



9  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**APLICACIÓN DEL MODELO DE TURBULENCIA DE  
DOS FLUIDOS (MTDF) AL ESTUDIO DE LA  
HIDRODINÁMICA DE CUERPOS DE AGUA SOMEROS**

299753

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO MECÁNICO**

P R E S E N T A:

**OSCAR MARTÍNEZ ALVARADO**

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO RODRÍGUEZ VALDÉS

MÉXICO, D.F.

NOVIEMBRE 2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

## **Agradecimientos**

En primer lugar debo agradecer a mi padre y a mi madre, Pablo y Beatriz, pues fueron ellos quienes me mostraron el justo valor de las cosas y me enseñaron a trabajar con toda energía, pero siempre con responsabilidad, en busca de mis objetivos.

Mi agradecimiento y mi admiración a Omar, mi hermano, con quien he compartido tantas cosas a lo largo de mi vida, aunque ahora la vida parece llevarnos por caminos muy diferentes.

Debo agradecer también a mis tíos y tías, y a mis abuelos, pues siempre recibí de ellos un valioso apoyo que, de muy diversas formas, me ayudó a llegar hasta este momento.

Gracias a Luis, Armando e Israel, y a todos los amigos que hice durante mi paso por la Escuela Nacional Preparatoria No. 9, pues desde entonces me han brindado su amistad y me han ayudado a crecer y a ampliar mis horizontes con su particular forma de ver y vivir la vida.

Gracias a ti, Isis, por compartir alegrías, tristezas y sueños conmigo. El amor y el cariño que me has dado te ha convertido en la inspiración que me ha impulsado para iniciar locas aventuras y para no rendirme en el viaje.

Mi agradecimiento a la Facultad de Ingeniería y a los profesores que en ella imparten cátedra, en especial al Ing. Yukihiro Minami Koyama y al Ing. Juan Ocáriz Castelazo, quienes no únicamente me enseñaron los fundamentos de la Ingeniería, sino también una forma de pensar; gracias también a todos los amigos que encontré entre sus aulas, especialmente a Marco, Rodrigo, Pablo y Arturo, con quienes formé un gran equipo.

Un agradecimiento al Instituto de Ingeniería por la beca que me proporcionó para la realización de esta tesis, en especial, al Dr. Alejandro Rodríguez Valdés, por la confianza que depositó en mí y el aliento que me dio en momentos en que el túnel parecía nunca terminar; gracias también a todos los becarios de la Coordinación de Ingeniería de Procesos Industriales y Ambientales: Fabián Betancourt, Alexis Espinosa, Henry Pérez y Felicitas Calderón por brindarme su apoyo, compartiendo conmigo experiencia y conocimientos.

Mi más profundo, sincero y especial agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México por la parte de mi espíritu que en ella se formó, y por permitirme sentirme orgulloso de ser miembro de tan admirable institución.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>i</b>
<b>Contenido</b>	<b>ii</b>
<b>Resumen</b>	<b>iv</b>
<b>Abreviaturas</b>	<b>v</b>
<b>Simbología</b>	<b>vi</b>
<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
1.1. <i>Importancia práctica.</i>	1
1.2. <i>Antecedentes.</i>	2
1.3. <i>El lago de Chapala.</i>	5
1.4. <i>El lago Kasumigaura en Japón.</i>	7
1.5. <i>Objetivo.</i>	7
<b>2. Marco teórico.</b>	<b>9</b>
2.1. <i>Turbulencia.</i>	9
2.1.1. <i>Características.</i>	9
2.1.2. <i>Influencia de los efectos de flotación sobre la turbulencia.</i>	14
2.1.3. <i>Tratamiento matemático.</i>	15
2.2. <i>Modelos de turbulencia.</i>	18
2.2.1. <i>Clasificación.</i>	18
2.3. <i>Modelo de turbulencia de dos fluidos (MTDF).</i>	22
2.3.1. <i>Enfoque.</i>	22
2.3.2. <i>Justificación.</i>	22
2.3.3. <i>Descripción matemática.</i>	24
2.3.4. <i>Ventajas y desventajas frente a otros modelos.</i>	30
2.4. <i>Generalización: Modelos de turbulencia de múltiples fluidos (MTMF).</i>	32
<b>3. Comportamiento térmico e hidrodinámico de lagos y embalses.</b>	<b>35</b>
3.1. <i>Estratificación.</i>	35
3.2. <i>Método de Temperatura Global.</i>	39

<b>4. Casos analizados.</b>	<b>42</b>
4.1. <i>Flujo de Couette turbulento.</i>	42
4.1.1. Descripción.	42
4.1.2. Resultados y discusión.	45
4.1.3. Observaciones finales.	53
4.2. <i>Procesos hidrotérmicos en el seno de un lago.</i>	53
4.2.1. Descripción.	53
4.2.2. Resultados y discusión.	61
<b>5. Conclusiones y recomendaciones.</b>	<b>95</b>
5.1. <i>Conclusiones</i>	95
5.2. <i>Recomendaciones</i>	97
<b>6. Referencias.</b>	<b>98</b>
<b>Apéndice A. El algoritmo de deslizamiento entre fases para resolver flujos bifásicos (Inter-phase Slip Algorithm o IPSA).</b>	<b>101</b>
<b>Apéndice B. Los códigos de Q1 y GROUND.</b>	<b>104</b>
<b>Apéndice C. Datos meteorológicos y climatológicos para los lagos de Chapala y Kasumigaura.</b>	<b>127</b>

## Resumen

Se hace una reseña del significado y la importancia de la turbulencia en la ingeniería, así como de sus características y de su formulación matemática. Asimismo, se comentan las dificultades para resolver de forma exacta las ecuaciones de Navier-Stokes (ENS) y la necesidad de hacer uso de modelos de turbulencia (MT) de los cuales se enumeran algunos ejemplos mediante los cuales se ataca actualmente el problema que este fenómeno representa. Posteriormente, se introducen los modelos de turbulencia de múltiples fluidos (MTMF) y se estudia el más simple de ellos: el modelo de turbulencia de dos fluidos (MTDF). Se analizan dos casos diferentes, el primero consistente en una comprobación de la bondad de los resultados arrojados por este modelo a través de un flujo de Couette plano turbulento; el segundo, un primer estudio sobre la aplicación práctica del MTDF al caso de la hidrodinámica de lagos someros. Los resultados del primer caso arrojados por el nuevo modelo se comparan con los resultados experimentales de Reichardt (Schlichting, 1979) y con resultados obtenidos mediante el MT  $k$ - $\epsilon$ . Los resultados del segundo caso se evalúan cualitativamente comparándolos con los datos de campo de Ishikawa y Tanaka (1993) y se obtienen conclusiones a partir de ellos tomando en cuenta los datos previamente obtenidos para el flujo de Couette.

La principal aportación de esta investigación es la aplicación del MTDF a los procesos termohidrodinámicos que tienen lugar en cuerpos de agua someros y que dan lugar al fenómeno de la estratificación diaria tomando en cuenta la dependencia de la densidad del agua de su temperatura y extendiendo un trabajo anterior de Shen *et al.* (2000), en el cual se consideraba el efecto de una diferencia de densidad constante sobre el flujo. Las constantes empíricas del MTDF fueron modificadas para lograr los mejores resultados posibles.

## Abreviaturas

ASLP	Algebraic Slip method (Método de deslizamiento algebraico)
CHAM	Concentration, Heat And Momentum
DPF	Distribución de Probabilidad de Fluido
EBU	Eddy-break-up model (Modelo de "rompimiento de remolino")
EDC	Eddy Dissipation Concept (Concepto de disipación de remolino)
EC	Ecuación de Continuidad
ENS	Ecuaciones de Navier-Stokes
ENSPT	Ecuaciones de Navier-Stokes Promediadas en el Tiempo
FDP	Función de Distribución de Probabilidad
INEGI	Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática
LES	Large Eddy Simulation (Simulación de remolinos grandes)
MT	Modelo de Turbulencia
MTDF	Modelo de Turbulencia de Dos Fluidos
MTMF	Modelo de Turbulencia de Múltiples Fluidos
PC	Propiedad Continua
PDP	Propiedades de Distinción de la Población
PEA	Partial Elimination Algorithm (Algoritmo de eliminación parcial)
PHOENICS	Parabolic, Hyperbolic Or Elliptic Numerical Integrating Code Series
PIL	PHOENICS Input Language (Lenguaje de entrada de PHOENICS)
SND	Simulación Numérica Directa
IPSA	Inter-phase Slip Algorithm (Algoritmo de deslizamiento entre fases)



## Simbología

### Símbolos Latinos

#### Minúsculas

$a$	Constante para la radiación reflejada por el agua
$b$	Constante para la radiación reflejada por el agua
$c_f$	Constante para la fricción entre fluidos
$c_m$	Constante para la transferencia de masa entre fluidos
$c_p$	Capacidad térmica específica
$c_t$	Constante para la expresión de la viscosidad turbulenta
$c_v$	Constante para la fuente adicional de cantidad de movimiento
$e$	Gradiente de densidad; error
$f$	Coefficiente para el transporte por difusión entre fluidos
$f(\cdot)$	Función de $\cdot$
$g$	Aceleración de la gravedad
$h$	Separación entre las placas en un flujo de Couette
$k$	Energía cinética turbulenta
$l_M$	Longitud de mezclado
$l_{MP}$	Longitud de mezclado de Prandtl
$m$	Masa
$\dot{m}_k$	Entrada de masa desde la fase $l$ hacia la fase $k$
$n$	Número de puntos experimentales
$p$	Presión
$r$	radio de inercia; fracción volumétrica
$t$	Tiempo
$u, v, w$	Componentes de la velocidad, en dirección $x, y, z$ , respectivamente
$u', v', w'$	Componentes de las fluctuaciones de velocidad, en dirección $x, y, z$ , respectivamente
$w^*$	Velocidad de cortante
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas

#### Mayúsculas

$C$	Coefficiente
$C_1, C_2$	Constantes del modelo de turbulencia $k$ - $\epsilon$ ; constantes para la radiación atmosférica de onda larga
$C_3$	Constante del término de flotación en el modelo de turbulencia $k$ - $\epsilon$
$C_{ld}$	Coefficiente de nubosidad
$C_\mu$	Coefficiente para la viscosidad en el modelo $k$ - $\epsilon$
$C_d$	Coefficiente de arrastre
$C_D$	Coefficiente para la relación entre $l_M, k$ y $\epsilon$
$D$	Longitud característica
$D_m$	Profundidad media de un lago o embalse
$D_t$	Profundidad de mezclado por viento

$E_d$	Energía disipada
$E$	Coefficiente de transporte entre fluidos
$F$	Fuente
$F_d$	Número de Froude densimétrico
$F_r$	Número de Froude
$G_b$	Efectos de flotación sobre $k$ y $\epsilon$
$H_n$	Flujo de calor neto
$I$	Momento de inercia; intensidad de turbulencia
$K_f$	Coefficiente para la fricción entre fluidos
$K_m$	Coefficiente para la difusión de masa entre fluidos
$L$	Longitud de un lago o embalse
$ND$	Duración del periodo de insolación
$P_K$	Producción de energía cinética turbulenta
$Pr$	Número de Prandtl
$Q$	Descarga de un lago o embalse; flujo de calor
$R_b$	Razón de Bowen
$Re$	Número de Reynolds
$Ri$	Número de Richardson
$S$	Fuente
$S_{vwk}$	Fuente adicional en la ecuación de cantidad de movimiento
$T$	Temperatura; periodo
$U$	Velocidad característica; componente de la velocidad en dirección $x$ promediada en el tiempo
$V$	Volumen; componente de la velocidad en dirección $y$ promediada en el tiempo
$W$	Componente de la velocidad promediadas en el tiempo, en dirección $z$

### Variables PHOENICS

$NY$	Número de nodos en dirección $Y$
$YVLAST$	Dimensión del dominio en dirección $Y$

### Símbolos Griegas

$\alpha$	Constante de proporcionalidad entre la temperatura y la densidad del agua; coeficiente de relación
$\beta$	Fracción de radiación solar absorbida superficialmente
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\epsilon$	Tasa de disipación de la energía cinética turbulenta
$\phi$	Propiedad conservada; radiación;
$\phi'$	Fluctuación de la propiedad $\phi$
$\Phi$	Propiedad promediada en el tiempo
$\phi_0$	Radiación solar total incidente sobre la superficie terrestre
$\gamma$	Coefficiente de fricción
$\Gamma$	Coefficiente de difusividad
$\eta$	Coefficiente de extinción
$\varphi$	Humedad relativa

$\lambda$	Segundo coeficiente de viscosidad
$\mu$	Viscosidad dinámica
$\nu$	Viscosidad cinemática
$\rho$	Densidad
$\theta$	Temperatura absoluta
$\sigma$	Número de Schmidt
$\tau_r$	Tiempo de residencia
$\tau_{ij}$	Tensor de esfuerzos
$\omega$	Velocidad angular; vorticidad; humedad específica

### Subíndices

0	Estado inicial; valor base
1	Estado final
<i>a, aire</i>	Aire; atmósfera
<i>c</i>	Convección
<i>e</i>	Evaporación; experimento
<i>f</i>	Forzado
<i>g</i>	Saturación
<i>i, j</i>	Dirección espacial de la componente de un vector
<i>if</i>	Entre fases (IPSA) o entre fluidos (MTDF)
<i>k</i>	Fase a la cual se refiere una ecuación diferencial
<i>kε</i>	Modelo <i>k-ε</i>
<i>l</i>	Laminar; fase complementaria a la fase <i>k</i> ; libre
<i>m</i>	Modelo
<i>máx</i>	Máximo
<i>min</i>	Mínimo
<i>M</i>	Máximo
<i>MTDF</i>	Modelo de turbulencia de dos fluidos
<i>r</i>	Reflexión
<i>w</i>	Pared
<i>s</i>	Superficie
<i>t</i>	Turbulento; total
<i>v</i>	Viento; volumétrico; virtual
$\alpha$	Coefficiente de relación
$\phi$	Correspondiente a la propiedad $\phi$

### Superíndices

<i>l</i>	Laminar
<i>t</i>	Turbulento

# Aplicación del modelo de turbulencia de dos fluidos al estudio de la hidrodinámica de cuerpos de agua someros.

## 1. Introducción.

### 1.1. Importancia práctica.

La turbulencia es un fenómeno de enorme importancia desde el punto de vista de la ingeniería ya que el movimiento turbulento, presente en la mayoría de las aplicaciones tecnológicas de los fluidos, contribuye significativamente al transporte de cantidad de movimiento, masa y energía en la gran mayoría de los flujos de interés práctico y tiene una influencia determinante sobre las distribuciones de velocidad, presión, temperatura y concentración de especies químicas en el seno del fluido. El diseño óptimo de sistemas, aparatos y procesos, tales como automóviles, aviones, intercambiadores de calor, turbinas, motores de combustión interna, tuberías, canales y presas, depende en gran medida de estas distribuciones.

Asimismo, la explicación de los fenómenos meteorológicos y oceánicos, de interés tanto para científicos de varias especialidades como para ingenieros, depende, entre muchas otras cosas, de una correcta comprensión y descripción del comportamiento de los flujos turbulentos.

Por otra parte, este fenómeno, considerado por el físico Richard Feynman, ganador del premio Nobel en 1965, como "el problema no resuelto más importante de la física clásica", está revestido de un gran interés para aquél que pretende entender sus causas fundamentales y las leyes que lo rigen, las cuales se ocultan tras la no linealidad del mismo.

Todo esto, en conjunto, es la razón por la cual la turbulencia es un campo ampliamente estudiado tanto por la física como por la ingeniería, a pesar de lo cual, aún no es posible establecer una teoría general que sea capaz de describir completamente los procesos turbulentos, más por falta de método que por falta de teoría.

Las ecuaciones de Navier-Stokes (ENS), desarrolladas de manera independiente hace más de siglo y medio por el físico francés Claude Navier (1823) y el matemático irlandés George Stokes (1845), son aplicables tanto a flujo laminar como a flujo turbulento. Sin embargo, su solución analítica sólo es posible para casos muy particulares donde la geometría o las condiciones de flujo son tan simples que resultan de poco valor práctico. Actualmente, mediante la técnica llamada Simulación Numérica Directa (SND) que incorpora el uso de las supercomputadoras a la simulación de flujos, se han logrado generar soluciones exactas para flujos relativamente simples con la desventaja del alto costo computacional que esta técnica requiere.

Éstas son las razones por las cuales se hace necesaria la utilización de los llamados modelos de turbulencia para estimar los efectos que los remolinos turbulentos producen sobre las propiedades del flujo principal que son las que realmente interesan, al menos, desde el punto de vista práctico de la ingeniería. Para realizar esta tarea, se hace uso de varias suposiciones ad hoc y métodos semiempíricos de diferente complejidad que van desde la

simple suposición de coeficientes de viscosidad efectivos constantes hasta sistemas de ecuaciones adicionales completos.

Todos estos modelos requieren algunas suposiciones que describan algunas características de los flujos turbulentos y contienen coeficientes que deben ajustarse por medio de experimentos. Por lo tanto, en el presente, la buena o mala aproximación de las simulaciones de flujos turbulentos a la realidad depende de qué tan buenas son las hipótesis sobre las cuales se basan los modelos utilizados.

## 1.2. Antecedentes.

Los modelos más populares en la actualidad son modelos que manejan un único fluido y tratan de calcular los efectos de la turbulencia a través de suposiciones tales como aquella que postula que los esfuerzos de Reynolds son proporcionales a los gradientes de velocidad, tal como ocurre en el caso laminar. Así hace su aparición una viscosidad efectiva, suma de la viscosidad molecular y una viscosidad debida a la turbulencia presente en el flujo. Basados en este concepto aparecen varios modelos cuyo principal objetivo es precisamente calcular esta viscosidad turbulenta.

Los modelos de este tipo, llamados actualmente modelos "clásicos" de turbulencia, pueden simplemente suponer un valor constante para la viscosidad turbulenta o ser tan complicados que usen una, dos o más ecuaciones diferenciales adicionales intentando describir algunas de las características observables de la turbulencia.

Además de los modelos de fluido único existen otros que tratan a los fluidos turbulentos a partir de las características de un flujo bifásico. Esta idea en realidad no es nueva. Varios investigadores, tales como Osborne Reynolds (1842-1912) y Ludwig Prandtl (1875-1953), ya planteaban en sus trabajos, al menos de manera implícita, esta forma de concebir a la turbulencia. De hecho, la teoría de la longitud de mezclado de Prandtl tiene como fundamento una suposición de esta naturaleza; sin embargo, debido a las limitaciones en la capacidad de cómputo que existían en su época se vio obligado a hacer suposiciones que simplificaran el problema.

Recientemente, han podido eliminarse estas suposiciones haciendo uso de nuevos algoritmos de solución numérica de las ecuaciones de flujo bifásico. El grupo de investigación que mayor impulso dio a los modelos de dos fluidos es aquél que dirige Spalding, quien, junto con sus estudiantes y colaboradores, realizó un vasto trabajo de validación que terminó en 1988 (Spalding, 1995).

Dos son los modelos que este investigador desarrolló con base en la idea de un flujo compuesto de dos fases que intercambian cantidad de movimiento, energía y masa entre sí. El primero de ellos, llamado modelo de "rompimiento de remolino" ("Eddy break-up" model o EBU) fue creado en 1970 para la simulación de la combustión en una flama turbulenta permanente. En éste se suponía que una flama turbulenta de combustible y oxidante previamente mezclados estaba compuesta de fragmentos de gas totalmente quemados y fragmentos de gas sin quemar cuyas proporciones variaban dentro del dominio en estudio de acuerdo con leyes de convección, difusión e interacciones entre fuentes y sumideros que representaban la transformación de gas quemado a gas sin quemar a una tasa volumétrica proporcional a las concentraciones de ambos gases en la mezcla y a la tasa local de cortante en el flujo medio, medido a través de la tasa de decaimiento de la energía

turbulenta, por ejemplo. Basado en este modelo fue creado el “concepto de disipación de remolino”, el cual consideraba la presencia de dos fluidos divididos en mezcla y “estructuras finas”. Estas estructuras tenían la posibilidad de reaccionar para transformarse en parte de la mezcla de acuerdo con las leyes de la cinética química (Spalding, 1995; Spalding, 1998).

El segundo modelo, más general, fue llamado simplemente modelo de turbulencia de dos fluidos (MTDF). Este modelo era susceptible de ser usado en simulaciones exclusivamente hidrodinámicas. Para su implementación, se desarrolló la técnica de solución de flujo bifásico aplicadas al método de volumen finito llamadas *Algoritmo de Deslizamiento entre Fases* (Inter-phase Slip Algorithm o IPSA) (, cuyos fundamentos aparecen en el apéndice A. Asimismo desarrolló la idea de una fuente adicional proporcional al gradiente del flujo principal que debe aparecer en la ecuación de cantidad de movimiento y que podía interpretarse como la tendencia de una capa cortante a formar remolinos.

En sus últimos ensayos, este modelo fue utilizado para simular flujos cercanos a paredes, flujos en conductos y flujos en capas cortantes libres. Para el caso de flujos en la cercanía de paredes se estudiaron dos situaciones: capa límite sobre una placa plana y flujo de Couette turbulento. En las simulaciones de la capa límite sobre una placa plana se probaron diferentes conjuntos de valores para las constantes del modelo y se decidió cuál de ellos arrojaba resultados más factibles. De esta manera se eligió un conjunto de valores. Los resultados arrojados usando estos valores se compararon únicamente con los datos experimentales provistos por Kovaszny *et al.* (1970), y se encontró una correspondencia bastante favorable. Con esos mismos valores, aplicados a un flujo de Couette turbulento, se logró predecir además un perfil logarítmico de velocidad y una pendiente para la gráfica  $\log(y^+) - u^+$  de 2.5, lo cual sugiere el valor de la constante de von Kármán de 0.4 ( $= 2.5^{-1}$ ) (Ilegbusi y Spalding, 1987a).

Al hacer simulaciones con flujos turbulentos en conductos, *i.e.* flujo en tuberías de sección circular y en canales rectangulares, y en capas cortantes libres, *i.e.* chorro circular y chorro plano, se obtuvieron resultados cualitativamente correctos. Sin embargo, los valores predichos numéricamente por el modelo quedaron, la mayoría de las veces, por debajo de los valores obtenidos experimentalmente. Estas simulaciones fueron realizadas empleando los mismos valores para los coeficientes del modelo que en el caso de flujo cercano a paredes, descrito en el párrafo anterior, excepto para el coeficiente que aparece en la fuente adicional de cantidad de movimiento, el cual tuvo que ser incrementado sustancialmente (Ilegbusi y Spalding, 1987b).

Shen *et al.* (2000) retomaron el concepto del MTDF y lo utilizaron para hacer una simulación numérica de un flujo estable estratificado en un canal, comparando los resultados con datos experimentales. El modelo numérico empleado era semejante al planteado inicialmente por Spalding (Ilegbusi y Spalding, 1987a; Ilegbusi y Spalding, 1987b; Spalding, 1987). Sin embargo, hacían uso del modelo de turbulencia  $k-\epsilon$  resolviendo la energía cinética turbulenta y la tasa de disipación de ésta para cada uno de los fluidos: es decir, incorporaban cuatro ecuaciones diferenciales de transporte más a su modelo. Además, omitían el término correspondiente a la fuente de cantidad de movimiento adicional planteada por Spalding (1987), y hacían ligeras modificaciones a los términos del modelo original.

Los modelos de turbulencia de múltiples fluidos surgen en 1995 como una extensión y una generalización del enfoque fundamental de los modelos de dos fluidos; es decir, hace la suposición de que un flujo monofásico turbulento se compone de varios fluidos (dos o más) que conviven en un mismo espacio entremezclándose e intercambiando energía, cantidad de movimiento y masa entre sí. Hasta este momento, los modelos de turbulencia de múltiples fluidos han sido aplicados, la mayoría de las veces, a flujos en los cuales se verifican procesos de combustión; sin embargo, también a habido intentos de aplicarlos para la simulación hidrodinámica exclusivamente.

El primer modelo de múltiples fluidos estaba compuesto únicamente por cuatro fluidos y fue aplicado al mismo fenómeno para el cual fue creado el modelo EBU; es decir, para flamas turbulentas permanentes. La principal diferencia entre el modelo EBU y el modelo de cuatro fluidos es que, mientras el primero suponía la existencia de dos gases, uno quemado y otro sin quemar, el segundo suponía la existencia de cuatro gases que se distinguían por su nivel de reactividad. De esta manera se tenía gas sin quemar, mezcla reactiva, mezcla no reactiva y gas totalmente quemado. Con esta sencilla extensión hecha al modelo de dos fluidos se lograron resultados mucho más realistas que los conseguidos con modelos más tradicionales.

El avance en la investigación de estos modelos ha llevado a su aplicación en otros problemas tales como:

- Un mechero Bunsen operando en estado permanente simulado por medio de un modelo de catorce fluidos, cuya importancia radica en la gran cantidad de flamas industriales que pueden encontrarse tanto en motores y hornos, como en explosiones en plataformas petroleras. En esta simulación se usó una población de fluidos bidimensional\* lo cual permitió discretizar dos variables de flujo en vez de una sola como fue en el caso anteriormente mencionado (Spalding, 1995).
- Un reactor teórico "bien agitado", el cual fue simulado a través de un modelo de 100 fluidos con población tanto unidimensional como bidimensional. Con esta simulación se demostró la facilidad de solución de una gran cantidad de fluidos y la posibilidad de encontrar resultados razonables de acuerdo con las condiciones iniciales e intrínsecas del problema. Asimismo, se encontraron diferencias entre las distribuciones de la población de fluidos calculadas y las supuestas por otros modelos (Spalding, 1995).
- Un reactor práctico agitado por paletas, simulado por medio de un modelo de 11 fluidos. En esta simulación se usó el modelo de turbulencia  $k-\epsilon$  para calcular la longitud de mezclado, la viscosidad efectiva y el macromezclado. Con ella se mostró la superioridad del modelo para analizar el mezclado de materiales inicialmente separados. Con este modelo pudieron ser calculados valores de micromezclado plausibles y más realistas que el 100 % considerado por los modelos convencionales (Spalding, 1998).
- La generación de humo en el combustor de una turbina, simulada mediante un modelo de 20 fluidos. Con este modelo pudieron ser calculados, en vez de supuestos, los

---

\* Estos términos serán aclarados en el apartado 2.1 "Generalización: Modelos de Turbulencia de Múltiples Fluidos".

valores de la función de densidad de probabilidad para la razón aire-combustible (Spalding, 1998).

- La capa plana de mezclado de densidad uniforme, la cual fue simulada mediante un modelo de 40 fluidos. Este fue el primer caso estudiado con un modelo de turbulencia de múltiples fluidos que no requirió el empleo de ningún modelo de turbulencia adicional para el cálculo de la hidrodinámica, la longitud de mezclado ni el micromezclado en el seno del fluido. Las características generales del flujo resultaron ser similares a las predichas mediante modelos convencionales; sin embargo, se pudo extraer más información que la lograda con estos modelos. Por ejemplo, se encontró una forma lógica para la distribución de densidad de probabilidad lo cual proporciona información sobre lo que podría ser la física del flujo. La comparación de los resultados de esta simulación con datos experimentales fue satisfactoria considerando que la investigación sobre los valores apropiados para las constantes del modelo se encontraba en fase inicial hasta el momento de su realización (Spalding, 1998).

### 1.3. El lago de Chapala.

El principal interés de esta investigación es aplicar los resultados al caso del lago de Chapala, aunque su objetivo, explicado en detalle más adelante, es mostrar la capacidad del modelo de turbulencia de dos fluidos para simular el flujo en cuerpos de agua someros.

Ubicado entre los estados de Jalisco y Michoacán, el lago de Chapala se encuentra dentro de los paralelos 20° 07' y 20° 21' de latitud norte y los meridianos 102° 40' 45" y 103° 25' 30" de longitud oeste y a una altitud de 1,524 msnm. El lago de Chapala está considerado como el embalse natural de mayor extensión en nuestro país y ocupa el número 68 a escala mundial, el número 48 en América del Norte y el tercero en tamaño en Latinoamérica. Tiene una longitud máxima de 78 a 82 km y 19 km de ancho promedio, variando éste último entre 6 y 25 km, con una profundidad máxima de 7 m y una media de 4.5 m, aunque en los últimos tiempos, la escasa aportación que recibe de sus afluentes (principalmente el río Lerma del cual se abasteció durante muchos años en un 50 %, aunque actualmente las aportaciones de este río representan el 10 % del aprovisionamiento), y de la precipitación pluvial ha hecho que su profundidad se reduzca hasta los 4 m. La superficie histórica promedio del lago ha sido de 900 km<sup>2</sup> de 1900 a 1990, aunque algunos le atribuyen de 1200 hasta 1740 km<sup>2</sup>. Cuando se ha medido a su mayor capacidad, alcanza los 8148 millones de metros cúbicos de agua (Mm<sup>3</sup>), pero en sus momentos críticos, ha reducido su volumen de almacenamiento hasta 1576 Mm<sup>3</sup>. Según datos de la Comisión Nacional del Agua en 1998 se encontraba al 33% de su capacidad. (Rodríguez *et al.*, 1994; SEMARNAT, 2001).

Para medir el nivel de almacenamiento del lago se han fijado, cotas máxima y mínima, con base en 100 que corresponde a la altitud del lago, en donde 91 significa la cota mínima, en la que el almacenamiento es nulo y 98.38 es la cota máxima, en la que la captación permite almacenar 7830 Mm<sup>3</sup>. En ésta última existen riesgos de inundación: la cota 93.0 corresponde al fondo promedio del lago, (1519.8 msnm), cuya capacidad de almacenamiento está muy reducida (1576 Mm<sup>3</sup>), punto en el que no hay capacidad de extracción de agua para los diversos usos y la existencia del lago se vuelve precaria (SEMARNAT, 2001).



El fondo del lago presenta una pendiente suave que va desde la desembocadura del río Lerma en su parte oriental hasta la parte más profunda del lago, que se ubica en el centro norte, para disminuir hacia su ribera occidental.

Desembocan en el lago los ríos Zula, Huaracha y Duero y el río de La Pasión, que se origina en Michoacán y atraviesa el municipio Tizapán de Jalisco, así como otros arroyos temporales. El lago cubre la función de vaso regulador de la cuenca, ya que depende de las aportaciones del río Lerma para mantener un nivel que le permita drenar por el río Santiago sin inundar los poblados de la ribera y sin quedar por debajo del lecho de ese río (SEMARNAT, 2001).

El clima se considera como semiseco con invierno y primavera secos y semicálido sin estación invernal definida. La temperatura media anual es de 19.9 °C, la temperatura máxima es de 27 °C a 30 °C de mayo a julio y la mínima, entre 9 °C a 12 °C. El promedio de días con heladas al año es de 4.1 de diciembre a febrero. La frecuencia anual de granizadas es menor de dos días. La precipitación total anual es de 875.2 milímetros (mm), con régimen de lluvias en los meses de junio, julio y agosto, aunque a lo largo de casi medio siglo se ha fijado en 740 mm en promedio. El mes más lluvioso es julio y el más seco enero. La evaporación total anual es de 1,912 mm, los meses en que es mayor es durante abril y mayo (250 mm) y el mes en que es menor es diciembre (100 mm). La velocidad del viento varía de 1 a 12 km/h, lo más frecuente es entre 8 y 12 km/h. La dirección dominante de los vientos es de este a oeste durante los meses de diciembre a mayo con magnitud promedio de 10 km/h, de oeste a este durante los meses de junio a noviembre en segundo lugar, con magnitudes del orden de 9 km/h y con menor frecuencia de sur a norte y de norte a sur (Padilla, 1994; SEMARNAT, 2001). El promedio mensual de radiación solar máxima total varía entre 640 W/m<sup>2</sup> para el mes de diciembre, y 910 W/m<sup>2</sup> para el mes de abril (NASA, 2001).

Por sus características, el lago de Chapala puede considerarse como un lago somero pues su profundidad media es  $D_m = 4.5 \text{ m} < 10 \text{ m}$ , aunque su tiempo de residencia máximo es  $(\tau_r)_{\text{máx}} = 1813$  días y el mínimo,  $(\tau_r)_{\text{mín}} = 365$  días, considerando un gasto de ingreso de 50 m<sup>3</sup>/s a través del río Lerma. Con estas características, no se espera una estratificación estacional; sin embargo, es posible la existencia de estratificación diaria, como se explicará más adelante en la sección 3.1. El modelado de este fenómeno es el principal interés del proyecto del cual forma parte esta tesis, por lo que se buscarán las ventajas que el modelo de turbulencia de dos fluidos representa para la simulación de un lago de estas características. Por el tiempo de residencia medio y el periodo para el cual se desea hacer el estudio se puede considerar que el lago es un sistema cerrado.

A pesar de que este lago se encuentra en nuestro país y constituye el objetivo central de esta investigación, el hecho de no contar con datos de campo que permitan la comparación de los datos obtenidos mediante una simulación numérica, hizo necesario remitirse a estudios ya elaborados en otras partes del mundo. Específicamente se hallaron datos experimentales recabados en el lago Kasumigaura en Japón por Ishikawa y Tanaka (1993).

#### 1.4. El lago Kasumigaura en Japón.

El lago Kasumigaura es un lago somero eutrófico en el cual se ha observado estratificación térmica diaria con diferencias de temperatura entre el epilimnión y el hipolimnión de entre 1°C y 2 °C apareciendo una doble termoclina cuando la termoclina formada un día se mantiene hasta la mañana siguiente. Este lago está ubicado en la Prefectura de Ibaraki, aproximadamente a 50 km al noreste de Tokio, Japón. Este lago era originalmente una laguna con conexiones indirectas con el Océano Pacífico a través de los ríos Hitachigawa y Tone. En 1963 se construyó una compuerta cerca de la confluencia de estos ríos desconectando al lago de sus fuentes de agua marina, por lo cual el lago pasó de ser ligeramente salado y contener únicamente agua dulce. Tiene una superficie de 168 km<sup>2</sup>, una profundidad media y máxima de 3.9 m y 7.3 m, respectivamente. Su altitud es de 1 msnm. Este lago tiene varios ríos pequeños como tributarios y descarga a través de un canal al río Tone. Su tiempo de residencia es  $\tau_r = 208$  días de manera que también este lago puede ser considerado como un sistema cerrado al estudiar la estratificación diaria que ocurre en él. La transparencia del disco de Secchi es de aproximadamente 1 metro en verano y 2.0 m en invierno, lo cual corresponde a coeficientes de extinción de 2.0 m<sup>-1</sup> y 1.0 m<sup>-1</sup> para una y otra estación (Ishikawa y Tanaka, 1993).

Una característica importante de la variación del viento en esta región es debida a la brisa marina que se origina en la costa del Pacífico que se encuentra aproximadamente a 20 km del lago. En una mañana soleada, el lago está usualmente muy calmado porque el lago desarrolla una atmósfera ligeramente estable sobre el mismo debido a que está un poco más frío que sus alrededores. El frente de la brisa sopla usualmente al mediodía, entre las 12:00 y las 16:00, con un súbito incremento en la velocidad del viento. Después del paso del frente, un viento del este con velocidad entre 3 y 8 m/s continua por varias horas y decrece hacia la noche. El desarrollo de la brisa marina está correlacionada con la estratificación diaria en el lago porque ambos fenómenos se originan por el calentamiento de la superficie de la Tierra a causa de la radiación solar (Ishikawa y Tanaka, 1993).

El promedio mensual de radiación solar máxima total en la ubicación de este lago es de 640 W/m<sup>2</sup> en el mes de agosto, mientras que la mínima es de 360 W/m<sup>2</sup> para el mes de diciembre. La temperatura promedio mensual varía entre 1.6 °C correspondiente al mes de enero y 24.6 °C para el mes de agosto (NASA, 2001).

#### 1.5. Objetivo.

El objetivo de este trabajo es validar el uso de los modelos de turbulencia de múltiples fluidos en su forma más simple (modelo de dos fluidos) en problemas de hidrodinámica pura, ya que hasta ahora han sido utilizados principalmente para la simulación de flujos reactivos en reactores y combustores (Spalding, 1995; Spalding, 1998). En particular, se busca evaluar la aplicabilidad y analizar las ventajas y desventajas que los modelos de turbulencia de múltiples fluidos presentan cuando se tratan de adaptar al estudio de la hidrodinámica de cuerpos de agua superficiales, específicamente lagos y lagunas de aguas someras polimícticas, las cuales presentan características muy distintas a los sistemas dimícticos que en general son más profundos (Havens *et al.*, 2001) y cuyo análisis ha sido más vasto. Entre las diferencias más importantes están la ausencia de estratificación térmica estable por periodos largos, y la verificación de estratificación térmica diaria que afecta de

manera importante al transporte y mezclado de sedimentos y material suspendido (Ishikawa y Tanaka, 1993; Havens *et al.*, 2000). En los lagos que presentan estas características las condiciones de la calidad de agua pueden tener una relación compleja con cargas de nutrientes externas y con los procesos internos del lago, y pueden ser poco sensibles a programas de recuperación de cuenca (Havens, 2001).

Ya mencionado en la sección anterior, el hecho de que el lago más grande de nuestro país, el lago de Chapala, sea un sistema de este tipo reviste de su importancia fundamental a esta investigación, pues sus resultados serán susceptibles de ser prontamente aplicados al estudio de este cuerpo de agua, en particular. Por extensión, los resultados serán aplicables a todo cuerpo de agua somero del tipo léntico y, posiblemente, a todo tipo de lagos y embalses.

Para lograr el objetivo se expondrán primero las características de los flujos turbulentos; se hará mención de los modelos de turbulencia más usados actualmente, de sus características y campos de aplicación, y se dará una descripción amplia de los modelos de múltiples fluidos y de las bases físicas y matemáticas que los sustentan. La atención se centrará primero en el modelo de turbulencia de dos fluidos, el cual es el miembro más sencillo de esta nueva generación de modelos, con el objeto de facilitar su comprensión. Posteriormente se hará la exposición breve de los modelos de más de dos fluidos y de las hipótesis físicas, y las técnicas matemáticas y numéricas que posibilitan la codificación de estos modelos.

Como casos de estudio se presentan la simulación de un flujo de Couette turbulento y la simulación de un lago ideal. El caso del flujo de Couette turbulento fue estudiado hace tiempo por Reichardt (Schlichting, 1979) lo cual hizo posible la comparación entre los resultados del MTDF, el MT  $k-\epsilon$  y el experimento. Los resultados de la simulación del lago ideal se compararán con los datos de campo que Ishikawa y Tanaka (1993) obtuvieron para el lago Kasumigaura en Japón y con los resultados que arroja, para este mismo caso, el modelo de turbulencia  $k-\epsilon$ .

## 2. Marco teórico.

### 2.1. Turbulencia.

No existe una definición completamente precisa de la palabra turbulencia. Sin embargo, antes de comenzar una exposición acerca de modelos de turbulencia, de sus características y de sus respectivos campos de aplicación, es indispensable estar de acuerdo sobre el fenómeno que se intenta modelar.

Refiriéndose al movimiento turbulento de un fluido, el gran científico y artista Leonardo da Vinci pedía observar “el movimiento en la superficie del agua, el cual recuerda el del cabello, que tiene dos movimientos, uno de los cuales es causado por el peso del cabello y el otro por la dirección de los rizos; de igual forma el agua tiene movimiento en torbellinos, una parte del cual es debido a la corriente principal y la otra a un movimiento aleatorio y hacia atrás.” [Trans. Piornelli en Lumley, J. L., 1997. Some comments on turbulence. *Phys Fluids A* 4, 203-211.] (Figura 2.1 – 1)



Figura 2.1 – 1

Lewis Fry Richardson (1881 – 1953), pionero de la meteorología moderna, lo describió de manera inmejorable en forma de verso:

*“Big whorls have little whorls, / Which  
feed on their velocity; / And little whorls  
have lesser whorls, / And so on to  
viscosity / (in the molecular sense).”*

*“Grandes remolinos contienen pequeños  
remolinos, / los cuales se alimentan de su  
velocidad; / y pequeños remolinos  
contienen remolinos aún más pequeños. /  
y así hasta la viscosidad / (en sentido  
molecular).”*

#### 2.1.1. Características.

La forma más sencilla de definir a la turbulencia es a través de sus características las cuales se enuncian a continuación.

##### **Irregularidad y aleatoriedad.**

Un flujo turbulento es aleatorio y caótico. El movimiento es intrínsecamente transitorio incluso cuando las condiciones de frontera son impuestas constantes. La velocidad y todas las demás propiedades del flujo varían sin aparente orden.

La variabilidad aleatoria en el tiempo y en el espacio de un flujo turbulento impide que éste pueda ser resuelto numéricamente, a menos que la malla y los pasos en el tiempo utilizados para tal fin sean extremadamente finos lo cual significa un altísimo costo computacional. Con las técnicas de SND, que incorporan el uso de las supercomputadoras a la simulación de flujos, se han logrado generar soluciones exactas para flujos relativamente simples. Sin embargo, estas técnicas están aún lejos de ser prácticas desde el punto de vista de la

ingeniería y es necesario desarrollar modelos de turbulencia que tomen en cuenta las características macroscópicas de los flujos turbulentos y sean capaces de predecir sus efectos, cuando menos, de manera aproximada.

Una manera de aproximarse a este objetivo es descomponer las propiedades en dos: una parte es promediada en el tiempo, y varía de manera suave en estado transitorio o permanece constante en estado permanente; la otra parte, que representa las fluctuaciones de la propiedad en estudio, es variable en el tiempo y está superpuesta sobre la primera. Para un flujo en estado permanente, si  $\phi(t)$  es la propiedad,  $\Phi$  es la propiedad promediada en el tiempo y  $\phi'(t)$  es la fluctuación, entonces

$$\phi(t) = \Phi + \phi'(t)$$

En el caso de un flujo en estado transitorio,  $\Phi$  también sería una función del tiempo,  $\Phi(t)$ , aunque variaría de manera mucho más suave que  $\phi'(t)$ , porque el lapso para el cual se promedia es mucho mayor que cualquier período de las fluctuaciones, por ejemplo, en un estuario las velocidades tienen componentes turbulentas en el rango de 1 Hz superpuestas sobre variaciones de la marea con periodos entre 12 y 24 horas (White, 1991).

### Altos números de Reynolds.

El número de Reynolds,  $Re$ , que resulta de dividir las fuerzas de inercia entre las fuerzas viscosas, es el parámetro adimensional que usualmente define, o sirve para distinguir, si el régimen en el que se desenvuelve un flujo debe ser considerado laminar o turbulento. Los flujos turbulentos, que son los que nos ocupan, se caracterizan por poseer números de Reynolds altos.

El número de Reynolds se define como:

$$Re = \frac{UD\rho}{\mu} = \frac{UD}{\nu}$$

En esta expresión,  $U$  es una velocidad característica del flujo;  $D$ , una longitud característica;  $\rho$ , la densidad del fluido;  $\mu$ , la viscosidad, o viscosidad dinámica, y  $\nu$ , la viscosidad cinemática definida por  $\nu = \mu / \rho$ . Tener flujo turbulento cuando el número de Reynolds sea alto significa tener un flujo turbulento cuando se tenga una velocidad muy alta, una longitud característica también muy alta o una viscosidad cinemática demasiado baja. En el caso del agua y del aire, que tienen viscosidades cinemáticas del orden de  $1.0E-6$  y  $1.0E-5$ , respectivamente, se tienen flujos turbulentos en casi cualquier aplicación, lo cual reviste a este tipo de fenómenos de una gran importancia desde el punto de vista de la ingeniería, tomando en cuenta que los dos fluidos mencionados son los que mayor interés presentan para los ingenieros.

Aunque el número de Reynolds es el parámetro más usado en el estudio de la turbulencia, se han hecho experimentos con convección natural en cavidades rectangulares con calentamiento desde la parte inferior en los cuales el parámetro que determina la transición de flujo laminar a flujo turbulento es el número de Rayleigh.

### Fluctuaciones tridimensionales.

Aun en flujos donde la velocidad y las demás propiedades varían únicamente en una o en dos dimensiones, las fluctuaciones debidas a la turbulencia se dan en tres dimensiones.

De esta manera, si se evalúa una propiedad cualquiera de la cual  $\Phi$  es el valor promediado en el tiempo y  $\phi'(t)$  es el valor de la fluctuación turbulenta se puede tener para un flujo unidimensional que, en general

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \neq 0; \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0$$

Sin embargo, siempre se tendrá que,

$$\frac{\partial \phi'(t)}{\partial x_1} \neq 0; \frac{\partial \phi'(t)}{\partial x_2} \neq 0; \frac{\partial \phi'(t)}{\partial x_3} \neq 0$$

En el caso de las componentes de las velocidades, si  $U$ ,  $V$  y  $W$  son sus valores promediados en el tiempo en los ejes ortogonales  $x_1$ ,  $x_2$ , y  $x_3$ , respectivamente, y  $u'(t)$ ,  $v'(t)$  y  $w'(t)$  son las fluctuaciones correspondientes, se puede tener, en general, para un flujo teóricamente unidimensional,

$$U \neq 0; V = 0; W = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} \neq 0; \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0$$

pero forzosamente siempre se tendrá realmente que,

$$\frac{\partial u'(t)}{\partial x_1} \neq 0; \frac{\partial u'(t)}{\partial x_2} \neq 0; \frac{\partial u'(t)}{\partial x_3} \neq 0$$

$$\frac{\partial v'(t)}{\partial x_1} \neq 0; \frac{\partial v'(t)}{\partial x_2} \neq 0; \frac{\partial v'(t)}{\partial x_3} \neq 0$$

$$\frac{\partial w'(t)}{\partial x_1} \neq 0; \frac{\partial w'(t)}{\partial x_2} \neq 0; \frac{\partial w'(t)}{\partial x_3} \neq 0$$

### Característica de flujo.

La turbulencia no es una característica del fluido; por el contrario, es un fenómeno que puede hallarse presente tanto en flujo de fluidos newtonianos como en flujo de fluidos no newtonianos. La existencia o ausencia de esta clase de movimiento dentro del flujo de un determinado fluido depende de las propiedades de éste último (viscosidad y densidad) y de las condiciones bajo las cuales se desarrolle (gasto volumétrico y geometría).

Incluso dentro de una misma corriente pueden coexistir zonas de turbulencia y de laminaridad. Prueba de ello son las observaciones hechas por Reynolds durante la realización de su famoso experimento: sin importar el número de Reynolds correspondiente a cada observación, siempre había al inicio del tubo una zona laminar donde el filamento

coloreado no sufría modificaciones, aunque la zona de turbulencia se acercaba cada vez más a la entrada del tubo conforme el número de Reynolds iba en aumento.

Una reflexión sobre estos resultados nos conduce a hacer una distinción entre los términos *turbulencia* y *régimen turbulento*. Llamaremos *flujo en régimen turbulento* a aquél que simplemente por el número de Reynolds que lo caracterice pueda aceptar y difundir turbulencia, aunque no todas las zonas de la corriente presenten movimiento turbulento. Se dirá que en una zona determinada existe *turbulencia plenamente desarrollada* cuando la turbulencia haya logrado difundirse a toda ella.

### **Fenómeno macroscópico.**

Un concepto que ilustra muy bien la naturaleza macroscópica de la turbulencia es la vorticidad y su diferencia con los vórtices o remolinos que aparecen en un flujo como resultado de la turbulencia. La primera es una propiedad del campo de velocidades que representa la tendencia a girar que muestran los elementos de fluido de tamaño molecular, presente en cualquier flujo real.

Los remolinos generados en el seno de un flujo turbulento, por el contrario, nunca alcanzan dimensiones moleculares debido a que la fricción viscosa provoca su irremediable decaimiento a partir de una cierta longitud crítica. Esto significa que el movimiento turbulento debe ser descrito atendiendo no sólo a las propiedades moleculares del fluido, sino también a las propiedades macroscópicas del flujo (Levi, 1980).

Esta característica de la turbulencia posibilita la concepción de un flujo turbulento como si estuviera constituido por fragmentos de fluido que se mezclan, interactúan e intercambian cantidad de movimiento, calor y masa entre sí; asimismo da pie a la definición de dos tipos de mezclado: el macromezclado y el micromezclado.

El macromezclado es aquél que se produce por causa de la presencia de turbulencia dentro de la corriente. Sus efectos principales consisten en cambiar abruptamente la posición de fragmentos de fluido completos y en llevar fragmentos de fluido inicialmente distantes a la cercanía uno del otro.

El micromezclado, por su parte, tiene lugar únicamente cuando dos fragmentos de fluido se encuentran contiguos y es aquél cuya causa es la existencia de coeficientes moleculares de difusividad propios del fluido o los fluidos (viscosidad, conductividad térmica y coeficiente de difusión). En general, los mecanismos por los cuales se lleva a cabo el micromezclado obedecen a las leyes de transporte difusivo bien establecidas, tales como la ley de la viscosidad de Newton en el caso de la difusión de cantidad de movimiento, la ley de Fourier para la difusión de calor y la ley de Fick para la difusión de concentración de especies químicas.

### **Alta difusividad.**

Como consecuencia de la existencia del macromezclado, las propiedades de transporte de un flujo son mayores en presencia de turbulencia que cuando el flujo es puramente laminar.

Dos partículas de fluido que inicialmente se encuentran alejadas entre sí pueden ser reunidas rápidamente por efecto del movimiento giratorio de los remolinos turbulentos. Cada una de las partículas fluidas transporta consigo todas sus propiedades, *i.e.* cantidad de

movimiento, energía y concentración de especies químicas. Al entrar en contacto unas con otras se generan gradientes que provocan difusión e intercambio de propiedades entre ellas por medio de mecanismos que caen dentro del campo de investigación de la mecánica estadística. El resultado es un incremento considerable en la eficiencia de intercambio de todas las propiedades al ser considerada la generalidad del flujo.

Supóngase, por ejemplo, un flujo de Couette laminar donde las paredes, tanto móvil como fija, se mantienen a temperaturas diferentes, pero constantes, y que la temperatura de la pared inferior fija es mayor que la de la pared superior móvil. Para transportar calor desde la pared fija hasta la móvil será necesario que éste se difunda de manera ordenada, capa por capa. Por el contrario, si el flujo fuese turbulento, fragmentos de fluido que tuvieran la temperatura de la pared inferior subirían repentinamente, debido al movimiento desordenado, y su alta energía se habría difundido mucho más rápidamente.

### Alta disipatividad.

En una corriente turbulenta se encuentran remolinos de tamaños muy distintos que pueden ser clasificados, para fines prácticos, en grandes, medianos y pequeños. Los remolinos grandes, llamados normalmente portadores de energía, son los que brindan la máxima contribución de energía cinética turbulenta. La fuente de esta energía es el flujo medio o principal, del cual la toman por medio de un proceso denominado *alargamiento de vórtices*, o *vortex stretching*. Por el contrario, los remolinos pequeños disipan grandes cantidades de energía cinética en forma de calor producido por la fricción viscosa debido a que ésta última crece a medida que las dimensiones de los remolinos disminuyen. Por consiguiente, la energía intrínseca de los remolinos más pequeños no es muy grande, a pesar de que los remolinos mayores les transfieran energía continuamente. El proceso por el cual la energía del flujo principal absorbida por los grandes remolinos y transferida hacia los remolinos más pequeños donde se disipa en forma de calor es llamado *cascada de energía*. Es evidente que, de no darse este flujo de energía, la turbulencia decaería rápidamente y el flujo tomaría características laminares.

La interacción de un remolino grande con el flujo principal y los gradientes de velocidad presentes en éste último provocan que el remolino se deforme debido a la diferencia de velocidades entre un extremo y otro del remolino; sin embargo el principio de la conservación de la energía de rotación debe cumplirse durante este proceso.

$$\frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + E_d \quad \dots (2.1 - 1)$$

Aquí,  $\omega$  significa velocidad angular;  $E_d$ , es la energía disipada, y los subíndices 0 y 1 indican inicial y final, respectivamente. La expresión  $I = r^2 m$ , donde  $r$  es el radio de inercia, define el momento de inercia del remolino. Al sustituir esta definición en (2.1 - 1) se obtiene

$$\frac{1}{2} m r_0^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} m r_1^2 \omega_1^2 + E_d \quad \dots (2.1 - 2)$$

Sin embargo, tanto la velocidad característica de los remolinos grandes como sus dimensiones resultan en un número de Reynolds grande con un orden similar al del número de Reynolds del flujo principal. Esto significa que también en los vórtices turbulentos de



mayor tamaño las fuerzas de inercia dominan sobre las fuerzas disipativas viscosas: es decir,  $E_d \approx 0$ . Por lo tanto, como  $\omega_0 < \omega_1$ , entonces  $r_0 > r_1$ .

En el caso de los vórtices más pequeños con números de Reynolds mucho menores, la viscosidad adquiere importancia y  $E_d$  se vuelve cada vez más significativa hasta el límite en el cual toda la energía cinética rotacional se disipa transformándose en calor o energía irrecuperable.

Además del proceso de alargamiento de vórtices, dentro del movimiento turbulento se llevan a cabo continuas interacciones que causan la subdivisión de los remolinos en otros de menor tamaño, lo cual contribuye también a incrementar la tasa de disipación de energía, la cual depende, como se mencionó antes, del tamaño del remolino.

### 2.1.2. Influencia de los efectos de flotación sobre la turbulencia.

El comportamiento de la turbulencia puede ser afectado grandemente por fuerzas de cuerpo fluctuantes si éstas están correlacionadas con las fluctuaciones de velocidad. Este es el caso de un flujo donde se establecen gradientes de densidad en la misma dirección que el gradiente de la velocidad media. Un ejemplo de esto es la capa límite sobre una superficie horizontal con flujo de calor; otro ejemplo de importancia práctica grande es el caso de un lago o un embalse cuyas aguas intercambian calor con el medio ambiente por medio, principalmente de radiación, convección y evaporación.

Los efectos son distintos dependiendo si la densidad aumenta o disminuye con la altura: si la densidad se incrementa en la misma dirección que la altura (fluido pesado sobre fluido ligero) el flujo es inestable y la correlación densidad – velocidad puede convertir energía potencial en energía cinética turbulenta; si, por el contrario, la densidad disminuye con la altura (fluido ligero sobre fluido pesado) a una tasa mayor que la que se espera para fluido en equilibrio hidrostático, la energía turbulenta puede convertirse en energía potencial reduciendo el gradiente de densidad y elevando el centro de gravedad del fluido.

Un parámetro adimensional conveniente para correlacionar los efectos de la diferencia de densidad  $\Delta\rho$  a través de la capa de fluido  $h$  teniendo una velocidad característica  $U$  es

$$\frac{\Delta\rho gh}{\rho U^2} \quad \dots (2.1 - 3)$$

que es la razón de la diferencia de presión hidrostática a través de la capa con respecto a una presión dinámica característica. Es posible encontrar una relación entre este parámetro

y el número de Froude,  $F_r = \frac{U^2}{gh}$ , si se escribe como  $\frac{1}{F_r} \frac{\rho}{\Delta\rho}$ . La total supresión de la

turbulencia o un incremento considerable de la misma, dependiendo del signo de  $\Delta\rho$  se espera si este parámetro es del orden de la unidad (Bradshaw, 1976).

### 2.1.3. Tratamiento matemático.

Las ecuaciones de Navier-Stokes (ENS), por su carácter de ecuaciones diferenciales, expresan los efectos locales de los esfuerzos aplicados sobre un elemento de fluido. En su forma más general, para un fluido cuya densidad y viscosidad son variables, estas ecuaciones tienen la forma:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad \dots (2.1 - 4)$$

La ecuación de continuidad (EC) es la aplicación de la ley de conservación de la masa a un elemento de fluido. La forma más general de esta ecuación, para un fluido cuya densidad es variable tanto en el espacio como en el tiempo es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad \dots (2.1 - 5)$$

Sin embargo, si el fluido puede considerarse incompresible; es decir, si  $\rho = cte$ , como es el caso del agua:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots (2.1 - 5a)$$

Antes de hacer explícitas las consecuencias de la turbulencia sobre las ENS se le dará una forma alternativa al miembro izquierdo de estas ecuaciones haciendo uso de la EC para hacer más sencillo su manejo:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + u_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) \right) \\ \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_i) \quad \dots (2.1 - 6) \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.1 - 6) en (2.1 - 4),

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad \dots (2.1 - 7)$$

Cuando se considera flujo incompresible y se divide la velocidad total en velocidad promedio temporal y fluctuación; es decir, si

$$\rho = cte, \text{ y}$$

$$u_i = U_i + u'_i,$$

se obtiene, haciendo uso de (2.1 - 5a)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho u'_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho (U_j + u'_j)(U_i + u'_i)] = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

Cuando se promedia esta ecuación en el tiempo y se aplican las propiedades de esta operación (tomar promedio en el tiempo) resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho u'_j u'_i}) = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad \dots (2.1 - 8)$$

Estas son las llamadas ENS promediadas en el tiempo (ENSPT) para un fluido incompresible. En estas ecuaciones aparece el término  $\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho u'_j u'_i})$  que depende del perfil

del producto promediado de las fluctuaciones de velocidad que tienen lugar en el interior del flujo; sin embargo, no proveen de ninguna ecuación adicional que permita resolver el sistema de ecuaciones diferenciales resultante. Este hecho es la causa de la necesidad de contar con modelos de turbulencia que sirvan para suponer una forma analítica para éste término.

Las ENSPT pueden ahora reescribirse en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j U_i) = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_j u'_i} \right] \quad \dots (2.1 - 9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j U_i) = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau'_{ij} + \tau''_{ij}) \quad \dots (2.1 - 9a)$$

De esta manera se puede hacer una analogía entre el tensor de esfuerzos distorsionales,

$$\tau'_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \text{ debidos a la viscosidad, y el tensor de esfuerzos de Reynolds.}$$

$$\tau''_{ij} = -\overline{\rho u'_j u'_i}, \text{ debidos al movimiento turbulento.}$$

Sin embargo, aún falta una expresión que proporcione la forma analítica de los esfuerzos turbulentos o de Reynolds. Con este fin, Boussinesq, en 1877, propuso modelarlos mediante la postulación de una hipotética viscosidad turbulenta,  $\mu'$ , que relacionara la forma del perfil de la velocidad principal,  $U_i$ , con el valor de las fluctuaciones,  $u'_i$ . De esta manera podía asumirse que tanto los esfuerzos de Reynolds, como los esfuerzos distorsionales, eran proporcionales al gradiente de velocidades.

$$\tau''_{ij} = -\overline{\rho u'_j u'_i} = \mu' \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots (2.1 - 10)$$

La viscosidad turbulenta, al contrario de la viscosidad molecular, es una propiedad que depende de las condiciones del flujo y, por lo tanto, será diferente en cada caso. Aun dentro de una misma corriente se tendrán valores distintos de  $\mu'$  para distintas regiones de flujo. La mayoría de los modelos de turbulencia actuales hacen uso de esta hipótesis por su sencillez, y se enfocan principalmente a calcular los valores de la hipotética viscosidad  $\mu'$ ; sin embargo, su uso tiene varias desventajas y limitaciones que deben ser consideradas.

En primer lugar, considérese un flujo bidimensional, cuya única componente promediada diferente de cero sea  $U$ , en la dirección  $x$ ; es decir,

$$U \neq 0; V = 0; W = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0; \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Entonces, el tensor de esfuerzos de Reynolds estaría dado por

$$[\tau'] = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{v'u'} & \overline{w'u'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{w'v'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} = \mu' \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial U}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, la única componente del tensor de esfuerzos turbulentos que sería diferente de cero sería  $\tau'_{12} = \tau'_{21} = -\rho \overline{u'v'} = \mu' \frac{\partial U}{\partial y}$ , lo cual implica que la correlación  $\overline{u'v'}$  es negativa.

Esto significa que, para un fragmento de fluido,  $u'$  siempre tendrá el signo contrario de  $v'$ , lo cual se justifica parcialmente si se considera que dentro de un flujo cortante turbulento existen dos movimientos de fluido importantes por su frecuencia: *erupciones*, que implican el alejamiento de la pared de fragmentos de fluido de baja velocidad ( $u' < 0$ ,  $v' > 0$ ,  $\tau' > 0$ ), y *barridos*, que implican el acercamiento a la pared de fragmentos de alta velocidad ( $u' > 0$ ,  $v' < 0$ ,  $\tau' > 0$ ). Sin embargo, también existen otros movimientos, aunque de menor frecuencia, en los cuales aparecen fragmentos de fluido de baja velocidad que se dirigen hacia la pared ( $u' < 0$ ,  $v' < 0$ ,  $\tau' < 0$ ) y fragmentos de alta velocidad que se alejan de la pared ( $u' > 0$ ,  $v' > 0$ ,  $\tau' < 0$ ), para los cuales, es negativo el esfuerzo cortante correspondiente (Levi, 1980).

Una segunda implicación que representa una limitación para la hipótesis de Boussinesq es la proporcionalidad entre el esfuerzo cortante turbulento y el gradiente de la velocidad principal. En una capa límite típica,  $U(y)$  es una función siempre creciente lo cual significa que  $\frac{\partial U}{\partial y} > 0$  a través de toda la capa límite, aproximándose a cero cerca de la frontera. En

este caso, la correlación entre  $\tau'$  y  $\frac{\partial U}{\partial y}$  es plausible considerando que el esfuerzo cortante también se aproxima a cero cerca de la frontera de la capa límite. Sin embargo, existen algunos perfiles, tales como los que corresponden a chorros cercanos a paredes o a estelas asimétricas, para los cuales el esfuerzo cortante turbulento cambia de signo y su valor no es necesariamente igual a cero cuando  $\frac{\partial U}{\partial y}$  es cero.

Una última prueba de que la correlación entre el tensor de los esfuerzos de Reynolds y el tensor de deformación no es tan directa, se obtiene cuando se contrae (2.1 - 10) para obtener el doble de la energía cinética turbulenta por unidad de volumen,

$$-\overline{\rho u'_i u'_i} = 2\mu' \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \dots \dots (2.1 - 11)$$

Para un fluido incompresible, el miembro derecho de esta expresión es idéntico a cero para cumplir con la ley de la conservación de la masa, mientras que el miembro izquierdo únicamente es cero si y sólo si no existe turbulencia (Hinze, 1975).

## 2.2. Modelos de turbulencia.

Debido a la dificultad que existe para resolver de manera exacta las ENS, permitiendo la descripción adecuada de la atmósfera, los océanos, los cuerpos de agua superficiales, como lagos y lagunas, y todo fenómeno donde intervengan uno o varios fluidos, es necesario contar con modelos de turbulencia que sean capaces de predecir de manera suficientemente aproximada, sobre bases teóricas consistentes, el comportamiento del fluido que se estudie en cada caso.

### 2.2.1. Clasificación.

Aunque existen varias maneras de clasificar los modelos de turbulencia, se seguirá en este trabajo una clasificación propuesta por Spalding (1995), con algunas modificaciones. Este investigador divide a los modelos de turbulencia en cuatro grandes grupos a los cuales se les agregará un quinto grupo:

- I. Modelos de Fluido Único.
- II. Modelos de Múltiples Fluidos.
- III. Modelos probabilísticos.
- IV. Simulación de grandes remolinos (Large-eddy Simulation, LES).
- V. Simulación Numérica Directa (SND).

Una discusión detallada de todos estos modelos se encuentra en Berezowski (1994) y Rodi (1993), así como en CHAM (2001a)

#### I. Modelos de Fluido Único.

Los modelos de fluido único son aquéllos en los cuales el estado y el desarrollo del flujo es caracterizado por los valores promedio de las propiedades del fluido (*i.e.* velocidad, temperatura, concentración de especies químicas, etc.) en cada punto del dominio y en cada instante del tiempo analizado. El estado y el desarrollo del flujo también pueden ser caracterizados en estos modelos por la representación estadística de las fluctuaciones a partir de los valores promedio de las propiedades.

Los modelos de turbulencia de fluido único pueden ser clasificados como:

- I.1. Modelos que hacen uso de la hipótesis de la viscosidad efectiva.
- I.2. Modelos que no hacen uso de la hipótesis de la viscosidad efectiva.

### **1.1. Modelos que hacen uso de la hipótesis de la viscosidad efectiva.**

La *viscosidad efectiva* no es otra cosa que la suma de la viscosidad molecular del fluido y la viscosidad turbulenta del flujo. Dentro de esta clasificación se encuentran aquellos modelos que requieren de la hipótesis de la viscosidad turbulenta debida a Boussinesq.

Estos modelos son los más populares debido a que son los que requieren menos tiempo y costo de computación. Sin embargo, la utilización de la hipótesis de la viscosidad turbulenta conlleva las limitaciones y desventajas de esta hipótesis, las cuales fueron discutidas con anterioridad en el apartado 2.1.2.

Los modelos que conforman esta clase pueden ser a su vez clasificados atendiendo al número de ecuaciones que utilizan para calcular el valor de la viscosidad efectiva. Con esto la clasificación se extiende de la siguiente manera:

- I.1.1. Modelos que no emplean ecuaciones diferenciales adicionales.
- I.1.2. Modelos que utilizan una ecuación diferencial.
- I.1.3. Modelos que utilizan una o dos ecuaciones diferenciales.
- I.1.4. Modelos que utilizan dos ecuaciones diferenciales.
- I.1.5. Modelos que utilizan cuatro ecuaciones diferenciales.

#### **I.1.1. Modelos que no emplean ecuaciones diferenciales adicionales.**

- Viscosidad efectiva constante (Schlichting, 1979; White, 1991; CHAM, 2001b).
- Modelo de turbulencia LEVEL (CHAM, 2001b).
- Modelo de longitud de mezclado de Prandtl (Schlichting, 1979; White, 1991; CHAM, 2001b).

#### **I.1.2. Modelos que utilizan una ecuación diferencial.**

- Modelo de la energía cinética turbulenta de Prandtl con una escala de longitud que se considera conocida.

#### **I.1.3. Modelos que utilizan una o dos ecuaciones diferenciales.**

- Modelo de turbulencia  $k-\epsilon$  de dos capas.

#### **I.1.4. Modelos que utilizan dos ecuaciones diferenciales.**

- Modelo de turbulencia  $k-\epsilon$  de Harlow y Nakayama.
- Modelo de turbulencia  $k-\epsilon$  modificado por Chen-Kim.
- Modelo de turbulencia  $k-\epsilon$  derivado a partir de métodos de renormalización.
- Modelo de turbulencia  $k-\epsilon$  de Lam-Bremhorst.
- Modelo de turbulencia  $k-\omega$  de Saffman-Spalding.

#### **I.1.5. Modelos que utilizan cuatro ecuaciones diferenciales.**

- Modelo de turbulencia  $k-\epsilon$  de dos escalas.

## **1.2. Modelos que no hacen uso de la hipótesis de la viscosidad efectiva.**

Dentro de esta categoría entran los modelos de esfuerzos de Reynolds. La idea central sobre la cual se basa este tipo de modelos es la solución de los esfuerzos de Reynolds por sí mismos en vez de suponer la existencia de una viscosidad turbulenta y una relación de proporcionalidad entre ésta y los gradientes de la velocidad principal. Esta solución se lleva a cabo por medio de *i*) la solución de ecuaciones diferenciales que describan el transporte de cada uno de estos esfuerzos, o *ii*) por un modelo algebraico de esfuerzos. Esto representa, por lo tanto, resolver una gran cantidad de ecuaciones diferenciales, lo cual implica, alto costo y tiempo de computadora.

## **II. Modelos de Múltiples Fluidos.**

Los modelos de Múltiples Fluidos calculan el comportamiento del flujo turbulento considerando que la turbulencia se debe a la interacción de dos o más fluidos que ocupan el mismo espacio, pero que se diferencian entre sí por su densidad, su temperatura, su velocidad o por cualquier otra propiedad cuyo uso sea conveniente. Las propiedades estadísticas del flujo son inferidas a partir de la probable distribución de los fluidos y de sus respectivas propiedades. En la sección 2.4 se hace una explicación más detallada de este tipo de modelos.

### **II.1. Modelos de Dos Fluidos.**

Es el más sencillo de los modelos de turbulencia de múltiples fluidos; sin embargo, después de las pruebas de validación realizadas con sus diferentes formas, puede decirse que los resultados obtenidos son lógicos y aún mejores que los de los modelos de turbulencia de Fluido Único que hacen uso de la hipótesis de la viscosidad efectiva, sobretodo cuando intervienen fuerzas de cuerpo (campos gravitatorios o electromagnéticos, fuerzas inerciales en movimientos rotatorios, etc.) o existen reacciones químicas dentro del caso analizado.

Este modelo supone que la turbulencia tiene su origen en la interacción de fragmentos de dos fluidos distintos que intercambian cantidad de movimiento, calor y masa entre sí. Una descripción más detallada de este modelo se encuentra en la sección 2.3.

Algunas de las formas en que ha sido aplicado este concepto son las siguientes:

- Modelo de “rompimiento de remolino” (“Eddy-break-up” model o EBU) de Spalding.
- Modelo mediante el “concepto de disipación de remolino” (“Eddy Disipation Concept” o EDC) de Magnussen.
- Modelo de dos fluidos de Spalding.

### **II.2. Modelos de Múltiples Fluidos.**

Algunos modelos de turbulencia de múltiples fluidos ya aplicados a casos teóricos o prácticos son los siguientes:

- Modelo de cuatro fluidos.
- Modelos de 14 fluidos.
- Modelo de 100 fluidos.

### **III. Modelos Probabilísticos.**

Estos modelos representan la aleatoriedad de la turbulencia mediante la aplicación de métodos Monte Carlo para establecer la probable distribución de las propiedades del fluido, lo cual trae como consecuencia la necesidad de realizar varios intentos para conformar de manera confiable las funciones de distribución de probabilidad para las diferentes variables del sistema.

Esos modelos aún no son de uso extendido debido al alto costo de cómputo que los caracteriza.

### **IV. Simulación de Remolinos Grandes (Large Eddy Simulation, LES).**

La Simulación de Grandes Remolinos es un método que simula un flujo turbulento a través de la combinación de la simulación directa y el modelado de la turbulencia. Para esto, los movimientos a pequeña escala, muy finos, son cuantificados mediante modelos de turbulencia llamados de submalla, mientras que los movimientos en una escala mayor, que poseen una mayor cantidad de energía, son simulados mediante la solución numérica de las ENS.

Aunque estos métodos son más costosos que los modelos de los grupos I y II y requieren de una mayor capacidad de cómputo, cuando son comparados con los modelos de SND, pertenecientes al grupo V, resultan ser mucho más económicos.

### **V. Simulación Numérica Directa (SND).**

La Simulación Numérica Directa (Direct Numerical Simulation, DNS) se enfoca hacia la aplicación de supercomputadoras para la solución de las ENS empleando mallas muy finas y pasos de tiempo muy cortos de manera que la solución así obtenida pueda considerarse como una solución exacta. Conceptualmente, éste es el enfoque más simple para simular la turbulencia, pues lo hace usando los conceptos propios de la simulación de flujo laminar.

La principal desventaja de esta técnica es el altísimo tiempo y costo computacional que representa. En la Universidad de Edinburg, por ejemplo, se han hecho simulaciones sobre mallas de 256 x 256 x 256 que han requerido 8 Gb de memoria y esperan poder utilizar mallas de 512 x 512 x 512 para lo cual requerirán la exorbitante cantidad de 32 Gb de memoria (DPA-UE, 2001). Por esta razón, la investigación sobre métodos matemáticos y de cómputo que sean capaces de reducir este costo es una de los problemas fundamentales que estos métodos desarrollan.

Actualmente, las aplicaciones de la SND se limitan al laboratorio, pues su costo es una barrera que impide su diversificación hacia aplicaciones de investigación tecnológica e industrial. Los casos a los cuales ha sido aplicada esta técnica son relativamente simples (flujo en canales o en tubería); sin embargo, su enorme utilidad radica en la posibilidad que brinda de hacer investigación, sin costosos modelos físicos, que permita conocer más sobre la naturaleza del fenómeno, así como validar y refinar, no sólo los modelos empíricos usados por los ingenieros para simular flujos complejos, sino también las teorías emergentes destinadas a explicar el origen y las causas de la turbulencia.



### 2.3. Modelo de turbulencia de dos fluidos (MTDF).

#### 2.3.1. Enfoque.

El movimiento turbulento puede verse como un proceso de mezclado entre fragmentos del mismo fluido que poseen atributos, tales como la velocidad, la densidad o la temperatura, diferentes. Tomando en cuenta este punto de vista, aunque de la manera más sencilla posible, es válido imaginar un flujo turbulento como una región del espacio donde coexisten dos fluidos que se mueven a velocidades diferentes y que poseen diferente energía o concentración de especies químicas, pero que son susceptibles de interactuar el uno con el otro.

Tanto Prandtl como Reynolds hicieron uso de la analogía entre el flujo turbulento y el flujo bifásico, el primero para estudiar fenómenos de transferencia de calor y el segundo como base para el desarrollo de su famosa teoría de la longitud de mezclado (Spalding, 1996). Sin embargo, se vieron obligados a hacer suposiciones que simplificaran el problema debido a la falta de herramientas de cálculo lo suficientemente poderosas para resolver completamente las ecuaciones resultantes. La aparición de la computadora y su rápido desarrollo, así como el desarrollo de nuevos algoritmos aplicables a flujos bifásicos, tales como el método IPSA (cuya descripción aparece en el Apéndice A), desarrollado por Spalding, permiten que la solución numérica de estas ecuaciones sea posible.

#### 2.3.2. Justificación.

Un flujo bifásico puede ser descrito mediante dos formulaciones diferentes que dan lugar, cada una por separado, a un modelo de difusión y a un modelo de dos fluidos. El modelo de difusión se formula considerando la mezcla como un todo. De esta manera, el modelo se expresa en términos de tres ecuaciones de conservación para la mezcla que corresponden a la cantidad de movimiento, la energía y la masa de la misma forma que se hace para el flujo de una sola fase. Por su parte, la formulación del modelo de dos fluidos se hace considerando a cada fase por separado; esto significa que deben resolverse dos conjuntos de ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento masa y energía. Cada una de estas seis ecuaciones contiene un término de interacción entre las fases que las acopla a través de condiciones en la frontera entre las fases (Ishii, 1975).

Lo que se propone con el modelo de turbulencia de dos fluidos es un poco el camino inverso: un flujo bifásico puede modelarse con un solo conjunto de ecuaciones definidas para la mezcla como si se tratase del flujo de una sola fase; por qué, entonces, no modelar un flujo monofásico como si se estuviera tratando con flujo bifásico o, más generalmente, con un flujo compuesto por una multitud de fases.

En un flujo bifásico, varias propiedades sufren cambios discontinuos en las interfaces. Si, por ejemplo, se registrara la evolución de la densidad en una posición dada  $x = x_0$ , se encontraría que ésta varía de una forma similar a la presentada en la figura 2.3 – 1a. En esta figura,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  representan las densidades promediadas en el tiempo de la fase 1 y de la fase 2, respectivamente y cada una de estas densidades pueden estar sujetas a fluctuaciones turbulentas. La evolución de la densidad en un punto puede ser promediada para cada tramo, siempre y cuando el lapso transcurrido entre una discontinuidad y otra sea mucho

mayor al periodo de las variaciones turbulentas (Figura 2.3 – 1b). Este promedio es el resultado que se obtiene cuando se resuelven las ecuaciones de conservación promediadas en el tiempo. Como es fácil apreciar, el comportamiento es similar al comportamiento que tendría la densidad en un flujo turbulento monofásico, pues se tendría una variación aleatoria del valor de la densidad cuando se evalúa en un punto específico; lo mismo ocurrirá con las otras propiedades de la mezcla en el flujo.

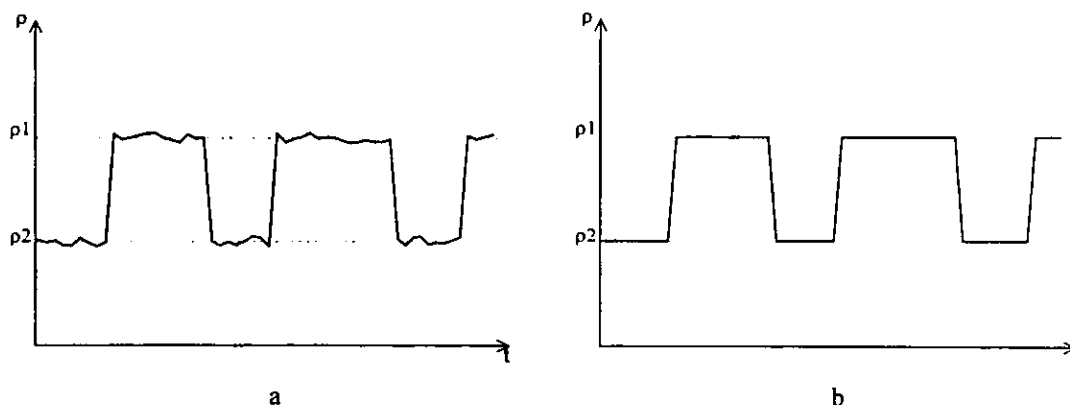


Figura 2.3 – 1. Evolución de la densidad en  $x = x_0$  en un flujo bifásico.  
a) Evolución de la densidad total; b) Evolución de la densidad promediada en el tiempo.

Proponemos ahora considerar que las variaciones de las propiedades del flujo en un punto no se deben al paso alternado de fragmentos de dos fases distintas y las hacemos, en cambio, corresponder a las fluctuaciones turbulentas de la propiedad respectiva en un flujo constituido por una fase única o, mejor dicho, por dos fluidos de idénticas propiedades termodinámicas.

De esta consideración surge el problema de la diferenciación de los fluidos. El criterio óptimo para diferenciar un fluido del otro no ha sido establecido con precisión para el caso de dos fluidos. De manera amplia, se puede decir que es posible establecer la diferenciación de los dos fluidos de dos maneras distintas:

- Por el valor de alguna de sus propiedades.
- Por la acción de las fuentes.

La diferenciación por medio de alguna de las propiedades implica la discretización de esta propiedad lo cual hace muy rígido al modelo pues se necesitaría conocer a priori el intervalo de valores permitidos y requiere el establecimiento de criterios que controlen la ganancia y pérdida de fluido. En el caso de los MTMF, sí es posible hacer uso de esta aproximación, ya que es posible hacer discreta una variable en un rango amplio y permitir que sea la solución de las ecuaciones de conservación la que establezca la distribución de probabilidad para los valores de esa variable.

En el presente trabajo se eligió la diferenciación por la acción de las fuentes en el caso del flujo de Couette. Este método consiste en postular que las fuentes de masa, cantidad de movimiento y energía actúan de manera diferente sobre uno u otro fluido, pero no sobre los dos a la vez; el intercambio de masa, energía y cantidad de movimiento entre la fuente y el fluido no afectado se da a través de los términos de acoplamiento que tienden a aproximar

los valores de las propiedades de los dos fluidos. La suposición de acción diferenciada de las fuentes, aunque arbitraria, permite el movimiento libre de las propiedades durante la simulación dándoles, al mismo tiempo, variabilidad (Ilegbusi y Spalding, 1987a).

Para el caso del lago, la simulación se planteó tomando en cuenta que en realidad siempre existe una acción diferenciada de las fuentes sobre cada fluido debido a que el término correspondiente aparece multiplicado por la fracción volumétrica de la fase que se está resolviendo. De esta forma, en las fronteras se aplican las fuentes a ambos fluidos y se permite que la solución de ambas fracciones volumétricas sea la que determine que cantidad de energía es ganada o perdida por cada fluido.

Una característica importante del modelado de la turbulencia por medio de dos fluidos es que entre estos existe una frontera completamente impermeable y no existe tensión superficial para los fragmentos de los fluidos. La consecuencia directa de este hecho es que las presiones para ambos fluidos se convierten en una única presión que comparten.

Si el número de fases se incrementara, se esperaría que la aproximación fuera cada vez mejor, de manera que en el límite, donde se tendría un número infinito de fluidos o fases, se obtendría una solución cualitativamente equivalente a la correspondiente a un flujo turbulento (Figura 2.3 – 2).

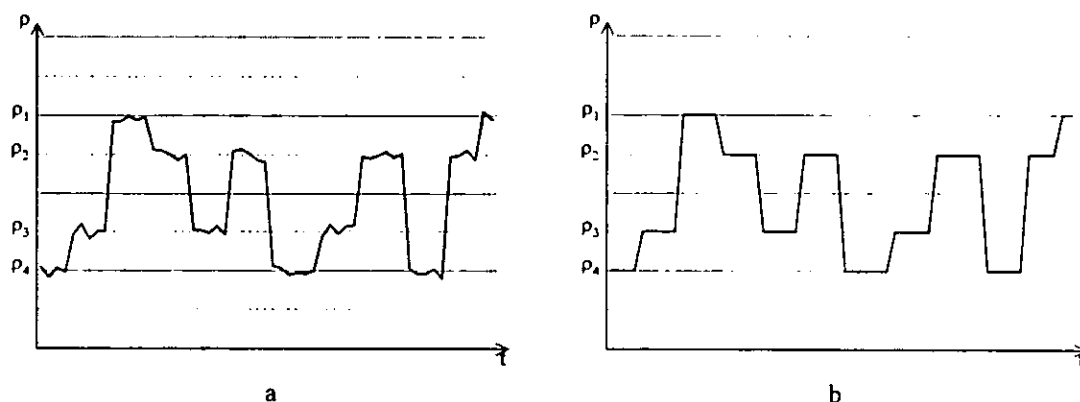


Figura 2.3 – 2. Evolución de la densidad en  $x = x_0$  en flujo con cuatro fases presentes. a) Evolución de la densidad total; b) Evolución de la densidad promediada en el tiempo.

### 2.3.3. Descripción matemática.

Al aplicar el modelo de turbulencia de dos fluidos se supone que en el mismo espacio coexisten dos fases, cada una ocupando una cierta fracción volumétrica, tal y como se hace en modelos de dos fluidos para flujo bifásico (Ishii, 1975; Fueyo, 1996). La fracción volumétrica se designará por la letra  $r$ . Se emplearán además los subíndice  $k = 1, 2$  y  $l = 1, 2$  para diferenciar las propiedades de una y otra fase. De esta manera, las fracciones volumétricas de ambas fases deben ser tales que

$$\sum_{k=1}^2 r_k = 1 \quad \dots (2.3 - 1)$$

En este caso, la fracción volumétrica de un fluido puede ser considerada como la probabilidad de encontrar a dicho fluido dentro del volumen considerado (c.f. Apéndice A).

Como los fluidos poseen diferentes valores en sus propiedades cinemáticas y termodinámicas (e.g. velocidad, temperatura, masa), entonces la fracción volumétrica  $r_1$  puede ser interpretada como la probabilidad de que el flujo se mueva con velocidad  $u_1$  y no con velocidad  $u_2$ , o de que el fluido tenga la temperatura  $T_1$  y no la temperatura  $T_2$ . De esta manera, el modelo de dos fluidos es capaz de tomar en cuenta la intermitencia de los flujos turbulentos que presentan diferentes velocidades en diferentes puntos del dominio.

Actualmente existen dos diferentes formulaciones del MTFD: la primera debida a Spalding (Ilegbusi y Spalding, 1987a; Ilegbusi y Spalding, 1987b), y la segunda a Shen *et al.* (2000).

### MTDF, según Spalding.

Las ecuaciones que describen el transporte de las cantidades conservadas (masa, energía y cantidad de movimiento) tienen la siguiente forma (c.f. Apéndice A):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k r_k \phi_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_k r_k u_{kj} \phi_k) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{\phi k} r_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{rk} \phi_k \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \right) = S_{i\phi} + r_k S_\phi \quad \dots (2.3-2)$$

mientras que la conservación de la masa se describe mediante la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k r_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_k r_k u_{kj}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{rk} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \right) + \dot{m}_{kl} \quad \dots (2.3-3)$$

donde  $\phi_k$  es la cantidad conservada a la cual corresponde la ecuación;  $\rho_k$ , la densidad correspondiente al fluido  $k$ ;  $\Gamma_{\phi k}$ , el coeficiente de difusividad correspondiente a la propiedad  $\phi$ ;  $\Gamma_{rk}$ , el coeficiente de difusividad de la fase  $r_k$ ;  $S_{i\phi} \equiv (f_{\phi k} + m_{kl})(\phi_l - \phi_k)$ , la fuente que resulta del transporte entre ambos fluidos, y  $S_\phi$ , las fuentes o sumideros de la propiedad  $\phi$  debidos a agentes externos (e.g. el gradiente de presión en el caso de la ecuación para la cantidad de movimiento); evidentemente, el subíndice  $j = 1,2,3$  se refiere a las tres direcciones espaciales ( $x_1 \equiv x$ ;  $x_2 \equiv y$ ;  $x_3 \equiv z$ ). Para este modelo (Spalding, 1987, Ilegbusi y Spalding, 1987a; Ilegbusi y Spalding, 1987b),

$$\Gamma_{rk} = \rho_k \frac{v_l}{\sigma_{irk}} \quad \dots (2.3-4)$$

$$\Gamma_{\phi k} = \rho_k \left( \frac{v}{\sigma_{\phi k}} + \frac{v_l}{\sigma_{i\phi k}} \right) \quad \dots (2.3-5)$$

$$v_l = c_l r_k r_l l_M u_{kj} - u_{lj} \quad \dots (2.3-6)$$

$$\dot{m}_{kl} = c_m \rho_k r_k r_l l_M^{-1} u_{kj} - u_{lj} \left( r_l - \frac{1}{2} \right) \quad \dots (2.3-7)$$

$$f_{\phi k} = c_f \rho_k r_k r_l l_M^{-1} u_{kj} - u_{lj} \quad \dots (2.3-8)$$

donde  $\sigma_{irk}$ ,  $\sigma_{\phi k}$  y  $\sigma_{i\phi k}$  son el número de Schmidt turbulento del fluido  $k$ , los números de Schmidt, laminar y turbulento, de  $\phi_k$ , respectivamente, y  $c_m$ ,  $c_l$  y  $c_f$  son constantes empíricas del modelo. El factor  $(r_l - 1/2)$  aparece únicamente para forzar la simetría en esta expresión,

pues de otra manera, el fluido 2 sería siempre el que cedería materia para lo cual no existe ninguna razón física.

En la ecuación para la velocidad transversal aparece una fuente extra de cantidad de movimiento debida al gradiente de la velocidad principal,  $|\partial w/\partial y|$  si el flujo principal se encuentra en la dirección  $z$  e  $y$  está en dirección vertical. La forma de esta fuente es la siguiente:

$$S_{vwk} = c_v c_f \rho_k r_k r_l u_{kj} - u_{lj} \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots (2.3 - 9)$$

Aquí,  $c_v$  es una constante empírica del modelo y  $w$  es la velocidad promedio o velocidad principal que se obtiene al sumar las velocidades de cada fluido tomando como factores de peso a las correspondientes fracciones volumétricas; es decir,  $w = r_1 w_1 + r_2 w_2$ . Esta fuente puede interpretarse como la propensión de una capa cortante a romperse en una sucesión de remolinos (Ilegbusi y Spalding, 1987a).

$l_M$  es una longitud de mezclado proporcional a la longitud de mezclado de Prandtl,  $l_{MP}$ , y puede calcularse por medio de las diferentes expresiones que existen para ésta última, dependiendo del problema en estudio.

Los valores de las constantes encontradas por Ilegbusi y Spalding (1987a) al estudiar casos de flujos cercanos a paredes aparecen en la tabla 2.3 - 1.

Tabla 2.3 - 1. Valores de las empíricas para la formulación de Spalding del modelo de turbulencia de dos fluidos (Ilegbusi y Spalding, 1987a).

$c_f$	$c_t$	$c_v$	$c_m$	$\sigma_{trk}$
0.05	10.0	0.30	10.00	1.00

Estos mismos investigadores indican que cuando se analizó el comportamiento del modelo en conductos fue necesario cambiar sustancialmente el valor de  $c_t$  (Ilegbusi y Spalding, 1987b); no indican, sin embargo, el nuevo valor.

### MTDF, según Shen *et al.*

La segunda formulación del MTDf debida a Shen *et al.* (2000) incorpora al MT  $k-\epsilon$  para hacer el cálculo de la viscosidad turbulenta y la longitud de mezclado.

Ecuación de continuidad para la fase  $k$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k r_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k r_k u_{kj}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( r_j \frac{\mu_{ek}}{\sigma_{rk}} + r_k \frac{\mu_{el}}{\sigma_{rl}} \right) \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \right] + S_{k,j} + m_{k,j} \quad \dots (2.3 - 10)$$

Esta ecuación también puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k r_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k r_k u_{kj}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_{ek}}{\sigma_{rk}} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \right) + r_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \tilde{\Gamma} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \right) + S_{k,j} \quad \dots (2.3 - 11)$$

Ecuación general de transporte para  $\phi_k$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k r_k \phi_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_k r_k u_{kj} \phi_k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_{ek}}{\sigma_{\phi k}} r_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_{ek} \phi_k \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \right) + F_{i\phi} + F_\phi \quad \dots (2.3 - 12)$$

donde

$$S_{k,l} = E^m = K_m \rho r_k r_l u_{ki} - u_{ji} \varepsilon / K^{1.5} \quad \dots (2.3 - 13)$$

$$m_{k,l} = \tilde{\Gamma} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \frac{\partial r_l}{\partial x_j} \quad \dots (2.3 - 14)$$

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\mu_{el}}{\sigma_{rl}} - \frac{\mu_{ek}}{\sigma_{rk}} \quad \dots (2.3 - 15)$$

$$F_{i\phi} = C_\phi E^m f(\phi_k, \phi_l) \quad \dots (2.3 - 16)$$

$$\mu_{ik} = \rho_k C_\mu \frac{K_k^2}{\varepsilon_k} \quad \dots (2.3 - 17)$$

$$\mu_{ek} = \mu_k + \mu_{ik} \quad \dots (2.3 - 18)$$

Los valores de los coeficientes  $C_\phi$ , las funciones  $f(\phi_{mk}, \phi_{ml})$  y las fuentes  $F_\phi$  para las diferentes variables resueltas aparecen en la siguiente tabla.

Tabla 2.3 – 2. Valores de  $C_\phi$ ,  $f(\phi_{mk}, \phi_{ml})$  y  $F_\phi$  para las ecuaciones del modelo de turbulencia de dos fluidos, según la formulación de Shen *et al.* (2000).

$\phi$	$C_\phi$	$f(\phi_k, \phi_l)$	$F_\phi$
$u_{ki}$	$\frac{K_f}{K_m}$	$u_{ki} - u_{li}$	$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_{ek}}{\sigma_{rk}} u_{kj} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( r_k \mu_{ek} \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} \right) - r_k \frac{\partial P}{\partial x_i} + r_l (\rho_k - \rho_l) g_i$
$K_k$	$\frac{K_f}{\rho}$	$\mu_{ek} \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} - \mu_{el} \frac{\partial u_{li}}{\partial x_j}$	$-\rho_k r_k \varepsilon_k + P_K + G_b$
$\varepsilon_k$	$-2K_f$	$\varepsilon_k$	$\frac{\varepsilon_k}{K_k} (C_1 P_K - C_2 \rho_k r_k \varepsilon_k)$

Las expresiones correspondientes a la generación de energía cinética turbulenta,  $P_K$ , y a la fuente adicional para tomar en cuenta los efectos de flotación en el modelo  $k$ - $\varepsilon$ ,  $G_b$ , están dadas en este caso por

$$P_K = \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} \left[ \frac{\mu_{ek}}{\sigma_{rk}} u_{kj} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} + \mu_{ek} r_k \left( \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{kj}}{\partial x_i} \right) \right] \quad \dots (2.3 - 19)$$

$$G_h = - \frac{\mu_{ek}}{\sigma_{rk}} \frac{\rho_k - \rho_r}{\rho_k} \frac{\partial r_k}{\partial x_i} g_i \quad \dots (2.3 - 20)$$

En estas expresiones,  $\rho$ ,  $K$  y  $\epsilon$  son la densidad, la energía cinética turbulenta y la tasa de disipación de la energía cinética turbulenta de la mezcla, respectivamente;  $\mu_k$ ,  $\mu_{tk}$  y  $\mu_{ek}$ , son la viscosidad molecular, la viscosidad turbulenta y la viscosidad efectiva del fluido  $k$ , respectivamente;  $\rho_k$  es la densidad del fluido  $k$ ;  $\rho_r$  es una densidad de referencia;  $\sigma_{rk}$  es el número de Schmidt turbulento del fluido  $k$ , el cual es en general constante, pero fuertemente influido por efectos de flotación los cuales pueden ser tomados en cuenta mediante la fórmula empírica de Munk-Anderson (Rodi, 1993),

$$\sigma_{rk} = \sigma_{r0} \frac{(1 + 3.33 Ri_k)^{1.5}}{(1 + 10 Ri_k)^{0.5}} \quad \dots (2.3 - 21)$$

que relaciona al número de Schmidt turbulento con el número de Richardson

$$Ri_k = - \frac{g}{\rho_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial y} \frac{\partial y}{(\partial u_k)^2} \quad \dots (2.3 - 22)$$

Las constantes  $K_f$ ,  $K_m$ ,  $\sigma_{Kk}$ ,  $\sigma_{\epsilon k}$ ,  $\sigma_{r0}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_\mu$  tienen los valores que aparecen en la tabla 2.3 - 3.

Tabla 2.3 - 3. Valores de las constantes del MTFD, según Shen *et al.* (2000)

$K_f$	$K_m$	$\sigma_{Kk}$	$\sigma_{rk}$	$\sigma_{r0}$	$C_1$	$C_2$	$C_\mu$
0.05	0.1	1.0	1.3	1.0	1.44	1.92	0.09

La incorporación del MT  $k-\epsilon$  para ser utilizado junto al MTFD puede ser interpretado como el modelado de la turbulencia en dos escalas. De esta manera, el micromezclado estaría representado por el MT  $k-\epsilon$ , mientras que el mezclado a gran escala sería tomado en cuenta a través del MTFD.

Esta versión del modelo es la más completo, sin embargo, tiene la desventaja de su excesiva complejidad, pues incorpora cuatro ecuaciones diferenciales (dos para la energía cinética turbulenta y dos para la tasa de disipación de la misma).

En este trabajo se propone una tercera forma de plantear al MTFD, la cual consiste en una combinación de ambos modelos; es decir, tomar las ecuaciones que utiliza Spalding (que además son las que se encuentran codificadas en PHOENICS) e incorporar el MT  $k-\epsilon$  para el primer fluido. Las ecuaciones en este caso son las mismas que para la primera formulación expuesta, pero se hacen las siguientes modificaciones:

Ecuación para la energía cinética turbulenta del fluido 1

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 r_1 K_1) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_1 r_1 u_{1j} K_1) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{K1} r_1 \frac{\partial K_1}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{r1} K_1 \frac{\partial r_1}{\partial x_j} \right) = \rho_1 r_1 (P_k + G_h - \epsilon) \quad \dots (2.3 - 23)$$

Ecuación para la tasa de disipación de la energía cinética turbulenta del fluido 1

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 r_1 \varepsilon_1) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_1 r_1 u_{1j} \varepsilon_1) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{\varepsilon 1} r_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{r 1} \varepsilon_1 \frac{\partial r_1}{\partial x_j} \right) = \rho_1 r_1 \frac{\varepsilon_1}{K_1} (C_1 P_K + C_3 G_b - C_2 \varepsilon) \quad \dots (2.3 - 24)$$

Los valores de  $\Gamma_{r1}$ ,  $\Gamma_{K1}$ ,  $\Gamma_{\varepsilon 1}$ ,  $P_K$  y  $G_b$  se calculan por medio de las siguientes relaciones auxiliares:

$$\Gamma_{r1} = \rho_1 \frac{v_t}{\sigma_{r1}} \quad \dots (2.3 - 25)$$

$$\Gamma_{K1} = \rho_1 \left( \nu + \frac{v_t}{\sigma_{K1}} \right) \quad \dots (2.3 - 26)$$

$$\Gamma_{\varepsilon 1} = \rho_1 \left( \nu + \frac{v_t}{\sigma_{\varepsilon 1}} \right) \quad \dots (2.3 - 27)$$

$$P_K = \nu_t \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i} \right) \quad \dots (2.3 - 28)$$

$$G_b = - \frac{\nu_t}{\sigma_{T1} \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} g_i \quad \dots (2.3 - 29)$$

La viscosidad cinemática turbulenta y la longitud de mezclado se calculan en este caso con:

$$\nu_t = C_\mu C_D \frac{K_1^2}{\varepsilon_1} \quad \dots (2.3 - 30)$$

$$l_M = C_D \frac{K_1^{1.5}}{\varepsilon_1} \quad \dots (2.3 - 31)$$

Esta última formulación híbrida es útil por la facilidad que presenta para ser codificada en PHOENICS, ya que en el modelo IPSA de este programa, se asume que la turbulencia es una propiedad de la fase 1 y que  $\nu_t$  es compartido por ambas fases. La viscosidad dinámica de cada fase se calcula multiplicando la viscosidad cinemática por la densidad correspondiente.



### 2.3.4. Ventajas y desventajas frente a otros modelos.

La mayoría de los modelos de turbulencia clásicos de fluido único padecen de tres defectos (Ilegbusi y Spalding, 1987a):

1. No consideran la intermitencia, que es una característica importante de los flujos cortantes turbulentos.
2. Parten de la hipótesis de viscosidad efectiva que supone que la difusión de flujo principal tiene el mismo signo que el gradiente de la propiedad promedio que se estudia (velocidad, temperatura, concentración, etc.).
3. Las constantes de estos modelos dependen del problema al cual se apliquen.

El MTDf toma en cuenta la intermitencia de los flujos turbulentos a través de la fracción volumétrica como parte de la descripción de la turbulencia. Además, este modelo es especialmente útil cuando se tiene flotación debido a diferencias de densidades entre una porción de fluido y otra, o cuando están presentes otras fuerzas de cuerpo que pudieran generar difusión adversa al gradiente de la propiedad promedio en estudio, ya que, mediante la introducción de una fuente de cantidad de movimiento adicional en las ecuaciones que gobiernan el fenómeno, pueden considerarse estos efectos. Con estas dos características mencionadas se solucionan dos de los defectos que se mencionaron como propios de los modelos convencionales. Sin embargo, el tercer defecto es una desventaja común entre el MTDf y los demás modelos de turbulencia. Ya Ilegbusi y Spalding (1987b) habían reportado un cambio sustancial en el valor de la constante  $c_f$ , aunque no especifica la magnitud de esta variación, del mismo modo, durante esta investigación se encontró que el valor de  $c_f$  y  $\sigma_{rk}$  tienen un valor óptimo diferente al reportado en la literatura existente sobre el tema (Ilegbusi y Spalding, 1987a; Shen *et al.*, 2000) cuando el modelo se aplica al caso de la hidrodinámica de cuerpos de agua someros, problema cuyas características – movimientos de fluido con fuerte influencia por parte de las diferencias locales de densidad causadas por el gradiente prevaleciente de temperatura – lo hacen ideal para ser enfrentado a través del punto de vista de este modelo.

Obviamente, la diferencia principal entre los modelos de fluido único, también llamados modelos clásicos, y el MTDf es que, mientras los primeros centran su capacidad de predicción en las propiedades promediadas en el tiempo de un solo fluido, el MTDf, al considerar que el espacio contiene dos fluidos distintos, trata con dos conjuntos de cantidades promediadas en el tiempo; es decir, con un valor de la densidad para el fluido 1 y otro para el fluido 2, etcétera. Estos dos conjuntos, junto con la introducción de la probabilidad de hallar a uno u otro fluido en un cierto volumen de control a través de la fracción volumétrica da la posibilidad de predecir, no sólo las propiedades promediadas de la mezcla, sino también algunas otras cantidades importantes como las fluctuaciones esperadas o la energía cinética promedio del movimiento turbulento (Spalding, 1999; Shen *et al.*, 2000), lo cual constituye una ventaja.

Por otro lado, una ventaja clara que tienen los modelos de fluido único es que son modelos validados más extensamente que el MTDf (Spalding, 1995). Éste último vio su más grande campaña de validación con el equipo de Spalding, misma que concluyó en 1988, aunque se han hecho algunos intentos esporádicos por avanzar en el desarrollo del modelo.

La gran desventaja que presenta el MTDf frente a los modelos de fluido único es que para su utilización es necesario resolver dos conjuntos de ecuaciones de transporte en vez de uno, lo cual implica no sólo la necesidad de una mayor cantidad de recursos de cómputo (lo cual en la actualidad es más bien un problema relativo), sino que aumenta la no linealidad del sistema de ecuaciones diferenciales parciales que deben ser resueltas, pues la evolución de cada variable está afectada por la evolución de todas las demás. Esto provoca que la solución sea altamente dependiente de las condiciones iniciales, de la distribución de la malla, del tamaño de los pasos de tiempo y del valor de los parámetros de relajación usados para llevar a cabo la simulación (Shen *et al.* 2000).

Además, aunque los resultados que se obtienen con el MTDf mejoran los resultados que arrojan los modelos de fluido único, una limitación intrínseca de este modelo es que únicamente divide a la población de fragmentos de fluido en dos (Figura 2.3 – 3). Esto genera una distribución con únicamente dos picos muy estrechos (dos funciones delta de Dirac, cada una en valores específicos de la variable en estudio); sin embargo, se sabe que la distribución de velocidades en un flujo turbulento es continua: es decir, dentro del seno de un fluido turbulento se encuentran muchos más que dos valores diferentes para la velocidad instantánea de los fragmentos de fluido.

Los modelos de turbulencia de múltiples fluidos (MTMF) tratan al flujo turbulento como un cúmulo de fluidos diferentes que, como en el MTDf, poseen cada uno un conjunto de propiedades promediadas en el tiempo. Este cúmulo de propiedades en conjunto, cuyo número depende del problema y de la capacidad de cómputo disponible, genera una distribución de población de fluido más realista, que cumple una función análoga a una función de distribución de probabilidad para las propiedades del flujo (Figura 2.3 – 4).

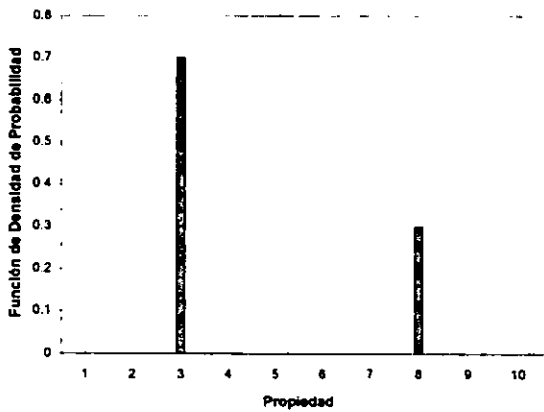


Figura 2.3 – 3

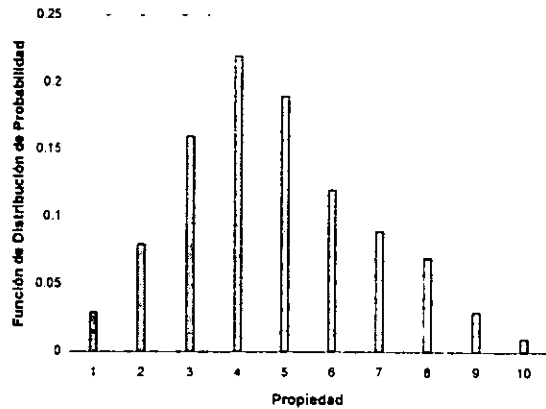


Figura 2.3 – 4

Además, existen otras dos diferencias importantes entre el MTDf y los MTMF. La primera es que los estados de los dos fluidos pueden moverse libremente sobre el espacio de fase definido por los atributos del fluido, mientras que el modelo de múltiples fluidos restringe los estados de los fluidos constituyentes a ciertos valores discretos. Supuestamente, esta desventaja de los MTMF frente al MTDf se puede reducir mediante la introducción de mallas variables apropiadas (Spalding, 1996). La segunda diferencia importante es que en el MTDf se resuelven dos conjuntos completos de ENS, mientras que en los MTMF es innecesaria la solución de los conjuntos de ecuaciones de transporte completos, tarea que es

sustituida por la solución de un conjunto de ecuaciones de transporte para la velocidad media de la mezcla y varias ecuaciones algebraicas para las propiedades de cada uno de los fluidos presentes. Esto se logra mediante la aplicación de un método de Deslizamiento Algebraico, llamado ASLP (Algebraic Slip algorithm) en PHOENICS.

Los modelos probabilísticos representan la aleatoriedad de la turbulencia mediante la aplicación de métodos Monte Carlo (Spalding, 1995), lo cual trae como consecuencia la necesidad de realizar varios intentos para conformar de manera confiable las funciones de distribución de probabilidad para las diferentes variables del sistema. La diferencia entre estos modelos y el MTDf y los modelos de turbulencia de múltiples fluidos en general es que éstos dos últimos emplean ecuaciones de transporte aplicadas a varios fluidos coexistentes para establecer la función de distribución de probabilidad en lugar de aplicar los métodos por ensayos a un solo fluido como lo hacen los modelos probabilísticos.

#### **2.4. Generalización: Modelos de turbulencia de múltiples fluidos (MTMF).**

La idea subyacente al MTDf es la consideración del flujo turbulento como un flujo dentro del cual coexisten dos fluidos diferentes, cada uno con sus respectivas propiedades o atributos. Los MTMF son una extensión natural de esta idea. En estos modelos el número de fluidos ya no se restringe únicamente a dos fluidos, pudiéndose emplear tantos fluidos como lo requiera el problema, siempre y cuando se cuenten con los recursos de cómputo suficientes para su tratamiento. Un paso importante en esta dirección fue el desarrollo del método de Deslizamiento Algebraico (Algebraic Slip method o ASLP) por medio del cual se hace innecesaria la solución de los conjuntos de ecuaciones de transporte completos; esta tarea es sustituida por la solución de un conjunto de ecuaciones de transporte para la velocidad media de la mezcla y varias ecuaciones algebraicas para las propiedades de cada uno de los fluidos presentes.

El objetivo de los modelos de turbulencia de múltiples fluidos es generar una *distribución de población de fluido* (DPF). Esta distribución es el equivalente a una función de densidad de probabilidad (FDP) para la existencia o presencia de los diferentes fluidos y, por lo tanto, para sus propiedades.

Así, por ejemplo, si la variable que distingue a los fluidos es la velocidad, la DPF puede dar información acerca de que tan probable o improbable es encontrar fluido moviéndose a 2.0 m/s en una determinada región del dominio.

La simulación por computadora de muchos fenómenos de turbulencia, sobretodo de aquéllos que se caracterizan por la existencia de fuerzas de cuerpo o reacciones químicas, requiere (Spalding, 1998):

- La descripción cuantitativa del estado del fluido en términos de FDP.
- Hipótesis cuantitativas que describan la transferencia de masa y de calor, el micromezclado, la mecánica y la química del proceso, y otros procesos que tiendan a cambiar las FDP's.
- La incorporación de estas hipótesis, y de las leyes de conservación de la física, en ecuaciones matemáticas que puedan ser resueltas numéricamente.
- El cálculo de las soluciones de estas ecuaciones para generar las FDP's requeridas.

Debido a la enorme tarea que en el pasado, y aún ahora, representa calcular las FDP se hicieron diferentes intentos en los cuales se presuponía su forma, o se intentaba calcular, mediante ecuaciones de transporte y constantes empíricas, sólo algunas de sus propiedades estadísticas (Spalding, 1999).

La idea de calcular la FDP mediante una ecuación diferencial de transporte fue concebida por Dopazo y O'Brien en 1974, pero la solución numérica fue obtenida por Pope hasta 1982, aunque concluyó que el costo computacional era demasiado alto, debido a que decidió emplear el método "Monte Carlo" en su cálculo.

Frente a estos modelos, los MTMF presentan la ventaja de que hacen posible un cálculo de las funciones de densidad de probabilidad, las cuales son muy importantes cuando se trabaja con procesos en los cuales intervienen reacciones químicas o cuando se trata con flujos donde existen fluctuaciones en la densidad de manera que las fuerzas de cuerpo gravitacionales o de otro tipo jueguen un papel importante, a un bajo costo de cómputo y sin incorporar suposiciones a priori que puedan tener consecuencias importantes en los diseños de ingeniería que de ellas emerjan. De acuerdo con Spalding (1998) algunas de las aplicaciones más promisorias para los MTMF son las siguientes:

- Separadores ciclónicos;
- Propagación de flamas en motores de combustión interna;
- Combustión en hornos industriales y calderas;
- Contaminación atmosférica;
- Climatología, y
- Contaminación de cuerpos de agua naturales y fenómenos oceanográficos.

La idea básica de los MTMF es considerar al fluido, que puede estar formado por una o varias fases termodinámicas, como una población discreta, no sólo en el espacio y en el tiempo, sino también en alguna propiedad o propiedades elegidas arbitrariamente. Estas propiedades son llamadas *propiedades para la distinción de la población* (PDP). Para continuar con el análisis estadístico se proponen rangos para cada PDP y a cada uno de ellos se les asigna una probabilidad de existencia. Esta probabilidad será la proporción del tiempo durante la cual la propiedad del fluido se encuentra dentro de cada rango para una celda determinada.

Si el número de PDP's elegidas es uno, se dice que la población es unidimensional; si se escogen dos propiedades, la población se llama bidimensional. Es posible escoger más de dos propiedades en cuyo caso, las poblaciones son llamadas tridimensional, tetradimensional, etcétera según corresponda. Por otro lado, el número de fluidos está determinado por el número de componentes de la población; es decir, por el producto de los rangos en que sean divididas las PDP's. A una propiedad a la cual se le permite variar continuamente se le llama con justa razón propiedad continua (PC).

A manera de ejemplo, si se modela un flujo monofásico de agua escogiendo a la velocidad como PDP y se proponen dos rangos de velocidad, *i.e.* de 0 a 0.5 m/s y de 0.5 a 1 m/s, entonces se tiene una población unidimensional de dos fluidos, por haber una sola PDP y dos rangos. Una PC, en este caso, podría ser la entalpía del agua, por lo que esta variable podrá tener un valor distinto en cada celda del dominio analizado, aunque este valor será

uniforme para toda la celda. Si se decide tomar en consideración las fluctuaciones de la entalpia y se proponen cinco bandas de entalpia, entonces resulta una población bidimensional de diez fluidos.

Como ya se mencionó antes, la elección de PC's y PDP's es completamente arbitraria; en general, se escogen como PDP's las variables que tienen una influencia mayor sobre el fenómeno en estudio. Así por ejemplo, si se trata con un fenómeno donde la gravedad tenga un papel importante, se escogerá como PDP a la densidad.

El problema que debe resolverse es la simulación numérica de las fracciones volumétricas correspondientes a cada fluido y el valor de las PC's en cada celda del dominio. Estas dos cantidades están gobernadas por las leyes físicas de conservación y pueden ser expresadas mediante las ecuaciones diferenciales de transporte que deben tomar en cuenta la interacción entre los diferentes fluidos. Para lograrlo, Spalding (1995) ha propuesto una hipótesis llamada de "Acoplamiento y División" según la cual, dos fragmentos llevados a permanecer contiguos durante un cierto período de tiempo como consecuencia del movimiento turbulento mezclan sus propiedades, por acción tanto de la difusión molecular como de procesos de micromezclado turbulento, de manera que cuando vuelven a ser separados no existen solamente fragmentos con los atributos de estos dos fragmentos originales, sino también una descendencia con atributos intermedios. Las características de la descendencia están basadas en diferentes hipótesis de las cuales la más usada hasta este momento es la llamada "hipótesis promiscua mendeliana" según la cual un fluido puede mezclarse con cualquier otro y la descendencia tendrá características que resultan simplemente de dividir proporcionalmente las características de los padres. La tasa de "Acoplamiento y División" está determinada por las características hidrodinámicas del flujo, tales como el tamaño de los fragmentos o la velocidad relativa entre ellos. Las colisiones entre todos los fluidos se da a una tasa proporcional a la fracción volumétrica del fluido y a la frecuencia del movimiento fluctuante de la turbulencia que puede ser deducida directamente del ancho de los rangos de población si entre las PDP se encuentra la velocidad y si se escoge una medida para la escala de longitud.

La aproximación de "Acoplamiento y División" promiscua mendeliana no es la única posible ni la mejor. Existen otras hipótesis según las cuales las características de la descendencia están afectadas por los coeficientes de difusividad de las PDP's elegidas, que en general, tendrán valores diferentes (Spalding, 1998). Por lo tanto, existe mucho trabajo sobre los MTMF que está aún por hacerse y que incluye desarrollo conceptual, desarrollo de métodos numéricos y comparación de los resultados con experimentos y simulaciones numéricas directas.

### **3. Comportamiento térmico e hidrodinámico de lagos y embalses.**

En el interior de los lagos tienen lugar interesantes fenómenos de transporte de masa, energía y cantidad de movimiento que dan lugar a fenómenos tales como la estratificación térmica. La cantidad de movimiento es transportada y difundida por medio de los flujos de entrada y de salida, y por el esfuerzo cortante generado por el viento sobre la superficie del agua. De forma similar, el calor es transportado por flujos de entrada y de salida y por el acoplamiento superficial con las condiciones meteorológicas. La masa, en forma de sedimentos suspendidos, algas o nutrientes tales como el fósforo, se distribuye en el cuerpo de agua bajo la acción de estos procesos hidrotérmicos al tiempo que se llevan a cabo transformaciones biogeoquímicas. Los tres procesos de transporte son interactivos debido a que el mezclado se encuentra influido por la estratificación térmica, y la distribución de masa afecta la densidad del agua. Además, la temperatura afecta la productividad biológica, y el material suspendido afecta a la temperatura a través de su influencia sobre la absorción de la radiación solar en el interior de la columna de agua.

#### **3.1. Estratificación.**

Quizá la particularidad más importante del comportamiento de los lagos y embalses es la tendencia que presentan gran parte de estos cuerpos de agua a la estratificación. Este fenómeno ocurre al menos durante una parte del año y consiste en la formación de tres capas claramente identificadas producto de un mezclado incompleto en la dirección vertical. Estas tres capas se nombran epilimnión, metalimnión e hipolimnión, siendo la primera la más superficial, y la última, la más profunda.

El epilimnión está grandemente influido por las condiciones de la atmósfera, pues con ella intercambia tanto cantidad de movimiento, a través del cortante generado por los vientos, como energía que proviene del Sol y de la misma atmósfera. El epilimnión es una zona bien mezclada, gracias a la presencia de turbulencia. El metalimnión, también llamado termoclina, es la zona de separación entre el epilimnión y el hipolimnión. Presenta grandes gradientes de temperatura que llevan de la temperatura alta uniforme del epilimnión a la temperatura más baja del hipolimnión. Por último, el hipolimnión es una zona de temperatura uniforme baja y de poca turbulencia, lo cual da por resultado un mezclado pobre.

La estratificación en lagos de agua dulce se debe a que el calentamiento por radiación solar domina sobre el mezclado generado por los vientos y las corrientes de entrada y salida, incapaces de transportar agua caliente de la superficie hacia zonas más profundas. La causa de la estabilidad de esta configuración es la alta dependencia que muestra la densidad del agua con respecto a la temperatura (figura 3.1 - 1). Al ser más fría y, por lo tanto, más densa el agua en el fondo que en la superficie, se genera un gradiente de densidad estable, lo cual inhibe casi por completo el mezclado vertical en lagos y embalses, debido a que el viento y las corrientes de tributarios y descargas no poseen la suficiente energía para romper la diferencia de densidad creada por la temperatura.

### 3. Comportamiento térmico e hidrodinámico de lagos y embalses.

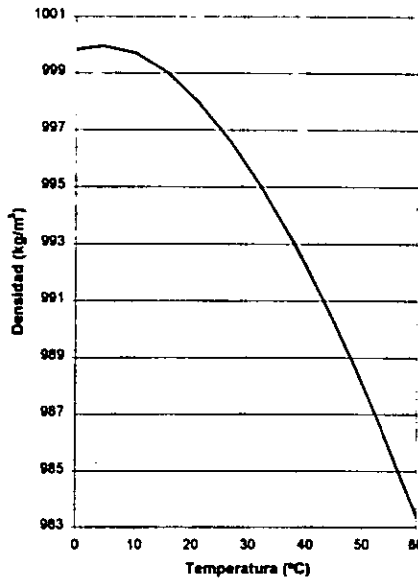


Figura 3.1 – 1. Dependencia de la densidad del agua con la temperatura

La estratificación térmica se clasifica en *estratificación estacional (seasonal stratification)* y *estratificación diaria (diurnal stratification)* de acuerdo con los dos ciclos de radiación solar. Imberger y Hamblin (1982) han sugerido que la termoclina estacional no es más que el resultado de la acumulación de los efectos diarios.

Ford y Johnson (1986)\* indican que los lagos tienden a estratificar estacionalmente, con diferencias de temperatura entre 10 °C y 20 °C, cuando su profundidad media es mayor de 10 m y su tiempo medio de residencia anual rebasa los 20 días. Sin embargo, Ishikawa y Tanaka (1993) han investigado la estratificación diaria en el lago Kasumigaura en Japón de 3.9 m de profundidad media y 7.3 m de profundidad máxima y han encontrado que efectivamente aparece una estratificación débil con diferencias de temperatura entre 1.0 °C y 2.0 °C. A un lago de este tipo, donde la profundidad media es menor que la profundidad típica para la termoclina estacional, se le llama *lago hidráulicamente somero* o simplemente lago somero (Ishikawa y Tanaka, 1993). El lago de Chapala es un ejemplo de este tipo de lagos.

Para determinar la mayor o menor propensión que un lago o un embalse tiene a estratificar estacionalmente se usa el *número de Froude densimétrico modificado*,  $F_d$ , el cual cuantifica el potencial de estratificación del lago. Este potencial es una función del intercambio de calor, la profundidad del lago, la batimetría, los flujos de entrada y salida y el mezclado por viento (Martin y McCutcheon, 1999). El número de Froude densimétrico modificado está dado por la expresión:

$$F_d = \frac{1}{ge} \frac{LQ}{D_m V} \quad \dots (3.1 - 1)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad, en m/s;  $e$ , un gradiente de densidad adimensional con un valor de  $10E-6 \text{ m}^{-1}$ ;  $L$ , la longitud del lago o del embalse, en m;  $Q$ , la descarga del cuerpo de agua, en  $\text{m}^3/\text{s}$ ;  $D_m$ , la profundidad media del embalse, en m, y  $V$ , el volumen del

\* Tomado de Martin y McCutcheon (1999)

embalse, en  $m^3$ . Cuando  $F_d \gg 1/\pi$ , el embalse estará bien mezclado; cuando  $F_d \ll 1/\pi$ , el embalse será fuertemente propenso a estratificarse, y cuando  $F_d \approx 1/\pi$ , el embalse estará débil o intermitentemente estratificado.

El mezclado por viento también afecta los patrones de estratificación. Usando las escalas de longitud o profundidad de Sundaram (1973), Ford y Johnson (1986)<sup>\*</sup> indicaron que la profundidad efectiva a la cual puede mezclarse un lago o un embalse por efecto del viento con un flujo de calor superficial determinado está dada por

$$D_i = \frac{w^{*3}}{B_k \alpha g \frac{H_n}{\rho c_p}} \quad \dots (3.1-2)$$

donde  $w^*$  es la velocidad de cortante del viento, en m/s;  $B_k$ , un coeficiente empírico de valor aproximadamente igual a la constante de von Karman (0.4);  $\alpha$ , el coeficiente volumétrico de expansión térmica del agua,  $1.8E-4 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ;  $H_n$ , el flujo de calor en la superficie, en  $\text{W/m}^2$ ;  $\rho$ , la densidad del agua, aproximadamente igual a  $1000 \text{ kg/m}^3$ ;  $g$ , la aceleración de la gravedad,  $9.81 \text{ m/s}^2$ , y  $c_p$ , la capacidad térmica específica del agua,  $4186 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ . Al sustituir estos valores en la expresión anterior se obtiene

$$D_i = 5.9E9 \frac{w^{*3}}{H_n} \quad \dots (3.1-3)$$

La velocidad de cortante del viento se calcula con

$$w^* = \sqrt{\frac{\rho_a C_d u_v^2}{\rho}} \quad \dots (3.1-4)$$

donde  $u_v$  es la velocidad del viento a 2 m sobre la superficie del lago, en m/s;  $\rho_a$ , la densidad del aire, aproximadamente igual a  $1.2 \text{ kg/m}^3$ , y  $C_d$ , un coeficiente de arrastre, que depende de la altura a la que se toma la velocidad del viento y que puede ser calculado con la fórmula sugerida por Wu (Harleman, 1982). Si se asume que este coeficiente tiene un valor de  $0.9E-3$ , para las condiciones del problema, la velocidad de cortante del viento estará dada por

$$w^* = 1.04E-3 u_v \quad \dots (3.1-5)$$

En la figura 3.1 – 2 se muestra la dependencia de la profundidad efectiva de mezclado por viento con el flujo de calor superficial y la velocidad del viento, de acuerdo con la ecuación 3.1 – 3 para estratificación estacional y flujo de calor y velocidad de viento del orden de magnitud de las que se encuentran en el lago de Chapala ( $600 - 850 \text{ W/m}^2$  y  $2 - 3 \text{ m/s}$ , respectivamente). De acuerdo con esta relación, se pueden esperar capas de mezclado de profundidad entre 0.15 y 0.6 m. En la figura 3.1 – 2 aparece esta misma relación para velocidades y radiaciones típicas para el lago Kasumigaura en Japón (NASA, 2001). Teóricamente, para este lago deben esperarse capas de mezclado de 5.0 m aproximadamente para el mes de agosto, cuando la radiación máxima es de  $640 \text{ W/m}^2$  y la velocidad del viento llega a ser de  $7 \text{ m/s}$ . Las observaciones reportadas por Ishikawa y

<sup>\*</sup> Tomado de Martin y McCutcheon (1999)



Tanaka muestran que el epilimnión en este lugar puede llegar a ser de 3 m o 4 m para las condiciones descritas aproximadamente, lo cual se encuentra en relativa concordancia con el cálculo teórico, aunque no se debe olvidar que estas relaciones han sido obtenidas mediante la observación de lagos dimícticos, en general más profundos y su validación para lagos someros polimícticos no ha sido completada aún.

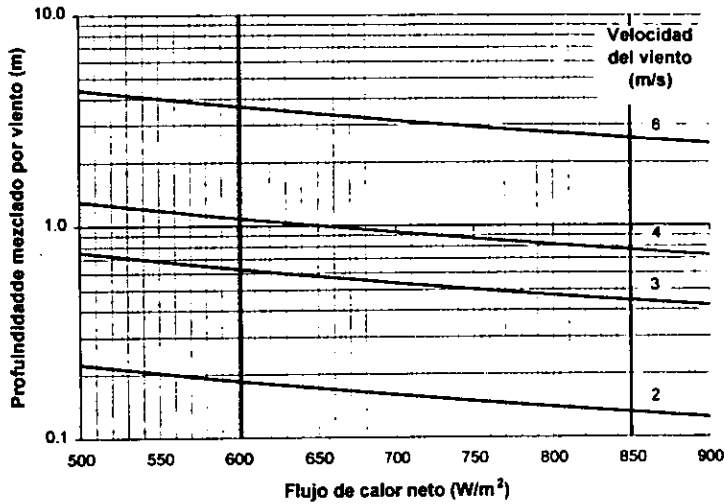


Figura 3.1 – 2. Relación entre la profundidad de mezclado por viento, el flujo neto de calor y la velocidad del viento para valores típicos en la ubicación del lago de Chapala, México.

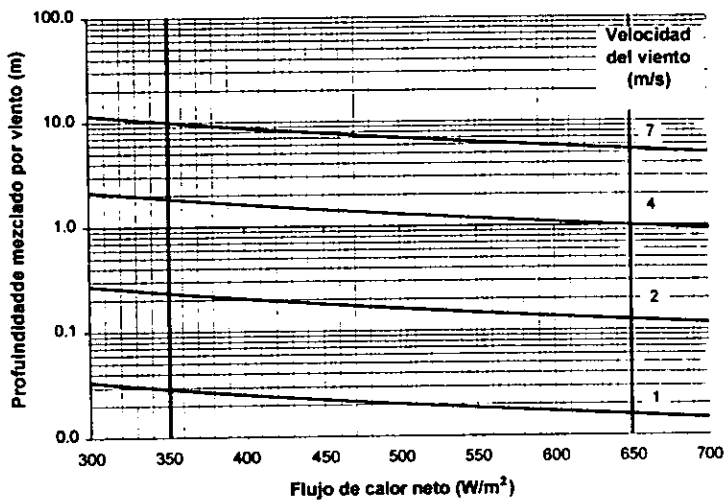


Figura 3.1 – 3. Relación entre la profundidad de mezclado por viento, el flujo neto de calor y la velocidad del viento para valores típicos en la ubicación del lago Kasumigaura, Japón.

### 3.2. Método de Temperatura Global.

El flujo de energía térmica total  $Q_t$  que incide en la superficie de un lago incluye: radiación solar de onda corta, de la cual una parte  $Q_v$  penetra en el cuerpo de agua y la otra  $Q_s$  es absorbida por la superficie; radiación atmosférica de onda larga  $Q_a$ ; radiación reflejada por la superficie del agua  $Q_r$ ; pérdidas por evaporación  $Q_e$ , y convección  $Q_c$ . La relación entre estas cantidades puede expresarse como,

$$Q_t = Q_v + Q_s + Q_a + Q_r + Q_e + Q_c \quad \dots (3.2-1)$$

La producción volumétrica de calor dentro del cuerpo de agua debida a la radiación solar puede evaluarse mediante la expresión (Harleman, 1982),

$$Q_v = \eta(1 - \beta)\phi_0 e^{-\eta(h-y)} \quad \dots (3.2-2)$$

donde  $\phi_0$  es la radiación solar que alcanza la superficie, en  $W/m^2$ ;  $\beta$ , la fracción de esta radiación que es absorbida superficialmente;  $\eta$ , un coeficiente de extinción que depende de la cantidad de sólidos que se encuentren suspendidos en el agua;  $h$ , la profundidad máxima del lago, e  $y$  la distancia medida a partir de esta profundidad, ambas en m.

A partir de esto, resulta evidente que la radiación solar que es absorbida por la superficie esta dada por

$$Q_s = \beta\phi_0 \quad \dots (3.2-3)$$

La radiación que proviene de la atmósfera se evalúa mediante la siguiente expresión (Bowie *et al.*, 1985)

$$Q_a = (C_1 + C_2 T_{aire}) (1 + 0.17 C_{ld}^2) \quad \dots (3.2-4)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de valores 208.733 y 6.2363, respectivamente;  $C_{ld}$  es un coeficiente de nubosidad, y  $T_{aire}$ , la temperatura del aire.

El calor que el agua emite hacia la atmósfera se calcula de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann:

$$Q_r = \epsilon\sigma\theta_s^4 \quad \dots (3.2-5)$$

donde  $\epsilon$  es la emisividad de la superficie, para la cual se ha determinado un valor relativamente constante de  $0.97 \pm 0.005$  (Ryan *et al.*, 1974);  $\sigma = 5.7E-8 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$  es la constante de Stefan-Boltzmann, y  $\theta_s$  es la temperatura absoluta (en K) de la superficie del agua. Para la gama de temperaturas que se encuentran en un lago, una buena aproximación lineal a la expresión (3.2-5) es (Padilla, 1994):

$$Q_r = a + bT_s \quad \dots (3.2-5a)$$

donde  $a = 308.2$ ,  $b = 4.9$  y  $T_s$  es la temperatura superficial del agua, en  $^{\circ}C$ .

Para evaluar las pérdidas por evaporación no existe una fórmula sencilla, pero pueden ser calculadas a través de la expresión (Adams *et al.*, 1990),

$$Q_e = (Q_i^2 + Q_j^2)^{\frac{1}{2}} (p_s - p_{aire}) \quad \dots (3.2-6)$$

Aquí,  $p_s$  y  $p_{aire}$  son las presiones parciales del vapor de agua correspondientes a la superficie del lago y al aire a 2 m sobre el nivel del espejo de agua, en mbar, respectivamente, ambas dadas en mbar.  $Q_l$  es un término que se refiere a la transferencia de calor por efecto de la convección libre y esta dado por (Adams *et al.*, 1990)

$$Q_l = 2.7(T_{sv} - T_{av})^{\frac{1}{3}} \quad \dots (3.2-7)$$

Las temperaturas  $T_{sv}$  y  $T_{av}$  son llamadas temperaturas de saturación y de ambiente, en °C, respectivamente, siendo ambas virtuales. Para calcularlas se usan las siguientes expresiones (Adams *et al.*, 1990):

$$T_{sv} = \theta_v - 273.15 \quad \dots (3.2-8)$$

$$\theta_v = (T_s + 273.15)(1 + 0.61\omega) \quad \dots (3.2-9)$$

$$\omega = 0.622 \frac{p_s}{p_a - p_s} \quad \dots (3.2-10)$$

$$p_s = \varphi_s \cdot p_{gs} \quad \dots (3.2-11)$$

Resulta evidente que  $\omega$  se refiere a la humedad específica;  $p_{gs}$ , a la presión de saturación del vapor del agua correspondiente a la temperatura de la superficie, en mbar;  $\varphi_s$ , a la humedad relativa del aire en la superficie del agua, y  $p_a$ , a la presión atmosférica. La temperatura de ambiente virtual se calcula con las mismas expresiones considerando las condiciones del aire a 2 m sobre el nivel del espejo de agua.

La presión de saturación puede correlacionarse con la temperatura con la expresión (Padilla, 1994)

$$p_{gs} = 1000 \exp \left[ 48.931 - \frac{6833.96}{T_s + 273.15} - 5.169 \ln(T_s + 273.15) \right] \quad \dots (3.2-12)$$

Por otra parte,  $Q_f$  toma en cuenta la transferencia de calor por convección forzada que tiene lugar debido a la presencia de viento. Para estimarla se usa la sencilla relación (Adams *et al.*, 1990)

$$Q_f = 3.2U_{aire} \quad \dots (3.2-13)$$

donde  $U_{aire}$  es la velocidad del viento a 2 m sobre la superficie del agua.

Finalmente, el flujo de calor por convección se calcula a través de la razón de Bowen (Adams *et al.*, 1990)

$$R_b = \frac{Q_c}{Q_e} = C \frac{T_s - T_{aire}}{p_s - p_{aire}} \quad \dots (3.2-14)$$

Con esta relación pueden calcularse las pérdidas por evaporación y por convección con la ecuación (Adams *et al.*, 1990)

$$Q_{ec} = Q_e (1 + R_b) \quad \dots (3.2-15)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (3.2 - 6) y (3.2 - 14) en (3.2 - 15) y después de una manipulación algebraica se obtiene la expresión (Adams *et al.*, 1990)

$$Q_e = (Q_i^2 + Q_j^2)^{\frac{1}{2}} [(p_s - p_{aire}) + C(T_s - T_{aire})] \quad \dots (3.2 - 15)$$

En todas estas expresiones, las presiones están dadas en mbar y los flujos de calor en W/m<sup>2</sup>

ENCUADERNACIONES  
TESIS  
FOLLETOS Y MANUALES  
COMPU - IMPRESOS

---

Medicina No. 24 Interior P.B. Copilco Universidad  
Coyoacán, 04360, México, D.F.  
Tel/fax: 5659-3435, 5658-1553

## 4. Casos analizados.

Se analizaron dos configuraciones de flujo diferentes mediante el modelo de turbulencia de dos fluidos (MTDF). El primero es un caso ya estudiado anteriormente por otros grupos de investigación y se utilizó en este trabajo simplemente como ejemplo de validación del modelo, aunque se añaden algunas observaciones importantes. El tercer caso es una aplicación directa al problema que nos atañe. Se trata del modelo simplificado de un lago donde se conjuntan las características del MTDF con las características hidrodinámicas fundamentales de un cuerpo de agua de este tipo: intercambio de calor con el medio y estratificación por temperatura.

### 4.1. Flujo de Couette turbulento.

#### 4.1.1. Descripción.

Un *flujo de Couette* es una de las configuraciones de flujo más simples, en la cual se tiene una capa de fluido restringido a moverse entre dos superficies paralelas por efecto de la presencia de un gradiente de presión (Figura 4.1 – 1a). Otra forma de inducir un flujo entre las dos superficies paralelas en el caso de no existir un gradiente de presión es permitir que las superficies se muevan a velocidades diferentes; es decir, con cierta velocidad relativa entre sí. A este caso se le llama *flujo de Couette plano*, y se ilustra en la figura 4.1 – 1b. Cuando existen ambas condiciones al mismo tiempo; es decir, cuando se cuenta con la presencia de un gradiente de presión y las superficies son libres de moverse una con respecto a la otra manteniéndose paralelas entre sí, se dice que se tiene un *flujo de Couette general* (Figura 4.1 – 1c).

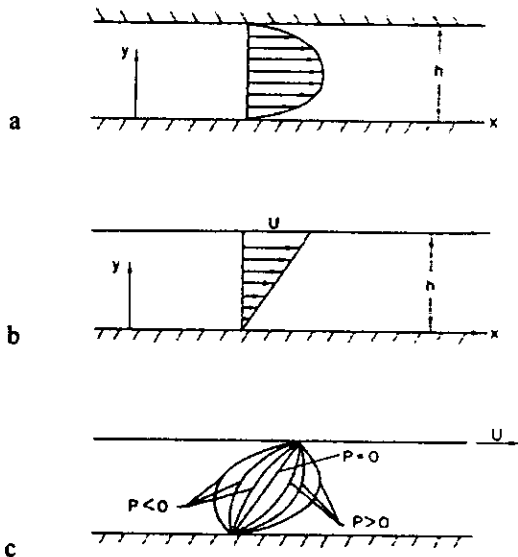


Figura 4.1 – 1. Diferentes tipos de flujos de Couette (Currie, 1993).

Reichardt (1954, 1959; tomado de Schlichting, 1979) llevó a cabo una investigación extensiva sobre el flujo de Couette plano. De acuerdo con estos estudios, el flujo es laminar mientras el número de Reynolds, definido para este caso como  $Re = Uh / \nu$ , es menor que 1500 y la distribución de velocidades es lineal con un buen grado de aproximación. Cuando el número de Reynolds supera el valor de 1500, el flujo se vuelve turbulento. Los perfiles de velocidad turbulentos son muy planos en el centro y tienen una pendiente muy pronunciada cerca de las paredes. Este comportamiento es el esperado si se toma en cuenta que el esfuerzo cortante turbulento está compuesto, de acuerdo con la hipótesis de Boussinesq, por dos contribuciones: una laminar

$$\tau_l = \mu_l \frac{du}{dy}$$

y una turbulenta

$$\tau_t = \mu_t \frac{du}{dy}$$

El cortante total esta dado por

$$\tau = \tau_0 = \tau_l + \tau_t = (\mu_l + \mu_t) \frac{du}{dy}$$

donde  $\tau_0$  denota el esfuerzo cortante en la pared. En un flujo de Couette plano el valor del esfuerzo cortante permanece rigurosamente constante en todo el dominio tanto en flujo laminar como en turbulento y es justamente igual al valor del cortante en la pared,  $\tau_0$ . Considerando esto último, el gradiente de velocidad se vuelve proporcional a  $1/(\mu_l + \mu_t)$ . Como  $\mu_t$  varía desde cero hasta un máximo en el centro del canal, el perfil de velocidades debe tener una pendiente más pronunciada cerca de las paredes y más plana en el centro. Además, el coeficiente de mezclado turbulento se incrementa cuando se incrementa el número de Reynolds y la curvatura del perfil de velocidades se vuelve más pronunciada como se aprecia en la figura 4.1 - 2.

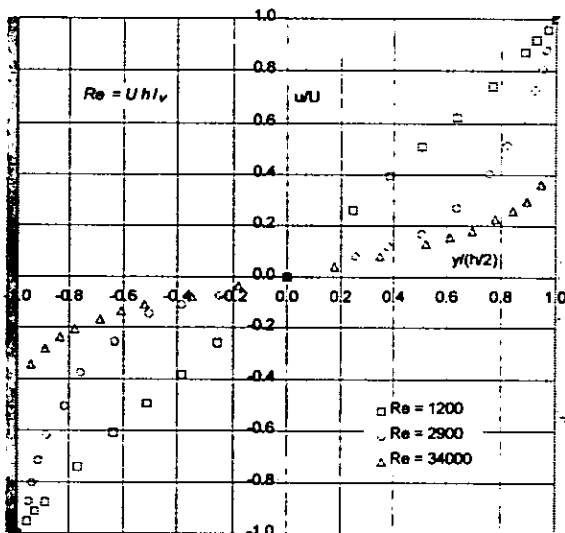


Figura 4.1 - 2. Perfiles de velocidad en flujo de Couette plano entre dos placas moviéndose en direcciones contrarias. (Schlichting, 1979, con base en los datos de Reichardt, 1954, 1959).

#### 4. Casos analizados.

Para validar el comportamiento del MTDf sin considerar fuerzas de cuerpo como las debidas a efectos de flotación se simuló un flujo de Couette plano con valores del número de Reynolds  $Re = 2968$  y  $Re = 34041$  en condiciones isotérmicas mediante el MTDf y el modelo  $k-\epsilon$  y se compararon los resultados con los reportados por Schlichting (1979) tomando como referencia los estudios de Reichardt (1954, 1959).

Para realizar la simulación se usó una malla de  $1 \times 30 \times 1$ ; es decir, con treinta celdas en dirección  $y$ , y una sola celda tanto en dirección  $x$  como en dirección  $z$ . La distancia entre las placas se estableció como  $h = 7.0$  cm y la velocidad  $U$  se calculó a través de la relación entre estas dos cantidades y la viscosidad cinemática  $\nu$ , definida por el número de Reynolds. Los valores usados aparecen en la tabla 4.1 – 1. El fluido con el cual se trabajó fue agua con viscosidad cinemática  $\nu = 1.0 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s y número de Prandtl  $Pr = 8.0$ .

$Re$	$U$ [m/s]
2968	0.04240
34041	0.48630

Tabla 4.1 – 1.

Como se explicó en el capítulo anterior, la diferenciación de los fluidos se hizo a través de una acción diferencial de las fuentes sobre los mismos. En este caso, al fluido 1 le fue aplicado el esfuerzo cortante en la placa superior, mientras que al fluido 2 se le aplicó el cortante en la placa inferior. Este esfuerzo cortante se calculó con la expresión, recomendada por Ilegbusi *et al.* (1987a),

$$\tau_w = \gamma \rho_i (w_i - w_w)^2$$

donde,  $\gamma = 0.005$  es un coeficiente de fricción;  $\rho_i$ , es la densidad del agua en el nodo frontera;  $w_i$  es la velocidad del agua en el nodo frontera, y  $w_w$ , la velocidad en la pared.

Como se mencionó en el capítulo anterior, los valores de los coeficientes del modelo se tomaron de las referencias (Ilegbusi *et al.*, 1987a y 1987b). Estos valores aparecen en la tabla 2.3 – 1.

Tabla 2.3 – 1 (repetida). Valores de las empíricas para la formulación de Spalding del modelo de turbulencia de dos fluidos (Ilegbusi y Spalding, 1987a).

$C_t$	$C_t$	$C_v$	$C_m$
0.05	10.0	0.30	10.00

La longitud de mezclado en este caso se calculó con la fórmula (Ilegbusi *et al.* 1987a),

$$l_M = \text{Mínimo} [0.4 y, 0.4 (h - y)]$$



Para dar un valor numérico de la diferencia entre los datos experimentales y los resultados obtenidos mediante los modelos se calculó el error cuadrado promedio que, para  $n$  puntos experimentales, se define como

$$e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_m(x_i) - y_e(x_i)]^2 \dots (4.1-5)$$

donde  $y_m(x_i)$  representa el valor de la variable independiente dado por el modelo, e  $y_e(x_i)$ , el valor dado por el experimento, siendo ambos correspondientes al valor  $x_i$  de la variable dependiente.

#### 4.1.2. Resultados y discusión.

##### Flujo de Couette isotérmico ( $Re = 2900$ )

Se inicia la presentación de resultados (figura 4.1 - 4) directamente con la comparación entre los dos modelos y los datos experimentales de Reichardt. Como fácilmente puede apreciarse, ambos modelos arrojan resultados cualitativamente correctos; sin embargo, el MT  $k-\epsilon$  se acerca más a los resultados experimentales, sobretudo en las regiones cercanas a las paredes. El error cuadrado promedio para el modelo de turbulencia de dos fluidos fue  $e^2_{MTDF} = 4.84E-2$ , y para el modelo  $k-\epsilon$ ,  $e^2_{k\epsilon} = 1.111E-2$ . Se puede ver que ambos son del mismo orden de magnitud.

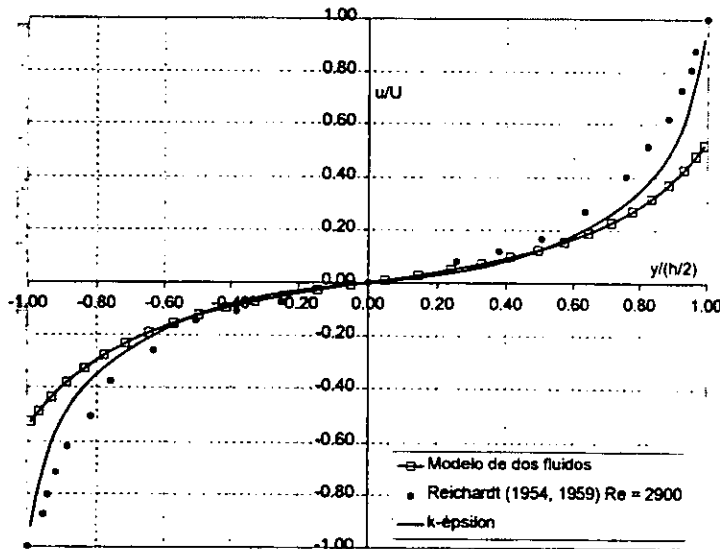


Figura 4.1 - 4. Comparación de los perfiles de velocidad obtenidos con el MTDF, el MT  $k-\epsilon$  y a través del experimento ( $Re = 2900$ ).

La figura 4.1 - 5 muestra los perfiles de velocidad correspondientes a cada uno de los fluidos y sirve para aclarar la forma en que se distingue un fluido del otro. Como se dijo en la sección anterior, al fluido 1 se le aplicó el esfuerzo cortante en la placa superior, mientras que al fluido 2 se le aplicó en la placa inferior. A pesar de estas condiciones de frontera, los perfiles de velocidad de ambos fluidos son muy similares, lo cual demuestra que la cantidad de movimiento se transfiere entre los dos fluidos a pesar de que las fuentes

#### 4. Casos analizados.

en las fronteras se aplican de manera diferencial a cada fluido, pues, de otra forma, los perfiles se separarían en las zonas cercanas a las paredes.

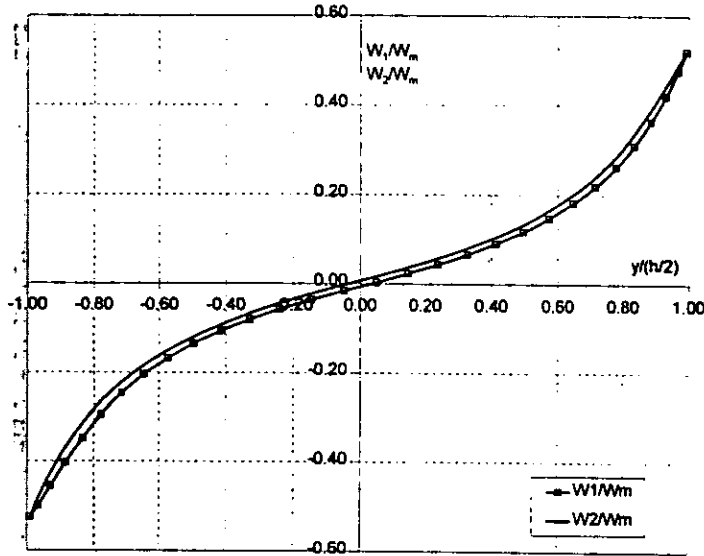


Figura 4.1 – 5. Perfiles de velocidad para cada uno de los dos fluidos ( $Re = 2900$ ).

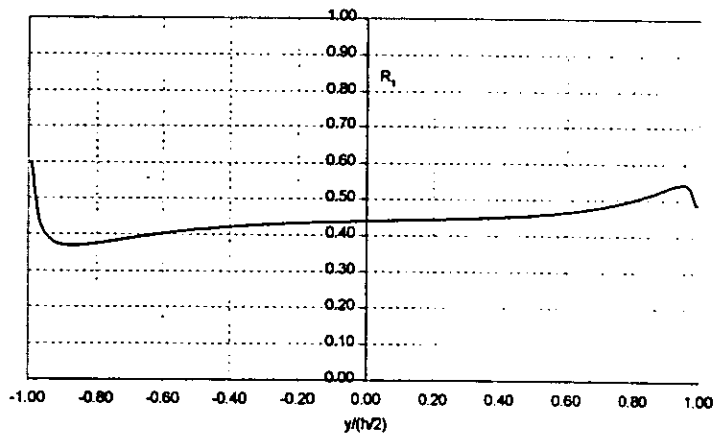


Figura 4.1 – 6. Fracción volumétrica del fluido 1 ( $Re = 2900$ ).

En la figura 4.1 – 6 aparece la fracción volumétrica del fluido 1, que en el MTF debe interpretarse como la probabilidad de la presencia de este fluido y de sus propiedades en una posición determinada. Esta probabilidad permanece cercana al valor de 0.5, pero crece al acercarse a la placa superior (esfuerzo cortante aplicado a este fluido) alcanzando un máximo un poco antes de tocar a la placa, y decrece conforme se acerca a la inferior (esfuerzo cortante aplicado al fluido 2) con un mínimo, de igual manera, poco antes de la alcanzar la placa. Esto significa que, según el MTF, el fluido que se ve afectado directamente por la fuente de cantidad de movimiento (esfuerzo cortante) sufre una especie de repulsión, alejándose de la pared.

La intensidad de turbulencia se define como

$$I = \frac{1}{3} \sqrt{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}} U \quad \dots (4.1 - 5)$$

La diferencia entre las componentes homólogas de velocidad correspondientes a uno y otro fluidos puede considerarse como el valor de las fluctuaciones y, dado que se simuló únicamente dos componentes de velocidad\*, la fórmula que se usa en este caso es

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{[(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2]} U \quad \dots (4.1 - 6)$$

La figura 4.1 - 7 muestra la intensidad de turbulencia que predice el MTDF. Los resultados para esta variable también pueden considerarse como satisfactorios, ya que en la región inmediata a la pared la intensidad es nula como se esperaba debido a la condición de no deslizamiento, mientras que en la región de la capa cortante la intensidad se incrementa, pues se incrementan las fluctuaciones. En la región central, las fluctuaciones de velocidad disminuyen su valor y, por tanto, la intensidad turbulenta se comporta de manera similar. Existe, sin embargo, una cierta asimetría, que aunque se presenta también en los resultados de la simulación numérica directa de Kim *et al.* (1987), en ésta no es tan notoria.

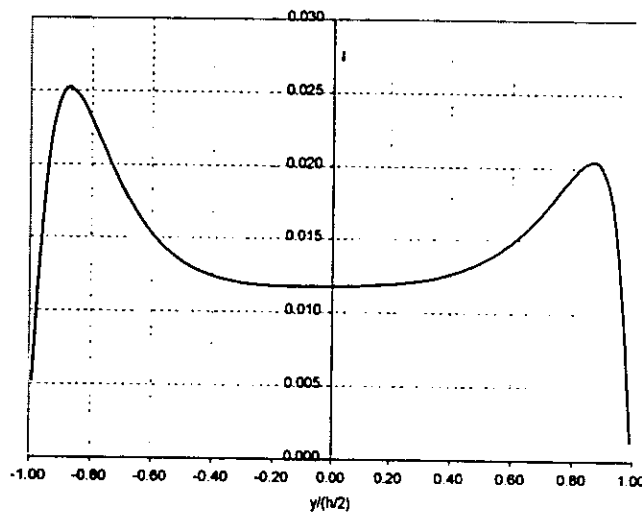


Figura 4.1 - 7. Intensidad de turbulencia ( $Re = 2900$ ).

Con el objetivo de encontrar una mayor exactitud en los resultados del modelo en estudio, se varió arbitrariamente el valor del coeficiente  $c_v$  de 0.30, recomendado por Ilegbusi *et al.*, a 1.00. Los resultados aparecen en la figura 4.1 - 9. La comparación entre los resultados del MTDF y los datos experimentales empeora ( $e_{C_v=1.0} = 1.084E-1$ ); sin embargo, si la velocidad normalizada se multiplica por un coeficiente de relación  $\alpha = 2.68$ , determinado mediante un método basado en el criterio de mínimos cuadrados, se obtiene una curva que

\* Como se explicó en el capítulo 2, las fluctuaciones turbulentas siempre son tridimensionales, incluso cuando el flujo promediado en el tiempo sea bidimensional; sin embargo, al hacer la simulación se supone que las fluctuaciones en el sentido paralelo a las placas y perpendicular al flujo principal son despreciables con el único objetivo de simplificar el problema,

corresponde de manera casi perfecta con el experimento (figura 4.1 - 10) y un error cuadrado promedio  $e_a = 1.207E-3$  que mejora el obtenido con el modelo  $k-\epsilon$ , el cual fue  $e_{k\epsilon} = 1.111E-2$ . Este resultado puede parecer, a primera vista, de poco valor; sin embargo, desde el punto de vista del autor, este es un punto a favor del modelo que indica que las bases físicas de éste son correctas, pues una curva arbitraria no tendría este comportamiento\*, aunque es necesario efectuar una investigación más amplia sobre la forma de interacción entre los fluidos y de éstos con las condiciones de frontera, lo cual queda fuera de los alcances de este trabajo. El resultado sería todavía más sorprendente si esto mismo ocurriera para un mismo valor de  $c_v$  y diferente valor del número de Reynolds. Esta hipótesis se verificó con  $Re = 32000$  como se muestra en la siguiente sección.

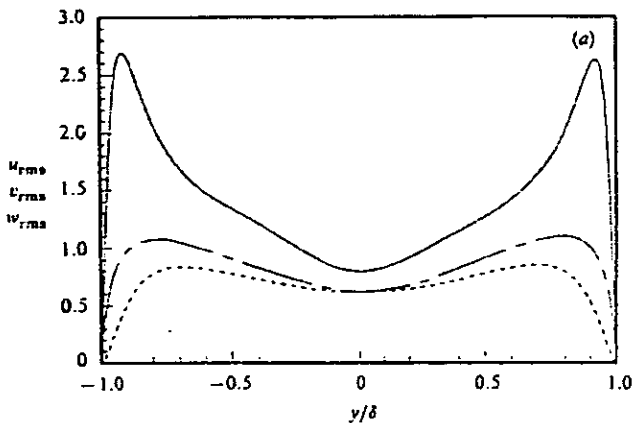


Figura 4.1 - 8. Fluctuaciones de velocidad rms para un canal normalizadas a través de la velocidad de cortante en la pared: —  $u_{rms}$ ; ----,  $v_{rms}$ ; - · - ·,  $w_{rms}$ .  $\delta$  es la profundidad media del canal.  $Re = 6600$ . (Kim *et al.*, 1987)

\* De hecho, la función  $f(x)$  que, multiplicada por un escalar  $\alpha$  constante, es igual a una segunda función  $g(x)$  en todo el dominio de ésta última, es única como se enuncia en el siguiente teorema.

**Teorema.**

Sean  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  tres funciones definidas en un dominio  $D$ , y sean  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  dos números reales constantes. Si se cumple que

$$i) g(x) = \alpha_1 f(x), \forall x \in D, \text{ ii) } g(x) = \alpha_2 h(x), \forall x \in D, \text{ y iii) } f(x_0) = h(x_0) \neq 0, x_0 \in D$$

entonces

$$f(x) = h(x), \forall x \in D$$

**Demostración.**

De las hipótesis i) y ii),

$$f(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} h(x), \forall x \in D$$

De aquí y de la hipótesis iii),

$$f(x_0) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} h(x_0) = h(x_0)$$

Por lo tanto

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

y

$$f(x) = h(x), \forall x \in D \quad (q.e.d)$$

#### 4. Casos analizados.

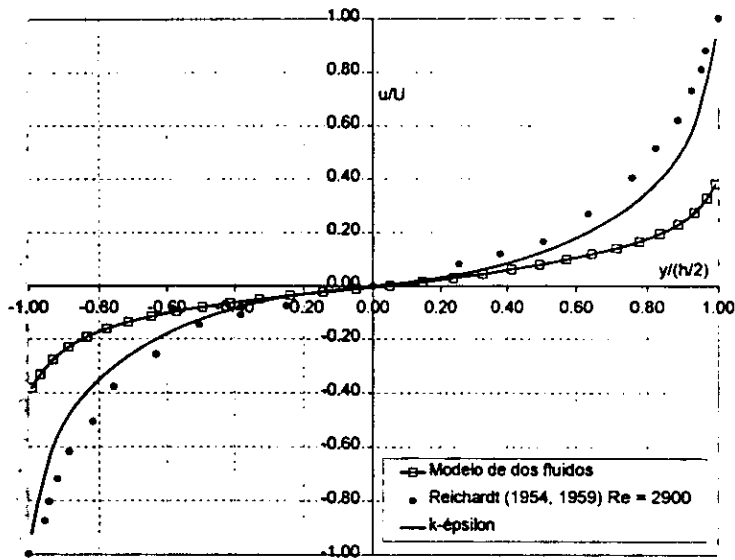


Figura 4.1 – 9. Perfil de velocidad obtenido al cambiar el valor de  $c_v$  de 0.3 a 1.0 en el MTFD, en comparación con los perfiles obtenidos con el MT  $k$ - $\epsilon$  y a través del experimento ( $Re = 2900$ ).

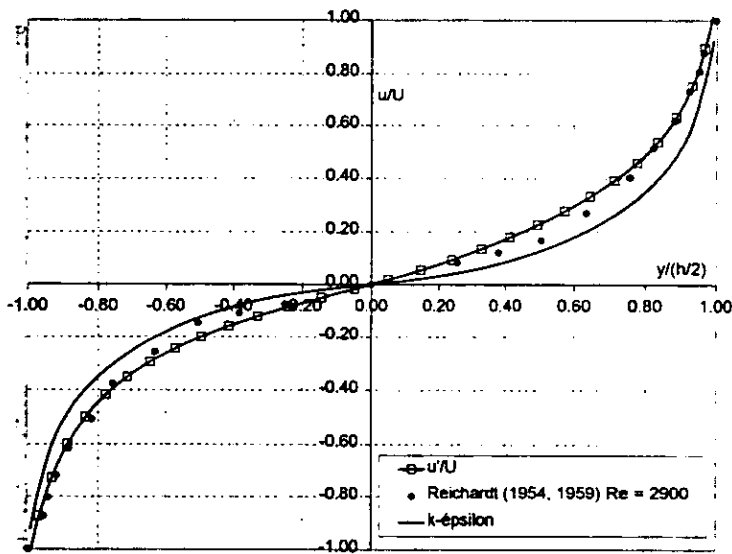


Figura 4.1 – 10. Perfil de velocidad obtenido al multiplicar por el coeficiente de relación  $\alpha = 2.68$  el perfil mostrado en la figura 4.1 – 9 para el MTFD con  $c_v = 1.0$ , en comparación con los perfiles obtenidos con el MT  $k$ - $\epsilon$  y a través del experimento ( $Re = 2900$ ).

### Flujo de Couette isotérmico ( $Re = 34000$ )

La simulación del mismo flujo al variar la velocidad de las placas con el consiguiente incremento en el número de Reynolds arroja resultados de calidad similar al caso anterior. Nuevamente, el modelo  $k-\varepsilon$  proporciona una mejor aproximación a los datos experimentales; aunque los resultados del MTDf son cualitativamente correctos, el perfil de velocidad que predice es inferior al medido (Figura 4.1 – 11).

El error cuadrado promedio logrado con el MTDf fue  $e^2_{MTDF} = 5.00E-3$ , mientras que el del modelo  $k-\varepsilon$  fue  $e^2_{k\varepsilon} = 4.46E-4$ .

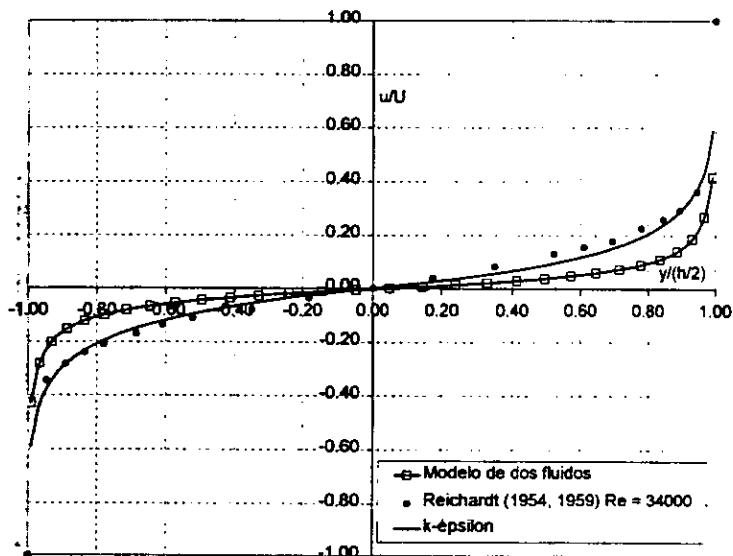


Figura 4.1 – 11. Comparación de los perfiles de velocidad obtenidos con el MTDf, el MT  $k-\varepsilon$  y a través del experimento ( $Re = 34000$ ).

Los perfiles de velocidad correspondientes a los dos fluidos (Figura 4.1 – 12) ya no permanecen tan cercanos como en el caso con  $Re = 2900$ , pues, como es lógico, la turbulencia se incrementó al incrementarse el número de Reynolds. Este hecho se hace evidente en la gráfica de intensidad turbulenta (Figura 4.1 – 13), la cual se volvió más uniforme que en el caso anterior. Del mismo modo, aunque la curva que describe la distribución de los fluidos (Figura 4.1 – 14) indica repulsión de la pared sobre el fluido afectado por ella, su forma es más uniforme que para  $Re = 2900$ , permaneciendo cercana al valor de 0.5 en casi todo el dominio.

#### 4. Casos analizados.

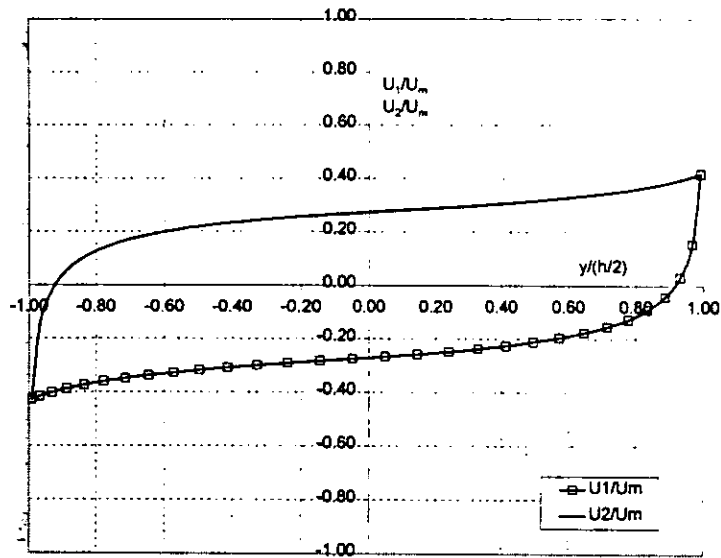


Figura 4.1 – 12. Perfiles de velocidad para cada uno de los dos fluidos ( $Re = 2900$ ).

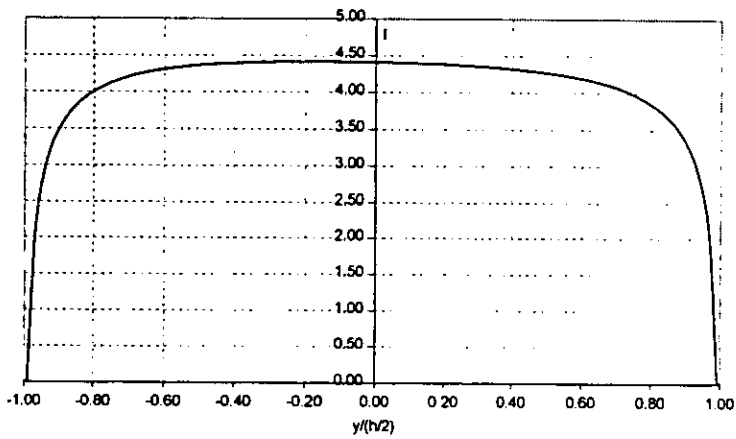


Figura 4.1 – 13. Intensidad de turbulencia ( $Re = 34000$ ).

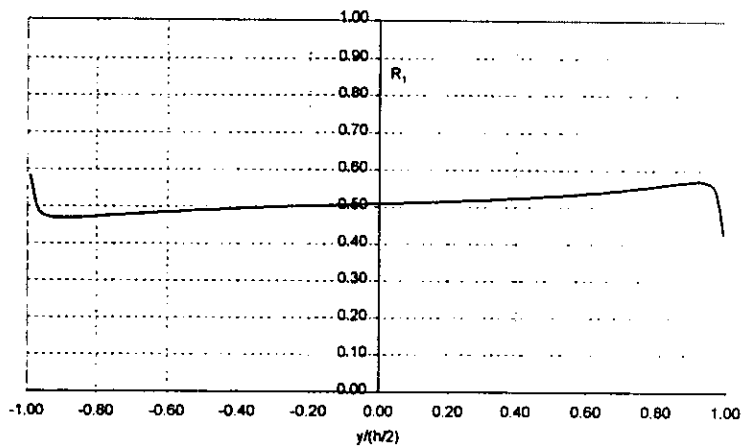


Figura 4.1 – 14. Fracción volumétrica del fluido 1 ( $Re = 34000$ ).

#### 4. Casos analizados.

En este caso también se probó el efecto del cambio en el valor de  $c_v$  de 0.30 a 1.00 y nuevamente empeoró la simulación con el MTDf (figura 4.1 - 15), pues arrojó un error cuadrado  $e^2_{c_v=1.0} = 1.933E-2$ . Sin embargo, la multiplicación de estos resultados por un coeficiente de relación  $\alpha = 2.85$  los acerca a los datos experimentales (figura 4.1 - 16), logrando un error cuadrado promedio de  $e^2_{\alpha} = 1.536E-3$ , aunque no logra superar al modelo  $k - \epsilon$  ( $e^2_{k\epsilon} = 4.46E-4$ ). Aun así, es posible observar que para un valor diferente de  $Re$ , el coeficiente  $\alpha$  no cambia significativamente su valor (de  $\alpha = 2.68$  para  $Re = 2900$  a  $\alpha = 2.85$  para  $Re = 34000$ ), lo cual, como se mencionó anteriormente, puede ser un indicio de la bondad del modelo estudiado.

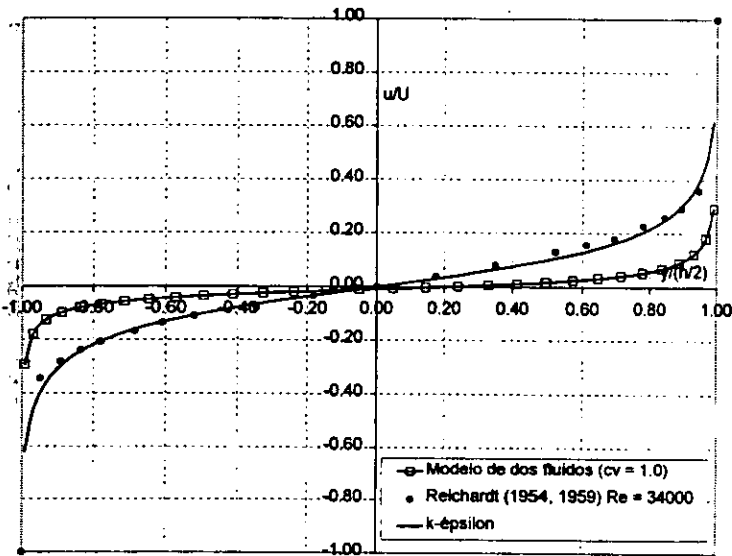


Figura 4.1 - 15. Perfil de velocidad obtenido al cambiar el valor de  $c_v$  de 0.3 a 1.0 en el MTDf, en comparación con los perfiles obtenidos con el MT  $k-\epsilon$  y a través del experimento ( $Re = 34000$ ).

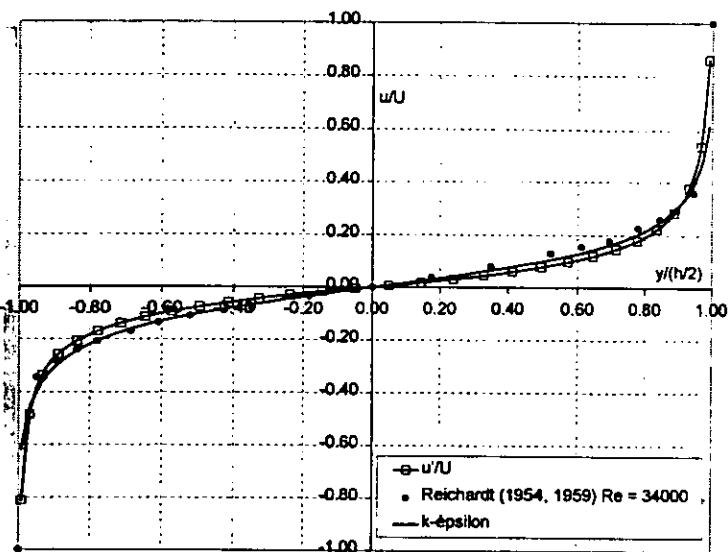


Figura 4.1 - 16. Perfil de velocidad obtenido al multiplicar por el coeficiente de relación  $\alpha = 2.85$  el perfil mostrado en la figura 4.1 - 15 para el MTDf con  $c_v = 1.0$ , en comparación con los perfiles obtenidos con el MT  $k-\epsilon$  y a través del experimento ( $Re = 34000$ ).



### 4.1.3. Observaciones finales.

Una crítica lógica para este trabajo es la forma artificial en que se han manipulado los resultados del modelo; sin embargo, el propósito que el autor persigue al hacer esto no es ajustar los datos numéricos a los experimentales en sí, sino mostrar que el MTDf puede ser una forma alternativa viable para modelar la turbulencia.

El coeficiente de relación  $\alpha$  que se obtuvo en los casos isotérmicos significa que es necesario considerar dentro del modelo un mecanismo cuyo efecto sea amplificar los efectos de las fuentes en la frontera  $\alpha$  veces de forma que los perfiles que se obtengan sean consistentes con los experimentales, los cuales constituyen el único medio de validar cualquier modelo que pretenda utilizarse.

La existencia del coeficiente de relación  $\alpha$  lleva a suponer la existencia de un coeficiente de relación  $\alpha_{\phi}$  para cada variable que, en caso de ser igual anterior para las velocidades, demostraría la bondad del nuevo modelo de turbulencia. Las dos formas que pueden usarse para saber si esta suposición es correcta son, nuevamente, la realización de experimentos y la comparación con datos obtenidos en pruebas de campo.

## 4.2. Procesos hidrotérmicos en el seno de un lago.

### 4.2.1. Descripción.

Para probar la utilidad del MTDf en simulaciones de lagos y embalses, teniendo la atención fija en los lagos hidráulicamente someros de los cuales el lago de Chapala es un ejemplo, se aplicó este modelo a la simulación de un lago.

Al programa se le proporcionaron como datos de entrada aquéllos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura en Japón para estar en posibilidad de comparar los resultados del modelo con observaciones de campo, teniendo siempre en cuenta las simplificaciones hechas en el modelo numérico. Estas simplificaciones son las siguientes:

- a) Se utilizó un modelo vertical unidimensional.
- b) Las fuentes de calor fueron simuladas como periódicas con periodo  $T = 1$  día.

Se utilizó un dominio computacional de 7 m en la dirección vertical (dirección del eje  $Y$ ).

Para establecer la ubicación de las fronteras de las celdas de manera que la malla fuera más fina en las celdas correspondientes a la superficie del lago se utilizó la expresión

$$Y_i = YVLAST \left[ 1.0 - \left( \frac{NY - i}{NY} \right)^{1.5} \right] \quad \dots (4.2 - 1)$$

con  $YVLAST = 7$  m,  $NY =$  número de nodos, para  $i = 1, \dots, NY$ .

Como condiciones iniciales se supuso que el lago estaba bien estratificado con una diferencia de temperatura  $\Delta T = 1$  °C con la termoclina a 3.5 m de profundidad; de esta forma, se estableció una temperatura y una velocidad para el hipolimnión de 27.5 °C y -3.0 cm/s, respectivamente, y para el epilimnión de 28.5 °C y 2 cm/s. Se hizo la suposición adicional de que el fluido 1 llenaba el espacio correspondiente al epilimnión, mientras que el fluido 2 llenaba el hipolimnión. Esta última suposición se hizo considerando la

recomendación de PHOENICS de asignar la turbulencia como propiedad de la fase que se espera sea más turbulenta, pues se espera que el epilimnión sea la zona de mayor turbulencia debido al cortante generado por el viento.

Para asegurar que el *fetch* – distancia disponible sobre la superficie del lago en la dirección del viento – fuera suficiente para que se desarrollara la capa límite generada por el esfuerzo cortante del viento se usaron condiciones cíclicas en la dirección  $X$ ; es decir, se estableció que las condiciones que prevalecían dentro del dominio estudiado se repetían indefinidamente en esta dirección.

El cortante generado por el viento se introdujo en el modelo a través de la relación

$$\tau_v = C_d \rho_{aire} U_s^2 \quad \dots (4.2-2)$$

donde  $C_d$  es un coeficiente de arrastre que puede ser calculado con la fórmula sugerida por Wu (Harleman, 1982) y que tiene un valor  $C_d = 0.9E-3$ , aproximadamente, para las condiciones del problema;  $\rho_{aire}$  es la densidad del aire, que para la altitud del lago Kasumigaura (1 m) toma el valor  $\rho_{aire} = 1.2 \text{ kg/m}^3$  (White, 1988), y  $U_s$ , la velocidad del viento, en m/s.

Para simular los procesos de transferencia de calor que tienen lugar en el lago se empleó el modelo de temperatura global con todas las fuentes descritas en el capítulo 3. Esto evidenció un problema importante que presenta el modelo en estudio pues el hecho de tener más de dos fuentes de calor hace complicado decidir cuales fuentes deben aplicarse a cual fluido. Como se mencionó en el capítulo 2, el problema puede resolverse si se considera lo siguiente: dentro de las celdas del dominio existe una variación libre de las fracciones volumétricas de los fluidos siempre y cuando la suma de ambas sea igual a la unidad. Esto significa que, aún cuando se establezca que las fuentes actúan sobre ambos fluidos, existe una diferenciación intrínseca de éstos a través de sus fracciones volumétricas, las cuales distribuyen los efectos de las fuentes. En este trabajo se aplicaron todas las fuentes de calor a los dos fluidos, pues cuando se intentó que solo algunas fuentes actuaran sobre un fluido y las restantes sobre el fluido complementario se encontraron resultados inverosímiles: uno de los fluidos se calentaba hasta alcanzar temperaturas superiores a 60 °C, mientras que el otro bajaba su temperatura hasta 5 °C.

Las fuentes de calor se modelaron, tomando en cuenta las variaciones de la radiación solar, la temperatura atmosférica y la velocidad del viento. Para calcular la variación de la radiación solar se utilizó la propuesta más simple de Fernández y Estrada-Cajigal (1983):

$$\phi_o(t) = \overline{\phi_{oM}} \cos^{1.2} \left[ \frac{\pi}{ND} \left( \frac{t}{3600} - 12 \right) \right] \quad \dots (4.2-3)$$

En esta relación  $\phi_{oM}$  es la radiación máxima diaria, en  $\text{W/m}^2$ ;  $ND$ , la duración del periodo de insolación, en horas. Por lo tanto, es válida para  $12 - ND/2 < t/3600 < 12 + ND/2$ ; para tiempos fuera de este intervalo,  $\phi_o(t) = 0$ .

La variación de la temperatura se modeló mediante una función ad hoc tomando en cuenta que la temperatura mínima  $T_{min}$  ocurre un poco antes del amanecer, y la máxima  $T_{max}$ , después del mediodía, aproximadamente a las 15:00 horas:

4. Casos analizados.

$$T_{aire}(t) = \begin{cases} T_{min} + \frac{(T_{max} - T_{min})(t - 21600)}{32400}, & 21600 \leq t \leq 54000 \\ T_{min} + \frac{(T_{max} - T_{min})(21600 - t)}{54000}, & t < 21600 \\ T_{max} + \frac{(T_{max} - T_{min})(54000 - t)}{54000}, & t > 54000 \end{cases} \dots (4.2 - 4)$$

Para modelar la variación de la velocidad del viento se consideró que se tenía una velocidad antes del mediodía y otra, mayor, después:

$$U_s = \begin{cases} U_{min}, & t \leq 43200 \\ U_{max}, & 43200 < t < 68400 \\ U_{min}, & t > 68400 \end{cases} \dots (4.2 - 5)$$

donde  $U_{min}$  es la velocidad mínima prevaleciente antes del mediodía, y  $U_{max}$ , la velocidad máxima válida posteriormente.

Los valores de las constantes  $\phi_{0M}$ ,  $ND$ ,  $T_{max}$ ,  $T_{min}$ ,  $U_{max}$  y  $U_{min}$  correspondientes a cada mes aparecen en la tabla 4.2 - 1 en el lago Kasumigaura. Una tabla similar para el lago de Chapala aparece en el Apéndice C.

La forma de calcular  $ND$  fue indicada por Fernández y Estrada-Cajigal (1983); los valores para las temperaturas máximas y mínimas fueron estimados tomando en cuenta una diferencia  $\Delta T = T_{max} - T_{min} = 8 \text{ }^\circ\text{C}$  entre una y otra centrada en la temperatura promedio para el mes de interés. Las temperaturas promedio son las correspondientes a la temperatura media mensual para un periodo de diez años según datos de satélite recabados por la NASA (2001). Esto mismo se aplica en el caso de la velocidad promedio; sin embargo, las velocidades máximas y mínimas se estimaron tratando de que coincidieran con los datos de Ishikawa y Tanaka (1993) estableciendo diferentes  $\Delta U_s = U_{max} - U_{min}$ .

Tabla 4.2 -1. Datos sobre periodo de insolación, radiación, temperaturas y velocidades mensuales para un sitio localizado a 36° de latitud norte, 140° de longitud este y 1 msnm de altitud.

MES	Número de días	Día promedio del mes*	Día del año correspondiente (n)	$\delta$ [°]	$\omega_s$ [°]	ND [horas]	$\phi_{0M}$ ** [W/m2]	$T_{prom}$ ** [°C]	$T_{min}$ [°C]	$T_{max}$ [°C]	$U_{prom}$ *** [m/s]	$U_{min}$ [m/s]	$U_{max}$ [m/s]
Enero	31	17	17	-20.9	73.9	9.9	390	1.6	-2	6	4.29	3.54	5.04
Febrero	28	16	47	-13.0	80.4	10.7	450	2.2	-2	6	4.51	3.76	5.26
Marzo	31	16	75	-2.4	88.2	11.8	490	5.8	2	10	4.13	3.38	4.88
Abril	30	15	105	9.4	98.9	12.9	620	11.1	7	15	3.80	2.85	4.35
Mayo	31	15	135	18.8	104.3	13.9	610	15.6	12	20	3.02	2.27	8.02
Junio	30	11	162	23.1	108.0	14.4	530	19.9	16	24	2.52	1.77	7.52
Julio	31	17	198	21.2	106.4	14.2	550	23.1	19	27	2.31	1.56	7.31
Agosto	31	16	228	13.5	100.0	13.3	640	24.6	21	29	2.38	1.63	7.38
Septiembre	30	15	258	2.2	91.8	12.2	480	21.6	18	26	2.81	2.06	7.81
Octubre	31	15	288	-9.6	82.9	11.1	410	15.1	11	19	3.37	2.62	4.12
Noviembre	30	14	318	-18.9	75.8	10.1	390	9.4	5	13	3.78	3.03	4.53
Diciembre	31	10	344	-23.0	72.0	9.6	380	4.1	0	8	4.09	3.34	4.84

\* Tomado de Fernández y Estrada-Cajigal (1983)  
 \*\* Tomado de NASA (<http://eosweb.larc.nasa.gov/sse/>, 2001)  
 \*\*\* Tomado de NASA (<http://eosweb.larc.nasa.gov/sse/>, 2001), e Ishikawa y Tanaka (1993)

#### 4. Casos analizados.

Los valores de las constantes utilizadas junto con el modelo de temperatura global aparecen en la tabla 4.2 – 2. Los valores de  $\beta$  y  $C_{ld}$  son supuestos. En la figura 4.2 – 1 se muestra la evolución del calor total que absorbe la superficie del lago y de sus diferentes componentes de acuerdo a las expresiones 4.2 – 3, 4.2 – 4 y 4.2 – 5 con los datos para el mes de agosto en el lago Kasumigaura en Japón.

$\eta$	$\beta$	$H$	$C_{ld}$	$p_a$	$\phi_s$	$\phi_a$
2.0	0.5	7 m	0.05	1013.25 mbar	1.0	0.971

Tabla 4.2 – 2. Constantes del modelo de temperatura global.

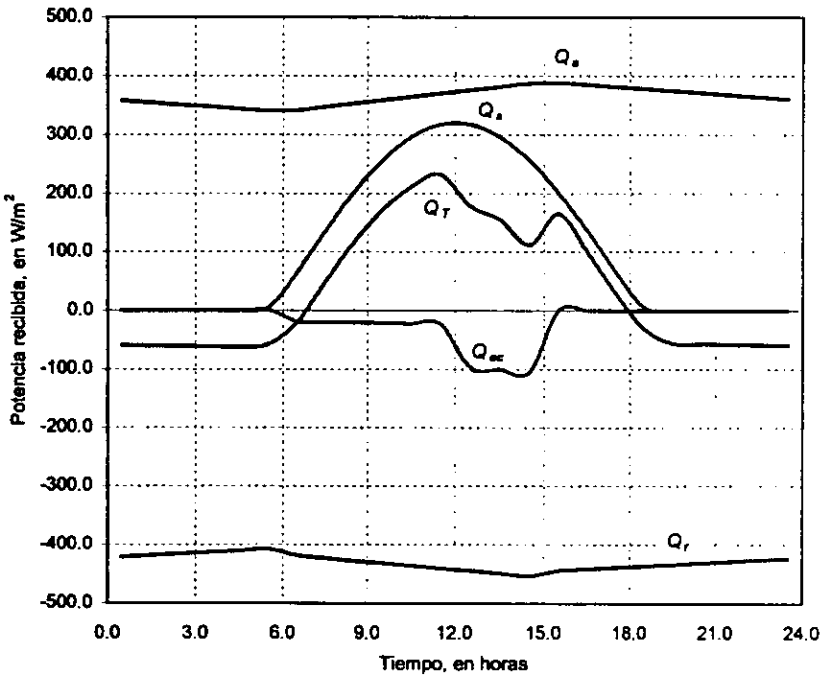


Figura 4.2 – 1. Evolución de los flujos de calor que inciden sobre la superficie del lago y calor total.

$Q_T$ : flujo de calor total;  
 $Q_s$ : radiación solar absorbida por la superficie;  
 $Q_a$ : radiación atmosférica de onda larga;  
 $Q_r$ : radiación reflejada por la superficie del agua;  
 $Q_{ec}$ : pérdidas por evaporación y convección.

En las figuras 4.2 – 2 se muestran los perfiles de velocidad y temperatura obtenidos por Ishikawa y Tanaka (1993) en el lago Kasumigaura para diferentes horas. La línea gruesa horizontal indica la posición de la termoclina. Las observaciones correspondientes al intervalo de tiempo que va de las 13:00 a las 15:30 se realizaron el 24 de agosto de 1987 cuando el agua estaba bien estratificada y casi estacionaria antes de que el viento comenzara a soplar. En ellas puede notarse como una diferencia de temperatura de sólo 1 °C inhibe completamente el transporte de cantidad de movimiento. Cuando el viento comenzó a soplar se observó que la dirección del flujo estaba girada aproximadamente 70° en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a la dirección de este, lo cual pudo deberse a efectos de Coriolis. Los datos para el periodo de las 18:00 a la media noche fueron recabados el 26 de agosto de 1987, cuando el flujo cambió repentinamente de dirección, aunque el flujo mantuvo su estructura de dos capas.

A las 13:00 del 24 de agosto de 1987, la termoclina se encontraba a 75 cm de la superficie y bajó su nivel en las siguientes horas de manera que para las 15:30 se encontraba a 2.75 m

#### 4. Casos analizados.

de profundidad. A las 18:00 del 26 de agosto de 1987, la termoclina se encontraba a 2.4 m, de profundidad y a las 22:00 alcanza los 3.8 m, su máxima profundidad.

Es importante tomar en cuenta al hacer la comparación de estos datos con los resultados del modelo que las observaciones de campo están influidos por condiciones imposibles de reproducir en forma exacta. Los resultados del modelo, en cambio, se obtienen a partir de consideraciones tales como fuentes de calor periódicas y valores fijos para la temperatura y la velocidad del viento. Así, las comparaciones serán puramente cualitativas y se buscará que tanto el comportamiento como el orden de magnitud de los resultados del modelo sean similares a los de las observaciones dejando en segundo plano la exactitud de los valores predichos.

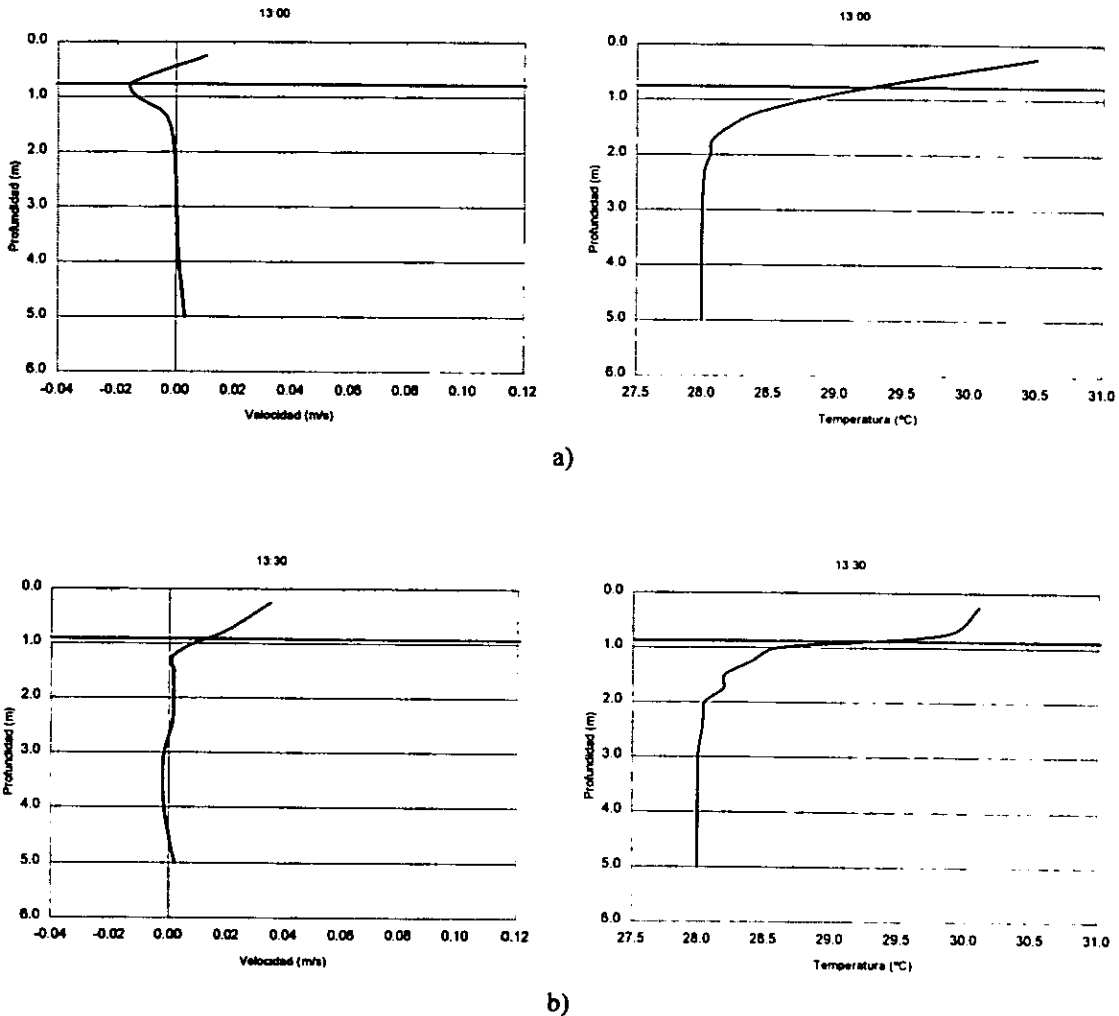
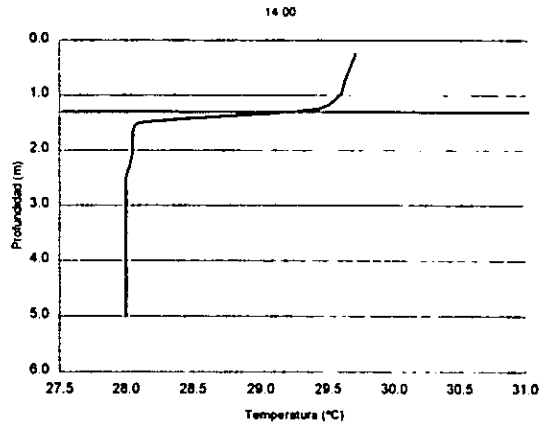
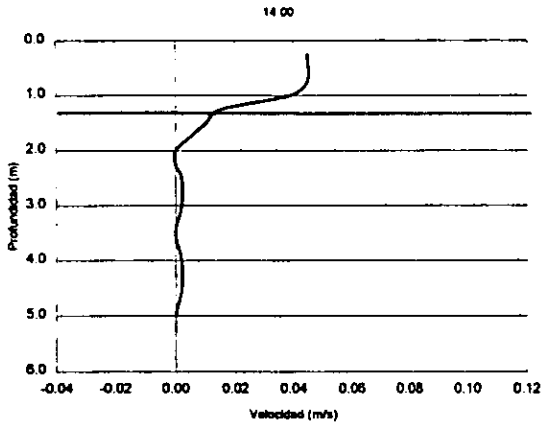
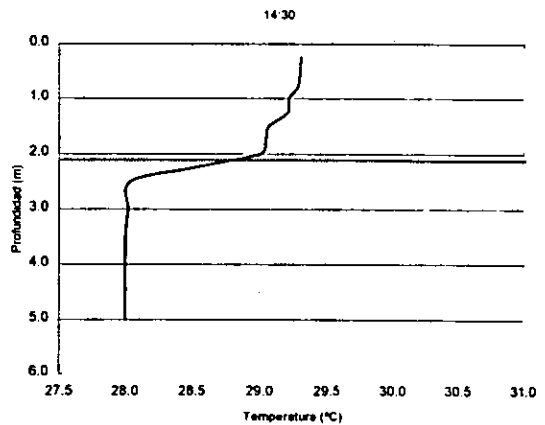
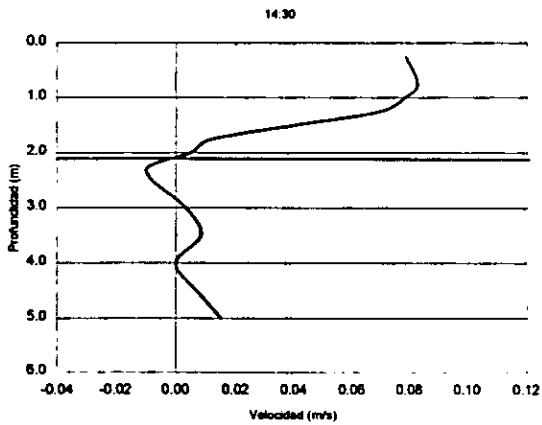


Figura 4.2 – 2 (inicio). Patrones de flujo y perfiles de temperatura en el lago Kasumigaura, Japón (Ishikawa y Tanaka, 1993) para diferentes horas del día. a) 13:00, b) 13:30, c) 14:00, d) 14:30, e) 15:00, f) 15:30, g) 18:00, h) 19:00, i) 20:00, j) 22:00, k) 24:00.

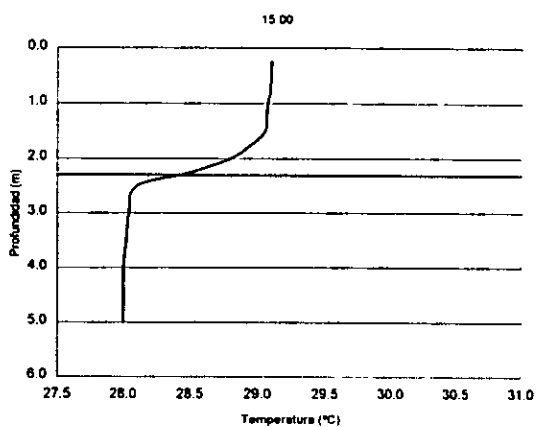
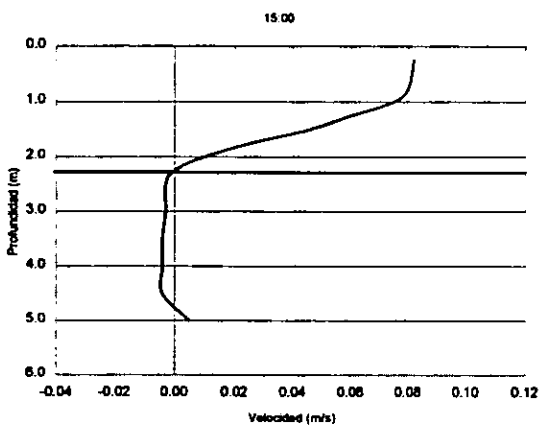
#### 4. Casos analizados.



c)



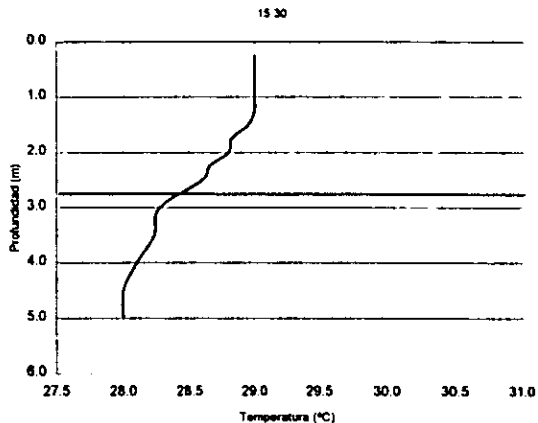
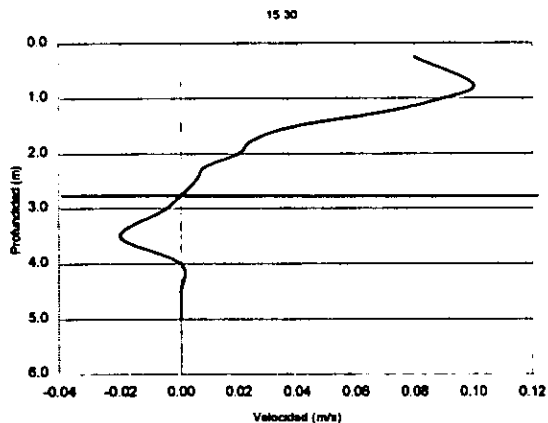
d)



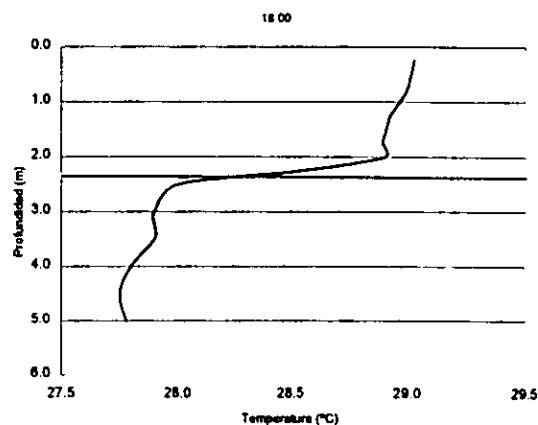
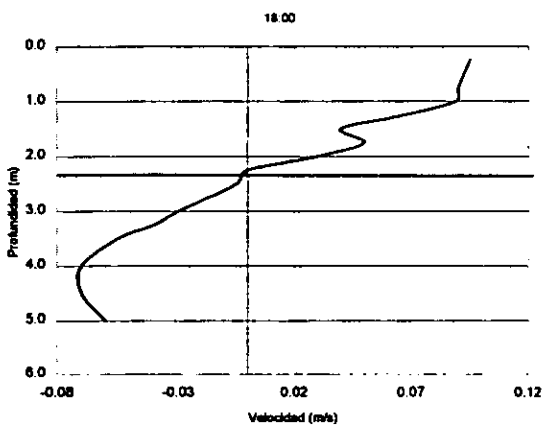
e)

Figura 4.2 – 2 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura en el lago Kasumigaura, Japón (Ishikawa y Tanaka, 1993) para diferentes horas del día. a) 13:00, b) 13:30, c) 14:00, d) 14:30, e) 15:00, f) 15:30, g) 18:00, h) 19:00, i) 20:00, j) 22:00, k) 24:00.

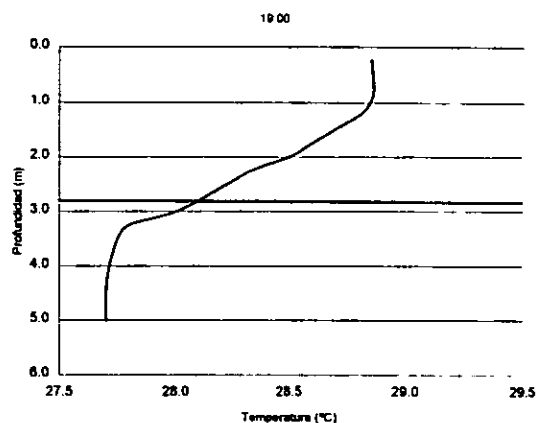
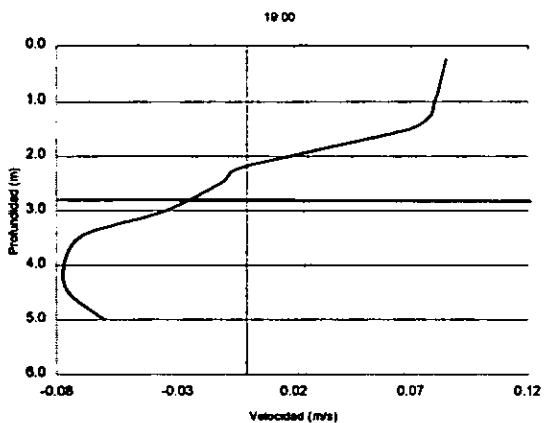
4. Casos analizados.



f)



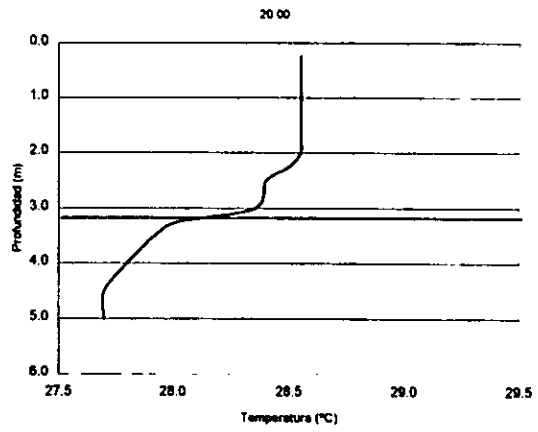
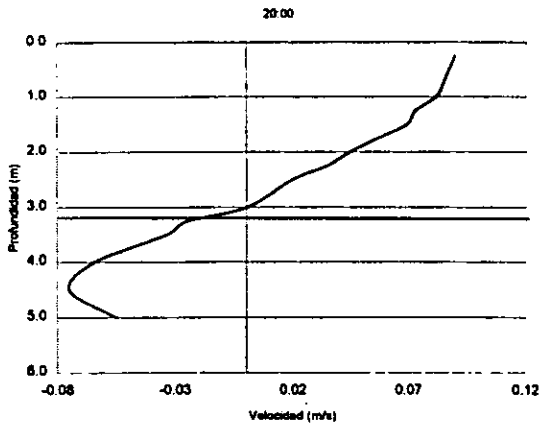
g)



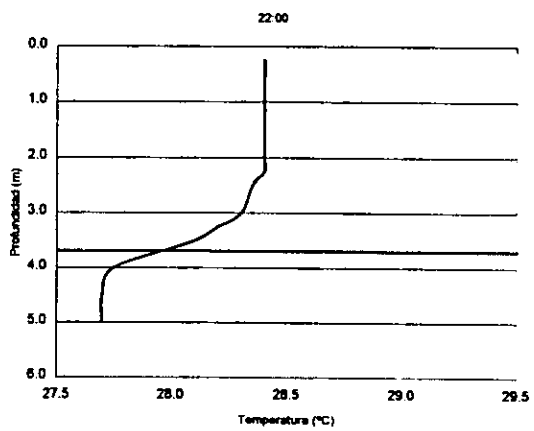
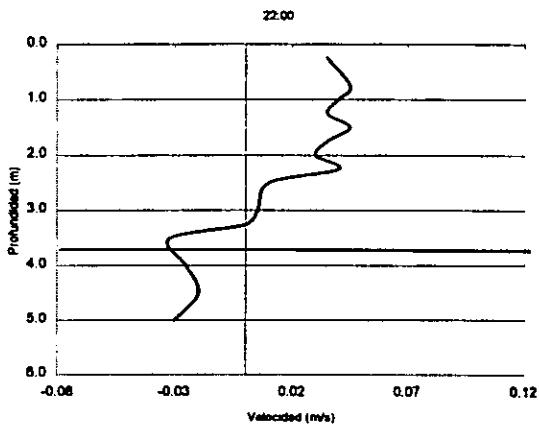
h)

Figura 4.2 – 2 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura en el lago Kasumigaura, Japón (Ishikawa y Tanaka, 1993) para diferentes horas del día. a) 13:00, b) 13:30, c) 14:00, d) 14:30, e) 15:00, f) 15:30, g) 18:00, h) 19:00, i) 20:00, j) 22:00, k) 24:00.

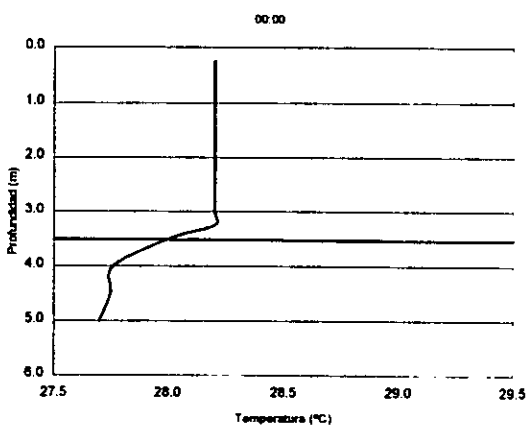
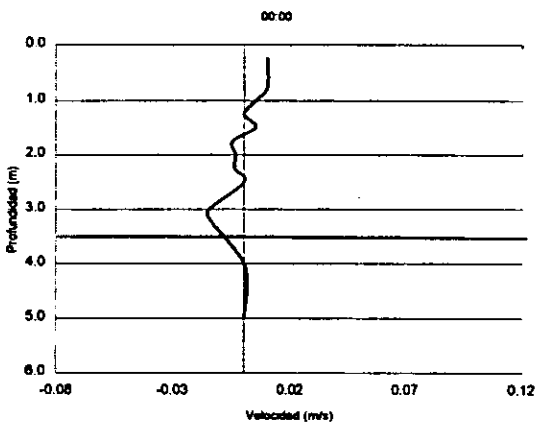
#### 4. Casos analizados.



i)



j)



k)

Figura 4.2 – 2 (final). Patrones de flujo y perfiles de temperatura en el lago Kasumigaura, Japón (Ishikawa y Tanaka, 1993) para diferentes horas del día. a) 13:00, b) 13:30, c) 14:00, d) 14:30, e) 15:00, f) 15:30, g) 18:00, h) 19:00, i) 20:00, j) 22:00, k) 24:00.



La simulación se realizó con la tercera formulación (híbrida) del MTDf (*c.f.* sección 2.3); es decir, con la combinación de las formulaciones de Spalding (Ilegbusi y Spalding, 1987a; Ilegbusi y Spalding, 1987b), que incorpora una fuente adicional de cantidad de movimiento que representa la tendencia de la capa cortante a formar remolinos, y la formulación de Shen *et al.* (2000) que hace uso del MT  $k-\epsilon$  para representar el mezclado turbulento a pequeña escala y calcular cantidades como la viscosidad turbulenta y la longitud de mezclado. Con esta formulación únicamente aparecen tres constantes empíricas exclusivas del MTDf más las constantes propias del MT  $k-\epsilon$ . La constante  $c_t$ , que aparece en la expresión para de la viscosidad, se vuelve irrelevante debido a que esta propiedad se calcula a través de las cantidades turbulentas. En la primera simulación usando el MTDf se usaron los valores recomendados en las referencias (Ilegbusi y Spalding, 1987a; Ilegbusi y Spalding, 1987b; Shen *et al.*, 2000). Estos valores se muestran en la tabla 4.2 – 3. Posteriormente se variaron las constantes con el fin de lograr los mejores resultados posibles.

En PHOENICS la turbulencia se asocia únicamente con la fase 1; por esta razón, la turbulencia se asoció con el fluido 1 y se estableció como condición inicial que este fluido se encontraba en la zona del epilimnión, la cual es la más turbulenta. Llenando la zona del hipolimnión se colocó al fluido 2 (CHAM, 2001b).

El equipo empleado para llevar a cabo todas las simulaciones fue una computadora personal con procesador Pentium II trabajando a 333 MHz y 128 Mb de memoria RAM bajo el sistema operativo Microsoft Windows NT 4.00.1381.

Tabla 4.2 – 3. Valores de referencia para las constantes del MTDf para la simulación de un lago.

$c_t$	$c_v$	$c_m$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	$\sigma_\epsilon$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_D$	$C_u$
0.05	0.3	10.0	1.0	1.0	1.314	1.44	1.92	1.0	0.2	0.548

#### 4.2.2. Resultados y discusión.

La independencia de la solución con respecto a la forma de discretizar el dominio se probó variando el número de nodos entre 14 y 24. La figura 4.2 – 3 muestra las posiciones de los datos tomados por Ishikawa y Tanaka (1993) en comparación con las diferentes mallas. En ella puede apreciarse que usar una malla no uniforme con una mayor densidad de celdas en la superficie hace posible tener un número mayor de datos superficiales a través de la simulación del fenómeno que a través de la medición directa.

Ishikawa y Tanaka tomaron sus datos cada 25 cm desde la superficie hasta una profundidad de 2.0 m y de ahí en adelante, cada 50 cm; en la tabla 4.2 – 4 puede apreciarse que el ancho de celda mínimo, correspondiente a  $NY = 14$  nodos, es de 13.36 cm; con este ancho de celda se tiene el primer nodo a sólo 6.7 cm de la superficie el ancho de celda máximo, distancia pequeña en comparación con los 25 cm que se usaron para realizar las observaciones en el lago Kasumigaura. El ancho de celda máximo, correspondiente también a  $NY = 14$  nodos, es de 73.6 cm en el fondo del cuerpo de agua, donde se espera que las variaciones no sean significativas. Para números de nodos superiores ( $NY > 14$ ) los anchos de celda, tanto mínimo como máximo, se reducen. Con esto se justifica el ensayo de las mallas presentadas.

#### 4. Casos analizados.

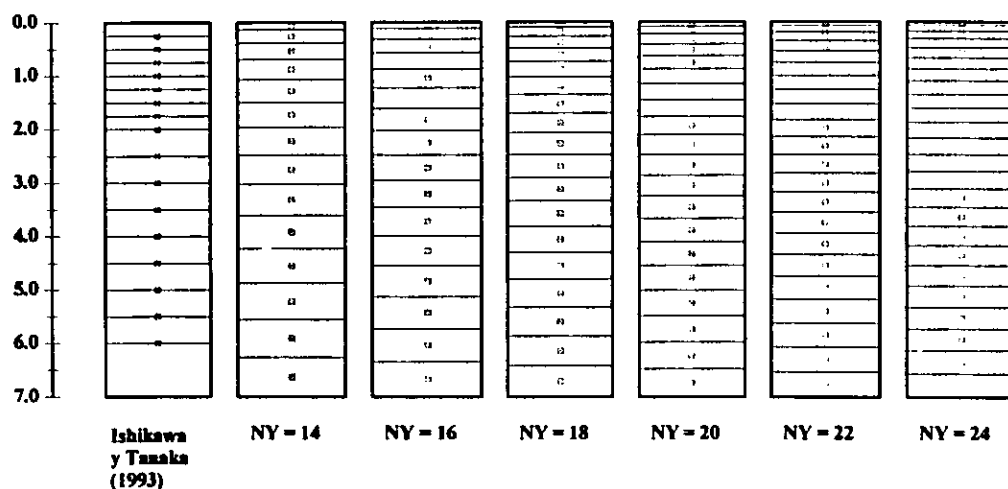


Figura 4.2 – 3. Ubicación de los puntos de observación para realizar las mediciones de Ishikawa y Tanaka (1993) y las diferentes mallas usadas para realizar la prueba de independencia de malla

Tabla 4.2 – 4. Ancho de celda mínimo y máximo, y posición del primero y último nodos para las diferentes configuraciones de malla ensayadas

NY	Ancho de celda mínimo [cm]	Ancho de celda máximo [cm]	Posición del primer nodo [cm]	Posición del último nodo [m]
14	13.36	73.6	6.68	6.63
16	10.94	64.6	5.47	6.68
18	9.17	57.5	4.59	6.71
20	7.83	51.8	3.92	6.74
22	6.78	47.2	3.39	6.76
24	5.95	43.3	2.98	6.78

#### 4. Casos analizados.

La figura 4.2 – 4 muestra una comparación entre las diferentes posibilidades. Puede apreciarse que la máxima variación en las figuras es de  $0.4\text{ }^{\circ}\text{C}$  y la mínima de  $0.03\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Se eligió  $NY = 16$  nodos para tener una solución independiente de la malla que además empleara un tiempo de cómputo razonable.

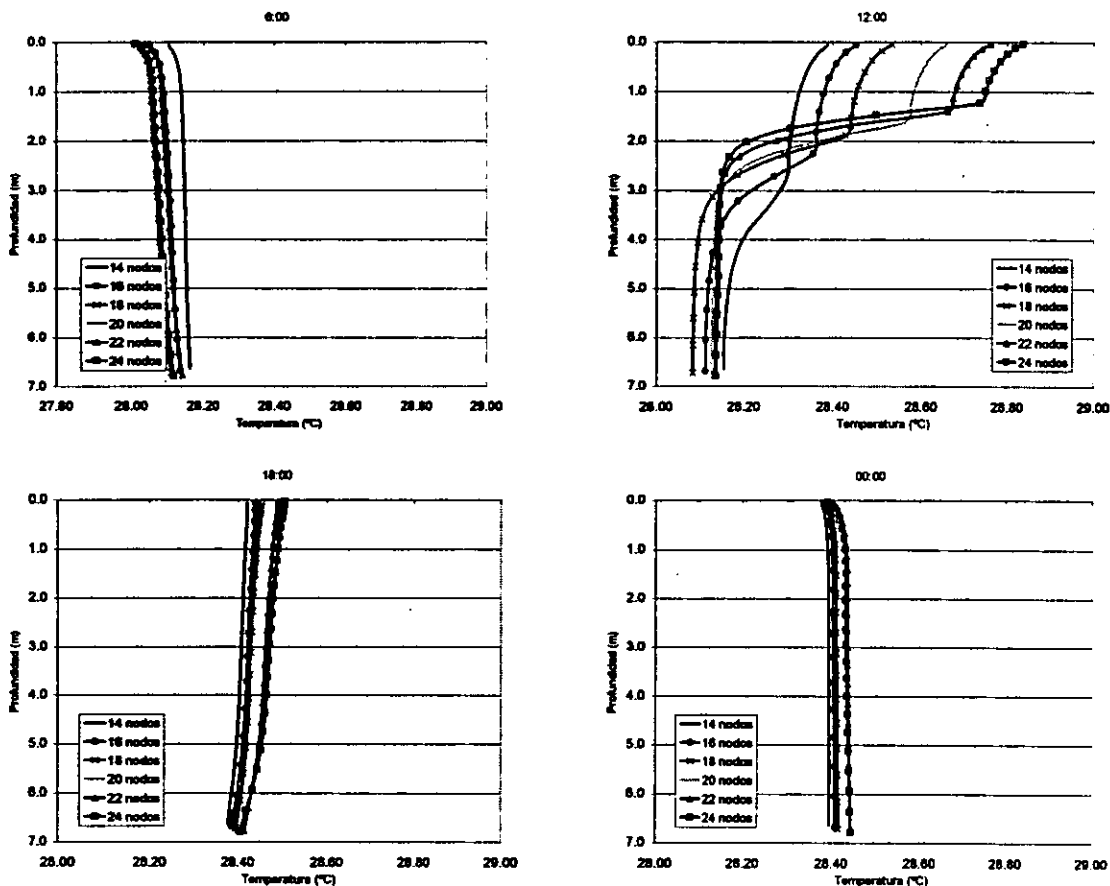


Figura 4.2 – 4. Variación de la solución con respecto a la malla empleada.

#### 4. Casos analizados.

Para buscar la independencia de la solución con respecto al paso de tiempo usado se probaron pasos de 30 min, 15 min, 10 min y 5 min. En la figura 4.2 – 5 aparecen los resultados de estas cuatro opciones. Con esto pudo decirse que el paso de tiempo  $\Delta t = 15$  min era suficiente para tener una buena solución.

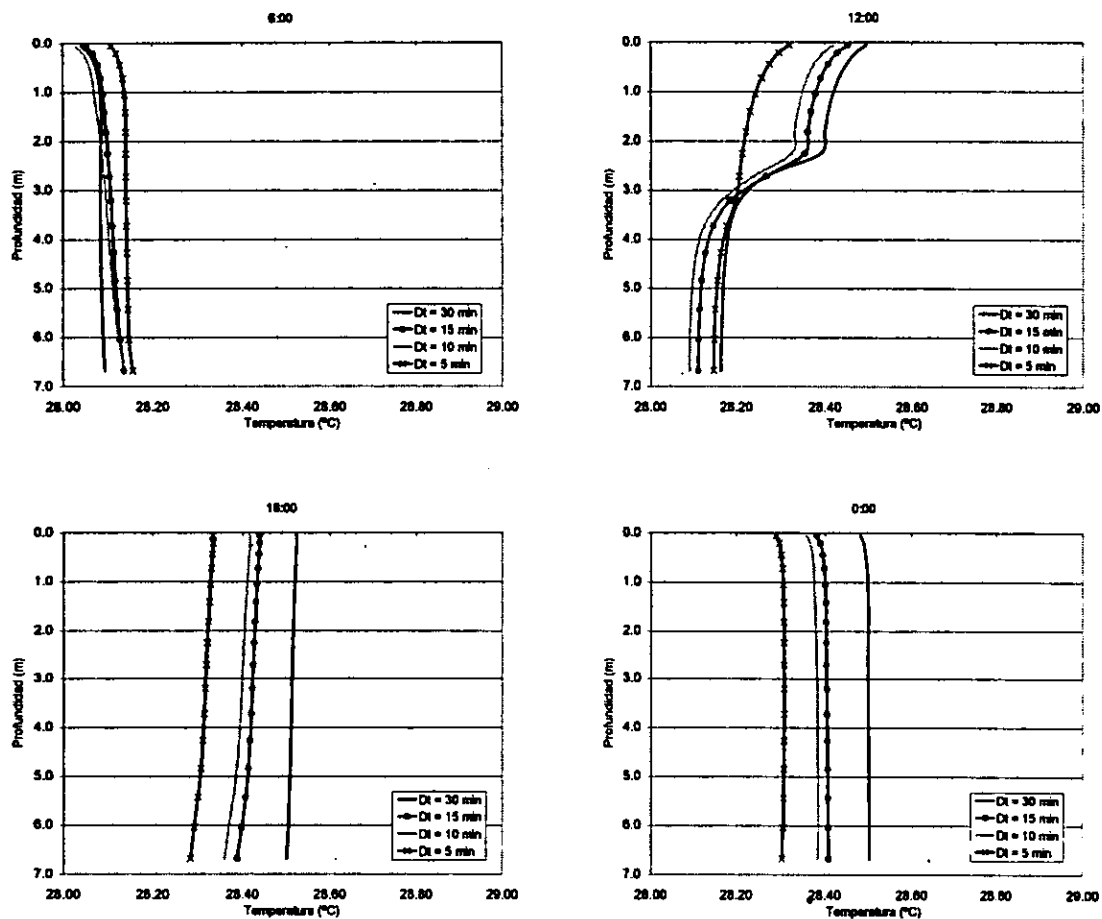


Figura 4.2 – 5. Variación de la solución con respecto al paso de tiempo utilizado.

#### 4. Casos analizados.

La independencia de la solución con respecto a las condiciones iniciales se probó cada dos días hasta encontrar un comportamiento similar. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 4.2 – 6. Con esto se encontró que a partir del día 5 se tenía una solución periódica. Sin embargo se usarán los resultados para el día 7 para extraer conclusiones.

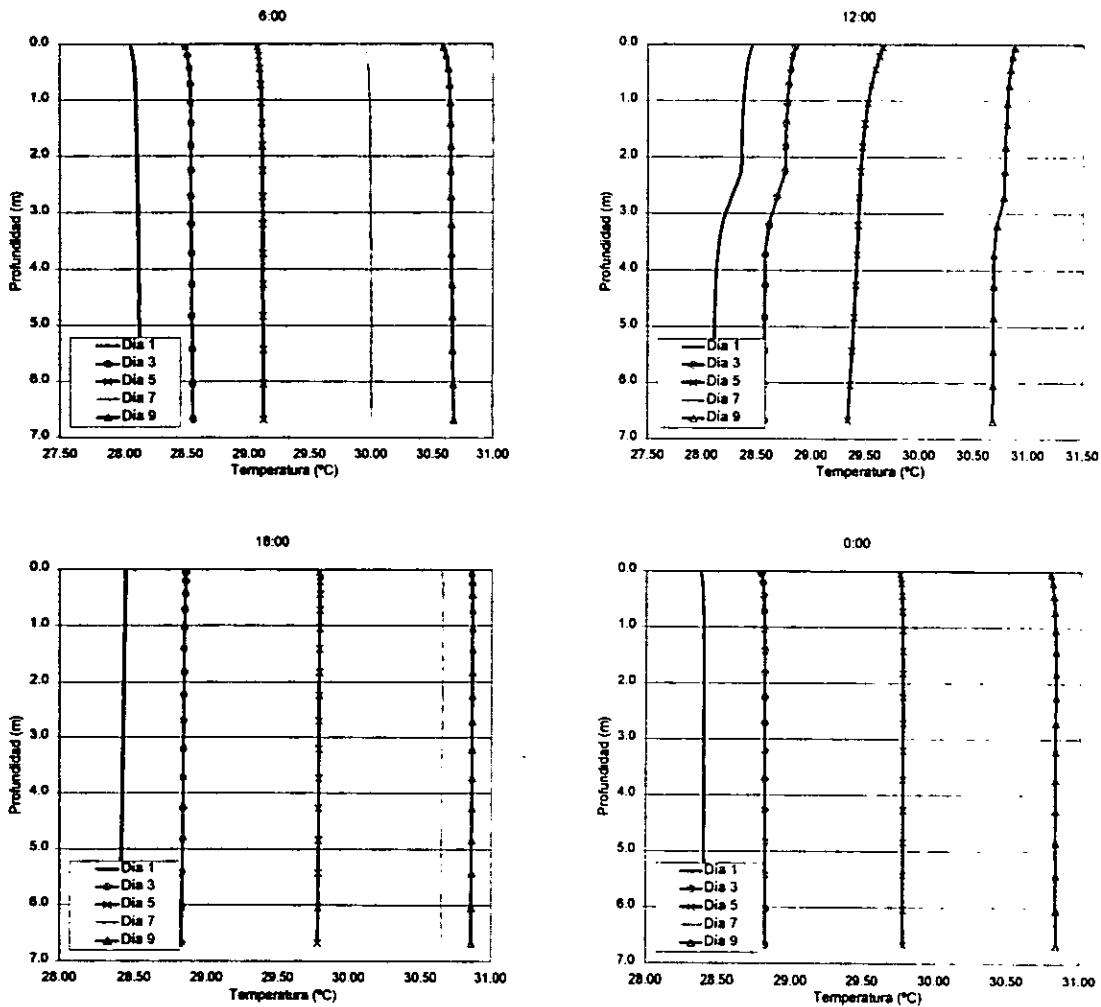


Figura 4.2 – 6. Solución en estado transitorio para  $NY = 16$  nodos y  $\Delta t = 15$  min.

#### 4. Casos analizados.

Se encontró que el resultado de la simulación era muy sensible a cambios en el valor de  $c_f$  y  $\sigma_{rk}$ . Estas dos constantes fueron variadas hasta encontrar el conjunto óptimo que entregara los mejores resultados. La figura 4.2 – 7 muestra como cambia el resultado cuando cambia el valor de la constante  $c_f$ . Es evidente que la estratificación únicamente aparece cuando el valor de la constante es  $c_f = 0.005$ . Se hizo una prueba más con  $c_f = 0.001$ , pero no se logró la convergencia de la solución. La figura 4.2 – 8 muestra como cambia el resultado cuando cambia el valor de la constante  $\sigma_{rk}$ . La estratificación aparece cuando  $\sigma_{rk} = 1.5$ , pero no se registra ni para  $\sigma_{rk} = 1.0$  ni para  $\sigma_{rk} = 2.0$ . El conjunto final de valores aparece en la tabla 4.2 – 5.

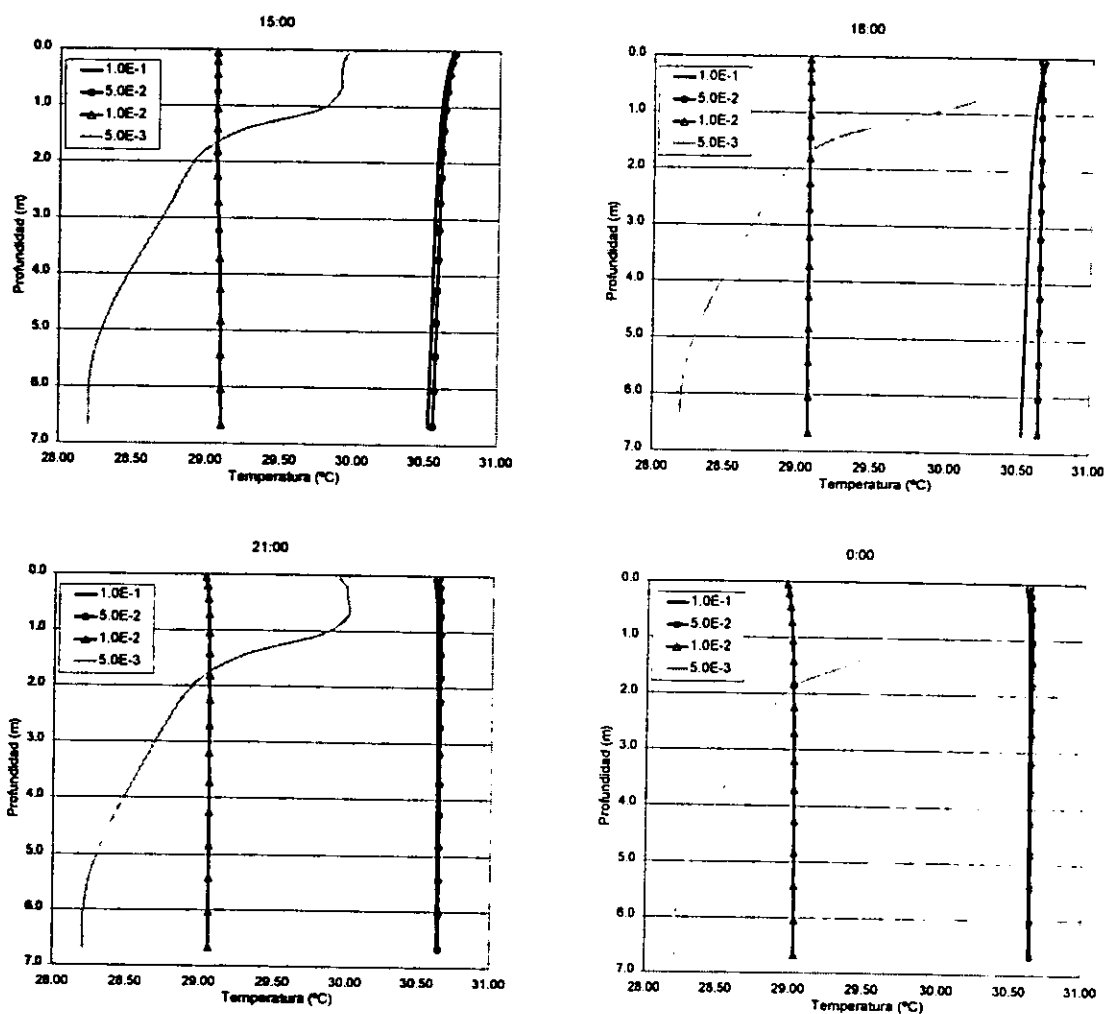


Figura 4.2 – 7. Dependencia de los resultados con respecto al valor de  $c_f$ .

#### 4. Casos analizados.

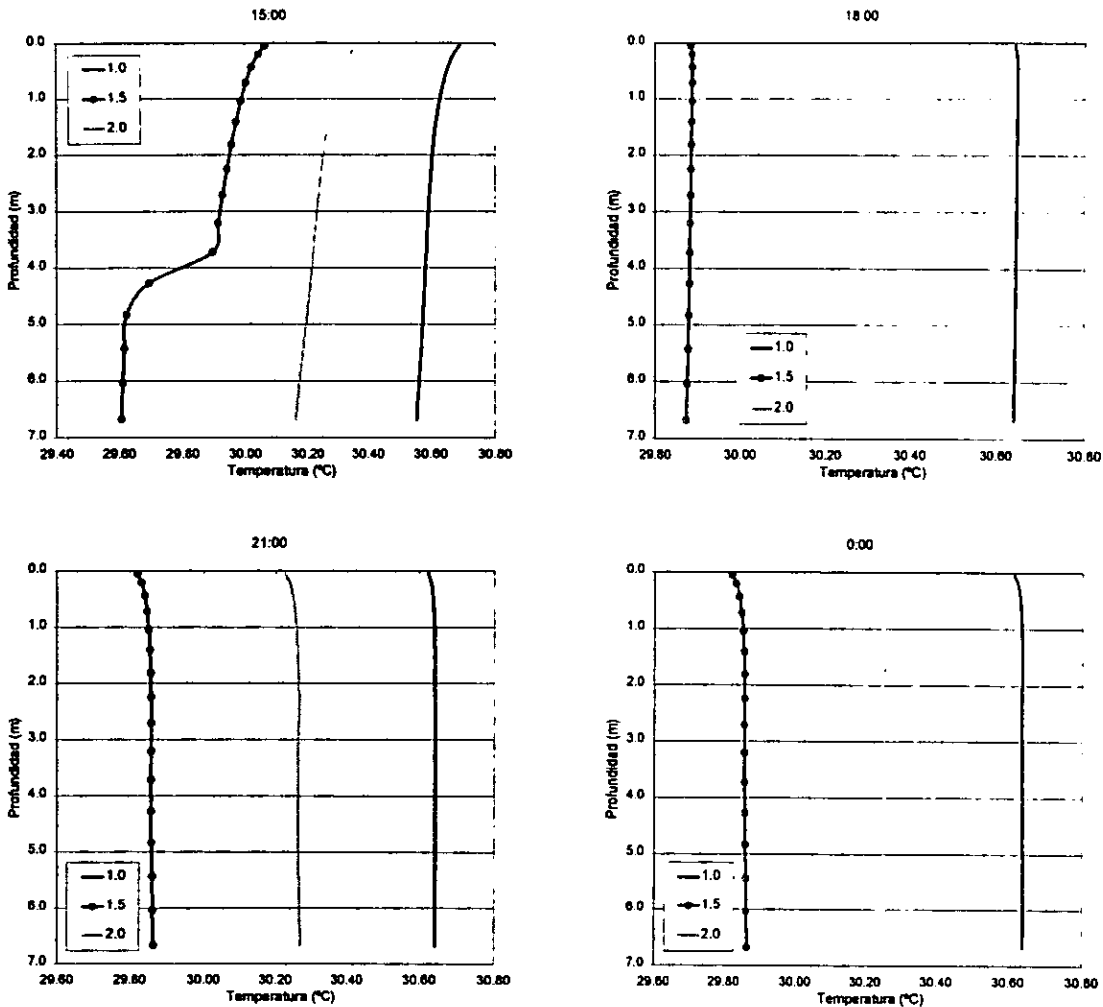


Figura 4.2 – 8. Dependencia de los resultados con respecto al valor de  $\sigma_{rk}$ .

Tabla 4.2 – 5. Valores recomendados para las constantes del MTDf para la simulación de un lago.

$C_f$	$C_v$	$C_m$	$\sigma_{rk}$	$\sigma_K$	$\sigma_\varepsilon$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_D$	$C_{II}$
0.005	0.3	10.0	1.5	1.0	1.314	1.44	1.92	1.0	0.2	0.548

La convergencia de la solución era muy sensible a las variaciones de  $c_f$ . En la tabla 4.2 – 6 se resumen los métodos de relajación usados para cada variable y los valores que se emplearon. Los métodos de relajación se seleccionaron siguiendo el ejemplo de los casos de biblioteca de PHOENICS en los cuales se muestra el uso del modelo de turbulencia de dos fluidos.

Tabla 4.2 – 6. Valores para la relajación utilizando el MTDf.

Variable	Método de Relajación	$C_r$		
		0.050	0.010	0.005
Presión	Lineal	0.70	0.70	0.70
Velocidad	Inercial	6.80	0.01	0.01
Temperatura	Lineal	0.70	0.70	0.70
Fracción Volumétrica	Lineal	0.11	0.11	0.11
Intercambio de masa	Lineal	0.70	0.40	0.40
Densidad	Lineal	0.90	0.90	0.90
Energía cinética turbulenta	Inercial	30.00	30.00	30.00
Tasa de disipación	Inercial	30.00	30.00	30.00

En las páginas subsecuentes (figura 4.2 – 9) se muestran la comparación entre las observaciones de campo de Ishikawa y Tanaka (1993) y los resultados obtenidos con el MT  $k-\epsilon$  y con el MTDf empleando el conjuntos de valores para las constantes empíricas de la tabla 4.2 – 4, todos para los mismos periodos observados en el lago Kasumigaura. Las simulaciones con el MTDf para siete días tomaron en promedio 50 min cada una, mientras que con el MT  $k-\epsilon$  requirieron 25 min cada una, en promedio.

Los resultados del MT  $k-\epsilon$  hacen ver al lago como un cuerpo de agua totalmente mezclado. Si bien a las 13:00 se observa una ligera estratificación de 1 °C con una termoclina a 5.0 m de profundidad, para las 13:30 y los tiempos posteriores, la termoclina se ha desvanecido sin volver a aparecer. Los resultados del MTDf son más alentadores; sin embargo, la termoclina mantiene una profundidad baja comparada con la de la termoclina real. Además, se observa un defasamiento entre ambas, pues mientras la termoclina real desciende y la diferencia de temperatura entre el epilimnión y el hipolimnión se reduce de 2.5 °C a 1 °C de las 13:00 a las 15:30, la termoclina simulada asciende y la diferencia de temperaturas entre las dos regiones aumenta de 1.5 °C a 2.5 °C. Para el segundo periodo, de las 18:00 a las 24:00, sí se observa un comportamiento semejante entre los dos conjuntos de datos, pues en ambos casos aumenta la profundidad y disminuye la diferencia de temperatura entre el epilimnión y el hipolimnión, aunque la termoclina calculada únicamente alcanza una profundidad de 1.7 m y una diferencia mínima de temperatura de 1.5 °C, mientras que la termoclina real alcanza una profundidad de 3.8 m y una diferencia de temperatura mínima de 0.5 °C.

Por otra parte, la correspondencia entre los perfiles de velocidad es menos clara; sin embargo, es notorio como el MTDf predice un perfil que aumenta su intensidad en la superficie hasta las 18:00 y a partir de entonces permanece aproximadamente constante, tal y como ocurre en el caso del perfil observado, aunque los valores predichos son inferiores (aproximadamente la mitad) a los datos de campo. El MT  $k-\epsilon$  predice valores muy superiores a los valores observados y muestra una intensidad superficial creciente hasta las 19:00, a partir de las cuales comienza a disminuir su valor.

No se debe olvidar, al interpretar estos resultados, que las condiciones en las cuales fueron medidas las variables en el lago Kasumigaura son imposibles de reproducir de manera exacta, por lo que se debe tener más en cuenta el orden de magnitud y el comportamiento de los resultados que su valor numérico.



#### 4. Casos analizados.

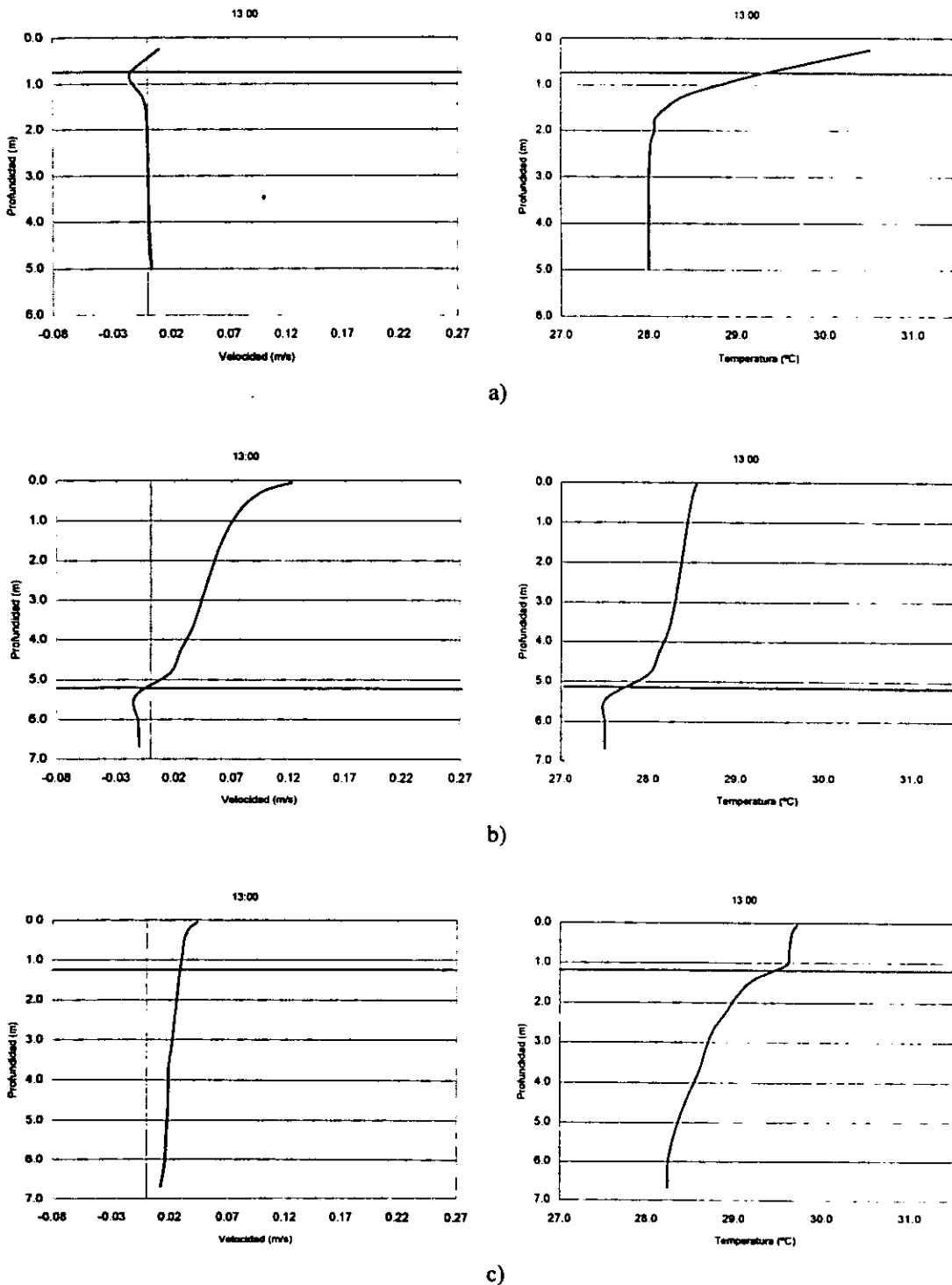


Figura 4.2 – 9 (inicio). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $k_e$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTDf en combinación con el MT- $k_e$ .

#### 4. Casos analizados.

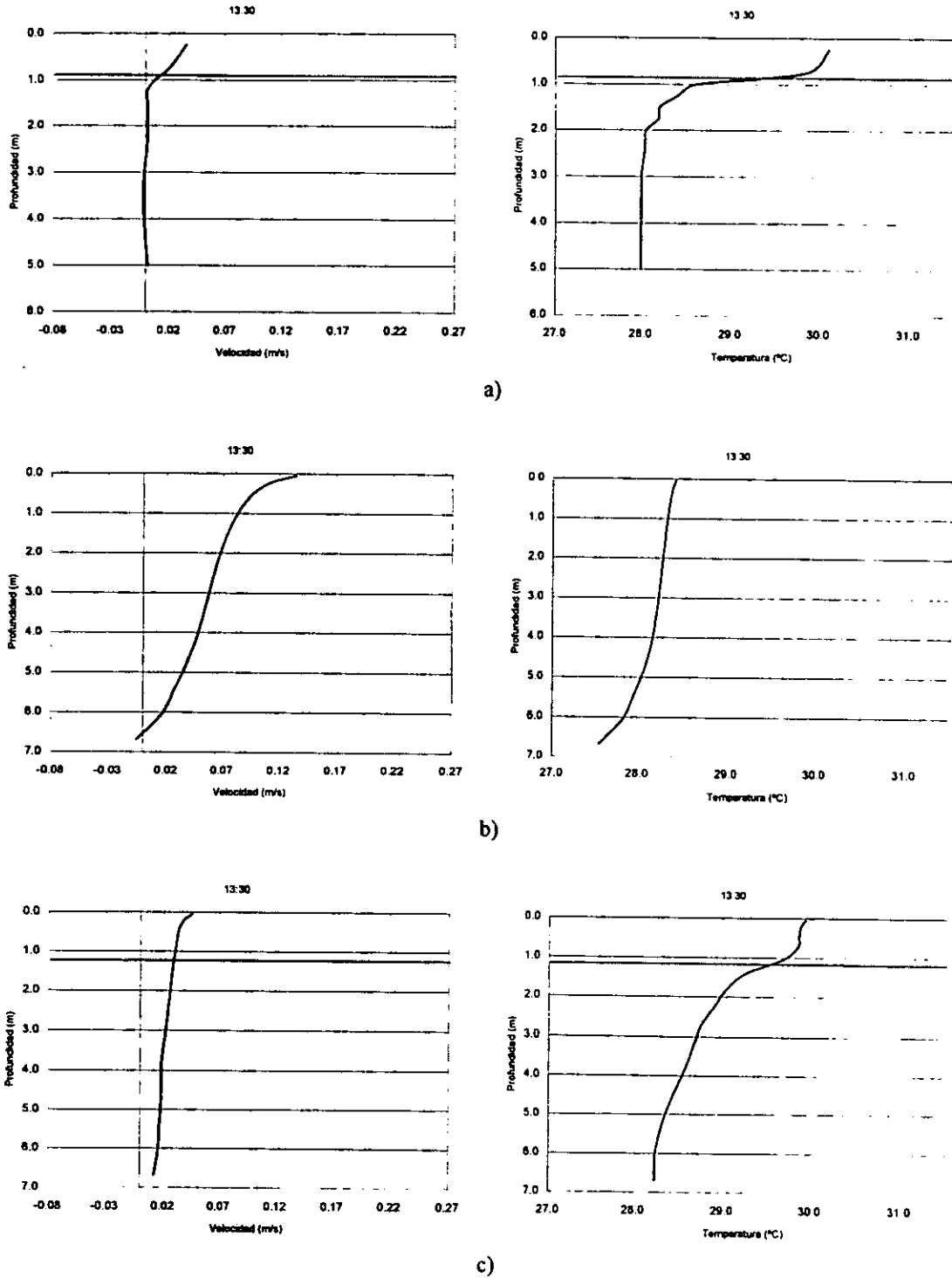


Figura 4.2 – 9 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $\kappa$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTDF en combinación con el MT- $\kappa$ .

#### 4. Casos analizados.

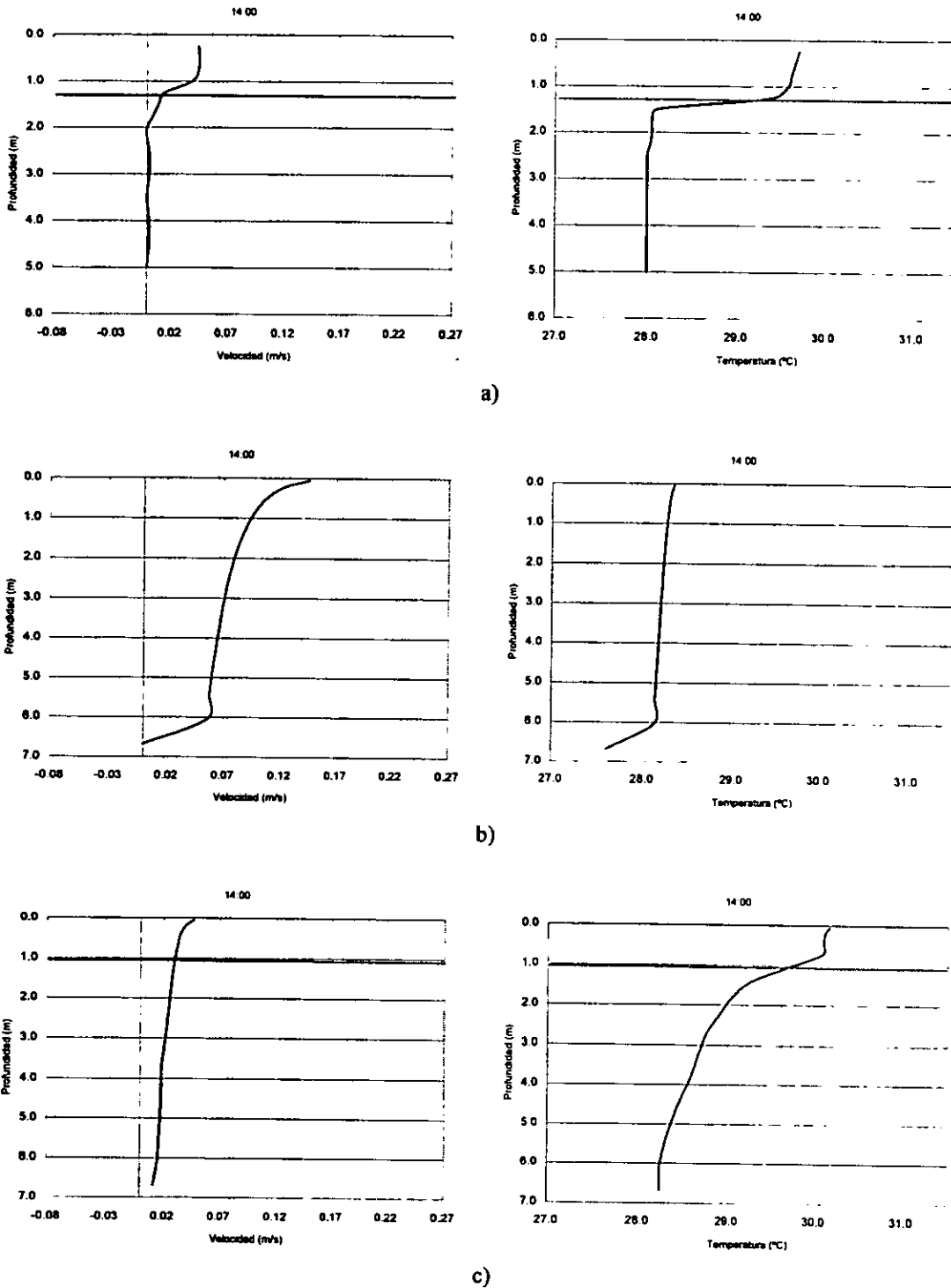


Figura 4.2 – 9 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $\epsilon$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTDF en combinación con el MT- $\epsilon$ .

#### 4. Casos analizados.

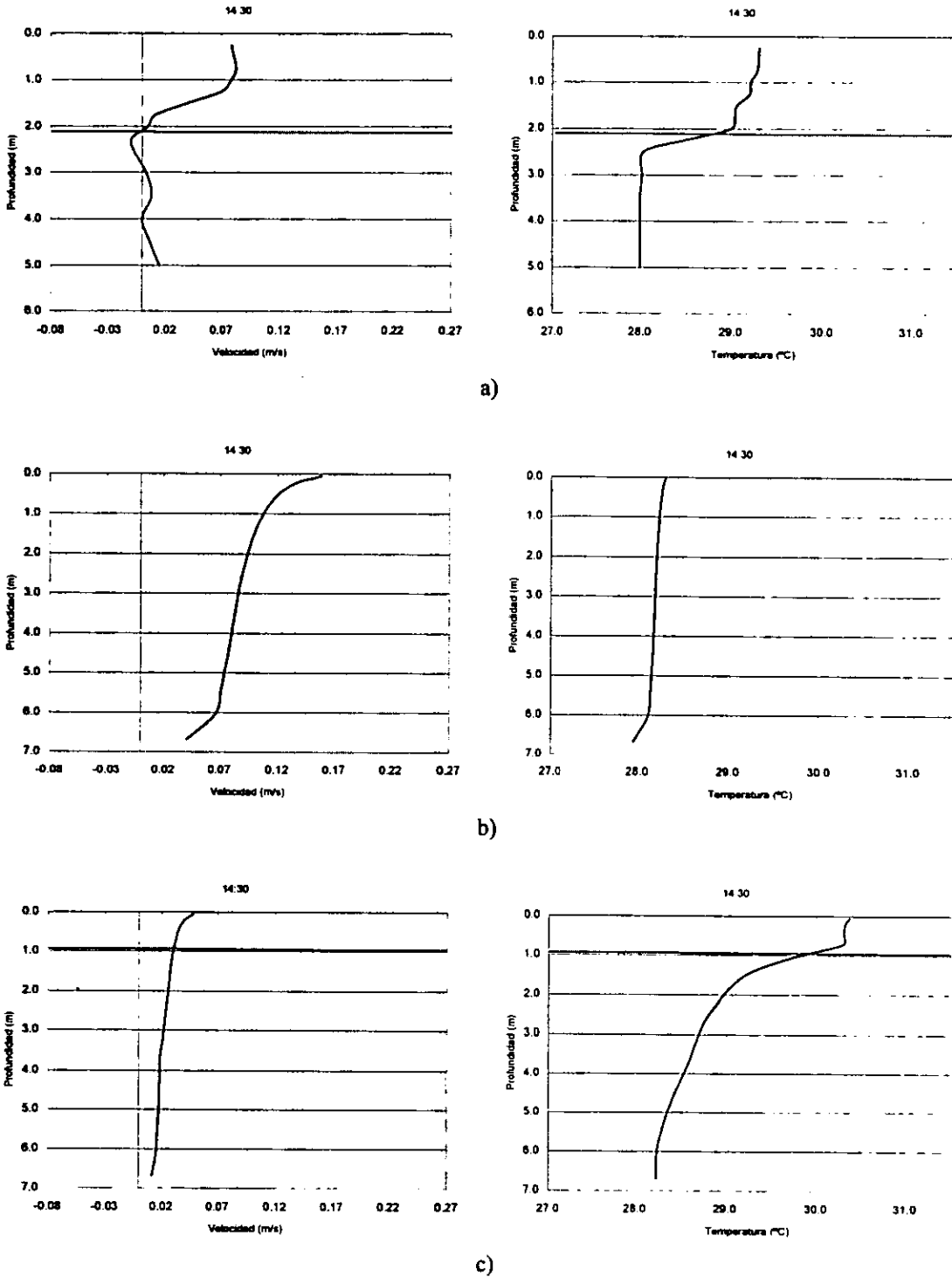


Figura 4.2 – 9 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $\kappa\epsilon$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTD en combinación con el MT- $\kappa\epsilon$ .

#### 4. Casos analizados.

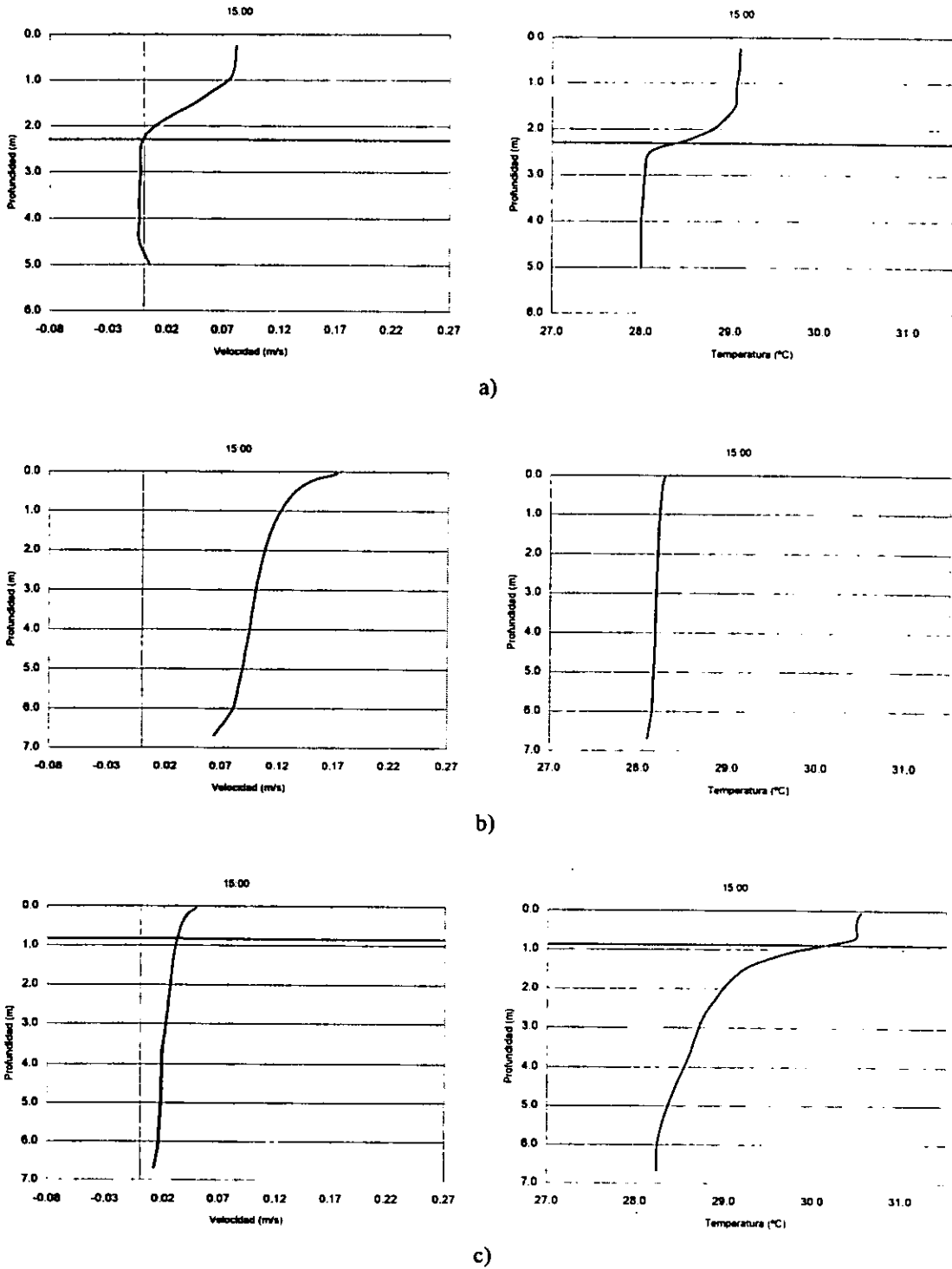


Figura 4.2 – 9 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $\kappa\epsilon$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTDf en combinación con el MT- $\kappa\epsilon$ .

#### 4. Casos analizados.

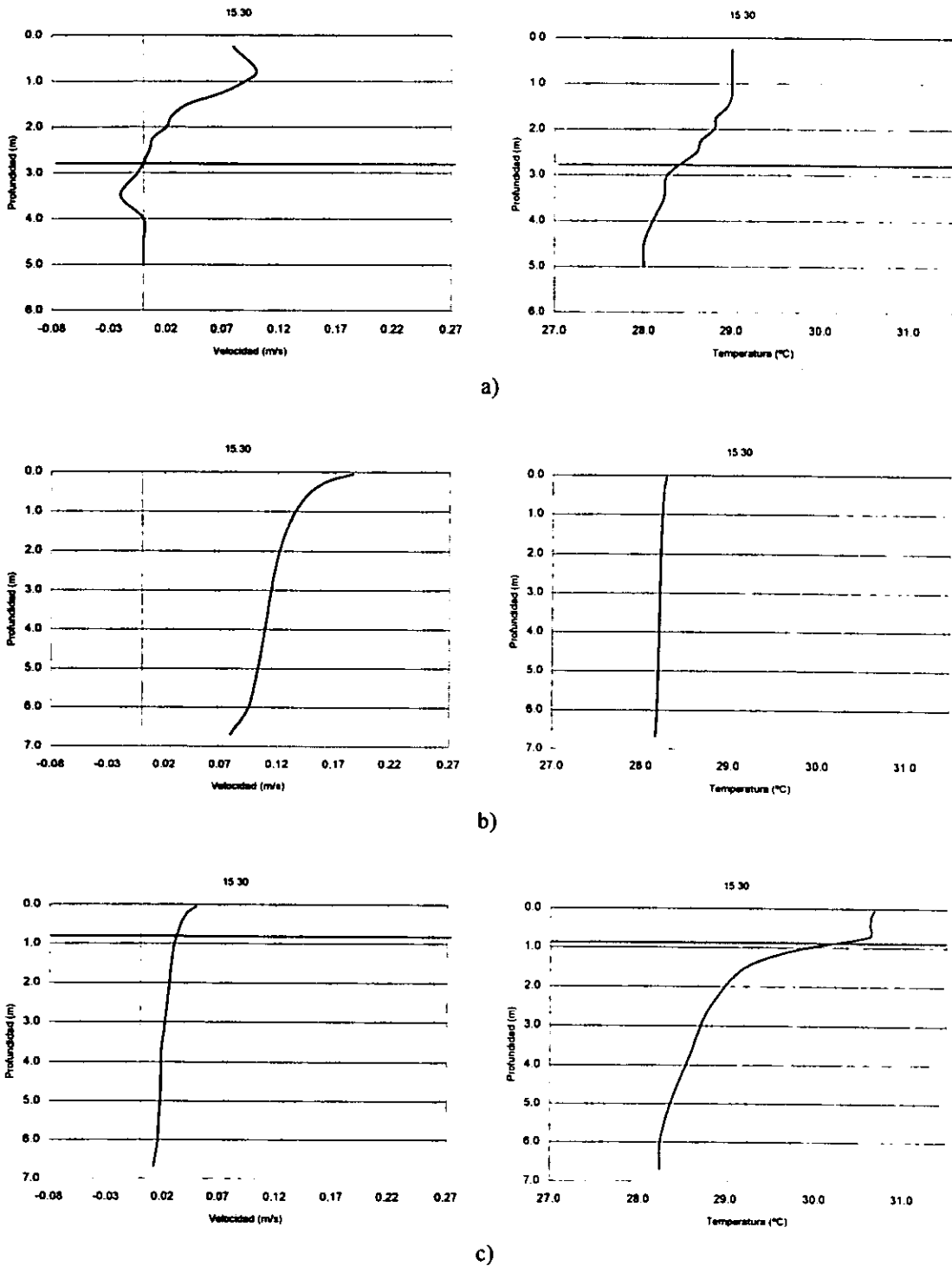


Figura 4.2 – 9 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $\epsilon$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTDf en combinación con el MT- $\epsilon$ .

#### 4. Casos analizados.

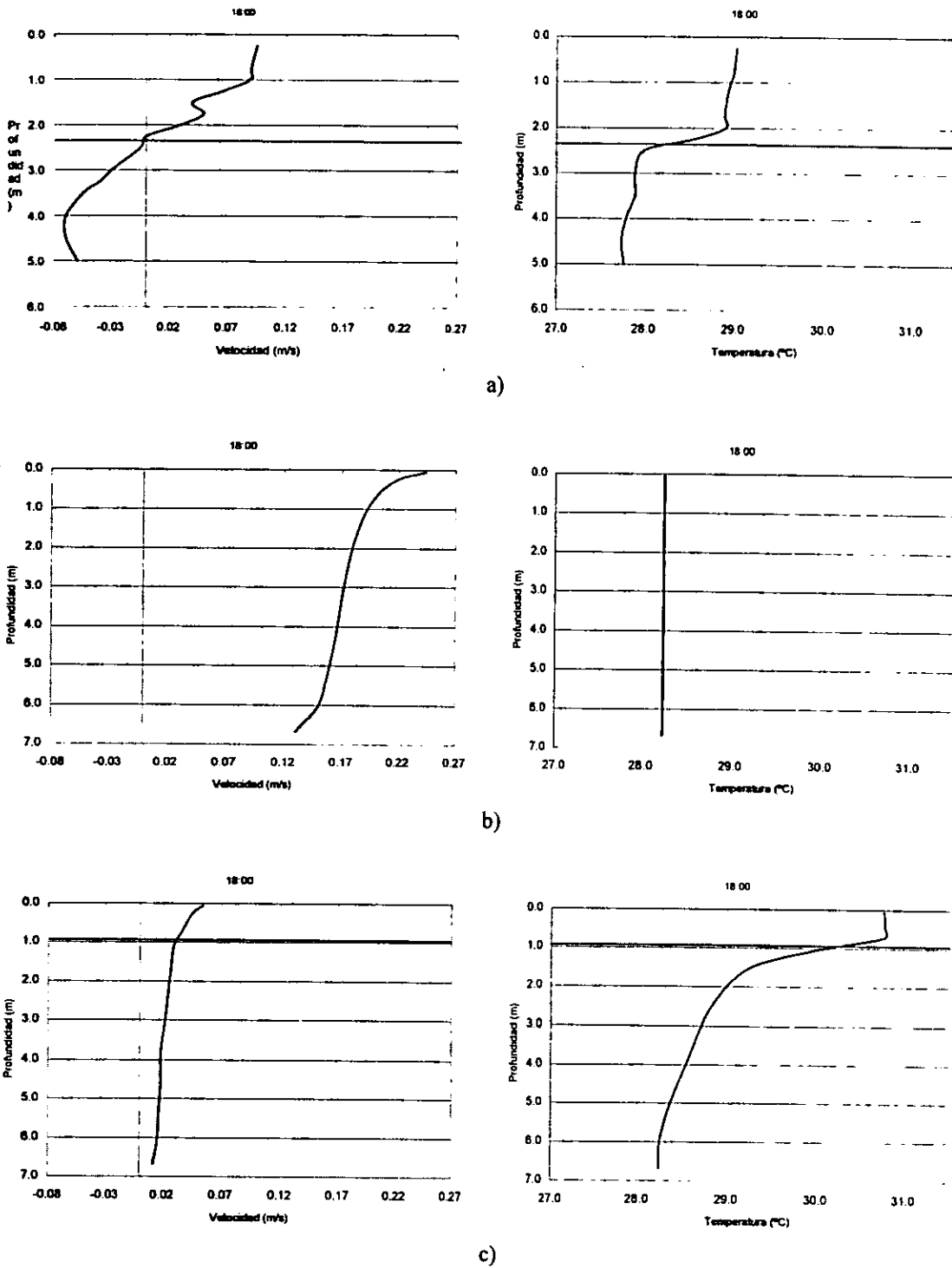


Figura 4.2 – 9 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $k\epsilon$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTDF en combinación con el MT- $k\epsilon$ .

#### 4. Casos analizados.

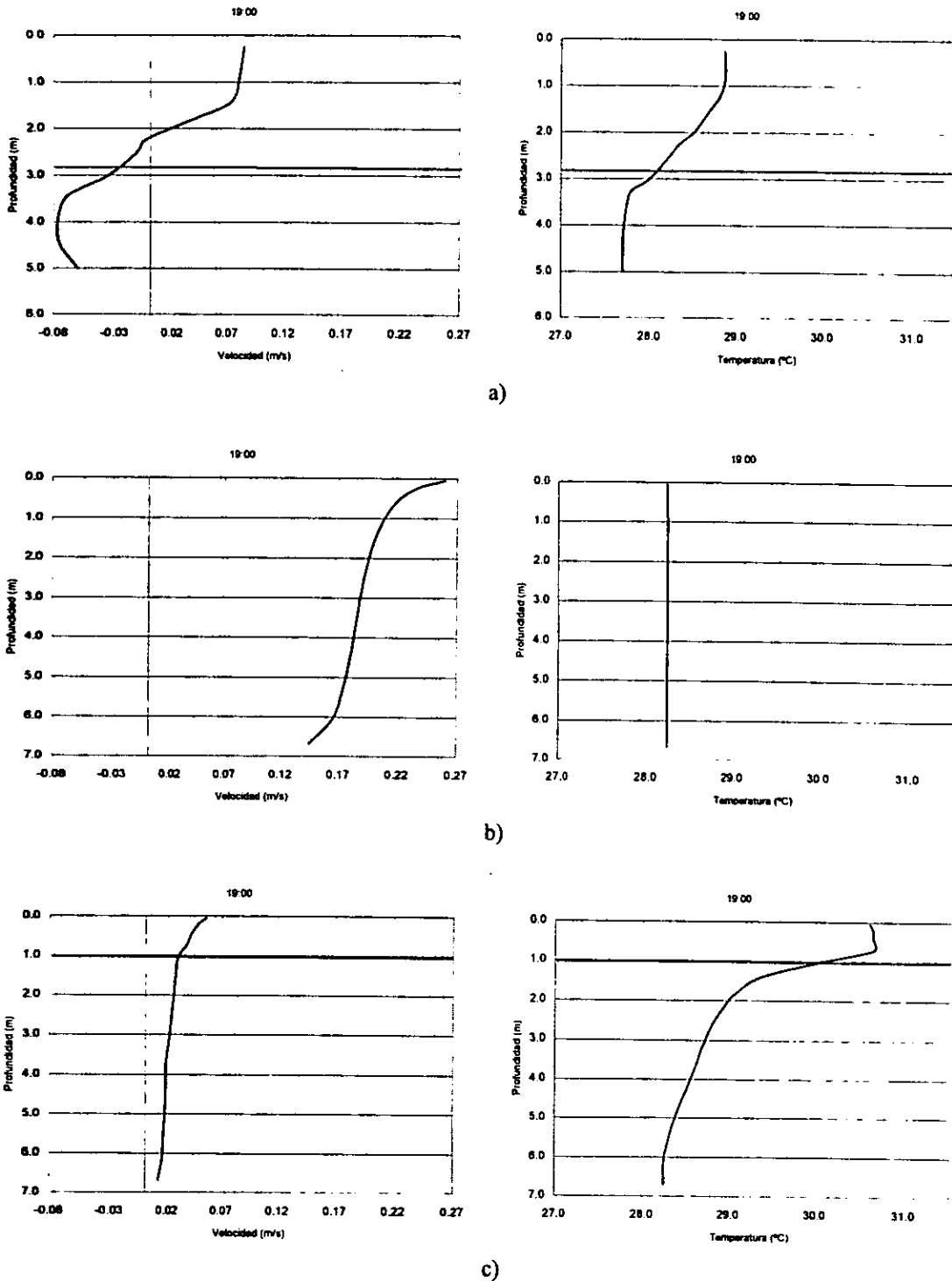


Figura 4.2 – 9 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $\kappa\epsilon$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTDF en combinación con el MT- $\kappa\epsilon$ .



#### 4. Casos analizados.

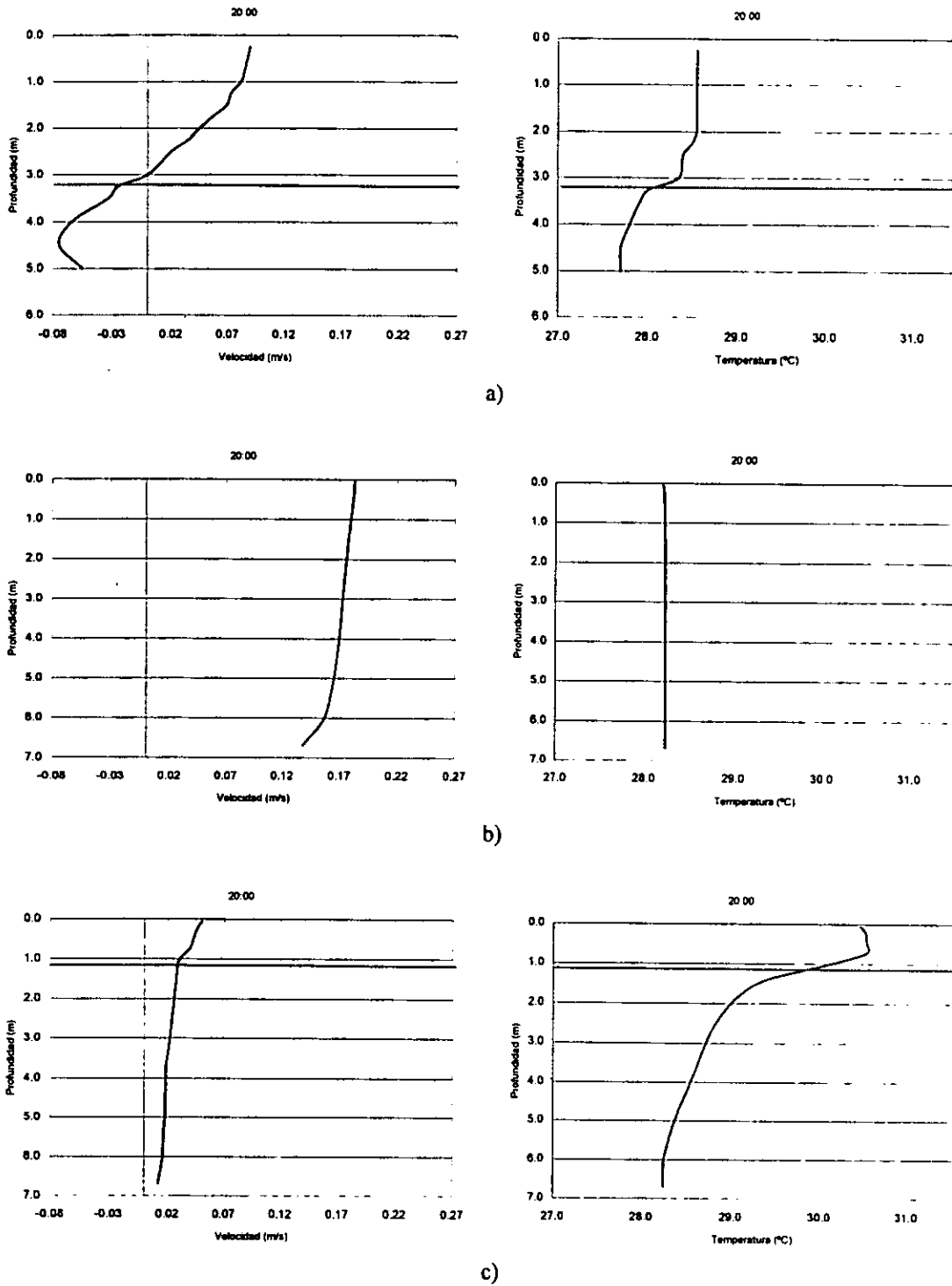


Figura 4.2 – 9 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $\epsilon\epsilon$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTDf en combinación con el MT- $\epsilon\epsilon$ .

#### 4. Casos analizados.

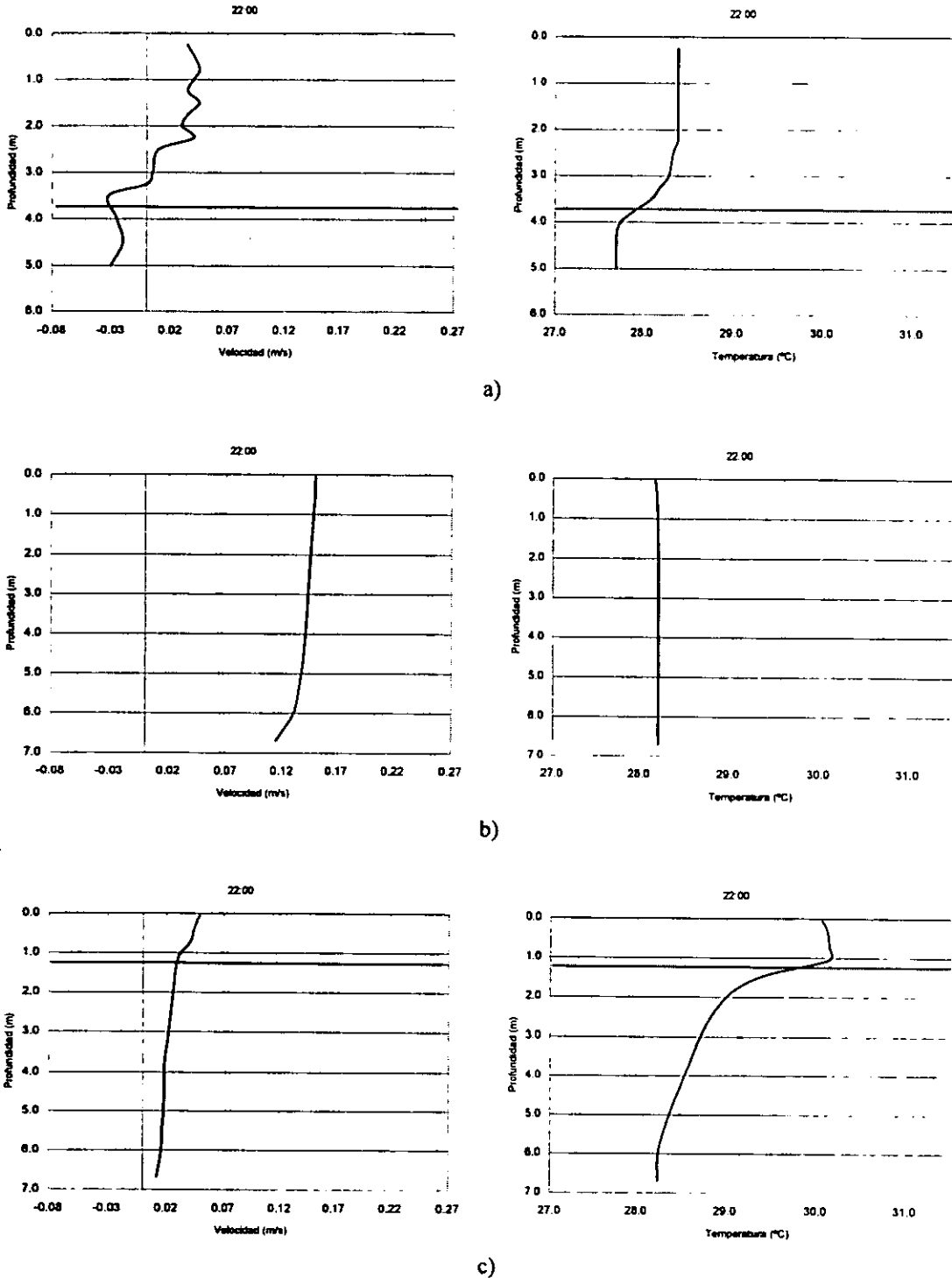


Figura 4.2 – 9 (continuación). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $k\epsilon$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTDF en combinación con el MT- $k\epsilon$ .

#### 4. Casos analizados.

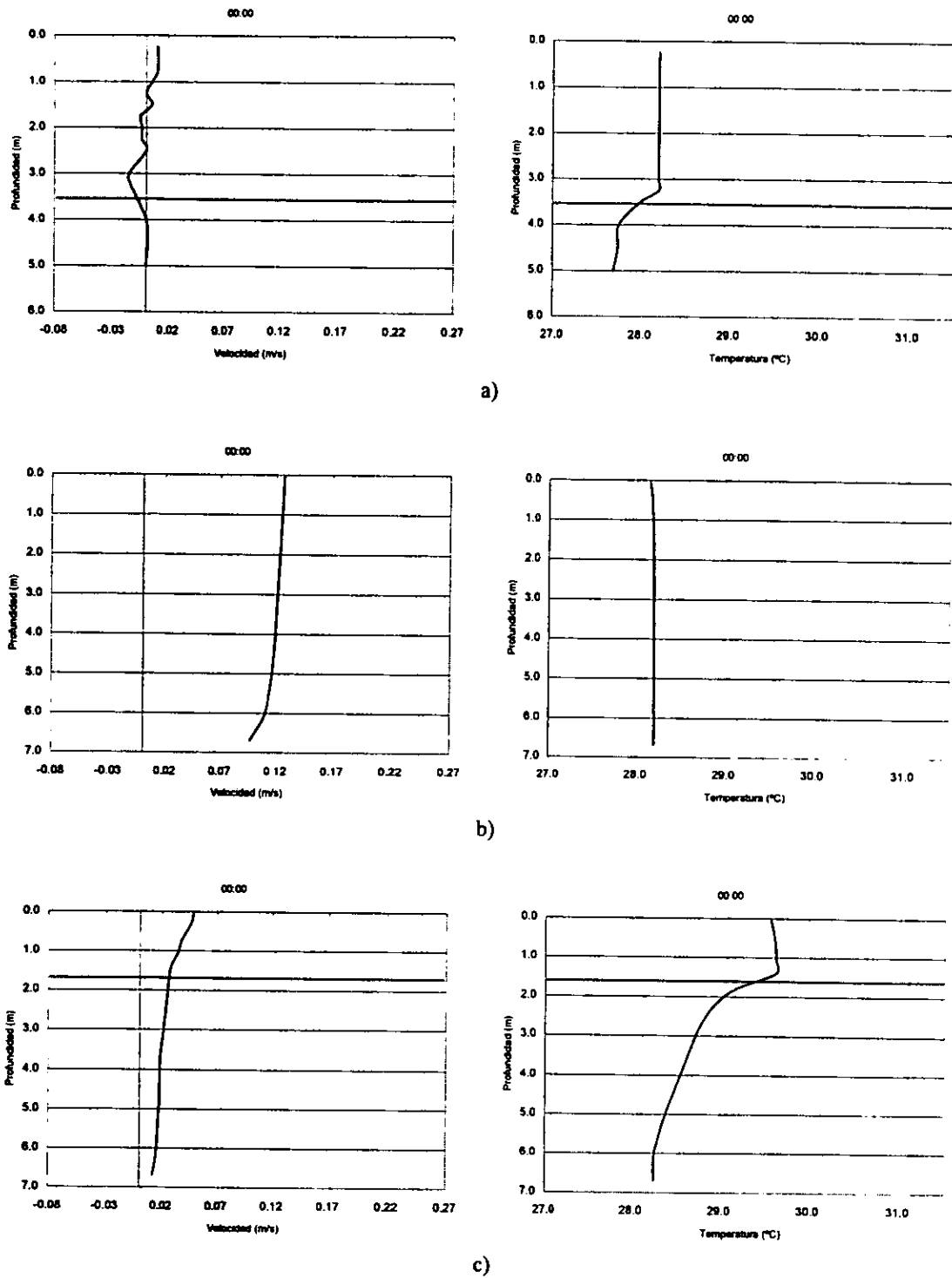
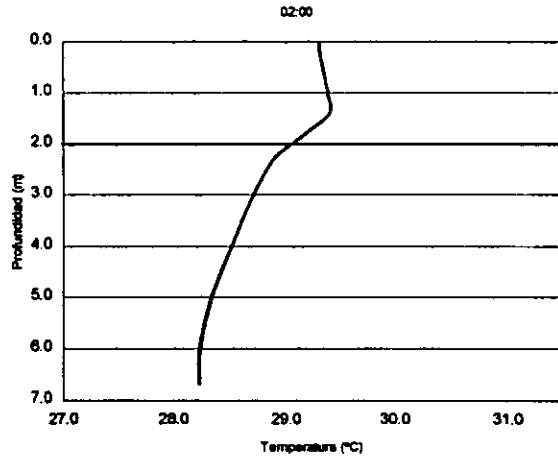


Figura 4.2 – 9 (final). Patrones de flujo y perfiles de temperatura arrojados por los diferentes modelos para datos correspondientes a la ubicación del lago Kasumigaura, Japón. a) Datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1997) en el lago Kasumigaura; b) Resultados obtenidos aplicando únicamente el MT- $k\epsilon$ ; c) resultados obtenidos aplicando el MTDF en combinación con el MT- $k\epsilon$ .

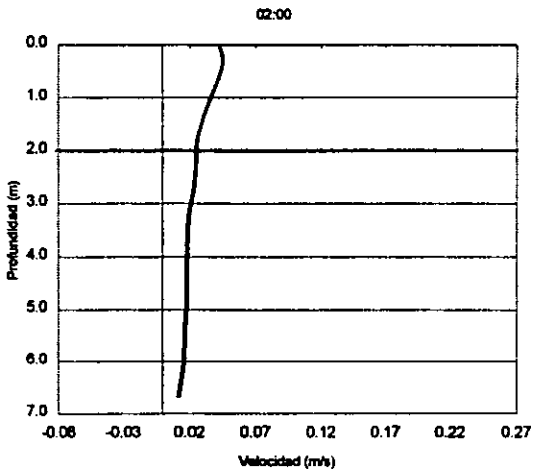
La figura 4.2 – 10 muestra la evolución de la temperatura, la velocidad, la energía cinética turbulenta, la viscosidad cinemática turbulenta y de la fracción volumétrica del fluido 1 a lo largo del día 7. El análisis de estos resultados junto con los presentados en la figura 4.2 – 9, revela que una diferencia de temperatura entre 1.5 °C y 2 °C es suficiente para inhibir el transporte de energía turbulenta entre el epilimnión y el hipolimnión, en correspondencia con las conclusiones reportadas por Ishikawa y Tanaka (1997) según las cuales, con una diferencia de temperatura de 1 °C se impide el transporte turbulento en los lagos que estratifican diariamente. El comportamiento de todas las variables sigue esta misma tendencia, incluyendo la velocidad, que en general muestra una diferencia de magnitud entre la región del epilimnión y el hipolimnión, aunque no se aprecian los efectos de recirculación que sí son evidentes en los datos medidos por Ishikawa y Tanaka (1993) (Figura 4.2 – 2).

Un resultado inesperado es el que se refiere a la fracción volumétrica del fluido 1. Los efectos turbulentos en un lago son más apreciables en el epilimnión, pues son causados principalmente por los esfuerzos cortantes que genera el viento sobre la superficie. En el hipolimnión, estos efectos están inhibidos casi por completo; es decir, la transferencia de cantidad de movimiento es casi inexistente entre el epilimnión y el hipolimnión. Tomando esto en cuenta y sabiendo que, en PHOENICS, el único fluido que se considera turbulento es el fluido 1, se decidió establecer como condición inicial para la simulación que este fluido ocupara la región del epilimnión haciendo que el fluido 2 se encontrara únicamente en el hipolimnión. Sin embargo, para el día siete, cuando la evolución de las variables del lago tienen ya un comportamiento periódico independiente de las condiciones iniciales, se encontró que la situación era exactamente la inversa: el fluido 1 se encuentra predominantemente en el hipolimnión, mientras que el epilimnión se encuentra ocupado por partes aproximadamente iguales de fluido 1 y fluido 2.

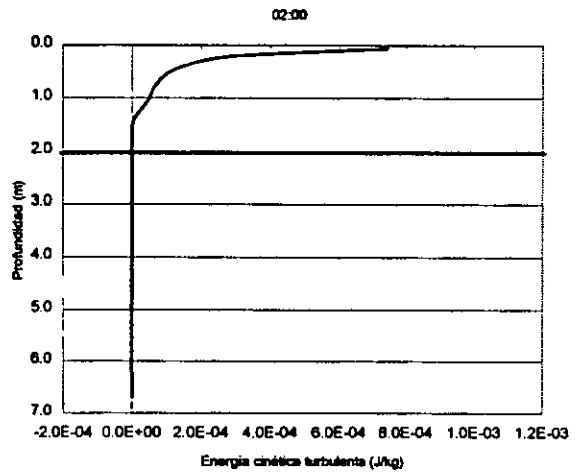
#### 4. Casos analizados.



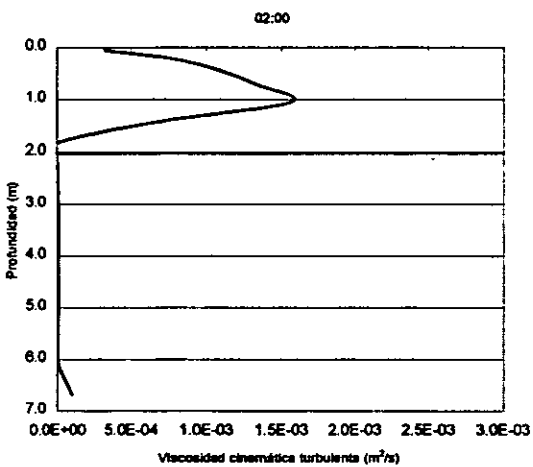
a)



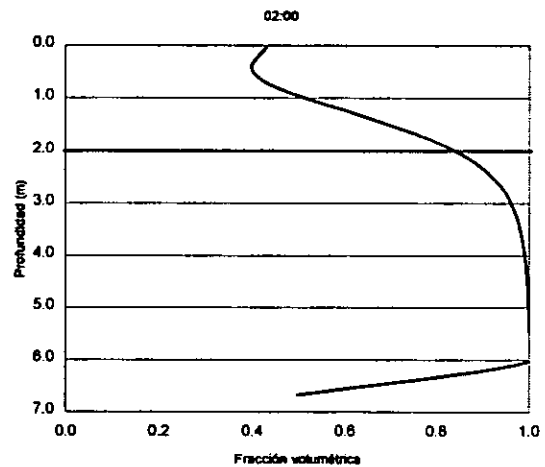
b)



c)



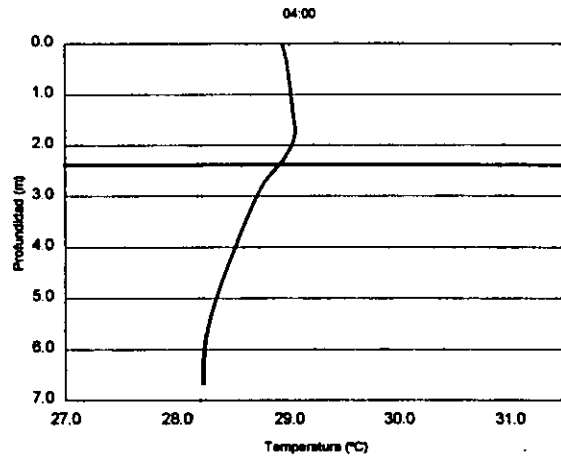
d)



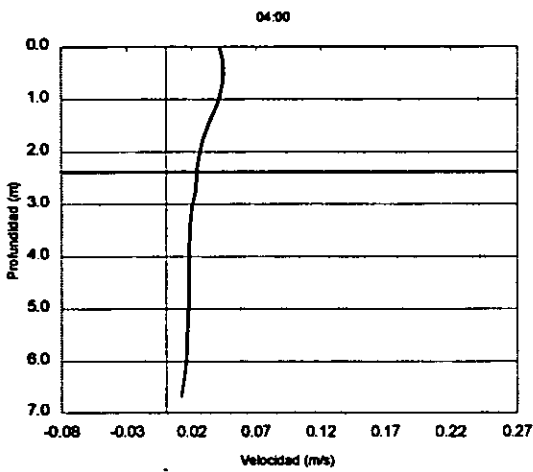
e)

Figura 4.2 – 10 (02:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido 1

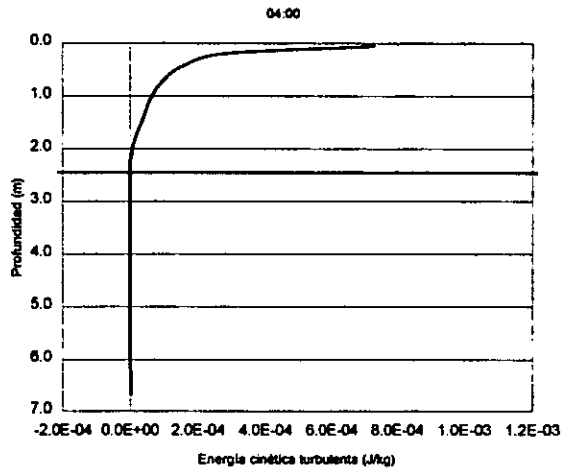
#### 4. Casos analizados.



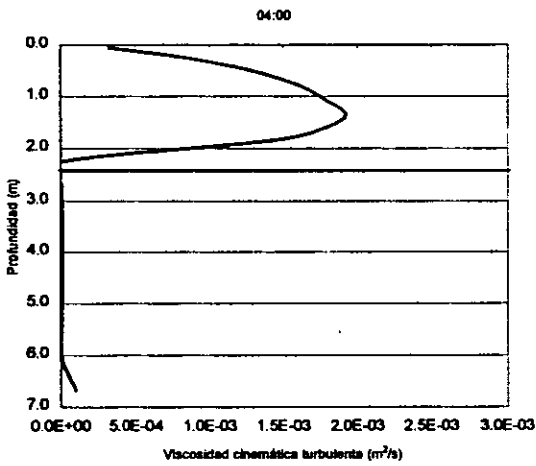
a)



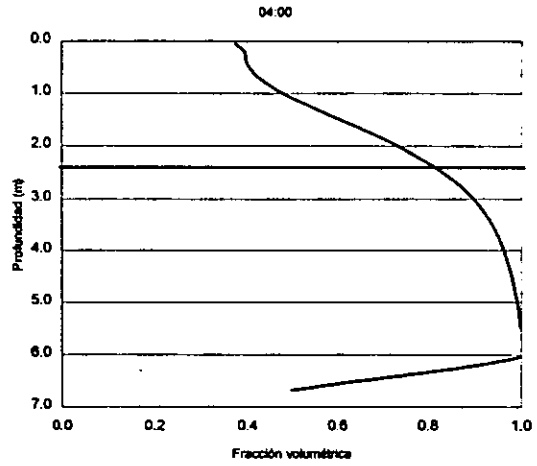
b)



c)



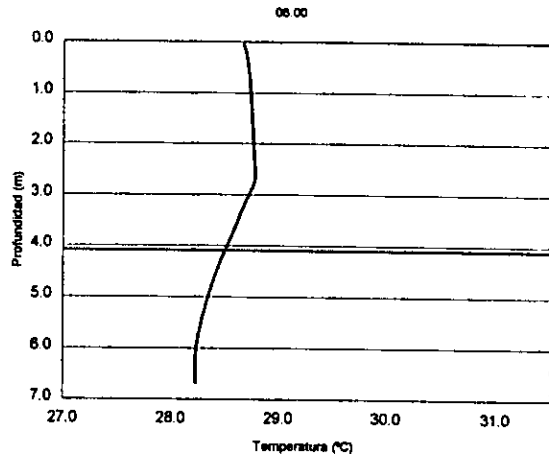
d)



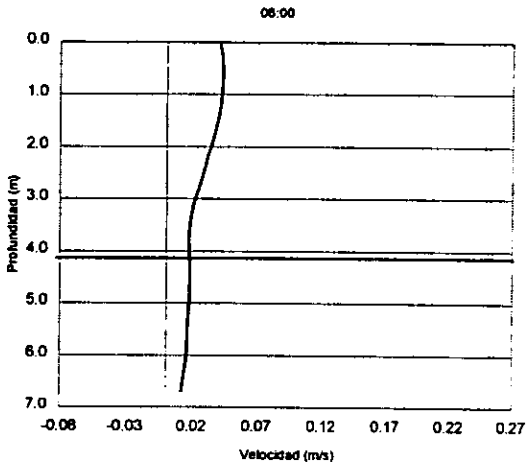
e)

Figura 4.2 – 10 (04:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido 1

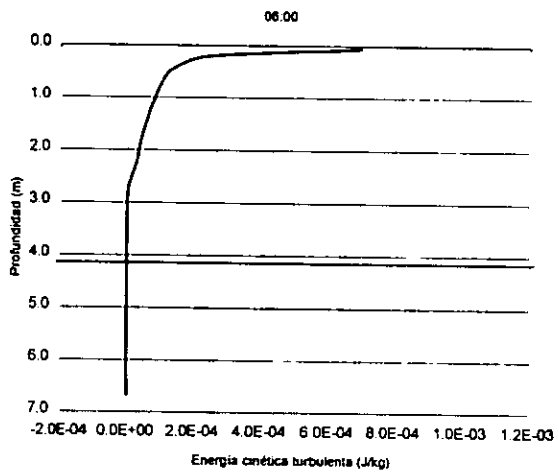
#### 4. Casos analizados.



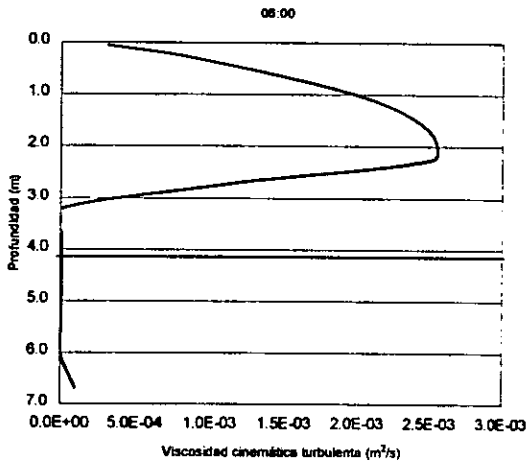
a)



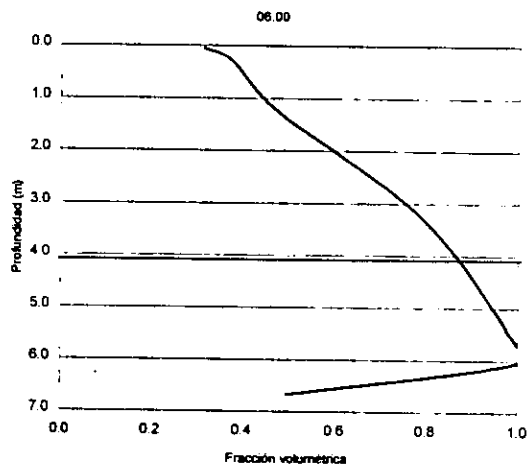
b)



c)



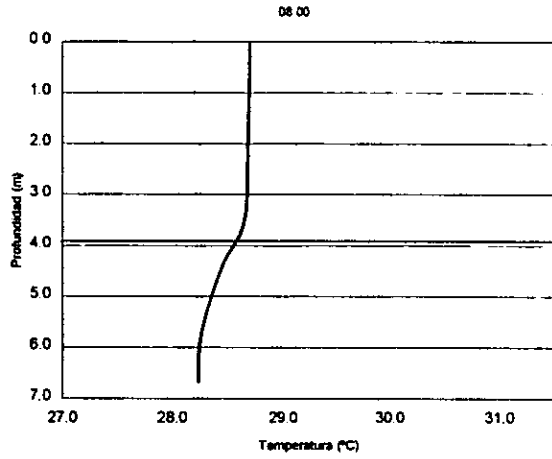
d)



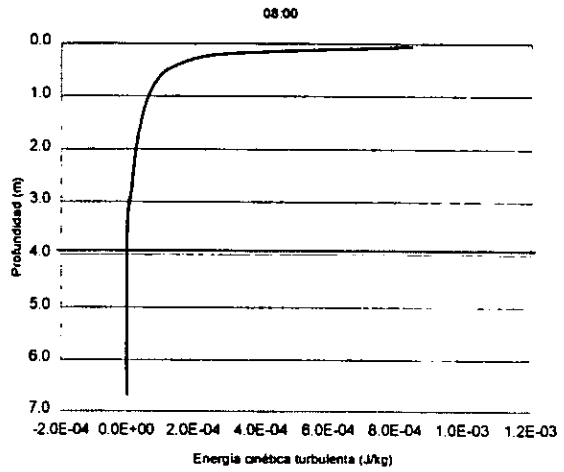
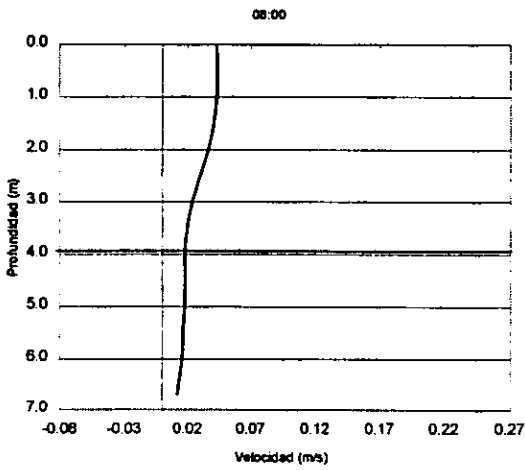
e)

Figura 4.2 – 10 (06:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido I

#### 4. Casos analizados.

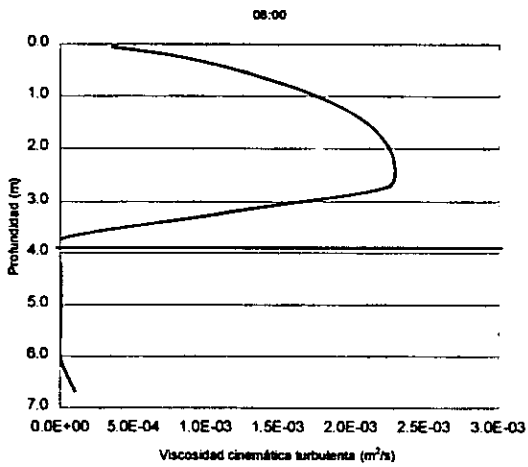


a)



b)

c)



d)

e)

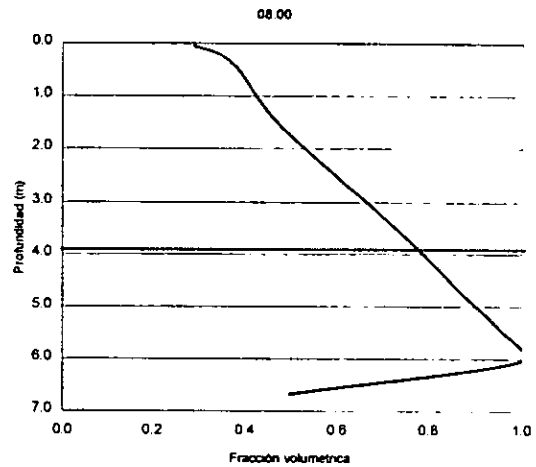
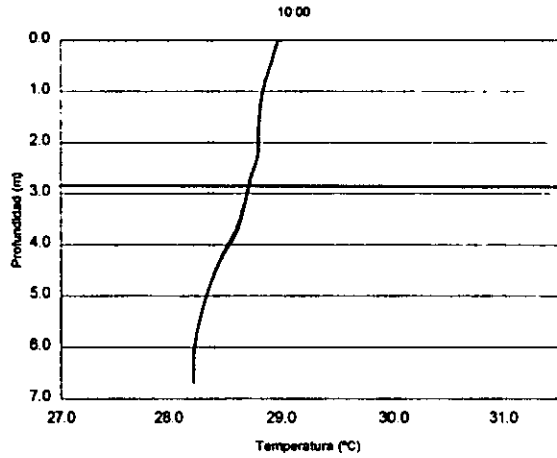


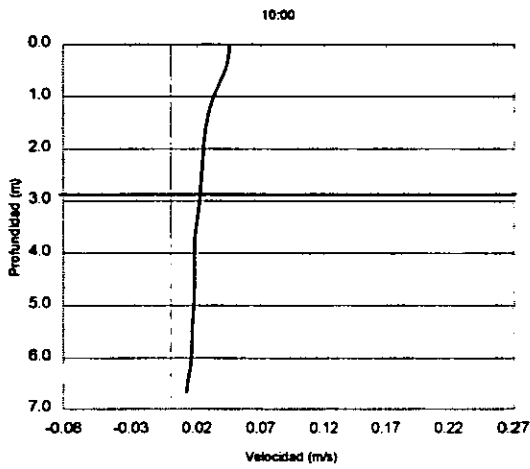
Figura 4.2 – 10 (08:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido }



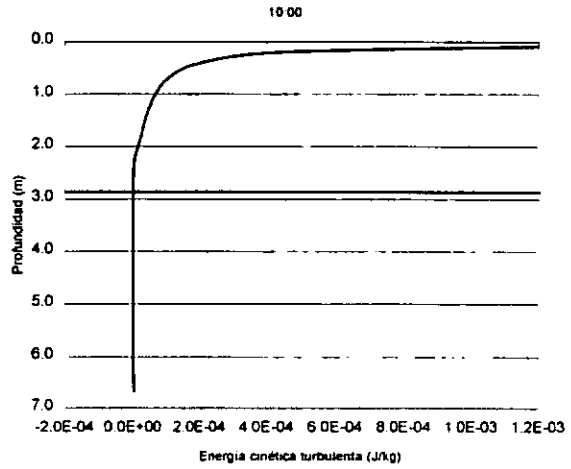
#### 4. Casos analizados.



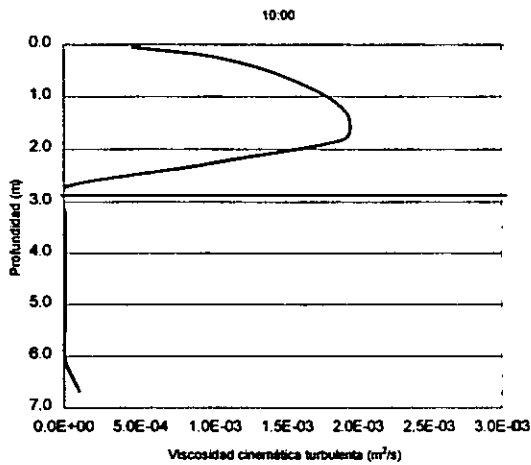
a)



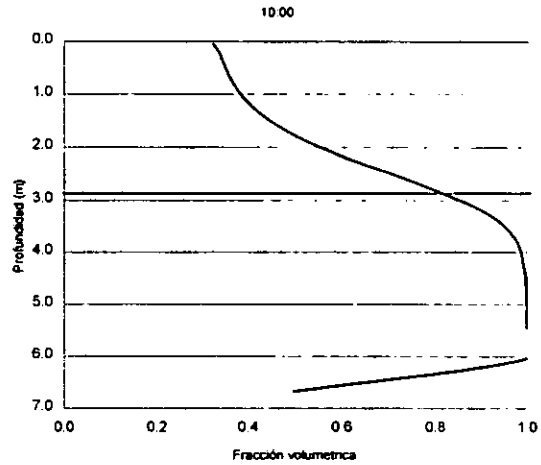
b)



c)



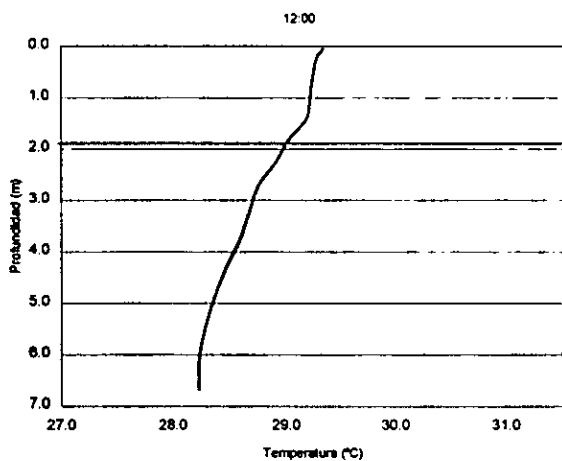
d)



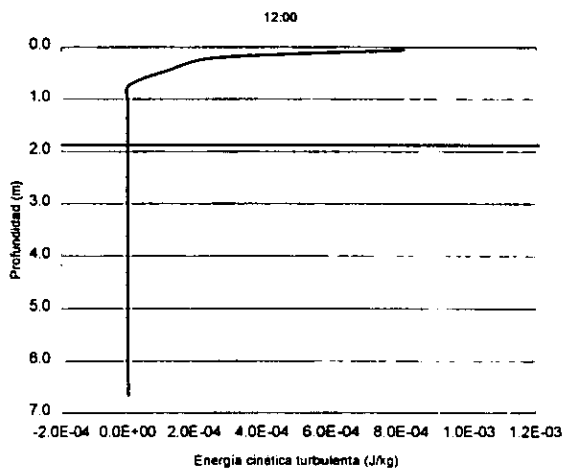
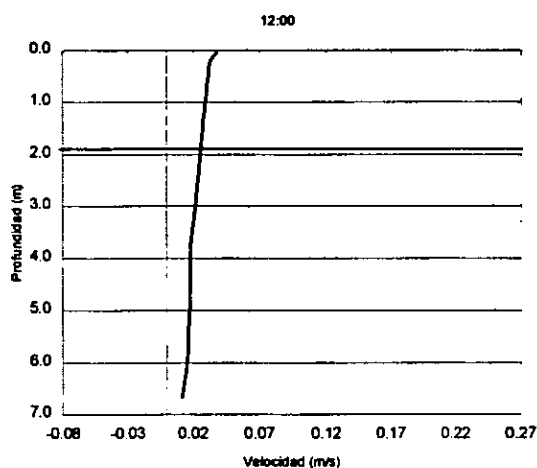
e)

Figura 4.2 – 10 (10:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido 1

#### 4. Casos analizados.

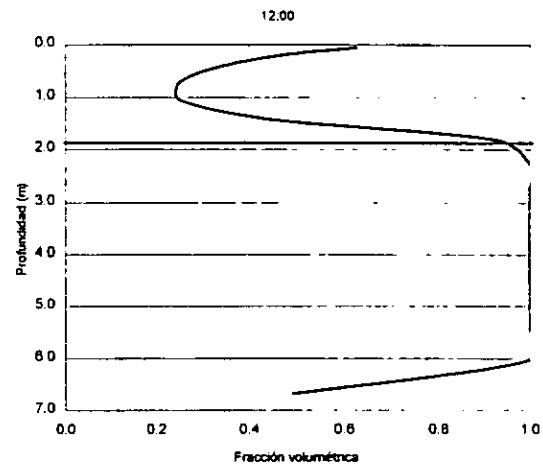
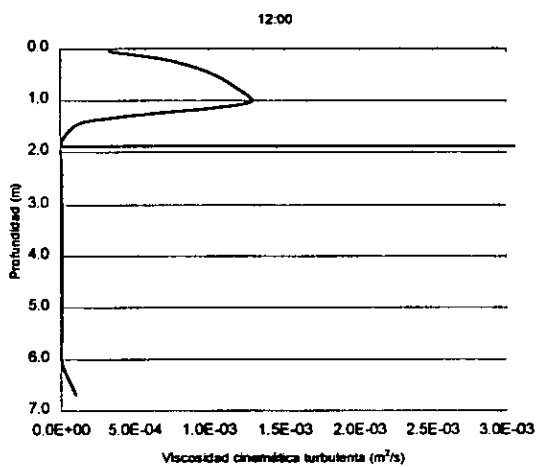


a)



b)

c)

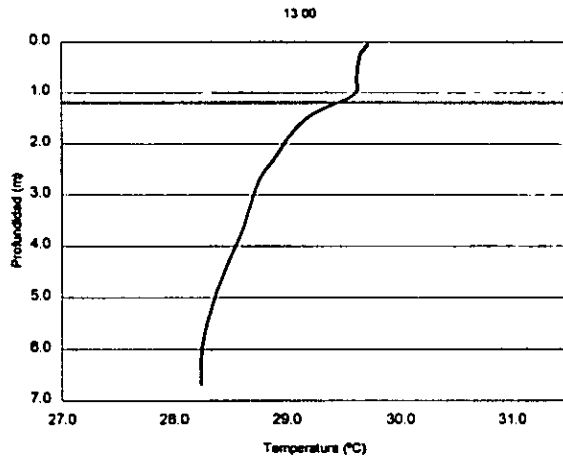


d)

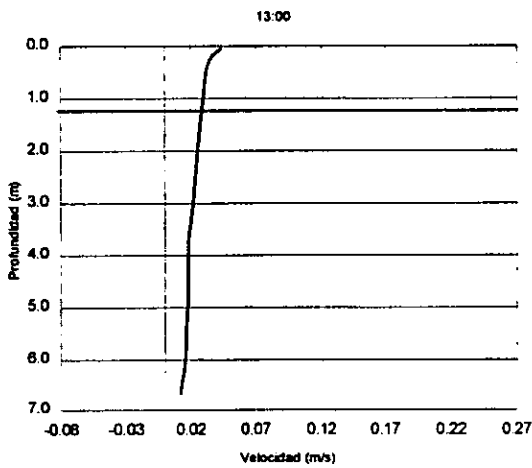
e)

Figura 4.2 – 10 (12:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido 1

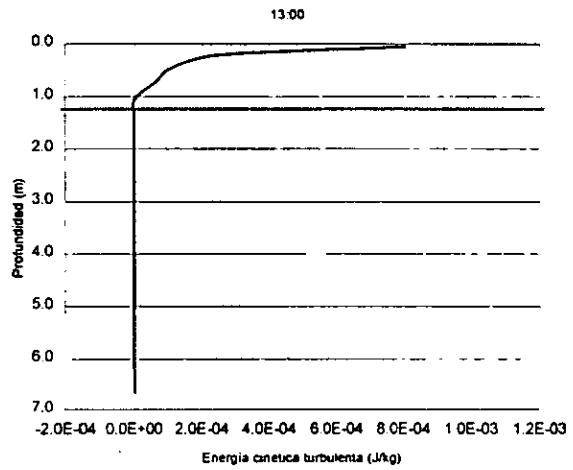
#### 4. Casos analizados.



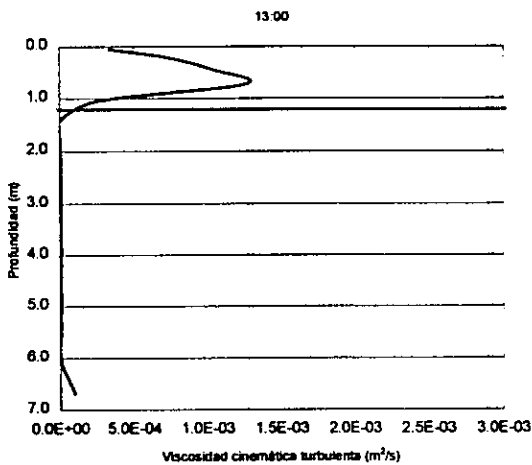
a)



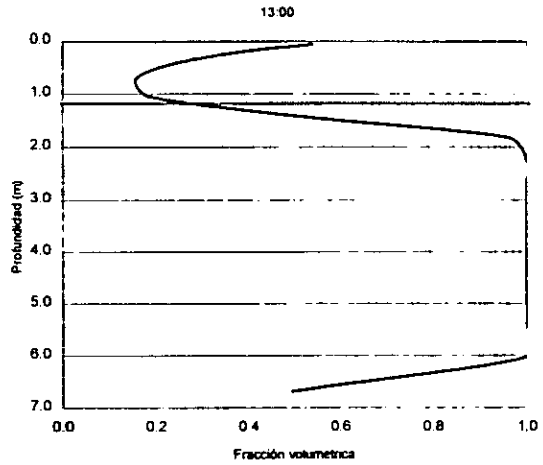
b)



c)



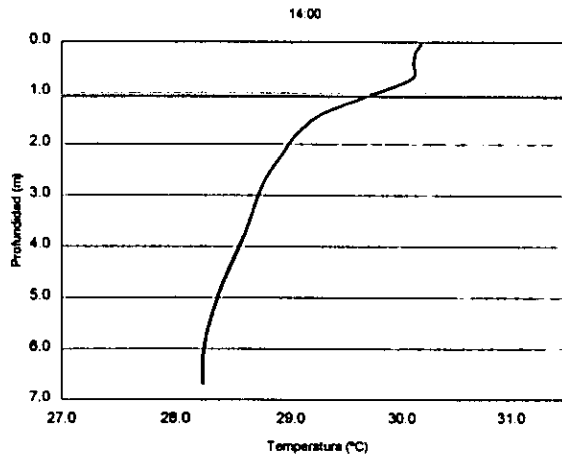
d)



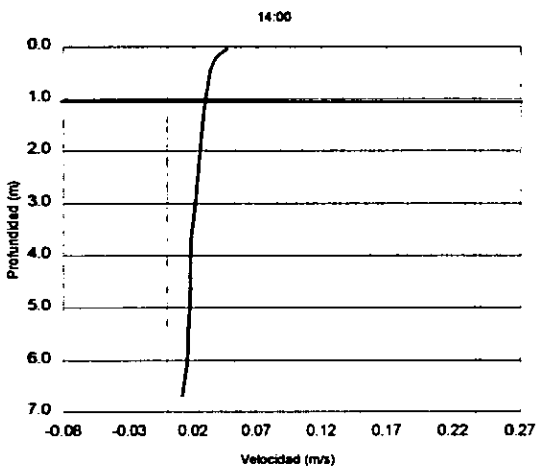
e)

Figura 4.2 – 10 (13:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido I

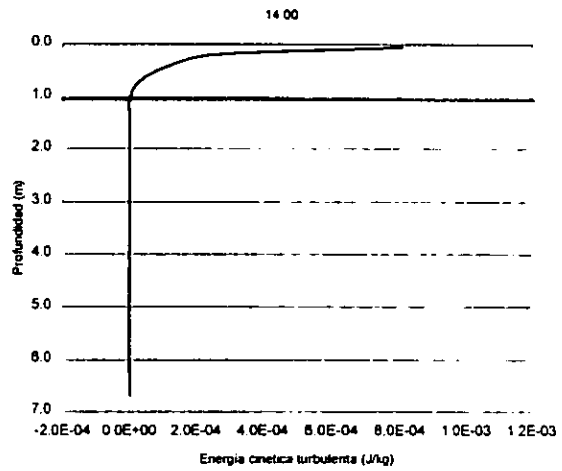
#### 4. Casos analizados.



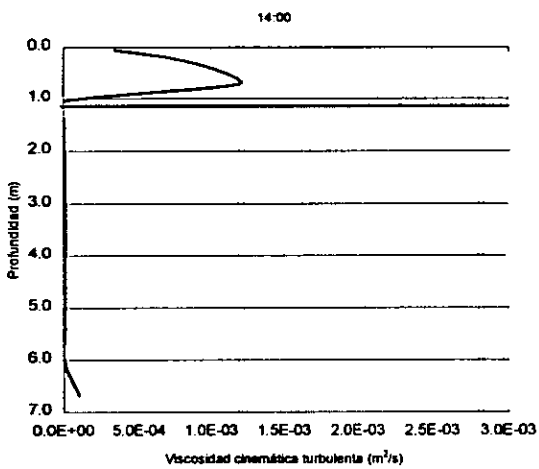
a)



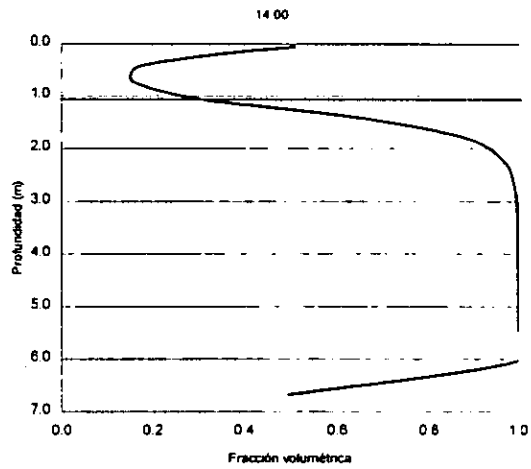
b)



c)



d)



e)

Figura 4.2 – 10 (14:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido 1

#### 4. Casos analizados.

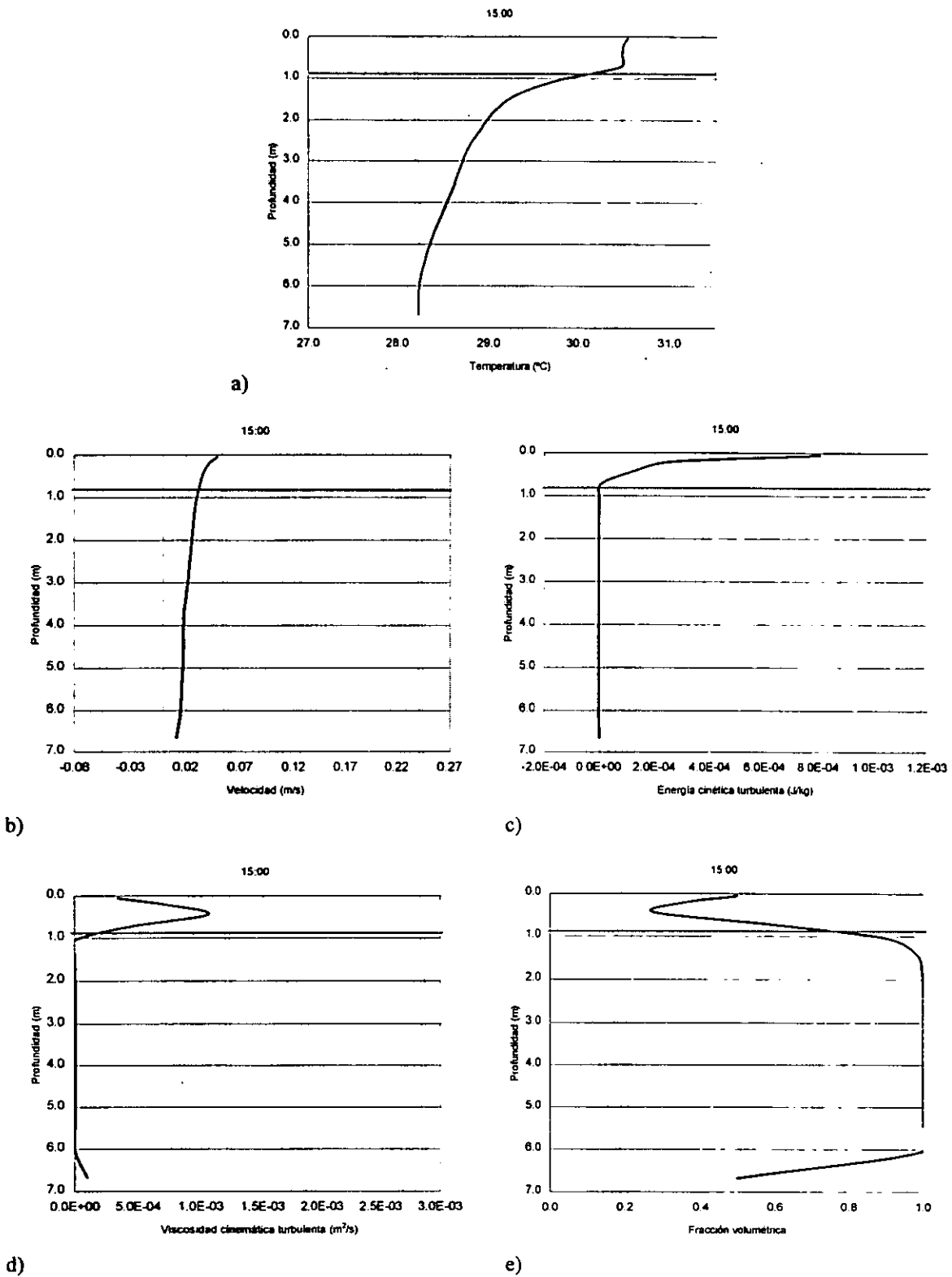


Figura 4.2 – 10 (15:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido 1

#### 4. Casos analizados.

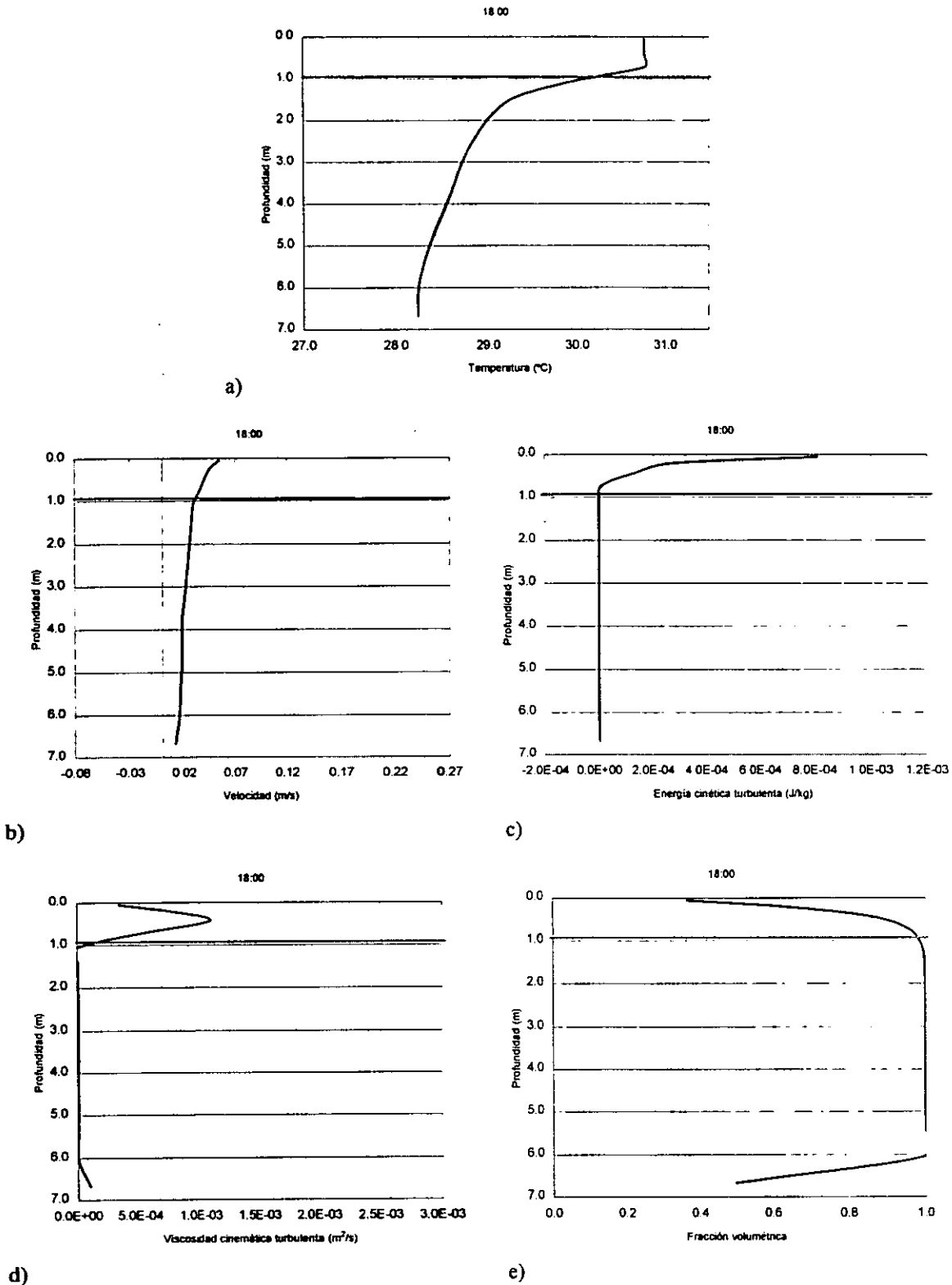
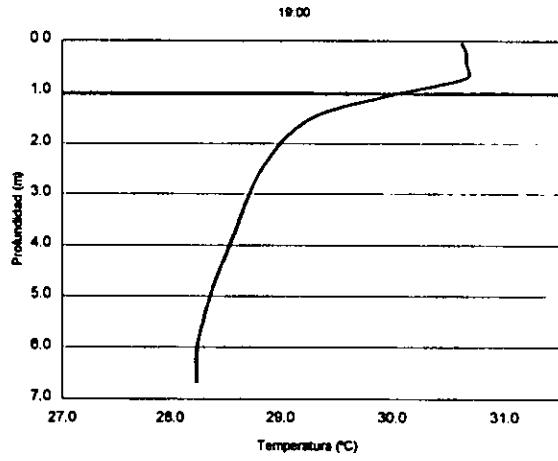
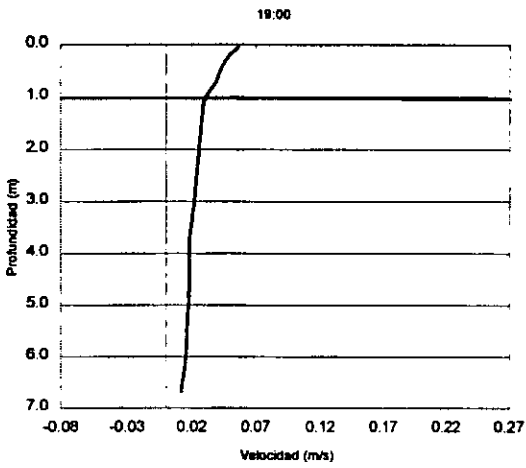


Figura 4.2 – 10 (18:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido I

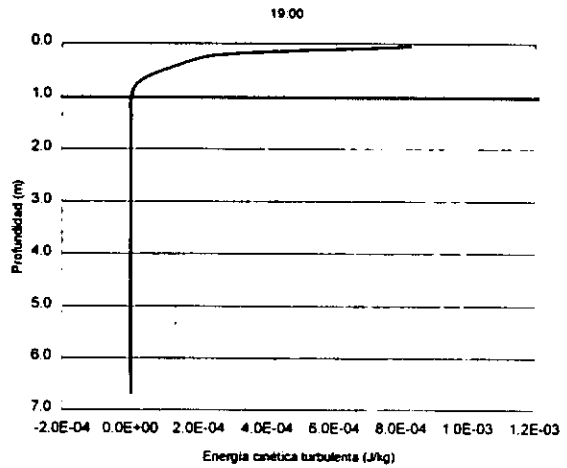
#### 4. Casos analizados.



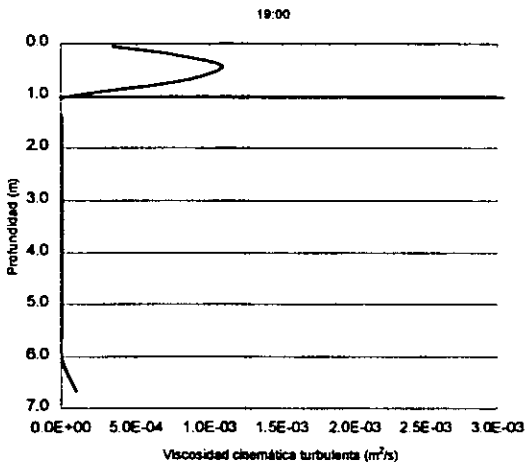
a)



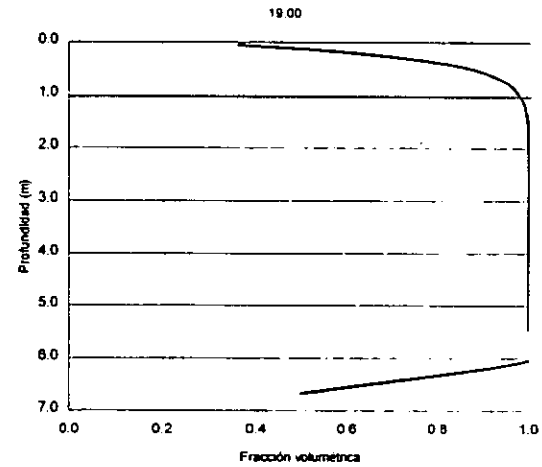
b)



c)



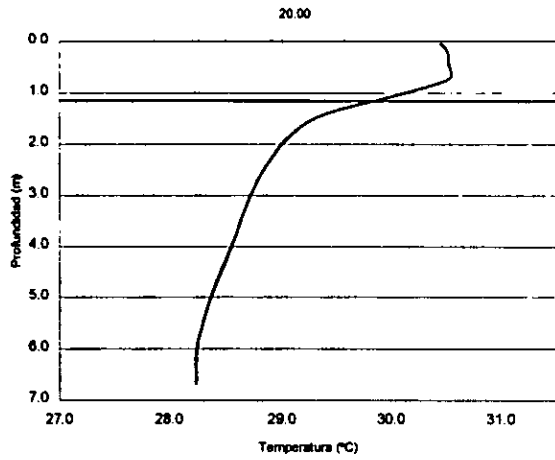
d)



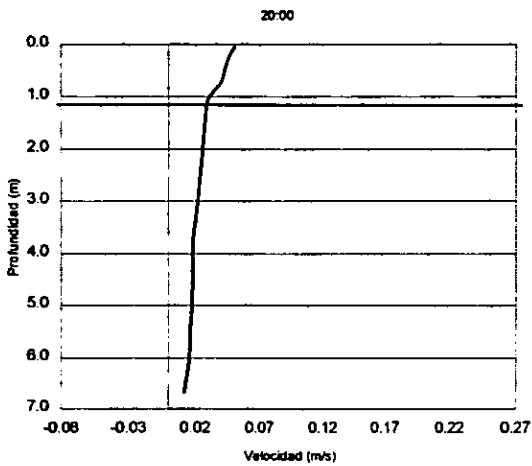
e)

Figura 4.2 – 10 (19:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido 1

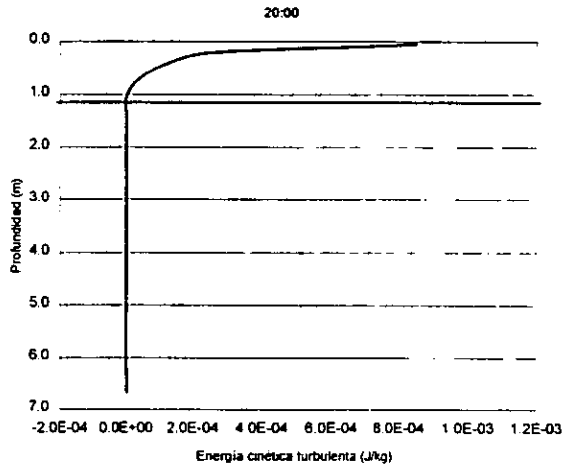
#### 4. Casos analizados.



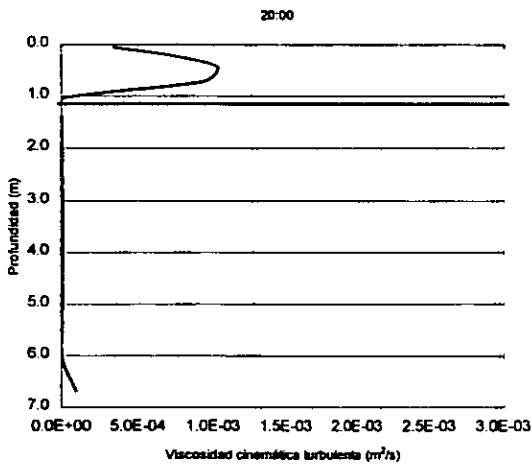
a)



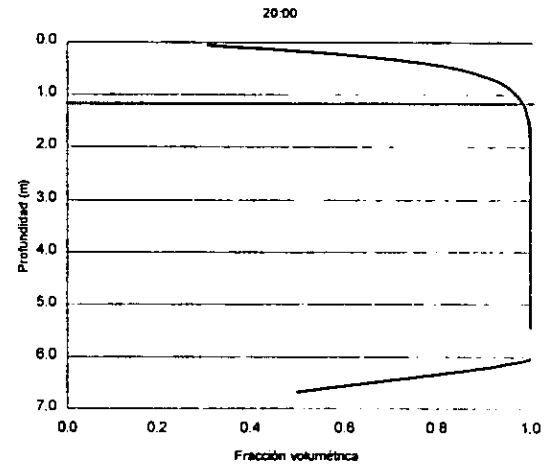
b)



c)



d)



e)

Figura 4.2 – 10 (20:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido 1



#### 4. Casos analizados.

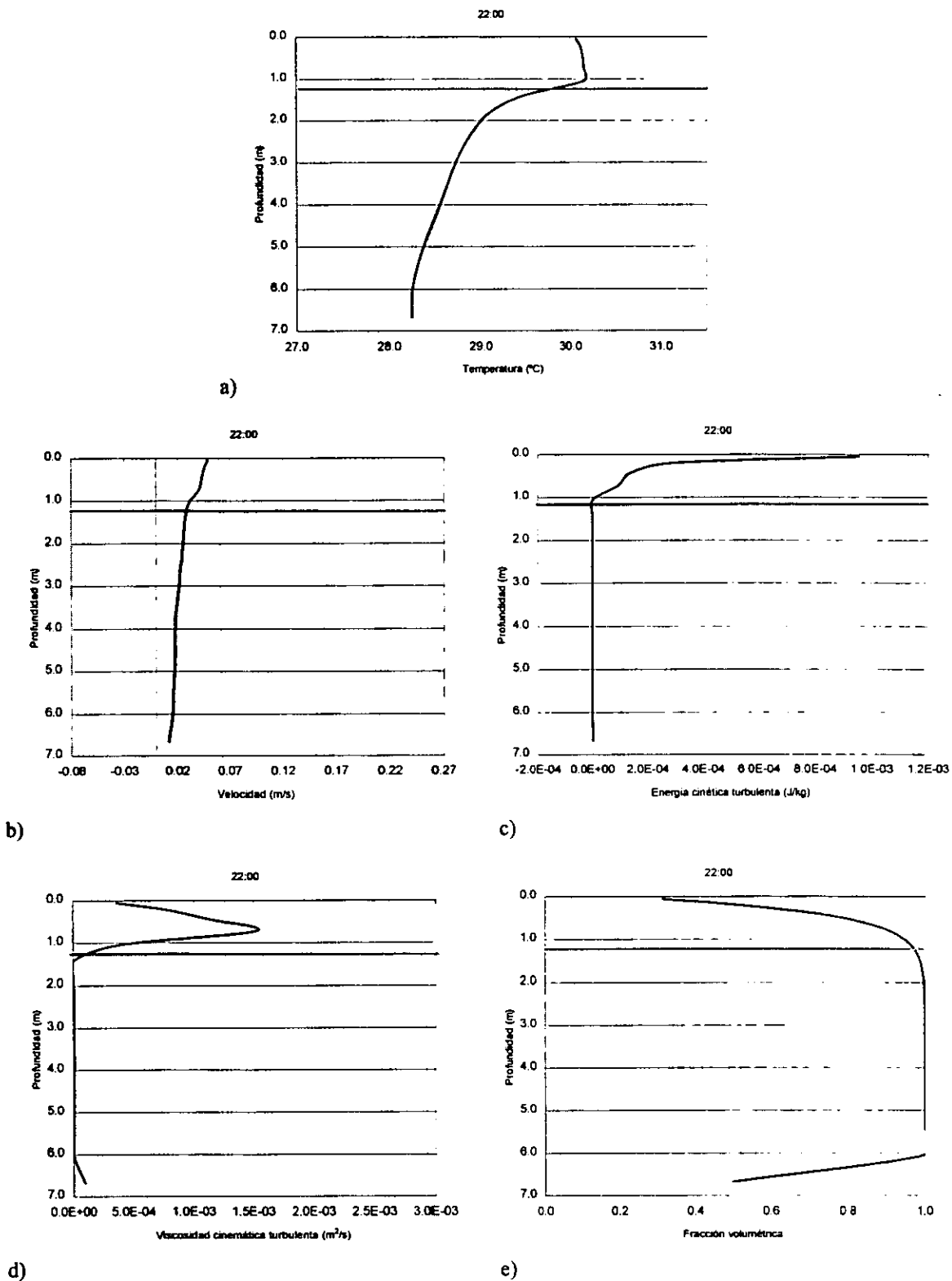
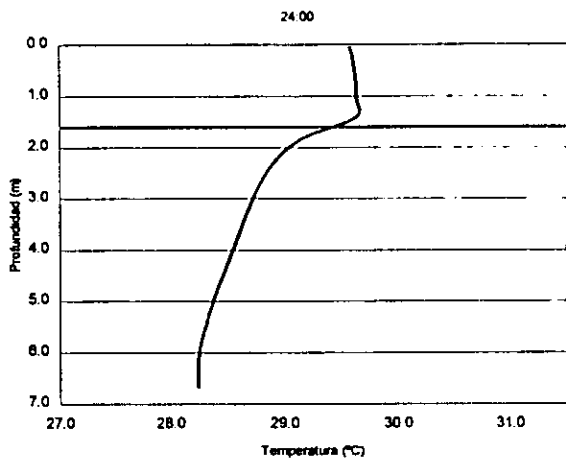
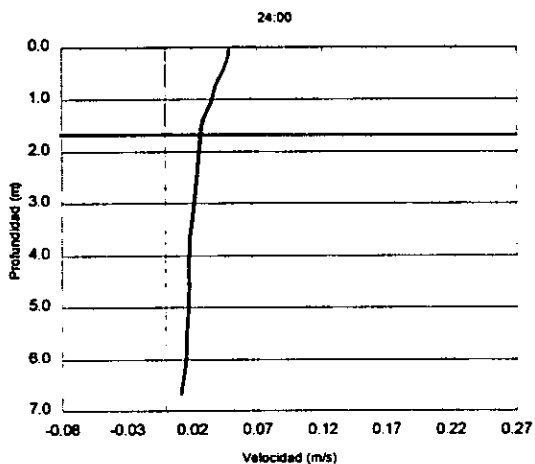


Figura 4.2 – 10 (22:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido I

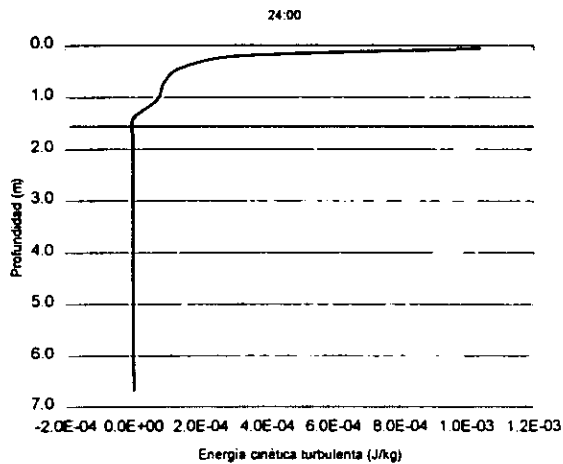
4. Casos analizados.



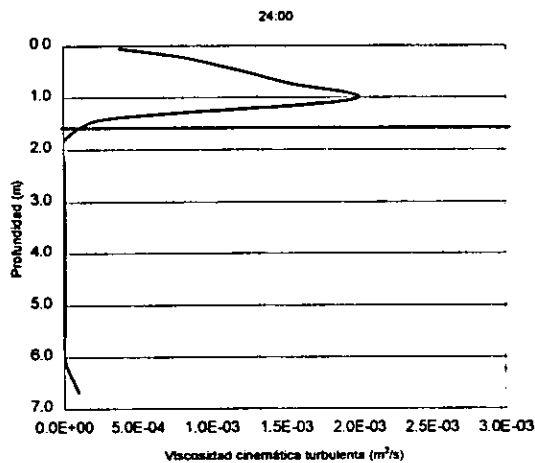
a)



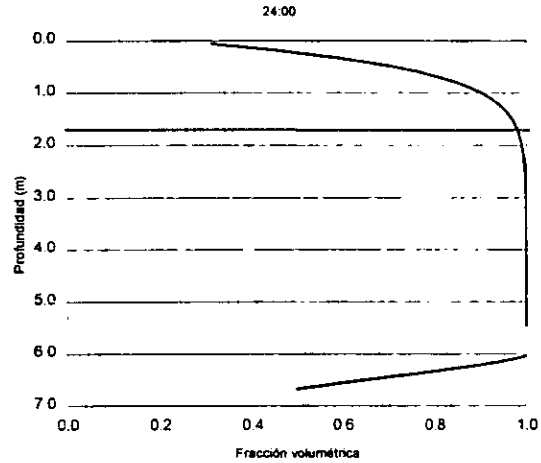
b)



c)



d)



e)

Figura 4.2 – 10 (24:00). Evolución de las diferentes propiedades del flujo a lo largo del séptimo día: a) temperatura; b) velocidad; c) energía cinética turbulenta; d) viscosidad cinemática turbulenta, y e) fracción volumétrica del fluido 1

## 5. Conclusiones y recomendaciones.

### 5.1. Conclusiones

El objetivo de la investigación, consistente en la validación del modelo de turbulencia de dos fluidos (MTDF), y el análisis de su aplicabilidad al caso de cuerpos de agua someros, fue llevado a buen término en este trabajo. Sin embargo, el estudio del MTDF y de los MTMF está lejos de ser un trabajo terminado. Aún falta comprender algunos aspectos relacionados con el comportamiento del modelo y el significado de sus resultados.

Existen tres formulaciones del MTDF. La primera de ellas, debida a Spalding (Spalding, 1987; Ilegbusi y Spalding, 1987a; Ilegbusi y Spalding, 1987b), es un modelo de dos fluidos puro que introduce la existencia de una fuente adicional de cantidad de movimiento, que representa la tendencia de la capa cortante a descomponerse en una serie de remolinos, y hace uso de una expresión adicional para calcular la longitud de mezclado; la segunda formulación, propuesta por Shen *et al.* (2000), es una combinación del MTDF y el MT  $k$ - $\epsilon$ , siendo empleado éste último para representar el mezclado en pequeña escala y para calcular algunas cantidades necesarias para el MTDF tales como la longitud de mezclado y la viscosidad turbulenta; la tercera formulación, propuesta en este trabajo, puede considerarse una forma híbrida del MTDF de Spalding y de Shen *et al.* adaptada a las características de PHOENICS. En este trabajo se hizo uso de la primera formulación, en la simulación del flujo de Couette y de la tercera formulación, en la simulación del lago simplificado. Ambas demostraron ser útiles, aunque la segunda resultó ser mejor en casos en los cuales se tienen efectos de flotación, pues estos efectos se toman en cuenta a través del término extra del MT  $k$ - $\epsilon$ , agregado expresamente con este propósito.

El análisis del flujo de Couette ha servido esencialmente para entender el estado actual del MTDF y para comprender la forma de trabajar con él. Aun cuando los resultados que con él se obtuvieron para este caso muestran una desviación importante con respecto a los datos experimentales y a los resultados del MT  $k$ - $\epsilon$ , éstos han sido una valiosa herramienta para establecer tanto las limitaciones como las posibilidades del modelo:

- La convergencia de una simulación a través del MTDF presenta alta dependencia de los parámetros de convergencia usados. Esto fue confirmado cuando se realizó la simulación de un lago, la cual era más compleja por el mayor número de variables que involucraba.
- Aunque el uso de las constantes empíricas del modelo con los valores recomendados por Ilegbusi y Spalding (1987a; 1987b) arrojan resultados satisfactorios en el caso del flujo de Couette desde el punto de vista cualitativo, se ha encontrado que los valores recomendados en la literatura aún son susceptibles de ser mejorados. La existencia del coeficiente de relación  $\alpha$ , el cual varió muy poco su valor dentro de un intervalo muy amplio del número de Reynolds ( $\alpha = 2.67$  para  $Re = 2900$ ;  $\alpha = 2.94$  para  $Re = 34000$ ), constituyó un resultado alentador en la búsqueda de un conjunto de valores universales (independientes del caso estudiado) para los parámetros del modelo. Sin embargo, esto quedó fuera de los objetivos del trabajo y no se continuó en esta dirección.

El caso del lago, aun cuando se trata de una idealización del problema real, pues considera un cuerpo de agua de dimensiones horizontales infinitas, es fuente de varias conclusiones importantes.

- Con este trabajo se ha logrado comprobar la ventaja del MTDf cuando trabaja en forma conjunta con el MT  $k-\varepsilon$  para simular los procesos que tienen lugar dentro de un cuerpo de agua somero.
- La forma de distinguir a los fluidos aún no puede considerarse perfectamente establecida. En esta tesis se diferenciaron los fluidos de dos formas distintas: por medio de la acción diferencial de las fuentes, o a través de la fracción volumétrica. La primera se aplicó a todas las condiciones de frontera en el caso del flujo de Couette, y únicamente a las condiciones concernientes a la cantidad de movimiento en el caso del lago. La segunda forma, propuesta en este trabajo, consistió en aprovechar la diferenciación intrínseca que se consigue a través de la fracción volumétrica que multiplica a todas las fuentes. Sin embargo, aún no se puede decir con certeza cuándo es conveniente aplicar una u otra forma de diferenciar a los fluidos, únicamente puede decirse que la técnica de distinguir a los fluidos a través de la aplicación diferencial de fuentes funciona bien si únicamente se tienen dos fuentes actuando sobre el sistema; sin embargo, cuando éste no es el caso, el problema se complica, pues es difícil decidir qué fuente debe actuar sobre qué fluido. En este caso, lo mejor es establecer la acción de las fuentes sobre ambos fluidos y permitir que la misma solución numérica establezca el grado de acción de cada fuente sobre cada fluido a través de la probabilidad de presencia de cada uno.
- En el caso del lago, no solo se buscó un coeficiente que ajustara los resultados a las observaciones de campo, como ocurrió en el flujo de Couette, sino que se modificaron los valores de las constantes para lograr una mejor aproximación. Esto constituye una de las principales aportaciones de esta investigación, pues arrojó un conjunto de valores para las constantes empíricas del MTDf que parecen funcionar de manera adecuada en el caso de un cuerpo de agua somero, sin embargo, es necesario refinar estos valores y estudiar los efectos que las constantes del MT  $k-\varepsilon$  tienen sobre los resultados, pues en este trabajo, las constantes del MT  $k-\varepsilon$  ( $C_1, C_2, C_3, C_\mu, C_D$ ; pág. 29) no se cambiaron en ningún momento. A continuación se muestran los valores originados y los hallados para las constantes del MTDf:

Valores originales:

$$c_f = 0.05; \quad c_v = 0.3; \quad c_m = 1.0; \quad \sigma_{rk} = 1.0$$

Valores propuestos:

$$c_f = 0.005; \quad c_v = 0.3; \quad c_m = 1.0; \quad \sigma_{rk} = 1.5$$

- Entre las desventajas del MTDf se encuentra el hecho de que el número de ecuaciones que deben resolverse es el doble del número de ecuaciones resueltas con los modelo de fluido único. Además la no linealidad y el acoplamiento que hay entre las ecuaciones es mayor debido a que no sólo existe interacción entre las propiedades del mismo fluido, sino entre las propiedades de un fluido y las del otro. Esto hace que la simulación numérica sea altamente dependiente de las condiciones iniciales, de la forma de definir

la malla y los pasos de tiempo, y de la relajación aplicada a cada variable. Es recomendable, por lo tanto, trabajar lo más sistemáticamente posible y hacer variaciones pequeñas a cada cantidad para evitar que la nueva solución se aleje tanto de la anterior que haga difícil el proceso de búsqueda de convergencia.

- El modelo de turbulencia de dos fluidos abre una puerta en el modelado de la turbulencia con fines de ingeniería, y rompe con antiguas limitaciones, trayendo consigo características prometedoras y suposiciones plausibles para el estudio de sistemas donde, como en los lagos, los efectos de flotación son importantes; sin embargo, el uso de únicamente dos fluidos lleva pronto a contradicciones y ambigüedades como las encontradas al momento de distinguir a cada fluido. Los modelos de turbulencia de múltiples fluidos, además de constituir una extensión lógica de los modelos de dos fluidos, pueden ser también la solución a este tipo de problemas, pues con ellos pueden definirse claramente las características que posee cada fluido, quedando supeditada su existencia a las condiciones del problema.

### 5.2. Recomendaciones

Con el objetivo de que los resultados de este trabajo den frutos y el modelo de turbulencia de dos fluidos pueda ser aplicado con la mayor facilidad posible a casos reales de interés práctico, como lo es el ya citado lago de Chapala, se hacen las siguientes recomendaciones:

- La formulación híbrida que se utilizó en esta investigación siguió la recomendación de PHOENICS (CHAM, 2001b) al asociar la turbulencia con el fluido que se espera sea el más turbulento. En este caso, se asoció con el fluido 1, pues éste se encontraba inicialmente en el epilimnión, que es la zona más turbulenta del lago. Sin embargo, al analizar los resultados finales se encontró que este fluido llenaba casi por completo el hipolimnión, mientras que el epilimnión se encontraba ocupado por partes aproximadamente iguales de fluido 1 y fluido 2. Se recomienda hacer un análisis de los efectos transitorios que tienen lugar al inicio de la simulación con el fin de encontrar la causa de este fenómeno.
- La validación de los resultados del modelo estarían mejor fundamentadas si se basaran en datos de laboratorio y no en observaciones de campo, pues teniendo condiciones controladas que pudieran ser reproducidas fácilmente, sería más sencillo calibrar los valores de las constantes.
- Las pruebas sobre las cuales se basa el contenido de este trabajo son casos unidimensionales (las variables sólo dependen de la coordenada vertical,  $y$ ). En el caso del flujo de Couette esta aproximación es suficiente; por el contrario, en el caso del lago, suponer que éste es de dimensiones horizontales infinitas constituye una simplificación exagerada del problema real, pues inhibe efectos tales como la recirculación, la cual es consecuencia de las dimensiones finitas del lago. Por esto, la tercera recomendación es que se extiendan los estudios realizados en una dimensión a casos bidimensionales y, posteriormente, a casos tridimensionales.

## 6. Referencias.

1. Adams, E.E., D.J. Cosler, K.R. Helfrich (1990) Evaporation from Heated Water Bodies: Predicting Combined Forced plus Free Convection, Water Resources Research, 26(3), pp. 425-435.
2. Berezowsky, M. (1994) Análisis de flujos turbulentos a superficie libre. Modelos de turbulencia. Series del Instituto de Ingeniería. No. 564. México.
3. Bowie, G.L., W.B. Mills, D.B. Porcella, C.L. Campbell, J.R. Pagenkopf, G.L. Rupp, K. M. Johnson, P. W. H. Chan, S. A. Gherini (1985) Rates, Constants and Kinetic Formulations in Surface Water Quality Modeling. 2<sup>nd</sup> Ed. Reporte Técnico EPA/600/3-85/040, Environmental Research Lab. Athens GA, USA.
4. Bradshaw, P. (1976) Turbulence. Springer-Verlag. Berlín.
5. CHAM (2001a) PHOENICS Encyclopaedia. Concentration, Heat and Momentum, [http://www.cham.co.uk/phoenics/d\\_polis/d\\_enc/encindex.htm](http://www.cham.co.uk/phoenics/d_polis/d_enc/encindex.htm)
6. CHAM (2001b) Turbulence Models in PHOENICS. Concentration, Heat and Momentum, [http://www.cham.co.uk/phoenics/d\\_polis/d\\_enc/turmod/enc\\_tu.htm#contents](http://www.cham.co.uk/phoenics/d_polis/d_enc/turmod/enc_tu.htm#contents)
7. CHAM (2001c) Multi-phase flow simulation in PHOENICS. Concentration, Heat and Momentum, [http://www.cham.co.uk/phoenics/d\\_polis/d\\_enc/multphfl.htm](http://www.cham.co.uk/phoenics/d_polis/d_enc/multphfl.htm)
8. Currie, I.G. (1993) Fundamental Mechanics of Fluids. 2<sup>nd</sup> ed. McGraw-Hill. E.E.U.U.
9. DPA-UE (2001) Theory of Turbulence. Department of Physics and Astronomy. University of Edinburgh, <http://www.ph.ed.ac.uk/fluids/turbulence/index.html>
10. Ford, D.E. y L.S. Johnson (1986) An Assessment of Reservoir Mixing Processes. Technical Report E-86-7, U.S. Army Engineers Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS.
11. Fueyo, N. (1996) Mecánica de Fluidos Computacional para Ingeniería. Universidad de Zaragoza.
12. Harleman, D.R.F. (1982) Hydrothermal Analysis of Lakes and Reservoirs. ASCE. Vol. 108. No. HY3.
13. Havens, K.E., T. Fukushima, P. Xie, T. Iwakuma, R.T. James, N. Takamura, T. Hanazato, T. Yamamoto (2001) Nutrient dynamics and the eutrophication of shallow lakes Kasumigaura (Japan), Donghu (PR China), and Okeechobee (USA). Environmental Pollution, 111, pp. 263-272.
14. Hinze, O. (1975) Turbulence. 2<sup>nd</sup> ed. McGraw-Hill. E.E.U.U.
15. Holman, J.P. (1986) Transferencia de Calor. 1<sup>a</sup> ed. CECSA. México.
16. Ilegbusi, J.O. y M.D. Mat (2000) A comparison of predictions and measurement of kinematic mixing of two fluids in a 2D enclosure. Applied Mathematical Modeling. No. 24. pp. 199-213.

## 6. Referencias.

17. Ilegbusi, J.O. y D.B. Spalding (1987a) *A two-fluid model of turbulence and its application to near-wall flows.* I. J. PhysicoChemical Hydrodynamics. vol. 9. pp 127-160.
18. Ilegbusi, J.O. y D.B. Spalding (1987b) *Application of a two-fluid model of turbulence to turbulent flows in conduits and shear layers.* I. J. PhysicoChemical Hydrodynamics. vol. 9. pp 161-181.
19. INEGI (2001) Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, <http://www.inegi.gob.mx>
20. Imberger, J. y P.F. Hamblin (1982) *Dynamics of lakes, reservoirs, and cooling ponds.* Annu. Rev. Of Fluid Mech., Vol. 14, pp. 153-187.
21. Ishii, M. (1975) *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow.* Eyrolles Book Publication. E. E. U. U.
22. Ishikawa, T. y M. Tanaka (1993) *Diurnal stratification and its effects on wind-induced currents and water qualities in Lake Kasumigaura, Japan.* Journal of Hydraulic Research. Vol. 31, No. 3, pp. 307-322.
23. Kim, J., P. Moin y R. Moser (1987) *Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number.* J. Fluid Mechanics, vol 177, pp. 133-166.
24. Levi, E. (1980) *Complementos de Mecánica de Fluidos.* Series del Instituto de Ingeniería, UNAM. México.
25. Martin, J.L. y S.C. McCutcheon. (1999) *Hydrodynamics and Transport for Water Quality Modeling.* Lewis Publishers. E.E. U.U. 1999.
26. Moin, P. y J. Kim (1997) *Tackling Turbulence with Supercomputers.* Scientific American.
27. Padilla, J. (1994) *Estudio del comportamiento hidrodinámico de embalses y su efecto en la calidad del agua.* Tesis de Licenciatura. UNAM. México.
28. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* Hemisphere. E.E.U.U.
29. Rodi, W. (1993) *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics. A state-of-the-art review.* 3ª edición. IAHR. Holanda.
30. Rodríguez, A., A. Palacio, L. Martínez, J. Padilla, M. Salinas (1994) *Estudio de la Hidrodinámica en Lagos y su Efecto sobre la Dispersión de Contaminantes.* Instituto de Ingeniería, UNAM. México.
31. Ryan, P.J., D.R.F. Harleman, K. D. Stolzenbach (1974) *Surface Heat Loss from Cooling Ponds.* Water Resources Research.
32. Schlichting, H. (1979) *Boundary-Layer Theory.* McGraw-Hill. E.E.U.U.
33. SEMARNAT (2001) Secretaría de medio ambiente y Recursos Naturales, 6 <http://www.semarnat.gob.mx/regiones/chapala/index.shtml>
34. Shen, Y., Y. Wang, C. Liang (2000) *Numerical simulation of stratified turbulent two-phase flow in aquatic environment.* J. of Environmental Sciences. V. 12. No. 2, pp. 149-153.

## 6. Referencias.

35. Spalding, D.B. (1987) *A turbulence model for buoyant and combusting flows*. Int. J. for Num. Methods in Eng. v 24, pl.
36. Spalding, D.B. (1989) *The PHOENICS Beginner's Guide*. TR/100. CHAM
37. Spalding, D.B. (1995) *Multi-fluid Models of Turbulence*. European PHOENICS User Conference. Italia.
38. Spalding, D.B. (1996) *The Multi-fluid Model of Turbulent Flow, Mixing and Combustion*. CHAM.
39. Spalding, D.B. (1998) *Turbulent Mixing and Chemical Reaction; the Multi-fluid Approach*. Conferencia. CHAM, Londres, Inglaterra.
40. Spalding, D.B. (1999) *MFM: the economical route to PDFs*. Conferencia. The Isaac Newton Institute. Cambridge, Inglaterra.
41. Squires, K.D. (1995) *Work in Progress: Large Eddy Simulation of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers*. Cornell University, <http://www.sp.dk/~jcrb/les.html>
42. Sundaram, T.R. (1973) *A theoretical model for seasonal thermocline cycle of deep temperature lakes*. Proc. 16<sup>th</sup> Conf. On Great lakes Res. pp. 1009-1025.
43. Versteeg, H.K. y W. Malalasekera (1995) *An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*. Longman S&T. Gran Bretaña.
44. Webber, N.B. (1969) *Mecánica de Fluidos para Ingenieros*. URMO. España.
45. White, Frank M. (1988) *Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill. México.
46. White, Frank M. (1991) *Viscous Fluid Flow*. 2<sup>a</sup> edición. McGraw-Hill. Singapur.



## Apéndice A. El algoritmo de deslizamiento entre fases para resolver flujos bifásicos (Inter-phase Slip Algorithm o IPSA).

Estrictamente, un flujo es multifásico cuando en él coexisten varios estados de la materia (sólido-líquido, líquido-gas o sólido-gas). Sin embargo, desde el punto de vista computacional, un flujo multifásico es aquél en el cual existe cierta probabilidad de la presencia de fluidos (o un fluido y partículas) que se mueven con velocidad distinta.

Existen fundamentalmente dos tipos de modelos de flujo multifásico. Los modelos llamados eulerianos-eulerianos utilizan ecuaciones de conservación eulerianas para todas las fases. Por otra parte, los modelos eulerianos-lagrangianos utilizan ecuaciones eulerianas para una de las fases que se designa con el nombre de fase continua, y ecuaciones lagrangianas para describir el movimiento de la otra fase la cual debe adoptar una forma discreta (gotas, burbujas o partículas). A esta fase discreta se le denomina fase dispersa.

Los modelos eulerianos-eulerianos consideran que todas las fases son medios continuos entremezclados que comparten espacio. Como corresponde a un modelo multifásico, las propiedades de cada una de las fases diferirán en general en cada punto; se considera, sin embargo, que ambas fases comparten la misma presión. Al coexistir en un mismo espacio, las fases pueden intercambiar masa, energía y cantidad de movimiento. La variable que mide la cantidad total de cada fase es la fracción volumétrica  $r_k$ . Ésta es una variable que depende del espacio y del tiempo, y es el volumen que ocupa la fase  $k$  por unidad de volumen local. Cuando el término local indica un volumen finito tiene sentido interpretar la fracción volumétrica de esta manera. Por otro lado, si la definición se aplica a un punto geométrico en donde sólo puede existir una fase u otra, la fracción volumétrica puede interpretarse como la probabilidad de presencia de fase; este es el caso del MTDf. En cualquier caso, se cumple que la suma de todas las fracciones volumétricas en cada punto es la unidad.

Al generalizar las ENS para tomar en cuenta que cada fase ocupa sólo una fracción del volumen y que las fases intercambian masa, energía y cantidad de movimiento aparecen nuevos términos en las ecuaciones.

En particular, la ecuación de continuidad adquiere la forma:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k r_k)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_k r_k u_{kj})}_{\text{Convección}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{rk} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \right)}_{\text{Difusión de Fase}} = \underbrace{\dot{m}_{kl}}_{\text{Fuente}} \quad \dots \text{ (A.1)}$$

donde,  $\rho_k$  es la densidad de la fase  $k$ ;  $u_{kj}$ , su velocidad, y  $\Gamma_{rk}$ , su coeficiente de difusividad.

La aparición de un término difusivo para  $r_k$  sirve para representar la correlación entre la fluctuación de la velocidad y la fluctuación de la fracción másica, la cual aparece al promediar temporalmente el término convectivo. El término de intercambio de masa, que representa la masa que llega a la fase  $k$  desde la fase  $l$  por unidad de volumen y unidad de tiempo. Si hubiera más fases que la  $l$ , aparecerían términos semejantes para estas fases, cumpliéndose siempre que la suma de todas las  $\dot{m}_{kl}$  para todas las fases es cero, pues la masa que sale de una fase siempre es recibida por otra.

La ecuación para cualquier otra cantidad conservada de la fase  $k$ ,  $\phi_k$ , toma la siguiente forma:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k r_k \phi_k)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_k r_k u_{kj} \phi_k)}_{\text{Convección}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{\phi k} r_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \right)}_{\text{Difusión de } \phi} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{r k} \phi_k \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \right)}_{\text{Difusión de Fase}} = \underbrace{S_{i/\phi}}_{\text{Transporte entre fases}} + \underbrace{r_k S_{\phi}}_{\text{Fuente}} \quad \dots \text{ (A.2)}$$

donde

$$\Gamma_{\phi k} \equiv \rho_k \left( \frac{\nu}{\sigma_{\phi k}} + \frac{\nu_l}{\sigma_{i\phi k}} \right) \text{ es el coeficiente de difusividad de } \phi, \text{ y}$$

$$S_{i/\phi} \equiv (f_{\phi k} + m_{kl})(\phi_l - \phi_k).$$

El término de difusión de fase representa la difusión de  $\phi_k$  causada por la difusión volumétrica introducida en la ecuación anterior. El transporte entre fases se debe a dos mecanismos: uno difusivo y otro convectivo. Éste último toma en cuenta la propiedad que se incorpora a la fase con la masa que es transferida desde la otra fase. De aquí su definición.

Estas ecuaciones puede resolverse con los mismos métodos de volumen finito usados para resolver las ecuaciones de flujo monofásico. Para una explicación detallada de estos métodos consultar a Fueyo (1996), Versteeg y Malalasekera (1995) y Patankar (1980). Como en el caso monofásico aparece una variable dependiente sin ecuación y de una ecuación sin variable. La solución es, como en el caso monofásico, transformar la ecuación sin variable en una ecuación para la variable sin ecuación. A continuación se muestra el ciclo de solución para dos fases, análogo a los métodos de la familia SIMPLE, que recibe el nombre de IPSA (Inter-phase Slip Algorithm) (Fueyo, 1996).

1.	Resolver las ecuaciones para $r_k$ (inicialmente con velocidades supuestas).
2.	Resolver las variables escalares $\phi_k$ .
3.	Resolver las velocidades de ecuaciones de cantidad de movimiento (inicialmente con presiones supuestas).
4.	Sumar las ecuaciones de $r_k$ para formar una ecuación de continuidad global calculando, por ejemplo, los errores de continuidad que producen los campos de $r_k$ y $u_{kj}$ actuales.
5.	Transformar la ecuación de continuidad global en una ecuación de corrección para la presión derivando con respecto a la presión.
6.	Resolver la ecuación anterior, y corregir la presión y la velocidad.
7.	Repetir desde (1) hasta convergencia.

Un aspecto de la solución que requiere atención detallada es el efecto de un coeficiente de transporte difusivo entre fases dominante. Cuando este es el caso, el término de transporte difusivo es dominante en la ecuación y las variables  $\phi_k$  y  $\phi_l$  quedan acopladas a un mismo

valor, evitando la convergencia hacia una solución real. Una forma de evitar este problema es mediante el uso del algoritmo de eliminación parcial (PEA, Partial Elimination Algorithm). Este algoritmo consiste en eliminar parcialmente la variable  $\phi_l$  de la ecuación para la variable  $\phi_k$  de la siguiente forma:

a) Se escriben las ecuaciones para  $\phi_k$  y  $\phi_l$  en cada celda como

$$P_k \phi_k = q(\phi_l - \phi_k) + t_k \quad \dots \text{(A.3a)}$$

$$P_l \phi_l = q(\phi_k - \phi_l) + t_l \quad \dots \text{(A.3b)}$$

b) Se despejan  $\phi_k$  y  $\phi_l$  de las anteriores

$$\phi_k = \frac{q\phi_l + t_k}{P_k + q} \quad \dots \text{(A.4a)}$$

$$\phi_l = \frac{q\phi_k + t_l}{P_l + q} \quad \dots \text{(A.4b)}$$

c) Se substituyen estos valores en las ecuaciones A.3 con lo que queda finalmente

$$\phi_k = \frac{P_l t_k + (t_k - t_l)q}{P_k P_l + (P_k + P_l)q} \quad \dots \text{(A.5a)}$$

$$\phi_l = \frac{P_k t_l + (t_l - t_k)q}{P_l P_k + (P_l + P_k)q} \quad \dots \text{(A.6b)}$$

De esta manera, el proceso iterativo de solución queda libre de la atadura que liga los valores de ambas variables a través del término de intercambio entre fases.

## Apéndice B. Los códigos de Q1 y GROUND.

A continuación se lista el código del programa en PIL usado para llevar a cabo las simulaciones descritas en este trabajo.

```
TALK = T; RUN( 1, 1)
```

```
=====
AUTOR: Oscar Martínez Alvarado
FECHA: 10 de agosto de 2001
=====
```

```
* Control del programa
```

```
=====
* Variable resueltas
=====
```

```
BOOLEAN(TEMPER, TRANS)
```

```
* TEMPER Temperatura como variable resuelta
* TRANS Activación de las funciones dependientes del tiempo
```

```
TEMPER = T
TRANS = T
```

```
=====
* Geometría del dominio
=====
```

```
REAL(CHARL, XVSY, ZVSY)
```

```
* CHARL Longitud característica, en m
      Flujo de Couette: distancia entre placas
      Lago: Profundidad media
```

```
* XVSY = XULAST / CHARL
* ZVSY = ZWLAST / CHARL
```

```
CHARL = 7.0
XVSY = 1.0
ZVSY = 1.0/CHARL
NX = 1
NY = 16
NZ = 1
```

```
=====
* Modelo de turbulencia de dos fluidos
=====
```

```
REAL(CT, CF, CV, CM)
```

```
BOOLEAN(CORTA)
```

```
* CT Constante de la viscosidad cinemática turbulenta
      Cuando se usa el modelo de turbulencia de k-epsilon
      la viscosidad turbulenta se calcula en función de la
      energía cinética turbulenta y de su tasa de disipación.
      CT, entonces, pierde influencia sobre el modelo.
* CF Constante del intercambio de cantidad de movimiento y
      energía entre los fluidos
* CV Constante de la fuente de cantidad de movimiento de V
      debida al gradiente de W
* CM Constante del intercambio de masa entre los fluidos
* CORTA Fuente de cantidad de movimiento de V debida al gradiente
      de U
```

```
CT = 10.0
CF = 5.0E-3
CV = 3.0E-1
CM = 1.0E+1
SHSOA = CV
```

Apéndice B

CORTA = T

```
=====
* Modelo QUÍNTICO de la densidad del agua en función de
  la temperatura según Standard Methods (1992) y Gill (1982)
```

$$\text{den} = \text{AA} + \text{BB} \cdot \text{T} + \text{CC} \cdot \text{T}^2 + \text{DD} \cdot \text{T}^3 + \text{EE} \cdot \text{T}^4 + \text{FF} \cdot \text{T}^5$$

```
=====
REAL(AA, BB, CC, DD, EE, FF)
```

```
AA = 999.842594
BB = 6.793952E-2
CC = -9.095290E-3
DD = 1.001685E-4
EE = -1.120083E-6
FF = 6.536332E-9
```

```
-----
BOOLEAN(DQUIN)
```

```
* DQUIN Modelo quintico para la densidad del agua
```

```
DQUIN = F
```

```
=====
* Modelo LINEAL de la densidad del agua en función de la
  temperatura según Padilla (1994)
```

$$\text{den} = \text{RHO1A} + \text{RHO1B} \cdot \text{T}$$

```
=====
RHO1A = 1001.3
RHO1B = -0.17428
RHO2A = 1001.3
RHO2B = -0.17428
```

```
-----
* Condiciones de frontera
```

```
=====
BOOLEAN(ISOTER, WIND, PRHIST)
```

```
* ISOTER Condiciones de frontera isotérmicas
```

```
* WIND Viento en le superficie libre
```

```
ISOTER = F
```

```
WIND = T
```

```
=====
* Condiciones del flujo de entrada
```

```
=====
REAL(UIN1, UIN2, WIN1, WIN2, TIN1, TIN2, RHOIN1, RHOIN2)
```

```
UIN1 = 0.25
```

```
UIN2 = 0.25
```

```
IF (DQUIN) THEN
```

```
  TIN1 = 28.5
```

```
  TIN2 = TIN1-1.0
```

```
  * Densidad de entrada según Gill (1982)
```

```
  RHOIN1 = AA+BB*TIN1+CC*TIN1**2+DD*TIN1**3+EE*TIN1**4+FF*TIN1**5
```

```
  RHOIN2 = AA+BB*TIN2+CC*TIN2**2+DD*TIN2**3+EE*TIN2**4+FF*TIN2**5
```

```
ELSE
```

```
  TIN1 = 28.5
```

```
  TIN2 = TIN1-1.0
```

```
  * Densidad de entrada según el modelo lineal
```

```
  RHOIN1 = RHO1A + RHO1B*TIN1
```

```
  RHOIN2 = RHO2A + RHO2B*TIN2
```

```
ENDIF
```

```
=====
* Condiciones del flujo en la superficie libre y en el fondo
```

## Apéndice B

```

=====
REAL(CD, RHOV, US, UF, WS, WF, TS, TF, DIFT)
  * CD Coeficiente de arrastre (adimensional)
  * RHOV Densidad del aire, en kg/m^3
  * US Velocidad de la superficie, en m/s - si WIND = F ó
    Velocidad del viento, en m/s - si WIND = T
    Esta cantidad es dependiente del tiempo si TRANS = T
    Por lo tanto, se calcula en GROUND
  * UF Velocidad del fondo, en m/s
  * TS Temperatura en la superficie, en °C
  * TF Temperatura en el fondo, en °C
  * DIFT = TS - TF
CD = 0.9E-3
RHOV = 1.2
US = 2.0
UF = 0.0
WS = 0.0
WF = 0.0
DIFT = 5.0
TS = TIN1+DIFT/2.0
IF(TRANS)THEN
  TF = TIN1-DIFT/2.0
ELSE
  TS = TIN1
  TF = TIN2
ENDIF
=====
  * Características del flujo
=====
REAL(UCAR)
IF(WS.GT.0) THEN
  UCAR = US/2.0
ELSE
  UCAR = 2.0
ENDIF
=====
  * Modelo de Temperatura Global
=====
  * Radiación solar de onda corta
=====
REAL(ETHA, BETHA, GPHI)
ETHA = 2.0
BETHA = 0.5
GPHI = 300.0
=====
  * Radiación atmosférica total

  Qatm = (CNET1 + CNET2*TAIRE)*(1 + 0.17*CLD**2)

  La temperatura del aire puede variar, por lo cual esta
  fuente se codifica en GROUND
=====
REAL(GCNET1, GCNET2, GCLD, TAIRE)
GCNET1 = 208.733
GCNET2 = 6.2363
GCLD = 0.05
TAIRE = 24.6

```

## Apéndice B

```

=====
* Radiación reflejada de onda corta

Qbr = CA + CB*Tsup

Tsup: Temperatura superficial del agua
=====
REAL(CA, CB)
CA = 308.2
CB = 4.9
=====
* Pérdidas por evaporación

PHI2M, W2M y la temperatura del aire pueden variar, por lo
cual esta fuente se calcula en GROUND
=====
REAL(PHISUP, PHI2M, PATM, CC1, CC2, CC3, ALPHA)
* PATM Presión atmosférica, en mbar
PHISUP = 1.0
PHI2M = 0.9713237
PATM = 1013.25
CC1 = 48.931
CC2 = -6833.96
CC3 = -5.169
ALPHA = 1.0E+3
=====
* Variables para la simulación transitoria
=====
REAL(GPHIM, ND, TMAX, TMIN, UVMAX, UVMIN)
* GPHIM Radiación máxima promedio mensual
* N Periodo de insolación
* TMAX Temperatura máxima diaria
* TMIN Temperatura mínima diaria
* UVMAX Velocidad máxima diaria
* UVMIN Velocidad mínima diaria
GPHIM = 640.0
ND = 13.3
TMAX = 30.0
TMIN = 21.0
UVMAX = 7.83
UVMIN = 0.1
=====
*****
GROUP 1. Run identifiers and other preliminaries.
IF(DQUIN) THEN
TEXT(LAGO; D. QUÍNTICA; MTFD Y K-E)
ELSE
TEXT(LAGO; D. LINEAL; MTFD Y K-E)
ENDIF
*****
GROUP 2. Transience; time-step specification
REAL(MIN, MHORA, HORA, DIA)
MIN = 60
MHORA = 30*MIN
HORA = 2*MHORA
DIA = 24*HORA
STEADY = F

```

Apéndice B

```

GRDPWR(T, 24, 24*HORA, 1.0)
IDISPA = 1
CSG1 = T
*****
GROUP 3. x-direction grid specification.
GRDPWR(X, NX, XVSY*CHARL, 1.0)
XCYCLE = T
*****
GROUP 4. y-direction grid specification.
GRDPWR(Y, NY, CHARL, -1.5)
*****
GROUP 5. z-direction grid specification.
GRDPWR(Z, NZ, ZVSY*CHARL, 1.0)
*****
GROUP 7. Variables (including porosities) named, stored & solved
ONEPHS = F
SOLVE(P1, U1, U2, V1, V2, R2)
SOLVE(KE, EP)
STORE(R1)
IF (TEMPER) THEN
  SOLVE(H1, H2)
ELSE
  STORE(H1, H2)
ENDIF
SOLUTN(P1, Y, Y, Y, N, N, N)
STORE(CFIP, EL1, DEN1, DEN2, MDOT, VIST, VPOR)

* Almacenamiento de las propiedades principales del flujo
STORE(C10, C11, C12, C13, C14, C15)
  W   V   T   U   D

STORE(C21, C22, C23, C24, C25)
SOLUTN(MDOT, Y, N, N, N, N, N)
SOLUTN(VIST, Y, N, N, N, N, N)
*****
Group 8. Terms & Devices
* Y in TERMS argument list denotes:
* 1-built-in source 2-convection 3-diffusion 4-transient
* 5-first phase variable 6-interphase transport
TERMS(U1, Y, Y, Y, Y, Y, Y)
TERMS(U2, Y, Y, Y, Y, N, Y)
TERMS(V1, Y, Y, Y, Y, Y, Y)
TERMS(V2, Y, Y, Y, Y, N, Y)
TERMS(KE, N, Y, Y, Y, Y, N)
TERMS(EP, N, Y, Y, Y, Y, N)
IF (TEMPER) THEN
  TERMS(H1, Y, Y, Y, Y, Y, Y)
  TERMS(H2, Y, Y, Y, Y, N, Y)
ENDIF
*****
GROUP 9. Properties of the medium (or media).
ENUL = 1.0E-6
CP1 = 4186.0
HUNIT = 1.0/CP1

* Densidades
IF(DQUIN) THEN

```



Apéndice B

```

      * Modelo quintico para la fase 1
RHO1 = GRND
      * Modelo quintico para la fase 2
RHO2 = GRND
ELSE
      * Modelo lineal para la fase 1
RHO1 = GRND1
      * Modelo lineal para la fase 2
RHO2 = GRND1
ENDIF

      * Coeficientes de difusividad
PRNDTL(U1) = 1.0; PRNDTL(V1) = 1.0
PRNDTL(U2) = 1.0; PRNDTL(V2) = 1.0
IF (TEMPER) THEN
  PRNDTL(H1) = 8.0; PRNDTL(H2) = 8.0
ENDIF

      * Coeficientes para la difusión de fase
PRT(R1) = 1.5; PRT(R2) = 1.5

      * Viscosidad cinemática turbulenta calculada con la
      fórmula de Prandtl-Kolmogorov
nut = CMU * len1 * KE ** 0.5
ENUT = GRND3

      * Longitud de mezclado derivada de la energía cinética
      turbulenta y su tasa de disipación
len1 = CD*KE**1.5/EP
EL1 = GRND4
*****
GROUP 10. Interphase-transfer processes and properties.
      * Modelo de turbulencia de dos fluidos
CFIPS = GRND4; CFIPA = 0.0; CFIPB = 1.0; CFIPC = CF; CFIPD = -1.0
CMDOT = GRND1; CMDTA = CM; CMDTB = 0.5; CMDTC = 0.0
*****
GROUP 11. Initial fields of variables, porosities, etc
      * El fluido 2 corresponde al hipolimnión
      * El fluido 1 corresponde al epilimnión
FIINIT(VPOR) = 1.0
FIINIT(P1) = 0.0
FIINIT(U1) = 2.0E-2
FIINIT(V1) = 0.0
FIINIT(U2) = -3.0E-2
FIINIT(V2) = 0.0
FIINIT(H1) = TIN1
FIINIT(H2) = TIN2
      * Hipolimnión
PATCH( LAY1, INIVAL, 1, NX, 1, 6, 1, NZ, 1, LSTEP)
INIT( LAY1, R1, ZERO, 0.00)
INIT( LAY1, R2, ZERO, 1.00)
      * Epilimnión
PATCH( LAY2, INIVAL, 1, NX, 7, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
INIT( LAY2, R1, ZERO, 1.00)
INIT( LAY2, R2, ZERO, 0.00)
INIADD = F
  RESTRT(ALL)

```

## Apéndice B

```

*****
GROUP 13. Boundary conditions, and special sources.
* Referencia de presión
PATCH( REFPRES, CELL, 1, NX, NY, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
COVAL( REFPRES, P1, FIXP, 0.0)
COVAL( REFPRES, H1, ONLYMS, SAME)
COVAL( REFPRES, H2, ONLYMS, SAME)

* Fondo
PATCH( FONDO, SWALL, 1, NX, 1, 1, 1, NZ, 1, LSTEP)
COVAL( FONDO, U2, GRND2, UF)
COVAL( FONDO, KE, GRND2, GRND2)
COVAL( FONDO, EP, GRND2, GRND2)

* Superficie
PATCH( SUPER, NORTH, 1, NX, NY, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
IF (WIND) THEN
  COVAL( SUPER, U1, FIXFLU, GRND)
ELSE
  COVAL( SUPER, U1, GRND, US)
ENDIF
COVAL( SUPER, V1, FIXVAL, 0.0)
COVAL( SUPER, KE, FIXFLU, 0.011)
COVAL( SUPER, EP, FIXFLU, 0.001)
IF (ISOTER) THEN
  COVAL( SUPER, H1, FIXVAL, TS)
  COVAL( SUPER, H2, FIXVAL, TS)
ENDIF

* Fuente de cantidad de movimiento para V debida a grad(W)
IF (CORTA) THEN
  * Calculada con  $U = r1*U1 + r2*U2$ 
  PATCH( CORTANTE, CELL, 1, NX, 1, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
  COVAL( CORTANTE, V1, FIXFLU, GRND1)
  COVAL( CORTANTE, V2, FIXFLU, GRND1)
ELSE
  * Calculada con  $U = (U1 + U2)/2$ 
  PATCH( SHSOURCE, CELL, 1, NX, 1, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
  COVAL( SHSOURCE, V1, FIXFLU, GRND5)
  COVAL( SHSOURCE, V2, FIXFLU, GRND5)
ENDIF

* Fuentes de energía cinética turbulenta y de su disipación
PATCH( KESOURCE, PHASEM, 1, NX, 1, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
COVAL( KESOURCE, KE, GRND4, GRND4)
COVAL( KESOURCE, EP, GRND4, GRND4)
GENK=T

* Fuente de cantidad de movimiento debida a la flotación
PATCH( BUOY, PHASEM, 1, NX, 1, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
COVAL( BUOY, V1, FIXFLU, GRND2)
COVAL( BUOY, V2, FIXFLU, GRND2)
BUOYB=-9.81
REAL(TPROM)

* Densidad de entrada
TPROM=(TIN1+TIN2)/2.0

```

Apéndice B

```

IF (DQUIN) THEN
  * Según Gill (1982)
  BUOYD=AA+BB*TPROM+CC*TPROM**2+DD*TPROM**3+EE*TPROM**4+FF*TPROM**5
ELSE
  * Según el modelo lineal
  BUOYD=RHO1A+RHO1B*TPROM
ENDIF

  * Fuente de flotación para el modelo k-épsilon
PATCH( KEBUOY, PHASEM, 1, NX, 1, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
COVAL( KEBUOY, KE, GRND4, GRND4)
COVAL( KEBUOY, EP, GRND4, GRND4)
  KEBUOY=SKIP

  * Modelo de temperatura global
IF(TEMPER.AND(.NOT.ISOTER))THEN
  * Radiación solar de onda corta
  SOLRAD FUNCIONÓ
PATCH( SOLRAD, CELL, 1, NX, 1, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
COVAL( SOLRAD, H1, FIXFLU, GRND2)
COVAL( SOLRAD, H2, FIXFLU, GRND2)
  SOLRAD=SKIP

  * Radiación solar superficial
  SUPRAD FUNCIONÓ
PATCH( SUPRAD, NORTH, 1, NX, NY, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
COVAL( SUPRAD, H1, FIXFLU, GRND3)
COVAL( SUPRAD, H2, FIXFLU, GRND3)
  SUPRAD=SKIP

  * Radiación atmosférica total
  RADATM FUNCIONÓ
PATCH( RADATM, NORTH, 1, NX, NY, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
COVAL( RADATM, H1, FIXFLU, GRND4)
COVAL( RADATM, H2, FIXFLU, GRND4)
  RADATM=SKIP

  * Radiación reflejada de onda larga
  BACRAD FUNCIONÓ
PATCH( BACRAD, NORTH, 1, NX, NY, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
COVAL( BACRAD, H1, CB/CP1, -CA/CB)
COVAL( BACRAD, H2, CB/CP1, -CA/CB)
  BACRAD=SKIP

  * Pérdidas por evaporación
  EVAPORA FUNCIONÓ
PATCH( EVAPORA, NORTH, 1, NX, NY, NY, 1, NZ, 1, LSTEP)
COVAL( EVAPORA, H1, FIXFLU, GRND6)
COVAL( EVAPORA, H2, FIXFLU, GRND6)
  EVAPORA=SKIP
ENDIF

*****
GROUP 15. Termination criteria for sweeps and outer iterations.
LSWEEP = 6000
ISWC1 = 1
ISWR1 = 1
RESREF(U1) = 1.0E-2

```

## Apéndice B

```

RESREF(U2) = 1.0E-2
RESREF(V1) = 1.0E-2
RESREF(V2) = 1.0E-2
RESREF(EP) = 1.0E-2
RESREF(KE) = 1.0E-2
IF (TEMPER) THEN
RESREF(H1) = 1.0E-5
RESREF(H2) = 1.0E-5
ENDIF

```

\*\*\*\*\*

### GROUP 16. TERMINATION CRITERIA FOR INNER ITERATIONS.

```

LITER(U1) = 40
LITER(U2) = 40
LITER(V1) = 40
LITER(V2) = 40
LITER(R1) = 40
LITER(R2) = 40
ENDIT(U1) = 1.0E-6
ENDIT(U2) = 1.0E-6
ENDIT(V1) = 1.0E-7
ENDIT(V2) = 1.0E-7
IF (TEMPER) THEN
ENDIT(H1) = 5.0E-2
ENDIT(H2) = 5.0E-2
ENDIF

```

\*\*\*\*\*

### GROUP 17. Under-relaxation and related devices.

\* KELIN parámetro que determina la forma de linearizar los términos fuente de KE y EP.

```

KELIN = 1
RELAX( P1, LINRLX, 9.0E-1)
RELAX( U1, FALSDT, 5.0E-2); RELAX( V1, FALSDT, 5.0E-2)
RELAX( U2, FALSDT, 5.0E-2); RELAX( V2, FALSDT, 5.0E-2)
RELAX( KE, FALSDT, 3.0E+1); RELAX( EP, FALSDT, 3.0E+1)
IF (TEMPER) THEN
RELAX( H1, LINRLX, 4.0E-1)
RELAX( H2, LINRLX, 4.0E-1)
ENDIF
RELAX( R2, LINRLX, 1.1E-1)
RELAX( DEN1, LINRLX, 9.0E-1)
RELAX( DEN2, LINRLX, 9.0E-1)
RELAX( MDOT, LINRLX, 7.0E-1)

```

\*\*\*\*\*

### GROUP 18. Limits on variable values or increments to them

```

VARMIN(H1) = 5.0
VARMIN(H2) = 5.0
VARMAX(H1) = 60.0
VARMAX(H2) = 60.0

```

\*\*\*\*\*

### GROUP 19. Data communicated by SATELLITE to GROUND

\* Modelo QUÍNTICO de la densidad del agua en función de la temperatura según Standard Methods (1992) y Gill (1982)

```

RG(1) = AA
RG(2) = BB
RG(3) = CC
RG(4) = DD
RG(5) = EE

```

Apéndice B

RG(6) = FF

\* Condiciones del flujo en la superficie libre y en el fondo

RG(7) = CD  
 RG(8) = RHOV  
 RG(9) = WS  
 RG(10) = WF  
 RG(27) = US  
 RG(28) = UF

\* Modelo de turbulencia de dos fluidos

RG(11) = CV  
 RG(12) = CF

\* Modelo de radiación solar de onda corta

RG(13) = ETHA  
 RG(14) = BETHA  
 RG(15) = GPHI

\* Radiación atmosférica total

RG(16) = GCNET1  
 RG(17) = GCNET2  
 RG(18) = GCLD  
 RG(19) = TAIRE

\* Radiación reflejada de onda corta

RG(35) = CA  
 RG(36) = CB

\* Pérdidas por evaporación

RG(20) = PHISUP  
 RG(21) = PHI2M  
 RG(22) = PATM  
 RG(23) = CC1  
 RG(24) = CC2  
 RG(25) = CC3  
 RG(26) = ALPHA

\* Variables para la simulación transitoria

RG(29) = GPHIM  
 RG(30) = ND  
 RG(31) = TMAX  
 RG(32) = TMIN  
 RG(33) = UVMAX  
 RG(34) = UVMIN

LG(1) = TRANS

\* Último RG: 36

\*\*\*\*\*

GROUP 21. Frequency and extent of field printout.

OUTPUT(P1,N,N,N,N,N,N)  
 OUTPUT(U1,N,P,P,P,P,P);           OUTPUT(V1,N,P,P,P,P,P)  
 OUTPUT(R1,N,N,N,N,N,N);           OUTPUT(R2,N,N,N,N,N,N)  
 OUTPUT(U2,N,P,P,P,P,P);           OUTPUT(V2,N,P,P,P,P,P)  
 IF (TEMPER) THEN  
   OUTPUT(H1,N,P,P,P,P,P);        OUTPUT(H2,N,P,P,P,P,P)

## Apéndice B

```

ENDIF
*****
GROUP 22. Spot-value & residual printout.
TSTSWP=-1; IYMON=NY; IZMON=NZ/2
*****
GROUP 23. Field printout and plot control
NYPRIN=2; IPLTL=LSWEEP; IPROF=3; ORSIZ=0.4
PATCH(OUTPUT1, PROFIL, 1, 1, 1, NY, NZ, NZ, 1, 1)
COVAL(OUTPUT1, U1, 0.0, 2.0*US);   COVAL(OUTPUT1, V1, 0.0, US)
COVAL(OUTPUT1, U1, -1.0, -1.0);   COVAL(OUTPUT1, V1, -2.0, -2.0)
COVAL(OUTPUT1, U2, 0.0, 2.0*UCAR); COVAL(OUTPUT1, V2, -UCAR, 0.0)
COVAL(OUTPUT1, U2, -1.0, -1.0);   COVAL(OUTPUT1, V2, -2.0, -2.0)
COVAL(OUTPUT1, R1, 0.0, 1.0)
IF (TEMPER) THEN
  PATCH(OUTPUT3, PROFIL, 1, 1, 1, NY, NZ, NZ, 1, 1)
  COVAL(OUTPUT3, H1, 0.0, 1.0)
  COVAL(OUTPUT3, H2, 0.0, 1.0)
ENDIF
NAME(V1)  = 1V; NAME(V2)  = 2V
NAME(C13) = U; NAME(C11) = V; NAME(C10) = W
NAME(C12) = T
*****
GROUP 24. Preparations for continuation runs.
IQALIB=0
STOP

```

Estas son las modificaciones realizadas en la estación GROUND que hicieron posibles las simulaciones descritas en este trabajo. Únicamente se presentan los grupos y las secciones que fueron modificadas.

```

C.... FILE NAME GROUND.FTN-----230597
SUBROUTINE GROUND
INCLUDE '/phoenics/d_includ/satear'
INCLUDE '/phoenics/d_includ/grdloc'
INCLUDE '/phoenics/d_includ/satgrd'
INCLUDE '/phoenics/d_includ/grdear'
INCLUDE '/phoenics/d_includ/grdbfc'
COMMON/GENI/NXNY, IGFIL(8), NFM, IGF(21), IPRL, IBTAU, ILTLS, IGFIL(15),
1 ITEM1, ITEM2, ISPH1, ISPH2, ICON1, ICON2, IPRPS, IRADX, IRADY, IRADZ, IVFC1
COMMON/DRHODP/ITEMP, IDEN/DVMOD/IDVCGR
CXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX USER SECTION STARTS:
C
C 1 Set dimensions of data-for-GROUND arrays here. WARNING: the
C corresponding arrays in the MAIN program of the satellite
C and EARTH must have the same dimensions.
PARAMETER (NLG=100, NIG=200, NRG=200, NCG=100)
C
COMMON/LGRND/LG(NLG)/IGRND/IG(NIG)/RGRND/RG(NRG)/CGRND/CG(NCG)
LOGICAL LG
CHARACTER*4 CG
C
C 2 User dimensions own arrays here, for example:
C DIMENSION GUH(10,10),GUC(10,10),GUX(10,10),GUZ(10)
C
C OSCAR
C =====
PARAMETER(NXDIM = 100, NYDIM = 200)
DIMENSION OH1 (NYDIM, NXDIM), OH2 (NYDIM, NXDIM)

```

Apéndice B

DIMENSION OVAL (NYDIM, NXDIM)  
 DIMENSION OY1 (NYDIM, NXDIM), OML1 (NYDIM, NXDIM)

```

C =====
C
C 3 User places his data statements here, for example:
C DATA NXDIM,NYDIM/10,10/
C 4 Insert own coding below as desired, guided by GREX examples.
C Note that the satellite-to-GREX special data in the labelled
C COMMONs /RSG/, /ISG/, /LSG/ and /CSG/ can be included and
C used below but the user must check GREX for any conflicting
C uses. The same comment applies to the EARTH-spare working
C arrays EASP1, EASP2,...EASP20. In addition to the EASPs,
C there are 10 GRound-earth SPare arrays, GRSP1,...,GRSP10,
C supplied solely for the user, which are not used by GREX. If
C the call to GREX has been deactivated then all of the arrays
C may be used without reservation.
C
C*****
C
C IXL=IABS(IXL)
C IF(IGR.EQ.13) GO TO 13
C IF(IGR.EQ.19) GO TO 19
C GO TO (1,2,3,4,5,6,25,8,9,10,11,12,13,14,25,25,25,25,19,20,25,
C 121,23,24),IGR
C 25 CONTINUE
C RETURN
C*****
C
C--- GROUP 1. Run title and other preliminaries
C
C 1 GO TO (1001,1002,1003),ISC
C 1001 CONTINUE
C
C * -----GROUP 1 SECTION 3 -----
C--- Use this group to create storage via MAKE, GXMAKE etc which it is
C essential to dump to PHI (or PHIDA) for restarts
C User may here change message transmitted to the VDU screen
C IF(.NOT.NULLPR.AND.IDVCGR.EQ.0)
C 1 CALL WRYT40('GROUND file is GROMAR.F of: 250100 ');
C
C OSCAR
C =====
C Oscar Martínez Alvarado
C 16 de noviembre de 2000
C
C GRSP1 tiene la función especial de guardar valores para ser usados
C después durante la ejecución del programa. PATCH.EQ.'CORTANTE'
C CALL MAKE(GRSP1)
C CALL MAKE(GRSP2)
C CALL MAKE(GRSP3)
C CALL MAKE(GRSP4)
C CALL MAKE(GRSP5)
C CALL MAKE(DYG2D)
C CALL MAKE(YG2D)
C =====
C RETURN
C * -----GROUP 1 SECTION 3 -----
    
```

Apéndice B

```

C---- Use this group to create storage via GXMAKE which it is not
C      necessary to dump to PHI (or PHIDA) for restarts
C
C 1003 CONTINUE
C      GO TO 25
C 1002 CONTINUE
C      RETURN
C*****
C
C--- GROUP 9. Properties of the medium (or media)
C
C The sections in this group are arranged sequentially in their
C order of calling from EARTH. Thus, as can be seen from below,
C the temperature sections (10 and 11) precede the density
C sections (1 and 3); so, density formulae can refer to
C temperature stores already set.
C 9 GO TO (91,92,93,94,95,96,97,98,99,900,901,902,903,904,905),ISC
C*****
C 902 CONTINUE
C * ----- SECTION 12 -----
C For EL1.LE.GRND----- phase-1 length scale Index LEN1
C OSCAR
C =====
C Cálculo de la longitud de mezclado según la ecuación para flujo de
C Couette (Spalding, 1987):
C
C  $l = \text{mínimo}(0.4*y, 0.4*(y1 - y))$ 
C
C donde
C
C     l = longitud de mezclado
C     y = distancia vertical desde la placa fija
C     y1= distancia entre placas
C
C Oscar Martínez Alvarado
C 5 de abril de 2001
C
C IF(EL1.LE.GRND) THEN
C   CALL GETYX(YG2D, OY1, NYDIM, NXDIM)
C   DO IJ=1, NY
C     DO II=1, NX
C       IF(LG(2)) THEN
C         OML1(IJ,II)=0.4*OY1(IJ,II)
C       ELSE
C         IF(0.4*OY1(IJ,II).LT.0.4*(YVLAST-OY1(IJ,II))) THEN
C           OML1(IJ,II)=0.4*OY1(IJ,II)
C         ELSE
C           OML1(IJ,II)=0.4*(YVLAST-OY1(IJ,II))
C         ENDIF
C       ENDIF
C     ENDDO
C   ENDDO
C   CALL SETYX(LEN1,OML1,NYDIM,NXDIM)
C ENDIF
C =====
C RETURN
C 91 CONTINUE
C * ----- SECTION 1 -----

```



## Apéndice B

```

C   For RHO1.LE.GRND--- density for phase 1           Index DEN1
C OSCAR
C =====
C Cálculo de la densidad del agua según Standard Methods (1992) y Gill
C (1982)
C
C   den = a + bT + cT^2 + dT^3 + eT^4 + fT^5
C
C   donde
C       a = 999.842594 = RG(1)
C       b = 6.793952E-2 = RG(2)
C       c = -9.095290E-3 = RG(3)
C       d = 1.001685E-4 = RG(4)
C       e = -1.120083E-6 = RG(5)
C       f = 6.536332E-9 = RG(6)
C
C   Oscar Martínez Alvarado
C   30 de noviembre de 2000
C   8 de febrero de 2001
C
C   IF(RHO1.EQ.GRND) THEN
C       FN5(Y,X,A,B,C,D,E)           Y = A + B*X + C*X**2 + D*X**3 + E*X**4
C       CALL FN5(DEN1,H1, RG(1),RG(2),RG(3),
C   $           RG(4),RG(5))
C       FN8(Y,X,A,B,C,D)           Y = A*(X + B)**C + D
C       CALL FN8(GRSP2,H1, RG(6),0.0,5.0,0.0)
C       FN34(Y,X,A)               Y = Y + A * X
C       CALL FN34(DEN1,GRSP2,1.0)
C   ENDIF
C =====
C   RETURN
93 CONTINUE
C   * ----- SECTION 3 -----
C   For RHO2.LE.GRND--- density for phase 2           Index DEN2
C OSCAR
C =====
C   Cálculo de la densidad del agua según Standard Methods (1992) y
C   Gill (1982)
C
C   den = a + bT + cT^2 + dT^3 + eT^4 + fT^5
C
C   donde
C       a = 999.842594 = RG(1)
C       b = 6.793952E-2 = RG(2)
C       c = -9.095290E-3 = RG(3)
C       d = 1.001685E-4 = RG(4)
C       e = -1.120083E-6 = RG(5)
C       f = 6.536332E-9 = RG(6)
C
C   Oscar Martínez Alvarado
C   30 de noviembre de 2000
C   8 de febrero de 2001
C
C   IF(RHO2.EQ.GRND) THEN
C       FN5(Y,X,A,B,C,D,E)           Y = A + B*X + C*X**2 + D*X**3 + E*X**4
C       CALL FN5(DEN2,H2, RG(1),RG(2),RG(3),
C   $           RG(4),RG(5))

```

## Apéndice B

```

C      FN8(Y,X,A,B,C,D)          Y = A*(X + B)**C + D
      CALL FN8(GRSP2,H2,RG(6),0.0,5.0,0.0)
C      FN34(Y,X,A)              Y = Y + A * X
      CALL FN34(DEN2,GRSP2,1.0)
      ENDIF
C =====
      RETURN
C *****
C
C--- GROUP 10. Inter-phase-transfer processes and properties
C
      10 GO TO (101,102,103,104,105),ISC
      101 CONTINUE
C      * ----- SECTION 1 -----
C      For CFIPS.LE.GRND--- inter-phase friction coeff.
C
C                                     Index INTFRC
C OSCAR
C =====
C      Cálculo de la fricción entre fluidos según la expresión recomendada
C      especialmente para el modelo de turbulencia de dos fluidos:
C
C      FIP=CF*DEN1*R1*R2*max(reispeed,0)/EL1
C
C      RG(12)=CF
C
C      Oscar Martínez Alvarado
C      12 de junio de 2001
C
      IF(CFIPS.EQ.GRND) THEN
          IF(SOLVE(U1).AND.SOLVE(U2).AND.SOLVE(W1).AND.SOLVE(W2)) THEN
C              CASO I. VELOCIDAD HORIZONTAL COMPUESTA EN DIRECCIÓN X y Z
C              FN0(Y,X)          Y = X
              CALL FN0(GRSP4,U1)
C              FN34(Y,X,A)      Y = Y + A * X
              CALL FN34(GRSP4,U2,-1.0)
              CALL FN0(GRSP5,W1)
              CALL FN34(GRSP5,W2,-1.0)
C              FN11(Y,X1,X2,A,B1,B2,C1,C2,C12)
C              Y = A + B1*X1 + B2*X2 + C1*X1**2 + C2*X2**2 + C12*X1*X2
              CALL FN11(INTFRC,GRSP4,GRSP5,0.0,0.0,0.0,1.0,1.0,0.0)
C              FN30(Y)          Y = SQRT(Y)
              CALL FN30(INTFRC)
          ELSE IF(SOLVE(W1).AND.SOLVE(W2)) THEN
C              CASO II. VELOCIDAD HORIZONTAL EN DIRECCIÓN Z
              CALL FN0(INTFRC,W1)
              CALL FN34(INTFRC,W2,-1.0)
              CALL FN22(INTFRC,0.0)
          ELSE IF(SOLVE(U1).AND.SOLVE(U2)) THEN
C              CASO III. VELOCIDAD HORIZONTAL EN DIRECCIÓN X
              CALL FN0(INTFRC,U1)
              CALL FN34(INTFRC,U2,-1.0)
          ENDIF
C      FN22(Y,A)                Y = AMAX(Y,A)
      CALL FN22(INTFRC,0.0)
C      FN26(Y,X)                Y = Y * X
      CALL FN26(INTFRC,R2)
      CALL FN26(INTFRC,R1)

```

Apéndice B

```

      CALL FN26(INTFRC,DEN1)
C      FN27(Y,X)                Y = Y / X
      CALL FN27(INTFRC,LEN1)
C      FN25(Y,A)                Y = A * Y
      CALL FN25(INTFRC,RG(12))
      ENDIF
C =====
      RETURN
C*****
C
C--- GROUP 13. Boundary conditions and special sources
C                      Index for Coefficient - CO
C                      Index for Value      - VAL
      13 CONTINUE
      GO TO (130,131,132,133,134,135,136,137,138,139,1310,
      11311,1312,1313,1314,1315,1316,1317,1318,1319,1320,1321),ISC
      130 CONTINUE
C----- SECTION 1 ----- coefficient = GRND
C OSCAR
C =====
C      Cortante en las paredes
C
C      RG(9) = WS
C      RG(10)= WF
C      RG(27)= US
C      RG(28)= UF
C
C      Oscar Martínez Alvarado
C      12 de junio de 2001
C
      IF(.NOT.ONEPHS) THEN
      IF(NPATCH.EQ.'SUPER') THEN
      IF(INDVAR.EQ.W1) THEN
C          Cortante en la pared móvil aplicado al fluido 1 en dirección
Z
C          FN2(Y,X,A,B)                Y = A + B*X
          CALL FN2(CO,W1,-RG(9),1.0)
C          FN40(Y)                      Y = ABS(Y)
          CALL FN40(CO)
C          FN25(Y,A)                    Y = A * Y
          CALL FN25(CO,0.005)
C          FN26(Y,X)                    Y = Y * X
          CALL FN26(CO,DEN1)
      ELSEIF(INDVAR.EQ.W2) THEN
C          Cortante en la pared móvil aplicado al fluido 2 en dirección
Z
          CALL FN2(CO,W2,-RG(9),1.0)
          CALL FN40(CO)
          CALL FN25(CO,0.005)
          CALL FN26(CO,DEN2)
      ELSEIF(INDVAR.EQ.U1) THEN
C          Cortante en la pared móvil aplicado al fluido 1 en dirección
X
          CALL FN2(CO,U1,-RG(27),1.0)
          CALL FN40(CO)
          CALL FN25(CO,0.005)
          CALL FN26(CO,DEN2)

```

Apéndice B

```

ELSEIF(INDVAR.EQ.U2) THEN
C      Cortante en la pared móvil aplicado al fluido 2 en dirección
X
      CALL FN2(CO,U2,-RG(27),1.0)
      CALL FN40(CO)
      CALL FN25(CO,0.005)
      CALL FN26(CO,DEN2)
      ENDIF
ELSEIF(NPATCH.EQ.'FONDO') THEN
      IF(INDVAR.EQ.W1) THEN
C      Cortante en la pared fija aplicado al fluido 1 en dirección Z
      CALL FN2(CO,W1,-RG(10),1.0)
      CALL FN40(CO)
      CALL FN25(CO,0.005)
      CALL FN26(CO,DEN1)
      ELSEIF(INDVAR.EQ.W2) THEN
C      Cortante en la pared fija aplicado al fluido 2 en dirección Z
      CALL FN2(CO,W2,-RG(10),1.0)
      CALL FN40(CO)
      CALL FN25(CO,0.005)
      CALL FN26(CO,DEN2)
      ELSEIF(INDVAR.EQ.U1) THEN
C      Cortante en la pared fija aplicado al fluido 1 en dirección X
      CALL FN2(CO,U1,-RG(28),1.0)
      CALL FN40(CO)
      CALL FN25(CO,0.005)
      CALL FN26(CO,DEN2)
      ELSEIF(INDVAR.EQ.U2) THEN
C      Cortante en la pared fija aplicado al fluido 2 en dirección X
      CALL FN2(CO,U2,-RG(28),1.0)
      CALL FN40(CO)
      CALL FN25(CO,0.005)
      CALL FN26(CO,DEN2)
      ENDIF
      ENDIF
      ENDIF
C =====
      RETURN
1311 CONTINUE
C----- SECTION 12 ----- value = GRND
C OSCAR
C =====
C Fuente simplificada para esfuerzo cortante sobre la superficie generado
C por el viento.
C
C      tau = Cd*rhov*Wv^2
C
C      donde tau = esfuerzo cortante
C      Cd = coeficiente de arrastre = RG(7)
C      rhov = densidad del aire = RG(8)
C      Wv = velocidad del viento en Z = RG(9)
C      Uv = velocidad del viento en X = RG(27)
C
C      Oscar Martínez Alvarado
C      12 de junio de 2001
C
      IF(NPATCH.EQ.'SUPER') THEN

```

## Apéndice B

```

IF((INDVAR.EQ.U1).OR.(INDVAR.EQ.U2)) THEN
C   FN1(Y,X,A,B)           Y = A
   CALL FN1(VAL, RG(7)*RG(8)*ABS(RG(27))*RG(27))
ELSE IF((INDVAR.EQ.W1).OR.(INDVAR.EQ.W2)) THEN
   CALL FN1(VAL, RG(7)*RG(8)*ABS(RG(9))*RG(9))
ENDIF
ENDIF

C =====
   RETURN
1312 CONTINUE
C----- SECTION 13 ----- value = GRND1
C OSCAR
C =====
C   Modificación a la fuente de cortante para el modelo de dos fluidos.
C   Se sustituye la velocidad longitudinal W media, y se calcula por
C   medio
C   de una regla de mezclas:
C
C   W=R1*W1+R2*W2
C
C   Oscar Martínez Alvarado
C   16 de noviembre de 2000
C
C   IF(.NOT.ONEPHS.AND.NPATCH.EQ.'CORTANTE') THEN
C   IF(INDVAR.EQ.V1) THEN
C   GRSP1=Cf*rho*r1*r2*max(V1-V2,0)
C   CALL FN21(GRSP1,INTFRC,LEN1,0.0, RG(11))
C   GRSP1 se recorre hacia las caras de las celdas mediante un promedio.
C   CALL FNAV(GRSP1,GRSP1,'NORTH')
C   IF(SOLVE(U1).AND.SOLVE(U2).AND.SOLVE(W1).AND.SOLVE(W2)) THEN
C   VAL=SQRT(U**2+W**2)
C   FN11(Y,X1,X2,A,B1,B2,C1,C2,C12)
C   Y = A + B1*X1 + B2*X2 + C1*X1**2 + C2*X2**2 + C12*X1*X2
C   CALL FN11(VAL,C10,C13,0.0,0.0,0.0,1.0,1.0,0.0)
C   FN30(Y)           Y = SQRT(Y)
C   CALL FN30(VAL)
C   ELSE IF(SOLVE(W1).AND.SOLVE(W2)) THEN
C   VAL=W=C10
C   CALL FNO(VAL,C10)
C   ELSE IF(SOLVE(U1).AND.SOLVE(U2)) THEN
C   VAL=U=C13
C   CALL FNO(VAL,C13)
C   ENDIF
C   Se obtiene d(VAL)=VAL(y+dy)-VAL(y)
C   CALL FN103(VAL,VAL,1)
C   Sv1=Cf*rho*r1*r2*max(V1-V2)*dW/dy
C   VAL=GRSP1*d(VAL)/dy en las caras
C   CALL FN56(VAL,VAL,GRSP1,DYG2D,1.0)
C   VAL=abs(Sv1)
C   CALL FN40(VAL)
C   Se guardan los valores para ser usados para V2
C   CALL FNO(GRSP1,VAL)
C   ELSEIF(INDVAR.EQ.V2) THEN
C   Sv2=-Sv1
C   CALL FN2(VAL,GRSP1,0.0,-1.0)
C   ENDIF
ENDIF
ENDIF

```

Apéndice B

```

C =====
C      RETURN
C 1313 CONTINUE
C----- SECTION 14 ----- value = GRND2
C OSCAR
C =====
C      Radiación solar de onda corta
C
C      RG(13) = ETHA
C      RG(14) = BETHA
C      RG(15) = GPFI
C
C      Oscar Martínez Alvarado
C      30 de mayo de 2001
C      Tomado de Padilla (1994)
C
C      IF(NPATCH.EQ.'SOLRAD') THEN
C          FN1(Y,A)                Y = A
C          CALL FN1(GRSP2,0.0)
C          FN0(Y,X)                Y = X
C          CALL FN0(GRSP3,YG2D)
C          FN25(Y,A)               Y = A * Y
C          CALL FN25(GRSP3,-1.0)
C          FN33(Y,A)               Y = Y + A
C          CALL FN33(GRSP3,YVLAST)
C          FN36(Y,X,A,B)           Y = Y + A * exp(B * X)
C          CALL FN36(GRSP2,GRSP3,RG(13)*RG(15)*(1.0-RG(14))/CP1,-RG(13))
C          CALL FN0(VAL,GRSP2)
C          CALL FN0(C21, VAL)
C      ENDIF
C =====
C      RETURN
C 1314 CONTINUE
C----- SECTION 15 ----- value = GRND3
C OSCAR
C =====
C      Radiación superficial
C
C      RG(14) = BETHA
C      RG(15) = PHI
C
C      Oscar Martínez Alvarado
C      30 de mayo de 2001
C      Tomado de Padilla (1994)
C
C      IF(NPATCH.EQ.'SUPRAD') THEN
C          FN2(Y,X,A,B)            Y = A + B*X
C          CALL FN2(VAL,VPOR,0.0,RG(14)*RG(15)/CP1)
C          CALL FN0(C22, VAL)
C      ENDIF
C      RETURN
C 1315 CONTINUE
C----- SECTION 16 ----- value = GRND4
C OSCAR
C =====
C      Radiación atmosférica total
C

```

Apéndice B

```

C   RG(16) = GCNET1
C   RG(17) = GCNET2
C   RG(18) = GCLD
C   RG(19) = TAIRE
C
C   Oscar Martínez Alvarado
C   30 de mayo de 2001
C   Tomado de Padilla (1994)
C
C   IF(NPATCH.EQ.'RADATM')THEN
C       FN2(Y,X,A,B)                Y = A + B*X
C       CALL FN2(VAL,VPOR,0.0,(RG(16)+RG(17)*RG(19))
S         *(1.0+0.17*RG(18)**2.0)/CP1)
C       CALL FN0(C23, VAL)
C   ENDIF
C   RETURN
1316 CONTINUE
C----- SECTION 17 ----- value = GRND5
C OSCAR
C =====
C   Radiación reflejada de onda corta
C
C   RG(35) = CA
C   RG(36) = CB
C
C   Oscar Martínez Alvarado
C   5 de agosto de 2001
C   Tomado de Padilla (1994)
C   IF(NPATCH.EQ.'BACRAD')THEN
C       IF(INDVAR.EQ.H1)THEN
C           FN2(Y,X,A,B)                Y = A + B*X
C           CALL FN2(VAL, H1, -RG(35)/CP1, -RG(36)/CP1)
C       ELSE IF(INDVAR.EQ.H2)THEN
C           CALL FN2(VAL, H2, -RG(35)/CP1, -RG(36)/CP1)
C       ENDIF
C   ENDIF
C   RETURN
1317 CONTINUE
C----- SECTION 18 ----- value = GRND6
C OSCAR
C =====
C   Pérdidas por evaporación
C
C   RG(19) = TAIRE
C   RG(20) = PHISUP
C   RG(21) = PHI2M
C   RG(22) = PATM
C   RG(23) = CC1
C   RG(24) = CC2
C   RG(25) = CC3
C   RG(26) = ALPHA
C
C   Oscar Martínez Alvarado
C   30 de mayo de 2001
C   Tomado de Padilla (1994)
C
C   IF(NPATCH.EQ.'EVAPORA')THEN

```

Apéndice B

```

LGCOND=. FALSE.
LGTEMP=. FALSE.
IF (INDVAR.EQ.H1) THEN
  CALL GETYX (H1, OH1, NYDIM, NXDIM)
ELSEIF (INDVAR.EQ.H2) THEN
  CALL GETYX (H2, OH1, NYDIM, NXDIM)
ENDIF
DO JX=IXF, IXL
  DO JY=IYF, IYL
    PSATW=RG (26) *EXP (RG (23)+RG (24) / (OH1 (JY, JX)+273.15)+RG (25) *
$     ALOG (OH1 (JY, JX)+273.15) )
    PVAPW=RG (20) *PSATW
    OMEGAW=0.622*PVAPW/ (RG (22)-PVAPW)
    THETA VW=(OH1 (JY, JX)+273.15) * (1.0+0.61*OMEGAW)
    GTSV=THETA VW-273.15
    PSATA=RG (26) *EXP (RG (23)+RG (24) / (RG (19)+273.15)+RG (25) *
$     ALOG (RG (19)+273.15) )
    PVAPA=RG (21) *PSATA
    OMEGAA=0.622*PVAPA/ (RG (22)-PVAPA)
    THETA VA=(RG (19)+273.15) * (1.0+0.61*OMEGAA)
    GTAV=THETA VA-273.15
    DELTAPV=PVAPW-PVAPA
    DELTATS=GTSV-GTAV
    QQEVFREE=2.7*DELTATS** (1.0/3.0)
    QQEVFORC=3.2*ABS (RG (9) )
    IF ((DELTATS.LT.0.0) .AND. (DELTAPV.GE.0) ) THEN
      OVAL (JY, JX)=-QQEVFORC*DELTAPV/CP1
    ELSEIF ((DELTATS.GE.0.0) .AND. (DELTAPV.GE.0) ) THEN
      QQEVAPO=SQRT (QQEVFREE*QQEVFREE+QQEVFORC*QQEVFORC)
C     Término adicional para las pérdidas convectivas
      GRB=6.19E-4*RG (22) * (OH1 (JY, JX) -RG (19) )
      OVAL (JY, JX)=-QQEVAPO* (DELTAPV+GRB) /CP1
    ELSE
      OVAL (JY, JX)=0.0
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO
CALL SETYX (VAL, OVAL, NYDIM, NXDIM)
CALL FN26 (VAL, VPOR)
ENDIF
RETURN

C*****
C* Make changes to data for GROUPS 15, 16, 17, 18 GROUP 19.
C*****
C
C--- GROUP 19. Special calls to GROUND from EARTH
C
  19 GO TO (191,192,193,194,195,196,197,198,199,1910,1911) , ISC
  191 CONTINUE
C * ----- SECTION 1 ---- Start of time step.
C OSCAR
C =====
C   Cálculo de los valores de las cantidades variables en el tiempo.
C
C   RG (15) = GPHI
C   RG (19) = TAIRE
C   RG (27) = US

```



Apéndice B

```

C      RG(29) = GPHIM
C      RG(30) = N
C      RG(31) = TMAX
C      RG(32) = TMIN
C      RG(33) = UVMAX
C      RG(34) = UVMIN
C      LG(1)  = TRANS
C
C      Oscar Martínez Alvarado
C      7 de julio de 2001
C
      IF(.NOT.STEADY.AND.LG(1))THEN
          CALL FN1(C21, 0.0)
          CALL FN1(C22, 0.0)
          CALL FN1(C23, 0.0)
          CALL FN1(C24, 0.0)
          IF(COS(3.14159*(TIM/3600-12)/RG(30)).GT.0.0)THEN
              RG(15)=RG(29)*(COS(3.14159*(TIM/3600-12)/RG(30)))*1.2
          ELSE
              RG(15)=1.0E-10
          ENDIF
          IF(TIM.GE.21600.AND.TIM.LE.54000)THEN
              RG(19)=(RG(31)-RG(32))*(TIM-21600)/32400+RG(32)
          ELSE IF(TIM.LT.21600)THEN
              RG(19)=RG(32)+(RG(31)-RG(32))*(21600-TIM)/54000
          ELSE
              RG(19)=RG(31)+(RG(31)-RG(32))*(54000-TIM)/54000
          ENDIF
          IF((TIM.LE.43200).OR.(TIM.GE.68400))THEN
              RG(27)=RG(34)
          ELSE
              RG(27)=RG(33)
          ENDIF
      ENDIF
C =====
      RETURN
196 CONTINUE
C * ----- SECTION 6 ----- Finish of iz slab.
C OSCAR
C =====
C
C      Oscar Martínez Alvarado
C      13 de junio de 2001
C
      IF(.NOT.ONEPHS) THEN
          CALL FN0(C15, R1)
C
C      Cálculo de la VELOCIDAD LONGITUDINAL principal.
C
      IF(SOLVE(W1).AND.SOLVE(W2))THEN
C
          W = R1*W1 + R2*W2
C
          FN21(Y,X1,X2,A,B)          Y = A + B*X1*X2
          CALL FN21(C10,R1,W1,0.0,1.0)
          CALL FN21(GRSP2,R2,W2,0.0,1.0)
C
          FN34(Y,X,A)              Y = Y + A*X
    
```

Apéndice B

```

        CALL FN34(C10,GRSP2,1.0)
ENDIF
IF(SOLVE(U1).AND.SOLVE(U2)) THEN
C
C
C
        U = R1*U1 + R2*U2

        CALL FN21(C13,R1,U1,0.0,1.0)
        CALL FN21(GRSP2,R2,U2,0.0,1.0)
        CALL FN34(C13,GRSP2,1.0)
ENDIF

C
C
C
C
C
        Cálculo de la VELOCIDAD TRANSVERSAL principal.

        V = R1*V1 + R2*V2

        CALL FN21(C11,R1,V1,0.0,1.0)
        CALL FN21(GRSP2,R2,V2,0.0,1.0)
        CALL FN34(C11,GRSP2,1.0)

C
        IF(STORE(H1).AND.STORE(H2)) THEN
C
C
C
C
                Cálculo de la TEMPERATURA de la mezcla.

                T = R1*H1 + R2*H2

                CALL FN21(C12,R1,H1,0.0,1.0)
                CALL FN21(GRSP2,R2,H2,0.0,1.0)
                CALL FN34(C12,GRSP2,1.0)
        ENDIF
        IF(STORE(DEN1).AND.STORE(DEN2)) THEN
C
C
C
C
                Cálculo de la DENSIDAD de la mezcla.

                D = R1*DEN1 + R2*DEN2

                CALL FN21(C14,R1,DEN1,0.0,1.0)
                CALL FN21(GRSP2,R2,DEN2,0.0,1.0)
                CALL FN34(C14,GRSP2,1.0)
        ENDIF
    ENDIF
C =====
    RETURN
END

```

## Apéndice C. Datos meteorológicos y climatológicos para los lagos de Chapala y Kasumigaura.

Tabla C.1. Datos sobre periodo de insolación, radiación, temperaturas y velocidades mensuales para un sitio localizado a 20° de latitud norte, 103° de longitud oeste y 1524 msnm de altitud.

MES	Número de días	Día promedio del mes*	Día del año correspondiente (n)	$\delta$ [°]	$\omega_s$ [°]	ND [horas]	$\downarrow_{sw}$ ** [W/m2]	$T_{prom}$ *** [°C]	$T_{min}$ [°C]	$T_{max}$ [°C]	$U_{prom}$ **** [m/s]	$U_{min}$ [m/s]	$U_{max}$ [m/s]
Enero	31	17	17	-20.9	81.9	10.9	650	17.0	13	21	2.78	2.03	3.53
Febrero	28	16	47	-13.0	85.1	11.4	760	18.1	14	22	2.78	2.03	3.53
Marzo	31	16	75	-2.4	89.1	11.9	870	20.8	17	25	2.78	2.03	3.53
Abril	30	15	105	9.4	93.5	12.5	910	22.7	19	27	2.78	2.03	3.53
Mayo	31	15	135	18.8	97.2	13.0	900	24.5	21	29	2.78	2.03	3.53
Junio	30	11	162	23.1	99.0	13.2	790	24.1	20	28	-2.50	-1.75	-3.25
Julio	31	17	198	21.2	98.2	13.1	690	22.1	18	26	-2.50	-1.75	-3.25
Agosto	31	16	228	13.5	95.1	12.7	720	22.1	18	26	-2.50	-1.75	-3.25
Septiembre	30	15	258	2.2	90.8	12.1	690	21.9	18	26	-2.50	-1.75	-3.25
Octubre	31	15	288	-9.6	86.4	11.5	730	21.1	17	25	-2.50	-1.75	-3.25
Noviembre	30	14	318	-18.9	82.7	11.0	710	19.4	15	23	-2.50	-1.75	-3.25
Diciembre	31	10	344	-23.0	81.0	10.8	640	17.8	14	22	2.78	2.03	3.53

\* Tomado de Fernández y Estrada-Cajigal (1983)

\*\* Tomado de NASA (<http://eosweb.larc.nasa.gov/sse/>, 2001)

\*\*\* Tomado de INEGI (<http://www.inegi.gob.mx>)

\*\*\*\* Tomado de SEMARNAT (<http://www.semarnat.gob.mx>, 2001) y Padilla (1994)

Tabla C.2. Datos sobre periodo de insolación, radiación, temperaturas y velocidades mensuales para un sitio localizado a 36° de latitud norte, 140° de longitud este y 1 msnm de altitud.

MES	Número de días	Día promedio del mes*	Día del año correspondiente (n)	$\delta$ [°]	$\omega_s$ [°]	ND [horas]	$\downarrow_{sw}$ ** [W/m2]	$T_{prom}$ *** [°C]	$T_{min}$ [°C]	$T_{max}$ [°C]	$U_{prom}$ **** [m/s]	$U_{min}$ [m/s]	$U_{max}$ [m/s]
Enero	31	17	17	-20.9	73.9	9.9	390	1.6	-2	6	4.29	3.54	5.04
Febrero	28	16	47	-13.0	80.4	10.7	450	2.2	-2	6	4.51	3.76	5.26
Marzo	31	16	75	-2.4	88.2	11.8	490	5.8	2	10	4.13	3.38	4.88
Abril	30	15	105	9.4	98.9	12.9	620	11.1	7	15	3.60	2.85	4.35
Mayo	31	15	135	18.8	104.3	13.9	610	15.6	12	20	3.02	2.27	8.02
Junio	30	11	162	23.1	108.0	14.4	530	19.9	16	24	2.52	1.77	7.52
Julio	31	17	198	21.2	106.4	14.2	550	23.1	19	27	2.31	1.56	7.31
Agosto	31	16	228	13.5	100.0	13.3	640	24.6	21	29	2.38	1.63	7.38
Septiembre	30	15	258	2.2	91.6	12.2	480	21.6	18	26	2.81	2.06	7.81
Octubre	31	15	288	-9.6	82.9	11.1	410	15.1	11	19	3.37	2.62	4.12
Noviembre	30	14	318	-18.9	75.6	10.1	390	9.4	5	13	3.78	3.03	4.53
Diciembre	31	10	344	-23.0	72.0	9.6	360	4.1	0	8	4.09	3.34	4.84

\* Tomado de Fernández y Estrada-Cajigal (1983)

\*\* Tomado de NASA (<http://eosweb.larc.nasa.gov/sse/>, 2001)

\*\*\* Tomado de NASA (<http://eosweb.larc.nasa.gov/sse/>, 2001), e Ishikawa y Tanaka (1993)