se resume a continuación y los costos de embarque se dan en cada una de las celdas y los valores de demanda en los

Costos

Hacia / Desde	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	SUMINISTRO
Bodega 1	10	4	12	3,000
Bodega 2	8	10	3	4,000
DEMANDA	2,000	1,500	5,000	

márgenes. Nota que la demanda total excede al suministro en 1 500 unidades.

La administración ha expresado las siguientes preferencia de las metas en orden decreciente de importancia (P_i es más importante que P_j; $i < j$)

P_1 Satisfacer la demanda total del cliente 3 (entrega garantizada)

P_2 Satisfacer por lo menos el 75% de la demanda de cada cliente.

P_3. Minimizar el costo de transporte para los artículos embarcados.

P_4. Embarcar por lo menos 1 000 unidades en la ruta de la bodega 2 al cliente 1 (convenio sindical).

P_5. Minimizar el costo del embarque en las rutas de la bodega 1 al cliente 3 y de la bodega 2 al cliente 3 (peligros).

P_6 Balancear el porcentaje de demanda satisfecha entre los clientes 1 y 2.

19. *Heinson Fisheries Incorporated*

La Heinson Fisheries Incorporated (HFI) tiene cuartos fríos en sus almacenes localizados en Boston, Nueva York y Washington, D. C. En cada almacén la HFI procesa y distribuye langosta para vendedores de pescado localizados en varias ciudades del país. La demanda semanal estimada por pedidos de langosta es como sigue

Ciudad	Número de cajas
Miami	30
Chicago	50
Philadelphia	65
Dallas	55
TOTAL	200

Los costos de transporte aéreo por caja entre las plantas y los vendedores son como sigue:

Costo de transporte ($1 por caja de langosta)

Desde \ Hacia	Miami	Chicago	Philadelphia	Dallas
Boston	14	16	12	20
Nueva York	12	14	10	8
Washington, D C	10	16	8	15

En la próxima semana se espera tener el siguiente suministro de langosta disponible

Planta	Suministro
Boston	100
Nueva York	40
Washington, D.C.	60
TOTAL	200

Observe que el suministro total es de 200 cajas, al igual que la demanda total. Es decir, el problema está balanceado.

El problema de administración de la HFI muestra cómo construir un plan de envío de mínimo costo entre los almacenes y los vendedores de pescado.

20. Un sistema de distribución semanal para un producto tiene las siguientes:

Planta	Capacidad semanal	Centro distribuidor	Demanda semanal
O1	75	D1	50
O2	100	D2	50
		D3	100
TOTAL	175		200

Observe que la capacidad total de producción semanal es 175 unidades, la cual es 25 unidades menos que la demanda total semanal Entonces, alguna de las distribuciones de los centros será recortada en su envío cada semana
La siguiente tabla da las pérdidas estimadas, por centro de distribución, por quedarse corto en los envíos.

Costo de transporte ($/unidad)

Hacia / Desde	D1	D2	D3
O1	3	2	1
O2	4	5	6

La meta de la compañía es determinar un plan de envío factible que minimice la suma de los costos de transporte total *mas* las pérdidas totales.

a Construir un modelo del transporte balanceado.

b Determinar un plan de envío factible.

CONCLUSIONES

El software que aquí presento y pongo a disposición de alumnos que cursan materias relacionadas con Investigación de Operaciones, y en general para aquellos usuarios que se interesen por conocer la manera en que se resuelve el problema de transporte, proporciona una buena herramienta para la comprensión de los métodos que existen para resolver problemas de transporte

Las herramientas de Matlab que utilicé con más potencia son las matrices, así como algunas de las operaciones que permite hacer con éstas. Lo que reduce el código en gran medida.

Recomiendo utilizar problemas pequeños para fines didácticos, por ejemplo, que la matriz de costos sea aproximadamente de 5X5 (no necesariamente cuadrada). Esto con el fin de visualizar las iteraciones completas sin necesidad de moverse con las barras de desplazamiento, así mismo, el número de iteraciones que se llevarán a cabo no será muy grande

Pude comprobar la eficiencia del método Vogel para encontrar la solución básica inicial en comparación con otros métodos, pues si en ocasiones no es la óptima, es el método que más se aproxima a ésta, lo que implica un ahorro al optimizar.

Por otro lado, el método de MODI, es efectivo para concluir que se tiene el óptimo o para llegar a él, aprovechando el contexto y estructura del problema, lo que resultará sencillo de comprender al alumno.

Dentro de las ventajas que tiene el software que presento, en comparación con otros paquetes, menciono las siguientes·

- El usuario puede ver las iteraciones que se llevan a cabo para encontrar la solución básica inicial, lo que no puede hacer ni en el LINDO, ni en el QSB, ni en el Management Scientist.

- El usuario puede ver las iteraciones al optimizar la solución inicial, característica que comparte con el QSB.

- La solución que se obtiene siempre es entera. Esta es una característica que no siempre comparte el LINDO.

- El usuario siempre podrá ver las iteraciones, en problemas de más de seis orígenes y 6 destinos, lo que no ocurre ni siquiera con el QSB.

- Con SODIPT el usuario puede ver tanto los datos, como iteraciones y resultados en una sola ventana, lo cual es muy práctico, ahorra tiempo al no tener que ir a menús para regresar, como en el QSB o el *Management Scientist* y no se confunde con indicaciones para ir de una ventana a otra, ni con las ventanas mismas.

- La operación de este software es en español (los 3 mencionados anteriormente requieren del conocimiento del inglés).

- Es muy sencillo de operar debido a que está diseñado para fines didácticos.

- Proporciona la oportunidad al usuario de involucrarse en el código para que le haga las modificaciones que considere necesarias. Tal vez requiere que las iteraciones se vean con mayor detalle, o por el contrario, que sólo muestre la solución final. O bien requiere ver alguna otra información que de inicio no se muestra. Esto es algo que un usuario que adquiere software no puede hacer (mucho menos en los mencionados anteriormente) puesto que son códigos que están protegidos Con este paquete se persiguen dos objetivos principalmente: que el usuario aprenda la metodología para la solución del problema de transporte y que haga uso de sus habilidades en programación o bien, despertar el interés por ésta, así como incrementar su creatividad al hacer que considere los cambios que requiera. Lo que implícitamente lleva la comprensión profunda del tema, pues no podría hacer cambios si no ha entendido correctamente el método de solución.

Por otro lado, una desventaja que tiene este software es que el usuario debe cuidar la forma de introducir los datos. Debe hacerlo exactamente en el formato que se indica para evitar errores

En mi opinión, y en mi experiencia como alumno y dando clases, el contar con software de este tipo es de gran apoyo, ya que además de mostrar la forma en que se resuelve el problema de transporte, es un incentivo para continuar con la elaboración programas que apoyen la enseñanza facilitando tanto la comprensión, como la solución de problemas que tal vez lleve mucho tiempo resolverlos a mano.

Por último, cabe mencionar que es necesario contar con software de acuerdo a nuestras necesidades y no sólo en el área educativa, puesto que en muchas ocasiones es más "caro" adaptar, que crear.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bazaraa Mokhtar S , Jarvis John J.
Programación lineal y flujo en redes
México, 1989. Ed. Limusa

[2] Benet Humberto J.
Principios de investigación de operaciones.
México, 1974 Ed. Herrero Hermanos.

[3] Buffa, Elwood S ; Dyer, James S.
Ciencias de la administración e investigación de operaciones.
México, 1983. Ed. Limusa.

[4] Buffa,Elwood S
Dirección de operaciones. Problemas y modelos.
México, 1977. Ed. Limusa.

[5] Eppen, G. D
Investigación en la ciencia administrativa
México, 1986 Ed. Prentice-Hall, Hispanoamericana.

[6] Hernández Ayuso, María del Carmen.
Introducción a la teoría de redes.
México, 1997. Sociedad Matemática Mexicana.

[7] Hillier Frederick, Lieberman Gerald J.
Introducción a la investigación de operaciones.
México, 1980. Ed McGraw-Hill.

[8] Jauffred M , Francisco J , Moreno Bonett, Alberto; Acosta Flores, José Jesús.
Métodos de optimización. programación lineal-gráficas.
México, 1974. Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S A.

[9] The Math Works Incorporation
The student edition of Matlab for MS-DOS personal computers.

[10] Prawda Witenberg, Juan.
Métodos y modelos de investigación de operaciones,
Vol I. Modelos determinísticos.
México, 1993. Ed. Limusa.

[11] Prawda Witenberg, Juan.
Métodos y modelos de investigación de operaciones.
Vol. II. Modelos determinísticos.
Mexico, 1976. Ed Limusa.

[12] Schwarz Novoa Erik
Caracterización de distintas implementaciones del algoritmo de grado mínimo para matrices grandes
Tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1999.

[13] Shamblin, James E , Stover, G T. Jr.
Investigación de operaciones un enfoque fundamental.
México, 1982 Ed McGraw-Hill.

[14] Taha, Hamdy A.
Investigación de operaciones Una introducción
México, 1990 Ed Alfaomega

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

[K] Kernighan, Ritchie.
El lenguaje de programación C
Ed Prentice-Hall

[M] Moskowitz, Herbert; Wright Gordon P
Investigación de operaciones.
México, 1982 Ed. Prentice-Hall

[S] Muro Sáenz, Javier
Práctica de la investigación operativa empresarial.
Barcelona, España 1975 Ed Labor S.A

[MS] Sasieni, Maurice
Investigación de operaciones Métodos y problemas.
México, 1967. Ed Limusa Whiley.

[T] Thierauf Robert J
Introducción a la investigación de operaciones
México, 1996. Ed. Limusa.