

64



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONJUNTOS BORROSOS Y  
ALGUNAS APLICACIONES

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
ACTUARIA  
PRESENTA

PATRICIA MARTINEZ FONSECA

299813

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS ANTONIO RINCON SOLIS



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

2001



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Conjuntos borrosos y algunas aplicaciones"

realizado por Patricia Martínez Fonseca

con número de cuenta 09219449-6, quien cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Luis Antonio Rincón Solís	
Propietario	Act. Francisco Sánchez Villarreal	
Propietario	Dr. Joaquín Curiel Cañedo	
Suplente	Act. Susana Barrera Ocampo	
Suplente	Mat. Sandra Chimal Garma	

Consejo Departamental de

M.en C. José Antonio Flores Díaz

# Agradecimientos

Esta tesis profesional  
la quiero dedicar  
a toda mi familia, a mis amigos,  
compañeros y profesores.

A mis cuatro hermanos:  
**Angeles, Cesár, Lourdes, Rosario** y,  
especialmente a dos personas  
sin cuyo apoyo incondicional,  
hubiera sido imposible  
para mí el tener la dicha,  
de haber llegado a la Universidad y más aún,  
el poder culminar mis estudios profesionales;  
me refiero a mis padres:  
**José Martínez y Guadalupe Fonseca.**

Quiero agradecer sinceramente  
el trabajo de dirección de esta tesis  
al **Dr. Luis Antonio Rincón Solís**,  
con cuyo apoyo y dedicación  
logramos llevar a buen término  
la presente investigación.

Gracias a todos por apoyarme en todo momento.

# Índice General

<b>Agradecimientos</b>	<b>i</b>
<b>Introducción</b>	<b>vi</b>
<b>1 CONCEPTOS Y OPERACIONES BÁSICAS</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Definiciones elementales . . . . .	3
1.3 Operaciones básicas . . . . .	11
1.3.1 Propiedades de las operaciones básicas . . . . .	16
1.4 Operaciones algebraicas . . . . .	19
1.4.1 Propiedades de las operaciones algebraicas . . . . .	21
<b>2 OPERACIONES CON NÚMEROS DIFUSOS</b>	<b>24</b>
2.1 Introducción . . . . .	24
2.2 Los números difusos como subconjuntos de los conjuntos difusos	26
2.3 Elementos que caracterizan a un número difuso . . . . .	28
2.4 Tipos de números difusos . . . . .	29
2.4.1 Números difusos triangulares . . . . .	30
2.4.2 Números difusos trapezoidales . . . . .	34
2.4.3 Otros tipos de números difusos . . . . .	36
2.5 Cálculo con números difusos . . . . .	38
2.5.1 El cálculo del intervalo . . . . .	38
2.5.2 Generalización del cálculo del intervalo a los números difusos . . . . .	40
<b>3 RELACIONES BORROSAS</b>	<b>42</b>
3.1 Introducción . . . . .	42
3.2 Definición y operaciones básicas con relaciones borrosas . . . . .	43

3.3	Composición de relaciones borrosas . . . . .	48
3.4	Algunas propiedades . . . . .	54
<b>4</b>	<b>APLICACIONES</b>	<b>58</b>
4.1	Introducción . . . . .	58
4.2	Programación lineal difusa (PLD) . . . . .	59
4.3	Regresión difusa . . . . .	71
4.3.1	Regresión lineal con parámetros difusos . . . . .	74
4.3.2	Regresión lineal con datos difusos . . . . .	79
4.4	Comunicación interpersonal . . . . .	83
	<b>Conclusiones</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>
	<b>Índice de Materias</b>	<b>93</b>

# Índice de Figuras

1.1	Ejemplo $A_{0.6}$ y $A_{0.8}$ .	5
1.2	Soporte de un conjunto borroso $A$ .	7
1.3	Conjunto difuso normal y subnormal.	8
1.4	Conjunto convexo.	9
1.5	Conjunto no convexo.	9
1.6	Traslapamiento entre conjuntos difusos.	10
1.7	Complemento del subconjunto difuso $A$ .	12
1.8	Intersección de los subconjuntos difusos $A$ y $B$ .	13
1.9	Unión de los subconjuntos difusos $A$ y $B$ .	14
1.10	$A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ .	19
1.11	$A \cup \bar{A} \neq E$ .	20
2.1	Conjuntos difusos en el ejemplo de las alturas.	26
2.2	Figura que muestra un nivel $\alpha$ de 0.5.	28
2.3	Elementos de un número difuso.	29
2.4	Comparación de un número e intervalo real con un difuso.	31
2.5	Ejemplo de un número difuso triangular.	32
2.6	Número difuso triangular no simétrico.	33
2.7	Número difuso triangular simétrico.	33
2.8	Ejemplo de un número difuso trapezoidal.	34
2.9	Número difuso trapezoidal.	35
2.10	Número difuso trapezoidal simétrico.	36
2.11	Número difuso gaussiano	37
2.12	Número difuso gaussiano doble	38
2.13	Número difuso parabólico	38
2.14	Número difuso parabólico doble	39
2.15	Número difuso mixto	39
2.16	Suma de dos números difusos.	41

3.1	Composición de relaciones borrosas. . . . .	49
4.1	Ejemplo de programación lineal clásica. . . . .	62
4.2	Número difuso empleado para el caso I. . . . .	64
4.3	Números difusos $B_1$ y $B_2$ . . . . .	67
4.4	Números difusos empleados para el caso II. . . . .	70
4.5	Tipo de números empleados para la regresión difusa. . . . .	75
4.6	Gráfica para el ejemplo 24. . . . .	77
4.7	Gráfica para el ejemplo 24. . . . .	78
4.8	Gráfica para el ejemplo 25. . . . .	82

# Introducción

La **lógica difusa o borrosa** nació en 1965 cuando el Dr. Lofti Zadeh (padre de la lógica difusa), publicó un artículo titulado “Conjuntos Difusos” en la revista científica “Information and Control” [20]. En este artículo el Dr. Zadeh describió a través de la teoría matemática de conjuntos, cómo poder trabajar matemáticamente con expresiones imprecisas, tal y como lo hacemos los seres humanos.

En las teorías tradicionales forzamos a que las representaciones del mundo real que se realizan encajen dentro de modelos muy precisos, tomando a la imprecisión como un factor de distorsión. Sin embargo, la imprecisión forma una herramienta muy potente para representar la información en procesos para los cuales un aumento de la precisión se volvería completamente inabordable.

La teoría de los conjuntos borrosos es un acercamiento entre la precisión de las matemáticas clásicas y la imprecisión del mundo real, al que se le ha intentado ajustar a modelos matemáticos que no permiten lo borroso o impreciso y como consecuencia nos lleva a resultados indeseables.

La teoría de los conjuntos borrosos nos permite plantear una gran cantidad de problemas de la vida real en los que se encuentran involucrados conjuntos borrosos. Más aún, en muchas situaciones resulta mejor el utilizar esta teoría que la teoría clásica de conjuntos.

Por otro lado, la lógica difusa surge como una respuesta a las limitantes de la lógica convencional, mientras que el razonamiento difuso fue diseñado específicamente para tratar la inexactitud (o difusividad) que está presente en el conocimiento empleado por los expertos.

El objetivo principal de este trabajo de tesis es el promover y dar a conocer la teoría básica de conjuntos borrosos. Asimismo exponemos algunas de tantas aplicaciones que han surgido y continúan surgiendo día a día con ayuda de la teoría de conjuntos borrosos.

Esperamos que el presente trabajo motive al lector a profundizar más en el tema y no solo quedarse con las ideas expuestas aquí. Es por ello que al inicio de cada capítulo marcamos las referencias de los libros consultados para el desarrollo del mismo. Asimismo damos los sitio web consultados vía internet.

En la presente investigación, dentro del planteamiento de problemas, es posible que encontremos cierta analogía entre la teoría de los conjuntos borrosos y la teoría de la probabilidad. Es por ello que nos conviene aclarar que lo borroso está presente por la falta de criterio exacto para clasificar y no por la presencia de variables aleatorias.

La presente tesis está dividida en cuatro bloques o capítulos que se encuentran estructurados de la siguiente manera:

**El Capítulo 1** introduce los conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos Borrosos.

**El Capítulo 2** menciona la definición de número difuso. Además mencionamos los tipos de números difusos y las definiciones necesarias para poder operar con ellos. Todo esto nos servirá para la exposición de las aplicaciones del capítulo 4, principalmente para exponer la programación lineal difusa y la regresión difusa.

**El Capítulo 3** aborda la teoría de las relaciones borrosas conjuntamente con la composición de las mismas y sus propiedades más importantes. Nos servirá de base para la exposición de la comunicación interpersonal, del capítulo 4.

En el **Capítulo 4** se aborda de manera detallada algunas aplicaciones de la lógica borrosa, con sus respectivos ejemplos. Se enfatiza la diferencia de trabajar con los modelos difusos y no con los modelos clásicos.

En el presente trabajo de tesis presentamos varios ejemplos ilustrativos que nos permiten observar y entender con una mayor claridad los conceptos más importantes para el desarrollo del mismo.

# Capítulo 1

## CONCEPTOS Y OPERACIONES BÁSICAS

### 1.1 Introducción

El término “difuso” procede de la palabra inglesa “fuzz” que sirve para denominar la pelusa que recubre el cuerpo de los polluelos al salir del huevo. Este término inglés significa “confuso, borroso, indefinido o desenfocado”. Aunque la teoría de conjuntos difusos presente cierta complejidad, el concepto básico es muy fácil de comprender.

Para entender mejor este concepto, veamos el ejemplo que menciona Bart Kosko en su libro de “Pensamiento Borroso” [14], que nos ayudará a entender como definiríamos en la vida cotidiana un conjunto borroso. El ejemplo se desarrolla dentro de un auditorio con un conjunto de personas. El ponente pregunta al público: ¿Cuántas personas del sexo masculino se encuentran en este auditorio? Entonces los hombres levantan la mano y las mujeres la mantienen abajo. De esta manera obtenemos un conjunto no borroso. ¿Cuántas mujeres hay? Ocurre lo contrario, y de nuevo el público se divide en dos conjuntos no borrosos, hombres y no hombres o mujeres y no mujeres. Es decir, el  $A$  o no  $A$  de Aristóteles se cumple, para este tipo de preguntas. Pues no hay nadie (en casi ningún auditorio) que sea al mismo tiempo hombre y mujer. Todos somos hombres o mujeres.

Entonces el ponente realiza una pregunta más complicada: ¿Cuántos se encuentran felices con su trabajo? Las manos se mueven hacia arriba y hacia abajo, y enseguida se quedan quietas, el codo de la mayoría doblado. Unos cuantos que están seguros extienden bien rectos los brazos o simplemente no los levantan, pero la mayor parte de las personas hacen algo intermedio. De esta manera estamos definiendo un conjunto borroso, el de los empleados felices con su trabajo. ¿Cuántos no están felices con su trabajo?. Muchas de las mismas manos que antes se levantaron lo hacen de nuevo, se mueven arriba y abajo y al final se quedan quietas, la mayoría de ellas con el codo flexionado. Así definimos otro conjunto borroso, el de los empleados infelices en su trabajo, el contrario a la negación del conjunto borroso anterior. En este caso de preguntas el  $A$  o no  $A$  de Aristóteles ya no se cumple, pues todo el mundo esta a la vez satisfecho e insatisfecho con su trabajo:  $A$  y no  $A$ . Pocos se encuentran al 100% satisfechos o al 100% insatisfechos.

El poder razonar en términos borrosos, imprecisos y no cuantitativos es lo que nos permite las construcciones lingüísticas tales como: "A es varios centímetros más alto que B", "X es mucho mayor que Y" y otras que incluyen adjetivos como: grande, pequeño, significativo, importante, aproximado, etc.

Lofti Zadeh combinó conceptos de lógica clásica y conceptos de Lukasiewicz, para definir grados de membresía (degrees of membership). Los grados de membresía nos permiten definir muchos conceptos por palabras que quedan mejor definidos que por números. La lógica difusa nos provee una herramienta para construir modelos que se acercan a la realidad. La lógica difusa puede ser vista como un lenguaje que permite una traducción de enunciados sofisticados del lenguaje natural a un formalismo matemático.

Rutinaria y subconscientemente los seres humanos colocamos cosas en clases cuyo significado están bien comprendidos pero cuyos límites no están bien definidos.

Para el desarrollo de este capítulo utilizamos las referencias [1, 3, 7, 9, 11, 21]. Si se desea profundizar más en los temas aquí expuestos, se pueden consultar estas mismas referencias, o bien, los sitios en internet [22, 23, 24, 25, 26].

## 1.2 Definiciones elementales

La **lógica difusa** es una técnica utilizada para resolver problemas de lógica convencional cuyos valores de entrada no son exactos y que aunque sus entradas se definan en rangos de valores nos proporciona un resultado que es el más adecuado para el cuestionamiento dado.

Dentro de la lógica difusa, un evento tiene cierto grado de pertenencia, dentro de un conjunto, a diferencia de la lógica clásica en la que un evento pertenece por completo o no pertenece (función característica).

Los conjuntos clásicos (crisp sets) se denotan de diferentes formas: en forma de lista, es decir, listando los elementos que pertenecen al conjunto; analíticamente, por ejemplo, por una condición ( $A = \{x : x \leq 5\}$ ); o bien definiendo la pertenencia y no pertenencia por medio de la función característica, la cual solo toma los valores 0 y 1, el 0 en caso de no pertenencia y el 1 en caso de pertenencia.

Un conjunto dentro de la lógica convencional (crisp set) se define como una colección de elementos u objetos que puede ser finito, numerable<sup>1</sup> o no numerable. A su vez cada elemento del universo  $X$  del conjunto  $A \subseteq X$  puede pertenecer o no al conjunto  $A$ ; pero si  $x \in A$  entonces  $x \notin A$ , es decir, un elemento no puede pertenecer a dos conjuntos ajenos simultáneamente. Mientras que los **conjuntos borrosos o difusos** (fuzzy sets), nos permiten varios grados de pertenencia para un elemento dado. En este caso si se puede dar que un elemento este al mismo tiempo dentro de dos conjuntos ajenos, pero con cierto grado de pertenencia.

Un conjunto difuso es la generalización de un conjunto clásico y la función de membresía es la generalización de la función característica. Todo esto nos permite dar nuestra definición formal de conjunto borroso como sigue.

**Definición 1.1** *Sea  $E$  un conjunto arbitrario de objetos cualesquiera y  $x$  un elemento de  $E$ . Definimos un subconjunto borroso  $A$  de  $E$ , como el conjunto*

---

<sup>1</sup>Se dice que un conjunto es numerable si existe una biyección entre dicho conjunto y el conjunto de los números naturales  $N$ .

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in E\},$$

en donde  $\mu_A(x)$  lleva elementos del conjunto difuso  $A$  al intervalo  $M = [0, 1]$ , es decir,

$$\mu_A(x) : E \longrightarrow [0, 1].$$

A esta función  $\mu_A(x)$  se le llama **función de membresía** y representa el grado de pertenencia o grado de compatibilidad de un elemento  $x$  dentro del conjunto difuso  $A$ .

#### Observaciones:

- i) Si  $M = \{0, 1\}$  entonces el subconjunto borroso  $A$  se convertirá en un conjunto ordinario y las funciones  $\mu_A(x)$  serán entonces funciones binarias booleanas. Es decir, la función de membresía se convertirá en la función característica.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A \\ 1, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

- ii) El rango de la función de membresía es un subconjunto de números reales positivos con supremo finito.
- iii) Los elementos con grado de membresía igual a cero, por lo general no se listan dentro del conjunto  $A$ .

**Ejemplo 1** *Un corredor de bienes raíces desea clasificar las casas que ofrece a sus clientes. Tomando el criterio de "comodidad", consideremos el "número de recámaras con las que cuentan las casas". Sea  $E = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  el conjunto de casas disponibles y sea  $x$  el número de recámaras de una casa.*

*Entonces podemos definir el conjunto difuso de acuerdo al criterio de comodidad como  $A =$  "Casas cómodas para una familia de 4 integrantes" como sigue*

$$A = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$$

Daremos a continuación una serie de definiciones básicas acerca de los subconjuntos borrosos.

**Definición 1.2** Sea  $A$  un conjunto borroso y  $\alpha \in [0, 1]$ . Definimos el nivel  $\alpha$  del conjunto  $A$ , denotado por  $A_\alpha$ , como sigue

$$A_\alpha = \{x \in E : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Para ejemplificar esta definición veamos la gráfica 1.1, en donde se muestran los conjuntos a un nivel  $\alpha$  de 0.6 y 0.8 del conjunto  $A$ .

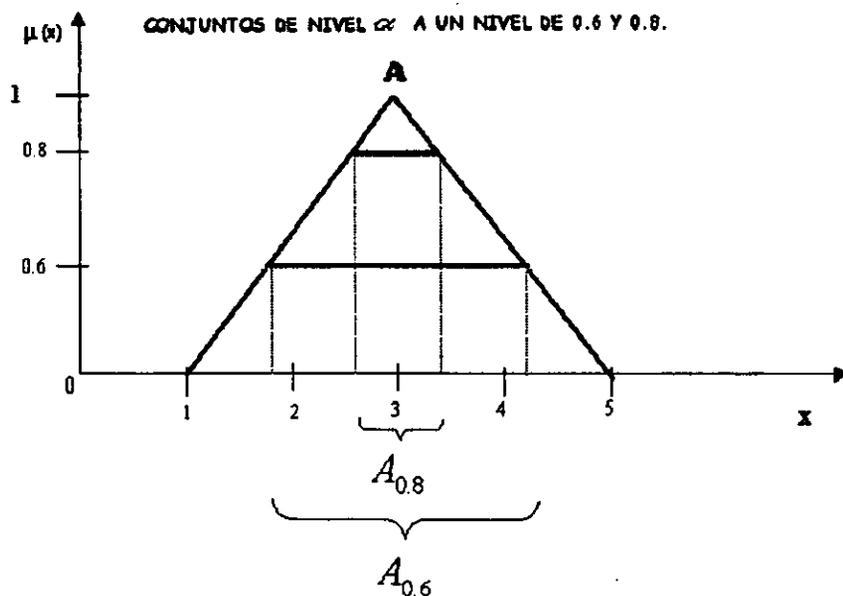


Figura 1.1: Ejemplo  $A_{0.6}$  y  $A_{0.8}$ .

**Observación:** Si  $\alpha_1 < \alpha_2$  entonces  $A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}$ .

**Definición 1.3** Sea  $A$  un conjunto borroso. Definimos el corte- $\alpha$  de  $A$ , denotado por  $A'_\alpha$ , como sigue

$$A'_\alpha = \{x \in E : \mu_A(x) > \alpha\}$$

**Observación:** La única diferencia entre un nivel- $\alpha$  y un corte- $\alpha$  es que, en el último caso la desigualdad es estricta.

Tomaremos el ejemplo 1, para ejemplificar analíticamente las últimas dos definiciones.

**Ejemplo 2** Describiremos a continuación algunos conjuntos de nivel  $\alpha$  y de corte-alpha.

**Conjuntos de nivel- $\alpha$ .**

$$A_{0.2} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A_{0.5} = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A_{0.8} = \{3, 4\}$$

$$A_1 = \{4\}$$

**Conjuntos corte- $\alpha$ .**

$$A_{0.2} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A_{0.5} = \{3, 4, 5\}$$

$$A_{0.8} = \{4\}$$

$$A_1 = \{\emptyset\}$$

**Definición 1.4** Definimos el soporte de un conjunto borroso  $A$  de  $E$  como el conjunto  $S(A)$  dado por

$$S(A) = \{x \in E : \mu_A(x) > 0\}.$$

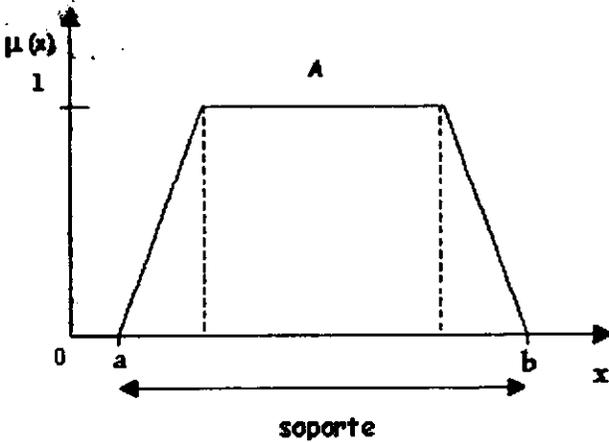


Figura 1.2: Soporte de un conjunto borroso A.

Veamos la figura 1.2 el donde podemos ver que el soporte de un conjunto difuso A se convierte únicamente al intervalo (a, b).

**Observación:** Si  $\mu_A(x)$  es constante sobre  $S(A)$  entonces A es no borroso.

Retomaremos el ejemplo 1 del corredor de bienes raíces, para mostrar el soporte del conjunto difuso A.

**Ejemplo 3** El soporte de nuestro ejemplo 1 es el conjunto

$$S(A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

**Definición 1.5** Un conjunto borroso A es normal si y sólo si

$$\sup_{x \in E} \mu_A(x) = 1.$$

**Observación:** Un conjunto borroso es subnormal si no es normal. Pero puede ser normalizado dividiendo cada  $\mu_A(x)$  por el factor  $\sup_{x \in E} \mu_A(x)$ .

Como ejemplo veamos la figura 1.3. En la gráfica a) observamos un conjunto difuso normal mientras que en la gráfica b) ejemplificamos un conjunto difuso subnormal.

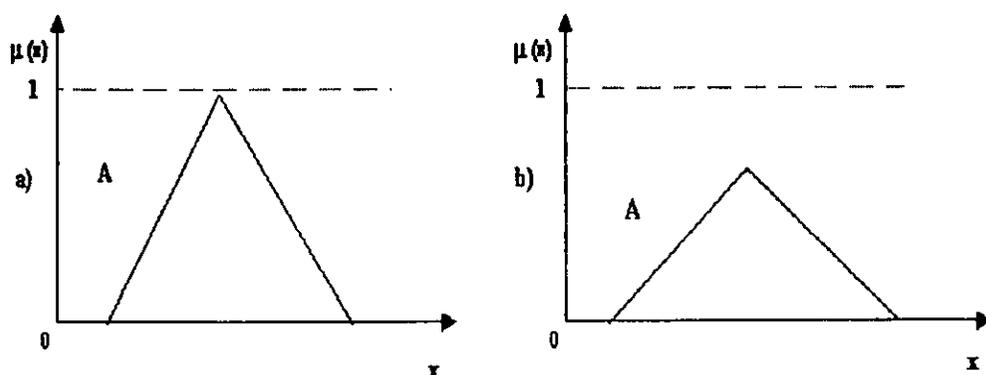


Figura 1.3: Conjunto difuso normal y subnormal.

**Definición 1.6** Sea  $A$  un conjunto difuso de  $E$ . Decimos que  $A$  es convexo si y sólo si, para cada  $x_1, x_2 \in E$  y  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)).$$

En las gráficas 1.4 y 1.5 mostramos un conjunto convexo y un conjunto no convexo, respectivamente.

**Definición 1.7** Sea  $A$  un conjunto difuso finito. Definimos la cardinalidad y la cardinalidad relativa de  $A$  como sigue

$$|A| = \sum_{x \in E} \mu_A(x) \quad \text{"Cardinalidad."}$$

$$\|A\| = \frac{|A|}{|E|} \quad \text{"Cardinalidad relativa".}$$

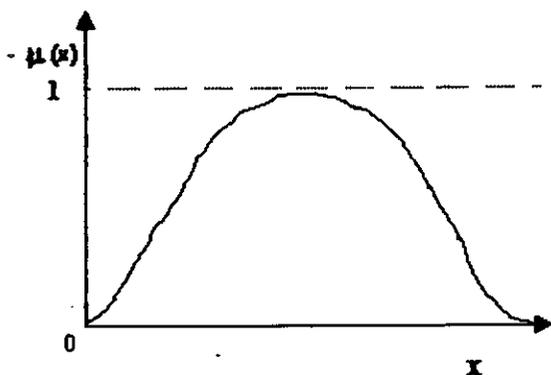


Figura 1.4: Conjunto convexo.

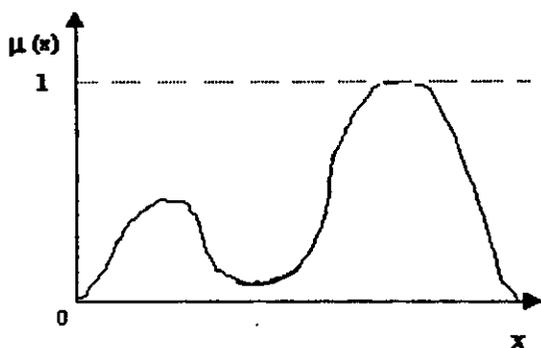


Figura 1.5: Conjunto no convexo.

**Observaciones:** Con respecto a la definición 1.7 hacemos notar los siguientes aspectos.

- i) La cardinalidad relativa depende obviamente de la cardinalidad del universo  $E$ .
- ii) Para poder compararse la cardinalidad relativa entre conjuntos es necesario escoger el mismo universo.
- iii) Para  $E$  infinito la cardinalidad de un conjunto borroso  $A$  está definida por  $|A| = \int_x \mu_A(x) dx$ . En donde  $|A|$  puede no existir.

Retomaremos nuevamente el ejemplo 1 para ilustrar esta definición.

**Ejemplo 4** Dentro del ejemplo 1, para el conjunto difuso "casas cómodas para una familia de 4 integrantes", la cardinalidad y la cardinalidad relativa toman los siguientes valores

$$\begin{aligned} |A| &= 0.2 + 0.5 + 0.8 + 1 + 0.7 + 0.3 = 3.5 \\ \|A\| &= \frac{3.5}{10} = 0.35 \end{aligned}$$

En la lógica convencional no puede darse el evento de que un elemento pertenezca al mismo tiempo a dos conjuntos ajenos. Si embargo, con los conjuntos difusos podemos lograr un traslapamiento entre los mismos y se puede dar el caso de que un elemento pertenezca a dos conjuntos de manera simultánea, pero con su respectivo grado de membresía en cada conjunto. Por ejemplo, un elemento puede pertenecer a un conjunto en un 10% y a otro en 30%. Ilustramos esta idea en la figura 1.6, en donde observamos que para  $x_1$  hay dos valores de membresía.

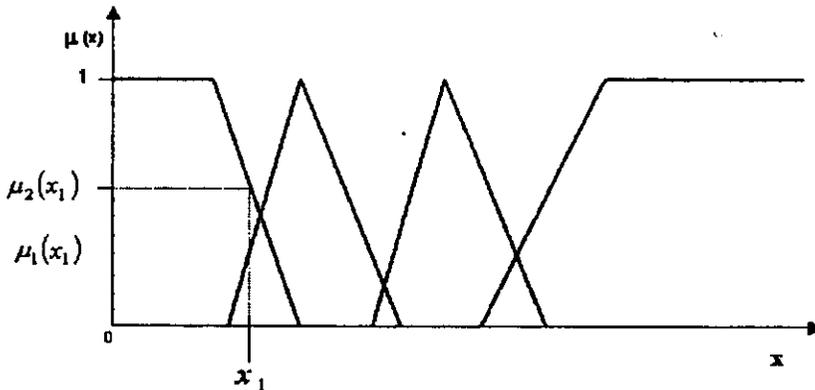


Figura 1.6: Traslamiento entre conjuntos difusos.

## 1.3 Operaciones básicas

De igual forma que con los conjuntos ordinarios (crisp sets), existe la unión, la intersección y el complemento para conjuntos difusos (fuzzy sets).

En esta sección estudiaremos estas operaciones básicas, la forma de operar con los conjuntos difusos. Dedicamos una subsección para listar las propiedades más importantes con algunas de sus demostraciones.

**Definición 1.8** *Un conjunto difuso  $A$  es vacío si y sólo si su función de membresía  $\mu_A(x)$  es idéntica a cero, es decir, para todo  $x \in E$ ,*

$$\mu_A(x) = 0.$$

**Definición 1.9** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos borrosos de  $E$ . Decimos que  $A \subset B$ , o que  $A$  es más pequeño o igual a  $B$ , si y sólo si  $\mu_A \leq \mu_B$ , es decir, para todo  $x \in E$*

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

**Ejemplo 5** *Sean*

$$A = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.2), (x_3, 0), (x_4, 1)\}, B = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0)\}$$

y  $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .

*Entonces  $B \subset A$  dado que  $0.3 \leq 0.4, 0 \leq 0.2, 0 = 0$  y  $0 < 1$ . Es decir, para todo  $x \in E$ ,*

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

**Definición 1.10** *Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos borrosos de  $E$ . Decimos que  $A$  y  $B$  son iguales, y escribimos  $A = B$  si y sólo si, para todo  $x \in E$ ,*

$$\mu_A(x) = \mu_B(x).$$

**Definición 1.11** Sea  $A$  un conjunto difuso de  $E$ . Definimos el complemento de  $A$ , y escribimos  $\bar{A}$ , como sigue

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in E.$$

En la figura 1.7 la línea continua representa la función de membresía del conjunto difuso  $A$ , mientras que la línea punteada representa la función de membresía del conjunto difuso  $\bar{A}$ .

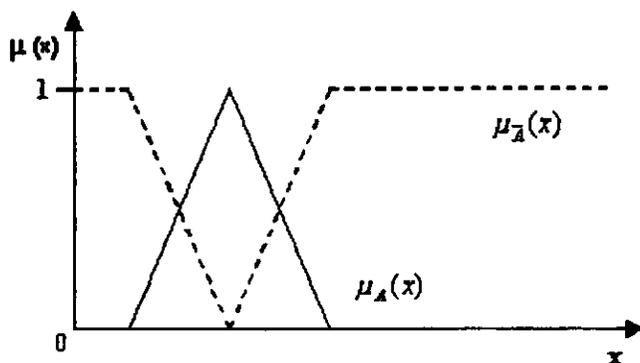


Figura 1.7: Complemento del subconjunto difuso  $A$ .

**Ejemplo 6** Sea  $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  y

$$A = \{(x_1, 0.13), (x_2, 0.61), (x_3, 0), (x_4, 0), (x_5, 1), (x_6, 0.03)\}.$$

Entonces el complemento del conjunto difuso  $A$  está dado por

$$\bar{A} = \{(x_1, 0.87), (x_2, 0.39), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 0), (x_6, 0.97)\}.$$

**Definición 1.12** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos borrosos de  $E$ . Definimos la intersección de  $A$  y  $B$ , y escribimos  $A \cap B$ , como el subconjunto borroso de  $E$  con función de membresía

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Veamos la gráfica 1.8, en donde la línea gruesa representa la función de membresía de la intersección de los conjuntos difusos  $A$  y  $B$ .

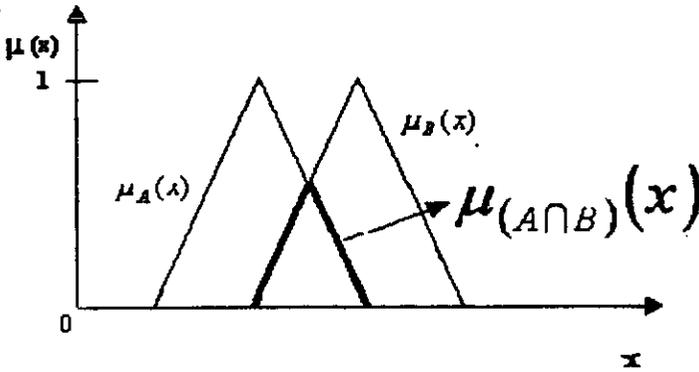


Figura 1.8: Intersección de los subconjuntos difusos  $A$  y  $B$ .

**Ejemplo 7** Sean  $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,

$A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 0.5)\}$  y

$B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.3), (x_3, 1), (x_4, 0.1), (x_5, 0.5)\}$ . Entonces la intersección de  $A$  y  $B$  es el conjunto

$$A \cap B = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.3), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 0.5)\}.$$

**Definición 1.13** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos borrosos de  $E$ . Definimos la **unión** de  $A$  y  $B$ , que denotamos por  $A \cup B$ , como el subconjunto borroso de  $E$  con función de membresía

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Veamos la gráfica 1.9 en donde la línea gruesa representa la función de membresía de la unión de los conjuntos difusos  $A$  y  $B$ .

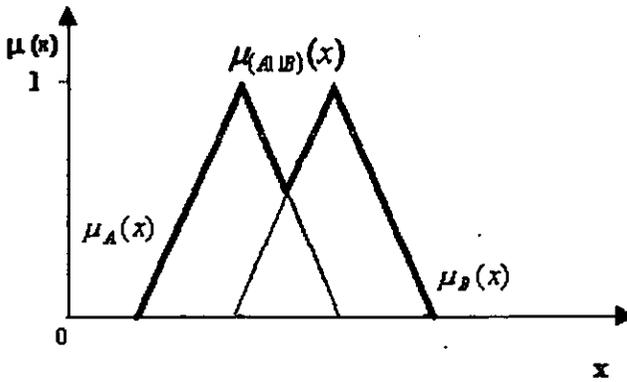


Figura 1.9: Unión de los subconjuntos difusos A y B.

**Ejemplo 8** Sean  $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ,

$$A = \{(a, 0), (b, 0.3), (c, 0.7), (d, 1), (e, 0), (f, 0.2), (g, 0.6)\}$$

y  $B = \{(a, 0.3), (b, 1), (c, 0.5), (d, 0.8), (e, 1), (f, 0.5), (g, 0.6)\}$ . Entonces la unión de A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{(a, 0.3), (b, 1), (c, 0.7), (d, 1), (e, 1), (f, 0.5), (g, 0.6)\}$$

Retomemos por última vez el ejemplo (1) para ilustrar la unión, el complemento y la intersección.

**Ejemplo 9** Sean A el conjunto de las "casas cómodas para una familia de 4 integrantes" y B el conjunto de las "casas más grandes". Definimos los conjuntos A y B como sigue

$$A = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\},$$

$$B = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1)\}.$$

Entonces

$$A \cap B = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.3)\},$$

$$A \cup B = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1)\},$$

$$\bar{A} = \{(1, 0.8), (2, 0.5), (3, 0.2), (5, 0.3), (6, 0.7), (7, 1), (8, 1), (9, 1), (10, 1)\}$$

y

$$\bar{B} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 0.8), (4, 0.6), (5, 0.4), (6, 0.2), (9, 1), (10, 1)\}.$$

**Definición 1.14** La suma disjunta de dos subconjuntos borrosos  $A$  y  $B$ , denotada por  $A \oplus B$ , la definimos en términos de la unión y la intersección como sigue

$$A \oplus \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B).$$

**Definición 1.15** La diferencia de dos subconjuntos borrosos  $A$  y  $B$ , que denotamos  $A \ominus B$ , la definimos como sigue

$$A \ominus B = A \cap \bar{B}.$$

**Ejemplo 10** Sean los conjuntos difusos

$$A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 0.5)\} \quad y$$

$$B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.3), (x_3, 1), (x_4, 0.1), (x_5, 0.5)\}.$$

Entonces

$$\bar{A} = \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.3), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 0.5)\},$$

$$\bar{B} = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.7), (x_3, 0), (x_4, 0.9), (x_5, 0.5)\},$$

$$A \ominus B = A \cap \bar{B} = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 0), (x_4, 0), (x_5, 0.5)\},$$

$$\bar{A} \cap B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.3), (x_3, 0), (x_4, 0.1), (x_5, 0.5)\},$$

$$A \oplus B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.7), (x_3, 0), (x_4, 0.1), (x_5, 0.5)\}.$$

### 1.3.1 Propiedades de las operaciones básicas

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres subconjuntos borrosos de  $E$ . Listaremos a continuación las siguientes propiedades:

- |  |                    |
|--|--------------------|
| 1. $A \cap B = B \cap A$                                     | Conmutatividad.    |
| 2. $A \cup B = B \cup A$                                     |                    |
| 3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$                   | Asociatividad.     |
| 4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$                   |                    |
| 5. $A \cap A = A$  | Idempotencia.      |
| 6. $A \cup A = A$  |                    |
| 7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$          | Distributividad.   |
| 8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$          |                    |
| 9. $A \cap \emptyset = \emptyset$ .                          |                    |
| 10. $A \cup \emptyset = A$ .                                 |                    |
| 11. $A \cap E = A$ .   |                    |
| 12. $A \cup E = E$ .   |                    |
| 13. $\overline{\overline{A}} = A$                            | Involución.        |
| 14. $\overline{(A \cap B)} = \overline{B} \cup \overline{A}$ | Teorema de Morgan. |
| 15. $\overline{(A \cup B)} = \overline{B} \cap \overline{A}$ |                    |

A continuación veremos cómo demostrar las propiedades 3, 7 y 14. Las demás se realizan de manera análoga.

3.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  Asociatividad.

#### Demostración

Sea  $x \in E$ , entonces por definición de intersección de conjuntos borrosos, el conjunto  $(A \cap B) \cap C$  es un subconjunto borroso de  $E$  con función de membresía definida como sigue

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cap B) \cap C}(x) &= \min \{ \mu_{(A \cap B)}(x), \mu_C(x) \} \\ &= \min \{ \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \mu_C(x) \} \\ &= \min \{ \mu_A(x), \min \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \} \\ &= \min \{ \mu_A(x), \mu_{B \cap C}(x) \} \\ &= \mu_{A \cap (B \cap C)}(x) \quad \text{para toda } x \in E. \end{aligned}$$

Como las funciones de membresía son iguales, podemos concluir que

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

7.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  Distributividad.

Demostración

Sea  $x \in E$ , entonces aplicando la definición de intersección y de unión de conjuntos borrosos, el conjunto  $A \cap (B \cup C)$  y el conjunto  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  son subconjunto borrosos de  $E$  con funciones de membresía definidas como sigue

$$\begin{aligned} \mu_{A \cap (B \cup C)}(x) &= \min \{ \mu_A(x), \mu_{B \cup C}(x) \} \\ &= \min \{ \mu_A(x), \max \{ \mu_B(x), \mu_C(x) \} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x) &= \max \{ \mu_{(A \cap B)}(x), \mu_{(A \cap C)}(x) \} \\ &= \max \{ \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \min \{ \mu_A(x), \mu_C(x) \} \}. \end{aligned}$$

Veamos la tabla 1.1, en donde mostramos todos los casos posibles de orden entre las dos funciones de membresía. Esto es, para la terna 1 2 3, indicamos que  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \leq \mu_C(x)$ . Además la igualdad entre las funciones de membresía se cumple. Por tanto se cumple la distributividad para conjuntos borrosos. Es decir,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

14.  $\overline{(A \cap B)} = \overline{B} \cup \overline{A}$  Teorema de Morgan.

1	2	3	$\mu_{A \cap (B \cup C)}(x)$	$\mu_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x)$
$\mu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$\mu_C(x)$	$\mu_A(x)$	$\mu_A(x)$
$\mu_B(x)$	$\mu_A(x)$	$\mu_C(x)$	$\mu_A(x)$	$\mu_A(x)$
$\mu_C(x)$	$\mu_B(x)$	$\mu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$\mu_B(x)$
$\mu_C(x)$	$\mu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$\mu_A(x)$	$\mu_A(x)$
$\mu_A(x)$	$\mu_C(x)$	$\mu_B(x)$	$\mu_A(x)$	$\mu_A(x)$
$\mu_B(x)$	$\mu_C(x)$	$\mu_A(x)$	$\mu_C(x)$	$\mu_C(x)$

Tabla 1.1:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Demostración

Sea  $x \in E$ , entonces aplicando la definición de complemento de conjuntos borrosos, los conjuntos  $(A \cap B)$  y  $\overline{B \cup A}$  son subconjuntos borrosos de  $E$  con funciones de membresía definidas como sigue

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{(A \cap B)}}(x) &= 1 - \mu_{(A \cap B)}(x) \\ &= 1 - \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{B \cup A}}(x) &= 1 - \mu_{(B \cup A)}(x) \\ &= \max \{ 1 - \mu_B(x), 1 - \mu_A(x) \}. \end{aligned}$$

Veamos la tabla 1.2, en donde mostramos los casos de orden entre las dos funciones de membresía. Esto es, para la pareja 1 2, indicamos que  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ . Además la igualdad entre las funciones de membresía se cumple. Por tanto se cumple el Teorema de Morgan para conjuntos borrosos. Es decir,

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{B \cup A}.$$

1	2	$\mu_{\overline{(A \cap B)}}(x)$	$\mu_{\overline{B \cup A}}(x)$
$\mu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$1 - \mu_A(x) = \mu_{\overline{A}}(x)$	$1 - \mu_A(x) = \mu_{\overline{A}}(x)$
$\mu_B(x)$	$\mu_A(x)$	$1 - \mu_B(x) = \mu_{\overline{B}}(x)$	$1 - \mu_B(x) = \mu_{\overline{B}}(x)$

Tabla 1.2:  $\overline{(A \cap B)} = \overline{B \cup A}$ .

**Observación:** Los conjuntos borrosos cumplen todas las propiedades de los conjuntos ordinarios o clásicos, exceptuando las de complementación, es decir, el conjunto de subconjuntos borrosos no es un campo completo, dado que

1.  $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$
2.  $A \cup \bar{A} \neq E$

Como ejemplo de estas desigualdades veamos las gráficas 1.10 y 1.11 en donde mostramos por medio de la línea gruesa, que las propiedades básicas de complementación para conjuntos borrosos no se cumplen.

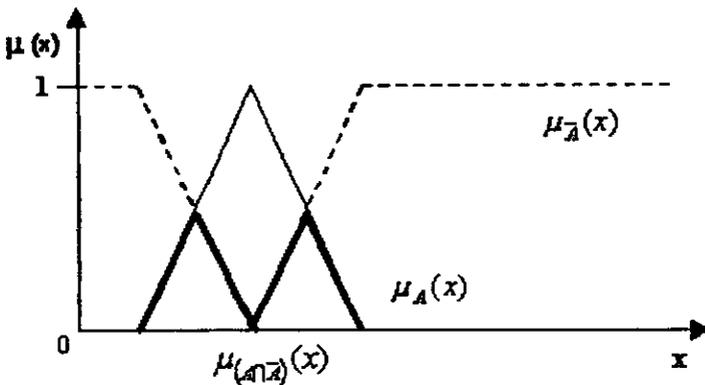


Figura 1.10:  $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ .

## 1.4 Operaciones algebraicas

En esta sección estudiaremos las operaciones algebraicas que son el producto y la suma, con sus respectivos ejemplos. Dedicamos una subsección para enlistar las propiedades más importantes con algunas demostraciones de las propiedades citadas.

**Definición 1.16** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos borrosos de  $E$ . Definimos el producto algebraico de  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \cdot B$  como sigue

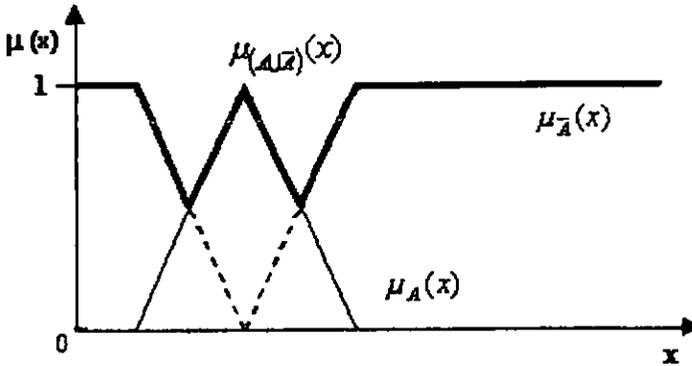


Figura 1.11:  $A \cup \bar{A} \neq E$ .

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in E.$$

**Ejemplo 11** Sean

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 0.5)\} \text{ y}$$

$B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.3), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 0.5)\}$ . Entonces el producto algebraico de  $A$  y  $B$  es el conjunto

$$A \cdot B = \{(x_1, 0.10), (x_2, 0.21), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 0.25)\}.$$

**Definición 1.17** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos borrosos de  $E$ . Definimos la suma algebraica de  $A$  y  $B$ , denotada por  $A \hat{+} B$ , como sigue

$$\forall x \in E, \quad \mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x).$$

### 1.4.1 Propiedades de las operaciones algebraicas

Sean A,B y C tres subconjuntos borrosos de E. Enlistaremos a continuación algunas propiedades de las operaciones algebraicas.

- 1.  $A \cdot B = B \cdot A$  Conmutatividad.
- 2.  $A \hat{+} B = B \hat{+} A$
- 3.  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  Asociatividad.
- 4.  $(A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C)$
- 5.  $A \cdot 0 = 0.$
- 6.  $A \hat{+} 0 = A.$
- 7.  $A \cdot E = A.$
- 8.  $A \hat{+} E = E.$
- 9.  $\overline{(\overline{A})} = A$  Involución.
- 10.  $\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} \hat{+} \overline{B}$  Teorema de Morgan.
- 11.  $\overline{(A \hat{+} B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

A continuación veremos cómo demostrar las propiedades 4 y 10.

4.  $(A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C)$  Asociatividad.

Demostración

Sea  $x \in E$ , entonces aplicando la definición de suma y producto algebraico de conjuntos borrosos, el conjunto  $(A \hat{+} B) \hat{+} C$  es un subconjunto borroso de E con función de membresía definida como sigue

$$\begin{aligned}
 \mu_{(A\hat{+}B)\hat{+}C}(x) &= \mu_{A\hat{+}B}(x) + \mu_C(x) - \mu_{A\hat{+}B}(x) \cdot \mu_C(x) \\
 &= (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)) + \mu_C(x) \\
 &\quad - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)) \cdot \mu_C(x) \\
 &= \mu_A(x) + \mu_B(x) + \mu_C(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \\
 &\quad - (\mu_A(x) + \mu_B(x)) \cdot \mu_C(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \cdot \mu_C(x) \\
 &= \mu_A(x) + \mu_B(x) + \mu_C(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \\
 &\quad \mu_A(x) \cdot \mu_C(x) + \mu_B(x) \cdot \mu_C(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \cdot \mu_C(x) \\
 &= \mu_A(x) + \mu_B(x) + \mu_C(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \\
 &\quad - \mu_A(x) \cdot (\mu_B(x) + \mu_C(x)) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \cdot \mu_C(x) \\
 &= \mu_A(x) + (\mu_B(x) + \mu_C(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)) \\
 &\quad - \mu_A(x) \cdot ((\mu_B(x) + \mu_C(x)) - \mu_B(x) \cdot \mu_C(x)) \\
 &= \mu_A(x) + \mu_{(B\hat{+}C)}(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_{(B\hat{+}C)}(x) \\
 &= \mu_{A(x)\hat{+}(B\hat{+}C)}(x).
 \end{aligned}$$

Como las funciones de membresía son iguales podemos concluir que

$$(A\hat{+}B)\hat{+}C = A\hat{+}(B\hat{+}C).$$

10.  $\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} \hat{+} \overline{B}$  Teorema de Morgan.

Demostración

Sea  $x \in E$ , entonces aplicando la definición de complemento y suma, y producto algebraico de conjuntos borrosos, el conjunto  $\overline{(A \cdot B)}$  es un subconjunto borroso de  $E$  con función de membresía definida como sigue

$$\begin{aligned}
 \mu_{\overline{(A \cdot B)}}(x) &= \mu_{\overline{A}}(x) + \mu_{\overline{B}}(x) - \mu_{\overline{A}}(x) \cdot \mu_{\overline{B}}(x) \\
 &= (1 - \mu_A(x)) + (1 - \mu_B(x)) - ((1 - \mu_A(x)) \cdot (1 - \mu_B(x))) \\
 &= (1 - \mu_A(x)) + (1 - \mu_B(x)) \\
 &\quad - ((1 - \mu_B(x)) - \mu_A(x) + \mu_A(x)) \cdot \mu_B(x) \\
 &= (1 - \mu_A(x)) + (1 - \mu_B(x)) \\
 &\quad - (1 - \mu_B(x) + \mu_A(x) - \mu_A(x)) \cdot \mu_B(x) \\
 &= 1 - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \\
 &= \mu_{\overline{A}\hat{+}\overline{B}}.
 \end{aligned}$$

Como las funciones de membresía son iguales podemos concluir que

$$\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} \hat{+} \overline{B}.$$

Las demás propiedades de las operaciones algebraicas se realizan de manera semejante.

## Capítulo 2

# OPERACIONES CON NÚMEROS DIFUSOS

### 2.1 Introducción

La definición de la teoría de los conjuntos difusos introducida por Lofti A. Zadeh en 1965, ha cambiado la forma de considerar la ambigüedad y la imprecisión. En las teorías tradicionales se fuerza a que las representaciones del mundo real que se realizan encajen dentro de modelos muy precisos, tomando a la imprecisión como un factor de distorsión.

Los conjuntos en la teoría clásica son altamente restrictivos en el sentido de que un elemento pertenece o no pertenece a un conjunto dado. Esta característica se considera buena en muchos aspectos científicos, mientras que en un gran número de ámbitos esta restricción causa serios problemas. Por ejemplo, supongamos un conjunto universal  $U$  formado por personas de las cuales tomaremos su altura. Definimos tres subconjuntos **Bajo**, **Medio** y **Alto** a los que pertenecerán los elementos de  $U$  según su altura.

Desde el punto de vista de los conjuntos nítidos (modelo clásico), los individuos que midan menos de 165 cm serán bajos, los que midan entre 165 cm y 185 cm tendrán una estatura media y los que superen los 185 cm serán altos. Este sistema, que en principio nos resuelve la tarea de clasificación, genera un

problema de precisión, es decir, una persona que mida 184.75 cm ¿es alta?, o ¿tiene una estatura media?. El problema en cuestión se forma a partir del hecho de que para el modo de razonamiento humano los conjuntos **Bajo**, **Medio** y **Alto** no tienen unos límites nítidos, sino que éstos son “borrosos”, por lo que los elementos pierden grado de pertenencia a medida que se alejan de ellos.

Para abordar estas cuestiones en 1965 Lofti A. Zadeh formalizó matemáticamente el concepto de los conjuntos difusos, en los cuales los límites están definidos de forma imprecisa y su función característica no afirma ni niega la pertenencia, sino que la información que aporta es el grado con el que el elemento pertenece al conjunto o el grado de compatibilidad del elemento con la propiedad que caracteriza al conjunto.

La forma analítica de funciones de pertenencia de los conjuntos nítidos y los difusos es de la siguiente forma:

i) **Conjunto nítido:**

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

ii) **Conjunto difuso:**

$$\mu_A(x) : U \longrightarrow [0, 1].$$

Como se puede observar, para los conjuntos nítidos la función característica sólo tiene como opción los valores 0 y 1, mientras que para los conjuntos difusos la función es multivaluada, es decir, puede tomar cualquier valor en el intervalo real  $[0,1]$  (realmente el rango de valores que ésta puede tomar es cualquiera, aunque comunmente se utiliza el intervalo  $[0, 1]$ ).

De esta manera, si el resultado de evaluar la función es 0, indicará la negación de pertenencia o de compatibilidad con la propiedad que caracteriza al conjunto. Si es 1 la compatibilidad es total o pertenece indudablemente al conjunto.

Mostraremos en la gráfica siguiente cómo representamos las funciones características para el ejemplo de las alturas, tomando los subconjuntos como difusos. La línea continua representa a los individuos de estatura baja, la línea punteada representa a los individuos de estatura media y la línea semi-continua representa a los individuos de estatura alta.

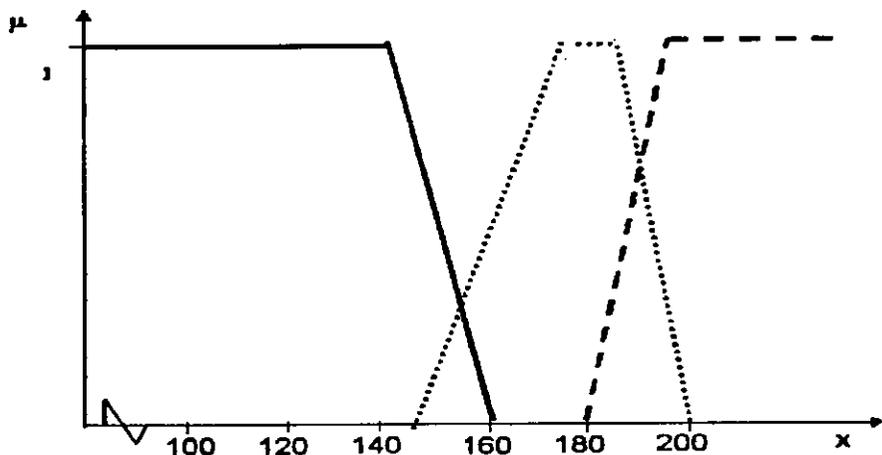


Figura 2.1: Conjuntos difusos en el ejemplo de las alturas.

Para exponer el material de este capítulo nos basamos en las referencias [12, 13, 9], asimismo consultamos las páginas de internet [24, 26, 27].

## 2.2 Los números difusos como subconjuntos de los conjuntos difusos

Empezaremos esta sección dando la definición matemática de un número difuso. En las otros apartados del capítulo mencionaremos los elementos de un número difuso, los tipos de números difusos que se pueden construir y la manera de operar con ellos.

**Notación:** Denotaremos con las letras  $A, B, C, \dots$  a los números difusos.

**Definición 2.1** Definimos al número difuso **A** como un subconjunto difuso sobre la recta real tal que cumple las siguientes tres propiedades

i) Normalidad

$$\sup_{x \in E} \mu_A(x) = 1.$$

ii) Semicontinuidad superior (nivel- $\alpha$ )

Para toda  $\alpha \in [0, 1]$  el conjunto,

$$A_\alpha = \{x \in E : \mu_A(x) \geq \alpha\},$$

es compacto.

iii) Convezidad

Para toda  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  con  $\alpha > \beta$  se tiene que  $A_{(\alpha)} \subset A_{(\beta)}$ .

**Observación:** Notemos que las condiciones ii) y iii) implican que todos los niveles  $\alpha$  son intervalos cerrados sobre la recta real, a los que se les dota de una altura o grado de pertenencia sobre el conjunto difuso.

Veamos la figura 2.2, en donde mostramos un nivel  $\alpha$  de 0.5 para el número difuso **A**.

Los números difusos pueden ser considerados también como una extensión del concepto de intervalo de confianza. En lugar de considerar el intervalo a un único nivel de confianza se consideran a varios niveles dentro de  $[0, 1]$ , dándole al 1 el máximo de posibilidad y al cero el mínimo. El nivel de confianza 0 dará una hipótesis restrictiva. Así el nivel de posibilidad  $\alpha \in [0, 1]$ , genera un intervalo de confianza:  $A(\alpha) = [\alpha^1, \alpha^2]$ , el cual es una función monótona decreciente dependiente de  $\alpha$ , es decir,

$$\text{Si } \alpha' > \alpha \text{ entonces } A(\alpha') \subset A(\alpha).$$

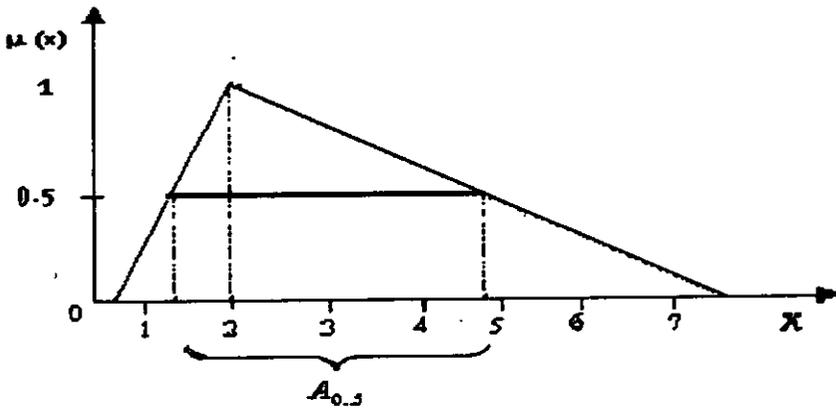


Figura 2.2: Figura que muestra un nivel  $\alpha$  de 0.5.

## 2.3 Elementos que caracterizan a un número difuso

Las definiciones de los elementos que caracterizan a un número difuso ya las hemos definido en el capítulo anterior. Las mencionaremos nuevamente, para poderlas localizar más fácilmente, sin necesidad de tener que volver a regresar al capítulo 1 y después continuar con el estudio de este capítulo.

### 1. Función de Membresía (*membership*):

Es la función que denota el grado de pertenencia o grado de compatibilidad de un elemento  $x$  dentro del conjunto difuso  $A$ . dicha función lleva elementos del conjunto difuso  $A$  a números en el intervalo  $[0, 1]$ .

La representamos mediante la función,

$$\mu_A(x) : E \longrightarrow [0, 1].$$

### 2. Conjuntos de nivel- $\alpha$ :

Intervalo real para el cual todos sus elementos pertenecen al número difuso con un nivel de confianza mayor o igual a  $\alpha$ . Algebraicamente,

$$A_\alpha = \{x \in E : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

3. Soporte:

Corte-alpha con  $\alpha = 0$ . Representado por,

$$S(A) = \{x \in E : \mu_A(x) > 0\}.$$

4. Moda o nivel-uno:

Nivel  $\alpha$  a un nivel uno. Representado por

$$A_1 = \{x \in E : \mu_A(x) \geq 1\}.$$

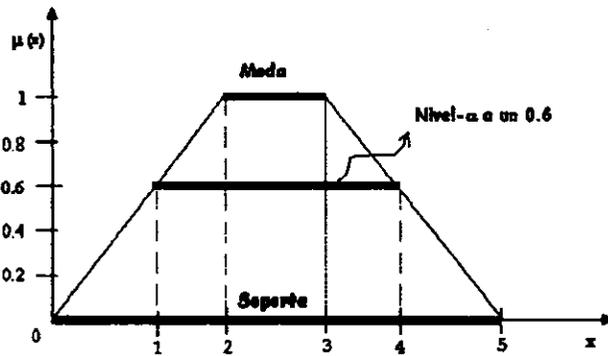


Figura 2.3: Elementos de un número difuso.

Para ejemplificar los elementos de un número difuso veamos la figura 2.3, en donde observamos que  $S(A) = (0, 5)$ ,  $A_{0.6} = [1, 4]$  y la moda  $A_1 = [2, 3]$ .

## 2.4 Tipos de números difusos

Entre los varios tipos de conjuntos difusos, los de importancia para nosotros son los conjuntos difusos que se encuentran definidos sobre el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ . Las funciones de membresía de estos conjuntos, que poseen la siguiente forma:

$$\mu_A(x) : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

bajo ciertas condiciones pueden ser vistas como *números difusos* o *intervalos difusos*. Para ello debemos ocupar nuestro conocimiento e intuición sobre la aproximación de números o intervalos reales vistos en cursos de cálculo, tales como “los números que se encuentran cercanos a un número real dado”, o bien, “los números que se encuentran alrededor de un intervalo dado de números reales”. Tales conceptos son esenciales para caracterizar los estados de las variables difusas y, consecuentemente, juegan un papel muy importante dentro de muchas aplicaciones, incluyendo entre ellas: control difuso, teoría de las decisiones, problemas de optimización y estadística con probabilidades imprecisas.

Los casos de números difusos que nosotros utilizaremos son los que incluyen números e intervalos sobre los números reales, como ilustramos en la figura 2.4. Donde representamos en a) el número real 1.3; b) el intervalo cerrado real [1.25, 1.35]; c) intervalo difuso y d) un número difuso .

### 2.4.1 Números difusos triangulares

Como su nombre lo indica, este tipo de números presentan forma triangular, por lo que quedan perfectamente definidos con tres números reales que indican las abscisas de los vértices, las ordenadas se obtienen por la propia definición del número difuso, los valores de los extremos están a altura cero y el valor central de dicho número tiene altura uno. Veamos como ejemplo de un número difuso triangular la figura 2.5.

A continuación daremos una definición más formal de número difuso triangular.

**Definición 2.2** *Definimos un número difuso triangular  $A \in \mathbb{R}$  como aquel subconjunto borroso de  $\mathbb{R}$  con función de membresía  $\mu_A$  dada por*

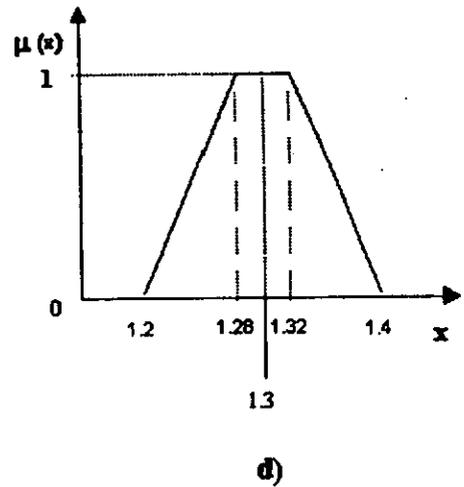
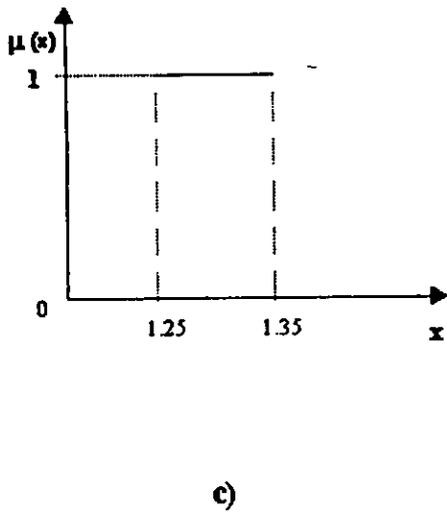
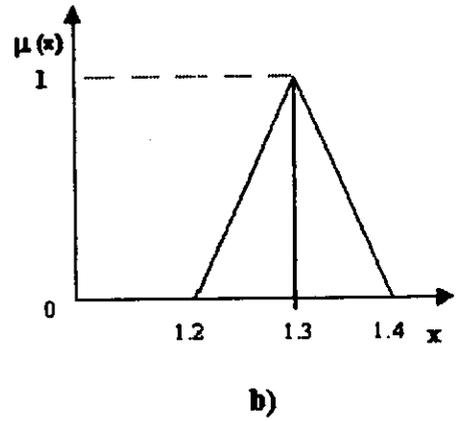
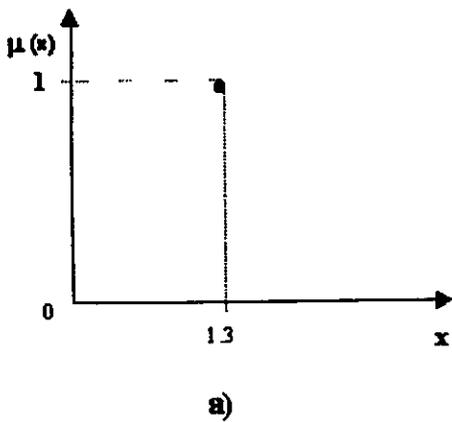


Figura 2.4: Comparación de un número e intervalo real con un difuso.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_c - a_1} & \text{para } a_1 \leq x \leq a_c, \\ \frac{x - a_2}{a_c - a_2} & \text{para } a_c \leq x \leq a_2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.1)$$

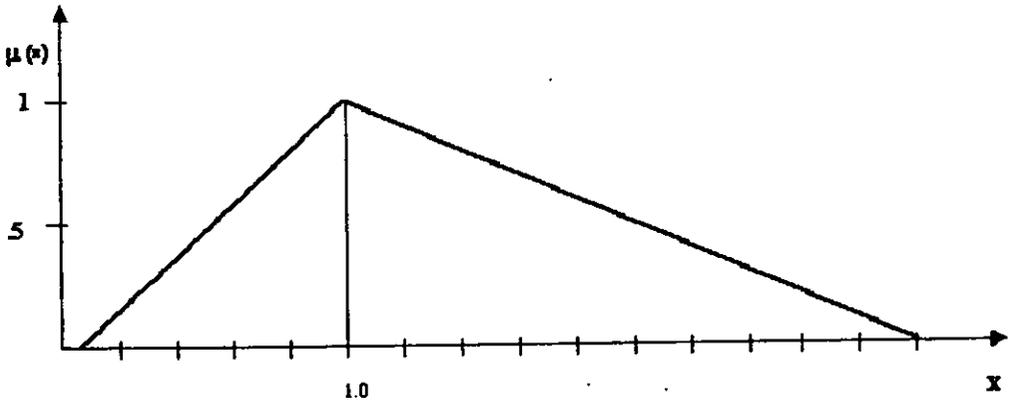


Figura 2.5: Ejemplo de un número difuso triangular.

Donde  $[a_1, a_2]$  es el intervalo de soporte del número difuso  $A$  y  $(a_C, 1)$  es el punto máximo.

Para ejemplificar esta definición veamos la gráfica 2.6.

Para algunas aplicaciones el punto  $a_C \in (a_1, a_2)$  se localiza a la mitad del intervalo del soporte del número difuso  $A$ , es decir,  $a_C = (a_1 + a_2)/2$ . Sustituyendo este valor en (2.1) se obtiene

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2 \left( \frac{x - a_1}{a_c - a_1} \right) & \text{para } a_1 \leq x \leq a_c, \\ 2 \left( \frac{x - a_2}{a_c - a_2} \right) & \text{para } a_c \leq x \leq a_2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Decimos entonces que (2.1) representa a un **número difuso triangular simétrico** con centro en  $a_C = (a_1 + a_2)/2$  (vease la gráfica 2.7). Este tipo de números se ocupa frecuentemente en aplicaciones de controladores difusos, teoría de las decisiones, negocios, finanzas, ciencias sociales, etc.

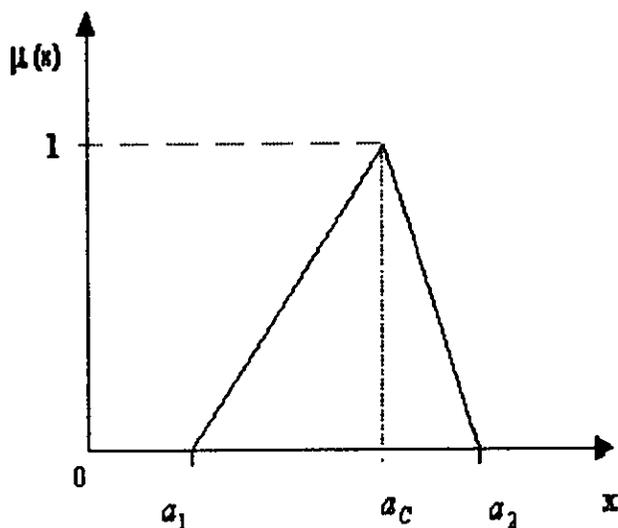


Figura 2.6: Número difuso triangular não simétrico.

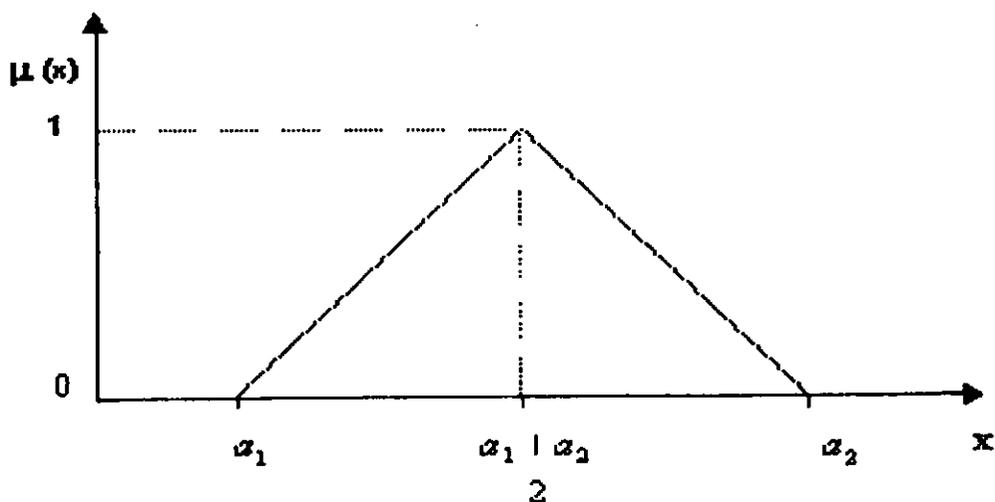


Figura 2.7: Número difuso triangular simétrico.

**Notación:**

- i) Denotaremos a un **número difuso triangular** como  $A = [a_1, a_2]$ .
- ii) Si además  $A$  es un **número difuso triangular simétrico** lo denotaremos como  $A = (a_C, a_2)$ , donde  $a_C$  tiene la membresía total y  $a_2$  representa la incertidumbre o imprecisión para  $a_C$ .

**2.4.2 Números difusos trapezoidales**

Este tipo de números difusos se representarán mediante cuatro números reales que definirán las abscisas de los cuatro vértices del trapecio tal y como se ilustra en la figura 2.8.

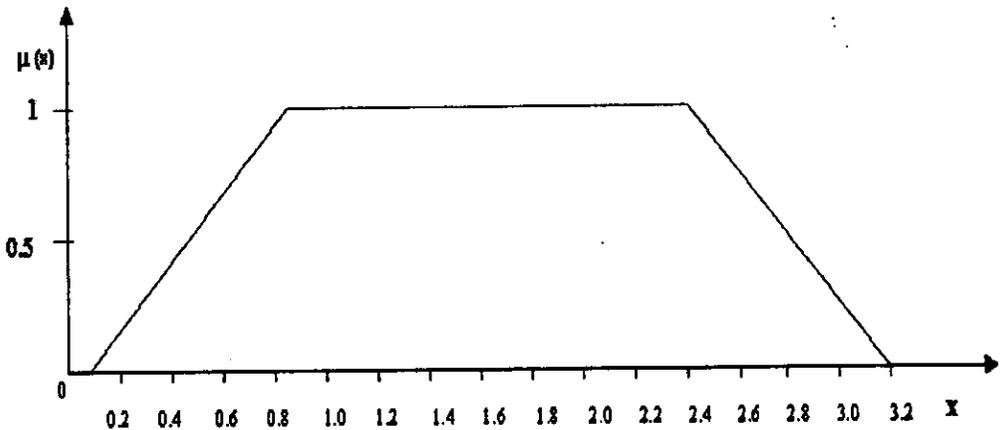


Figura 2.8: Ejemplo de un número difuso trapezoidal.

Sin embargo daremos una definición más formal para este tipo de números difusos, pues al igual que los números difusos triangulares son los que más ocuparemos dentro de nuestras aplicaciones que desarrollaremos en el capítulo 4.

**Definición 2.3** Definimos un número difuso trapezoidal  $A \subseteq \mathbb{R}$  como aquel subconjunto difuso de  $\mathbb{R}$  con función de membresía  $\mu_A$  dada por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} & \text{para } a_1 \leq x \leq b_1, \\ 1 & \text{para } b_1 \leq x \leq b_2, \\ \frac{x - a_2}{b_2 - a_2} & \text{para } b_2 \leq x \leq a_2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Donde  $[a_1, a_2]$  es el intervalo de soporte del número difuso  $A$  y  $[b_1, b_2]$  es la región con nivel  $\alpha = 1$ . Ilustraremos esta definición con la figura 2.9.

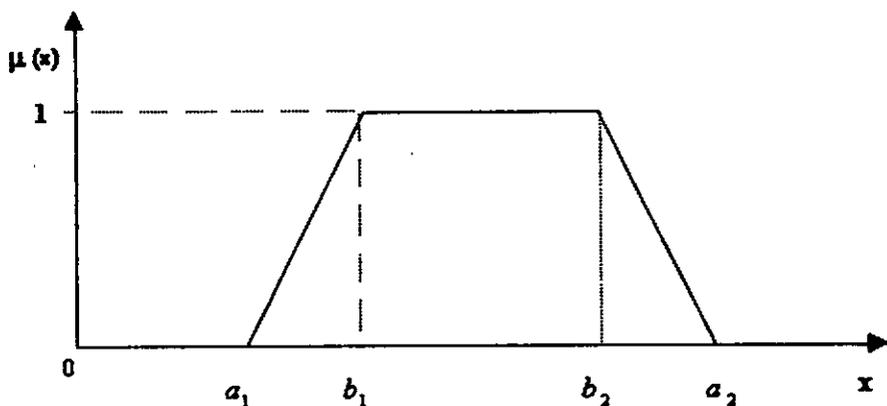


Figura 2.9: Número difuso trapezoidal.

Además si  $[a_1, b_1] = [b_2, a_2]$ , entonces (2.2) se convierte a un **número trapezoidal difuso simétrico** y es simétrico con respecto a la recta  $x = \frac{b_1 + b_2}{2}$  (véase la figura 2.10).

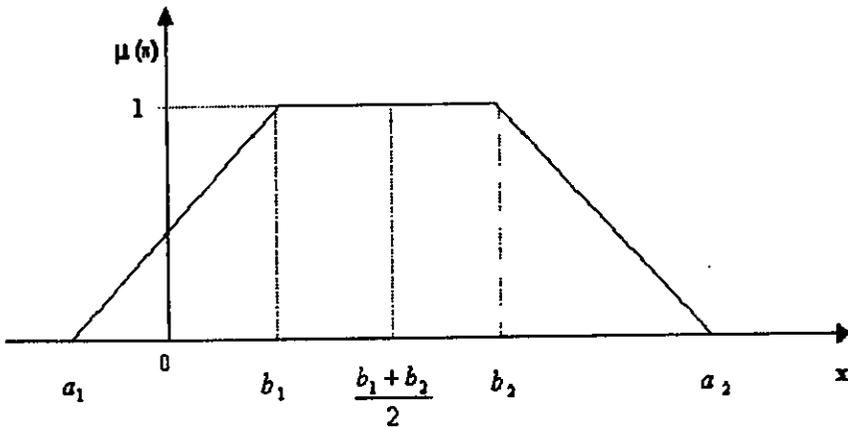


Figura 2.10: Número difuso trapezoidal simétrico.

### 2.4.3 Otros tipos de números difusos

En procesos reales se requiere evaluar a las funciones de membresía de los conjuntos difusos de manera simultánea. Si su función de membresía es compleja, emplearemos un tiempo considerable en su análisis. Es por ello que los modelos más comúnmente empleados son los conjuntos generados por triángulos o trapecios, pues nos permiten hacer un cambio gradual desde  $\mu_A(x) = 0$  hasta  $\mu_A(x) = 1$ .

A continuación mencionaremos otros tipos de números difusos, que no son triangulares ni trapezoidales, pero si simétricos.

- i) **Gaussiano.** El tipo Gaussiano queda caracterizado a partir de los parámetros que definen la distribución de Gauss, esto es: media, desviación típica, mínimo y máximo. La necesidad de incluir los parámetros mínimo y máximo se debe a que la función de Gauss está definida en toda la recta real, mientras que los números difusos han de tener un soporte o alfa-corte a nivel cero de longitud finita. Veamos la gráfica 2.11, en donde mostramos un número difuso gaussiano.
- ii) **Gaussiano Doble.** Estos números se componen de dos funciones de

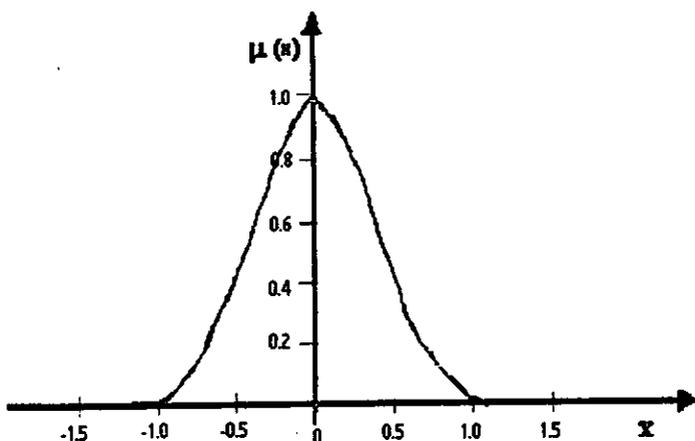


Figura 2.11: Número difuso gaussiano

Gauss (rama izquierda, rama derecha) las cuales poseen cada una su media y su desviación típica. Por lo tanto es posible que presenten un nivel-uno con longitud no nula. Además es necesario especificar el mínimo y el máximo por las razones mencionadas en el inciso anterior. Ilustraremos este tipo de número difuso en la figura 2.12.

- iii) **Parabólico.** La forma que presentan es la de una parábola por lo que quedarán definidos con los tres parámetros que forman el trinomio de segundo grado. Para que la expresión sea la función de pertenencia de un número difuso el coeficiente que multiplica al término de mayor grado ha de ser negativo y el vértice de la parábola debe estar en un punto con ordenada igual a uno. Véase la gráfica 2.13.
- iv) **Parabólico Doble.** Este tipo de número se caracterizará por aportar la ecuación de las dos parábolas que definen cada una de las ramas del número difuso. Véase la gráfica 2.14.
- v) **Mixto.** La función de pertenencia de estos números no tiene una expresión general para todo el número, ni siquiera para una de las ramas. Pueden presentar zonas planas y discontinuidades (escalones). La única forma de guardar la información necesaria para representarlos y operar con ellos es mantener una lista con sus alfa-cortes. Véase la gráfica 2.15.

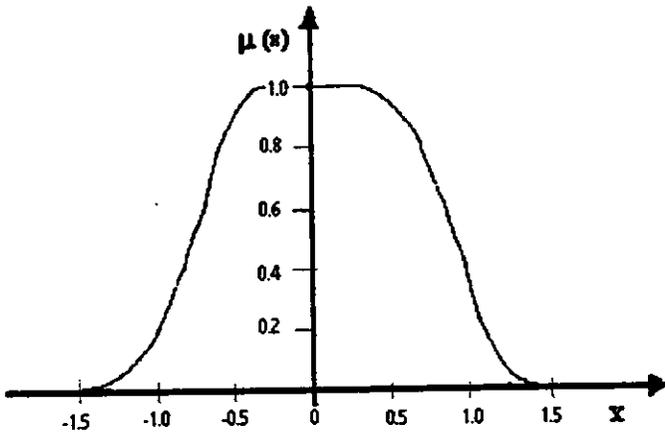


Figura 2.12: Número difuso gaussiano doble

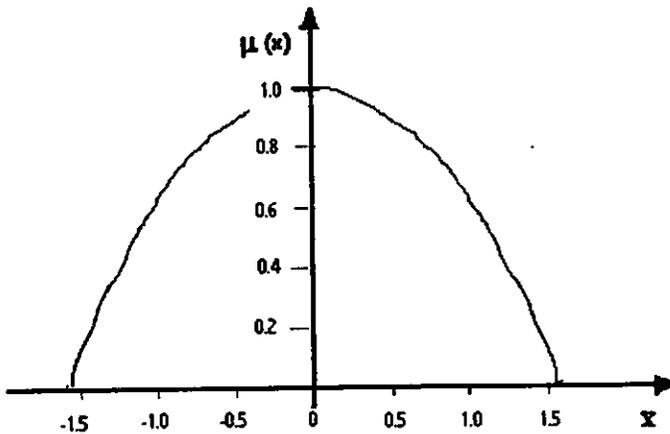


Figura 2.13: Número difuso parabólico

## 2.5 Cálculo con números difusos

### 2.5.1 El cálculo del intervalo

Como ya vimos anteriormente los números difusos pueden ser representados por medio de intervalos cerrados, que denotan el soporte del número difuso

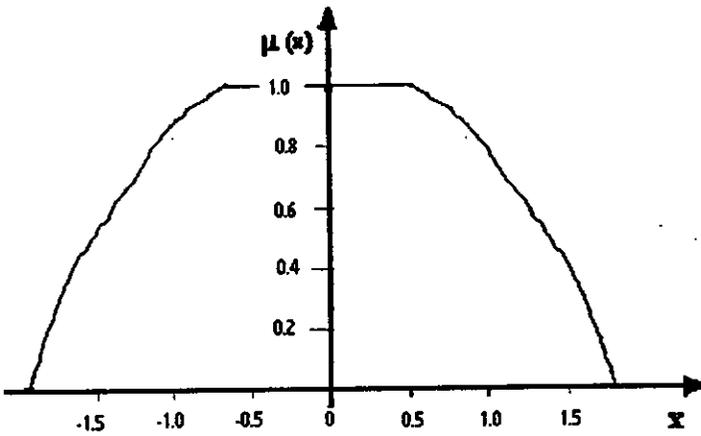


Figura 2.14: Número difuso parabólico doble

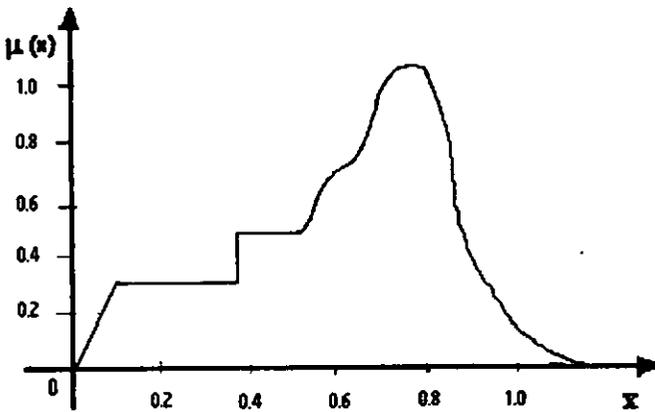


Figura 2.15: Número difuso mixto

A. Aplicando las operaciones sobre cada uno de los nivel  $\alpha$  de los operandos, se formará el soporte del resultado.

A continuación definiremos la forma de operar con números difusos, teniendo

ya su soporte.

**Definición 2.4** Sean  $A = [a_1, a_2]$  y  $B = [b_1, b_2]$  el soporte de dos números difusos. Definimos las siguientes operaciones

$$i) A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],$$

$$ii) A - B = [a_1 - b_2, a_2 + b_1],$$

$$iii) A \cdot B = \left[ \min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2) \right],$$

$$iv) A/B = [a_1, a_2] \cdot [1/b_1, 1/b_2] \\ = \left[ \min(a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2), \max(a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2) \right].$$

## 2.5.2 Generalización del cálculo del intervalo a los números difusos

Todas las operaciones matemáticas aplicables a los números difusos pueden considerarse como una extensión de las mismas operaciones aplicadas sobre intervalos, debido a que:

- i) Cualquier conjunto difuso  $A$ , en particular, cualquier número difuso, está caracterizado por la colección de sus niveles  $\alpha$ .
- ii) Los niveles  $\alpha$  de un número difuso son intervalos reales cerrados, para toda  $\alpha \in [0, 1]$ .

Veamos la figura 2.16, en donde mostramos cómo sería la gráfica de la suma de dos números difusos, aplicando la definición de la suma.

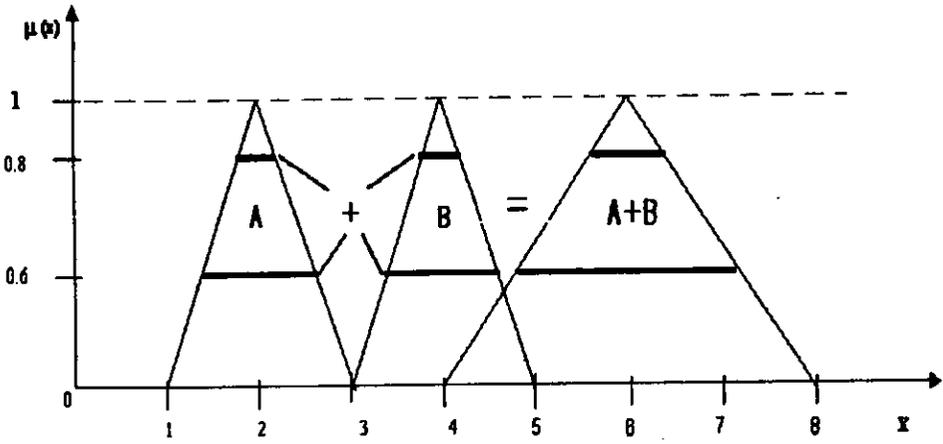


Figura 2.16: Suma de dos números difusos.

# Capítulo 3

## RELACIONES BORROSAS

### 3.1 Introducción

El concepto de relación se aplica en muchas ramas de las matemáticas, el estudio de dicho concepto para el caso borroso es el objetivo principal de este capítulo.

Recordando que una relación ordinaria entre los conjuntos  $A$  y  $B$  es un subconjunto de  $A \times B$ , podemos generalizar este concepto fácilmente para el caso borroso. Dicha generalización de relación borrosa juega un papel muy importante en diversas situaciones cotidianas.

Supongamos, por ejemplo, que deseamos identificar dentro del conjunto de los seres humanos la relación de amistad de dos personas cualesquiera. Es decir, dos personas estarán relacionadas si son amigas.

Si consideramos esta relación como ordinaria, es decir, si solamente se consideran las opciones: "es amigo de" y "no es amigo de", tendríamos el problema de falta de apego a la realidad. En este caso al igual que en la mayor parte de las relaciones humanas, nos conviene considerar un grado de relación. De esta manera no estaríamos dejando muchas posibilidades fuera pues puede existir una relación de amigos, pero con cierto grado de amistad.

Con este ejemplo damos la idea intuitiva del concepto de relación borrosa.

Dicho concepto, al igual que sus propiedades más importantes las estudiaremos más detalladamente dentro de este capítulo. Si se desea profundizar más en dichos temas se pueden consultar [9, 17, 21], material que empleamos como base para desarrollar este apartado.

## 3.2 Definición y operaciones básicas con relaciones borrosas

Recordemos la definición del producto cartesiano de dos conjuntos ordinarios.

**Definición 3.1** Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos subconjuntos ordinarios (*crisp sets*). Definimos el producto cartesiano de  $A_1$  y  $A_2$ , denotado por  $A_1 \times A_2$ , como sigue

$$A_1 \times A_2 = \{(x, y) : x \in A_1 \text{ e } y \in A_2\}.$$

**Notación:** Denotaremos con las letras  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \dots$  a las relaciones borrosas de  $A$  en  $B$ .

**Definición 3.2** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos ordinarios (*crisp sets*) del conjunto universal  $E$ . Definimos la relación borrosa  $\mathcal{R}$  de  $A$  en  $B$  como sigue

$$\mathcal{R} = \{((x, y), \mu_{\mathcal{R}}(x, y)) : (x, y) \in A \times B\},$$

en donde  $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$  es una medida de el grado de relación entre  $x$  e  $y$ .

**Notación:** Cada relación  $\mathcal{R}$  puede ser representada por medio de una matriz, que llamaremos matriz de membresía.

**Ejemplo 12** Sean  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{1, 2, 3\}$  dos conjuntos ordinarios.

Entonces

$$\mathcal{R} = \left\{ \left( (a, 1), 0.8 \right), \left( (b, 1), 0.4 \right), \left( (c, 1), 0.5 \right), \left( (a, 2), 0.1 \right), \left( (b, 2), 1 \right), \right. \\ \left. \left( (c, 2), 0 \right), \left( (a, 3), 1 \right), \left( (b, 3), 0.6 \right), \left( (c, 3), 0.8 \right) \right\}$$

es una relación borrosa de  $A$  en  $B$ . En términos de matriz de membresía la relación  $\mathcal{R}$  la representamos como sigue

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 1 \\ 0.4 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

**Definición 3.3** Sean  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  dos relaciones borrosas de  $A$  en  $B$ .

1. Decimos que  $\mathcal{R}_1$  está contenida en  $\mathcal{R}_2$ , y escribimos  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ , si y sólo si

$$\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y) < \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y), \quad \text{para toda } (x, y) \text{ en } A \times B.$$

2. La unión de  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$ , denotada por  $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ , es la relación borrosa con función de membresía

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}(x, y) = \max\{\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)\}, \quad \text{para toda } (x, y) \text{ en } A \times B.$$

3. La intersección de  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$ ,  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ , es la relación borrosa con función de membresía

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2}(x, y) = \min\{\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)\}, \quad \text{para toda } (x, y) \text{ en } A \times B.$$

4. El complemento de  $\mathcal{R}_1$ , denotado por  $\overline{\mathcal{R}_1}$ , es la relación borrosa con función de membresía

$$\mu_{\overline{\mathcal{R}_1}}(x, y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \quad \text{para toda } (x, y) \text{ en } A \times B.$$

5. La relación inversa de  $\mathcal{R}_1$ , denotada por  $\mathcal{R}_1^{-1}$ , es una relación borrosa de  $B$  en  $A$  con función de membresía

$$\mu_{\mathcal{R}_1^{-1}}(y, x) = \mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \quad \text{para toda } (x, y) \text{ en } A \times B.$$

Para ilustrar la definición 3.3 veamos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 13** Sean  $A_1 = \{a, b, c\}$  y  $A_2 = \{1, 2, 3\}$  dos conjuntos ordinarios. Sean  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  dos relaciones borrosas de  $A_1$  en  $A_2$  definidas por las siguientes matrices de membresía

$$\mathcal{R}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ a & 0.7 & 0.6 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0.3 \\ c & 0.4 & 0.7 & 0.3 \end{array} \\ \end{array}, \quad \mathcal{R}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ a & 0.4 & 0 & 0.3 \\ b & 0.7 & 1 & 0.6 \\ c & 0.8 & 0.5 & 0 \end{array} \\ \end{array}.$$

Entonces

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ a & 0.7 & 0.6 & 1 \\ b & 0.7 & 1 & 0.6 \\ c & 0.8 & 0.7 & 0.3 \end{array} \\ \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \end{array}, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ a & 0.4 & 0 & 0.3 \\ b & 0 & 1 & 0.3 \\ c & 0.4 & 0.5 & 0 \end{array} \\ \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ a & 0.3 & 0.4 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0.7 \\ c & 0.6 & 0.3 & 0.7 \end{array} \\ \overline{\mathcal{R}_1} = \end{array}, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & a & b & c \\ 1 & 0.7 & 0.6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0.3 \\ 3 & 0.4 & 0.7 & 0.3 \end{array} \\ \mathcal{R}_1^{-1} = \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ a & 0.6 & 1 & 0.7 \\ b & 0.3 & 0 & 0.4 \\ c & 0.2 & 0.5 & 1 \end{array} \\ \overline{\mathcal{R}_2} = \end{array}, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & a & b & c \\ 1 & 0.4 & 0 & 0.3 \\ 2 & 0.7 & 1 & 0.6 \\ 3 & 0.8 & 0.5 & 0 \end{array} \\ \mathcal{R}_2^{-1} = \end{array}.$$

**Ejemplo 14** Sean  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  el "conjunto de 4 alumnos", y  $M = \{m_1, m_2, m_3\}$  el "conjunto de 3 materias que cursan los 4 alumnos". Definimos la relación  $\mathcal{R}$  de  $A$  en  $M$  como sigue

$\mathcal{R} =$  "El alumno  $a_i$  tiene suficiente conocimiento de la materia  $m_j$ " con  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $j = 1, 2, 3$ .

Una forma de calcular la relación entre alumnos y materias es

$$\mu_{\mathcal{R}}(a_i, m_j) = \frac{C(a_i, m_j)}{10}$$

con  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $j = 1, 2, 3$ , donde  $C$  representa la calificación del alumno  $i$  en la materia  $j$ .

Supongamos ahora que los resultados obtenidos son los siguientes

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & m_3 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.7 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 1 & 0.7 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Por otro lado definimos también la relación  $\mathcal{R}_2$  como sigue

$\mathcal{R}_2 =$  "Interés del alumno  $a_i$  en la materia  $m_j$ ".

Supongamos que se obtienen los resultados siguientes

$$\mathcal{R}_2 = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & m_3 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.9 \\ 0.5 & 0.1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.9 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Entonces

$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & m_3 \\ a_1 & \begin{pmatrix} 0.7 & 1 & 0.3 \end{pmatrix} \\ a_2 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ a_3 & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix} \\ a_4 & \begin{pmatrix} 0.9 & 1 & 0.7 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & m_3 \\ a_1 & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.3 \end{pmatrix} \\ a_2 & \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \\ a_3 & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix} \\ a_4 & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

En donde  $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_2$  representa para cada alumno y cada materia el grado de relación máxima y  $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}_2$  el grado de relación mínima.

**Definición 3.4** Sea  $\mathcal{R}$  una relación borrosa de  $A_1$  en  $A_2$ . Definimos el soporte de la relación  $\mathcal{R}$ , denotado por  $S(\mathcal{R})$ , al conjunto ordinario

$$S(\mathcal{R}) = \{(x, y) : \mu_{\mathcal{R}}(x, y) > 0\}.$$

**Definición 3.5** Sea  $\mathcal{R}$  una relación borrosa de  $A_1$  en  $A_2$ . Definimos como relación ordinaria de nivel-alpha, a la relación dada por

$$\mathcal{R}_\alpha = \{(x, y) : \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \geq \alpha\}.$$

**Observación:** Observemos que  $\mathcal{R}_\alpha$  es una relación ordinaria del producto cartesiano  $A \times B$ .

Utilizaremos la matriz del ejemplo 14 de la página (45) para ejemplificar estas definiciones.

**Ejemplo 15** Teníamos en el ejemplo 14 la siguiente matriz de membresía

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & m_3 \\ a_1 & \begin{pmatrix} 0.7 & 1 & 0.3 \end{pmatrix} \\ a_2 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.6 \end{pmatrix} \\ a_3 & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix} \\ a_4 & \begin{pmatrix} 0.9 & 1 & 0.7 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

entonces para  $\alpha = 0.6$  y  $\alpha = 0.8$  obtenemos los dos siguientes conjuntos ordinarios

$$\mathcal{R}_{0.6} = \left\{ (a_1, m_1), (a_1, m_2), (a_2, m_3), (a_3, m_1), (a_3, m_2), (a_3, m_3), (a_4, m_1), \right. \\ \left. (a_4, m_2), (a_4, m_3) \right\}$$

y

$$\mathcal{R}_{0.8} = \left\{ (a_1, m_2), (a_3, m_2), (a_3, m_3), (a_4, m_1), (a_4, m_2) \right\}.$$

Considerando que la medida subjetiva de entendimiento, de las distintas materias, es aceptable con un grado de al menos 0.8. Entonces el conjunto  $\mathcal{R}_{0.8}$  contiene las parejas de alumnos y materias que lo satisfacen.

Por otro lado y de acuerdo con la definición de soporte de una relación borrosa vemos que para este ejemplo,

$$S(\mathcal{R}) = A_1 \times A_2.$$

Es decir, para todos los alumnos y materias existe, por pequeño que sea un grado de relación.

**Observación:** Si  $\alpha_1 > \alpha_2$  entonces  $\mathcal{R}_{\alpha_1} \subset \mathcal{R}_{\alpha_2}$ .

### 3.3 Composición de relaciones borrosas

A continuación definiremos la composición de relaciones borrosas. El concepto de composición será la base para la exposición de una aplicación que aparece dentro del capítulo 4.

**Definición 3.6** Sean  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{S}$  dos relaciones borrosas de  $A_1$  en  $A_2$  y de  $A_2$  en  $A_3$  respectivamente. Definimos la **composición** de  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{S}$ , denotada por  $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$  como aquella relación borrosa de  $A_1$  en  $A_3$  con medida de grado de relación dada por

$$\mu_{S \circ R} = \left\{ \max_{y \in A_2} \left\{ \min \{ \mu_R(x, y), \mu_S(y, z) \} \right\} : x \in A_1, z \in A_3 \right\}.$$

En la figura 3.1, observamos la composición  $S \circ R$

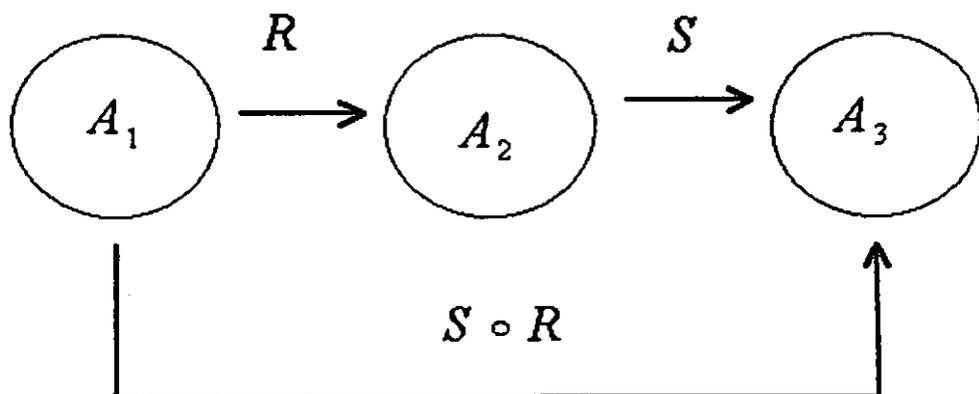


Figura 3.1: Composición de relaciones borrosas.

**Notación:** Denotaremos con  $\mathcal{R} = [r_{ik}]$ ,  $\mathcal{S} = [s_{kj}]$  y  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{Q} = [q_{ij}]$  a las matrices de membresía de las relaciones borrosas, respectivamente.

**Observaciones:** Utilizando la notación anterior veamos que.

i) La definición (3.6) la podemos transcribir como sigue

$$[q_{ij}] = [r_{ik}] \circ [s_{kj}]$$

donde

$$q_{ij} = \max_k \min (r_{ik}, s_{kj})$$

- ii) Para calcular  $\mathcal{Q}$ , utilizaremos, los mismos elementos de  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{S}$ . Esto se reduce a una multiplicación de matrices, pero el producto y la suma se cambian por el max y por el min respectivamente. Entonces diremos que estamos realizando la operación de max - min

Para entender la notación y las observaciones, veamos el siguiente ejemplo, en donde explicaremos la forma de calcular la composición de dos relaciones borrosas.

**Ejemplo 16 Sean**

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.7 & 1 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

*Realizando los calculos necesarios obtenemos que*

$$\mathcal{Q} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0.8^* & 0.3 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0.4^{**} & 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

*Como mencionamos anteriormente la operación de max - min, nos permite obtener la matriz  $\mathcal{Q}$ . Esta operación es análoga a la multiplicación usual de matrices. Por ejemplo a continuación explicaremos como obtuvimos (\*) y (\*\*).*

*Para (\*) hay que operar con el primer renglón de  $\mathcal{R}$  y con la primera columna de  $\mathcal{S}$ . Se efectua el producto de los dos vectores tal como conocemos y se obtiene el siguiente resultado*

$$(0.6) \cdot (0.9) + (0.5) \cdot (0.3) + (0.8) \cdot (1).$$

*Cambiando (-) por el min y (+) por el max obtenemos lo siguiente*

$$\begin{aligned}
 0.8 &= q_{11} = \max \{ \min (0.3, 0.9), \min (0.5, 0.3), \min (0.8, 1) \} \\
 &= \max \{ \min (r_{11}, s_{11}), \min (r_{12}, s_{21}), \min (r_{13}, s_{31}) \} \\
 &= \max \{ 0.3, 0.3, 0.8 \} \\
 &= 0.8
 \end{aligned}$$

De forma analoga para calcular  $(\star\star)$  se opera con el tercer renglón de  $\mathcal{R}$  y la segunda columna de  $\mathcal{S}$  obteniendo

$$(0.4) \cdot (0.5) + (0.6) \cdot (0.2) + (0.5) \cdot (0),$$

es decir

$$\begin{aligned}
 0.4 &= q_{32} = \max \{ \min (0.4, 0.5), \min (0.6, 0.2), \min (0.5, 0) \} \\
 &= \max \{ \min (r_{31}, s_{12}), \min (r_{32}, s_{22}), \min (r_{33}, s_{32}) \} \\
 &= \max \{ 0.4, 0.2, 0 \} \\
 &= 0.4.
 \end{aligned}$$

Para cerrar esta sección aplicaremos la definición de relación borrosa en el siguiente ejemplo. Para ver con más detalle este ejemplo ver [17].

**Ejemplo 17** *El problema consiste en seleccionar un área de estudio dentro de la carrera de actuaría. Supongamos que dentro de la carrera de actuaría, tenemos nueve áreas de especialización que son:*

1. *Investigación de Operaciones (IDO)*
2. *Estadística (EST)*
3. *Finanzas (FIN)*
4. *Economía (ECO)*
5. *Computación (COM)*
6. *Administración (ADM)*
7. *Seguros (SEG)*
8. *Pensiones (PEN)*

## 9. Matemáticas (MAT)

Para el ejemplo consideraremos solamente tres de ellas (IDO, EST Y SEG) y a un alumno ( $a_1$ ).

La relación entre las materias y áreas se forma con base en los prerrequisitos que se necesitan para cada área. Es decir, cada área se encuentra formada por ciertas materias básicas. Estas materias, a su vez, cuentan con ciertos prerrequisitos y entre mayor sea el número de materias básicas para cubrir el prerrequisito, mayor será la relación entre el prerrequisito y el área.

La relación entre el alumno y las materias estará dada por las calificaciones del alumno  $a_i$  en cada materia.

En la tabla 3.1 mostramos las tres áreas que consideramos para este ejemplo, sus materias y los prerrequisitos. El número que aparece al lado derecho entre paréntesis de los prerrequisitos, representa al número de materias básicas que necesitan de tal materia o prerrequisito. Por ejemplo, para la materia de Estadística I, se necesita solo para una materia del área de IDO, en cuatro para EST y en una para SEG.

Definimos los tres siguientes conjuntos

$A = \{a_i \text{ alumnos}\}$ , para nuestro ejemplo  $A = \{a_1\}$ .

$B = \{\text{materias}\} = \{EI, EII, AM, AL, PI, PII, CAII, CAIII, SP, SV, C\}$ .

$C = \{\text{áreas}\} = \{IDO, EST, SEG\}$ .

Sea  $R_1$  la relación de  $A$  en  $B$  definida como sigue

$$\mu_{R_1}(a_1, m) = C(x, y)/10,$$

donde  $C(x, y)$  es la calificación obtenida del alumno  $a_1$  en la materia  $m_j$ .

Supongamos que el alumno  $a_1$  obtuvo las siguientes calificaciones

$$R_1 = a_1 \begin{pmatrix} EI & EII & AM & AL & PI & PII & CAII & CAIII & SP & SV & C \\ 0.8 & 0.6 & 1 & 0.8 & 0.8 & 0.6 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Área	Materias Básicas	Prerrequisitos
I D O	Teoría de juegos. Teoría de inventarios. Teoría de colas. Seminario de IDO. Programación lineal.	Estadística I (1) Probabilidad I (1) Análisis Matemático I (3) Álgebra Lineal I (1)
E S T	Muestreo. Procesos Estocásticos I. Procesos Estocásticos II. Análisis de Regresión. Estadística bayesiana.	Estadística I (4) Probabilidad I (2) Estadística II (3) Probabilidad II (1) Análisis Matemático I (1)
S E G	Modelos dinámicos. Contabilidad de Seguros. Legislación de Seguros. Estadística de Seguros.	Contabilidad (1) Cálculo Actuarial II (1) Seguro de Vida (2) Seguro de Personas (2) Cálculo Actuarial III (1) Estadística I (1)

Tabla 3.1: Área, materias y prerrequisitos para el ejemplo 17.

Sea  $R_2$  la relación de  $B$  en  $C$ , definida como "la materia  $y$  tiene importancia dentro del área  $z$ ". Una manera de obtener  $R_2$  es la siguiente:

$$\mu_{R_2}(y, z) = \frac{\text{materias básicas del área } z \text{ y que necesitan } y}{\text{total de materias básicas del área } z}$$

Es decir,

$$R_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{IDO} & \text{EST} & \text{SEG} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{EI} \\ \text{EII} \\ \text{AM} \\ \text{AL} \\ \text{PI} \\ \text{PII} \\ \text{CAII} \\ \text{CAIII} \\ \text{SP} \\ \text{SV} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 1/4 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Realizando los cálculos necesarios obtenemos la matriz correspondiente a  $R_2 \circ R_1$  que es:

$$R_2 \circ R_1 = a_1 \begin{pmatrix} \text{IDO} & \text{EST} & \text{SEG} \\ 3/5 & 4/5 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el alumno  $a_1$  debería especializarse en el área de Estadística (EST), dado que tiene mejor preparación y conocimiento para esta área.

### 3.4 Algunas propiedades

En muchas aplicaciones se analizan relaciones dentro de un mismo conjunto. En esta sección daremos, mediante una serie de definiciones, algunas de las propiedades más importantes.

**Definición 3.7** Sea  $\mathcal{R}$  una relación borrosa de  $E$  en  $E$ . Decimos que  $\mathcal{R}$  es reflexiva si

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, x) = 1 \quad \forall x \in E.$$

**Ejemplo 18** Sea  $E = \{a, b, c\}$  y  $\mathcal{R}$  la relación borrosa de  $E$  definida por la matriz de membresía

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0.7 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Podemos ver que  $\mathcal{R}$  es reflexiva, pues

$$\mu_{\mathcal{R}}(a, a) = 1,$$

$$\mu_{\mathcal{R}}(b, b) = 1,$$

$$\mu_{\mathcal{R}}(c, c) = 1.$$

**Definición 3.8** Sea  $\mathcal{R}$  una relación borrosa de  $E$  en  $E$ . Decimos que  $\mathcal{R}$  es simétrica si para todo  $x, y \in E$

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(y, x).$$

**Ejemplo 19** Sea  $E = \{a, b, c\}$  y  $\mathcal{R}$  la relación borrosa de  $E$  definida por la matriz de membresía

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Entonces

$$\mathcal{R}^T = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Como  $\mathcal{R} = \mathcal{R}^T$ , podemos concluir que  $\mathcal{R}$  es simétrica.

**Definición 3.9** Sea  $\mathcal{R}$  una relación borrosa de  $E$  en  $E$ . Decimos que  $\mathcal{R}$  es transitiva si

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, s) \geq \max_y \{ \min \{ \mu_{\mathcal{R}}(x, y), \mu_{\mathcal{R}}(y, s) \} \} \quad \text{con } x, y, z \in E$$

Intuitivamente esta definición nos dice que la relación directa entre cualquier par de elementos del conjunto en cuestión, es mayor o igual que la relación de algún intermediario. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 20** Sean  $E = \{a, b, c, d\}$  y  $\mathcal{R}$  la relación borrosa de  $E$  en  $E$  definida por la matriz

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0 & 1 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 1 & 1 & 0.1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Realizaremos la comprobación de que  $\mathcal{R}$  es una relación transitiva, para los elementos  $a$  y  $b$ . Para los otros dos elementos la demostración es igual. Demostraremos que

$$\mu_{\mathcal{R}}(a, b) \geq \max_{y \in E} \{ \min \{ \mu_{\mathcal{R}}(a, y), \mu_{\mathcal{R}}(y, b) \} \}.$$

*Calculando*

$$y = a; \quad \min \{ \mathcal{R}(a, a), \mathcal{R}(a, b) \} = \min \{ 0.2, 1 \} = 0.2;$$

$$y = b; \quad \min \{ \mathcal{R}(a, b), \mathcal{R}(b, b) \} = \min \{ 1, 0.6 \} = 0.6;$$

$$y = c; \quad \min \{ \mathcal{R}(a, c), \mathcal{R}(c, b) \} = \min \{ 0.4, 1 \} = 0.4;$$

$$y = d; \quad \min \{ \mathcal{R}(a, d), \mathcal{R}(d, b) \} = \min \{ 0.4, 1 \} = 0.4.$$

*Entonces*

$$\max_{y \in E} \{ \min \{ \mu_{\mathcal{R}}(a, y), \mu_{\mathcal{R}}(y, b) \} \} = \max \{ 0.2, 0.4, 0.6 \} = 0.6.$$

*Además, dado que  $\mu_{\mathcal{R}}(a, b) = 1$ , tenemos entonces que*

$$\mu_{\mathcal{R}}(a, b) = 1 \geq \max_{y \in E} \{ \min \{ \mu_{\mathcal{R}}(a, y), \mu_{\mathcal{R}}(y, b) \} \} = 0.6.$$

$$\therefore \mu_{\mathcal{R}}(a, b) \geq \max_{y \in E} \{ \min \{ \mu_{\mathcal{R}}(a, y), \mu_{\mathcal{R}}(y, b) \} \}.$$

# Capítulo 4

## APLICACIONES

### 4.1 Introducción

Las primeras aplicaciones de la teoría difusa fueron principalmente industriales, tales como el control de procesos en cementeras. Más tarde en 1987, se puso en servicio en Sendai, al Norte del Japón, el primer metro controlado mediante lógica difusa. Los controladores basados en esta lógica, hicieron mucho más confortables los viajes para los pasajeros en metro, gracias a las suaves frenadas y aceleraciones. Todo lo que debe hacer el conductor es apretar un botón.

A partir de 1990 se comienza a implementar en los controles de inyección electrónica de carburante y en los sistemas de control de guiado automático de coches, haciendo los controles complejos más eficientes y fáciles de utilizar.

Las lavadoras "difusas" tienen más de 400 ciclos preprogramados; a pesar de su complejidad tecnológica resultan más fáciles de operar que las lavadoras tradicionales. El usuario solo pone en marcha la lavadora, el resto del proceso queda en manos del control difuso. Dicho proceso se encarga de evaluar automáticamente el material, el volumen, la suciedad de la ropa, elige el ciclo óptimo de lavado, así como la cantidad de agua que ha de emplear.

En acondicionadores de aire, la lógica difusa ahorra energía dado que comienza a enfriar con mayor potencia solo cuando un sensor detecta la presencia

de personas en la habitación.

En USA la NASA está trabajando para implementar un control difuso en las condiciones del espacio, una tarea extremadamente difícil para la lógica tradicional o booleana.

En las actividades domésticas cotidianas se inventó un sistema de ventilación. Utiliza control difuso para conmutar un ventilador según los conocimientos de cantidad de polvo, olores, temperatura, humedad y ambiente.

El baño difuso, por ejemplo, tiene un controlador que mantiene el agua a la temperatura ideal para el usuario, "ni muy caliente, ni muy fría". Si en un principio el agua está templada, añade el agua caliente en menor proporción que si estuviese fría, evitando elevar demasiado la temperatura del agua.

El propósito de este capítulo es el mostrar algunas de las aplicaciones de la teoría de conjuntos borrosos en otras áreas, tales como *programación lineal*, *regresión lineal*, *economía y comunicación interpersonal*. Haciendo notar la diferencia del modelo clásico, con el modelo difuso. El modelo clásico nos servirá de base para desarrollar el modelo difuso.

Para la exposición de este capítulo nos basamos principalmente en los métodos difusos desarrollados dentro del libro de Bo Yuan [9]. Sin embargo, otros autores han trabajado en dichas aplicaciones. Por ejemplo Vilém Novák [16] y Zimmermann [21] desarrollan otro método para la programación lineal difusa; para la regresión lineal difusa encontraremos otro modelo dentro del libro de Toshiro [18] y para la comunicación interpersonal Paul Wang [19] desarrolla otro método.

Empezaremos este capítulo con la programación lineal difusa.

## 4.2 Programación lineal difusa (PLD)

La programación lineal constituye una de las ramas de la optimización más estudiada y desarrollada en los últimos años. Hoy en día es un instrumento utilizado comúnmente en las empresas y administraciones públicas de todo el mundo, además de tener numerosas aplicaciones prácticas en muchas otras



El conjunto de vectores  $X$  que satisfacen las restricciones lo conocemos como el *conjunto de soluciones factibles*. Consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 21** *El problema consiste en:*

$$\min z = x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a. } \begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\geq 1, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6, \end{aligned}$$

$$\text{con } \begin{aligned} 0 &\leq x_2 \leq 2, \\ x_1 &\geq 1. \end{aligned}$$

De acuerdo a la gráfica 4.1 podemos ver que para encontrar el mínimo de la función objetivo, podemos dibujar una familia de líneas paralelas que representen a la ecuación  $x_1 - 2x_2 = p$ , donde  $p$  es un parámetro que decrece, pues nuestro ejemplo consiste en encontrar el mínimo.

De esta manera encontramos el mínimo que es

$$z_{\min} = -2$$

para la pareja ordenada  $(x, y) = (1, 2)$ .

Una desventaja al utilizar 4.1 es al momento de especificar el límite exacto para  $b_i$ .

En muchas situaciones prácticas, las restricciones no necesariamente deben de estar especificadas en términos precisos. Es decir, los números pueden estar dentro de un intervalo con cierta imprecisión (difusividad). En tales situaciones es recomendable utilizar algún tipo de *programación lineal difusa*. Los problemas de programación lineal difusa, que denotaremos por **PLD**, se formulan como sigue

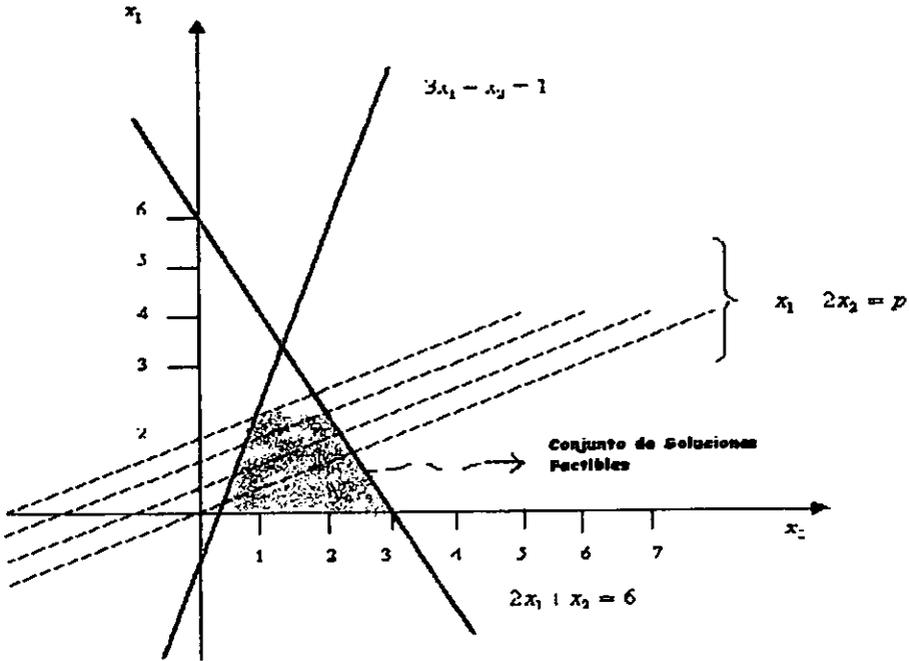


Figura 4.1: Ejemplo de programación lineal clásica.

$$\begin{aligned}
 \max(\min) \quad z &= \sum_{j=1}^n C_j X_j \\
 \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n A_{ij} X_j &\leq B_i, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, m \\
 \text{con } X_j &\geq 0 \quad \text{y } j = 1, 2, 3, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde

1.  $A_{ij}, B_i, C_j$  son números difusos.
2.  $X_j$  son las variables cuyos valores son números difusos.

3. El símbolo  $\leq$  indica el orden dentro de los números difusos.

Las operaciones de suma y multiplicación se realizan de acuerdo a la aritmética difusa que expusimos en el capítulo 2.

Los problemas de PLD, primero se convierten a problemas de PL, y esto nos permite resolverlos por medio de métodos conocidos de PL. De esta manera estaremos dando un resultado final de un problema de PLD con números reales. Para discutir este tipo de problemas de PLD, tomaremos solo dos casos, tal y como lo proponen Bo Yuan y George J. Klir [9].

**Caso I** Problemas de PLD donde solo el lado derecho de las restricciones son números difusos. Además los  $B_i$  toman la forma de números difusos trapezoidales (veáse la figura 4.2).

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq B_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \\ \text{con} \quad X_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Es fácil ver que  $B_i$  tiene la forma

$$B_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leq b_i \\ \frac{b_i + p_i - x}{p_i} & \text{para } b_i < x < b_i + p_i \\ 0 & \text{para } b_i + p_i \leq x \end{cases}$$

con  $x \in \mathbb{R}$ .

Sea  $D_i(x)$  el grado para el cual el vector  $X$  satisface la  $i$ -ésima restricción de nuestro problema. Podemos calcular  $D_i(x)$  de la siguiente manera

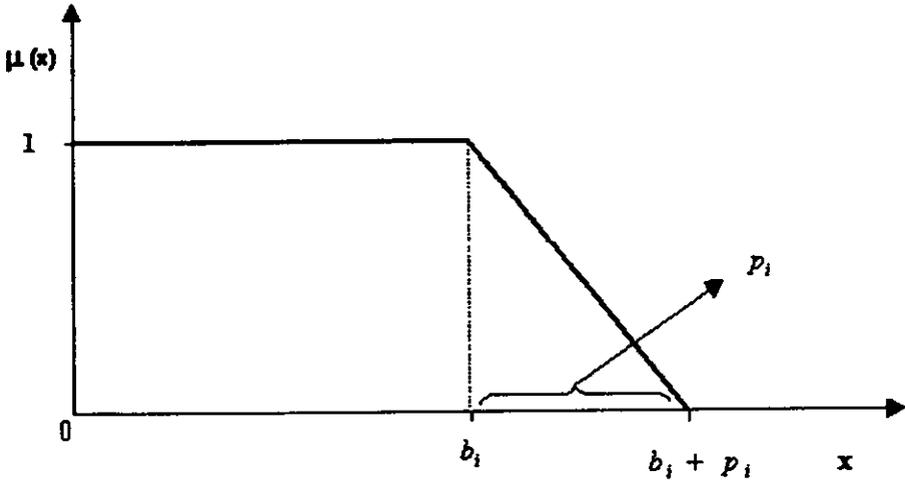


Figura 4.2: Número difuso empleado para el caso I.

$$D_i(x) = B_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right),$$

donde  $D_i(x)$  son conjuntos difusos sobre  $\mathbb{R}^n$ .

La intersección de dichos conjuntos  $\bigcap_{i=1}^m D_i$ , representará para nosotros el *conjunto difuso factible*.

Después, es necesario calcular el *conjunto difuso de valores óptimos*, que serán los valores que se encuentran dentro de los límites superior ( $z_u$ ) e inferior ( $z_l$ ). Dichos límites se calculan resolviendo los siguientes problemas de PL clásica

Para  $z_l$  :

$$\max z = CX$$

$$\text{s.a. } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

Para  $z_u$  :

$$\max z = CX$$

$$\text{s.a. } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i + p_i$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Por otro lado, sea  $G$  el conjunto difuso de valores óptimos, que se define como sigue

$$G(X) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{para } z_u \leq CX \\ \frac{CX - z_l}{z_u - z_l} & \text{para } z_l < CX < z_u \\ 0 & \text{para } CX \leq z_l \end{array} \right\} \text{ subconjunto difuso de } \mathbb{R}^n.$$

Sea  $\lambda \in [0, 1]$  y siguiendo lo expuesto en [9], notemos que el problema de PLD se convierte en el siguiente problema de optimización clásico de PL

$$\max \lambda$$

$$\text{s.a. } \lambda \leq \frac{CX - z_l}{z_u - z_l}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i + p_i(1 - \lambda) \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\text{con } \lambda, x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

en donde  $\lambda$  representa al mismo tiempo un grado de membresía máximo dentro de nuestro conjunto difuso de valores óptimos ( $G(X)$ ) y un valor que varía entre  $z_l$  y  $z_u$ .

Es decir,

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \lambda \\
 & \text{s.a.} \quad \lambda(z_u - z_l) - CX \leq -z_l \\
 & \quad \lambda p_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + p_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \\
 & \text{con} \quad \lambda, x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Veamos ahora el siguiente ejemplo, en donde mostramos la aplicación de dicho método.

**Ejemplo 22** *Cierta compañía produce dos tipos de productos  $P_1$  y  $P_2$ . Del producto  $P_1$  se obtiene una ganancia de \$0.40 por unidad y del producto  $P_2$  \$0.30. Para elaborar un producto del tipo  $P_1$  se necesita a lo menos el doble de tiempo que se requiere para elaborar un producto del tipo  $P_2$ . En total se trabajan 500 horas hombre por día, pero con trabajo extra puede ser extendido a 600 horas. El abasto del material es a lo menos suficiente para elaborar 400 unidades de ambos productos  $P_1$  y  $P_2$  por día, pero puede ser posible que se elaboren 500 unidades, de acuerdo con la experiencia previa de los trabajadores. El problema consiste en saber cuantas unidades de los productos  $P_1$  y  $P_2$  podrían elaborarse para maximizar la ganancia.*

Solución:

Sean las variables

$x_1$  = "Número de unidades producidas del producto  $P_1$  por día".

$x_2$  = "Número de unidades producidas del producto  $P_2$  por día".

Entonces

$$\begin{aligned}
 \max \quad z &= .4x_1 + .3x_2 && \text{(Ganancia)} \\
 \text{s.a.} \quad x_1 + x_2 &\leq B_1, && \text{(Material)} \\
 2x_1 + x_2 &\leq B_2, && \text{(Trabajo de horas hombre)} \\
 x_1, x_2 &\geq 0. && \text{(Restricciones de factibilidad)}
 \end{aligned}$$

Con

$$B_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leq b_i, \\ \frac{b_i + p_i - x}{p_i} & \text{para } b_i < x < b_i + p_i, \\ 0 & \text{para } b_i + p_i \leq x. \end{cases}$$

Notemos que  $b_1 = 400, p_1 = 100, b_2 = 500$  y  $p_2 = 100$ , entonces  $B_1$  y  $B_2$  toman la siguiente forma analítica.

$$B_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leq 400, \\ \frac{500 - x}{100} & \text{para } 400 < x < 500, \\ 0 & \text{para } 500 \leq x, \end{cases}$$

$$B_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leq 500, \\ \frac{600 - x}{100} & \text{para } 500 < x < 600, \\ 0 & \text{para } 600 \leq x. \end{cases}$$

En la figura 4.2 representamos gráficamente a los números difusos  $B_1$  y  $B_2$ .

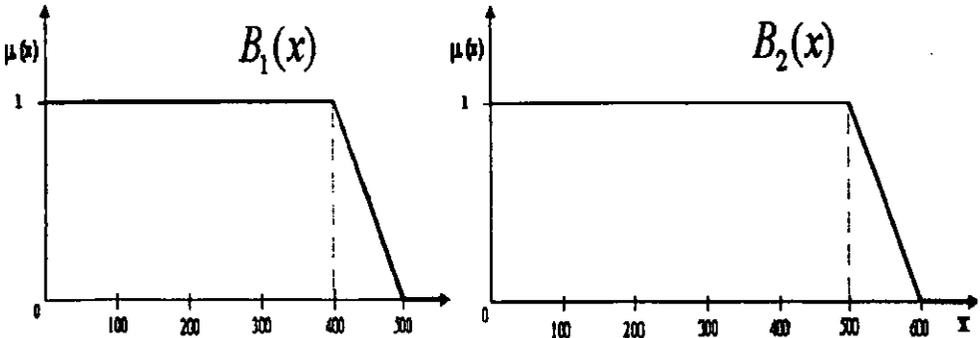


Figura 4.3: Números difusos  $B_1$  y  $B_2$ .

Ahora bien, primero necesitamos calcular los límites superior ( $z_u$ ) e inferior ( $z_l$ ) de la función objetivo  $z$ . Éstos se obtienen resolviendo los dos siguientes problemas clásicos de PL

$$\text{Para } z_l, \quad (P_1) \quad \max \quad z = .4x_1 + .3x_2,$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 400 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 500 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Para } z_u, \quad (P_2) \quad \max \quad z = .4x_1 + .3x_2,$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 500 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 600 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

de donde obtenemos que  $z_l = 130$  y  $z_u = 160$ . De esta manera el problema de PLD se convierte en

$$\max \quad \lambda,$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 30\lambda - (.4x_1 + .3x_2) \leq -130 \\ & 100\lambda + x_1 + x_2 \leq 500 \\ & 100\lambda + 2x_1 + x_2 \leq 600 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Resolviendo este problema de optimización, encontramos que el máximo se alcanza cuando  $\lambda_{\max} = 0.5$ , es decir cuando  $x_1 = 100$  y  $x_2 = 350$ .

Por lo tanto la ganancia máxima es

$$z_{\max} = 0.4(100) + 0.3(350) = 145.$$

**Caso II** Problemas de PLD en donde los números del lado derecho  $B_i$  y los coeficientes  $A_{ij}$  de la matrix de restricciones son números difusos triangulares<sup>1</sup>. En la figura 4.4 representamos a un número difuso triangular.

<sup>1</sup>Un número difuso triangular es cualquier número difuso  $A$  representado por tres números reales,  $s, l, r$ , en donde  $l$  tiene la membresía total.

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n A_{ij} X_j &\leq B_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \\ \text{con} \quad X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Dado que los coeficientes  $B_i$  y  $A_{ij}$  son números difusos triangulares, es decir, toman la forma  $A = (s, l, r)$ , entonces el PLD se puede formular como sigue

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n (s_{ij}, l_{ij}, r_{ij}) x_{ij} &\leq (t_i, u_i, v_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \\ \text{con} \quad X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

en donde  $A_{ij} = (s_{ij}, l_{ij}, r_{ij})$  y  $B_i = (t_i, u_i, v_i)$  son números difusos triangulares.

Es importante señalar que la suma y la multiplicación son operaciones sobre números difusos y el orden parcial  $\leq$  está definido por:

$$A \leq B \Leftrightarrow \max(A, B) = B.$$

Esto es fácil de probar para dos números difusos triangulares cualesquiera. Sean  $A = (s_1, l_1, r_1)$  y  $B = (s_2, l_2, r_2)$ , entonces

$$A \leq B \text{ si y sólo si } s_1 \leq s_2, \quad s_1 - l_1 \leq s_2 - l_2 \quad \text{y} \quad s_1 + r_1 \leq s_2 + r_2.$$

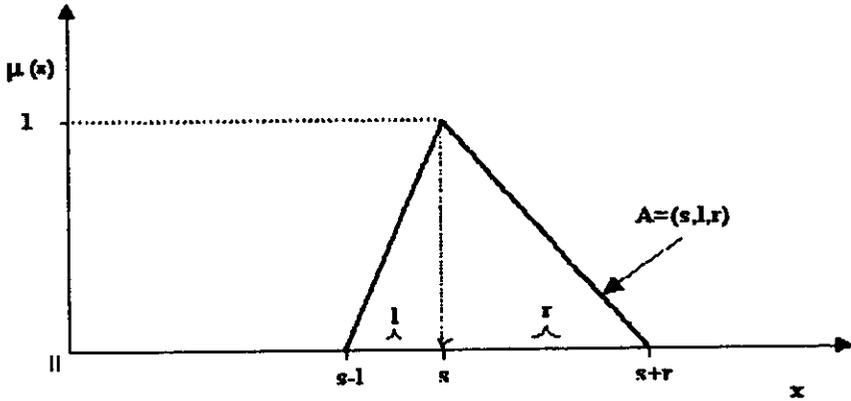


Figura 4.4: Números difusos empleados para el caso II.

Además

$$(s_1, l_1, r_1) + (s_2, l_2, r_2) = (s_1 + s_2, l_1 + l_2, r_1 + r_2),$$

y para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ ,

$$x(s_1, l_1, r_1) = (xs_1, xl_1, xr_1)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \max \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\
 \text{s.a.} \quad &\sum_{j=1}^n s_{ij} x_j \leq t_i, \\
 &\sum_{j=1}^n (s_{ij} - l_{ij}) x_j \leq t_i - u_i, \\
 &\sum_{j=1}^n (s_{ij} + r_{ij}) x_j \leq t_i - v_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \\
 \text{con} \quad &x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Notemos que todos los números involucrados son números reales. Lo que nos lleva entonces a resolver un problema de PL clásica. Consideremos el siguiente problema de PLD para ejemplificar este método.

**Ejemplo 23** *El problema consiste en maximizar la siguiente función objetivo  $z$ , bajo ciertas restricciones. El problema está formulado como sigue*

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + 4x_2, \\ \text{s.a.} \quad & (4, 2, 1)x_1 + (5, 3, 1)x_2 \leq (24, 5, 8), \\ & (4, 1, 2)x_1 + (1, .5, 1)x_2 \leq (12, 6, 3), \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Solución:

Utilizando (4.3) el problema se reduce a optimizar lo que sigue

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + 4x_2, \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + 5x_2 \leq 24, \\ & 4x_1 + x_2 \leq 12, \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 19, \\ & 3x_1 + 0.5x_2 \leq 6, \\ & 5x_1 + 6x_2 \leq 32, \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos que  $x_1 = 1.5, x_2 = 3$  y por lo tanto

$$z_{\max} = 19.5.$$

## 4.3 Regresión difusa

El análisis de regresión es un área dentro de la estadística que nos ayuda a determinar y evaluar la relación entre una variable determinada (*variable*

*dependiente o explicada*) y una o más variables adicionales (*variables independientes o explicativas*). Para ello es necesario estimar los parámetros de dicho modelo el cual toma la siguiente forma lineal

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n, \quad (4.4)$$

donde  $y$  es la variable dependiente,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables independientes, y  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  son los parámetros. Los problemas de análisis de regresión que se formulan bajo estos términos se les conoce como *regresiones lineales*.

Consideremos, como ejemplo, una regresión lineal con solo una variable, que toma la forma siguiente

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x,$$

Sea  $A = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m)\}$  un conjunto de  $m$  observaciones. Nuestro objetivo es encontrar  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ , para los cuales el error total de los puntos estimados con los puntos observados sea mínimo. Basándonos en el método de mínimos cuadrados, el error total se expresa como sigue

$$\text{Error Total} = \sum_{i=1}^m [b_i - (\gamma_0 + \gamma_1 a_i)]^2.$$

Derivando con respecto a  $\gamma_0$  y a  $\gamma_1$ , igualando a cero y resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que los valores óptimos para  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  están dados por [4]:

$$\gamma_1 = \frac{m \sum_{i=1}^m a_i b_i - \left( \sum_{i=1}^m a_i \right) \left( \sum_{i=1}^m b_i \right)}{m \sum_{i=1}^m a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^m a_i \right)^2},$$

$$\gamma_0 = \frac{m \sum_{i=1}^m b_i - \gamma_1 \sum_{i=1}^m a_i}{m}.$$

O bien

$$\gamma_1 = \frac{m \sum_{i=1}^m a_i b_i - \left( \sum_{i=1}^m a_i \right) \left( \sum_{i=1}^m b_i \right)}{m \sum_{i=1}^m a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^m a_i \right)^2},$$

y

$$\gamma_0 = \bar{b} - \gamma_1 \bar{a}.$$

Una de las ventajas, que nos motiva a hacer análisis difuso en lugar de análisis lineal es que aunque la relación difusa sea menos precisa, ésta resulta estar más apegada a la realidad y además que en algunas aplicaciones la naturaleza de los datos es tal que éstos están dados en términos difusos.

Desarrollaremos (basando nuestra exposición en [9]) dos tipos de análisis de regresión difusa:

- i) Regresión lineal que involucra datos ordinarios y se estiman parámetros difusos.
- ii) Regresión lineal que involucra datos difusos y se estiman parámetros ordinarios.

La explicación del modelo para el caso de regresión difusa en donde tanto los parámetros como los datos son difusos, no se abarcará dentro de esta investigación. No olvidemos que nuestro objetivo es tan solo dar a conocer la teoría básica con algunas aplicaciones de subconjuntos borrosos.

### 4.3.1 Regresión lineal con parámetros difusos

En este tipo de regresión difusa, la dependencia de una variable de salida sobre las variables de entrada se expresa como sigue

$$Y = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n, \quad (4.5)$$

donde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  son números difusos y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son valores reales de las variables de entrada. Para cada  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de valores de las variables de entrada, el valor de la variable de salida  $Y$  definida por (4.5) es también un número difuso.

Sea el conjunto de datos  $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$ . Al igual que en la regresión lineal el problema consiste en encontrar los parámetros difusos  $C_1, C_2, \dots, C_n$  para los cuales (4.5) exprese el mejor ajuste para los datos de entrada, acorde a algunos criterios de bondad de ajuste.

Asumiremos que los parámetros en (4.5) son números difusos triangulares simétricos, definidos como sigue

$$C_i(c) = \begin{cases} 1 - \frac{|c - c_i|}{s_i} & \text{si } c_i - s_i \leq c \leq c_i + s_i \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}, \quad (4.6)$$

donde  $c_i$  es el punto para el cual  $C_i(c_i) = 1$  y  $s_i > 0$  es el incremento de  $C_i$  (la mitad de la amplitud del soporte de  $C_i$ ), como se puede ver en la figura 4.5.

Por otro lado dado que  $C_i$  se encuentra alrededor de  $c_i$  denotado como  $C_i = (c_i, s_i)$  para  $i=1,2,3,\dots,n$ , entonces resulta fácil probar que la variable  $Y$  en (4.5) es también un número difuso triangular dado por

$$Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|y - \mathbf{x}^T \mathbf{c}|}{s^T |\mathbf{x}|} & \text{si } \mathbf{x} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} = 0, y \neq 0 \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} = 0, y = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

donde

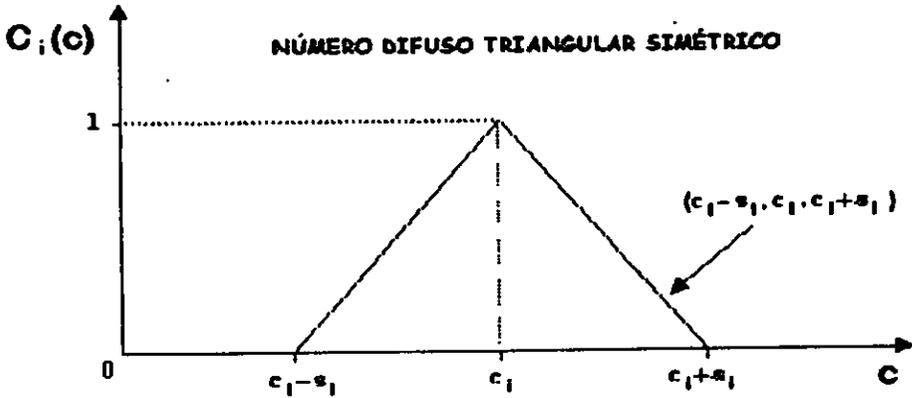


Figura 4.5: Tipo de números empleados para la regresión difusa.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{x}| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix},$$

y  $T$  denota la transpuesta.

Regresando a nuestro problema original que consiste en encontrar los parámetros difusos  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , éste puede ser resuelto encontrando los vectores  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{s}$  para los cuales  $Y(y)$  dada como en (4.7), se ajusta de mejor forma a las observaciones. Para lograr el mejor ajuste se consideran los dos siguientes criterios.

- i) Consideremos que  $Y_j$  representa a un número difuso definido como en (4.7) y que  $\mathbf{x} = \mathbf{a}_j$ , entonces, para cada observación  $(\mathbf{a}_j, b_j)$  y con  $h \in [0, 1]$  (confianza para la variable  $Y_j$ ) el valor de  $Y_j(b_j) \geq h$ .
- ii) Especificando el valor de  $h \in [0, 1]$  y puesto que la imprecisión de cada parámetro difuso  $C_i$  dado por (4.6) puede ser expresado en términos de su incremento  $s_i$ , es necesario minimizar la ambigüedad o la imprecisión de los parámetros difusos  $C_i$ .

Con ésto (4.5) se puede formular de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n s_i, \\ \text{s.a.} \quad & (1-h)s^T |a_j| - |b_j - a_j^T c| \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \\ & s_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \tag{4.8}$$

que no es más que un problema clásico de programación lineal. Notemos que (4.8) se obtuvo con un despeje de (4.7) solo que se especifica el valor de  $h \in [0, 1]$ . Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 24** Sean  $(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3)$  las observaciones. Asumiremos que la regresión lineal difusa para estos datos es de la forma

$$Y = Cx,$$

donde  $C = (c, s)$  es un parámetro difuso triangular simétrico, definido como en la gráfica 4.5. Entonces el problema de programación lineal toma la forma

$$\begin{aligned} \min \quad & s \\ \text{s.a.} \quad & (1-h)s - |1-c| \geq 0, \\ & 2(1-h)s - |2-2c| \geq 0, \\ & 3(1-h)s - |2-3c| \geq 0, \\ & 4(1-h)s - |3-4c| \geq 0, \\ & s \geq 0, \\ & h \in [0, 1] \text{ número fijo.} \end{aligned}$$

Que se reduce a

$$\min s$$

$$\text{s.a. } s \geq \frac{1}{(1-h)} \max \left( |1-c|, \left| \frac{2}{3} - c \right|, \left| \frac{3}{4} - c \right| \right)$$

$$h \in [0, 1] \text{ número fijo}$$

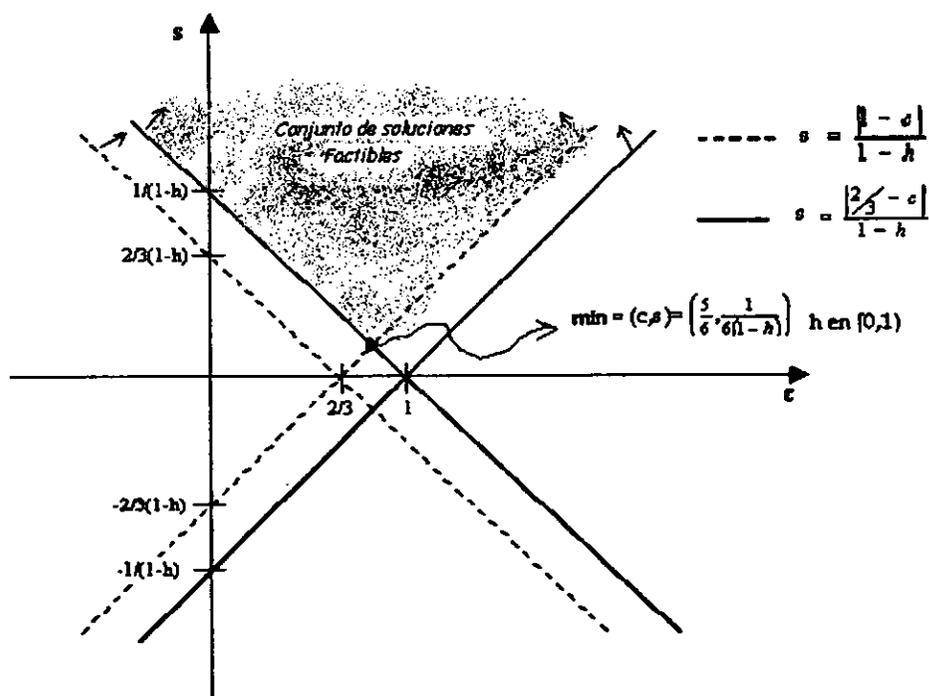


Figura 4.6: Gráfica para el ejemplo 24.

Resolviendo el problema con ayuda de la gráfica 4.6 y realizando los cálculos necesarios, encontramos que los valores óptimos son

$$c^* = \frac{5}{6} \quad y \quad s^* = \frac{1}{6(1-h)}$$

Es decir,

$$C = \left( \frac{5}{6}, \frac{1}{6(1-h)} \right)$$

Por ejemplo si consideramos a  $h = 2/3$  entonces  $C = (5/6, 1/2)$ . Los conjuntos difusos  $Y_j = Ca_j$  para los valores  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$  y  $a_4 = 4$  se muestran en la figura 4.7. Observemos que en la figura 4.7 se muestra también el ajuste de la recta para los datos dados, asimismo mostramos la difusividad para cada observación.

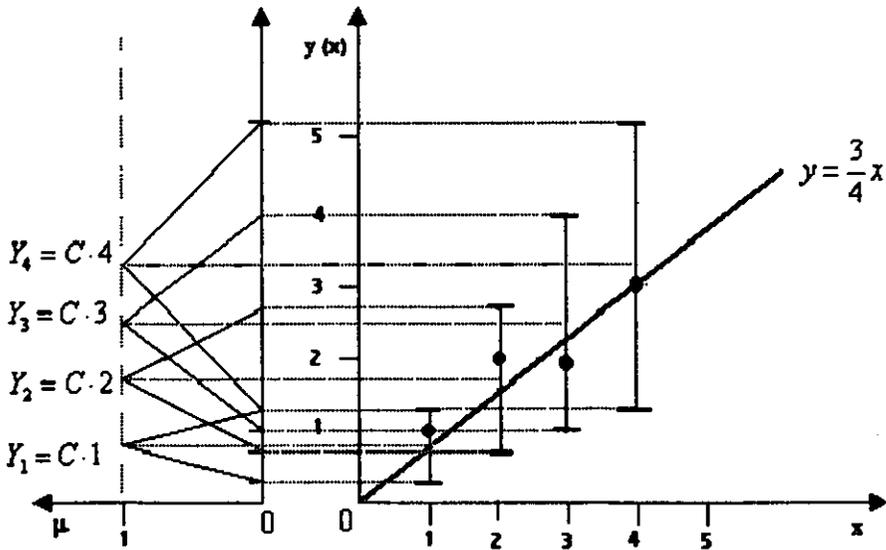


Figura 4.7: Gráfica para el ejemplo 24.

### 4.3. Regresión difusa

#### 4.3.2 Regresión lineal con datos difusos

En este tipo de regresión difusa, la dependencia de una variable de salida sobre las variables de entrada se expresa como sigue

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n, \quad (4.9)$$

donde tanto los valores de entrada como los de salida son números difusos (triangulares y simétricos), y  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son valores reales.

Sea  $X_i = (x_i, s_i)$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , entonces,

$$Y(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{|y - \mathbf{a}^T \mathbf{x}|}{s^T |\mathbf{x}|} & \text{si } \mathbf{a} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{a} = 0, y \neq 0 \\ 1 & \text{si } \mathbf{a} = 0, y = 0 \end{array} \right\} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (4.10)$$

donde

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Los datos están dados en términos de las parejas  $(\mathbf{X}^{(j)}, Y^{(j)})$ , donde  $\mathbf{X}^{(j)}$  es un vector de  $n$ -entradas de números difusos triangulares simétricos, y  $Y^{(j)}$  es un número difuso triangular para cada  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ .

El problema de regresión consiste en encontrar los parámetros  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tales que nos permitan ajustar de la mejor manera posible la función lineal (4.9) a los datos difusos. Utilizaremos los siguientes criterios que sugiere Bo Yuan y Klir [9]:

- i) Se debe minimizar la diferencia total entre las áreas del número actual difuso  $Y^{(j)}$  y las áreas de los números difusos  $Y_j$  obtenidas para  $\mathbf{X}^{(j)}$ , por medio de (4.9), donde  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ .

- ii) Los números difusos  $Y^{(j)}$  y  $Y_j$  deben de ser compatibles al menos para algún grado  $h \in [0, 1]$ .

Dado que la la compatibilidad (com) se define como sigue

$$\text{com}(Y^{(j)}, Y_j) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \min [Y^{(j)}(y), Y_j(y)],$$

nos es posible escribir el problema de regresión difusa como sigue

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \left| \int_{\mathbb{R}} Y^{(j)}(y) dy - \int_{\mathbb{R}} Y_j(y) dy \right| \\ \text{s.a.} \quad & \min_{j=1,2,3,\dots,m} \text{com}(Y^{(j)}(y), Y_j(y)) \geq h. \end{aligned}$$

Sean  $X^{(j)} = (x_i^{(j)}, s_i^{(j)})$  para toda  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  y  $Y^{(j)} = (y^{(j)}, s^{(j)})$  para toda  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ . Entonces el problema se convierte en

$$\begin{aligned} \min \quad z = \quad & \sum_{j=1}^m \left| s^{(j)} - \sum_{i=1}^n |a_i| s_i^{(j)} \right|, \\ \text{s.a.} \quad & - \sum_{i=1}^n |a_i| s_i^{(j)} + \sum_{i=1}^n a_i x_i^{(j)} \leq y^{(j)} + s^{(j)}, \\ & \sum_{i=1}^n |a_i| s_i^{(j)} + \sum_{i=1}^n a_i x_i^{(j)} \geq y^{(j)} - s^{(j)}, \\ & \text{con } a_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ y } i = 1, 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Consideraremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 25** Consideremos la forma lineal

$$Y = aX,$$

y los siguientes datos que se encuentran dados en términos de parejas de números difusos de entrada/salida

$$\left( (5/6, 1/2), (1, 0) \right),$$

$$\left( (5/3, 1/2), (2, 1/2) \right),$$

$$\left( (5/2, 1/2), (3, 1/2) \right),$$

$$\left( (10/3, 1/2), (4, 0) \right).$$

Utilizando (4.11), obtenemos

$$\min z = |a| + |1 - |a||$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & -\frac{|a|}{2} + \frac{5a}{6} \leq 1, \\ & \frac{|a|}{2} + \frac{5a}{6} \geq 1, \\ & -\frac{|a|}{2} + \frac{5a}{3} \leq 2.5, \\ & \frac{|a|}{2} + \frac{5a}{3} \geq 1.5, \\ & -\frac{|a|}{2} + \frac{5a}{2} \leq 3.5, \\ & \frac{|a|}{2} + \frac{5a}{2} \geq 2.5, \\ & -\frac{|a|}{2} + \frac{10a}{3} \leq 4, \\ & \frac{|a|}{2} + \frac{10a}{3} \geq 4, \end{aligned}$$

$$a \in \mathbb{R}.$$

Observemos que el problema tiene solución solo en  $\mathbb{R}^+$ . Entonces el problema se simplifica a

$$\min z = a + |1 - a|,$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } a &\in [6/8, 3], \\ a &\in [9/13, 15/7], \\ a &\in [5, 6, 7/4], \\ a &\in [24/23, 24/17]. \end{aligned}$$

Resolviendo el problema, encontramos que el valor óptimo para el parámetro  $a$  es  $a^* = 24/23$ . Por lo tanto la recta mejor ajustada para este caso es  $Y = 24X/23$ . Veamos la figura 4.8 en donde mostramos tanto la recta difusa ajustada que es  $Y = 24X/23$  como la recta para los datos clásicos  $y = 6x/5$ . Notemos que  $y$  queda dentro del intervalo difuso para  $Y$ .

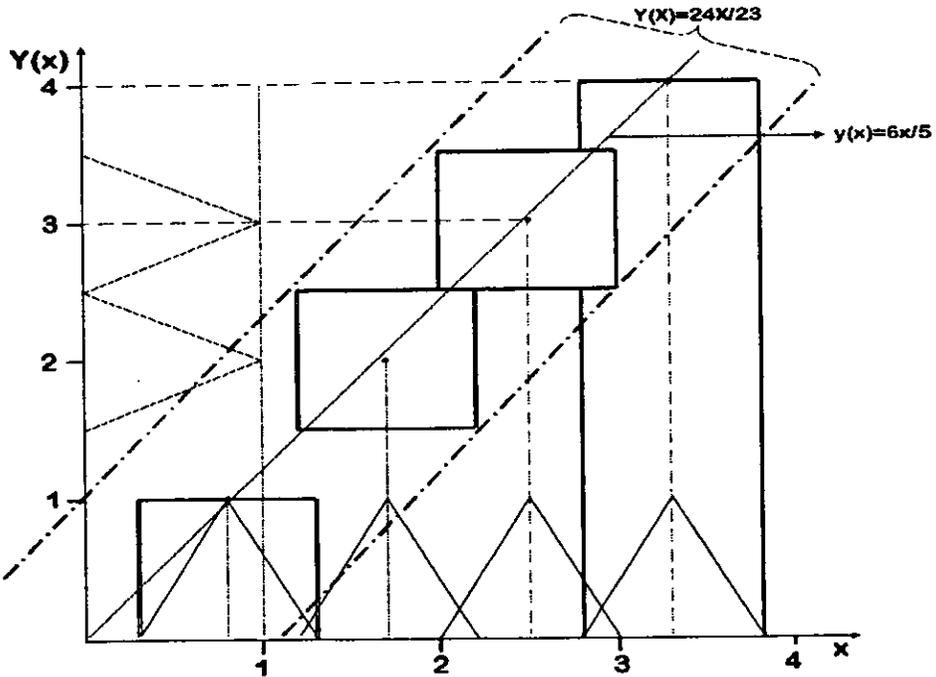


Figura 4.8: Gráfica para el ejemplo 25.

## 4.4 Comunicación interpersonal

El proceso de comunicación entre las personas constituye un gran conjunto de señales de comunicación que se envían a un mismo tiempo. Ejemplos de estas señales son las palabras al hablar, el tono de voz, la postura corporal, las expresiones faciales, el tipo de ropa, etc. A menudo dos o más de estas señales contienen mensajes contradictorios y es entonces difícil determinar la intención precisa y el significado de una señal. Estas imprecisiones pueden deberse también a distorsiones en el medio ambiente, al receptor, o bien al emisor. El receptor del mensaje debe saber responder apropiadamente a este conjunto de señales vagas o difusas.

En esta sección describiremos, brevemente y de manera bastante informal, una forma de modelar este problema usando la teoría de subconjuntos borrosos.

Denotemos por  $X$  el conjunto universal de todas las posibles señales  $x$  que una persona puede enviar a otra. Debido a ciertos factores de distorsión, no es posible obtener una señal  $x$  clara y única. Lo que en realidad se obtiene es sólo un subconjunto borroso  $M$  de  $X$ , en donde  $M(x)$  denota el grado de certidumbre de que la señal  $x$  fue enviada. Definimos la *fuerza* de la señal, como el valor máximo de membresía que una señal  $x \in X$  alcanza en el subconjunto borroso  $M$ . Si el conjunto  $M$  no tiene un máximo único, entonces el mensaje se dice que es *ambiguo*. Si el soporte de  $M$  es un conjunto grande, entonces se dice que  $M$  es *general*. La *claridad* de un mensaje puede entonces ser medida en términos de la distancia entre el grado de membresía máxima en  $M$  y los otros grados de membresía de cualquier otra señal  $x \in M$ . Cuando un mensaje es fuerte, claro y directo, la señal que tiene grado de membresía máximo en  $M$  es entonces escogida como la señal de comunicación que se envió. Los problemas surgen cuando el mensaje es débil, ambiguo y no claro.

En algunos casos resulta natural suponer que el receptor del mensaje tiene cierta información en forma de probabilidades de las señales o mensajes que espera. Supongamos que los mensajes son

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in X,$$

con respectivas probabilidades

$$p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n).$$

De esta forma cada mensaje  $x \in X$  tiene un grado de membresía  $M(x)$  como elemento del subconjunto borroso  $M$ , y también una probabilidad  $p(x)$  de ocurrencia.

Si se recibe un mensaje con probabilidad alta, se tiende a pensar que no hay ruido en el canal de comunicación y que la señal recibida fue la enviada. Además si la señal recibida  $x$  es clara, es decir  $M(x)$  es comparativamente mucho mayor que la membresía de cualquier otra señal, entonces es natural suponer que la señal recibida fue la enviada.

Consideremos ahora que el receptor del mensaje tiene información en términos de posibilidades para cada elemento del conjunto de posibles mensajes. Esto es, para cada  $x \in X$  tenemos el número  $r(x)$  que denota la posibilidad, expectativa, o creencia del receptor, de que la señal  $x$  es enviada. Se define la **posibilidad total** del mensaje difuso  $M$  como sigue

$$r(M) = \max_{x \in X} [\min\{M(x), r(x)\}]. \quad (4.12)$$

Si el mensaje recibido es incompatible con la distribución de posibilidades, el receptor solicita una repetición del mensaje. Y antes de recibir la reiteración del mensaje, el receptor modifica la distribución de posibilidades o expectativas  $r$ . Este procedimiento se repite de manera sucesiva. Se prueba entonces la consistencia de  $M$  contra la distribución de expectativas y además se prueba el mensaje respecto a la claridad y fuerza. Si ambas pruebas resultan consistentes, la señal en  $M$  con valor máximo puede asumirse sin ambigüedad que es la señal enviada. Si hay incompatibilidad en las pruebas, el receptor modifica sus expectativas y pide nueva información o un nuevo mensaje, hasta que surja un mensaje claro y compatible con sus expectativas.

Adicionalmente podemos considerar que el receptor del mensaje introduce cierta distorsión debido a las inconsistencias entre sus expectativas y el mensaje recibido. Definimos entonces la consistencia entre sus expectativas y el mensaje recibido como

$$s(M, r) = \max_{x \in X} [\min\{M(x), r(x)\}]. \quad (4.13)$$

Denotamos por  $M'$  el mensaje distorsionado  $M$  que el receptor oye. Entre menos consistente sea  $M$  con respecto a sus expectativas, menos parecido será  $M'$  con  $M$ . El receptor modifica entonces sus expectativas  $r_0$  a partir del mensaje distorsionado  $M'$ , creando una nueva distribución de expectativas  $r_1$  de acuerdo a la fórmula

$$r_1(x) = \min\{r_0^{1-s}(x), M'(x)\}. \quad (4.14)$$

Después de este procedimiento repetido, y una vez que el receptor concluye, con una cierta confianza, que un mensaje particular fue el enviado, se escoge entonces una respuesta apropiada.

Supongamos que  $Y$  denota el conjunto de posibles respuestas que el receptor puede emitir. Y sea  $R \subset Y \times X$  una relación binaria difusa en donde  $R(y, x)$  denota el grado de conveniencia de emitir la respuesta  $y$  cuando se ha recibido el mensaje  $x$ . Podemos entonces definir un conjunto difuso  $A \in Y$  por medio de la siguiente relación

$$A(y) = \max_{x \in X} [\min\{R(y, x), M(x)\}]. \quad (4.15)$$

El grado de membresía de cada posible respuesta  $y$  en el conjunto difuso  $A$ , corresponde a lo apropiado que es responder con  $y$  al mensaje  $M$ . Se pueden plantear casos más interesantes cuando los elementos  $y$  de  $Y$  no son respuestas sino que indican características o atributos que un mensaje adecuado debe poseer.

En el siguiente ejemplo mostramos como se utiliza éste modelo de comunicación interpersonal, estudiado como ya mencionamos del libro de Bo Yuan y J. Klir [9].

**Ejemplo 26** *Supongamos que un chico propone matrimonio a su novia y se encuentra ansioso por conocer la respuesta. Para ello asumiremos que la*

chica escogerá su respuesta dentro del conjunto  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ , donde las respuestas  $x_1, x_2, \dots, x_6$  tienen el siguiente significado

$x_1 = \text{sí}$ ,

$x_2 = \text{no}$ ,

$x_3 = \text{pide tiempo para pensarlo}$ ,

$x_4 = \text{pide tiempo para pedir permiso a sus padres}$ ,

$x_5 = \text{se burla y}$

$x_6 = \text{llora de alegría}$ .

Asumiremos también que el chico espera que la respuesta de su novia, tenga la distribución de posibilidad siguiente

$$r_0 = \{0.9, 0.1, 0.7, 0.3, 0.1, 0.6\}. \quad \text{espectativas del chico}$$

En esta distribución podemos observar que el chico espera una respuesta afirmativa por parte de su novia. Supongamos que el mensaje enviado por parte de la chica es

$$M_1 = 0.1x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 + 0.1x_5. \quad \text{respuesta de la novia}$$

Aunque el mensaje  $M_1$  sea claro y conciso, observemos que de acuerdo con las expectativas del chico, carece de consistencia. Calcularemos su consistencia, utilizando 4.13

$$s(M_1, r_0) = \max_{x \in X} [0.1, 0.1, 0.4, 0.4] = 0.4.$$

Dado que el mensaje recibido es lo contrario a las expectativas del chico, asumiremos que al recibir el mensaje  $M_1$  se presenta algo de distorsión y que el mensaje que escucha el chico es

$$M'_1 = 0.4x_1 + 0.9x_2 + 0.7x_3 + 0.4x_5$$

modificando su expectativa de tal forma que

$$r_1(x) = \min [r_0^{0.6}, M'(x)] \quad \text{utilizando 4.14}$$

es decir,

$$r_1(x) = 0.4x_1 + 0.25x_2 + 0.7x_3 + 0.25x_5.$$

Ahora bien, supongamos que el chico descarta la posibilidad de recibir un sí. Entonces sus expectativas se reducen a solo dos variables  $x_2$  y  $x_5$ , es decir,

$$r_1 = \{0.25, 0.25\}.$$

El chico vuelve a preguntar a su novia si quiere ser su esposa, recibiendo lo siguiente

$$M_2 = 0.9x_2 + 0.4x_5.$$

Notemos que este mensaje es más claro, más preciso y menos general, que el primer mensaje recibido. Además es consistente con las expectativas de chico, entonces

$$s(M_2, r_1) = \max_{x \in X} [0.25, 0.25] = 0.25.$$

Por distorsión el chico escucha

$$M'_2 = 0.97x_2 + 0.8x_5.$$

Sea  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_7\}$  el conjunto de sentimientos que se generan, dependiendo de la respuesta de la novia hacia el chico definido como sigue

$y_1 =$  felicidad,  
 $y_2 =$  tristeza,

$y_3 = sorpresa,$   
 $y_4 = coraje,$   
 $y_5 = paciencia,$   
 $y_6 = impaciencia y$   
 $y_7 = afecto.$

Sea además  $R \subset Y \times X$ , una relación borrosa que representa el grado para el cual el chico supone reaccionar, dependiendo de la respuesta de su novia. Esta relación esta dada por la matriz siguiente

$$R = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.9 & 0.1 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.9 & 0.2 & 0.9 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.6 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 & 0.3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Podemos ahora saber como se sentirá el chico al recibir el mensaje  $M'_2$ . Utilizando 4.15 y realizando los calculos necesarios obtenemos que

$$A = R \circ M'_2 = 0.9y_2 + 0.9y_3 + 0.7y_4 + 0.4y_6.$$

Veamos que el mensaje  $M'_2$ , generará dolor y sorpresa al chico y con un grado menor sentirá coraje y algo de impaciencia.

En conclusión este modelo de comunicación interpersonal, nos permite plantear problemas en los que las posibles respuestas a nuestro cuestionamiento vayan más allá de responder un sí o un no. Es decir, nos permite considerar a nuestro conjunto de respuestas o soluciones como un conjunto de características o atributos del mensaje enviado o recibido.

# Conclusiones

Con la teoría de conjuntos borrosos, ha surgido una nueva forma de considerar el mundo en el que vivimos. Dentro de las teorías tradicionales hacemos que los modelos que realizamos de las representaciones del mundo real encajen dentro de modelos matemáticos muy precisos. La teoría de **subconjuntos borrosos** nos permite un acercamiento entre la precisión de las matemáticas clásicas y la imprecisión del mundo real.

La teoría de **subconjuntos borrosos** es fácil de entender y resulta de gran ayuda para bastantes aplicaciones dentro del mundo real.

La teoría desarrollada dentro de este trabajo de tesis incluye solamente los conceptos y operaciones básicas sobre subconjuntos borrosos, con algunas aplicaciones. Hemos dejado muchos aspectos de esta teoría sin profundizar. Otros temas se encuentran aún en desarrollo y/o investigación. Esperamos que el presente trabajo de tesis deje motivado al lector a profundizar más en el tema.

El desarrollo e investigación del tema aquí expuesto, fue un trabajo arduo e intenso, debido a la falta de difusión del tema dentro de la Facultad de Ciencias y por tanto, la falta de asignaturas que traten la teoría básica. Esperamos que este material sea de utilidad para investigaciones futuras.

Deseo agradecer sinceramente al Dr. Luis Antonio Rincón Solís su apoyo, sugerencia y dedicación para el desarrollo de la presente investigación.

# Bibliografía

- [1] Arias Martínez, Carlos Humberto (1988); *“Conjuntos Borrosos, Teoría Básica y Aplicación al Análisis de Decisiones”*, tesis maestría en IDO, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- [2] Bojadzeiv, George and Maria (1997); *“Fuzzy Logic for Business, Finance and Management”*, Ed. World Scientific, Vol. 12.
- [3] Cervantes Martínez, Oscar (2000); *“Lógica Difusa Aplicada en el Cops, tesis licenciatura, FES Cuautitlán, UNAM.*
- [4] Devore, Jay L. (1998); *“Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias, Ed. International Thomson Editores, México.*
- [5] Diller, Antoni (1994); *“ $\LaTeX$  Line by Line: Tips and Techniques for Document Processing”*, Ed. John Wiley & Sons, Gran Bretaña.
- [6] Deprit, Andréé/ Elipe, Antonio/ Ferres, Sebastián (1990); *“Edición de Documentos en  $\LaTeX$ ”*, Ed. INO Reproducciones S.A. Universidad de Zaragoza.
- [7] Elizalde Barrera, Martha Yasmín/Luna Rivera, José Moises (1997); *“Selección de Instrumentos de Inversión Utilizando Lógica Difusa”*, tesis licenciatura en actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- [8] Grätzer, George (2000); *“Math into  $\LaTeX$ ”*, Ed. Birkhäuser Springer, tercera edición, Boston.
- [9] J. Klir, George/Yuan Bo (1995); *“Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications”*, Ed. Prentice Hall, USA.

- [10] J. Klir, George/A. Folger, Tina (1988); "Fuzzy Sets Uncertainty and Information", Ed. Prentice Hall, USA.
- [11] Kaufmann, Arnold (1975); "Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets", Ed. Academic Press, USA.
- [12] Kaufmann, Arnold/M. Gupta, Madam (1988); "Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science", Ed. Van Nostrand Rinhold Company, USA.
- [13] Kaufmann, Arnold/M. Gupta, Madam (1985); "Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications", Ed. Van Nostrand Rinhold Company, USA.
- [14] Kosko, Bart (1993); "Pensamiento Borroso: La Nueva Ciencia de la Lógica Borrosa", traducción de Juan Pedro Campos, Ed. Grijalbo, Barcelona.
- [15] Lamport, Leslie (1994); "A Document Preparation System:  $\LaTeX$ ", Ed. Addison-Wesley, segunda edición, USA.
- [16] Novák, Vilém (1986); "Fuzzy Sets and their Applications", Ed. Adam Hilger, Checoslovaquia.
- [17] Quiroz Caballero, Roberto(1986); "Conjuntos Borrosos: Una Aplicación", tesis de licenciatura de actuaría, Universidad Anahuac.
- [18] Terano, Toshiro/Asai, Kiyoji/Sugeno, Michio (1992); "Fuzzy Systems: Theory and its Applications", Ed. Academic Press, USA.
- [19] Wang, Paul P./Chang, S.K. (1980); "Fuzzy Sets, Theory and Applications to Policy and Information Systems", Ed. Plenum Press, USA.
- [20] Zadeh, L.A. (1965); "Information and Control: Fuzzy Subsets", 8, pp.338-353.
- [21] Zimmermann, H.J. (1991); "Fuzzy Sets theory and its Applications", Ed. Kluwer Academic Publishers, segunda edición, USA.

P Á G I N A S W E B

- [22] <http://www.cs.cmu.edu/Web/groups/AI/faqs/ai/fuzzy/part1/fac.html>
- [23] <http://www.austinlinks.com/Fuzzy/tutorial.html>
- [24] <http://www.coala.uniovi.es/eaapc/nume/nume21.html>
- [25] <http://www.engr.sjsu.edu>
- [26] <http://members.aol.com/btluke/fuzzy01.html>
- [27] <http://www.gsi.dit.upm.es/~anto/tesis/fuzzylog.html>

# Índice de Materias

- cálculo con números difusos, 38
- comunicación interpersonal, 83
- conjunto borroso o difuso, 3
  - convexo, 8, 27
  - no convexo, 8
  - difuso normal, 7, 27
  - subnormal, 7
  - vacío, 11
  - cardinalidad de un, 8
  - cardinalidad relativa de un, 8
  - complemento de, 12
- conjuntos difusos
  - iguales, 11
  - intersección de, 12
  - definiciones elementales, 3
  - diferencia de, 15
  - unión de, 13
- corte- $\alpha$ , 6
- elementos de un número difuso, 28
- función característica, 4, 25
- función de membresía, 4, 25, 28
- grado de membresía, 10
- inversa de una relación borrosa, 45
- lógica difusa, 3
- número difuso, 27
  - gaussiano, 36
  - gaussiano doble, 36
  - mixto, 37
  - moda de un, 29
  - parabólico, 37
  - parabólico doble, 38
  - trapezoidal, 34
  - triangular simétrico, 32
  - triangulares, 30
- nivel- $\alpha$ , 5, 27, 28
- operaciones algebraicas, 19
  - producto algebraico, 19
  - propiedades de, 21
- suma algebraica, 20
- operaciones básicas, 1, 11
  - propiedades de, 16
- programación lineal difusa, 59
- propiedades de las relaciones borrosas, 54
- regresión difusa, 71
  - con datos difusos, 79
  - con parámetros difusos, 74
- relaciones borrosas, 42
  - complemento entre, 44
  - composición de, 48
  - intersección de, 44

- reflexiva, 54
  - simétrica, 55
  - transitiva, 56
  - unión de, 44
- soporte de un conjunto difuso, 6,  
29
- suma disjunta, 15
- tipos de números difusos, 29
- traslapamiento de conjuntos difu-  
sos, 10