UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"NOTAS DE GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA PARA UN CURSO DE BACHILLERATO"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A

ALEJANDRA HERNÁNDEZ AVALOS

DIRECTOR Dr. JAVIER PAEZ CARDENAS

MÉXICO, D.F. 2001

VNIVERIDAD NACIONAL
AVENMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
" Notas de Geometría y Trigonometría para un curso de Bachillerato "

realizado por ALEJANDRA HERNANDEZ AVALOS.

con número de cuenta 9251962-2 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. JAVIER PAEZ CARDENAS.
Propietario	DRA. ISABEL PUGA ESPINOZA.
Propietario	M. en C. VICTOR MANUEL PEREZ CARRILLO.
Suplente	M. en C. FRANCISCO STRUCK CHAVEZ.
Suplente	DRA. MA. PAZ ALVAREZ SCHERER.

Consejo Departamental de Matemáticas

Coordinador: M. en C. ALEJANDRO BRAVO MUJICA

PARADOJA
(Paradox)

Verdad y certidumbre; de ellas me he despedido
en mis comienzos, cual los jóvenes llamados
a las santas órdenes se despidieron del mundo.

"Si ..., cuando...". es todo mi aserto;
y mi éxito no está sino en minúsculas cadenas
que unen dudas paralelas; que resulta vano preguntar
si lo que he postulado está justificado,
o si lo probado tiene sello de verdad.

Y, sin embargo, los puentes se yerguen y los hombres
han dejado de estar limitados a dos dimensiones.
Y estos triunfos le deben no poco a la fuerza de este juego
que, desarrollado con sombras tres veces atenuadas
de las cosas, tiene sobre sus originales.
Es frágil la ilusión, pero ¡cuán profundo el encanto!

CLARENCE R. WYLIE, JR.

Dedicatorias:

Dedico este trabajo a:

Mí madre la Sra. Ma. del Consuelo Avalos Hernández y a mí padre el Sr. Rafael Hernández Andrade, por brindarme el cariño que siempre me han mostrado, por su apoyo, confianza y paciencia; y con quien deseo compartir este trabajo Carlos Rivera Jiménez, mi compañero de quién también he tenido apoyo, confianza, paciencia y amor.

A mí hermana y hermano:

Ma. del Consuelo e Ismael quienes siempre se molestan mutuamente.

A mí hija:

Alejandra Rivera Hernández; para que este trabajo la motive ha seguir superándose siempre.

A Dios por haberme permitido lograr ésta una de mis grande metas.

Agradecimientos

Deseo de manera especial agradecer al Dr. Javier Páez Cárdenas director de tesis, por su apoyo incondicional y el tiempo dedicado para la realización de esta tesis; compartir su experiencia y conocimientos, en el desarrollo de este trabajo.

A los miembros del jurado la Dra. Isabel Puga, Dra. María de la Paz Álvarez Scherer; al M. en C. Francisco Struck Chávez y al Dr. Víctor M. Pérez Carrillo; por la revisión y las observaciones hechas para mejorar las notas originales de este trabajo.

Agradezco infinitamente al Físico Félix Hernández Godínez quién fuera mi profesor y que motivo la continuación de este trabajo, dedicando innumerables horas, compartiendo puntos de vista en el desarrollo de estas notas apoyándome en todo momento.

A la pasante de Actuaría Clara Patricia Castillo Toledo, con quién compartí pláticas interminables, de quién tuve apoyo desinteresado y preparación de exámenes juntas.

A la pasante de Actuaría Edith Vega Silva quién me apoyo también de manera especial, animándome en todo momento.

A mis compañeros de trabajo, por que he aprendido mucho de ellos.

INDICE

Introducción.

El propósito de estas notas es ofrecer al estudiante que cursa el segundo semestre en el nivel educativo de Enseñanza Media Superior, los conocimientos necesarios para su futuro desarrollo académico.

Estas notas cubren un vacío que sigue existiendo en cuanto a bibliografía se refiere ya que en el mercado actual no existe un texto que comprenda de manera global estos temas, motivo por el cual tanto el profesor como el alumno se ven obligados a tener que consultar al menos tres textos diferentes para cubrir las necesidades de este curso.

Estas notas se ajustan al programa vigente que corresponde a dicho nivel, dentro del contexto se ha procurado darle un desarrollo distinto en cada tema, tratando sólo los temas fundamentales con mayor profundidad, y dándole un enfoque menos formal, pero comprensible en la generalidad de los temas.

El desarrollo de este trabajo se ha estructurado en diez capítulos que incluyen los conceptos clásicos de la teoría de la geometría plana y la trigonometría.

Cada capítulo está identificado por números romanas y dividido a su vez, en subtítulos identificados por números arábigos separados por un punto.

En el capítulo I se busca motivar al lector e iniciarlo en el campo de la geometría plana y la trigonometría, dando ejemplos fehacientes del desarrollo que estas ciencias han generado y que son observadas en nuestro en torno, también se tratan las definiciones básicas para el posterior desarrollo de las matemáticas en general y de los capítulos posteriores en lo particular.

En el capítulo II se aborda el estudio de los ángulos, partiendo de su definición y proporcionando sistemas de medición, se mencionan algunos postulados importantes sobre los ángulos más comunes.

En el capítulo III se mencionan las definiciones y postulados sobre rectas en un plano tratando también las rectas paralelas y los ángulos que se generan al intersecarse dos de ellas.

El capítulo IV es el más extenso y donde se encuentra básicamente términos fundamentales para el desarrollo de los siguientes capítulos, aquí se menciona ampliamente toda la teoría referente a triángulos.

En el capítulo V, se estudian los cuadriláteros, mencionando la clasificación y algunas propiedades sobre ellos, también se desarrolla la teoría para determinar las áreas de los mismos.

En el capitulo VI se aborda los contenidos sobre polígonos en general, se tratan principalmente los polígonos regulares, tomando en cuenta diferentes maneras de clasificarlos y algunas relaciones de estos con el triángulo, cuadrado y hexágono.

En el capítulo VII se estudia el circulo y la circunferencia, mencionando todas los elementos que la componen, tales como puntos, rectas y ángulos, también se trata la manera de calcular áreas.

Los capítulos VIII, IX, X, tratan sobre el estudio de la trigonometría plana, abordando los temas de manera sencilla y clara, para el desarrollo y uso de las identidades trigonométricas, leyes y operaciones de todas las funciones trigonométricas, así como la relación de éstas con los diferentes tipos de ángulos.

Introducción.

El propósito de estas notas es ofrecer al estudiante que cursa el segundo semestre en el nivel educativo de Enseñanza Media Superior, los conocimientos de geometría y trigonometría necesarios para su futuro desarrollo académico.

Estas notas cubren un vacío que sigue existiendo en cuanto a bibliografía se refiere ya que en el mercado actual no existe un texto que comprenda de manera global estos temas, motivo por el cual tanto el profesor como el alumno se ven obligados a tener que consultar al menos tres textos diferentes para cubrir las necesidades de este curso.

Estas notas se ajustan al programa vigente que corresponde a dicho nivel. Dentro del contexto se ha procurado darle un desarrollo distinto en cada tema, tratando sólo los temas fundamentales con mayor profundidad, y dándole un enfoque menos formal, pero comprensible en la generalidad de los temas.

El desarrollo de este trabajo se ha estructurado en diez capítulos que abarcan los conceptos clásicos de la teoría de la geometría plana y la trigonometría.

Cada capítulo está identificado por números romanas y dividido a su vez, en subtítulos identificados por números arábigos separados por un punto.

En el capítulo I se busca motivar al lector e iniciarlo en el campo de la geometría plana y la trigonometría, dando ejemplos fehacientes del desarrollo que estas ciencias han generado y que son observadas en nuestro entorno; también se tratan las definiciones básicas para el posterior desarrollo de las matemáticas en general y de los capítulos posteriores en lo particular.

En el capítulo II se aborda el estudio de los ángulos, partiendo de su definición y proporcionando sistemas de medición; se mencionan algunas propiedades sobre los ángulos más comunes.

En el capítulo III se mencionan las definiciones y postulados sobre rectas y planos tratando también las rectas paralelas y los ángulos que se generan al intersecarse dos de ellas.

El capítulo IV es el más extenso y donde se encuentra básicamente términos fundamentales para el desarrollo de los siguientes capítulos; aquí se menciona ampliamente toda la teoría referente a triángulos.

En el capítulo V, se estudian los cuadriláteros, mencionando la clasificación y algunas propiedades sobre ellos, también se desarrolla la teoría para determinar las áreas de los mismos..

En el capitulo VI se aborda los contenidos sobre polígonos en general, se tratan principalmente los polígonos regulares, tomando en cuenta diferentes maneras de clasificarlos y algunas relaciones de estos con el triángulo, cuadrado y hexágono.

En el capítulo VII se estudia el circulo y la circunferencia, mencionando todas los elementos que la componen, tales como puntos, rectas y ángulos; también se trata la manera de calcular áreas.

Los capítulos VIII, IX, X, tratan sobre el estudio de la trigonometría plana, abordando los temas de manera sencilla y clara, para el desarrollo y uso de las identidades trigonométricas, leyes y operaciones de todas las funciones trigonométricas; así como la relación de éstas con los diferentes tipos de ángulos.

Introducción histórica.

La geometría y de modo más general la Matemática es una de las ciencias más antiguas que el hombre haya tratado y en ese sentido, los estudiosos de las civilizaciones opinan que el hombre llegó a concebir figuras geométricas, realizó cálculos y efectúo medidas antes de utilizar propiamente la escritura.

La palabra Geometría, etimológicamente alude a "medir la Tierra", como era entendida para Herodoto, que atribuía el origen de la geometría a la necesidad de medir tierras de labranza que modificaban su extensión con cada crecida del Río Nilo.

Pero no cabe duda que esta necesidad y otras (como comparar áreas y volúmenes de figuras como, la construcción de canales y edificios, las figuras decorativas, los movimientos de los astros, y muchos otros fenómenos) fueron quienes contribuyeron al nacimiento de las propiedades geométricas.

En el Antiguo Egipto los conocimientos matemáticos se encuentran esencialmente en dos grandes papiros y en algunos fragmentos pequeños. Uno de estos papiros se llama Rhind y el otro Moscovita, la información data aproximadamente del año 2000 antes de Cristo.

El papiro Rhind contiene una colección de 84 problemas de carácter aplicado. Para la resolución de estos problemas se realizan operaciones con fracciones, se calcula el área del rectángulo, el triángulo, el trapecio y la del círculo, esta última mediante la fórmula $\left(\frac{8d}{9}\right)^2$, *donde d es el diámetro del circulo* (de aquí se deduce que aproximaban al número π, por $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1604...$). También se calculaban los volúmenes de paralelepípedos, cilindros y los de las pirámides. Además, aparecen problemas sobre división proporcional y en la solución de uno de los problemas se encuentra la suma de una progresión geométrica.

Los conocimientos geométricos de los babilonios también quedaron en textos en los que aparecen problemas en los cuales usaban rudimentos de medición de ángulos y de relaciones trigonométricas. En lo fundamental también realizaron cálculos de áreas y volúmenes de figuras rectilíneas, comunes para la geometría elemental. El área del círculo la calculaban según la fórmula $S = \frac{c^2}{12}$ (*c* es la longitud de la circunferencia), de donde se obtiene que aproximaban el número π por el número 3.

Todos estos trabajos los aplicaban a excavaciones de canales para riego. Conocieron que el triángulo inscrito en una circunferencia, y uno de cuyos lados cincide con un diámetro, es un triángulo rectángulo y que los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales, etcétera.

De la antigua China es de donde probablemente se tenga menor información fidedigna de la evolución y desarrollo de la Matemática. Únicamente se tiene la colección "La Matemática", en nueve libros. Posiblemente esta obra sea la más significativa o el único gran monumento de las matemáticas de la antigua China.

Las primeras teorías griegas de las matemáticas

La parte teórica de las matemáticas tiene sus orígenes en las escuelas científicas y filosóficas de la Grecia antigua. En las matemáticas de esta época los problemas prácticos relacionados con la necesidad de cálculos aritméticos, mediciones y construcciones geométricas jugaron un gran papel.
En la escuela de Pitágoras se advierte un proceso de recopilación de razonamientos matemáticos abstractos y la unión de ellos en sistemas teóricos. Fueron escritos libros especiales en los que se exponía el conocimiento geométrico que se tenia hasta ese tiempo y en dichos trabajos se introdujeron y perfeccionaron los métodos de demostración geométrica. Estos libros contenían teoremas como el de Pitágoras, y los problemas sobre la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo, la cuadratura de algunas áreas, en particular las acotadas por líneas curvas.
Las obras en las cuales en aquella época se exponían los primeros sistemas matemáticos se denominaban "Elementos".
Los primeros "Elementos" de los cuales se ha tenido información, fueron escritos por Hipócrates de Quíos. Se encuentran también menciones de "Elementos" pertenecientes a otros autores. Sin embargo, todas estas obras fueron prácticamente perdidas para nosotros y fueron los "Elementos" de Euclides los que tuvieron un reconocimiento en general como un sistema de conocimientos matemáticos cuya rigurosidad lógica fue insuperable en el transcurso de más de veinte siglos. Durante todo este tiempo se estudiaba la geometría según Euclides y sus "Elementos", que están constituidos por trece libros, cada uno de los cuales consta de una sucesión de teoremas, definiciones y proposiciones mediante las cuales el autor introduce los conceptos matemáticos.

El contenido de los "Elementos" muestra que esta obra constituye un sistema de los fundamentos de la matemática antigua, y en ellos están incluidos, entre otros los de la geometría elemental, los de la teoría de los números racionales y los de la teoría general de las relaciones entre magnitudes. Lo más característico en los "Elementos" es que está dado un sistema que permite ver en él al predecesor antiguo de la actual construcción axiomática de las teorías matemáticas. Al mismo tiempo, la estructura lógica de los "Elementos" refleja el camino histórico de la formación de las teorías matemáticas desde las más simples, hasta las más complejas.

CAPÍTULO I

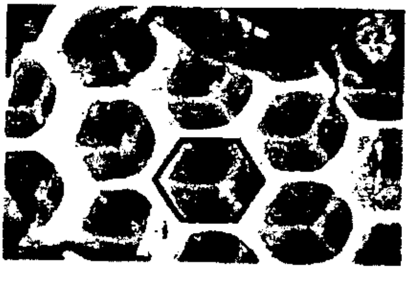
1.1 ¿Qué es la geometría?

La geometría es una rama importante de las matemáticas. Su conocimiento es necesario en variadas actividades del quehacer humano.
Los arquitectos e ingenieros requieren un conocimiento amplio de geometría y matemáticas en general. Es un prerrequisito para el estudio de la física y otras ramas de la ciencia. Con geometría se comprende con mayor facilidad muchos temas comunes de estas áreas del conocimiento.

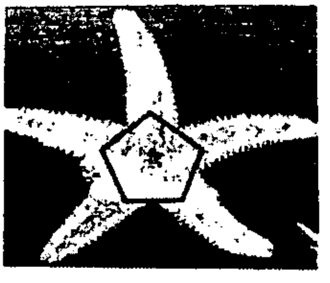
La geometría es interesante, dado que tiene una atracción intelectual y estética. Gracias a ella es posible comprender mejor la naturaleza del mundo que nos rodea. Además ayuda a desarrollar habilidades para razonar con lógica y pensar correctamente.

En todas las épocas el hombre ha utilizado las sencillas formas geométricas que sugiere la naturaleza para la creación de objetos útiles e interesantes.
Al comunicarnos con otras personas, para describir el medio en que vivimos, necesitamos un lenguaje de formas geométricas.
Ejemplos de creaciones de forma geométrica en la naturaleza, en la industria y en el arte, (figuras 1.1 a 1.8).

♣ **Figura 1.1.**



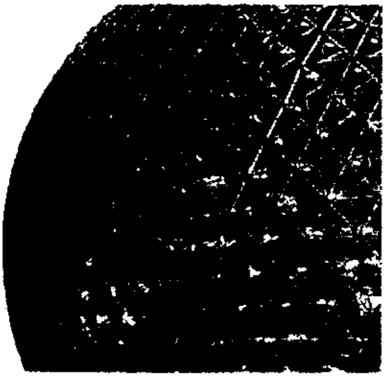
♣ **Figura 1.2.**



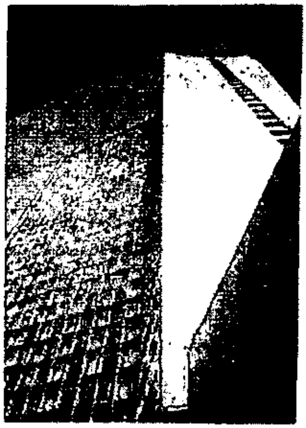
♣ **Figura 1.3.**

♣ **Figura 1.4.**

♣ Figura 1.5

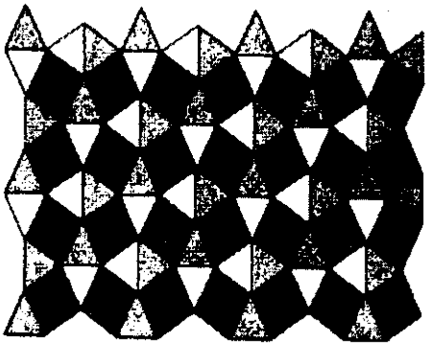


♣ Figura 1.6



♣ Figura 1.7

♣ Figura 1.8



El estudio de la geometría proporciona muchas técnicas útiles para la solución de problemas. Las relaciones entre los cuerpos geométricos, son la base de estas técnicas.

Muchos conceptos de la geometría pueden dar origen a rompecabezas geométricos que pueden resultar juegos interesantes en los cuales se pone a prueba nuestro intelecto.

La geometría nos permite plantear y solucionar problemas muy interesantes y prácticos.

Ejemplos

Problema 1 El juego del billar

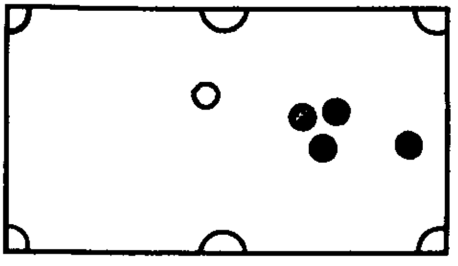


Figura 1.9 a.

¿Hacia qué punto de la banda debe lanzarse la bola blanca para que rebote y golpee a la negra?

Solución

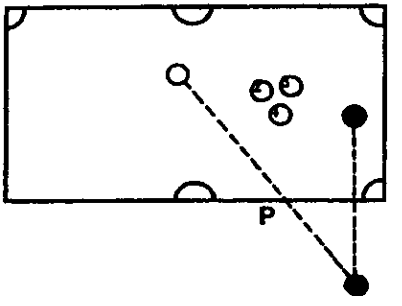


Figura 1.9 b.

Piense en una imagen especular de la bola negra. La bola blanca debe lanzarse hacia el punto *P*.

Problema 2

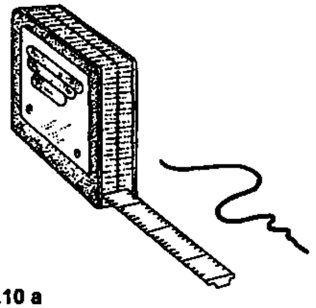


Figura 1.10 a

Si sólo se dispone de una cuerda y una cinta de medir, ¿cómo podría marcarse una esquina para un campo de juego?

Solución

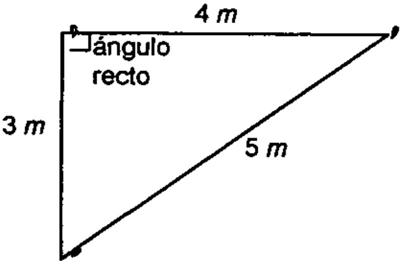


Figura 1.10 b

Se hacen marcas con la cinta métrica a intervalos de 3, 4 y 5 metros y se coloca como se muestra en la figura de arriba.

1.2 Conceptos Preliminares

Como se vio antes Euclides se dio a la tarea de recopilar gran parte del conocimiento geométrico, dándole una estructura en forma lógica-deductiva. Por esta razón necesitamos los siguientes conceptos iniciales.

- **Demostración** Fin y término del procedimiento deductivo; en lógica decimos que es un razonamiento que establece, de modo absolutamente conveniente, la veracidad de una afirmación. La DEMOSTRACIÓN es un método propio de las ciencias matemáticas.

- **Axioma** Es una afirmación que en matemáticas, no requiere demostración.

Ejemplos de axiomas, donde se emplea la notación actual.

1) La parte es menor que el todo ó el todo es mayor que cualquiera de las partes.

Ejemplos. Aquí se considera a la unidad como el todo y una fracción como la parte.

a) $\frac{2}{3} < 1$ b) $\frac{5}{7} < 1$

a) $1 > \frac{1}{2}$ b) $1 > \frac{5}{7}$

2) Si a una igualdad se le agrega otra cantidad a ambos miembros de ésta, los resultados serán iguales.

Ejemplo

$x + 2 = x + 2$, al sumarle 5 a cada miembro de la igualdad se tiene
$x + 2 + 5 = x + 2 + 5$, de donde resulta
$x + 7 = x + 7$

3) En general las igualdades se conservan al operar en ambos miembros una misma cantidad.

$x + 2 = 8$, al multiplicar ambos miembros de la igualdad por 5 se tiene
$5(x + 2) = 8(5)$, desarrollando resulta
$5x + 10 = 40$

- **Postulado** Es una afirmación que no es tan evidente como un axioma pero que también se admite sin demostración.

Ejemplos de postulados.

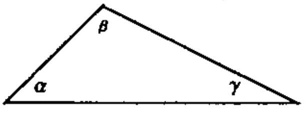
1) Por dos puntos dados puede hacerse pasar una recta y sólo una.
2) Toda recta puede prolongarse en ambos sentidos.
3) Siempre es posible describir una circunferencia de centro y radio dados.

• **Un teorema** Se considera como toda aquella afirmación que se puede demostrar; dicha demostración consta de un conjunto de razonamientos que conducen a la evidencia de la verdad de la afirmación.

En el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes:
a) **Hipótesis**: lo que se supone
b) **Tesis:** lo que se quiere demostrar

Ejemplo de teorema.
Teorema. La suma de los ángulos de todo triángulo es igual a dos ángulos rectos, es decir 180^0

Hipótesis: α, β y γ son los ángulos interiores de un triángulo.
Tesis: La suma de los ángulos α, β y γ vale dos ángulos rectos. Ver figura 1.11.



$\alpha + \beta + \gamma = 2$ ángulos rectos

Figura 1.11

Teorema. Si dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos-internos son iguales (figura 1.12).
Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos rectas paralelas cortadas por una transversal.
Tesis: $\angle ARS = \angle RSD$

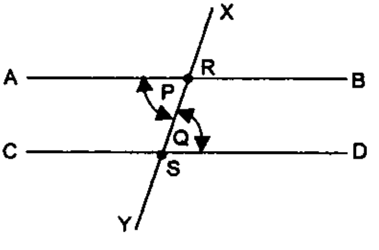


Figura 1.12

Corolario Es una afirmación que es consecuencia inmediata de un teorema, cuya demostración requiere poco o ningún razonamiento nuevo.
Ejemplo. El teorema es:

Teorema. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, es decir igual a 180^0.

Corolario. La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo vale un ángulo recto.

Lema. Afirmación que sirve de base a la demostración de un teorema, es como un teorema preliminar a otro que se considera más importante.

1.3 Términos básicos de la geometría

En cualquier discusión matemática lo primero que se pensaría es definir cuidadosamente todos los términos; pero los nuevos términos pueden ser definidos solamente por medio de otros, definidos anteriormente; de esta manera se llega a que algunos términos son primarios o básicos de los cuales sólo se tienen descripciones intuitivas que se pueden interpretar con facilidad. Así pues, tomaremos como términos básicos a conceptos tales como punto, línea y plano.

- **El punto** Intuitivamente, es una posición en el espacio representado tal vez por una marca en el pizarrón o la marca de la punta de un lápiz sobre una hoja de papel.

Según Euclides el punto no posee ni longitud, ni anchura, ni espesor.
Se representa por medio del símbolo (•). No obstante, es necesario tener presente que el punto gráfico no es el punto geométrico, en la misma forma que en un mapa un punto puede representar una localidad sin ser la localidad misma. A diferencia del punto geométrico, el punto gráfico tiene tamaño.
El punto geométrico se designa por medio de una letra mayúscula colocada en las proximidades del punto gráfico. Así: A , P , etcétera.

- **La línea** Podemos pensarla como un punto que se mueve y la trayectoria que deja la llamaremos línea.

De los postulados de Euclides se tiene que la línea posee longitud, pero carece de anchura y de espesor.
Se puede representar por medio del trazo continuo que deja el gis en el pizarrón o mediante una liga estirada, entre otras formas.
Una línea se designa con las letras mayúsculas de dos cualesquiera de sus puntos o por medio de una letra minúscula ver figura 1.13.
Ejemplos de líneas.

Figura 1.13

Las líneas pueden ser rectas, curvas o combinaciones de éstas. A fin de comprender mejor las diferencias entre estas líneas, conviene considerarlas como engendradas por un punto material en movimiento.
Una *línea recta*, como la siguiente ⟶

Se considera generada por un punto que se mueve siempre en la misma dirección, donde estas son las líneas que consideraba Euclides; esencialmente rectas.

- **Plano** Una pared, un piso, una hoja de papel, nos sugiere la idea de lo que en geometría llamamos plano.

Un plano (superficie) posee dos dimensiones largo y ancho y carece de grosor.
La *geometría plana* es la parte de la geometría que estudia las figuras planas, es decir, las que están contenidas en un plano. A menos que se diga lo contrario, en esta tesis por *figura* deberá entenderse que ésta es plana.

Distancia entre puntos de una recta.

En una línea recta para efectos de medida se toma una distancia arbitraria como la unidad y a partir de ésta se puede determinar cualquier distancia entre dos puntos de dicha recta.
Una vez que se determinó la distancia unidad eligiendo un punto fijo que representa al cero (origen), podemos establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos de una recta y los números reales de manera que:

1) A cada punto de la recta le corresponda exactamente un número real.
2) A cada número real le corresponda un punto de la recta.
3) la distancia entre dos puntos cualesquiera es un único valor positivo dado por el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes; admitimos la posibilidad de que P y Q sean el mismo punto. En este caso, la distancia entre P y Q es cero. De hecho es el único caso en que la distancia entre dos puntos vale cero, es decir cuando son el mismo punto.
4) La distancia se determina simplemente con relación a un par de puntos y no depende del orden en que se consideren los puntos. En consecuencia, siempre tendremos que la distancia de P a Q es igual a la de Q a P.

CAPÍTULO II

Ángulos

La idea de ángulo es proporcionada con frecuencia en la vida diaria. Por ejemplo al dejar entreabierta una puerta para que entre cierta cantidad de luz, o al observar la inclinación de un techo para que resbale el agua por él, al girar un picaporte de una puerta, al levantar o bajar la vista para mirar ciertos objetos, en la construcción de objetos decorativos, o herramientas de trabajo, etcétera.
Debido a esta importancia, en este capítulo se abordaran con más precisión todo lo relacionado a ángulos.

2.1 Definiciones

Definición. Se le llama ángulo a la abertura que forman en un plano dos semirrectas unidas en un punto llamado vértice, cuando una de ellas gira alrededor del vértice (figura 2.1).

Figura 2.1

Definición. A un ángulo en el que se toma en cuenta el sentido del giro se le llama ángulo dirigido.
En todo ángulo dirigido se toma un lado inicial y un lado final. Se dice que un ángulo dirigido es positivo si el desplazamiento del lado inicial al lado final se realiza en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.
Se dice que un ángulo dirigido es negativo si el desplazamiento del lado inicial al lado final se realiza el mismo sentido al giro de las manecillas del reloj ver (figura 2.2).

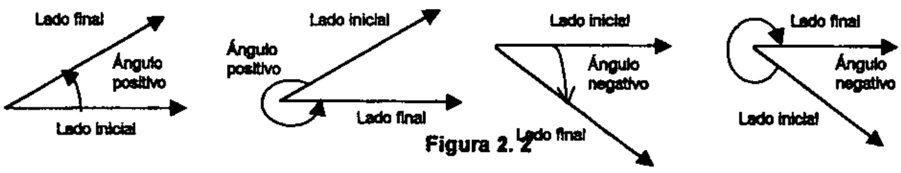


Figura 2.2

2.2 Medidas angulares

Para medir un ángulo dado se compara con otro tomado como unidad. Se tienen dos sistemas fundamentales para la medición de ángulos que son: el sexagesimal y el cíclico.

Sistema sexagésimal En este sistema la unidad fundamental se llama grado. Si una circunferencia se divide en 360 partes iguales, un ángulo de un grado es el formado por dos semirrectas que tienen su vértice en el centro de la circunferencia y que pasan por dos divisiones consecutivas. En este procedimiento no importa el radio de la circunferencia.

Se usa el símbolo (^{0}) para denotar grados, (figura 2.3).
Cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos de arco ('), y cada minuto también subdividido en 60 partes iguales llamadas segundos de arco (").
Por consiguiente un grado es igual a 3600 segundos de arco.

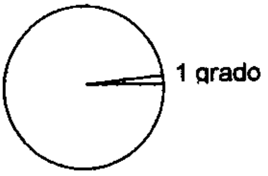


Figura 2.3

Sistema cíclico En el sistema cíclico se tiene una medida circular o unidad cíclica que es la longitud de un arco con medida igual a la de su radio, llamada **radián** (en la figura 2.4). La medida del ángulo formado por las dos semirrectas que pasan por A y B y tienen vértice en **O,** es de un radián.

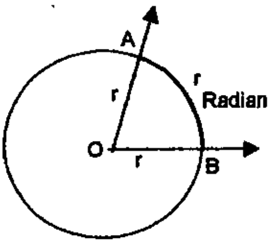


Figura 2.4

El número de veces que cabe un radio en media circunferencia es el número conocido como Pi (denotado por la letra minúscula griega π) y cuyo valor es aproximadamente 3.1415. Esto quiere decir que en media circunferencia caben tres radios enteros y no la alcanza a cubrir toda, en el resto sólo cabe una décima parte y no la cubre toda, en el resto sólo caben cuatro centésimas y no la cubre toda, en el resto sólo cabe una milésima parte y no la cubre toda....(ver nota histórica sobre el número Pi). El número de veces que cabe un radio en una circunferencia es 2π.

Nota histórica sobre el número Pi (π).
A la razón entre un radio y media circunferencia se le llama Pi (π); desde la antigüedad se sabe que el número Pi tiene el mismo valor para todas las circunferencias. El primer esfuerzo sistemático para encontrar una aproximación numérica fue hecha por Arquímedes (240 A.C.) quien probó la siguiente relación $\frac{22}{7} > \pi > \frac{223}{71}$, que surge encontrando los perímetros de polígonos regulares inscritos en una circunferencia.

Cerca del 480 d.C el físico chino Tsu Ch'ung-chih obtuvo la aproximación $\pi \approx \frac{355}{113} = 3.141592...$; la cuál es correcta para seis decimales. Esa fue la aproximación mas cercana de π hasta que el matemático escocés Adrianus Romanus (1593), quien usó polígonos con más de mil millones de lados, calculó el número Pi con quince decimales correctos.
En el siglo XVII los matemáticos empezaron a usar series infinitas e identidades trigonométricas el la búsqueda de Pi. El inglés William Shanks Spent pasó quince años (1858-1873) usando este método para calcular el número Pi con 707 decimales; pero en 1946 se encontró que estos métodos fueron utilizados erróneamente a partir del decimal 528.

En la actualidad el uso de computadoras ha hecho posible determinar rutinariamente miles de millones de decimales correctos para el número Pi (π). En 1991 David y Gregory Chudnovsky usaron una rutina de programa para encontrar los primeros 2160 millones de dígitos de Pi (π). El record actual lo tienen Jonathan y Peter Borwein de la universidad Simón Fraser y Yasumasa Kanada de la universidad de Tokio, quienes en 1995 calcularon el valor de Pi con 4 294 967 286 decimales.

Observación sobre ángulos

Es importante observar que la medida de un ángulo no dirigido siempre está entre 0^0 y 180^0 (ó 0 y π radianes), y también que un ángulo dirigido positivo puede medir más de 360^0 (ó 2π radianes).

En general en esta tesis se utilizaran ángulos no dirigidos a menos que se mencione explícitamente.

Relación entre radianes y grados

Sistema sexagesimal Sistema cíclico

360^0 = un giro completo a la circunferencia = 2π radianes

Entonces $360^0 = 2\pi$ radianes, de donde $180^0 = \pi$ radianes

$$1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \quad \text{y} \quad \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 = 1 \text{ radian}$$

Considerando la figura 2.5 siguiente se tiene:

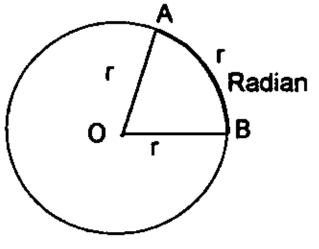


Figura 2.5

$$\frac{\text{Longitud del arco AB}}{\text{Longuitud de la circunferencia}} = \frac{\angle \text{AOB (en grados)}}{360^0}.$$

$$\text{por tanto } \frac{r}{2\pi r} = \frac{\angle AOB}{360^0}$$

$$\therefore \angle \text{ AOB (en grados)} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

pero, $\angle AOB = 1$ radian, por tanto,

$$1 \text{ radian} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 \text{ grados}$$

es decir, π radianes = 180^0; y entonces

$$1^0 = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ radianes.}$$

Esto significa que para convertir un ángulo dado en radianes a su equivalente en grados, se debe multiplicar el número de radianes por $\left(\frac{180}{\pi}\right)$; para convertir un ángulo dado en grados, a su equivalente en radianes, se debe multiplicar el número de grados por $\left(\frac{180}{\pi}\right)$.

Ejemplo. Expresar 108^0 en radianes.

Solución. $108^{\circ}=(108)\left(\frac{\pi}{180}\right)=\frac{3}{5}\pi$ radianes

Ejemplo. Expresar $\frac{3\pi}{8}$ radianes en grados

Solución. $\frac{3\pi}{8}$ radianes $=\left[\left(\frac{3\pi}{8}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right)\right]^{0}=\left(\frac{135}{2}\right)^{0}=67^{0}30'$

2.3 Tipos de ángulos

Si *A* y *B* son dos puntos, la semirrecta (ó rayo) que parte de *A* y pasa por *B* la denotamos por $\overrightarrow{AB}$.

El ángulo (no dirigido) formado por las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ lo identificaremos como $\angle BAC$.

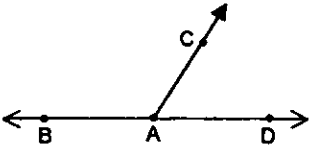


Figura 2.6

Para denotar ángulos, también se usaran letras mayúsculas, letras griegas e incluso en algunas ocasiones con números arábigos, (figura 2.6).

Definición Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180^0, entonces decimos que los ángulos son <u>suplementarios</u> (o que forman un par lineal), y que cada uno es el suplemento del otro figura 2.7.

$\alpha+\beta=180$

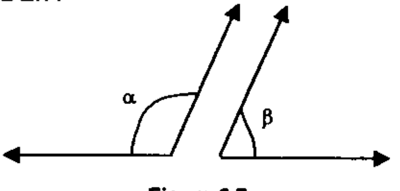


Figura 2.7

2.4 ÁNGULOS RECTOS Y ÁNGULOS IGUALES

Definición. Un ángulo recto es un ángulo cuya medida es 90^0 figura 2.8

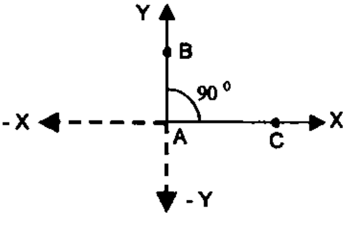


Figura 2.8

Proposición. Sí, dos ángulos suplementarios tienen la misma medida, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.
De la figura 2.9 se deduce que $\alpha+\beta=180^0$ y si $\alpha=\beta$ entonces se tine que $\alpha+\alpha=180^0$ entonces $2\alpha=180^0$ y $\alpha=\left(\dfrac{180^0}{2}\right)$ de donde $\alpha=90^0$

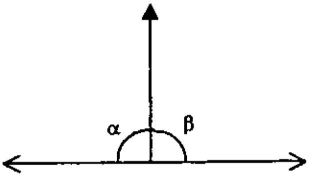


Figura 2.9

Definición Si dos semirrectas ℓ_1 y ℓ_2 se cortan en un punto y forman un ángulo recto, se dice que las semirrectas son perpendiculares y se denota por $\ell_1 \perp \ell_2$ (ó $\ell_2 \perp \ell_1$).

Definición Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90^0, entonces los ángulos se llaman complementarios y cada uno de ellos se llama el complemento del otro.
Un ángulo con medida menor que 90^0 se llama agudo.
Un ángulo con medida mayor que 90^0 se llama obtuso (figura 2.10).

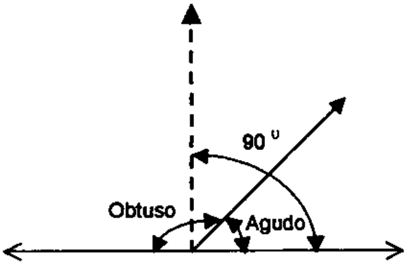


Figura 2.10

Teorema 1 Si dos ángulos α_1 y α_2 son complementarios diferentes de cero entonces ambos son agudos.
Demostración Se presenta la demostración de este teorema en un estilo tal que pueda utilizarse como patrón para escribir otras demostraciones.

Sean α_1 y α_2 ángulos como se muestra en la figura, 2.11

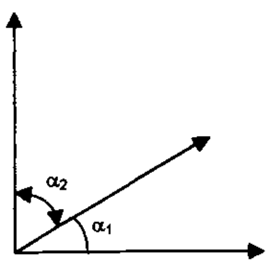


Figura 2.11

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\alpha_1+\alpha_2=90^0$	α_1 y α_2 son complementarias
2. $0<\alpha_1=90^0-\alpha_2$	de la afirmación 1
3. $0<\alpha_2=90^0-\alpha_1$	de la afirmación 1
4. $\alpha_1<90^0$	de la afirmación 2
5. $\alpha_2<90^0$	de la afirmación 3

$\therefore$ α_1 y α_2 son ángulos agudos.

Teorema 2 Los suplementos de ángulos iguales son iguales figura 2.12

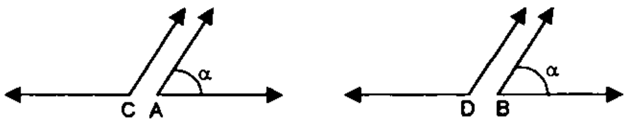


Figura 2.12

De otro modo:
Sí (1) $\angle A = \angle B$ (2) $\angle A$ y $\angle C$ son suplementarios, y (3) $\angle B$ y $\angle D$ son suplementarios, entonces (4) $\angle C = \angle D$

Demostración.

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\angle A + \angle C = 180^0$	por ser suplementarios
2. $\angle B + \angle D = 180^0$	por ser suplementarios
3. $\angle A = \angle B$	por hipótesis
4. por tanto $\angle C = \angle D$	afirmación 1, 2 y 3

Teorema 3 Los complementos de ángulos iguales son iguales como se muestra en la figura 2.13.

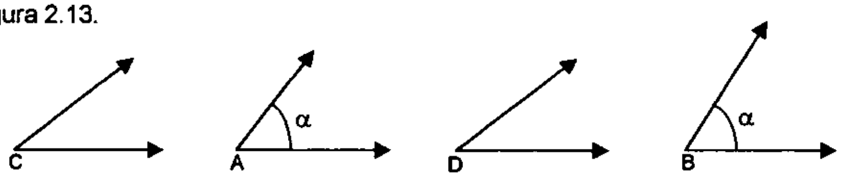


Figura 2.13

Demostración.

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\angle A + \angle C = 90^0$	por ser complementarios
2. $\angle A = \angle B$	por hipótesis
3. $\angle B + \angle D = 90^0$	por ser suplementarios
4. por lo tanto $\angle C = \angle D$	Afirmaciones 1, 2 y 3

Definición Cuando dos rectas se intersecan, forman cuatro ángulos. En la figura 2.14 el $\angle 1$ y $\angle 3$ se llaman ángulos opuestos por el vértice (también el $\angle 2$ y $\angle 4$ serían ángulos opuestos por el vértice.)

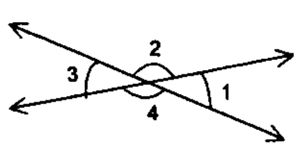


Figura 2.14

Es decir, dos ángulos son opuestos por el vértice, si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.

Teorema 4 *Teorema de los ángulos opuestos por el vértice*
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales ver figura 2.15.
Demostración Se sabe que $\angle 1$ y $\angle 2$ son opuestos por el vértice; esto es,

1) $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE}$ son rayos opuestos, al igual que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$. Por tanto,
2) $\angle 1$ y $\angle 3$ forman un par lineal, al igual que $\angle 2$ y $\angle 3$.
3) $\angle 3 = \angle 3$
4) $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementos de ángulos iguales.
por el teorema 1 esto implica que
5) $\angle 1 = \angle 2$.

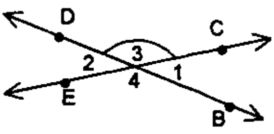


Figura 2.15

Teorema 5 Si dos rectas se cortan formando un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos (figura 2.16).
Demostración Dato $\angle 1$ es rectángulo.
P.D. que $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$ son ángulos rectos.
1) $\angle 3$ es un ángulo recto
2) $\angle 2$ y $\angle 1$ son suplementarios
3) $\angle 2 + 90^0 = 180^0$
4) $\angle 2$ es un ángulo recto, se sigue del Teorema 4.
5) $\angle 4$ es un ángulo recto

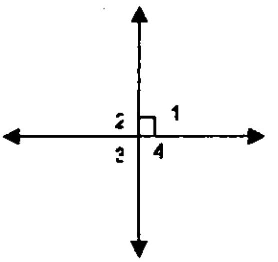


Figura 2.16

Bisectriz de un ángulo
Definición. Si *D* está en el interior del $\angle BAC$ y $\angle BAD = \angle DAC$, entonces decimos que $\overrightarrow{AD}$ biseca al $\angle BAC$, y $\overrightarrow{AD}$ se llama la bisectriz del $\angle BAC$ (figura 2.17).

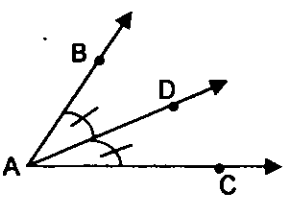


Figura 2.17

Bisección de un ángulo con regla y compás. Para encontrar la bisectriz de un ángulo se sigue el siguiente procedimiento (figura 2.18).
1) Dado un ángulo ABC

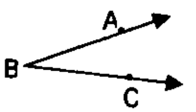


Figura 2.18

2) Con B como centro dibuje un arco que intersecte ambos lados del ángulo ABC, y llame F y G a los puntos de intersección del arco con los lados del ángulo (figura 2.19).

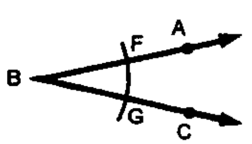


Figura 2.19

3) Con F como centro dibuje un arco en el interior del ángulo, de igual forma con centro en G y con la misma abertura del compás dibuje otro arco como el de centro en F, (figura 2.20 a y b).

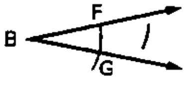


Figura 2.20 a

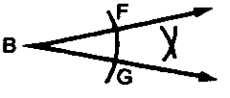


Figura 2.20 b

4) Al unir B con el punto de intersección de los arcos encontramos la bisectriz del ángulo ver figura 2.21.

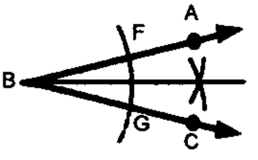


Figura 2.21

CAPÍTULO III.

RECTAS

Cuando hablamos de rectas, debemos recordar que Euclides en sus Elementos buscaba dar todos los términos más elementales, donde a partir de ellos descansara la construcción de toda la geometría. En éste trabajo no es el objetivo desarrollar esta teoría, sino exponer los hechos más comunes sobre las rectas, y consideramos que es importante mencionar los cinco postulados a partir de los cuales Euclides desarrolló toda la geometría.

3.1 Postulados

1ero. Siempre es posible trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera, o bien.

Por dos puntos siempre es posible determinar una recta.

2do. Siempre es posible por continuidad prolongar en línea recta una recta delimitada.

3ero. Para cada centro y radio, siempre es posible describir su círculo.

4to. Que todos los ángulos rectos son iguales entre si.

5to. Si una recta cae sobre dos rectas distintas y forma con ellas ángulos internos (ángulos α y β de la figura 3.1) del mismo lado cuya suma sea menor que dos rectos, al prolongarse indefinidamente, las dos rectas se cortarán del lado en que la suma de los ángulos sea menor que dos rectos (ver figura 3.1).

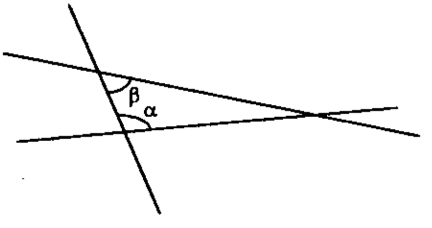


Figura 3.1

El quinto postulado, también conocido como el postulado de las paralelas, creó gran polémica al ser discutido su carácter de postulado pero los intentos hechos para convertirlo en un teorema llevaron al descubrimiento de principios geométricos que podían combinarse con los otros cuatro postulados para deducir las mismas proposiciones. Inclusive la discusión de dicho postulado también dio origen a otra geometría.

Otra reformulación del mismo postulado geométrico está escrito como:

Postulado 5'

Por un punto exterior a una recta puede trazarse sólo una recta paralela.

3.2 Rectas en un plano

Si dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 están en un plano; pueden tener alguna de las siguientes posiciones:

a) ℓ_1 y ℓ_2 cortan en un solo punto (figura 3.2).

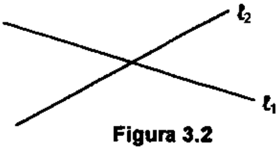


Figura 3.2

b) Todos los puntos de ℓ_1 son comunes a ℓ_2, es decir son la misma recta (figura 3.3).

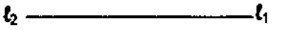


Figura 3.3

c) No se cortan ℓ_1 y ℓ_2 en ningún punto (figura 3.4).

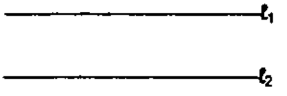


Figura 3.4

En este tercer caso se dice que las dos rectas son paralelas y se denota como $\ell_1 \parallel \ell_2$ (ℓ_1 paralela a ℓ_2).

3.2.1 Teorema Dos rectas en un plano son paralelas, si ambas son perpendiculares a una misma recta dada, (figura 3.5).

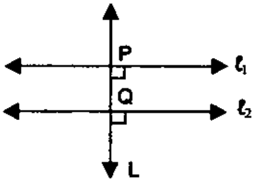


Figura 3.5

Demostración Se dan dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 tales que $\ell_1 \perp L$ en P y $\ell_2 \perp L$ en Q, figura 3.6. Se necesita demostrar que ℓ_1 y ℓ_2 no se intersecan.
Supóngase que ℓ_1 interseca a ℓ_2 en el punto R. Se forma el triángulo PRQ donde la suma de los ángulos es mayor a 180^0, lo cual no es posible porque contradice al teorema, que dice que la suma de ángulos interiores es igual a 180^0. Por tanto, $\ell_1 \parallel \ell_2$.

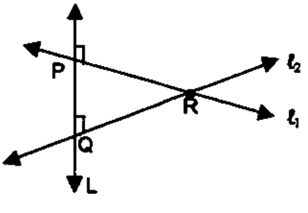


Figura 3.6

En la figura 3.7 a la izquierda; la recta T es una transversal a las rectas ℓ_1 y ℓ_2. En la de la figura de la derecha T no es transversal a las rectas ℓ_1 y ℓ_2

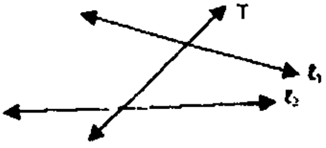
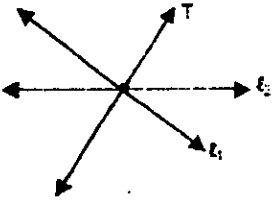


Figura 3.7



3.3.2 Definiciones Dos rectas cortadas por una transversal forman ángulos importantes. (para el estudio entre rectas)
Entre dos líneas rectas y una transversal se forman los siguientes ángulos.

1. Ángulos interiores: son los que se encuentran dentro de las dos líneas, ángulos α, β, γ y δ ver figura 3.8

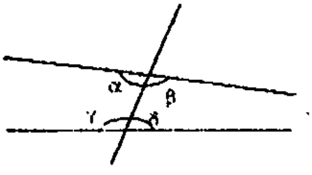


Figura 3.8

2. Ángulos externos: son los que se encuentran dentro de las dos lineas rectas, ángulos α, β, γ y δ, (figura 3.9).

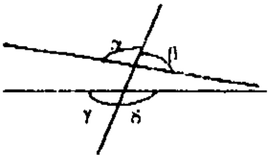


Figura 3.9

3. Ángulos correspondientes: Están en el mismo lado de la transversal, uno de los ángulo es un ángulo exterior y el otro un ángulo interior, (figura 3.10).

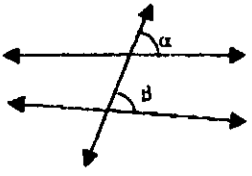
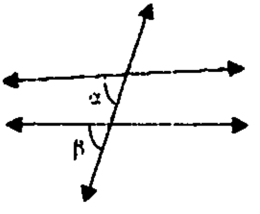


Figura 3.10



4. **Ángulos colaterales-externos:** son dos ángulos que están del mismo lado de la transversal, y donde los dos ángulos son exteriores, ver figura 3.11.

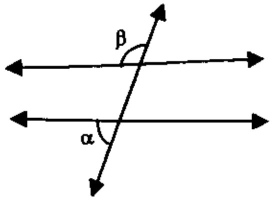
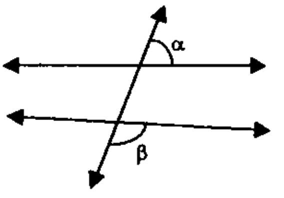
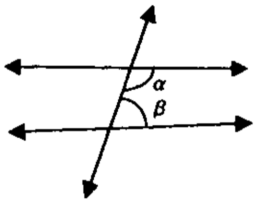


Figura 3.11



5. **Ángulos colaterales-internos:** son ángulos que están del mismo lado de la transversal, y donde los dos ángulos son interiores, (figura 3.12).



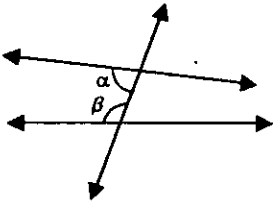


Figura 3.12

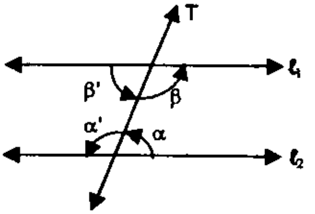
Todos éstos tipos de ángulos cumplen ciertas propiedades cuando las rectas que comparten la transversal son paralelas. El siguiente teorema es un ejemplo de esto.

3.3.3 Teorema Si dos rectas son paralelas y cortadas por una transversal entonces los ángulos colaterales internos son suplementarios por lo tanto suman 180^0.

Demostración. Sean ℓ_1 y ℓ_2 rectas paralelas, α y β ángulos colaterales internos, por demostrar que $\alpha+\beta=180^0$, ver figura 3.13. Si $\alpha+\beta\neq 180^0$, existen dos casos:

Primer caso. $\alpha+\beta<180^0$. Este caso no se puede dar por que contradice el postulado de las paralelas ya que ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas.

Segundo caso. $\alpha+\beta>180^0$. Como $\alpha+\beta>180^0$, entonces $\alpha+\alpha'=180^0$ por que $\alpha+\alpha'=180^0$ y $\beta+\beta'=180^0$, y $\beta+\beta'=180^0$, entonces $\alpha+\beta+\alpha'+\beta'=360^0$. Como se esta suponiendo que $\alpha+\beta>180^0$ entonces se debe tener que $\alpha'+\beta'<180^0$. Pero por el postulado de las paralelas entonces ℓ_1 y ℓ_2 se intersectan, lo cual no es posible ya que por hipótesis ℓ_1 es paralela a ℓ_2.



Por lo tanto $\alpha+\beta=180^0$. **Figura 3.13**

3.3.4 Corolario. Si ℓ_1 paralela a ℓ_2 y T transversal a estas, entonces se cumple las siguientes propiedades, (figura 3.14):

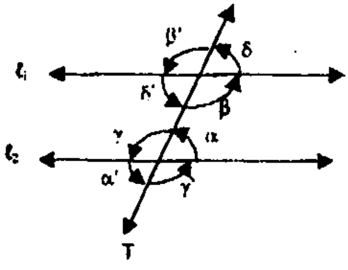


Figura 3.14

1. Ángulos alternos-internos son iguales
   $\alpha = \delta'$ y $\beta = \gamma$
2. Ángulos alternos-externos son iguales
   $\gamma' = \beta'$ y $\alpha' = \delta$
3. Ángulos correspondientes son iguales
   $\alpha = \delta$, $\alpha' = \delta'$. $\beta = \gamma'$ y $\beta' = \gamma$

Ángulos colaterales-externos son suplementarios
$\alpha' + \beta' = 180^0$ y $\gamma' + \delta = 180^0$.

Y recíprocamente si se tiene ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas cortadas por una transversal, y cualquier par de estos ángulos son iguales (alternos-internos, alternos-externos o correspondientes) entonces las rectas son paralelas (ver figura 3.15).

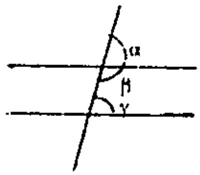


Figura 3.15

En efeto, supongamos que los ángulos correspondientes $\angle\alpha$ y $\angle\gamma$ son iguales. Entonces se tiene que, como $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son suplementarios, debemos tener que

$$\gamma + \beta = \alpha + \beta = 180^0$$

de modo que, por el quinto postulado de Euclides, ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas.

CAPÍTULO IV

TRIÁNGULOS

4.1 DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

El tema de los triángulos, por ser la primera figura cerrada construida por líneas, rectas es uno de los más extensos debido a que tiene múltiples aplicaciones.
Algunas de las aplicaciones se dan en la construcción de puentes metálicos, de aviones, de armaduras de tejados y de edificios, etcétera, que se construyen con piezas ensambladas de tal modo que formen una combinación de triángulos.
Diversos problemas de la vida diaria pueden ser representados mediante un triángulo y así obtener una solución. Estos problemas pueden ser desde muy sencillos hasta llegar a mayor complejidad y algunos de éstos son: calcular distancias, alturas, rutas optimas, diseños gráficos, y muchos más.

Como ya mencionamos antes el triángulo es la primer figura cerrada formada por líneas rectas. En general toda figura formada por un número finito de rectas, se llama polígono. Más específicamente.

Definición. Un polígono plano esta determinado por los vértices $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$, (todos diferentes) de tal manera que $\overline{v_1v_2}$, $\overline{v_2v_3}$, ..., son los lados del polígono, y así sucesivamente hasta obtener $\overline{v_nv_1}$ como lado final y dos lados pueden intersecarse sólo en el vértice.
A este polígono lo denotamos por $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

4.1.1 Triángulo.- Llámese triángulo un polígono determinado por tres vértices y tres lados, figuras 4.1 a 4.3.

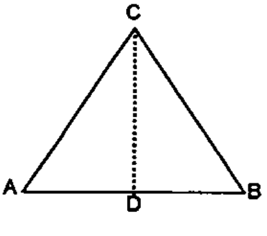


Figura 4.1

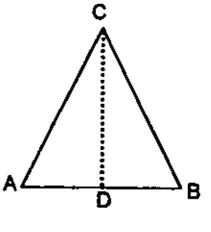


Figura 4.2

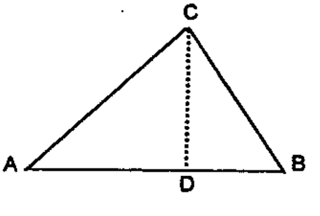


Figura 4.3

Se designan generalmente a los vértices de un triángulo por letras mayúsculas, *A, B, C,* por ejemplo, y los lados opuestos a estos vértices, por las mismas letras minúsculas, *a, b, c.*

Con frecuencia se sustituye la palabra triángulo por el símbolo Δ.

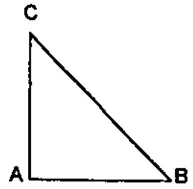


Figura 4.4

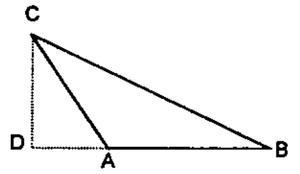


Figura 4.5

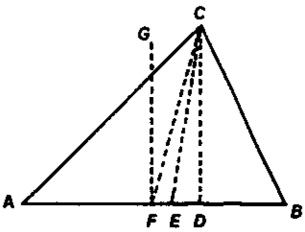


Figura 4.6

4.1.2 Base es cualquiera de los lados de un triángulo; y **altura** es la perpendicular al lado tomado como base o a su prolongación, trazada desde el vértice opuesto; por ejemplo las bases *AB* y las alturas *CD* (figuras 4.1 a 4.6).

4.1.3 Mediana es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto; ejemplo, la mediana *CF* (figura 4.6).

4.1.4 Mediatriz es la perpendicular trazada en el punto medio de un lado, al vértice opuesto, ejemplo. la mediatriz *FG* (figura 4.6).

4.1.5 Bisectriz es recta que corta en dos partes iguales a cualquiera de los ángulos del triángulo; ejemplo la bisectriz *CE* (figura 4.6).

Todo triángulo tiene tres alturas, tres medianas, tres mediatrices y tres bisectrices.
Las alturas, medianas y mediatrices se refieren a los lados, mientras que las bisectrices corresponden a los ángulos.

Clases de triángulos.

- Con relación a los lados, los triángulos se clasifican en:

4.1.6 Triángulo equilátero es el que tiene los tres lados iguales (figura 4.1)

4.1.7 Triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales (figura 4.2)

4.1.8 Triángulo escaleno es el que tiene los tres lados desiguales (figura 4.3)

- Con relación a los ángulos, los triángulos se clasifican en:

4.1.8 Triángulo acutángulo es el que tiene los tres ángulos agudos (figuras 4.1 a 4.3).

4.1.9 Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto (figura 4.4).

4.1.10 Triángulo obtusángulo es el que tiene un ángulo obtuso (figura 4.5).
Los triángulos acutángulos y obtusángulos se llaman también triángulos oblicuángulos.
En todo triángulo rectángulo al lado opuesto al ángulo recto se le llama *hipotenusa*, y a los otros dos *catetos*, por ejemplo la hipotenusa *BC* y los catetos *AB* y *AC* (figura 4.4).

4.2 DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS EN UN TRIANGULO.

4.2.1 EL TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERNO

En las figuras 4.7 siguientes, el $\angle 1$ se llama ángulo externo del ΔABC.

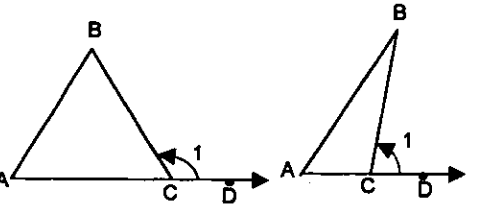


Figura 4.7

4.2.2 Definición Si *C* está entre *A* y *D*, entonces el $\angle BCD$ es un ángulo externo del ΔABC, (figura 4.8).

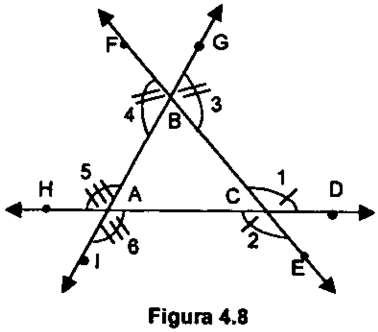


Figura 4.8

Todo triángulo tiene seis ángulos externos, como se muestra en la figura siguiente.

Estos ángulos forman tres pares de ángulos opuestos por el vértice y los ángulos de cada par son congruentes.

Todo ángulo externo de un triángulo forma un par lineal con uno de los ángulos internos del mismo triángulo.

4.2.3 Definición El $\angle A$ y el $\angle B$ del ΔABC se llaman ángulos internos no contiguos de los ángulos externos $\angle BCD$ y $\angle ACE$.
Análogamente el $\angle A$ y el $\angle C$ son los ángulos internos no contiguos de los ángulos externos $\angle ABF$ y $\angle CBG$.

4.2.4 Teorema de Triángulos Para todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos es 180°.

Demostración Se da el ΔABC.
Sea L la recta que pasa por *B*, paralela al segmento *AC*.
Sean los ángulos $\angle x$, $\angle x'$, $\angle y$, $\angle y'$ y $\angle z$ como se indica en la figura 4.9.

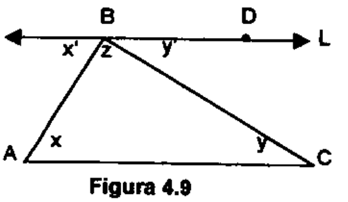


Figura 4.9

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\angle x = \angle x'$	Son ángulos alternos internos.
2. $\angle y = \angle y'$	Son ángulos alternos internos.
3. $\angle ABD = \angle z + \angle y'$	Suma de ángulos
4. $\angle x' + \angle ABD = 180°$	Ángulos suplementarios
5. $\angle x' + \angle z + \angle y' = 180°$	Afirmaciones 3 y 4
6. $\angle x + \angle z + \angle y = 180°$	Afirmaciones 1, 2 y 5

4.2.5 Corolario del teorema 4.24. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

4.2.6 Teorema. El teorema del ángulo externo
Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de los ángulos internos no contiguos, (figura 4.10) en otras palabras: se da el ΔABC. Sí C está entre A y D, entonces $\angle BCD > \angle B$ y $\angle BCD > \angle A$.

Demostración Sabemos que se cumple que $\angle C + \angle 1 = 180^0$ por ser suplementarios.

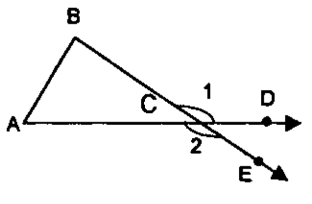


Figura 4.10

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ por ser ángulos interiores del triángulo, igualando estas dos ecuaciones se obtiene $\angle A + \angle B + \angle C = \angle C + \angle 1$ de donde se cancela $\angle C$ y sólo queda $\angle A + \angle B = \angle 1$ y se sabe que el $\angle A$ y $\angle B$ son diferentes de cero por lo tanto el $\angle B < \angle 1$ y también $\angle A < \angle 1$.

4.3 IGUALDAD ENTRE TRIÁNGULOS

Este apartado esta enfocado a conocer y manejar el concepto de igualdad entre figuras. Solo nos enfocamos al concepto de igualdad entre triángulos aunque también es posible hacerlo con polígonos en general.

4.3.1 El concepto de igualdad entre triángulos. Dos triángulos son iguales o congruentes si se puede establecer una asociación entre sus vértices de tal forma que los lados y ángulos correspondientes son iguales (figura 4.11).

Ejemplo

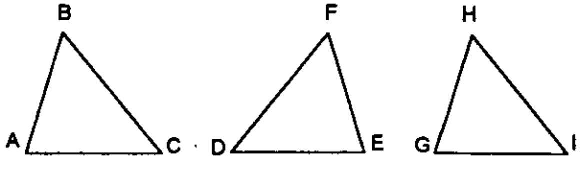


Figura 4.11

El ΔABC sobre el ΔDFE, se debe colocar A sobre E, B, sobre F y C sobre D.

Esto se denota:

$$A \leftrightarrow E$$
$$B \leftrightarrow F$$
$$C \leftrightarrow D$$

y la igualdad del primer triángulo con el tercero así:

$$A \leftrightarrow G$$
$$B \leftrightarrow H$$
$$C \leftrightarrow I$$

también se pudo haber escrito la asociación en una sola línea, así:

$$ABC \leftrightarrow EFD \quad \text{y} \quad ABC \leftrightarrow GHI$$

Cuando se escribe $\Delta ABC = \Delta DEF$, se quiere decir que la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una igualdad.

Entonces el $\Delta ABC = \Delta DEF$ indica a la vez seis cosas a saber.

$$AB = DE \qquad \angle A = \angle D$$
$$AC = DF \qquad \angle B = \angle E$$
$$BC = EF \qquad \angle C = \angle F$$

A veces conviene indicar igualdad entre segmentos y entre ángulos de un par de figuras marcando con el mismo número de pequeñas líneas los segmentos y ángulos que sean iguales (ver figura 4.12).

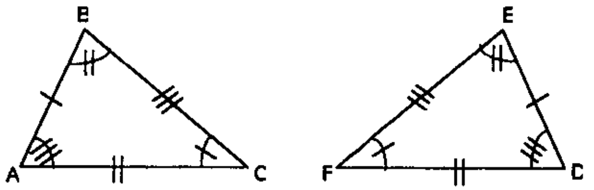


Figura 4.12

Entonces se deduce que:
$\Delta ABC = \Delta DEF$.
En la figura 4.13 se tiene:

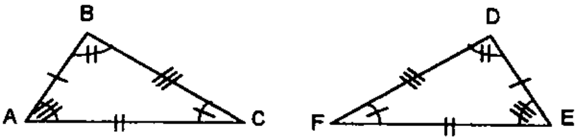


Figura 4.13

En la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$, solo da la igualdad entre los lados *AB* y *DE* y entre los ángulos $\angle C$ y $\angle F$. Por tanto el ΔABC no es igual al ΔDEF (los triángulos ΔABC y ΔEDF si son iguales).

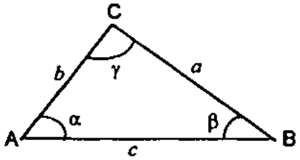


Figura 4.

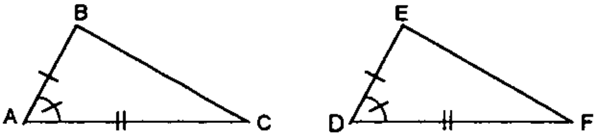
Definición. En la figura 4.14 decimos que el lado a es el opuesto al ángulo α, el lado b el opuesto al ángulo β y el lado c es el opuesto al ángulo γ.

PROPIEDADES DE IGUALDAD ENTRE TRIÁNGULOS.

Hay casos en los que ciertas condiciones sobre dos triángulos nos garantizan su igualdad.

Para garantizar la igualdad entre triángulos se darán las siguientes propiedades en las que no se dará una demostración por escrito.

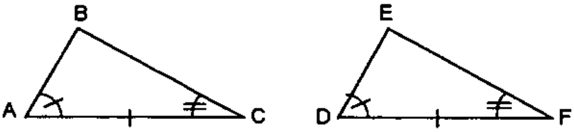
Primer caso. Decimos que una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una correspondencia *LAL*. (que significa "lado-ángulo-lado") si dos lados del triángulo *ABC*, y el ángulo comprendido por ellos, son iguales a los lados y el ángulo correspondientes del triángulo *DEF* (figura 4.15). En este caso se tiene que $\Delta ABC = \Delta DEF$.



LAL

Figura 4.15

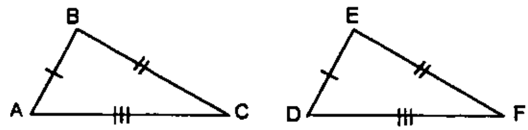
Segundo caso. Decimos que una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una correspondencia *ALA*, (que significa "ángulo-lado-ángulo") si dos ángulos y el lado comprendido del primer triángulo son iguales con las partes correspondientes del triángulo *DEF* (figura 4.16). En este caso, también, se tiene que $\Delta ABC = \Delta DEF$.



ALA

Figura 4.16

Tercer caso. Decimos que una correspondencia *ABC* $\leftrightarrow$ *DEF* es una correspondencia *LLL*; (que significa "Lado-lado-lado") si los tres lados del primer triángulo son iguales con los lados correspondientes del triángulo *DEF* (figura 4.17). En este caso, también, se tiene que $\Delta ABC = \Delta DEF$.



LLL

Figura 4.17

En dos triángulos donde se tienen dos lados iguales y un ángulo igual (diferente al formado por los dos lados iguales) no se cumple que los dos triángulos sean iguales como se ilustra en la (figura 4.18).

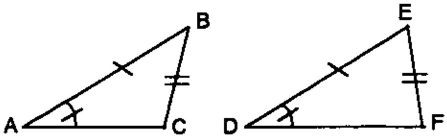


Figura 4.18

Ejemplo. En el siguiente ejemplo se ilustra como se usan las propiedades de igualdad para demostrar que:
Si dos segmentos se bisecan, entonces los segmentos que unen los extremos de los segmentos son iguales, ver figura 4.19.

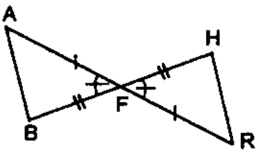


Figura 4.19

Dato: $\overline{AR}$ y $\overline{BH}$ se bisecan en F; Demostrar: $\overline{AB}=\overline{RH}$

Demostración

AFIRMACIONES	RAZONES
1) $\overline{AR}$ y $\overline{BH}$ se bisecan	Dato
2) $\overline{AF}=\overline{FR}$	Definición de "bisecar"
3) $\overline{BF}=\overline{FH}$	Definición de "bisecar"
4) $\angle AFB=\angle HFR$	Los ángulos opuestos por el vértice son iguales
5) $\Delta AFB=\Delta RFH$	Propiedad *LAL*
6) $\overline{AB}=\overline{RH}$	Definición de igualdad de triángulos

4.3.2 **Teorema.** Si un triángulo es isósceles entonces los ángulos de su base son iguales, (figura 4.20).

Demostración. Sea el ΔABC isósceles y se sabe que $a=b$, donde a y b son longitudes de los lados, por demostrar que $\angle A=\angle B$.

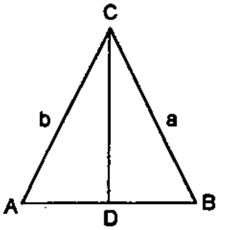


Figura 4.20

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $a=b$	Por hipótesis
2. Trácese la bisectriz del $\angle C$ y sea D el punto de intersección con $\overline{AB}$	Por construcción
3. El $\Delta ACD=\Delta BCD$	Propiedad *LAL*
4. Por lo tanto $\angle A=\angle B$	Por se ángulos correspondientes de triángulos iguales.

4.3.3 **Teorema**. Si dos ángulos de un triángulo son iguales, entonces los lados opuestos a estos ángulos son iguales, es decir, es un triángulo isósceles, (figura 4.21).

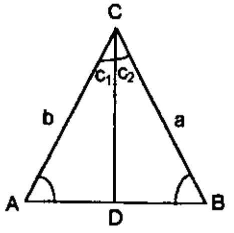


Figura 4.21

AFIRMACIONES	RAZONES
1. El $\angle A = \angle B$	Por hipótesis
2. Dibújese la perpendicular de *C* al segmento, y sea *D* el punto de intersección.	Por construcción
3. En el triángulo *ACD* $\angle A + \angle ADC + \angle c_1 = 180^0$	Por el teorema de la suma de ángulos interiores
4. En el triángulo *DCB*, $\angle BDC + \angle B + \angle c_2 = 180^0$	Por el teorema de la suma de ángulos interiores
5. $\angle ADC = \angle BDC$	Por ser rectos.
6. Por lo tanto el $\angle c_1 = \angle c_2$	De 1, 3, 4, y 5.
7. El $\Delta ACD = \Delta DCB$	Propiedad *ALA*
8. Por tanto a $= b$	Por ser lados correspondientes de triángulos iguales

4.3.4 Corolario. En un triángulo isósceles la altura, la mediana y la mediatriz, coinciden cada una de ellas con respecto al lado diferente.

4.4 SEMEJANZA

Este tema tiene una importancia fundamental porque es el primer caso dentro de la geometría plana en donde a través de dos figuras (triángulos) es posible calcular el valor de alguno de sus lados a partir de una relación directa entre los mismos. Con está herramienta es posible resolver una gran cantidad de problemas prácticos, aquellos donde la geometría del problema lleve a establecer triángulos; es por esto que se hace a continuación un estudio del concepto de semejanza.

Segmentos proporcionales. Dos segmentos son proporcionales a otros dos cuando las razones de sus medidas son iguales.

Sean dos segmentos *a* y *b*, (ver figura 4.22), que miden respectivamente 2 cm y 3 cm, y otras dos *c* y *d*, que miden 6 cm y 9 cm.

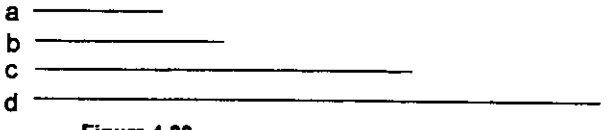


Figura 4.22

La razón de las medidas entre los segmentos *a* y *b* es $\frac{2}{3}$ y la de *c* y *d* $\frac{6}{9}$

Luego, las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales a $\frac{2}{3}$. Por tanto, son iguales entre sí y se tiene la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Propiedad fundamental de la proporcionalidad

Si dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 se intersectan en un punto C, y se tienen dos rectas paralelas ℓ_3 y ℓ_4, tales que ℓ_3 corta a ℓ_1 en A y a ℓ_2 en B y ℓ_4 corta a ℓ_1 en A' y a ℓ_2 en B', (figuras 4.23).

Entonces se tiene que: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C}}$

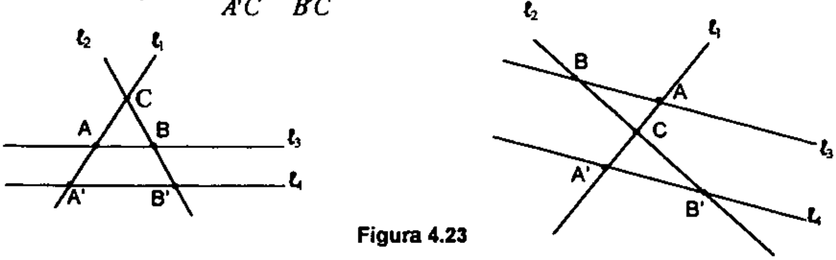


Figura 4.23

Definición

Triángulos semejantes: Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Se dice que son semejantes sí, los ángulos de vértices correspondientes son iguales.

A los ángulos de vértices correspondientes se les llaman ángulos homólogos.
La semejanza se indica por el símbolo "$\sim$".

Ejemplos.

En la figura 4.24 se cumple que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ es decir, que los triángulos son semejantes.

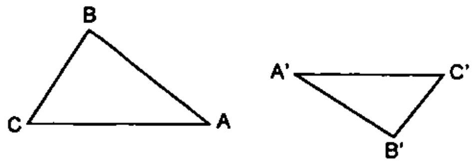


Figura 4.24

En los triángulos de la figura 4.25, el ΔABC no es semejante al $\Delta A'B'C'$, pero si lo es al $\Delta C'B'A'$.

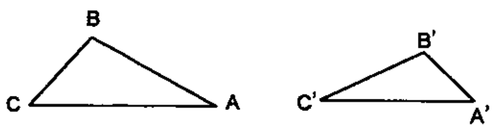


Figura 4.25

Teorema de proporcionalidad. Si A' es un punto en el lado AB y B' es un punto en el lado BC de un triángulo ΔABC, tales que

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{B'C}{BC}$$

entonces el segmento $A'B'$ es paralelo al lado AB. (ver figura 4.26)

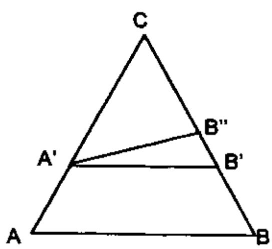


Figura 4.26

Demostración

AFIRMACIONES	RAZONES
Sea ℓ la recta paralela al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A' y sea B'' el punto de intersección con de ℓ $\overline{BC}$	Por construcción
2. $\frac{A'C}{AC}=\frac{B''C}{BC}$	Por la propiedad fundamental de la proporcionalidad
3. $\frac{A'C}{AC}=\frac{B'C}{BC}$	Por hipótesis
4. $\frac{B'C}{BC}=\frac{B''C}{BC}$	Por 2 y 3
5. $B'C=B''C$	De 4
6. $B'=B''$	De 5
7. $\overline{A'B''}=\overline{A'B'}$	Por 6
8. Por tanto $\overline{A'B'}$ paralela $\overline{AB}$	De 1 y 7

Teorema. Si *ABC* y *A'B'C'* son triángulos semejantes entonces los lados correspondientes son proporcionales.

Demostración. Hipótesis: $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$ y $\angle C=\angle C'$

Tesis: $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$

Basta mostrar que $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$; pues los casos faltantes se demuestran análogamente.

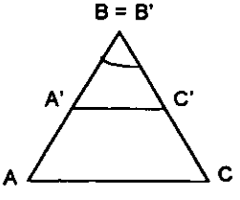


Figura 4.27

Sobreponemos los triángulo haciendo coincidir los vértice *B* y *B'*, como se muestra en la figura 4.27; como los triángulos son semejantes los ángulos $\angle A'=\angle A$ y $\angle C'=\angle C$, de aquí que $\overline{A'C'}$ es paralela a $\overline{AC}$. Por la propiedad fundamental de proporcionalidad se tiene que $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$

Teorema (proporcionalidad y semejanza)

Si dos pares de rectas son paralelas entre si entonces los segmentos *AB* y *A'B'* son iguales; *AB* = *A'B'* (figura 4.28).

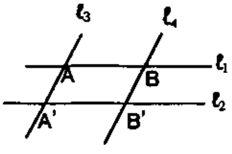


Figura 4.28

Demostración. Sean dos pares de rectas ℓ_1 y ℓ_2, y también ℓ_3 y ℓ_4 paralelas entre si.

Llámese *A* el punto de intersección de ℓ_1 y ℓ_3, sea *B* el punto de intersección de ℓ_1 y ℓ_4, y sea *A'* el punto de intersección de ℓ_2 y ℓ_3 y *B'* el punto de intersección de ℓ_2 y ℓ_4

Por demostrar que *AB* = *A'B'*.

Se demostrará que $AB<A'B'$ y $AB>A'B'$ no son casos posibles.

Primer caso. Supóngase que $AB < A'B'$. Tómese O un punto en ℓ_3 (como se muestra en la figura 4.29), de tal manera que se cumpla la siguiente proporción $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$. Sea B'' el punto de intersección de la línea OB' con ℓ_1. Por la propiedad fundamental de la proporcionalidad se tiene que $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB''}{A'B'}$, por la forma en que se tomó el punto O sabemos que $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$ de modo que ℓ_3

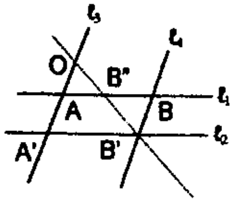


Figura 4.29

$\frac{AB''}{A'B'} = \frac{AB}{A'B'}$ y por lo tanto $AB'' = AB$. De aquí que $B'' = B$. Entonces la recta que pasa por B' y B(ℓ_4) también contiene a O que está en ℓ_3, es decir ℓ_4 y ℓ_3 se intersectan en O, lo cual no es posible porque ℓ_3 es paralela a ℓ_4.

Segundo caso: Supóngase que $AB > A'B'$. Tómese O un punto en ℓ_3 (como se muestra en la figura 4.30), De tal manera que se cumpla la siguiente proporción $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$. Sea B'' el punto de intersección de la línea OB con ℓ_2.

Por la propiedad fundamental de la proporcionalidad se tiene que $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B''}$,

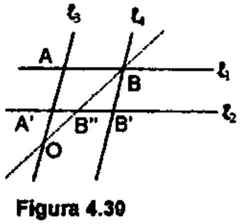


Figura 4.30

por la forma en que se tomó el punto O sabemos que $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$, de modo que $\frac{AB}{A'B''} = \frac{AB}{A'B'}$ y por lo tanto $A'B'' = A'B'$. De aquí que $B'' = B'$.

Entonces la recta que pasa por B'' y B' (ℓ_2) también contiene a O que está en ℓ_3, es decir que ℓ_3 y ℓ_4 se intersectan en O lo cual no es posible porque ℓ_4 es paralela a ℓ_3. Por lo tanto $AB = A'B'$.

Casos de semejanza de triángulos

Hay tres casos principales de semejanza de triángulos.

Primer caso.- Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales, (figura 4.31).

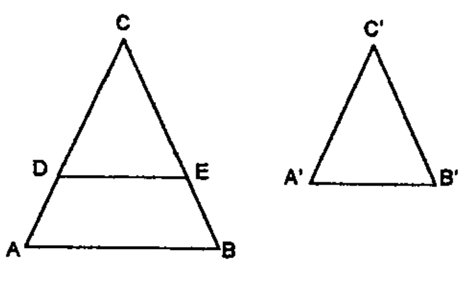


Figura 4.31

Hipótesis: $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$.

Tesis: Δ ABC ~ Δ A' B' C'.

Se sabe que $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ y $\angle A' + \angle B' + \angle C' = 180^0$ por ser ángulos interiores de triangulos, y como $\angle A = \angle A'$ y $\angle C = \angle C'$ se deduce que el $\angle B = \angle B'$

$\therefore$ ΔABC ~ ΔA'B'C'.

Observe que si en dos triángulos se tienen dos ángulos iguales y el lado adyacente a estos igual entonces sabemos que los triángulos son iguales. En la propiedad anterior tenemos que solo dos ángulos son iguales y no se sabe nada del lado adyacente por lo que únicamente se tiene que los triángulos son semejantes.

Corolarios.

1° Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen otro ángulo igual.

2°. Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen igual el ángulo en el vértice, opuesto al lado diferente.

3°. Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente paralelos.

Segundo caso.- Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales (figura 4.31, anterior).

Hipótesis: $\angle C = \angle C'$; $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Tómese en *CA* un segmento *CD* = *C'A'*, y trácese *DE* II *AB*.

Usando un argumento análogo al primer caso se puede concluir que el ΔDEC ~ al ΔABC. Luego, basta demostrar que el ΔDEC es igual al Δ *A'B'C'*.

$\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, por hipótesis

$\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{BC}{EC}$ por la propiedad fundamental de la proporcionalidad

Por ser $DC = A'C'$, los primeros miembros de estas dos identidades son iguales; luego, los segundos lo son también, de modo que

$$B'C' = EC.$$

Por tanto, los triángulos *A'B'C'* y *DEC* son iguales, por tener dos lados y el ángulo que forman respectivamente iguales.

$\therefore \Delta$ *ABC* ~ Δ *A'B'C'*.

Anteriormente se había dicho que si dos triángulos tienen lados iguales y el ángulo formado por ellos también igual, entonces los triángulos son iguales. Si ahora solo sabemos que los lados son proporcionales y el lado formado es igual tendremos únicamente semejanza entre triángulos.

Corolario.- Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen los catetos proporcionales.

Tercer caso.- Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres lados proporcionales.

Hipótesis: $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Tómese en CA un segmento $CD = C'A'$ y trácese $DE \parallel$ a AB.

Así se obtiene, usando el mismo argumento del primer caso, que el $\Delta DEC \sim$ al ΔABC.

Luego, basta demostrar que el ΔDEC es igual al $\Delta A'B'C'$. $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$, por hipótesis

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EC}=\frac{CA}{CD},$$ por la propiedad fundamental de la proporcionalidad

Como $CD = C'A'$ entonces $\dfrac{CA}{CD}=\dfrac{CA}{C'A'}$ de modo que

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=\frac{CA}{CD}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EC}$$

En particular $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AB}{DE}$ y $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{BC}{EC}$

por lo que $DE = A'B'$ y $EC = B'C'$.

Luego, los $\Delta A'B'C'$ y DEC son iguales, por tener los tres lados respectivamente iguales $\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Polígono semejante: Sean $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ y $v_1', v_2', v_3', \ldots, v_n'$ dos polígonos, decimos que son semejantes si, los ángulos entre vértices correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales, (figura 4.32).

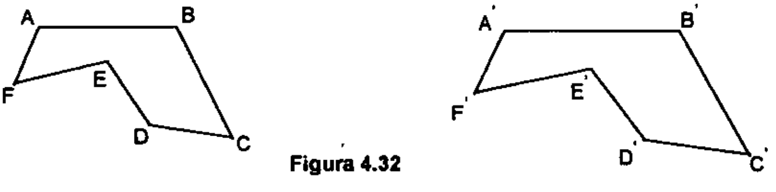


Figura 4.32

Observe que, en la figura 4.32 se recorre ambos polígonos en el mismo sentido se tiene que son semejantes, es decir, $ABCDEF \sim A'B'C'D'E'F'$; pero al realizar el recorrido en sentidos opuestos resulta $ABCDEF \quad A'F'E'D'C'B'$

Llámese razón de semejanza de dos polígonos semejantes la razón de dos lados homólogos cualesquiera.

La semejanza de polígonos suele indicarse por el símbolo "~", misma que ya se ha empleado para indicar semejanza entre triángulos.

4.5 TEOREMA DE PITÁGORAS (TRES DEMOSTRACIONES DIFERENTES)

Introducción

Aquí se exponen algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras.

Debido a la frecuencia con la que se emplea dicho teorema, por ejemplo para calcular distancias, lo hace un resultado matemático de importancia. Si bien la utilidad del teorema dentro de las matemáticas es conocida, pocas veces se presenta una demostración.

Aunque existen libros de matemáticas que presentan la demostración de dicho teorema, aquí se exponen tres diferentes demostraciones, dando a los lectores con distintos campos de conocimiento acerca de las matemáticas, diferentes demostraciones del mencionado teorema.

Acerca del teorema de Pitágoras se sabe que los egipcios ya utilizaban este resultado matemático.

Los egipcios usaban el hecho de que, si la medidas de los lados de un triángulo son de 3, 4 y 5 unidades de longitud, entonces los lados más cortos formaban un ángulo recto.

Es interesante saber que los egipcios aprovechaban los triángulos rectángulos, principalmente los de lados 3, 4 y 5 unidades, para determinar la dirección Este-Oeste y orientarse geográficamente.

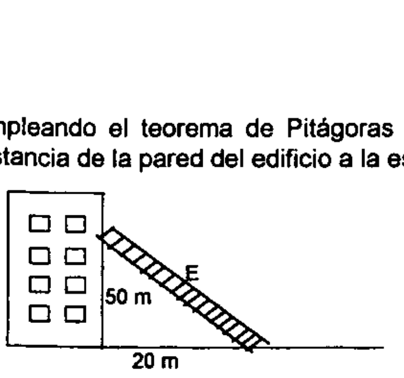
La manera en que utilizaban dichos triángulos era: considerando que los lados mas cortos 3 y 4 unidades, formaban ángulo recto y orientaban uno de los lados (cateto menor) en la dirección norte-sur (la cual determinaban por medio de la estrella polar) entonces quedaba el otro lado corto (cateto mayor) en la dirección este-oeste.

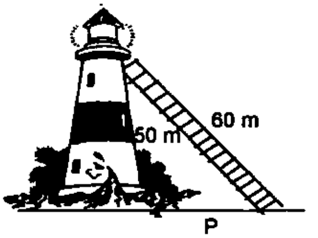
Sin embargo, fue Pitágoras, uno de los más grandes matemáticos y filósofos de la antigüedad, el que descubrió que para todo triángulo rectángulo, los lados mas cortos C_1 y C_2 (catetos) y el lado mas largo h (hipotenusa) satisfacen la igualdad $C_1^2 + C_2^2 = h^2$ siendo él el primero en demostrarlo antes que cualquier otra persona.

En la actualidad el teorema de Pitágoras ha sido de mucha utilidad dentro de la matemática, la física y la ingeniería. En física e ingeniería el teorema permite resolver problemas referentes a la distancia entre dos puntos en el espacio, así como para medir la magnitud de las fuerza resultante de varias fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo. También en la vida cotidiana se emplea el teorema de Pitágoras, como lo muestran los siguientes casos.

Una escalera se levante en la calle a 20 m de la pared de un edificio ¿Cuál tendrá que ser la longitud de la escalera para que llegue a la ventana del piso 15 a 50 m sobre el nivel de la calle?. Otro caso es: ¿A qué distancia de la pared habrá que poner una escalera de 60 m para que alcance a la misma ventana?.

Empleando el teorema de Pitágoras la longitud de la escalera es $l = 53.85$ m y la distancia de la pared del edificio a la escalera es $p = 33.16$ m.





PRIMERA DEMOSTRACIÓN

A continuación se describe brevemente una demostración del teorema de Pitágoras (Versión con áreas).

En dicha demostración se considera un triángulo rectángulo cuyos catetos miden C_1 y C_2, e hipotenusa H (figura 4.33).

Sabemos que los ángulos α y β son complementarios, es decir $\alpha + \beta = 90^0$

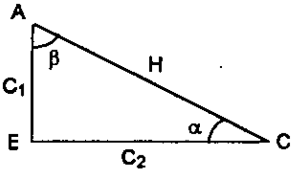


Figura 4.33

Se costruye un cuadrado que mide $C_1 + C_2$, sobre cada uno de sus lados como se muestra en la figura 4.34

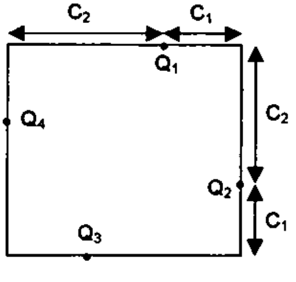


Figura 4.34

Si se unen los vértices Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 se obtiene un cuadrado de lado H, y cuatro triángulos iguales al de la figura 4.37.

Los triángulos son iguales porque cada uno de ellos tiene dos lados iguales y el ángulo que forman igual (teorema *LAL* de congruencia).

El cuadrilátero formado por Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4, es un cuadrado porque todos los lados son iguales a H y los ángulos en los vértices Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 son rectos en cada uno de ellos.

Por costrucción $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ (figura 4.35) y como $\alpha + \beta = 90^0$, se tiene que $\gamma = 90^0$. Lo mismo sucede en cada uno de los vértices.

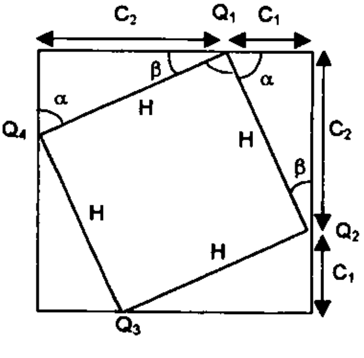


Figura 4.35

Hay dos formas de calcular el área del cuadrado del lado $C_1 + C_2$:

Primera. El área del cuadrado $C_1 + C_2$ es:

$$(C_1 + C_2)^2 = C_1^2 + 2C_1C_2 + C_2^2$$

Segunda: El área del cuadrado $C_1 + C_2$, también es igual a el área del cuadrado $Q_1Q_2Q_3Q_4 = H^2$ más el área de los cuatro triángulos formados, es decir $4\left(\frac{1}{2}C_1C_2\right)$

Por tanto $C_1^2 + 2C_1C_2 + C_2^2 = H^2 + 4\left(\frac{1}{2}C_1C_2\right)$

$C_1^2 + 2C_1C_2 + C_2^2 = H^2 + 2C_1C_2 \quad \therefore \quad C_1^2 + C_2^2 = H^2$ con lo cuál queda demostrado el teorema.

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN. (Esta demostración se atribuye a Pitágoras)

En la demostración siguiente consideramos el triángulo rectángulo cuyos catetos miden C_1 y C_2, respectivamente, e hipotenusa H, (figura 4.36).

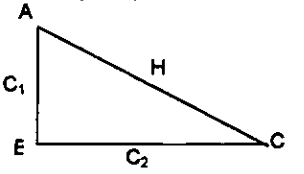


Figura 4.36

Después se considera el segmento perpendicular a la hipotenusa, cuyo segundo extremo es el vértice que forma el ángulo recto del triángulo, con esto quedan formados tres triángulos rectángulos ABC, BAD y BCD, los cuales resultan semejantes, (figura 4.37).

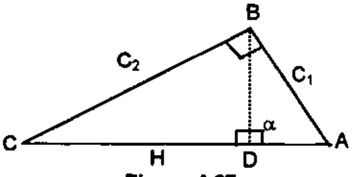


Figura 4.37

Por ser $\overline{BD}$ altura, ella es perpendicular al lado $\overline{CA}$ y esto quiere decir que: $\angle\alpha = 90^0$

Por otro lado: al considerar los triángulos ABC y BCD se observa que entre ellos hay una correspondencia del tipo:

$$\angle CBA = \angle\alpha \text{ ....1}$$

$$\angle BCD = \angle BCA \text{ ....2}$$

y por tanto sus terceros ángulos son iguales, es decir se satisface que

$$\angle CBD = \angle BAC \text{ ....3}$$

como consecuencia de que se satisfagan 1, 2 y 3 se tiene que los triángulos ABC y BCD son semejantes. También, al considerar los triángulos ABC y ABD se observa que entre ellos hay una correspondencia del siguiente tipo:

$$\angle CBA = \angle B \text{ ....1'}$$

$$\angle BAD = \angle BAC \text{ ....2'}$$

y por tanto sus terceros ángulos son iguales, es decir, se satisface que:

$$\angle ABD \approx \angle ACB \text{ ....3'}$$

como consecuencia de que se satisfaga 1', 2' y 3' se tiene que los triángulos rectángulos ABC y ABD son semejantes.

En base a las semejanzas establecidas tenemos las siguientes igualdades:
De la semejanza entre los triángulos rectángulos *ABC* y *BCD* se tiene:

$$\frac{H}{C_2}=\frac{C_2}{CD}=\frac{BD}{C_1}$$

Estas igualdades son equivalentes con las siguientes:

$$\frac{C_2}{H}=\frac{CD}{C_2}=\frac{C_1}{BD} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4'$$

De la semejanza entre los triángulos rectángulos *ABC* y *ABD* se tiene:

$$\frac{H}{C_1}=\frac{C_2}{BD}=\frac{C_1}{DA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

y estas igualdades son equivalentes con las siguientes:

$$\frac{H}{C_1}=\frac{C_2}{BD}=\frac{C_1}{DA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5'$$

de la primera igualdad en 4, se tiene

$$C_2^2=H(CD) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

de 5, en la segunda igualdad, se obtiene

$$C_1^2=H(DA) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6'$$

al sumar 6 con 6' y tomando en cuenta que $H=CD+DA$,

resulta $\quad C_1^2+C_2^2=H(DA)+H(CD)=H(DA+CD)=H\bullet H=H^2$

es decir $\quad C_1^2+C_2^2=H^2$ con lo cual queda demostrado el teorema.

TEOREMA DE PITÁGORAS (DEMOSTRACIÓN CON CONGRUENCIA Y ÁREAS DE TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS).

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Demostración. Considérese el triángulo rectángulo *ABC* cuyos catetos tienen longitudes C_1 y C_2 respectivamente y cuya hipotenusa tiene longitud *h*, (figura 4.38).

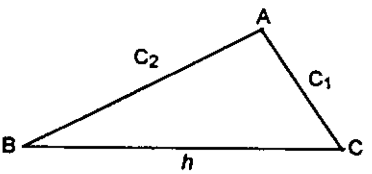


Figura 4.38

Para la demostración del teorema será conveniente formar la figura 4.39 en la que se han seguido los siguientes pasos para formarla.

a) Sobre la hipotenusa se forma el cuadrado □ *BCED*
b) Sobre el cateto *AC* se forma el cuadrado □ *ABFG*
c) Sobre el cateto *AB* se forma el cuadrado □ *ACKH*

La demostración terminará si se logra demostrar que el área del cuadrado □*BCED* es igual a la suma de las áreas de los cuadrados □*ABFG* con □*ACKH*, para ello es conveniente considerar los siguientes puntos:

1). Trácese la paralela a $\overline{CE}$ o $\overline{BD}$ que pase por *A*, con esto queda formado el segmento *AL*.

2). Puesto que el $\angle BAC$ es recto, y en ángulo *BAG* es recto, entonces los puntos *CAG* están en la misma recta, por lo tanto por *CG* pasa una única recta que contiene al punto *A*.

3) Puesto que □*ACKH* es un cuadrado, entonces el ángulo $\angle HAC$ es ángulo recto, y el ángulo *BAC* es recto, es decir los puntos *BAH* están en la misma recta.

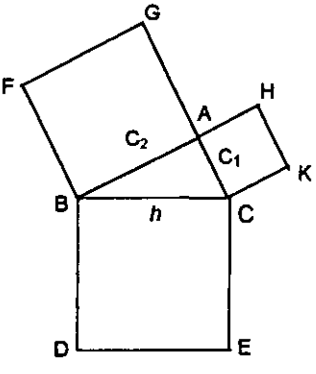


Figura 4.39

Con 1, 2, 3, se ha formado la figura 4.40, en la que se ha unido el punto *A* con *D* y *C* con *F*.

De la figura 4.40 se observa que los ángulos $\angle DBC$ y $\angle FBA$ son iguales pues ambos son rectos

$\angle DBC = \angle FBA$..................................1

entonces, al sumar a ambos ángulos el ángulo $\angle$ABC, se tiene

$\angle$DBA = $\angle$FBC................ 2,

Puesto que $AB = BF$ y $DB = BC$ debido a que son lados del mismo cuadrado,
entonces entre los triángulos *ABD* y *FBC* hay una correspondencia del tipo Lado-Ángulo-Lado, es decir:

$$FB = BA$$
$$\angle FBC \approx \angle DBA$$
$$BC = DB$$

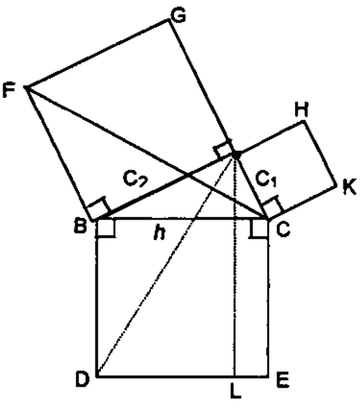


Figura 4.40

y esto trae como consecuencia que los triángulo son iguales, es decir;

$\Delta ABD \approx \Delta FBC$........................3

lo cual a la vez trae como consecuencia que dichos triángulos tienen áreas iguales.

De la figura 4.40 observamos que el rectángulo de lados *BD* y *DL*, tiene el doble del área del triángulo rectángulo *ABD* debido a que ambos tienen la misma base *BD* y la misma altura *DL*, es decir.

Área $\Delta ABD = \frac{1}{2}$□*DBML*.......4

Por otro lado, observemos que el triángulo ΔFBC tiene base $\overline{FB}$ y altura $\overline{FG}$ y, el cuadrado □*ABFG* tiene base $\overline{FB}$ y altura $\overline{FG}$, por lo tanto se tiene:

$$\text{Área } \Delta FBC = \frac{1}{2} \text{ Área } \square FGAB \ldots\ldots 5$$

Debido a la congruencia entre Δ*ABD* y Δ*FBC* ellos tienen la misma área, por tanto, por 4 y 5 se tiene:

$$\frac{1}{2} \text{ Área } \square DBML = \frac{1}{2} \square FGAB \ldots\ldots\ldots 6$$

entonces Área □*DBML* = Área □*FGAB*.............7

Nuevamente; considere la figura 4.40 en la que como se observa, se ha unido el punto *A* con *E* y *B* con *K*; también se observa que los ángulos ∠*ECB* y ∠*ACK* son iguales pues ambos son rectos es decir,

$$\angle ECB \approx \angle ACK \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8$$

Al sumar a ambos ángulos el ángulo ∠*ACB* se tiene ∠*ACE* ≈ ∠*BCK*.................9

Puesto que *AC* = *CK*

BC = *CE*

por ser lados de un mismo cuadrado, entonces entre los triángulos Δ*CBK* y Δ*ACE* hay una correspondencia del tipo Lado-Ángulo-Lado, es decir, *AC* = *CK*, ∠*ACE* = ∠BCK y *CE* = *BC*

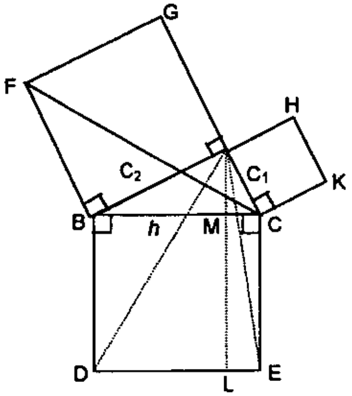


Figura 4.40

esto significa que dichos triángulos son congruentes es decir, Δ*ACE* ≈ Δ*BCK* por consecuencia ambos tienen igual área, además el rectángulo de lados *CE* y *LE* tienen el doble del área del Δ*ACE* debido a que ambos tienen la misma base CE y la misma altura LE es decir,

$$\text{Área } VACE = \frac{1}{2} \text{Área} WCMLE \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 11$$

también se observa que el triángulo Δ*BCK* tiene base *CK* y altura *KH*, y el cuadrado □ *ACKH* tiene base *CK* y altura *KH*, por lo tanto

$$\text{Área } VBCK = \frac{1}{2} \text{Área } WAHKC \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12$$

Debido a la igualdad entre $VACE$ y $VBCK$ ellos tienen la misma área, por tanto por 11 y 12 se tiene

$$\frac{1}{2} \text{Área} WCMLE = \frac{1}{2} \text{Área } WAHKC \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 13$$

Entonces Área □*CMLE* = Área □*AHKC*..........................14

Consecuentemente de 7 y 14 se tiene

Área □*BCED* = Área □*DBML* + Área □*CMLE*...........15

= Área □*FGAB* + □*AHKC* ....5'

es decir Área □*BCED* = Área □*GABF* + Área □*AHKC*...........16

con esta última igualdad queda demostrado el teorema.

CAPÍTULO V

CUADRILÁTEROS

Nuestro mundo esta lleno de ejemplos de figuras de cuatro lados, que también tiene gran diversidad de aplicaciones, principalmente en ingeniería y arquitectura que toman diferentes cuadriláteros.

Aquí también es conveniente destacar que en cuanto al paralelogramo, éste tiene una gran importancia en la física ya que es una figura que siempre se forma empleando vectores al construir los diagramas de fuerzas al resolver un gran número de problemas de aplicación en general.

En este capítulo se estudiarán diferentes formas y tamaños en los que se pueden clasificar y resaltar algunas propiedades.

5.1 Definiciones

Definición. Todo polígono de cuatro lados, (como los de la figura 5.1) se llama cuadrilátero.

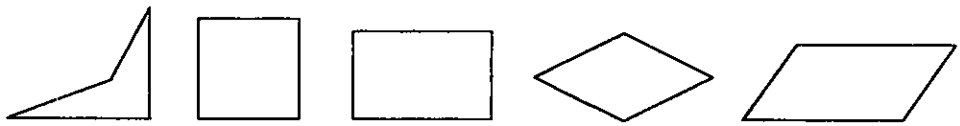


Figura 5.1

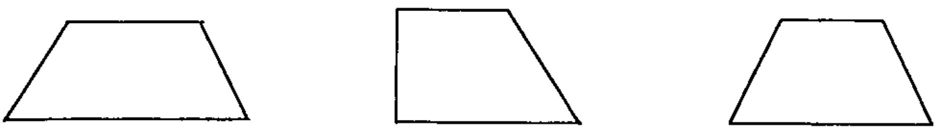
Paralelogramo es el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos (mismas figuras) generalmente el lado mayor se llama base, y la perpendicular a la base, trazada desde el lado opuesto, se denomina altura.

Rectángulo es el paralelogramo cuyos ángulos son rectos, y en particular si todos los lados son iguales se le llama cuadrado.

Rombo es el paralelogramo que tiene los lados iguales.

Romboide es el paralelogramo que tiene los lados contiguos desiguales.

Trapecio es el cuadrilátero que tan sólo tiene dos lados paralelos (figura 5.2).



(a) (b) (c)

Figura 5.2

Trapecio rectángulo es el que tiene dos ángulos rectos (figura 5.2b).

Trapecio isósceles es el que tiene iguales los dos lados no paralelos (figura 5.2c).

Trapezoide es el cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo a su opuesto (figura 5.3).

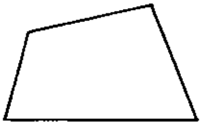


Figura 5.3

En le diagrama de la derecha se ilustra la jerarquización de los cuadriláteros (figura 5.4)

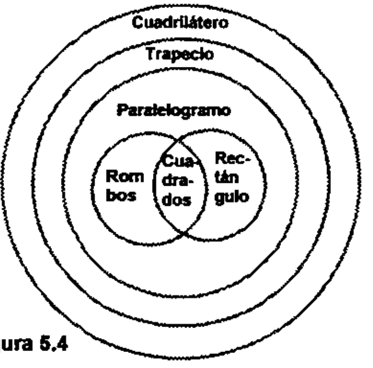


Figura 5.4

Teorema 1 la suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual a cuatro ángulos rectos.

Hipótesis: *ABCD* cuadrilátero
Tesis: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$
Efectivamente, si en el cuadrilátero *ABCD*, se traza la diagonal *AC*, se tienen dos triángulos *ABC* y *ACD*, y como la suma de los ángulos de cada uno de estos triángulos es igual a dos rectos, la de los ángulos del cuadrilátero *ABCD* es igual a cuatro rectos (figura 5.5). Por tanto, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ rectos.

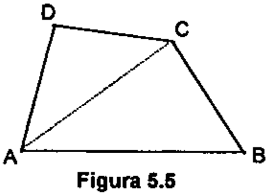


Figura 5.5

5.2 PROPIEDADES DE LOS PARLELOGRAMOS

Teorema 2 en todo paralelogramo:
1^0. Los lados opuestos son iguales
2^0. Los ángulos opuestos son iguales
3^0. Los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios
4^0. Las diagonales se cortan en su punto medio.

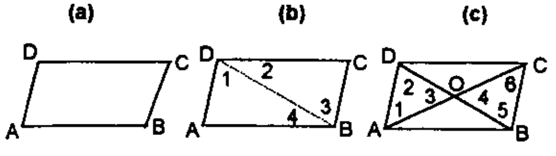


Figura 5.6

Hipótesis: *AB* ׀׀ *DC*, *AD* ׀׀ *BC*
Tesis: $AB = DC, \quad AD = BC$
$\angle A = \angle C, \ \angle B = \angle C$

$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = ... = 180^0$
$OA = OC, \quad OB = OD$

De la figura 5.6a se deducen las relaciones siguientes:
(Por teoremas de proporcionalidad y semejanza)

1°. $AB = DC$, por ser partes de paralelas comprendidas entre paralelas.
$AD = BC$, por ser partes de paralelas comprendidas entre paralelas.

2°. $\angle A = \angle C$, por ser ángulos agudos de lados paralelos
$\angle B = \angle D$, por ser ángulos obtusos de lados paralelos

3°. $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^0$, por ser ángulos colaterales-internos comprendidos entre paralelas.

4°. Considerando los triángulos *AOD* y *BOC* en la (fig. c), se tiene
$AD = BC$, por ser lados opuestos de un paralelogramo;
$\angle 2 = \angle 5$, por ser ángulos alternos-internos entre paralelas.
$\angle 1 = \angle 6$, por ser ángulos alternos-internos entre paralelos.
por tanto, $\Delta AOD = \Delta BOC$, por tener un lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales.
Por tener un lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales.
Por tanto $OA = OC$ y $OB = OD$, por ser lados correspondientes de triángulos iguales.

Reciproco Un cuadrilátero es un paralelogramo:
1°. Si los lados opuestos son iguales.
2°. Si los ángulos opuestos son iguales.
3°. Si los ángulos adyacentes a cada lado son suplementarios.
4°. Si las diagonales se cortan en su punto medio (figs. 5.6*a* , 5.6*b y* 5.6*c* anteriores)
Hipótesis: $AB = DC$, $AD = BC$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = ... = 180^0$
$OA = OC$, $OB = OD$

Tesis: $AB \parallel OC$, $AD \parallel BC$.
1° En la figura 5.6b, trácese la diagonal *DB;* se forman dos triángulos *ABD* y *BCD* en los cuales se tiene:
$AB = DC$, por hipótesis;
$BC = AD$, por hipótesis
$\Delta ABD = \Delta BCD$, por tener sus lados respectivamente iguales; por tanto
$\angle 1 = \angle 3$, por ser los correspondientes de triángulos iguales;
$\angle 2 = \angle 4$, por ser ángulos correspondientes de triángulos iguales;
por tanto $AB \parallel DC$ *y* $AD \parallel BC$,
Por la igualdad de los ángulos alternos internos $\angle 2 = \angle 4$ y $\angle 1 = \angle 3$.

2° De la figura 5.6a se deduce:
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$; por ser los $\angle_s$ de un cuadrilátero;
$2A + 2B = 360^0$; por ser $\angle A = \angle C$ y $\angle B = \angle D$, por hipótesis;
$\angle A + \angle B = 180^0$, por ser mitades de cantidades iguales.

Por tanto *AD* II *BC*, por ser suplementarios los ángulos colaterales internos $\angle A$ y $\angle B$.
De una manera análoga se demostraría que las rectas *AB* y *DC* son paralelas.
Por tanto *AB* II *BC* y *AD* II *BC*.

3* En la figura 5.6 se tiene:
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^0$ por hipótesis,
por tanto *AB* II *DC* y *AD* II *BC*, del teorema que dice que si dos ángulos colaterales internos son suplementarios, entonces se tiene que las rectas son paralelas; por tanto

AB II *DC* y *AD* II *BC*.

4*. De los triángulos *AOD* y *BOC* figura 5.6c, se deduce:

$OA = OC$ y $OB = OD$, por hipótesis;

$\angle 3 = \angle 4$, por ser ángulos opuestos por el vértice.

$\Delta OAD = \Delta BOC$, por tener un ángulo igual entre lados respectivamente iguales.

$\angle 1 = \angle 6$, por ser ángulos correspondientes de triángulos iguales

AD II *BC*, por la igualdad de los ángulos alternos internos $\angle 1 = \angle 6$.

De igual modo se demostraría que *AB* II *DC*.
Por tanto *AB* II *DC* y *AD* II *BC*.

Teorema 3. Todo cuadrilátero que tiene dos lados iguales y paralelos es un paralelogramo
Hipótesis: *AB = CD*, *AB* II *DC*
Tesis: *AD* II *BC*
Trácese la diagonal *DB* (figura 5.7); resulta: *AB = DC*, por hipótesis Đ2= Đ4 por ser ángulos alternos internos entre paralelas.
Por tanto, $\Delta ABD = \Delta BCD$,
por tener un ángulo igual entre lados respectivamente iguales.
$\angle 1 = \angle 3$, por ser ángulos correspondientes de triángulos iguales.
Por tanto, *AD* II *BC*, ya que los ángulos alternos internos $\angle 1$ y $\angle 3$ son iguales.

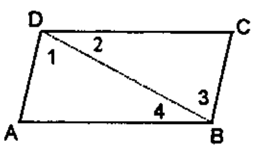


Figura 5.7

Teorema 4. Las diagonales de un *rectángulo son iguales.*
Hipótesis: ABCD es un rectángulo.
Tesis: AC = BD.
En efecto; $\Delta ABC = \Delta DAB$, por tener el cateto *AB* común y los otros dos catetos, iguales (figura 5.8).
Por tanto *AC = BD*.

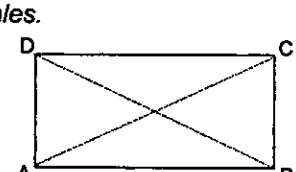


Figura 5.8

Teorema 5. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos del rombo.

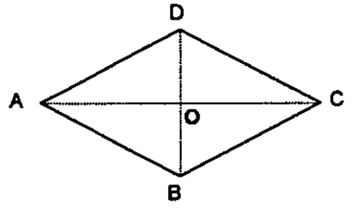


Figura 5.9

Hipótesis: *ABCD* es un rombo

Tesis: $AC \perp BD$, *AC* y *BD* bisectrices.

Se tienen las siguientes igualdades:

$AB = BC = CD = DA$, por hipótesis;

Dibújense las diagonales del rombo y sea **O** el punto de intersección (figura 5.9); entonces $OA = OC$, $OB = OD$ por la propiedad 4ta de paralelogramos.

Luego, los triángulos *AOB, COB, AOD* y *COD* son iguales por tener los lados respectivamente iguales. Por tanto, los ángulos en ***O*** son también, iguales, y por consiguiente, rectos.

Por la igualdad de los mismos triángulos, los pares de ángulos situados en *A* y *C*, y en *B* y *D* son respectivamente iguales.

Luego, las diagonales *AC* y *BD* son perpendiculares y bisectrices de los ángulos del rombo.

Teorema 6. Las diagonales de un cuadrado son iguales, perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos del cuadrado.

El cuadrado tiene las mismas propiedades particulares que el rectángulo y el rombo. Por tanto, se le puede aplicar lo que se acaba de demostrar en los dos teoremas anteriores.

5. 3 Propiedades de los trapecios

Teorema 7. El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las dos bases y tiene una longitud igual a la semisuma de las diagonales de las bases.

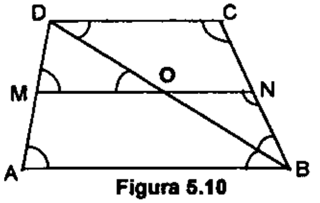


Figura 5.10

Demostración. Sean Λ la paralela a *DC* (o *AB*) que pasa por *M* punto medio de *AD* y *N* su punto de intersección con el segmento *BC*. Sea *O* el punto de intersección de la diagonal *BD* con *MN*. Como *MN* es paralela a *AB*, los triángulos ΔADB y ΔMDO son semejantes.

por tanto

$$\frac{DO}{DB} = \frac{MO}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{1}{2}$$

donde la última identidad se da por que *M* es el punto medio de *DB*, de modo que $DO = OB$.

Por otra parte, como *MN'* y *DC* son paralelas, los triángulos ΔBCD y $\Delta BN'O$ son semejantes. Entonces

$$\frac{BN}{BC} = \frac{ON}{BO} = \frac{BO}{BD} = \frac{DO}{DB} = \frac{1}{2}$$

y se tiene que N es el punto medio de BC

Por otra parte OM + ON = MN y se sabe que:

$OM = \frac{AB}{2}$ y $ON = \frac{DC}{2}$

por tanto $MN = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB + DC}{2}$.

Teorema 8. Los ángulos adyacentes a cada uno de los lados no paralelos de un trapecio son suplementarios.

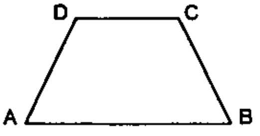


Figura 5.11

Hipótesis: $ABCD$ es un trapecio

Tesis: $\angle A + \angle D = 180^0$

$\angle B + \angle C = 180^0$

En efecto, de la figura 5.11:

$\angle A + \angle D = 180^0$, por ser colaterales internos

$\angle B + \angle C = 180^0$, por se colaterales internos

Teorema 9. Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son iguales.

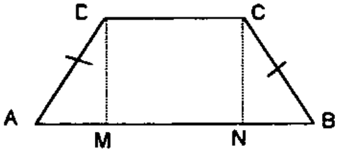


Figura 5.12

Hipótesis: $ABCD$ trapecio isósceles.

Tesis: $\angle A = \angle B$, $\angle ADC = \angle BCD$

Trácese las perpendiculares DM y CN a las bases (figura 5.12) se tiene:

AD = BC por hipótesis

$DM = CN$, por ser lados opuestos del rectángulo $MNCD$.

Por el teorema de Pitágoras $AM^2 = (AD)^2 - (DM)^2 = (BC)^2 - (CN)^2 = (BN)^2$

de modo que $AM = BN$ por lo tanto los triángulos ΔADM y ΔBCN son iguales. Por lo tanto $\angle A = \angle B$ y $\angle ADC = \angle BCD$

Teorema 10. Las diagonales de un trapecio isósceles son iguales

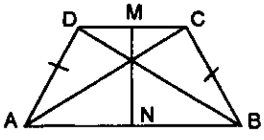


Figura 5.13

Hipótesis: $ABCD$ trapecio isósceles

Tesis: AC = BD

Por el teorema anterior y por definición, se tiene (figura 5.13): $\angle DAB = \angle ABC$, por ser ángulos adyacentes a la base AB; AD = BC, por hipótesis. Luego, los triángulos ABD y ABC, son iguales, por tener un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales. Por tanto AC = BD.

5.4 ÁREAS DE CUADRILÁTEROS

Definición. El área de un rectángulo se define como el producto de la base (*b*) por la altura *(h)*.

Triángulo

Proposición 1. El área de un triángulo es igual al producto de la base (*b*) por la altura (*h*) entre dos, es decir, $A=\dfrac{b\cdot h}{2}$

Demostración. Se tienen los tres casos siguientes:

Primer caso. Se tiene un triángulo rectángulo de base *b* y altura *h*. Considérese un rectángulo de base *b* y altura *h*. En este rectángulo se traza una diagonal y se obtienen dos triángulos rectángulos iguales, puesto que el $\angle 1=\angle 2$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas y por la misma razón el $\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$ por ser ángulos rectos por lo tanto los triángulos son iguales.

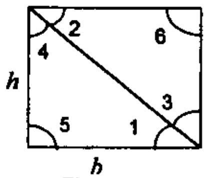


Figura 5.14

Sabemos que el área del rectángulo es igual bh y también es igual a el área de los dos triángulos es decir $bh=2$ (área del triángulo) de donde despejando el área del triángulo = $\dfrac{b\cdot h}{2}$, (figura 5.14).

Segundo caso.

En un rectángulo se tiene un triángulo donde la altura se encuentra dentro de este, (ver figura 5.15), área del triángulo (A_T), área del rectángulo (A_R), y se tienen las siguientes igualdades:

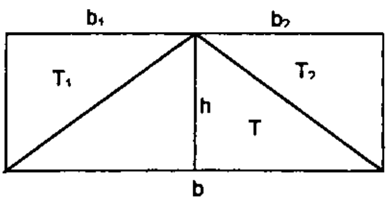


Figura 5.15

$$A_R=(b\cdot h)=A_{T1}+A_T+A_{T2}$$
$$=\frac{(b_1\cdot h)}{2}+A_T+\frac{b_2\cdot h}{2}$$
$$=\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)h+A_T=\frac{b\cdot h}{2}+A_T$$

de donde al despejar la primera y la última igualdad se tiene $A_T=\dfrac{b\cdot h}{2}$.

Tercer caso. En un rectángulo se tiene un triángulo donde la altura está fuera del triángulo, (ver figura 5.16).

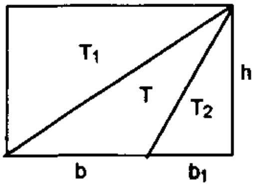


Figura 5.16

$$A_R=(b+b_1)\cdot h=A_{T1}+A_T+A_{T2}=\left(\frac{b+b_1}{2}\right)h+A_T+\frac{b_1\cdot h}{2}=$$
$$\left(\frac{b+2b_1}{2}\right)h+A_T$$

de donde al despejar se obtiene

$$A_T=(b+b_1)h-\left(\frac{b+2b_1}{2}\right)\cdot h=\frac{2(b+b_1)h-(b+2b_1)\cdot h}{2}=\frac{b\cdot h}{2}$$

Paralelogramo

Proposición 2. El área de un paralelogramo es igual al producto de un lado por la altura correspondiente a ese lado.

Aquí *h = altura* y B_1 = *base*

Es decir $A = B_1 h$

Demostración De la (figura 5.17) se observa que el área es igual al área del rectángulo de base *b* y altura *h*, más dos veces el área del triángulo de base b_1 y altura h. Donde $B_1 = b_1 + b$

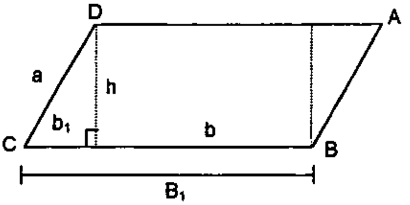


Figura 5.17

$$A = (bh) + 2\left\{\frac{b_1(h)}{2}\right\} = (bh) + b_1 h = h(b + b_1) = hB_1$$

Ejemplo. Sea el paralelogramo *ABCD*. Si *b = 10*; y *h = 2.7*, entonces,

$A = (10)(2.7) = 27\ u^2$

Trapecio

Proposición 3. El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de su altura por la suma de sus bases.

Con *b y b' = bases.*

$$A = \frac{h}{2}(b + b')$$

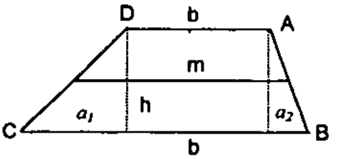


Figura 5.18

Demostración.

De la figura 5.18 arriba se observa que:

$b = a_1 + b' + a_2$.

El área del trapecio es igual a el área del rectángulo más el área del triángulo de base a_1 y altura h, más el área de base a_2 y altura h, es decir:

$$A = (b'h) + \frac{a_1 h}{2} + \frac{a_2 h}{2} = h(\frac{a_1 + a_2}{2} + b') = h(\frac{a_1 + a_2 + 2b'}{2}) = \frac{h}{2}(b + b')$$

Ejemplo. Si *h = 20*, *b = 27* y *b' = 23*, entonces

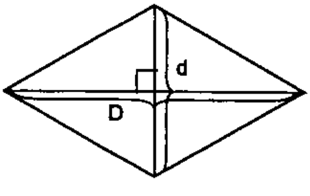
$$A = \frac{1}{2}(20)(27 + 23) = 500,\ u^2 \quad \therefore \quad A = 500\ u^2$$

Rombo

Proposición 4

El área de un rombo es igual a la mitad del producto de sus diagonales.

$$A = \frac{Dd}{2}$$



Demostración

Figura 5.19

En la figura 5.19 se observan cuatro triángulos iguales, de base $\frac{D}{2}$ y de altura $\frac{d}{2}$, es decir, $A = 4(\frac{1}{2}(\frac{D}{2}\frac{d}{2})) = \frac{Dd}{2}$

CAPÍTULO VI

POLÍGONOS

En el diario quehacer de la humanidad se presenta la necesidad de estudiar y calcular magnitudes de figuras que tienen varios lados (polígonos) de los cuales el hombre a través del tiempo ha formalizado el estudio de aquellas figuras que tienen lados iguales (polígonos regulares) y es a este tipo de figuras al que esta enfocado el estudio del presente capítulo, en el cual se analizará desde como obtener su perímetro, su área sus ángulos internos y externos, número de lados y diagonales, etcétera, también se incluye un estudio de la relación entre segmentos de polígonos regulares de 3, 4 y 6 lados, en ellos se encuentran propiedades muy interesantes .

Recordemos que un polígono es el que está determinado por los vértices $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$ (todos diferentes) de tal manera que $\overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \cdots,$ son los lados del polígono y así sucesivamente hasta obtener $\overline{v_nv_1}$ como lado final y los lados pueden intersecarse sólo en el vértice.

6.1 Definiciones y propiedades

Definición. En un polígono como el de la figura 6.1 a todos los ángulos señalados se les llama ángulos internos del polígonos.

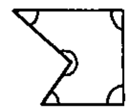


Figura 6.1

Definición. Llámese polígono regular, al polígono cuyos lados son iguales y sus ángulos internos también son iguales, figura 6.2

En un polígono regular el ángulo externo en un vértice es el suplemento del ángulo interno del mismo vértice (figura 6.3).

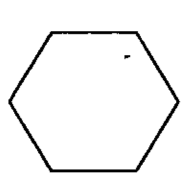


Figura 6.2

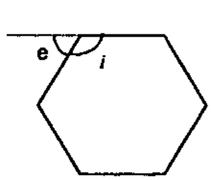


Figura 6.3

Obsérvese que puede haber polígonos de lados iguales y sus ángulos internos no son iguales, por consiguiente no son polígonos regulares en la figura 6.4 se ilustra una forma de obtener un polígono con estas características, deformando un hexágono en la dirección que indican las flechas.

Un caso de un polígono en el que basta tener lados iguales para garantizar que los ángulos internos son iguales, es el triángulo.

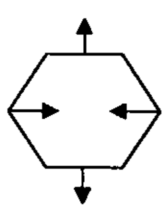


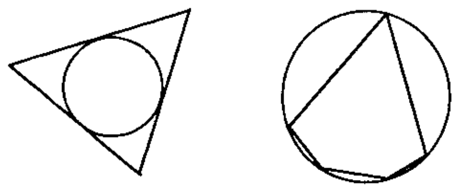
Figura 6.4

En el caso de los polígonos regulares una forma de calcular por ejemplo su área es algo que ya en la antigua Grecia hacían muy bien, y lo que se hace es dividir al polígono en cuestión en triángulos y a éstos se les calcula su área y después solo basta sumar las áreas parciales para obtener el área total en cuestión.

6.2 Clasificación.

Números de lados. Los polígonos se nombran de acuerdo con su número de lados, así tenemos que: triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, eneágono, decágono, dodecágono e icoságono, son polígonos de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 y 20 lados, respectivamente.
Para nombrar los demás polígonos se indica el número de lados que tienen; polígono de diecisiete lados, polígono de veinticinco lados, etc.

Definición. Si una circunferencia contiene a todos los vértices de un polígono se le llama circunferencia circunscrita al polígono. Y si una circunferencia toca en un punto diferente de los vértices a cada lado del polígono se le llama circunferencia inscrita (figura 6.5).



Circunferencia inscrita **Circunferencia circunscrita.**

Figura 6.5

Observación. En un polígono se presentan cuatro casos:
1ª se le puede circunscribir una circunferencia
2ª se le puede inscribir una circunferencia
3ª que no tenga ninguna circunferencia

Propiedades de los polígonos regulares
1. A todo polígono regular se le puede circunscribir una circunferencia.
2. A todo polígono regular se le puede inscribir una circunferencia
3. El centro de la circunferencia circunscrita a un polígono regular es, también el centro de la circunferencia inscrita.
4. Si un polígono está inscrito en una circunferencia y tiene sus lados iguales, el polígono es regular.

Definiciones. En la figura 6.6, se aprecia cada uno de los estos elementos de un polígono regular.
1) Se llama centro de un polígono regular al centro común de sus circunferencias inscrita y circunscrita.
2) Se llama radio de un polígono regular al radio de la circunferencia circunscrita.
3) Se llama ángulo central de un polígono regular al que forman dos radios que pasan por dos vértices consecutivos.
4)Se llama apotema de un polígono regular al radio de la circunferencia inscrita y que es perpendicular a uno de sus lados.
$AB = BC = CD = DE = AE$
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$
además, O es el centro, OA y OB son radios, el $\angle AOB$ es un ángulo central
y OG y OF son apotemas.

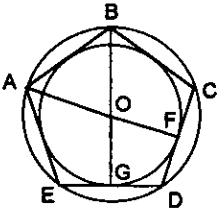


Figura 6.6

6.3 Otras propiedades de polígonos regulares

1. Todo radio de un polígono regular es bisectriz del ángulo por cuyo vértice pasa.

Ejemplo: *OB* biseca a $\angle ABC$.

2. Todo apotema de un polígono regular biseca (por ser mediatriz) el lado correspondiente.

Ejemplo *OF* biseca a *CD* y *OG* biseca a *ED*

3. En un polígono regular de n lados, (figura 6.7) se cumple lo siguiente:

(a) Cada ángulo central *C* es igual a: $\left(\dfrac{360^0}{n}\right)$

(b) Cada ángulo interno *i* es igual a : $\left(\dfrac{(n-2)180^0}{n}\right)$; $\dfrac{2\pi(n-2)}{n}$.

Cada ángulo externo es igual a: $\left(\dfrac{360^0}{n}\right)$

(d) La suma de los ángulos interiores es: *S = 2 r (n - 2). S* = suma de los ángulos interiores.

(e) El número de diagonales totales que se pueden trazar en un polígono regular es:

$$\frac{n(n-3)}{n}$$

(f) La suma de los ángulos exteriores *(Se)* siempre es igual a 4 rectos (360°): $Se = 360^0$; 4 rectos.

(g) El número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice cualquiera es igual a $(n-3)$

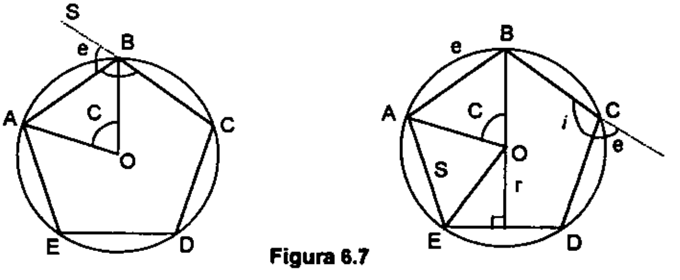


Figura 6.7

Por ejemplo, en el pentágono regular *ABCDE* en la figura anterior.

$$\angle AOB = \angle ABS = \frac{360^0}{n} = \frac{360^0}{5} = 72^0$$

$$\angle ABC = \frac{(n-2)(180^0)}{n} = \frac{(5-2)(180^0)}{5} = 108^0$$

$$\angle ABC + \angle ABS = 108^0$$

6.4 CÁLCULO DE LÍNEAS Y ÁNGULOS DE UN POLÍGONO REGULAR

1) Hallar el lado **s** de un pentágono regular si el perímetro **p** es igual a 35.
2) Hallar el apotema **r** de un pentágono regular si el radio de la circunferencia inscrita es de 21 unidades.
3) En un polígono regular de 5 lados, hallar el ángulo central **C**, el ángulo externo **e** y el ángulo interno **i**.
4) Si un ángulo interno de un polígono regular es 108°, hallar el ángulo externo, el ángulo central y el número de lados .

Solución

(a) P = 35. Puesto que P = 5 s, 35 = 5 s, de donde s = 7

(b) Aquí el apotema r es el radio de la circunferencia inscrita, entonces es igual a 21.

(c) Aquí n = 5. Entonces, $C = \frac{360^0}{n} = \frac{360^0}{5} = 72^0$

$$e = \frac{360^o}{n} = \frac{360^o}{5} = 72^o$$

$$i = 180^0 - C = 180^0 - 72^0 = 108^0$$

(d) $i = 108^0$. Entonces, $C = e = 180^0 - i = 180^0 - 108^0 = 72^0$

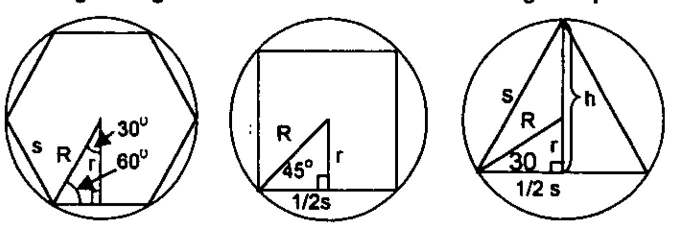
Puesto que $C = \frac{360^0}{n}$ entonces $n = \frac{360^0}{C} = \frac{360^0}{72^0} = 5 \quad \therefore \quad n = 5$

RELACIONES ENTRE SEGMENTOS DE POLÍGONOS REGULARES DE 3, 4 Y 6 LADOS

Cuando se estudian el hexágono regular, el cuadrado y el triángulo equilátero (figura 6.8), es menester trabajar con algunos triángulos rectángulos especiales que se forman al trazar el apotema *(r)* y el radio *(R)* cuyos extremos son puntos de uno de los lados del polígono. En el caso del cuadrado, se obtiene un triángulo de 45° - 45° - 90°; en cambio en los otros dos casos se forman triángulos de 30°-60°-90°

Las ecuaciones que se dan a continuación muestran las relaciones que existen entre el lado, el apotema y el radio de algunos polígonos regulares.

Figura 6.8 **Hexágono regular** **Cuadrado** **Triángulo equilátero**



Hexágono regular: $S = R$, $r = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$

Cuadrado: $S = R\sqrt{2}$, $r = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$

Triángulo equilátero: $S = R\sqrt{3}$, $h = r + R$, $r = \frac{1}{3}h$; $R = \frac{2}{3}h$, $r = \frac{1}{2}R$

Deducciones de la ecuaciones propuestas arriba.

Para el hexágono

Este caso es especial pues cada ángulo central es igual a 60^0 y cualquier triángulo que se forme con dos radios y un lado del polígono resulta ser equilátero de donde podemos concluir que $S = R$

Del triángulo rectángulo se tiene por el teorema de Pitágoras que: $R^2 = (\frac{1}{2}S)^2 + r^2$;

de donde despejando a r y escribiendo todo en términos de R, se tiene

$r^2 = R^2 - (\frac{1}{2}S)^2$, entonces $r^2 = R^2 - (\frac{1}{2}R)^2$, de donde $r^2 = R^2 - \frac{R^4}{4} = \frac{4R^2 - R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$,

por lo que despejando a $r = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; $\therefore$ $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Deducción de la ecuaciones para el Cuadrado

De la figura de deduce que $r = \frac{1}{2}S \quad \Rightarrow \quad S = 2r$

Del triángulo rectángulo se tiene que $R^2 = r^2 + (\frac{1}{2}S^2)$.......* ; sustituyendo $r = \frac{1}{2}S$ en la ecuación (*).

$$R^2 = (\frac{1}{2}S)^2 + (\frac{1}{2}S)^2 = (\frac{S}{2})^2 + (\frac{S}{2})^2 = \frac{S^2}{4} + \frac{S^2}{4} = \frac{S^2 + S^2}{4} = \frac{2S^2}{4} = \frac{S^2}{2}.$$

Esto implica que $R^2 = \frac{S^2}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} \quad \therefore \quad S = R\sqrt{2}$; que es una de las ecuaciones propuestas.

Y como $r = \frac{1}{2}S$; sustituyendo el valor de S se tiene entonces; $r = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$; que es la otra ecuación propuesta.

Deducción de las ecuaciones para el Triángulo equilátero

De la figura se deduce que $h = r + R$ y también;

El triángulo de lados igual a S es equilátero por lo cual cada uno de sus ángulos mide 60^0. Al trazar una altura del triángulo que a su vez es bisectriz se obtienen dos triángulos también semejantes.

Y el triángulo cuyos lados miden R, r y $\frac{S}{2}$ es también semejante al triángulo cuyos lados miden h, S y s $\frac{S}{2}$ puesto que tienen un ángulo de 90^0 y otro de 30^0 por lo cual el tercer ángulo es de 60^0 por ser semejantes se cumple la siguiente igualdad $\frac{S}{R} = \frac{\frac{S}{2}}{r}$ de donde al despejar r se obtiene que $r = \frac{R}{2}$.

Usando el teorema de Pitágoras en cualquiera de los dos triángulos semejantes anteriores se tiene que $S^2=\left(\frac{3}{2}R\right)^2+\left(\frac{S}{2}\right)^2$ de donde al realizar las operaciones obtenemos $4S^2=9R^2+S^2$ y despejando a S se tiene $S=R\sqrt{3}$

Del otro triángulo que es un rectángulo se tiene;

$R^2=r^2+(\frac{1}{2}S)^2$; y como $S=R\sqrt{3}$; sustituyendo en la ecuación anterior

$r^2=R^2-(\frac{1}{2}R\sqrt{3})^2=R^2-\frac{3R^2}{4}=\frac{4R^2-3R^2}{4}=\frac{R^2}{4}$, finalmente

$r^2=\sqrt{\frac{R^2}{4}}$, entonces $r=\frac{R}{2}$; que es otra de las identidades propuesta.

Del hecho de que se cumpla que $h=r+R$; y como se tiene que $r=\frac{1}{2}R$; sustituyendo en la ecuación anterior.

$h=\frac{1}{2}R+R=\frac{R+2R}{2}=\frac{3R}{2} \Rightarrow h=\frac{3}{2}R$, y finalmente $R=\frac{2h}{3}$.

De igual modo de $h=r+R \Rightarrow r=h-R$; y como $R=\frac{2}{3}h$; sustituyendo en la ecuación anterior se tiene

$r=h-\frac{2}{3}h=\frac{3h-2h}{3}=\frac{1}{3}h$, $\therefore$ $r=\frac{1}{3}h$; que es la otra identidad propuesta.

6.5 Aplicaciones de las relaciones entre polígonos.

a) **APLICACIONES DE LAS RELACIONES QUE EXISTEN ENTRE ELEMENTOS DE UN HEXÁGONO REGULAR**

En un hexágono regular dado: (a) hallar el lado y el apotema si su radio es de 12 unidades, (b) hallar el radio y el apotema si el lado es de 8 unidades.

Solución

1) De los datos se tiene que R = *12*, y como en un hexágono regular se cumple que $S=R$, sustituyendo se tiene S = *12* y también se cumple que

$$r=\frac{1}{2}R\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

(b) Aquí igual se tiene como dato que $S=8$, se cumple que $S=R=8$ y

$$r=\frac{1}{2}R\sqrt{3}=\frac{1}{2}8\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

b) APLICACIÓN DE LAS RELACIONES QUE EXISTEN ENTRE ELEMENTOS DE UN CUADRADO

Dado un cuadrado: (a) hallar el lado y el apotema si el radio es igual a 16, (b) hallar el radio y el apotema sabiendo que el lado es igual a 10.

Solución:

(a) Como dato se tiene que $S = 16$, aquí se cumple la relación

$S = R\sqrt{2} \Rightarrow S = 16\sqrt{2}$ y para calcular el apotema la relación útil es

$r = \frac{1}{2}S = \frac{16}{2}\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r = 8\sqrt{2}$

(b) El dato que se proporciona es, $S = 10$ y empleando la relación $S = R\sqrt{2}$, despejando a R y racionalizando se tiene

$$R = \frac{S}{\sqrt{2}} = \frac{S\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{S\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad R = 5\sqrt{2}$$

para el caso de determinar el valor del apotema empleando la relación

$r = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}(10) = 5 \quad \Rightarrow \quad r = 5$; que es el valor del apotema

c) APLICACIONES DE LAS RELACIONES QUE EXISTEN ENTRE ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Dado un triángulo equilátero: (a) hallar el radio, el apotema y el lado conociendo la altura de 6 unidades, (b) hallar el lado, el apotema y la altura sabiendo que el radio es igual a 9.

Solución:

(a) Dado que h = 6, y empleando la relación $r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}6 = 2 \Rightarrow r = 2$; para calcular el valor del radio se emplea la igualdad

$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}6 = 4 \Rightarrow R = 4$; y finalmente para hallar el valor del lado se emplea la siguiente ecuación, sustituyendo el valor de *R = 4*, antes calculado

$S = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow S = 4\sqrt{3}$.

(b) Como *R = 9*, entonces empleando la relación $S = R\sqrt{3} = 9\sqrt{3}; \Rightarrow S = 9\sqrt{3}$

Para el caso del calculo del apotema se emplea la relación $r = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}9 = \frac{9}{2}; \Rightarrow$

$r = \frac{9}{2}$; y $h = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2}9 = \frac{27}{2}; \Rightarrow h = \frac{27}{2}$ y finalmente la altura viene dada por la identidad.

PERÍMETRO DE UN POLÍGONO REGULAR

Si el lado del polígono regular de *n* lados se denomina, *s*, su **perímetro** es $P = ns$

ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro por el apotema.
Tal como se muestra en la figura 6.9, al trazar los radios de un polígono regular de **n** lados y su perímetro $p = ns$, el polígono se puede descomponer en n triángulos iguales, siendo el área de cada uno $\frac{1}{2}rs$. De aquí, resulta que el área del polígono es $A = n(\frac{1}{2}rs) = \frac{1}{2}nrs = \frac{1}{2}\text{Pr}$.

$$A = \frac{1}{2}nSr = \frac{1}{2}\text{Pr}$$

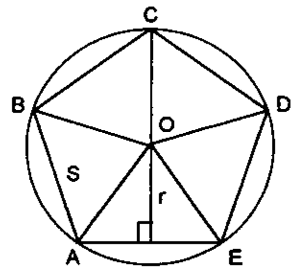


Figura 6.9

CALCULO DEL ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

Calcular el área de un hexágono regular sabiendo que su apotema es igual a $5\sqrt{3}$

Solución.

En todo hexágono, $r = \frac{1}{2}S\sqrt{3}$; puesto que $r = 5\sqrt{3}$, entonces

$5\sqrt{3} = \frac{1}{2}S\sqrt{3} \Rightarrow S = (2)5\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10; \Rightarrow S = 10$; y finalmente el perímetro esta dado por

$P = 6(10) = 60$. Luego, $A = \frac{1}{2}\text{Pr} = \frac{1}{2}(60)(5\sqrt{3}) = 150\sqrt{3}$.

CAPÍTULO VII

CIRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Aquí se tratará el tema de la circunferencia que no debe confundirse con el círculo (superficie), aunque ambos conceptos son inseparables. La circunferencia pertenece a la clase de curvas conocidas como cónica, pues una circunferencia se puede definir como la intersección de un cono recto circular con un plano perpendicular al eje del cono. En este tema se tratan en primer lugar los elementos que se encuentran relacionados con toda circunferencia y estos son las líneas y ángulos, así como el calculo del área de un sector y la total.

Conocer este tipo de elementos y su posición en la circunferencia, es elemental para estudios posteriores sobre todo en geometría analítica.

7.1 Puntos y rectas notables

Definiciones. Las líneas relacionadas con la circunferencia son las que se indican en la figura 7.1.
Se llama circunferencia a una curva plana y cerrada, cuyos punto equidistan de un punto fijo llamado centro.

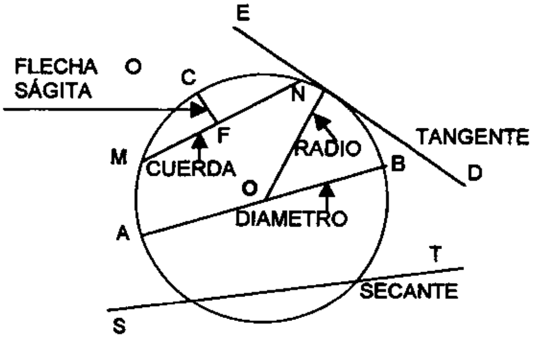


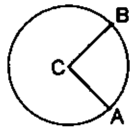
Figura 7.1

Circulo. Es la superficie plana limitada por la circunferencia.
Un radio. Es cualquier segmento de la recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia
Un diámetro. Es cualquier segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el centro.
Arco. Es una parte determinada de la circunferencia, el arco *MCN,* en la figura 7.1.
Cuerda. Es todo segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.
Toda cuerda determina dos arcos.
Flecha o ságita. Es la parte de un radio, perpendicular en el punto medio de una cuerda, comprendida entre ésta y el arco subtendido por ella.
Tangente. Es una recta que tiene un solo punto común con la circunferencia, y a ese punto se le llama punto de contacto.
Secante. Es una recta que tiene dos puntos en común con la circunferencia.
Sector circular. Es la parte de círculo comprendida entre dos radios y el arco determinado por ellos.
Semicircunferencia. Como su nombre lo indica es la mitad de la circunferencia.
Segmento circular. Es la parte de circulo comprendido entre una cuerda y su arco.

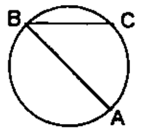
7.2 ÁNGULOS RELACIONADOS CON LA CIRCUNFERENCIA

Primero se definen los tipos de ángulos relacionados cada uno de ellos es señalado en las figuras 7.2 siguientes y a continuación se detallan las propiedades de cada uno de ellos.

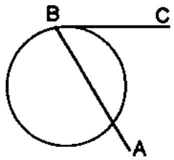
Ángulo interior es el que tiene su vértice en el círculo, si este punto es el mismo que el del centro entonces se llama ángulo central.



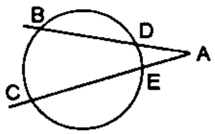
Ángulo inscrito es el que tiene su vértice en la circunferencia y está formado por dos cuerdas.



Ángulo Semiinscrito es el que tiene su vértice en la circunferencia y está formado por una cuerda y una tangente.



Ángulo exterior es el que tiene su vértice fuera de la circunferencia y del círculo y está formado por dos secantes, o por una secante y una tangente, o por dos tangentes; en este ultimo caso se llama circunscrito.



Figuras 7.2

Propiedades

1) Ángulos centrales iguales subtienden arcos iguales y recíprocamente. Arcos iguales subtienden ángulos centrales iguales.

2) Arcos iguales determinan cuerdas iguales y recíprocamente, cuerdas iguales determinan arcos iguales.

3) El diámetro perpendicular a una cuerda divide a los arcos determinados por la cuerda en dos partes iguales.

5)La cuerda perpendicular a otra cuerda por su punto medio es un diámetro.

Teorema 1. En toda circunferencia, un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central determinado por el mismo arco.

La demostración se realizará en tres casos:

Caso i) Cuando uno de los lados pasa por el centro.
En la figura 7.3 siguiente, el ángulo $CAB = \alpha$ es un ángulo inscrito que abraza el mismo arco *BC* que el ángulo central $BOC = \omega$
El triángulo *CAO* es isósceles y tiene por eso dos ángulos iguales: $\beta = \alpha$ El ángulo ω es un ángulo externo de ese triángulo y por eso

$\omega = \beta + \alpha = \alpha + \alpha = 2\alpha$. Se concluye que $\alpha = \dfrac{\omega}{2}$

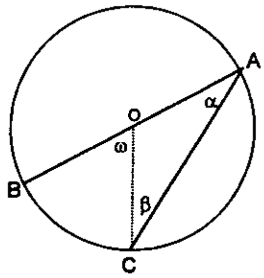


Figura 7.3

Caso ii) El centro queda dentro del ángulo inscrito
Ahora se tiene un ángulo inscrito donde ninguno de sus lados pasa por el centro

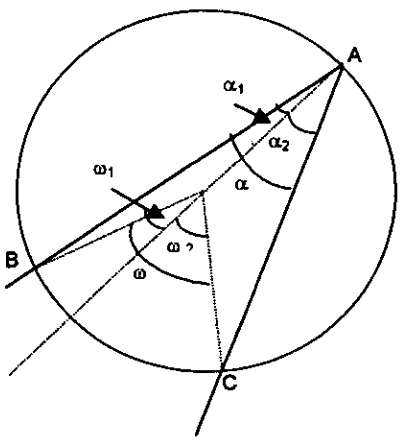


Figura 7.4

En la figura 7.4 se cumple que:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2} = \frac{\omega}{2}$$

Caso iii) El centro queda fuera del ángulo inscrito.

En la figura 7.5 se cumple que:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_2}{2} = \frac{\omega}{2}$$

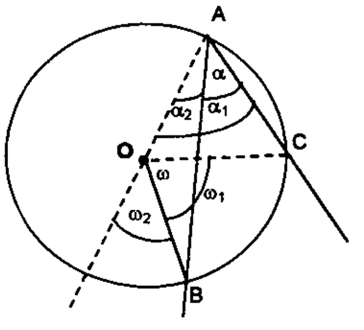


Figura 7.5

Corolario Un ángulo inscrito en el cual una de sus cuerdas es un diámetro es un ángulo recto como se ilustra en la figura 7.6.
La demostración se sigue del teorema anterior
El ángulo $\beta = 180^0$ y es central.

Y el ángulo $\alpha = \frac{\beta}{2}$ que es un inscrito por lo

tanto $\alpha = 90^0$

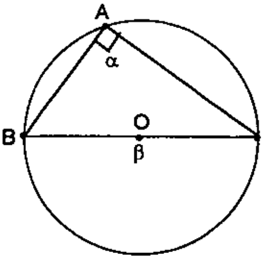


Figura 7.6

Teorema 2. Si en una circunferencia se tiene una cuerda y se traza en diámetro que pase por el punto medio, entonces ese diámetro es perpendicular a la cuerda y recíprocamente el diámetro perpendicular a la cuerda pasa por el punto medio.

Demostración.

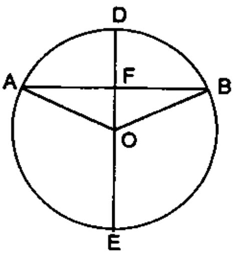


Figura 7.7

Sea *AB* una cuerda en la figura 7.7 y sea *DE* el diámetro que pasa por el punto medio de *AB*.
Por demostrar que *DE* es perpendicular a *AB*.
Sea *F* el punto medio de *AB*, en la figura se observa que el triángulo AOB es isósceles dado que *OA* y *OB* son radios, y por lo tanto $\angle BAO = \angle ABO$ y $\angle BAO + \angle AOB + \angle ABO = 180^0$, también se observa que se forman dos triángulos que son iguales, el triángulo *AOF* y el *BOF*, por el criterio de *LAL* de igualdad de triángulos.

Puesto que cumplen que el lado $AO = OB$, el $\angle BAO = \angle ABO$ y el lado $AF = FB$.
Ahora solo falta mostrar que el ángulo $\angle AFO = \angle BFO$ y que ambos valen 90^0; como $\Delta AOF = \Delta BOF$ sabemos que $\angle OBF = \angle OFA$ y como $\angle OFB + \angle OFA = 180^0$ entonces finalmente se tiene $\angle OFB = \angle OFA = 90^0$. Por lo tanto el diámetro *DE* es perpendicular a la cuerda *AB*.

Y recíprocamente, por demostrar que el diámetro perpendicular a la cuerda pasa por el punto medio de dicha cuerda.

Como el diámetro es perpendicular a la cuerda $\angle AFO = \angle BFO$, los lados *AO* y *BO* son radios entonces el ΔAOB es isósceles y por lo tanto el $\angle AOB = \angle OBF$ de donde los triángulos *AFO* y *BFO* tienen dos parejas de ángulos iguales por lo cual el tercer ángulo debe ser igual es decir, $\angle AOF = \angle BOF$ y ahora como los lados $OA = BO$ y OF es compartido entonces por la propiedad *LAL* los triángulos son iguales y por lo tanto $AF = FB$, de donde se puede concluir que *F* es el punto medio y el diámetro pasa por el punto medio.

Teorema 3. El ángulo formado por una tangente y una cuerda, con vértice en el punto de contacto, es la mitad del ángulo central determinado por el arco que subtiende la cuerda ($\angle ROP$).

En la figura 7.8, la mitad del ángulo central opuesto al arco que subtiende la cuerda *RP*, es $ROM = \omega$. El ángulo que forman la tangente y la cuerda es $PRT = \varphi$. Se debe de probar que $\omega = \varphi$

Ahora bien, como el radio *OM* es perpendicular a la cuerda *RP* y *OR* es perpendicular a la tangente *RT*, se sigue que: $\alpha + \varphi = 90^0 = \alpha + \omega$ por tanto $\omega = \varphi$

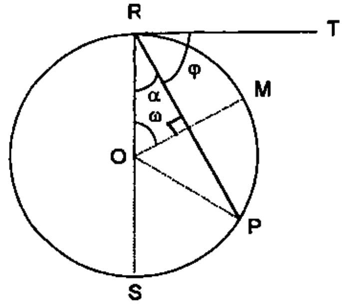


Figura 7.8

7.4 Áreas y perímetros

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y ÁREA DEL CIRCULO.

El número π (Pi) es la razón entre la longitud **C** de la circunferencia de cualquier circulo y su diámetro ***d*** ; es decir, $\pi = \dfrac{C}{d}$. De aquí, $C = \pi d$; o sea $C = 2\pi r$ (figura 7.9).

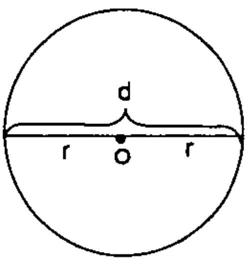


Figura 7.9

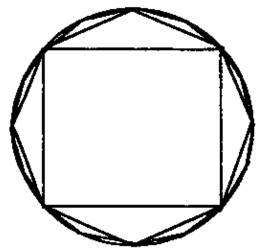


Figura 7.10

Una circunferencia se puede considerar como un polígono regular de un número infinito de lados tal como se muestra en la figura 7.10. Si un cuadrado se inscribe en una circunferencia y se duplica continuamente el número de sus lados (octágono, 16 ágono, etc) los perímetros de los polígonos resultantes se aproximaran cada vez más a la longitud de la circunferencia.

De esta suerte, para hallar el área de un circulo, se puede utilizar la ecuación encontrada para el área de polígonos regulares.

$A = \dfrac{1}{2}\mathrm{Pr}$ en la que **C** = P. Entonces esto implica que $A = \dfrac{1}{2}Cr = \dfrac{1}{2}2\pi r r = \pi r^2$, esto implica que $A = \pi r^2$

Calcular la longitud de una circunferencia y el área de un círculo

En el presente subtema se realizan cálculos de la longitud de un arco y de la circunferencia y del área de algunos sectores angulares.

Dada una circunferencia, (a) hallar su longitud y el área del círculo que encierra sabiendo que su radio es de 6 unidades, (b) calcular el radio y el área del círculo si la longitud de la circunferencia es igual a 18π, (c) calcular el radio y la longitud de la circunferencia si el área del círculo es 144π.

(Dar soluciones en términos de π y, además, aproximando el resultado al entero mas cercano).

Soluciones

(a) Aquí $r = 6$, y $\mathbf{C} = 2\pi r = 2(6)\pi = 12\pi$ y $A = \pi r^2 = (6)^2\pi = 36\pi = 36(3.14) = 113\ u^2$

(b) $\mathbf{C} = 18\pi$ entonces $\mathbf{C} = 2\pi r \Rightarrow 18\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 9$ y $A = \pi r^2 = (9)^2\pi = 81\pi$

(c) $A = 144\pi \Rightarrow 144\pi = \pi r^2 \Rightarrow r = 12 \Rightarrow \mathbf{C} = 2\pi r \Rightarrow \mathbf{C} = 2(12)\pi = 24\pi$

LONGITUD DE UN ARCO. ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR Y DEL SEGMENTO CIRCULAR.
FIGURAS 7.11

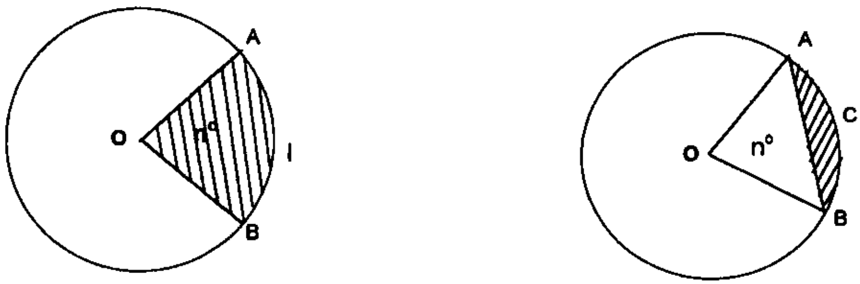


Figura 7.11

Propiedades

1. En una circunferencia de radio r, la longitud l del arco determinado por el ángulo central de n^0 es igual a una $\frac{360}{n}$ parte de la longitud de la circunferencia, o sea, $l = \frac{n}{360}(2\pi r) = \frac{\pi n r}{180} \Rightarrow l = \frac{\pi n r}{180}$
2. En una circunferencia de radio r, el área k de un sector circular determinado por un ángulo central de n^o es igual a la $\frac{360}{n}$ parte del área del círculo, o sea $k = \frac{n}{360}(\pi r^2)$.
3. La proporción que guardan el área de un sector determinado por un ángulo central de n^o y el área del circulo es igual a la proporción entre la longitud del arco determinado por el mismo ángulo y la longitud de la circunferencia, es decir :

$$\frac{\text{Área del sector (de } n^0)}{\text{Área del circulo}} = \frac{\text{Longitud del arco (de } n^0)}{\text{Longitud de la circunferencia}} = \frac{n}{360}$$

4 El área de un segmento circular es igual al área del sector correspondiente menos el área del triángulo que forman sus radios y la cuerda que subtienden.

5 Si un polígono regular está inscrito en una circunferencia, cada segmento circular que tiene por cuerda el lado del polígono es igual a la diferencia entre el área del circulo y la del polígono, dividida por el número de lados.

Longitud de un arco

1) Hallar la longitud de un arco determinado por un ángulo central de 36° perteneciente a una circunferencia cuya longitud es igual a 45π

2) Hallar el radio de una circunferencia si un arco determinado por un ángulo central de 40° tiene la longitud de 4π.

Soluciones

(1) Aquí $n^0 = 36^0$, y $C = 2\pi r = 45\pi$. Entonces $l = \frac{n}{360}(2\pi r) = \frac{36}{360}45\pi \Rightarrow\ l = \frac{9}{2}\pi$

(2) Como dato se tiene que la longitud del arco de circunferencia es $l = 4\pi$, y el ángulo central del arco es de 40^0. Entonces empleando la ecuación

$l = \frac{n}{360^0}(2\pi r)$, sustituyendo valores y despejando r, se tiene:

$$4\pi = \frac{40}{360^0}(2\pi r) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{4\pi}{2\pi}\left(\frac{360^0}{40^0}\right) \quad \Rightarrow \quad r = 18$$

Área de un sector circular

a) Hallar el área k de un sector circular cuyo ángulo central es de 300° perteneciente a un círculo de radio igual a 12.

b) Hallar el ángulo central de un sector circular cuya área es igual a 6π si el área del círculo a que pertenece es igual a 9π.

c) Hallar el radio de un círculo si un arco de longitud 2π determina un sector de área 10π.

Soluciones

a) Aquí $n^o = 300^o$ y $r = 12$. Entonces empleando la ecuación $K = \frac{n}{360}(\pi r^2)$, y sustituyendo valores se obtiene: $k = \frac{n}{360}(\pi r^2) = \frac{300}{360}(144\pi) = 120\pi$ (unidades de área)

b) Empleando la relación $= \frac{\text{Área del sector}}{\text{Área del circulo}} = \frac{n}{360}$, de los datos se tiene

$\frac{6\pi}{9\pi}=\frac{n}{360}$, y por tanto $n=240$; así pues, el ángulo central es de 240^0.

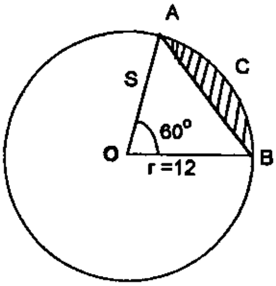
c) Sustituyendo valores y despejando a r se obtiene.

$$\frac{Longitud\ \ del\ \ arco}{Longitud\ \ de\ \ la\ \ circunferencia}=\frac{Área\ \ del\ \ sector}{Área\ \ del\ \ circulo},\ \frac{2\pi}{2\pi r}=\frac{10\pi}{\pi r^2},\ \text{y}\ r=10.$$

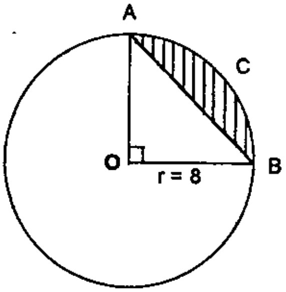
Área de un segmento circular

(a) Hallar el área de un segmento circular cuyo ángulo central vale 60°, sí el radio del círculo a que pertenece es igual a 12 (figura 7.12a).
b) Hallar el área de un segmento circular cuyo ángulo central vale 90°, sí el radio del círculo a que pertenece es igual a 8 (figura 7.12b).
c) Hallar cada uno de los segmentos circulares que forma un triángulo equilátero inscrito en un circulo de radio igual a 8 (figura 7.11c).

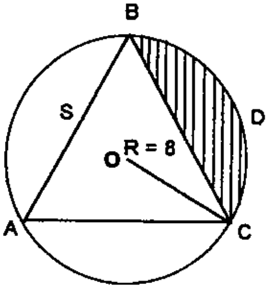
(7.12a)



(7.12b)



(7.12c)



Soluciones

(a) Como datos se tiene $n^o = 60°$ y $r = 12$. El área del sector esta dada por

Sector $AOB = \frac{n}{360}(\pi r^2) = \frac{60}{360}(144\pi) = 24\pi$

El área del ΔOAB equilátero $=\frac{1}{4}S^2\sqrt{3}=\frac{1}{4}(144)\sqrt{3}=36\sqrt{3}$

De aquí, el área del segmento circular $ABC = 24\pi - 36\sqrt{3}$

(b) En este caso los datos son $n^o = 90^o$, $r = 8$.

El sector $OAB = \frac{n}{360}(\pi r^2) = \frac{90}{360}(64\pi) = 16\pi$

El área del triángulo OAB rectángulo $=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(8)(8)=32$

De aquí, el área del segmento circular $ACB = 16\pi - 32$.

(c) Como dato se tiene R = 8. Puesto que S = $R\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$, el área del

$\Delta ABC = \frac{1}{4}S^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}(8\sqrt{3})^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}(64)(3)\sqrt{3} = \frac{1}{4}(192)\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$

El área del circulo $O = \pi r^2 = 64\pi$. De aquí, el área del segmento circular

$BDC = \frac{1}{3}(64\pi - 48\sqrt{3})$ (unidades de área)

DEMOSTRACIÓN DE UN PROBLEMA RELACIONADO CON UN POLÍGONO REGULAR.

Demostrar: Todo ángulo del vértice (interno) de un pentágono regular queda trisecado por las diagonales trazadas desde ese vértice (figura 7.13).

Datos: Sea un pentágono regular *ABCDE*, *AC* y *AD* son diagonales

Demostrar: *AC* y *AD* trisecan el $\angle A$.

Plan: Trazar la circunferencia circunscrita y probar que los ángulos $\angle BAC$, $\angle CAD$ y $\angle DAE$ son iguales.

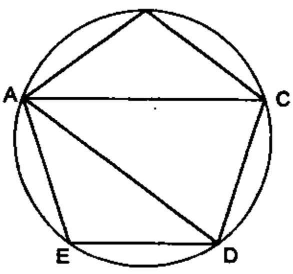


Figura 7.13

Demostración

PROPOSICIONES	FUNDAMENTOS
1. *ABCDE* es un pentágono regular.	Datos
2. Circunscríbase la circunferencia al pentágono *ABCDE*	A un polígono regular cualquiera se le puede circunscribir una circunferencia
3. $BC = DC = DE$	Por ser polígono regular.
4. $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$	En una circunferencia, cuerdas iguales subtienden arcos iguales.
5. $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$	En una circunferencia, ángulos inscritos en el mismo arco son iguales.
6. $\angle A$ está trisecado	Trisecar es dividir en tres partes iguales.

CAPÍTULO VIII

TRIGONOMETRÍA

Introducción. La trigonometría se desarrolló a partir de los primeros esfuerzos hechos para avanzar en el estudio de la Astronomía mediante la predicción de las rutas y posiciones de los cuerpos celestes y para mejorar la exactitud en la navegación y en el cálculo del tiempo y los calendarios.

La palabra trigonometría se deriva de dos raíces griegas: *trigon,* que significa triángulo y *metra,* que significa medida. Entonces, el nombre de trigonometría se refiere a las varias relaciones entre los ángulos de un triángulo y sus lados.

En general la trigonometría es una herramienta fundamental para la solución de diversas situaciones (triangulación astronómica, arquitectura e ingeniería, balística, etc) que se pueden traducir a representaciones por medio de triángulos.

8.1 Resumen histórico

La historia de la trigonometría se remonta a las primeras matemáticas conocidas, en Egipto y Babilonia. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sin embargo, hasta los tiempos de la Grecia clásica no empezó a haber trigonometría en las matemáticas. En el siglo II a.C. el astrónomo **Hiparco de Nicea** compiló una tabla trigonométrica para resolver triángulos. Comenzando con un ángulo de $\left(7\frac{1}{2}\right)^0$ y yendo hasta 180 ^{0}C con incrementos de $\left(7\frac{1}{2}\right)^0$, la tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central dado que corta a una circunferencia de radio *r.* Esta tabla es similar a la moderna tabla del seno. No se sabe con certeza el valor de *r* utilizado por Hiparco, pero sí se sabe que 300 años más tarde el astrónomo Ptolomeo utilizó $r = 60$, pues los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios.

Ptolomeo incorporó en su gran libro de astronomía, el *Almagesto,* una tabla de cuerdas con incrementos angulares de $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, desde 0^0 a 180^0, con un error menor que 1/3600 de unidad. También explicó su método para compilar esta tabla de cuerdas, y a lo largo del libro dio bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. Ptolomeo fue el autor del que hoy se conoce como teorema de Menelao para resolver triángulos esféricos[1], y durante muchos siglos su trigonometría fue la introducción básica para los astrónomos. Quizás al mismo tiempo que Ptolomeo los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno, al contrario que el seno utilizado en la actualidad, no era una proporción, sino la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

[1] Un triángulo esférico es aquel que esta colocado sobre la superficie de una esfera y la medida de sus ángulos internos es mayor a 180^0.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes habían recibido la herencia de las tradiciones de Grecia y de la India, y prefirieron trabajar con la función seno. En las últimas décadas del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones y habían descubierto y demostrado varios teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos. Varios matemáticos sugirieron el uso del valor $r = 1$ en vez de $r = 60$, lo que produjo los valores modernos de las funciones trigonométricas. Todos estos descubrimientos se aplicaron a la astronomía y también se utilizaron para medir el tiempo astronómico y para encontrar la dirección de la Meca, lo que era necesario para las cinco oraciones diarias requeridas por la ley islámica. Los científicos árabes también compilaron tablas de gran exactitud. Por ejemplo, las tablas del seno y de la tangente, construidas con intervalos de 1/60 de grado (1 minuto) tenían un error menor que 1 dividido por 700 millones. Además, el gran astrónomo Nasir al-Dín al-Tusí escribió el *Libro de la figura transversal*, el primer estudio de las trigonometrías plana y esférica como ciencias matemáticas independientes.

El occidente latino se familiarizó con la trigonometría árabe a través de traducciones de libros de astronomía arábigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII. El primer trabajo importante en esta materia en Europa fue escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, llamado Regiomontano. Durante el siguiente siglo, el también astrónomo alemán Georges Joachim, conocido como Rético, introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de ciertas líneas. El matemático francés François Viète incorporó el triángulo polar en la trigonometría esférica y encontró fórmulas para expresar las funciones de ángulos múltiples, $sen(nx)$ y $\cos(nx)$, en función de potencias de $sen x$ y $\cos x$.

Los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje gracias al matemático escocés John Napier, quien inventó los **logaritmos** a principios del siglo XVII. También encontró reglas mnemotécnicas para resolver triángulos esféricos, y algunas proporciones (llamadas analogías de Napier) para resolver triángulos esféricos oblicuos (no rectángulos).

8.2 Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Al iniciar este tema supondremos que se tiene la noción de ángulo formado por dos rectas, y se consideran sólo ángulos agudos.

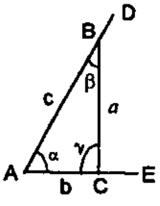


Figura 8.1

Sea *EAD* un ángulo menor de 90^0, es decir, un ángulo agudo figura 8.1. Desde *B*, que es un punto cualquiera de uno de los lados del ángulo trácese una perpendicular al otro lado, formando así el triángulo rectángulo *ABC*. Se designa por las letras griegas minúsculas α, β y γ las medidas de los ángulos y por las letras *a*, *b* y *c* las longitudes de los lados opuestos correspondientes en el triángulo rectángulo.

Se sabe por geometría, que los lados y ángulos de este triángulo son mutuamente dependientes.

La trigonometría comienza por enseñar la naturaleza exacta de esta dependencia, y para este objeto emplea las *razones de los* lados. Estas razones se llaman *razones trigonométricas*.

Las seis razones trigonométricas de cualquier ángulo agudo, como α, se designan como sigue:

$sen\alpha$, que se lee "seno de α"	$\csc\alpha$, que se lee "cosecante de α"
$\cos\alpha$, " " " "coseno de α"	$\sec\alpha$, " " " "secante de α"
$tg\alpha$, " " " "tangente de α"	$ctg\alpha$, " " " "cotangente de α"

8.3 Razones trigonométricas

Estas razones trigonométricas se definen como sigue figura 8.1.

(1) $sen\alpha = \dfrac{lado\ opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{a}{c}$ (4) $\csc\alpha = \dfrac{hipotenusa}{lado\ opuesto} = \dfrac{c}{a}$

(2) $\cos\alpha = \dfrac{lado\ adyacente}{hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$ (5) $\sec\alpha = \dfrac{hipotenusa}{lado\ adyacente} = \dfrac{c}{b}$

(3) $tg\alpha = \dfrac{lado\ opuesto}{lado\ adyacente} = \dfrac{a}{b}$ (6) $ctg\alpha = \dfrac{lado\ adyacente}{lado\ opuesto} = \dfrac{b}{a}$

Nota: El valor numérico de cualquiera de estas razones depende solamente de la magnitud del ángulo α, es decir que es independiente del punto *B* desde el cual se traza la perpendicular al otro lado. Si trazamos una perpendicular de distintos puntos (figura 8.2) los ángulos que se forman son semejantes y se tiene que:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}$$

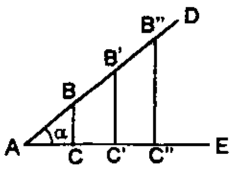


Figura 8.2

Y como cada una de estas razones define al *seno* de α, queda demostrado que el valor de dicha razón no depende del triángulo elegido y que solo depende del ángulo α. De la misma manera se demuestra para cada una de las otras razones.

Se debe observar que cada una de las seis razones trigonométricas cambia de valor al variar el ángulo α.

Estas razones son de importancia fundamental en el estudio de la Trigonometría. En suma, no se puede hacer ningún progreso en este estudio sin un completo conocimiento de las seis definiciones anteriores.
Se observan que las tres primeras son recíprocas, respectivamente, de las tres últimas.

$sen\alpha=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\csc\alpha}$	$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sec\alpha}$	$tg\alpha=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{ctg\alpha}$
$\csc\alpha=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{sen\alpha}$	$\sec\alpha=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos\alpha}$	$ctg\alpha=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{tg\alpha}$

Apliquemos las definiciones (1) a (6) inclusive, al ángulo agudo β de la figura 1. En este caso, el lado opuesto es igual a *AC* = *b*, y el lado adyacente *BC* = *c*, por tanto:

$sen\beta=\frac{b}{c}$	$\cos\alpha=\frac{a}{c}$	$tg\alpha=\frac{a}{b}$
$\csc\beta=\frac{c}{b}$	$\sec\beta=\frac{c}{a}$	$ctg\beta=\frac{b}{a}$

Comparando estas razones con las del ángulo α, se observa que

$sen\alpha=\cos\beta$	$\cos\alpha=sen\beta$	$tg\alpha=ctg\beta$
$\csc\alpha=\sec\beta$	$\sec\alpha=\csc\beta$	$ctg\alpha=tg\beta$

donde α y β satisfacen la identidad

Como $\alpha+\beta=90^0$ (es decir, α y β son complementarios).

Teorema. *La razón trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la de su ángulo complementario.*

El enunciado del teorema expresa las siguientes igualdades:

$sen\alpha=\cos(90^0-\alpha)$	$\cos\alpha=sen(90^0-\alpha)$	$tg\alpha=ctg(90^0-\alpha)$
$\csc\alpha=\sec(90^0-\alpha)$	$\sec\alpha=\csc(90^0-\alpha)$	$ctg\alpha=tg(90^0-\alpha)$

El seno y el cose se llaman cofunciones una de la otra. Similarmente la tangente y la cotangente, y la secante y la cosecante, son cofunciones.

8.3 Ángulos notables. En el presente tema se deducen los valores de las diferentes razones trigonométricas de los ángulos de 30^0, 45^0 y 60^0, y de esta manera es posible deducir los valores de sus múltiplos y submúltiplos. Se utilizan con frecuencia en asignaturas tales como Física, geometría analítica, calculo diferencial e integral, electrónica, etcétera, de aquí la importancia que tiene este tema.

8.4 Razones trigonométricas de 45°, 30° y 60°. Estos ángulos se presentan muy frecuentemente en los problemas que se resuelven usualmente por métodos trigonométricos. Es importante, en consecuencia, hallar los valores de las razones trigonométricas de estos ángulos.

a. ***Las razones trigonométricas del ángulo de 45°.*** Considérese el triángulo *ABC* de la figura 8.3, donde los catetos $AB = BC = 1$.

Entonces por el teorema de Pitágoras $c = \sqrt{2}$ y por lo tanto.

$sen 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\csc 45^0 = \sqrt{2}$

$\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sec 45^0 = \sqrt{2}$

$tg 45^0 = 1$ $\qquad$ $ctg 45^0 = 1$

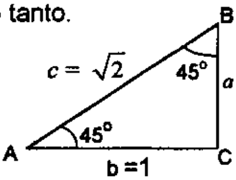


Figura 8.3

b. ***Las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°.*** Dibújese un triángulo equilátero, como *ABD* (figura 8.4). En donde cada lado mide 2. trácese la perpendicular *BC* de *B* a *AD* y considérese el triángulo *ABC*. Como o

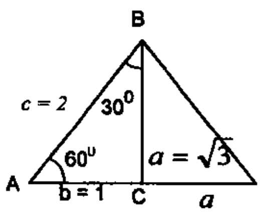


Figura 8.4

los ángulos interiores de un triángulo equilátero son iguales a 60^0 y la perpendicular *BC* también es una bisectriz,

$\angle CAB = 60^0$ y $\angle ABC = 30^0$

Como

$c = AB = AD = 2$; $AC = 2$; $b = 2$ y

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Por tanto.

$sen 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\csc 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$	$\sec 60^0 = 2$
$tg 60^0 = \sqrt{3}$	$ctg 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Análogamente, del mismo triángulo

$sen 30^0 = \frac{1}{2}$	$\csc 30^0 = 2$
$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$tg 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$ctg 30^0 = \sqrt{3}$

Escribiendo estos resultados en forma de tabla, se tiene

Ángulo	*sen*	*Cos*	*Tan*	*Ctg*	*sec*	*Csc*
30⁰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45⁰	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60⁰	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Las razones trigonométricas para ángulos mayores o iguales a 90^0

a) Los cuatro cuadrantes. Fue René Descartes quien se le ocurrió por primera vez emplear un sistema de coordenadas, aunque en principio no eran como actualmente se conocen, pero esto marcó el inicio de la algebraización de la geometría. Un sistema de coordenadas se establece a través de dos rectas perpendiculares.

El punto donde se intersectan estas dos rectas se le llama el origen (O), estas dos rectas dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes. Así, el O es el vértice, los diferentes cuadrantes se nombran como está indicado en la figura 8.5, *considerándose como lado inicial la parte de recta horizontal situada a la derecha del origen. Se dice que un ángulo está en (o pertenece a) un cierto cuadrante cuando su lado final está en ese cuadrante.*

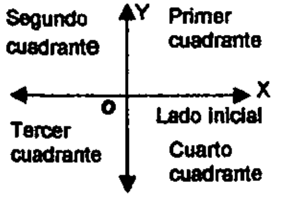


Figura 8.5

b) Coordenadas rectangulares de un punto en un plano.

Para definir las funciones de ángulos no agudos, es conveniente introducir la noción de *coordenadas.*

Sea la figura 8.6 *X'X* una recta horizontal e *Y'Y* una recta perpendicular a ella en el punto O.

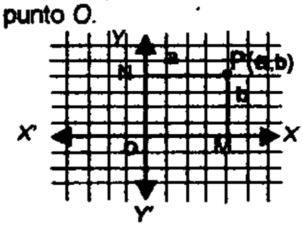


Figura 8.6

Cualquier punto del plano de estas rectas (como *P*) está determinado por dos números que miden en magnitud y signo su distancia a cada una de las perpendiculares *X'X* e *Y'Y*. Su distancia a Y'Y (como *NP* = *a*) se llama *abscisa* del punto, y su distancia a *X'X* (como *MP* = *b*) se llama *ordenada* del punto.

Las abscisas medidas hacia la *derecha de Y'Y son positivas.*

Las abscisas medidas hacia la *izquierda de Y'Y* son *negativas.*

Las ordenadas medidas hacia *arriba de X'X* son *positivas.*

Las ordenadas medidas *hacia abajo de X'X* son *negativas.*

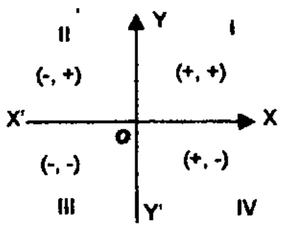


Figura 8.7

El conjunto formado por la abscisa y la ordenada se llama *coordenadas* del punto. El punto *P*, por ejemplo, dado por sus coordenadas ***a*** y ***b***, se designa por el símbolo *P*(a, b). Las rectas *X'X* y *Y'Y* se llaman *ejes de coordenadas*, siendo *X'X* el *eje de las abscisas o eje X o eje de las x*, e *Y'Y el eje de las ordenadas o eje Y o eje de las y*, el punto O se llama *origen de coordenadas figura 8.7.*

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes (igual que en el caso anterior); en la en la figura 8.7 se indican los signos de las coord. en los signos de las coordenadas en los diferentes cuadrantes.

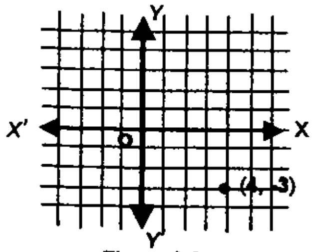


Figura 8.8

Trazar un punto es localizar su posición a partir de sus coordenadas. La manera más conveniente de hacerlo es medir primero a partir de *O* a lo largo de *X'X* un distancia igual a la abscisa, a la derecha o a la izquierda según que la abscisa sea positiva o negativa. Después, a partir del punto así determinado, medir una distancia igual a la ordenada, hacia arriba o hacia abajo según que la ordenada figura 8.8 sea positiva o negativa.

Así, para trazar el punto *(4, -3)*, se cuentan cuatro, cuatro divisiones a partir de *O* sobre el eje *X* hacia la derecha, y después tres divisiones hacia abajo, a partir del punto así determinado, sobre una recta paralela al eje *Y*.
Análogamente las figuras 8.9 a 8.11 muestran los puntos *(-2, 3)*, *(-3, -4)* y *(0, 3)*, $(\frac{5}{3},-\frac{3}{2})$.

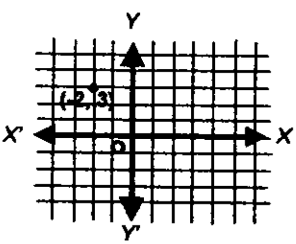


Figura 8.9

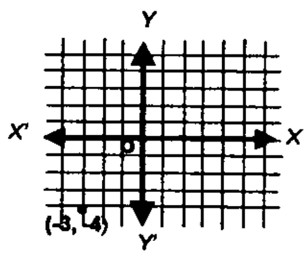


Figura 8.10

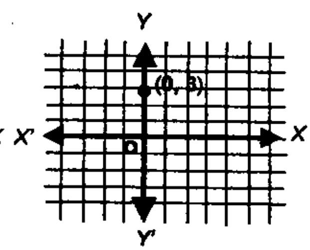


Figura 8.11

8.4 Razones trigonométricas de cualquier ángulo. Anteriormente se definieron las seis razones trigonométricas para los ángulos agudos. Ahora, en cambio vamos a dar unas definiciones que se pueden aplicar a cualquier ángulo dirigido, y que concuerdan con las definiciones ya dadas para los ángulos agudos.
Tómese el origen de coordenadas como el vértice del ángulo y el lado inicial como eje *X*. dibújese un ángulo *XOB* en cualquier cuadrante (ver figuras 8.12 a 8.15).
Sea *P* un punto cualquiera del lado final *OB* del ángulo y sean *(x, y)* sus coordenadas. En todas las figuras, se verifica

$$OQ = x, \quad QP = y, \quad OP = r \quad \text{y} \quad \overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2$$

La longitud *OP* la llamaremos *radio*

Substituyendo y extrayendo raíz cuadrada, se obtiene $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$ (1)

Como lo indica (1), r es siempre un número positivo.

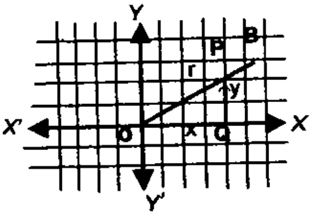


Figura 8.12

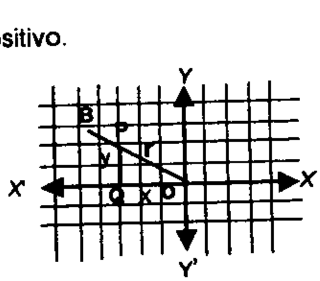


Figura 8.13

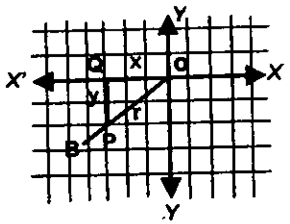


Figura 8.14

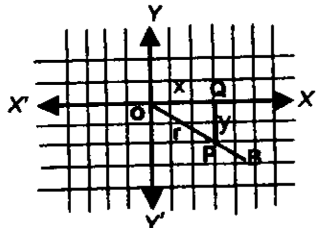


Figura 8.15

Designando el ángulo en cada figura por *XOB*, las definiciones de las funciones son:

(7) $senXOB = \dfrac{ordenada}{radio} = \dfrac{y}{r}$	(10) $ctgXOB = \dfrac{abscisa}{ordenada} = \dfrac{x}{y}$
(8) $\cos XOB = \dfrac{abscisa}{radio} = \dfrac{x}{r}$	(11) $\sec XOB = \dfrac{radio}{abscisa} = \dfrac{r}{x}$
(9) $tgXOB = \dfrac{ordenada}{abscisa} = \dfrac{y}{x}$	(12) $\csc XOB = \dfrac{radio}{ordenada} = \dfrac{r}{y}$

Estas definiciones aplicadas al ángulo *XOB* en el primer cuadrante concuerdan con las dadas en el tema de razones *trigonométricas de un ángulo agudo*. Cuatro cosas deben observarse en las definiciones anteriores:

1. Por semejanza de triángulos el valor de cada una de las razones anteriores es *independiente de la posición* de *P* sobre *OB*.
2. Los valores de las razones anteriores dependen en cualquier caso solamente de la posición del lado final *OB* (siendo fijo el lado inicial *OX*). Es decir, tomando *OX* como lado inicial común, para todos los ángulos que tengan el mismo lado final *OB* las razones trigonométricas tendrán los mismos valores. Así, por ejemplo, cada razón trigonometríca toma el mismo valor en los ángulos 40°, 400°, -320°, tienen las mismas funciones. Las definiciones (7) a (12) son fundamentales.
3. Las razones tangente y secante no están definidas cuando el lado final *OB* cae sobre el eje de las ordenadas *(Y'Y)*, puesto que en este caso la abscisa *X* vale cero. Esto sucede para ángulos como 90^{0}, -90^{0}, 270^{0}, -270^{0}, 450^{0}, -450^{0} .. Análogamente para las razones cotangente y cosecante no están definidas cuando el lado final *OB* cae sobre el eje de las abscisas *(X'X)*, puesto que en este caso la ordenada vale cero. Esto sucede para ángulos como 0^{0}, 180^{0}, -180^{0}, 360^{0}, -360^{0}, etcétera.

4. Si el punto P sobre el lado final OB cae en la circunferencia unitaria, (ver figura 8.16) entonces el valor $r=1$ y por lo tanto $senXOB = y$ (ordenada) y $\cos XOB = x$ (abscisa)

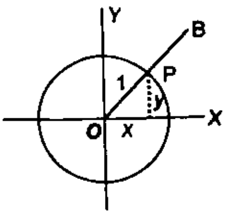


Figura 8.16

De aquí es fácil observar que sí el $\angle XOB$ va de 0^0 a 90^0 entonces $sen(XOB)$ crece de 0 a 1 y si $\angle XOB$ va de 90^0 a 180^0 la razón $sen(XOB)$ decrece de 1 a 0. Análogamente $\angle XOB$ va de 0^0 a 90^0 el $\cos(XOB)$ decrece de 1 a 0 y si $\angle XOB$ va de 90^0 a 180^0 sigue decreciendo de 0 a –1.

5. Observe que (figura 8.17), si un punto P en el lado final OB tiene coordenadas (x, y) y llamamos $\alpha = \angle XOB$, entonces el punto $P' = (-x, y)$ pertenece a un lado final OB' tal que

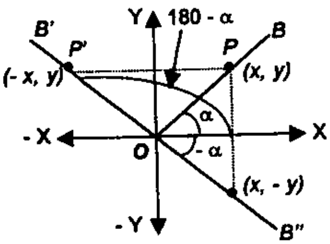


Figura 8.17

$\angle XOB' = 180^0 - \alpha$. Entonces

$$sen(180^0 - \alpha) = \frac{y}{\sqrt{(x)^2 + (y)^2}} = \frac{y}{r} = sen(\alpha) \quad \text{y}$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + (y)^2}} = -\frac{x}{r} = -\cos(\alpha).$$

Análogamente, el punto $(x, -y)$ pertenece a un lado final tal que $\angle XOB'' = -\alpha$. En este caso se tiene que

$$sen(-\alpha) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}} = -\frac{y}{r} = -sen(\alpha) \quad \text{y} \quad \cos(-\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}} = \frac{x}{r} = \cos(\alpha)$$

8.4 Signos algebraicos de las razones trigonométricas

Tomando en cuenta la regla de los signos algebraicos, y recordando que la distancia $OP = r$ es siempre positiva, se observa inmediatamente, de las definiciones de las razones trigonométricas dadas anteriormente que:

En el primer cuadrante todas las razones son positivas.

En el segundo cuadrante el sen y la csc son positivas; las restantes son negativas.

En el tercer cuadrante la *tg* y la *ctg* son positivas; las restantes son negativas.

En el cuarto cuadrante el *cos* y la *csc* son positivas; las restantes son negativas.

Estos resultados se resumen en la siguiente tabla.

Razón	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
Seno, Cosecante	+	+	–	–
Coseno, Secante	+	–	–	+
Tangente, Cotangente	+	–	+	–

CAPÍTULO IX

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

En el presente apartado se expresan y demuestran las identidades trigonométricas elementales que son consecuencia de las seis razones elementales. A las identidades aquí expresadas se les incluye una demostración sugerida y aunque en este momento pareciera que este tipo de conocimientos es irrelevante en realidad no lo es ya que todo el conocimiento posterior es posible asimilarlo mejor y obtener resultados idénticos a los reportados en los textos haciendo uso del álgebra que permiten dichas identidades.

9.1 RELACIONES FUNDAMENTALES

Relaciones fundamentales. En las igualdades (1) a (6) del capítulo anterior se le llama ahora α al ángulo *XOB*. Entonces, para cualquier ángulo α, se tendrá:

(1) $sen\alpha = \frac{y}{r}$	(2) $\cos\alpha = \frac{x}{r}$	(3) $tg\alpha = \frac{y}{x}$
(4) $\csc\alpha = \frac{r}{y}$	(5) $\sec\alpha = \frac{r}{y}$	(6) $ctg\alpha = \frac{x}{y}$

Ahora se va a demostrar el siguiente

Teorema 1. Las seis razones trigonométricas de un ángulo α satisfacen las identidades:

(7) $sen\alpha\csc\alpha = 1$	(8) $\cos\alpha\sec\alpha = 1$	(9) $tg\alpha ctg\alpha = 1$	(10) $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$
(11) $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$	(12) $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	(13) $\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$	(14) $\csc^2\alpha = 1 + ctg^2\alpha$

Observación. Se excluyen todos los casos en que el denominador es igual a cero.

Demostración de (7). Multiplicando (1) y (4), se tiene

$$sen\alpha\csc\alpha = \frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y} = \frac{yr}{ry} = 1$$

Las fórmulas (8) y (9) se demuestran de una manera semejante. De (7) , se halla

$$sen\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha},$$

Demostración de (10). Dividiendo el numerador y el denominador del segundo miembro de (3) por r y teniendo en cuenta las igualdades (1) y (2), se halla

$$tg\alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

La fórmula (11) se demuestra de una manera semejante

Demostraciones de (12) a (14). De $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$ elevando al cuadrado ambos miembros, se obtiene $r^2 = x^2 + y^2$ ....(*a*)

Dividiendo en (*a*) cada término por r^2, resulta

$$1 = \left(\frac{r}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 \text{............}(b)$$

Dividiendo en (*a*) cada término por x^2, se tiene $\left(\frac{r}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ .... (*c*)

Dividiendo en (*a*) cada término por y^2, se obtiene $\left(\frac{r}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$............(*d*)

Sustituyendo en el segundo miembro de (*b*), se obtiene (12).

Análogamente, de (*c*) y teniendo en cuenta (5) y (3), es posible demostrar (13), y de (*d*), usando (4) y (6), se demuestra la (14).

Es de suma importancia conocer las fórmulas de (7) a (14).

También se deben recordar las siguientes fórmulas deducidas de ellas

(15)...... $sen\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$, que se deduce de (7).

(16)...... $sen\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, que se deduce despejando $sen\alpha$ en (12).

(17)...... $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$, que se obtiene de la (8).

(18)...... $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$, que se deduce despejando $cos\alpha$ en (12).

(19)...... $tg\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha}$, deducida a partir de la (9).

(20)...... $tg\alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$, obtenida despejando tgA en (13).

(21)...... $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{sen\alpha}{\pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}} = \dfrac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ [De (6) y también de (18) y (16).]

(22)...... $\csc\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha}$, obtenida de la (7).

(23)...... $\csc\alpha = \pm\sqrt{1 + ctg^2\alpha}$, obtenida despejando $\csc A$ en (14).

(24)...... $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, deducida de (8).

(25)...... $\sec\alpha = \pm\sqrt{1 + tg^2\alpha}$, deducida despejando $\sec A$ en (13).

(26)...... $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$, deducida de (9).

(27)...... $ctg\alpha = \pm\sqrt{\csc^2\alpha - 1}$, obtenida despejando $ctgA$ en (14).

(28)...... $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} = \dfrac{\pm\sqrt{1 - sen\alpha}}{sen\alpha}$. [De (11) y también de (16) y (18)].

9.2 Resolución de triángulos oblicuángulos. En geometría plana se enseña a resolver triángulos gráficamente. Es decir, que se enseña a construir un triángulo conociendo.

CASO I. Dos ángulos y un lado.
CASO II. Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.
CASO III. Dos lados y el ángulo comprendido.
CASO IV. Tres lados.

Una vez construido el triángulo buscado se pueden encontrar los elementos desconocidos midiéndolos con una regla y un transportador. Teniendo en cuenta las limitaciones de nuestros sentidos y las imperfecciones de los instrumentos usados, se comprende que los resultados obtenidos de tales medidas serán en general, aproximados. Después de haber construido el triángulo con los elementos dados por los métodos geométricos, se verá que la Trigonometría nos enseña como calcular los elementos desconocidos con cualquier grado de aproximación deseado, y los dos métodos pueden servir entonces como comprobación el uno del otro.
La resolución trigonométrica de triángulos oblicuángulos depende de la aplicación de tres leyes la ley de los senos, la ley de los cosenos y la ley de las tangentes a cuya deducción se va enfocar las siguientes secciones.

a) La ley de los senos

Teorema. La razón de los senos de cualesquiera dos ángulos de un triángulo es igual la razón de sus lados opuestos. Es decir:

$$\frac{sen\alpha}{sen\beta}=\frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta} \quad y \quad \frac{sen\alpha}{sen\gamma}=\frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{sen\alpha}=\frac{c}{sen\gamma}$$

de donde es posible obtener la siguiente equivalencia.

$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}$$

Demostración. La figura 9.1 representa un triángulo cuyos ángulos son todos agudos, y la figura 9.2 representa otro con uno de sus ángulos obtuso (él ángulo α).

Se tiene que demostrar que: $$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma} \qquad (13)$$

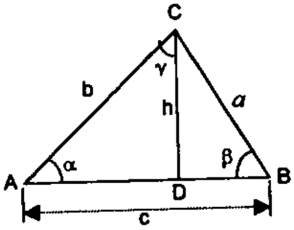


Figura 9.1

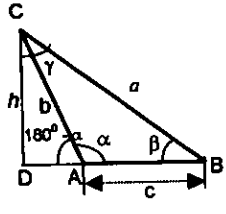


Figura 9.2

Trazar la perpendicular $CD = h$ a *AB* o a la prolongación de *AB*. De la figura 9.1 considerando el triángulo rectángulo *ACD* se tiene que

$$sen\alpha=\frac{h}{b}$$

De la figura 9.2, considerando el mismo triángulo setiene que

$$sen\alpha=(180^0-\alpha)=\frac{h}{b}$$

y como

$sen(180^0 - \alpha) = sen\alpha$, en este caso tambiénse tiene que

(1) $$sen(\alpha) = \frac{h}{b}$$

También, considerando el rectángulo *BCD,* en ambas figuras

(2) $$sen\beta = \frac{h}{a}$$

Dividiendo *(1)* entre *(2)*, se obtiene

$$\frac{sen\alpha}{sen\beta} = \frac{a}{b}$$

de donde se obtiene:

(3) $$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$$

Análogamente, trazando las alturas correspondientes a los vértices A y B, obtenemos:

(4) $$\frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$ y

(5) $$\frac{c}{sen\gamma} = \frac{a}{sen\alpha}$$

respectivamente. Igualando las proporciones *(3), (4), (5)* se obtiene (1).

Teorema. En un triángulo el lado mayor se opone al ángulo mayor (figura 9.3).

Demostración. Ésta consta de dos casos.

Sea *ABC* un triángulo oblicuángulo y *a, b, c* lados opuestos respectivamente .

Primer caso Sea α el ángulo mayor y agudo

Por demostrar que *a* es el lado mayor.

Sean β y γ los otros dos ángulos, $\alpha > \beta$ y $\alpha > \gamma$, entonces $sen\alpha > sen\beta$ y $sen\alpha > sen\gamma$ por $\alpha > \gamma$ ser la función seno creciente entre cero y noventa grados.

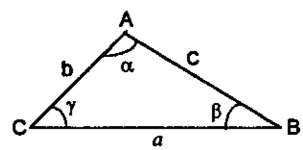


Figura 9.3

$\frac{sen\alpha}{sen\beta} > 1$ y $\frac{sen\alpha}{sen\gamma} > 1$, aplicando la ley de senos se sabe que $\frac{sen\alpha}{sen\beta} = \frac{a}{b}$ y $\frac{sen\alpha}{sen\gamma} = \frac{a}{c}$, entonces de las dos primeras expresiones por transitividad se tiene que $\frac{a}{b} > 1$ y por lo tanto $a > b$ y de las dos segundas se tiene que $\frac{a}{c} > 1$, de donde $a > c$, por tanto *a* es el lado mayor.

Segundo caso. Sea α el ángulo mayor y obtuso
Por demostrar que a es el lado mayor.
Si α es obtuso entonces β y γ son ángulos agudos y $\beta < 180^0 - \alpha$ y $\gamma < 180^0 - \alpha$, entonces
$sen\beta < sen(180^0 - \alpha) = sen\alpha$ $\quad sen\gamma < sen(180^0 - \alpha) = sen\alpha$ por transitividad se tiene que $sen\beta < sen\alpha$ y $sen\gamma < sen\alpha$ de las cuales $1 < \dfrac{sen\alpha}{sen\beta} = \dfrac{a}{b}$ y $1 < \dfrac{sen\alpha}{sen\beta} = \dfrac{a}{b}$ por tanto $b < a$ y $c < a$, es decir que a es el lado mayor.
Este teorema también se puede escribir como:

Teorema el lado menor se opone al ángulo menor y la demostración se hace de forma análoga.

Análisis de la resolución de un triángulo en el caso particular en que se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
Iniciaremos preguntando, ¿sí conoces dos lados *a* , *b* y el ángulo α opuesto al lado *a*, es siempre posible construir un triángulo con estas condiciones?... y la respuesta es <u>**NO**</u>, depende de la comparación que se haga entre los valores *a* y $bsen\alpha$, qué son:

1. Si $a = bsen\alpha$ en la figura 9.4 se observa que $bsen\alpha = CB$ la perpendicular a *AB*, esto implica entonces que hay una solución y se trata de un triángulo rectángulo. *solamente un triángulo* que satisface las condiciones dadas.

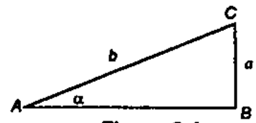


Figura 9.4

2. Si $a > bsen\alpha$, partiendo del triángulo rectángulo y dibujando una circunferencia desde el punto *C*, se tendrán dos soluciones, (figura 9.5).

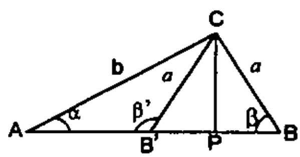


Figura 9.5

También en el caso donde $a = b$ (triángulo isósceles figura 9.6), existe una solución y se cumple que $a > bsen\alpha$.

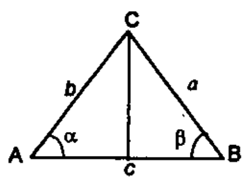


Figura 9.6

3. Si $a < bsen\alpha$ (es decir menor que *CP* la perpendicular, se tendrá que, usando ley de senos se tiene (figura 9.7).

$$\frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\alpha}{a} \Rightarrow \quad sen\beta = \frac{bsen\alpha}{a}$$ y también

que $sen\beta > 1$, y el triángulo es imposible.

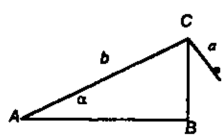


Figura 9.7

Estos resultados pueden resumirse como sigue:

Dos soluciones: Si α es agudo y el valor de a está comprendido entre b y $bsen\alpha$.

Ninguna solución: Si α es agudo y $a < bsen\alpha$, o si α es obtuso y $a < b$ o $a = b$.

Una solución: En todos los demás casos.

El número de soluciones puede generalmente determinarse por una construcción a escala natural o reducida del triángulo. En caso de duda hállese el valor de $bsen\alpha$ y hágase las pruebas anteriores.

b) **Ley de los cosenos**

Ésta es más empleada que la ley de los senos en cualquier tipo de problema de aplicación donde aparezca un triángulo oblicuángulo, esta ley es sin duda la más adecuada para la solución.

Teorema. *En un triángulo cualquiera el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.*

Demostración. Sean a, b y c la longitud de los lados del triángulo y α el ángulo que forman los lados que miden b y c. El teorema que se va a demostrar dice que

(I) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Considérese una cualquiera de las dos figuras 9.8 ó 9.9.

Se tendrá

$a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$

$b^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$

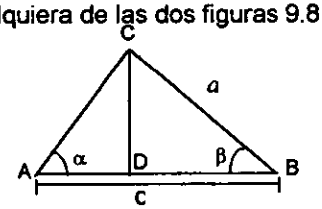


Figura 9.8

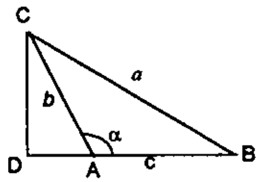


Figura 9.9

Restando estas igualdades, se obtiene

(1) $$a^2 - b^2 = \overline{DB}^2 - \overline{AD}^2$$

En la figura 9.8, $DB = c - AD$. Elevando al cuadrado y sustituyendo en el segundo miembro de (1), se obtiene (ya que $\overline{AD}^2$ se cancela)

(2) $$a^2 - b^2 = c^2 - 2c \bullet AD$$

En la figura 9.2, $DB = AD + c$. Elevando al cuadrado y sustituyendo en el segundo miembro de (1), resulta

(3) $$a^2 - b^2 = c^2 + 2c \bullet AD$$

Pero, del triángulo rectángulo *CAD* en la figura 9.8, se tiene

(4)

$AD = b\cos\alpha$ *(Por el hecho de que en un triángulo rectángulo :*

Un cateto = hipotenusa por el coseno del ángulo comprendido)

Sustituyendo este valor de *AD* en el segundo miembro de (2), y despejando a^2, se halla

(5) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Y del triángulo rectángulo *CAD* en la figura 9.2

(6)

$AD = b\cos\angle DAC$ *(Por el hecho de que en un triángulo rectángulo:*

Un cateto = hipotenusa por el coseno del ángulo comprendido)

Pero $\alpha = 180^0 - \angle DAC$ y, por lo tanto,

$\cos\alpha = -\cos\angle DAC$ *(Por reducción de ángulos en el primer cuadrante ya que* $\angle\alpha > 90^0$ *).*

Entonces, por (6), $AD = -b\cos\alpha$ (en la figura 2).

Sustituyendo este valor de *AD* en el segundo miembro de (3), y despejando a^2, se obtiene (5), como anteriormente. Por tanto, en cualquiera de las dos figuras,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Análogamente

(7) $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

(8) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Obsérvese que si $\alpha = 90^0$, entonces $\cos\alpha = 0$, y (5) se convierte en $a^2 = b^2 + c^2$, que es la conocida relación (Pitágoras) entre los lados de un triángulo rectángulo, en el que α es el ángulo recto.

Despejando en (5), (7) y (8) los cosenos de los ángulos, se obtiene

(9) $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(10) $$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

(11) $$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Estas ecuaciones son útiles para hallar los ángulos de un triángulo conocidos sus lados. Las ecuaciones (5), (7) y (8) pueden usarse para hallar el tercer lado de un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo que forman. Los otros ángulos pueden hallarse después ya sea por la ley de los senos o por las ecuaciones (9) a (11).

c) Ley de las tangentes

La presente ley es menos empleada que las dos leyes anteriores, pero cuando en geometría analítica se trata el tema de ángulo entre dos rectas y los ángulos interiores de un triángulo muestra su gran importancia.

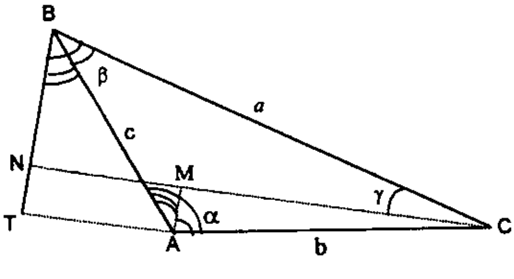


Figura 9.11

La razón entre la suma de dos lados y la resta de los mismos es igual a la razón de la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos a estos lados y la tangente de la mitad de la diferencia de los mismos ángulos. Donde los lados *a* y *b* deben se ser diferentes.

Tomando los lados *a* y *b* del triángulo ABC, en la figura 9.10, se va a demostrar que

(1) $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\frac{1}{2}(\alpha+\alpha)}{tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

Demostración. Trácese *NC*, bisectriz del ángulo γ, *BN* y *AM* perpendiculares a *NC*, y *AT* paralela a *NC* hasta encontrar a la prolongación de *BN*. Se observa que como el $\angle ACM=\angle NCB$ por ser *NC* bisectriz de $\angle\gamma$.

y como $\angle AMC=\angle BNC=90^0$ entonces $\angle MAC=\angle NBC$ y también $\angle MAB=\angle NBA$ por que son ángulos alternos internos entre las paralelas *CB* y *AM*.

Por otra parte de la figura; se tiene que:

$$\angle NBC=\angle MAC=90^0-\frac{1}{2}\gamma=\frac{180^0-\gamma}{2},\quad \text{y}\quad 180^0-\gamma=\alpha+\beta$$

resulta

(1) $$\angle NBC=\angle MAC=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

Análogamente,

(2) $$\angle TAB=\angle MAB=\alpha-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Ahora, $$tg\angle TBA=\frac{TA}{BT}=\frac{NM}{BT}=\frac{NC-MC}{BN+NT}$$

Y como $NT=AM$ resulta

(3) $$tg\angle TBA=\frac{NC-MC}{BN+AM}$$

En el triángulo rectángulo BNC,

(4) $$NC = asen\angle NBC$$

(5) $$BN = a\cos\angle NBC$$

En el triángulo rectángulo ACM,

(6) $$MC = bsen\angle MAC$$

(7) $$MA = b\cos\angle MAC$$

Sustituyendo de (4) a (7) en el segundo miembro de (3), y usando (1) y (2), se obtiene

(8) $$tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{(a-b)sen\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{(a+b)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$ (Por la identidad $tg\alpha=\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$)

$$tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{a+b}tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

Escribiendo esto en forma de proporción, se obtiene (I).

Si $a>b$, entonces $\beta>\alpha$, y la diferencias $a-b$ y $\alpha-\beta$ son negativas. La ecuación también es verdadera en este caso, pero, para que no haya cantidades negativas, es mejor escribir la ecuación en la forma

	Análogamente	
$\dfrac{b+a}{b-a}=\dfrac{tg\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{tg\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$	$\dfrac{c+a}{c-a}=\dfrac{tg\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}{tg\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}$	$\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{tg\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{tg\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}$

Aplicación de la ley de las tangentes.

Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido, como a, b y $\angle\gamma$, la ley de las tangentes puede emplearse para encontrar los dos ángulos desconocidos α y β. Como se conocen los valores que abajo se señalan, y suponiendo también que se conoce la tangente de un ángulo, se conoce el ángulo y se procede de la siguiente manera.

$$a+b,\quad a-b,\quad \alpha+\beta=(180^0-\gamma)$$

y por lo tanto, también $tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ son conocidas, quitando denominadores en (I) y despejando la cantidad desconocida $tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Esto da

(II) $$tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{a+b}tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

Está última identidad nos permitiría saber el valor de $\alpha+\beta$, y entonces se puede encontrar el valor de α y β.

CAPÍTULO X

ANÁLISIS TRIGONOMÉTRICO

En este capítulo se presenta el resto de las identidades trigonométricas o análisis trigonométrico, estas son entre otras la suma y resta de dos ángulos, ángulo doble en términos de un ángulo, razones de ángulos múltiples, razones de un ángulo en términos de las de la mitad del ángulo, etcétera.

Las identidades trigonométricas entre otras es útil al momento de reducir expresiones en las integrales por mencionar algún ejemplo, es decir son muy necesarias para hacer álgebra.

10.1 Razones trigonométricas de la suma y de la diferencia de dos ángulos. Se va a proceder ahora a obtener las razones trigonométricas de la suma y la diferencia de dos ángulos conocidas las de estos ángulos. Las ecuaciones fundamentales que se van a deducir son las siguientes:

(I) $$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta$$

(II) $$sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - \cos\alpha sen\beta$$

(III) $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$$

(IV) $$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta$$

Para probar estas identidades es necesario el siguiente lema.

Lema. Si en el ΔABC figura 10.1, se traza la perpendicular al segmento opuesto del ángulo recto y se llama O al punto de la intersección, se obtienen los triángulos ΔABO, ΔBOC y ΔABC que son semejantes entre sí.

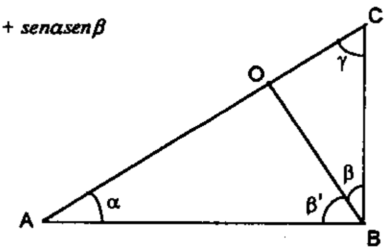


Figura 10.1

Demostración

$\alpha+\gamma=90^0=\gamma+\beta'$ por ser ángulos agudos de triángulos rectángulos, por lo tanto $\alpha=\beta'$. También se pudo haber usado $\alpha+\gamma=90^0=\alpha+\beta$ de donde $\gamma=\beta$.

Seno y coseno de la suma de dos ángulos.

Demostración de las ecuaciones (I) y (III). Sean α y β dos ángulos positivos menores de 90^0. En el circulo trigonométrico (de radio 1) cuyo centro es *O*, trácese el ángulo $AOP=\alpha$ y el ángulo $POQ=\beta$. Entonces el ángulo $AOQ=\alpha+\beta$.

En la figura 10.2 el ángulo $\alpha+\beta$ es menor de 90°, y en la figura 10.3 es mayor de 90^0.

En ambas figuras, *QD* es perpendicular a *OP; QC* y *DE* son perpendiculares a *OA* (o a la prolongación de *OA*), y *FD* es paralela a *OA*. Los triángulos rectángulos ΔOED, $\Delta OCO'$, $\Delta DFO'$ son semejantes y por el lema anterior el $\Delta DFO'$ es semejante al ΔQFD por lo tanto el ΔDFQ es semejante al ΔOED de aquí se obtiene que el $\angle FQD=\alpha$

Del triángulo rectángulo *ODQ*, se tiene que

(1) $$OD = OQ\cos\beta = \cos\beta$$

(2) $$DQ = OQ\,sen\beta = sen\beta$$

Y del triángulo rectángulo *OCQ*, $sen(\alpha+\beta) = CQ$.

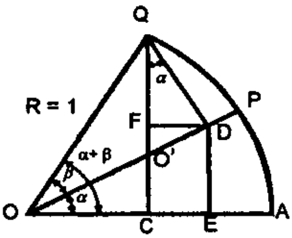


Figura 10.2

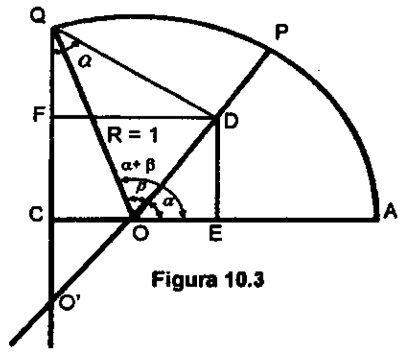


Figura 10.3

Pero $$CQ = CF + FQ = ED + FQ$$

Por lo tanto,

(3) $$sen(\alpha+\beta) = ED + FQ$$

En el triángulo rectángulo *OED*,

(4) $$ED = OD\,sen\alpha = sen\alpha\cos\beta$$ Por (1).

En el triángulo rectángulo *DFQ*,

(5) $$FQ = DQ\cos\alpha = \cos\alpha\,sen\beta$$ Por (2)

Sustituyendo en (3) los valores de (4) y (5), se tiene

(I) $$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,sen\beta$$

Nuevamente del triángulo OC*Q*, $\cos(\alpha+\beta) = OC$

Pero $$OC = OE - CE = OE - FD$$

en ambas figuras, ya que los segmentos *OC, OE, CE* sobre el diámetro horizontal son segmentos dirigidos.

Por tanto,

(6) $$\cos(\alpha+\beta) = OE - FD$$

En el triángulo rectángulo *OED*,

(7) $$OE = OD\cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta$$ Por (1)

En el triángulo rectángulo *DFQ*,

(8) $$FD = DQ\,sen\alpha = sen\alpha\,sen\beta$$ Por (2)

Sustituyendo en (6) los valores de (7) y (8), se tiene

(III) $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$$

En la deducción de las ecuaciones (I) y (III) se supuso que cada uno de los ángulos α y β era positivo y menor de 90^0.
Es un hecho, sin embargo, que estas ecuaciones son verdaderas para los valores de α y β de cualquier magnitud, positiva o negativa.

Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos. Las formulas (II) y (IV) son casos especiales de (I) y (III) respectivamente. Así, por ejemplo, si en (I),

$$sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$$

sustituimos β por $-\beta$, se tiene:

(I) $$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha sen(-\beta)$$

Pero $\cos(-\beta)=\cos\beta$ y $sen(-\beta)=-sen\beta$

Sustituyendo en (1), resulta:

(II) $$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta$$

Análogamente, si en (III),

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$$

sustituyendo β por $-\beta$, se obtiene:

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-sen\alpha sen(-\beta)$

Pero $\cos(-\beta)=\cos\beta$ y $sen(-\beta)=-sen\beta$
Sustituyendo en (2), resulta:

(IV) $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta$$

Tangente y cotangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

De las ecuaciones $tg\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, $sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\beta sen\alpha$ y de $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$. Se obtiene:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta}.$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$, se tendrá:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\frac{sen\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{sen\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\frac{sen\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\frac{sen\beta}{\cos\beta}}$$

Como $\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha$ y $\frac{sen\beta}{\cos\beta}=tg\beta$, resulta:

(V) $$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$

De la misma manera, de las ecuaciones $sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta sen\beta$

y de $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta$, se obtiene

VI) $$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\ tg\beta}$$

De las ecuaciones: $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$, $sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\ \cos\beta+\cos\beta\ sen\alpha$ y de $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-sen\alpha\ sen\beta$, se obtiene:

$$ctg=(\alpha+\beta)=\frac{\cos\alpha\ \cos\beta-sen\alpha\ sen\beta}{sen\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ sen\beta}$$

Dividiendo numerador y denominador por $sen\alpha sen\beta$, resulta:

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\cos\alpha\ \cos\beta}{sen\alpha\ sen\beta}-\dfrac{sen\alpha\ sen\beta}{sen\alpha\ sen\beta}}{\dfrac{sen\alpha\ \cos\beta}{sen\alpha\ sen\beta}+\dfrac{\cos\alpha\ sen\beta}{sen\alpha\ sen\beta}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}\dfrac{\cos\beta}{sen\beta}-1}{\dfrac{\cos\beta}{sen\beta}+\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}}$$

Como $\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}=ctg\alpha$ y $\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}=ctg\alpha$, se obtiene

(VII) $$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\ ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

De la misma manera, de las ecuaciones (II) y (IV) es posible demostrar que

(VIII) $$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\ ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

Las ecuaciones (I) a (VIII) pueden escribirse en forma más resumida como sigue:

$$sen(\alpha\pm\beta)=sen\alpha\ \cos\beta\pm\cos\alpha\ sen\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\alpha)=\cos\alpha\ \cos\beta\,\mathrm{m}\,sen\alpha\ sen\beta,$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\,\mathrm{m}\,tg\alpha\ tg\alpha},$$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\ ctg\beta\pm 1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}.$$

Las ecuaciones deducidas en este capítulo demuestran el Teorema de adición para razones trigonométricas, a saber, que *cualquier razón trigonométrica de la suma algebraica de dos ángulos puede expresarse en términos de las razones trigonométricas de esos ángulos.*

10. 2 Razones trigonométricas del doble de un ángulo en términos de las del mismo ángulo.

Las ecuaciones (I) a (VIII) son verdaderas para todos los valores posibles de α e β; por tanto, deben ser válidas cuando α es igual a β.
Para hallar $sen2\alpha$ tómese (I),

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cos\beta + \cos\alpha \, sen\beta$$

y supóngase $\alpha = \beta$. Resulta:

$$sen(\alpha+\alpha) = sen\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \, sen\alpha$$

(IX) $$sen2\alpha = 2sen\alpha \cos\alpha$$

Para hallar $\cos 2\alpha$ tomando (III),

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - sen\alpha \, sen\beta$$

y haciendo $\alpha = \beta$. Se obtiene:

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - sen\alpha \, sen\alpha$$

(X) $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

Como $\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$ (X) puede escribirse como

(X') $$\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$$

O también, como $sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ (X) también puede ser escrita como

(X'') $$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Para hallar $tg2\alpha$ tomando (V),

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \, tg\beta}$$ y sustituyendo β por α.

Resulta:

$$tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha \, tg\alpha}$$, o sea

(XI) $$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Razones trigonométricas de ángulos múltiples. El método de la última sección puede extenderse fácilmente para hallar las razones de $n\alpha$ en términos de las razones α si *n* es un entero.
Para hallar $sen3\alpha$ en términos de $sen\alpha$ tomando (I).

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cos\beta + \cos\alpha \, sen\alpha$$

y sustituyendo β por 2α. Esto resulta:

$$sen(\alpha+2\alpha) = sen\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \, sen2\alpha$$ o sea

$$sen3\alpha = sen\alpha\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right) + \cos\alpha(2sen\alpha\cos\alpha) =$$

$$= 3sen\alpha\cos^2\alpha - sen^3\alpha = 3sen\alpha\left(1 - sen^2\alpha\right) - sen^3\alpha$$

$$= 3sen\alpha - 4sen^3\alpha$$

Para hallar $tg4\alpha$ en términos de $tg\alpha$, considerando (V) y (XI)

$$tg4\alpha = tg(2\alpha+2\alpha) = \frac{2tg2\alpha}{1 - tg^2 2\alpha} = \frac{4tg\alpha(1 - tg^2\alpha)}{1 - 6tg^2\alpha + tg^2\alpha}$$

10.3 Razones trigonométricas de un ángulo en términos de la mitad del mismo ángulo.

De (IX) $$sen\alpha = 2sen\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

Reemplazando 2α por α y, en consecuencia, α por $\frac{1}{2}\alpha$. Se obtiene

(XII) $$sen\alpha = 2sen\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

De (X), $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

Reemplazando 2α por α y α por $\frac{\alpha}{2}$ Resulta:

(XIII) $$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2}.$$

De (XI),

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Reemplazando 2α, por α, y α por $\frac{\alpha}{2}$. Esto da

(XIV) $$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

10.4 Razones trigonométricas de la mitad de un ángulo en términos del coseno del mismo ángulo.

De (X') y (X") se obtiene

$$2sen^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

y

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha.$$

Despejando $sen\alpha$ y $\cos\alpha$, resulta

$$sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}},$$

y

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Si ahora se sustituye 2α por α y, en consecuencia, α por $\frac{\alpha}{2}$ resulta:

(XV) $$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

y

(XVI) $$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Para hallar $tg\frac{\alpha}{2}$ basta dividir (XV) por (XVI), obteniéndose

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}},$$

o sea,

(XVII) $$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Multiplicando numerador y denominador del segundo miembro por $\sqrt{1-\cos\alpha}$ resulta

(XVIII) $$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha},$$

y multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{1-\cos\alpha}$ se obtiene

(XIX) $$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$$

Como la tangente y la cotangente son razones recíprocas, se tiene inmediatamente de (XVII)

(XX) $$ctg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

De (XVIII) y (XIX), se tiene

(XXI) $$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{sen\alpha}$$

(XXII) $$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{sen\alpha}{1-\cos\alpha}$$

a) Transformación de sumas y diferencias de senos y cosenos en producto.

De las identidades de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

(I) $sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha\, sen\beta$

(II) $sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha\, sen\beta$

(III) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha\, sen\beta$

(IV) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha\, sen\beta$

se tiene

(a) $sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)=2sen\alpha\cos\beta$. Sumando (I) y (II)

(b) $sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$. Restando (II) de (I)

(c) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$. Sumando (III) y (IV)

(d) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2sen\alpha\, sen\beta$. Restando (IV) de (III)

Haciendo

$\alpha+\beta=\gamma$ y $\alpha-\beta=\rho$, sumando y restando, se obtienen $2\alpha=\alpha+\beta$ y $2\beta=\alpha-\beta$

$$\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\qquad\qquad \rho=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Ahora remplazando los valores de $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ en función de γ y ρ, en las ecuaciones *(a)* a *(d)* inclusive, se obtiene

(XXIII) $$sen\gamma + sen\rho = 2sen\frac{(\gamma+\rho)}{2}\cos\frac{(\gamma-\rho)}{2}.$$

(XXIV) $$sen\gamma - sen\rho = 2\cos\frac{(\gamma+\rho)}{2}sen\frac{(\gamma-\rho)}{2}$$

(XXV) $$\cos\gamma + \cos\rho = 2\cos\frac{(\gamma+\rho)}{2}\cos\frac{(\gamma-\rho)}{2}.$$

(XXVI) $$\cos\gamma - \cos\rho = -2sen\frac{(\gamma+\rho)}{2}sen\frac{(\gamma-\rho)}{2}.$$

Una demostración de la ley de las tangentes puede deducirse por medio de (XXII) y (XXIV). La demostración es como sigue:

Por la ley de los senos, $$\frac{a}{sen\gamma} = \frac{b}{sen\rho}$$

y por las propiedades de componer y dividir de las proporciones, resulta

(e) $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{sen\gamma + sen\rho}{sen\gamma - sen\rho}$$

La expresión deseada para el segundo miembro se obtiene de (XXIII) y (XXIV), miembros se obtiene lo siguiente:

$$\frac{sen\gamma + sen\rho}{sen\gamma - sen\rho} = \frac{2sen\frac{(\gamma+\rho)}{2}\cos\frac{(\gamma-\rho)}{2}}{2\cos\frac{(\gamma+\rho)}{2}sen\frac{(\gamma-\rho)}{2}} =$$

$$= \frac{sen\frac{(\gamma+\rho)}{2}}{\cos\frac{(\gamma+\rho)}{2}} \bullet \frac{\cos\frac{(\gamma-\rho)}{2}}{sen\frac{(\gamma-\rho)}{2}} = tg\frac{(\gamma+\rho)}{2}ctg\frac{(\gamma-\rho)}{2}.$$

Pero $$ctg\frac{(\gamma-\rho)}{2} = \frac{1}{tg\frac{(\gamma-\rho)}{2}}.$$

Por tanto,

(f) $$\frac{sen\gamma + sen\rho}{sen\gamma - sen\rho} = \frac{tg\frac{(\gamma+\rho)}{2}}{tg\frac{(\gamma-\rho)}{2}}.$$

10. 5 Problemas de análisis trigonométrico

1. Hallar $sen 22\frac{1}{2}^{0}$, sabiendo que $\cos 45^{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución Empleando la identidad $sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, Si $\alpha = 45^{0}$, entonces $\frac{\alpha}{2} = 22\frac{1}{2}^{0}$, y sustituyendo el la identidad anterior se obtiene

$$sen22\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2})}\bullet\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2(2)}}=$$
$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

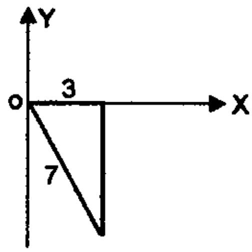
2. Utilizar la fórmula para el ángulo mitad para encontrar el valor exacto de $sen15^0$.

Solución Empleando la identidad $sen\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ y como $\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, sustituyendo resulta

$$sen15^0=\sqrt{\frac{1-\cos 30^0}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

3. Encontrar el valor del $\cos\theta=\frac{3}{7}$, θ en el cuadrante IV.

Solución La figura de la derecha ilustra la situación del ángulo



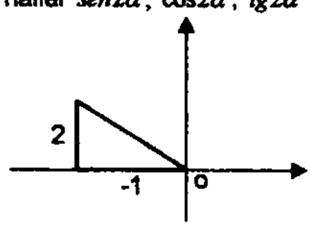
Empleando la identidad $\cos\frac{1}{2}\theta=\frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{2}$, sustituyendo valores y haciendo un poco de álgebra se tiene

$$\cos\frac{1}{2}\theta=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{7}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{7+3}{7}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{10}{7}}{2}}=\sqrt{\frac{10}{14}}=$$

$\sqrt{\frac{5}{7}\bullet\frac{7}{7}}=\sqrt{\frac{35}{49}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}}=\frac{\sqrt{35}}{7}$; por tanto el $\cos\frac{1}{2}\theta=\frac{\sqrt{35}}{7}$

4. Dado $sen\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ y α está en el segundo cuadrante, hallar $sen2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg2\alpha$

Solución. Como $sen\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ y α está en el segundo cuadrante, se obtiene



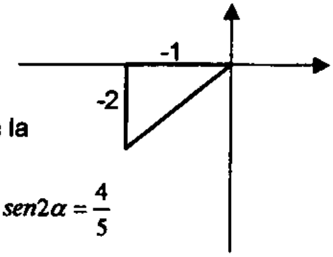
$sen\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $tg\alpha=-2$

Sustituyendo en $sen2\alpha=2sen\alpha\cos\alpha=2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{4}{5}$, que es el valor de la función.

De igual forma, se obtiene sustituyendo en $\cos 2\alpha = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1-4}{5} = -\frac{3}{5}$, que es el valor de $\cos 2\alpha$.

Y finalmente para $tg2\alpha$, se sustituye en $tg2\alpha = \frac{2tgx}{1-tg^2\alpha} = \frac{2(-2)}{1-(-2)^2} = \frac{-4}{1-4} = \frac{4}{3}$; que es el valor del ángulo doble de la función tangente.

5. Sabiendo que $tg2\alpha$ y que α está en el tercer cuadrante, hallar $sen2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg2\alpha$.



Solución. De la figura se obtiene $sen2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, y como dato se tiene $tg\alpha = 2$.

Para el ángulo doble de la función *senα*. Sustituyendo en la Identidad trigonométrica se tiene.

$sen2\alpha = 2senx\cos x = 2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2(2)}{5} = \frac{4}{5}$, por tanto $sen2\alpha = \frac{4}{5}$

Calculando el ángulo doble para la función coseno, sustituyendo en la identidad trigonométrica, resulta.

$\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$, por lo que $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$

Análogamente para $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2(2)}{1-(2)^2} = \frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}$; de donde $tg2\alpha = -\frac{4}{3}$

Suma y diferencia de ángulos

1. Hallar $sen75^0$, usando $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta$, y las funciones de 45^0, 30^0.

Solución. De las identidades trigonométricas elementales se tiene: $sen45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $sen30^0 = \frac{1}{2}$; sustituyendo en la identidad trigonométrica para la suma de ángulos

$sen75^0 = sen(45^0 + 30^0) = sen45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 sen30^0$.

$sen75^0 = (45^0 + 30^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bullet \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = (\frac{\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} \bullet (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} =$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; que es el valor de la función dada.

2. Hallar $\cos(\alpha+\beta)$ teniendo como datos a) $sen\alpha=\frac{3}{5}$ y b) $sen\beta=\frac{5}{13}$ siendo α y β ángulos positivos.

Solución. Para calcular la función coseno de ambos casos
Se recurre a las figuras siguientes

Por teorema de Pitágoras el cateto
Adyacente en la figura *a* vale 4.
y en la figura *b* vale 12.

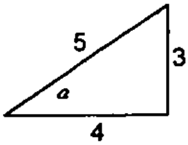


Fig.a

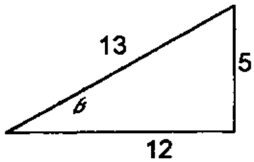


Fig.b

Entonces en la figura *a* $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ y en la figura *b* $\cos\beta=\frac{12}{13}$.

Sustituyendo en la identidad para el coseno de la suma de dos ángulos se tiene

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta=\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\right)=\frac{48}{65}-\frac{15}{65}=\frac{33}{65};$$

por tanto $\cos(\alpha+\beta)=\frac{33}{65}$

2. Encontrar los valores del seno, del coseno y de la tangente de 15^0, mediante $15^0=45^0-30^0$

Solución. Empleando las identidades para cada caso se tiene:

Para la función seno

$sen15^0=sen(45^0-30^0)=sen45^0\cos30^0-\cos45^0 sen30^0$; sustituyendo los valores para cada función resulta.

$sen15^0=sen(45^0-30^0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\bullet\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}})\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, que es el valor buscado.

Para la función coseno

$\cos15^0=\cos(45^0-30^0)=\cos45^0\cos30^0+sen45^0 sen30^0$; sustituyendo los valores correspondientes resulta

$$\cos15^0=\cos(45^0-30^0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\bullet\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}})\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Y finalmente para la función tangente, sustituyendo los valores correspondientes resulta

$$tg15^0=tg\left(45^0-tg30^0\right)=\frac{tg45^0-tg30^0}{1+tg45^0tg30^0}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)}\bullet\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=$$

$= \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} = 2-\sqrt{3}$, por tanto $\tan 15^0 = \tan 45^0 - \tan 30^0 = 2-\sqrt{3}$

3. Demostrar que $sen180^0 = 0$ y $\cos 180^0 = -1$, usando las funciones de 120^0 y 60^0

Solución. Teniendo en cuenta las siguientes identidades:

Para $sen180^0 = 0$

$sen60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ $sen120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^0 = -\frac{1}{2}$

Para $120^0+60^0) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

Por lo que la igualdad $sen180^0 = 0$ es verdadera.

Para $\cos 180^0 = -1$, de manera análoga sustituyendo en:

$\cos(120^0+60^0) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$,

De donde se concluye que efectivamente $\cos 180^0 = -1$

4. Demostrar que : $\tan(45^0 - a) + \tan(45^0 + a) = 2\sec 2a$

Como $\tan 45^0 = 1$ y sustituyendo en las identidades

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$ y $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{1-tg\alpha}{1+1(tg\alpha)} + \frac{1+tg\alpha}{1-1(tg\alpha)} = \frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha} + \frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha} =$

$= \frac{(1-tg\alpha)(1-tg\alpha)+(1+tg\alpha)(1+tg\alpha)}{(1+tg\alpha)(1-tg\alpha)} = \frac{1-tg\alpha-tg\alpha+tg^2\alpha+1+tg\alpha+tg\alpha+tg^2\alpha}{(1+tg\alpha)(1-tg\alpha)} =$

$= \frac{1+1-2tg\alpha+2tg\alpha+2tg^2\alpha}{(1+tg\alpha)(1-tg\alpha)} = \frac{2+2tg^2\alpha}{1-tg\alpha+tg\alpha-tg^2\alpha} = \frac{2(1+tg^2\alpha)}{1-tg^2\alpha}$

como $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, sustituyendo en la última igualdad se tiene

$$= \frac{2\left(1+\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{1-\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\left(\frac{\cos^2\alpha+sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{\frac{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\cos^2\alpha(\cos^2\alpha+sen^2\alpha)}{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-sen^2\alpha)} = \frac{2(\cos^2\alpha+sen^2\alpha)}{(\cos^2\alpha-sen^2\alpha)} =$$

se sabe que $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$; sustituyendo resulta

$= \frac{2(1)}{\cos^2\alpha - sen\alpha} = 2\sec 2\alpha$; debido q que $\cos a = \frac{1}{\sec a}$ y $\cos 2a = \cos^2 a - sen^2 a$; con lo que se comprueba que la identidad es verdadera.

10.6 Razones trigonométricas de la mitad de los ángulos de un triángulo en términos de sus lados.

Para deducir ahora las ecuaciones relativas a la mitad de los ángulos de un triángulo se procederá como sigue. Desígnese a la mitad de la suma de los lados de un triángulo (es decir, a la mitad del perímetro) por *s*. Entonces,

(1) $$2s = a + b + c.$$

Restando $2c$ a ambos miembros,

$$2s - 2c = a + b + c - 2c,$$

o sea,

(2) $$2(s-c) = a + b - c$$

Análogamente

(3) $$2(s-b) = a - b + c$$

(4) $$2(s-a) = -a + b + c$$

De las ecuaciones $2sen^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$ y $2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$, sustituyendo *A* por α, se obtiene

(5) $$2sen^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

(6) $$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

Pero de $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; (de la ley de los cosenos), por tanto, (5) se convierte en

$$2sen^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} =$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

[Siendo $a^2-(b-c)^2$ el producto de la suma y diferencia de a y $b-c$.]

$$= \frac{2(s-c)2(s-b)}{2bc}.$$ Por (2) y (3)

De donde,

(I) $$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Análogamente, (6) se convierte en

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} =$$

$$\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s2(s-a)}{2bc}$$

De donde,

(II) $$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

Como $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, se obtiene por sustintución, de (I) y (II),

(III) $$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Como cualquier ángulo debe ser menor de 180°, $\frac{\alpha}{2}$ debe ser menor de 90° y todas las razones de $\frac{\alpha}{2}$ deben ser positivas. Por esto solamente se han tomado los signos positivos de los radicales en (I), (II) y (III).

De manera semejante se puede obtener:

$sen\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$	$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$	$tg\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$
$sen\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$	$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$	$tg\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

Según lo que se acaba de estudiar se dispone de tres ecuaciones diferentes para hallar el valor de cada ángulo. Si la mitad del ángulo se aproxima mucho a 0^0, la ecuación para el coseno no dará un resultado muy exacto, porque los cosenos de los ángulos cercanos a 0^0 difieren muy poco en valor. Y lo mismo se verifica para la ecuación del seno cuando la mitad se aproxima mucho a 90^0. Por tanto, en el primer caso se recomienda usar la ecuación del seno y en el segundo caso la del coseno. Sin embargo, en general, es de preferirse la ecuación de la tangente.

Cuando han sido encontrados dos ángulos, α y β por ejemplo, el tercer ángulo γ puede encontrarse por la relación $\alpha+\beta+\gamma=180^0$; pero es mejor calcular todos los ángulos a partir de las ecuaciones como una prueba de la exactitud de los resultados.

Se acostumbra expresar la identidad (III) como sigue:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)^2}}$$

[Esta última expresión se ha obtenido multiplicando numerador y denominador de la fracción que está bajo el radical por s - a]

$$=\frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Designando la parte radical de la expresión por *r*,

(IV)
$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

y se obtiene

(V)
$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$$

Análogamente

(VI)
$$tg\frac{\beta}{2}=\frac{r}{s-b}$$

(VII)
$$tg\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-c}$$

Círculo Inscrito. En un triángulo al punto de intersección de las bisectrices se toma como centro y la distancia de las perpendiculares de los lados como radio, y así con el centro y el radio se dibuja el circulo inscrito.

Como se muestra en la figura 10.4, y se obtienen 6 triángulos iguales dos a dos, por que tienen dos ángulos iguales uno recto y el otro agudo de la bisectriz.

Geométricamente se puede demostrar que r de la ecuación (III) es el radio del circulo inscrito.

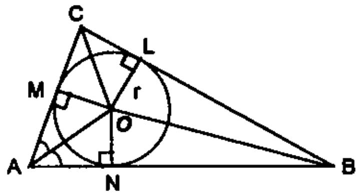


Figura 10.4

Demostración. En la figura 3, ángulo $NAO=\frac{\alpha}{2}$, ya que los triángulos *ANO* y *AMO* son iguales (ambos son rectos).

(7)
$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{NO}{NA}$$

Si *s* representa la mitad del perímetro, se tiene

$$2s=AN+NB+BL+LC+CM+MA$$

Pero $NB=BL,\quad CM=LC,\quad MA=AN$; por lo tanto, $2s=2AN+2BL+2LC$,

o sea, $s=AN+(BL+LC)=AN+a$,

Esto da, $AN=s-a$. Sustituyendo en (7) resulta

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{NO}{s-a}.$$

Comparando (V) y (IV), se observa que

$$NO=r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

10.7 Ecuaciones trigonométricas: Aquí se presenta de manera somera los principios fundamentales de la teoría de la ecuaciones trigonométricas y aunque ahora puede parecer lejano el día en que se tenga que hacer uso de estos conocimientos no esta por demás iniciar ahora el estudio de esta teoría de ecuaciones que involucran sólo funciones y del mismo ángulo las cuales no se resuelven como las algebraicas. Estas ecuaciones no son válidas cuando la función involucrada se indefine.

Ejemplo 1. $sen x \csc x = 1$

PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Aunque no existe un método general para resolver ecuaciones trigonométricas, se tienen tres procedimientos por medio de los cuales se puede resolver casi cualquier ecuación trigonométrica.

a) La ecuación puede descomponerse en factores.

Ejemplo1. Resolver , factorizando $sen x$, se tiene:

$sen x(1-2\cos x)=0$ e igualando a cero cada uno de los factores, resulta

$$sen x = 0 \quad \text{y} \quad x = 0,\ 2\pi$$

$$1-2\cos x = 0 \text{ ó } \cos x = \frac{1}{2} \text{ y } x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$$

comprobación $\quad sen x - 2 sen x \cos x = 0 - 2(0)(1) = 0$

Para $x = 0$

Así las soluciones buscadas $(0 \le x \le 2\pi)$ son $x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3}$

b) Las distintas funciones que aparecen en la ecuación se pueden expresar en términos de una sola función.

Ejemplo 2. resolver $2tg^2x + \sec^2 x = 2$. Al sustituir $\sec^2 x$ por $1 + tg^2 x$, se tiene

$$2tg^2x + (1+tg^2x) = 2, \Rightarrow 3tg^2x = 1, \therefore tgx = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

De $\quad tgx = \frac{\sqrt{3}}{3},\ x = \frac{\pi}{6},$ y $\frac{7\pi}{6}$; $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x = \frac{5\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$

$$(0 \le x < 2\pi) \text{ son } x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}.$$

Ejemplo 3. Resolver $\sec x + tgx = 0$

Al multiplicar la ecuación $\sec x + tgx = \frac{1}{\cos x} + \frac{sen x}{\cos x} = 0$ por $\cos x$,

se tiene $\quad 1 + sen x = 0$ ó $sen x = -1$; entonces $x = \frac{3\pi}{2}$

Sin embargo, ni $\sec x$ ni tgx están definidas cuando $x = \frac{3\pi}{2}$ con lo que la ecuación no tiene solución.

c) Ambos miembros de la ecuación se elevan al cuadrado.

Ejemplo 4. Resolver $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

Se aplica el procedimiento utilizado en B), habría que sustituir $senx$ por $\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ ó $\cos x$ por $\pm\sqrt{1-sen^2 x}$ lo que introduciría radicales en la ecuación. Para evitar esta dificultad, se escribe la ecuación en la forma $senx = 1-\cos x$ y se elevan ambos miembros al cuadrado. Entonces

$$sen^2 x = 1-2\cos x+\cos^2 x$$
$$1-\cos^2 x = 1-2\cos x+\cos^2 x$$
$$2\cos^2 x-2\cos x = 2\cos x(\cos x-1) = 0$$

De $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$, de $\cos x = 1,\ x = 0$

Como puede apreciarse resolver ecuaciones trigonométricas no es fácil, ya que se requiere un gran dominio de las identidades trigonométricas.

Conclusiones

Estas notas son presentadas con la finalidad de reunir los temas para un curso de Geometría Plana y Trigonometría Plana, que se imparte a nivel Bachillerato, proporcionando a los estudiantes una fuente para consultar la información que facilita el profesor en el desarrollo de los diferentes temas de dicha asignatura.

En estás notas no aparecen gran cantidad de ejemplos ilustrativos, contiene más información teórica que es lo básico, para posteriormente agregar los ejemplos necesarios, en un trabajo futuro.

Consideró que los estudiantes resultarán beneficiados al contar con estas notas que cubren los contenidos temáticos de varias instituciones tales como: el Subsistema de Escuelas Preparatorias Federales por Cooperación (SEP), el Colegio de Bachilleres, el Colegio Cedros, La Escuela Militar de Transmisiones, el Sistema de CECYT (IPN), entre otras, además de que viene a suplir una enorme carencia de libros de texto que traten ambos temas a la vez.

BIBLIOGRAFÍA

1. Stanley R. C., P. G. O'Daffer, T. J. Cooney. *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. (1989)

2. B. Rich., *Geometría plana con coordenadas.* Ed. Mc Graw Hill (1982)

3. J. Landaverde. *Curso de Geometría.* Ed. Progreso (1985)

4. J. David García Bacca *Euclides Elementos de Geometría* I – II UNAM (1992)

5. Moise, Downs. *Geometría Moderna.* Ed. Fondo educativo interamericano, S.A (1982)

6. F. Zubieta R. *Geometría razonada y trigonometría.* Ed. del autor (1979)

7. A. Guzmán H. *Geometría y trigonometría.* Ed. Publicaciones cultural (1988)

8. Granville, Smith, Mikesh. *Trigonometría plana y esférica.* Ed. UTEHA (1988)

9. Hooper, Griswold, *Trigonometría.* Ed. Publicaciones cultural (1980)

10. J. J. Rivaud M. *Trigonometría.* Ed. Limusa (1992)

11. A. I. Ramírez. *Trigonometría.* Ed. Trillas (1983)

12. F. Ayres Jr. *Trigonometría plana y esférica.* Ed. Mc Graw Hill (1987)

13. Fuenlabrada. *Geometría y trigonometría,* Ed. Mc Graw Hill (1994)

14. M. Sánchez S. *Fundamentos de Geometría.* Ed. Playor (1988).

15. E. M. Hemmerling. *Geometría elemental.* Ed. Limusa (1992)

16. Ortiz C., *Geometría y trigonometría.* Ed. Publicaciones Cultural (1994)

17. J. A. Baldor. *Geometría plana y del espacio y trigonometría.* Publicaciones cultural (1997).

18. D. E. Kaufmann. *Geometry and logic concepts.* Ed. Psw-kent Publishing company (1989).

19. P. B. Geltner and D. J. Peterson. *Geometry for college students.* Ed. Thomson (1992)

20. Nielsen K. *Trigonometría Moderna.* Ed. Continental (1989)

21. Patrick J. Boyle. *Trigonometría con aplicaciones.* Ed. Harla (1990)

22. Swokowski. *Fundamentals of trigonometry.* Pws Publishing company (1992)

23. F. W. Sparks and P. K. Rees. *Trigonometría Plana.* Ed. Reverte (1998)

24. Eugene D. Nichols. *Trigonometría Moderna.* Ed. C.E.C.S.A. (1993)

25. Ice Strange. *Plane Trigonometry.* Ed. Thomson (1995)