03071

1

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Unidad Académica de los ciclos de Profesional y de Posgrado del Colegio de Ciencias y Humanidades

Propuesta Didáctica

"Elaboración de Material escrito y su aplicación en el aula (Geometría Analítica)".

299630

TESIS QUE PRESENTA
Ma. de Lourdes Romero Miranda
Para obtener el título de
Maestro en Educación Matemática
2001

Agradezco

Su tiempo ayuda y comentarios a:

Mi Director de tesis

Maestro Juan Recio Zubieta.

Mis Sinodales

Maestro Jorge Javier Jiménez Zamudio.

Maestra Beatriz I. T. Ojeda Salcedo.

Maestro Gustavo Marquina Rojo.

Maestro Juan B. Recio Zubieta.

Maestro José G. Zaragoza Ramírez.

Su comprensión a:

Mis padres.

Mis hijos

Mi esposo.

Contenido:

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA UN CURSO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA A NIVEL BACHILLERATO

INTRODUCCIÓN.

La educación es un punto clave para el desarrollo de nuestro país, es por eso la preocupación de tener programas de estudio adecuados a las necesidades que demanda nuestra sociedad. Las diferentes instituciones se han preocupado, además de actualizar sus programas de estudio, de los enfoques y técnicas de aprendizaje que mejor satisfagan estas demandas.

En particular con respecto a la materia de matemáticas, ha sido frecuente la discusión sobre el tipo de educación matemática que se ha de ofrecer al alumno en las distintas instituciones; en este sentido se pueden apreciar diversas corrientes de pensamiento que influyen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en la presentación de los contenidos y objetivos de éstas.

Además de la concepción, la educación matemática tiene otros retos, como el de responder adecuadamente a las diversas demandas que le exige la sociedad tales como desarrollar en el alumno ciertas habilidades, actitudes y valores que le permitan funcionar en condiciones normales en su sociedad, realizarse y alcanzar sus objetivos.

En este sentido y tratando de satisfacer los requerimientos de los programas de estudio de Matemáticas elaboré esta propuesta didáctica que fundamenta cómo elaborar material didáctico para un curso de Matemáticas a nivel bachillerato y como ejemplo propongo el material que realicé para Geometría Analítica.

Esta Propuesta Didáctica es el resultado de muchos años de trabajo como docente, de las múltiples experiencias obtenidas con los alumnos, de la aplicación del material que clase a clase se va generando obtenido de los libros, inventado o adecuado, de la interacción con los profesores y de los diferentes cursos tomados.

Creo que toda esta experiencia fundamentada teóricamente, vale la pena exponerla para que sea valorada y criticada. Se pretende además, que en este contexto, los alumnos adquieran también los contenidos necesarios para desenvolverse en la vida diaria y en sus estudios posteriores, y las habilidades necesarias en el aspecto formativo, referido a la posición del individuo frente a la naturaleza y a la sociedad. El nombre de la propuesta es:

"Elaboración de material escrito y su aplicación en el aula" y su característica principal es:
Elaborar el material escrito basado en la experiencia del profesor y se pretende que en su aplicación en el aula, el alumno, guiado por su profesor, desarrolle estrategias y habilidades que le permitan construir y operar la estructura matemática necesaria para el análisis y solución de problemas".

Como ejemplo de este tipo de material se propone el material que presento en colaboración con la profesora Guadalupe Islas Caballero, para Geometría Analítica llamado "Práctica Matemática IV".

Marco Conceptual.

En diversas reuniones en las que he participado en donde se discuten las formas de impartir los planes y programas, he observado que los profesores, al desarrollar un programa se preguntan: ¿cuáles son las ideas centrales que permiten dar un planteamiento global al curso?; en este sentido, se han manifestado por lo importante que es contar con propuestas metodológicas de interpretación de los programas y sus unidades que indiquen con mayor claridad la secuencia y el tratamiento de éstas. En dichas reuniones no se han dado soluciones claras de los enfoques y profundidad de las unidades ya que éstas necesitan sustentarse con propuestas didácticas y pocas son las que se escriben con fundamentos teóricos y se les da seguimiento.

La idea de hacer este material surge de esta necesidad , ya que si bien se han elaborado muchos paquetes didácticos por los profesores, éstos se presentan por unidades y no siempre con la misma metodología, el mismo enfoque ni la misma continuidad, lo cual hace que el material sea parcialmente utilizado, e impide la visión global al profesor y la construcción de conocimientos al alumno.

El tener un material de referencia que permita de manera global ubicar la materia y tener el eje conductor de ésta, puede servir tanto a los profesores como a los alumnos para tener líneas de acción de mayor pertinencia en el quehacer docente. Para lograr este eje conductor se hace necesario, en primer lugar , tener una concepción clara de lo que ha de ser la matemática y sobre ésta sus formas de enseñanza y aprendizaje más adecuadas.

Después de analizar las diferentes corrientes de pensamiento que influyen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en una investigación realizada junto con el profesor Alejandro Chávez Ochoa titulada "Creación y Solución de

Problemas" y de escuchar la opinión de algunos profesores que imparten la materia, me parece que existen algunas coincidencias sobre concebir a las Matemáticas como:

"un cuerpo de conocimientos no terminado, una disciplina en constante expansión tanto en resultados como en métodos y principios generales , que le permita al estudiante discutir estrategias, emplear ejemplos y contra ejemplos, criticar y comprobar sus resultados, compartiendo la búsqueda de argumentos sólidos en el proceso de construcción de su conocimiento".

Para esta concepción de las matemáticas existen diferentes enfoques metodológicos que podrían ser adecuados. Estos diversos enfoques forman parte de un contexto político, social y cultural que en su momento han sido analizados por psicólogos y pedagogos. Los enfoques que aquí se proponen obedecen a la recomendación de los programas vigentes de utilizar el aprendizaje basado en Resolución de Problemas y el Constructivismo.

De estos dos enfoques metodológicos me interesó explicar la forma en que éstos repercuten en el salón de clases ya que si bien existen investigaciones sobre el Constructivismo y la Resolución de Problemas en el aula, éstas no aterrizan a un curso en particular de Matemáticas a nivel Bachillerato, es por eso que se me hace importante dar una propuesta didáctica en donde se tomen como base fundamental las investigaciones realizadas y de éstas obtener una propuesta real y no una propuesta en términos de investigaciones que no puedan ser valoradas porque no están acordes a nuestra realidad.

Para esta propuesta didáctica se toman como base fundamental las siguientes investigaciones:

"Didáctica Constructivista y Matemáticas: una Introducción" de David Block y Acibiades Papacostas, publicada en la Revista "Cero en Conducta" año 1 No. 4 México, 1985 pp 13-23.

" ¿Aprovechamos nuestros cursos de Geometría Analítica ?" de Marco Antonio Valencia Arvizu de la Universidad Autónoma de Sonora publicada en la Revista de Educación Matemática Vol. 2 No. 2 en Agosto de 1990 pp 14 – 21.

"Creación y Solución de Problemas" de Alejandro Chávez Ochoa y Ma. de Lourdes Romero Miranda, TEC de Monterrey Campus Ciudad de México. (Sin publicar).

En esta propuesta se pretende dar un eje conductor de cómo elaborar material didáctico contemplando esta concepción de las Matemáticas y estos enfoques pedagógicos, de tal suerte que el profesor con su experiencia pueda generar material didáctico fundamentado teóricamente.

¿Por qué elaborar material didáctico?

En una investigación realizada por el profesor Elías Loyola (El rechazo al Estudio de las Matemáticas) nos indica que "menos del 10% de los alumnos NO achacaban su rechazo hacia la Matemática a algún profesor", lo cual me hace pensar que pueden ser otros factores o que el 90% sí lo relacionan con sus profesores; además en esta misma investigación los alumnos piensan de sus profesores que no utilizan correctamente los métodos pedagógicos, que no planifican sus clases y que no cuentan con material didáctico adecuado.

En este sentido las diversas instituciones tratan de que sus profesores se preparen ofreciendo cursos de actualización pedagógica.

Pero ¿Realmente necesitan teorías los profesores de Matemáticas?

Muchas veces pensamos que con nuestra sola experiencia es suficiente para tomar decisiones con respecto a contenidos, métodos, materiales de estudio, etc. por lo que al exponer estas decisiones con otros compañeros, existen una gran diversidad de puntos de vista, entonces para poder hacer una propuesta es necesario sustentarla con teorías que a su vez parten de experiencias empíricas que sistematizan los fenómenos educativos, validan materiales y métodos y predicen resultados y logros como parte del proceso enseñanza aprendizaje "la teoría tendría que permitirnos explicar lo que vemos en la escuela y también adoptar una acción apropiada" (Orton, A. Didáctica de las Matemáticas).

Pero ¿cómo saber que con determinada metodología tendremos éxito?

"Un buen profesor" según Loyola, en primer lugar "posee los conocimientos que se van a impartir", pero creo que esto no es suficiente, además debe poseer otras cualidades y sobre todo dedica tiempo fuera del aula para las cosas trascendentales de sus alumnos como: preparar ejercicios, el enfoque de su discurso, la metodología que usará y sobre todo evaluará todas las actividades realizadas en clase; con estas condiciones mínimas, el alumno sentirá el interés del profesor por él.

Pero ¿Cuál debe ser la mejor metodología?

Existen numerosas investigaciones y muy brillantes basadas en diversas teorías del aprendizaje, pero según Fernández Pérez ("La Profesionalización del Docente") "ninguna de éstas mejorará la calidad académica hasta que sus conclusiones o recomendaciones no entren en el salón de clase".

¿Y quiénes son los que pueden aplicar estas investigaciones en el aula?

Necesariamente los profesores que deberán asumir qué hacer o dejar de hacer y por qué y sobre todo convencerse de que realmente es la mejor opción para poder dar una propuesta didáctica que seguramente a quien más beneficiará será al profesor mismo.

¿ Cómo hacer una propuesta didáctica ?

Para la elaboración de una propuesta, lo primero que se debe hacer es reflexionar sobre nuestra práctica docente y tratar de hacer una descripción de cómo es ésta, para después analizarla y compartirla con otros profesores y posteriormente indagar qué materiales o qué investigaciones se ha desarrollado sobre el tema y por último fundamentarla con las corrientes pedagógicas que sean las que más se adecuen a ella.

De esta forma fue que elaboré el material para Geometría Analítica que presento como ejemplo.

La Geometría Analítica puede utilizarse desde diferentes puntos de vista, desde preparar al alumno para el estudio de sus cursos posteriores hasta fortalecer el pensamiento matemático mediante la búsqueda sistemática de la integración del conocimiento; en este sentido también se pueden desarrollar diferentes habilidades.

Para elaborar "Practica Matemática IV" indagué qué propuestas metodológicas se habían elaborado con respecto a Geometría Analítica a nivel bachillerato y me encontré con muchos trabajos enfocados a diferentes aspectos, tales como:

- Medios Electrónicos.
- Material Audiovisual.
- Materiales Manipulativos.
- Materiales Escritos.

De los trabajos explorados, me encontré con sugerencias de cómo tratar la Geometría en forma dinámica, esto es, dejar de pensar en las figuras curvas y superficies como si fueran figuras rígidas e inmóviles y visualizarlas mejor como si fueran parte de una película en movimiento; por ejemplo, cortando un cono se puede pasar de una circunferencia a una elipse, de ésta a una parábola y de ésta a una hipérbola, para que el alumno desarrolle la imaginación espacial; también me encontré con sugerencias de uso de paquetes computacionales para graficar; y la sugerencia de buscar problemas adecuados que obliguen al alumno a tratar de plantearlos en términos geométricos y buscar las soluciones guiadas por las ideas geométricas, de manera que el álgebra sea solo una herramienta.

Todos estos trabajos me parecieron excelentes, pero imposibles de aplicarlos en las clases cotidianas de Geometría Analítica sin ninguna preparación básica de ésta para los alumnos, creo que estos trabajos podrían ser complementarios a la propuesta didáctica, ya que esta parte de lo que clase a clase hace un profesor en el aula con sus alumnos para cubrir un programa.

Esta conclusión me hizo reafirmar más la idea de elaborar material didáctico dedicado a los cursos que imparto de Matemáticas y en este caso de Geometría Analítica.

El siguiente paso fue compartirlo con una profesora y revisar los ejercicios y problemas que habíamos elaborado al impartir nuestras clases; para organizarlas tuve que investigar sobre las teorías de aprendizaje que mejor lo sustentaran y finalmente lo publicamos.

En este sentido la elaboración de este material ayudó a profesores de nuevo ingreso a ubicar un enfoque metodológico para la enseñanza de la Geometría Analítica que podían adecuar según las necesidades del grupo, dosificar los ejercicios resolviéndolos con antelación y sólo indagar conceptos en los diferentes libros de Geometría Analítica que existen.

Marco Teórico.

Las Teorías Que La Sustentan

Las teorías que pueden sustentar esta propuesta son Resolución de Problemas y el Constructivismo.

A continuación mencionaré algunos de los trabajos más relevantes de los diferentes autores que darán el marco teórico a mi propuesta.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

De los trabajos de investigación dedicados a la resolución de problemas, los que se exponen a continuación, (tomados de la investigación que realicé junto con el profesor Alejandro Chávez titulada "*Creación y Solución de Problemas*") creo que son los más adecuados para la fundamentación de la propuesta.

El Trabajo de Polya (1957), enfocado principalmente a problemas matemáticos y a la estructuración de preguntas que faciliten el proceso de solución, fundamentalmente se dedica a los llamados heurísticos. Su propuesta puede complementarse con la investigación sobre habilidades desarrolladas por Krutetskii.

Polya (Polya, G. Mathematical Discovery. S. Wiley), considera que existe un **problema** cuando se busca conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar.

Polya (Polya, G. ¿Cómo plantear y Resolver problemas?. Trad. Prof. Julián Zagazagoitia. Ed. Trillas. México, 1990), describe cuatro etapas: **comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan,**

revisión de la solución. Para cada etapa propone una serie de preguntas con el fin de ayudar al estudiante en su proceso de solución.

El Trabajo de Schoenfeld (1979), que se enfoca a la creación de un microcosmos matemático dentro del salón de clases, para lo cual pone especial interés en el dominio del conocimiento, las estrategias metacognitivas, sistemas de creencia, ambiente de aprendizaje de los cuales se tendrá claridad al comparar la solución de un problema por un experto y la solución de un no experto.

En sus investigaciones, encuentra que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas y que se deben considerar al planear los cursos con este enfoque; estas son:

Dominio del conocimiento, esta dimensión incluye definiciones, hechos y procedimientos usados en el dominio de las matemáticas.

Estrategias cognoscitivas incluyen métodos heurísticos, que permiten facilitar la solución de un problema.

Estrategias metacognoscitivas se refiere a los mecanismos de monitoreo en el proceso de solución.

Sistemas de creencias tiene que ver con la forma que los estudiantes ven a las matemáticas y la actividad de resolver problemas.

En general, se puede ayudar a los estudiantes a resolver problemas si se les enseña el uso de estrategias de manera explícita y a enfocar los problemas de manera sistemática. Schoenfeld (En Nickerson, Raymond y otros. Enseñar a Pensar. Aspectos de la aptitud intelectual. De Paidos. Barcelona, 1990), establece una estrategia directiva para la solución de problemas y que es apoyada por una lista de heurísticos.

Para lograr que los estudiantes tengan control sobre sus propias estrategias se establecen algunas actividades a desarrollar en el salón de clases, tales como la resolución de problemas nuevos, mostrar videos en donde otros estudiantes o expertos están resolviendo problemas, discutir procesos y soluciones, trabajar en pequeños grupos.

El trabajo de Burkhardt (Burkhardt, Hugh. The Real Word And Mathematics. Ed. Blackie and Son Limited. Londres 1988), interesado principalmente por la relación entre matemáticas y el mundo real a través de la construcción de modelos matemáticos y la solución de problemas. Este se puede complementar con la propuesta de desarrollo de habilidades dada por McLone.

Aquí las matemáticas son consideradas una actividad en la cual los estudiantes tienen la oportunidad de poner en juego toda su capacidad intelectual y el profesor es el constructor del ambiente propicio para aprender.

El proceso de construcción de modelos matemáticos se da en cuatro fases importantes: **formular, resolver, interpretar y validar,** las cuales sirven para solucionar problemas o para analizar situaciones con interés matemático particular.

Es recomendable considerar problemas que representen situaciones de la vida diaria o del lugar de trabajo o de otras disciplinas, y que tales situaciones sean discutidas por los estudiantes, observando las respuestas de éstos y posibilitando el desarrollo de habilidades.

CONCLUSIONES:

El punto de partida en la Resolución de problemas, es justamente definir qué es un problema para posteriormente ubicar la Resolución de problemas en el proceso de Enseñanza (cómo diseñar problemas que generen aprendizajes. Aprendizaje (En qué condiciones está el alumno de recibir estos problemas).

Por otro lado en las distintas investigaciones no se presenta material basado en resolución de problemas especifico para una materia de Matemáticas, sólo se dan sugerencias de cómo hacerlo en términos generales

Los trabajos que se han reseñado anteriormente pueden complementarse entre sí junto con las teorías del constructivismo para fundamentar una propuesta. La secuencia de la propuesta que aquí se expone considera estas ideas para darle forma al enunciado de los ejercicios, de tal suerte que se ajusten a estos enfoques en su proceso de solución. Además la clasificación de los problemas que posteriormente mencionaré es otro factor importante que tomé en consideración para que éstos fueran interesantes para el alumno en el momento adecuado, esto es, que no siempre un problema es interesante por su aplicación en el lugar de trabajo o de otras disciplinas, puede ser interesante por su aplicación a la vida diaria y esto implica su actividad como estudiantes y su participación en las distintas materias de su curso y el problema será interesante por si mismo para adquirir conocimientos en la materia específica.

CONSTRUCTIVISMO.

De los trabajos dedicados al constructivismo, en primer lugar, son los de **Jean Piaget y John Dewey** los que desarrollaron una clara idea del constructivismo aplicado en el aula y posteriormente los del ruso **Leus Vigotsky** (http://www.sedl.org/scimath/compass/v01n03/class.htm) y Ausubel y como pilar fundamental del constructivismo en matemáticas está **Guy Brousseau.**

Jean Piaget (1896 – 1980). Para Piaget el constructivismo está basado en la forma en que ve el desarrollo psicológico del niño. Piaget afirmaba que la base fundamental del aprendizaje es el descubrimiento: "Entender es descubrir o reconstruir mediante el redescubrimiento; y tales situaciones deben alcanzarse si en el futuro deben formarse individuos que sean capaces de producir y de crear, y no simplemente de repetir".

Para Piaget, el conocimiento no es el resultado ni de la sola actividad del sujeto, ni tampoco de la sola presencia del objeto; el conocimiento surge de la interacción del sujeto y del objeto, en la cual cada uno influye sobre el otro. El sujeto se acerca al objeto con determinadas estructuras intelectuales que le permiten asimilarlo y, al mismo tiempo, el objeto ejerce su influencia sobre el sujeto obligándolo a modificar sus estructuras cognitivas y tanto el sujeto como el objeto se transforman como resultado de la interacción.

Así que, la siguiente vez que interactúen ya serán otros sujetos epistémicos y otros objetos de conocimiento, el asimilado con nuevas estructuras cognitivas. Esto indica que los niveles de interacción van cambiando como consecuencia de la actividad cognitiva del sujeto. Para Piaget, entonces, el conocimiento se halla en un permanente estado de re-elaboración, es decir, las adquisiciones cognitivas del sujeto se van transformando continuamente dentro de esta interacción y las estructuras cognitivas del sujeto se construyen; este proceso inicia desde la más tierna edad; este proceso es tan complejo que fue necesario elaborar una disciplina: "La Psicología Genética", pero para efectos de esta propuesta no es necesario analizar este proceso desde la niñez que han requerido de más de medio siglo de investigación psicológica y aún no terminan.

Entonces, para alcanzar un entendimiento de los fenómenos básicos según Piaget, el sujeto entendido como el estudiante y no como el niño, tiene que pasar por etapas en una actividad autónoma que le permitan descubrir relaciones e ideas en situaciones dentro del salón de clase que involucren actividades que le permitan construir su entendimiento paso a paso.

John Dewey (1963). Para Dewey el conocimiento y las ideas surgen exclusivamente en situaciones en las que el sujeto que aprende tiene que sacarlas de las experiencias que tienen significado e importancia para él. Estas situaciones tienen que ocurrir en un contexto social, como el salón de clases, donde los estudiantes se unen en la manipulación de materiales y por consiguiente crean un grupo que construyen juntos su conocimiento.

Levs Vygotsky (1994). Para Vigotsky los niños aprenden conceptos científicos a partir de una tensión entre sus nociones cotidianas y los conceptos de los adultos, teniendo un concepto preformado proveniente del mundo de los adultos, el niño debe utilizar dicho concepto y ligar su uso con la idea tal como le fue presentada por vez primera. Pero la relación entre las nociones cotidianas y los conceptos científicos no significan un desarrollo directo para Vygotsky. En vez de ello, los conceptos anteriores y los conceptos científicos introducidos están entrelazados e influyen entre sí a medida que el niño desarrolla sus propias ideas a partir de las generalizaciones que ya tiene y que le han sido introducidas. Para aplicar ésta teoría necesitamos entender como niños a los estudiantes y como adultos a los profesores.

Guy Brousseau (1978). Para Brousseau (Guy Brousseau. 1978), la didáctica de las matemáticas se constituye como una ciencia independiente de la psicología de las matemáticas y de la misma pedagogía.

El principai objetivo de esta didáctica son las situaciones didácticas que permitan la construcción del conocimiento matemático.

Para esto se trabaja en un modelo que considere todas las posibles interacciones, tanto explícitas como implícitas, que puedan darse en un salón de clase, de tal suerte que se pueda llegar a conocer a fondo lo que sucede en éste y que ante una situación didáctica determinada, se pueda garantizar su reproductividad y eficiencia bajo controles bien precisos.

Se trata entonces de proporcionar al maestro un conocimiento sobre el funcionamiento del salón de clase y de las situaciones didácticas que le permitan tener un mayor control sobre algunas de las múltiples variaciones que intervienen en el proceso.

Resumen:

La teoría se inicia con la definición de lo que para los constructivistas significa el concepto APRENDER, como concepto central en torno al cual giran sus investigaciones, "aprender es comprender y comprender significa: inventar, reconstruir por invención, crear; todo lo anterior y no solamente repetir".

Al mismo tiempo entienden el proceso de aprendizaje como un proceso de "asimilación y acomodación". La asimilación designa la acción del sujeto sobre el objeto y la acomodación significa la acción objeto sobre el sujeto.

Entonces, podemos entender que el aprendizaje es adaptación (activa), o sea, no una adaptación mecánica, sino que el sujeto interviene activamente para aprender modificando el medio y modificándose él.

Por lo que se puede considerar como Primera Conclusión de la teoría constructivista que: "El alumno para conocer los objetos debe actuar sobre ellos". Por lo tanto la clave fundamental para la formación del pensamiento es la acción. El pensamiento surge de la acción real, efectiva sobre los objetos.

El acto efectivo sobre las cosas se transforma mediante el proceso de interiorización en representación mental del mismo.

El pensamiento es un conjunto organizado de operaciones. Operación: acción interiorizada.

El alumno aprende en la medida que actúa efectivamente sobre los objetos, y en la medida que interioriza esas acciones a nivel cognoscitivo.

El alumno siempre debe actuar para aprender bien sea mediante operaciones efectivas o mediante operaciones interiorizadas (matemáticas, abstracciones, etc.) pero debe ser él quien realice los procesos operacionales para llegar a conclusiones de un estudio y no del profesor.

La inteligencia es un sistema de operaciones (de acciones interiorizadas) que se caracteriza por su movilidad (se debe de...)

La movilidad del pensamiento se explica por dos características: la reversibilidad y la asociatividad.

Por estas características la inteligencia se opone al hábito. El hábito siempre tiende en único sentido hacia el mismo fin. Se memoriza una única forma de resolver un problema, presentado siempre de manera idéntica o demasiado semejante.

Por el contrario, la reversibilidad de la inteligencia es la posibilidad de combinar toda operación con la inversa; es la posibilidad de recorrer un camino y volver por él sin modificar las nociones empleadas.

La asociatividad consiste en que un mismo resultado puede obtenerse por diferentes procedimientos.

Si "Aprender es Reinventar", el alumno deberá de partir (al inicio de todo estudio) de una situación problemática (aquí hay un punto de concordancia con un importante postulado pedagógico de la teoría de la Gestal, el de "Problematizar la enseñanza o el aprendizaje).

Si queremos que los alumnos desarrollen la asociatividad de su pensamiento, deberán cumplir con operaciones que les permitan llegar por diferentes caminos a la misma solución.

"Pensar es actuar", porque pensar es asimilar los hechos de la experiencia a los esquemas intelectuales de acción, construir operaciones mediante la reflexión operando interiormente.

EL MARCO TEÓRICO Y EL PLANTEAMIENTO DE CONJETURAS PARA LA PROPUESTA.

Ha sido frecuente tratar de establecer modelos de enseñanza a partir de las interpretaciones de algunas teorías del aprendizaje y en un principio esa era mi idea, sin embargo me di cuenta que estas teorías lo que me proporcionaron fueron elementos de reflexión y análisis sobre mi práctica docente de modo que me facilitaron una mayor comprensión de los procesos que en ella intervienen.

Ante la observación de cómo mis compañeros imparten su clase y cómo lo hago yo, el resultado obvio es que para tratar un mismo tema lo abordamos desde distintos puntos de vista, pero estoy convencida de que los criterios que se requieren para decidir cúal es la mejor propuesta, deben aludir a lo que se pretende hacer y a los medios que pueden facilitar la consecución del objetivo propuesto.

En este sentido. La propuesta sugerida parte de las recomendaciones pedagógicas de Piaget que quedaron insertados en las recomendaciones de la Oficina Internacional de Educación y en la UNESCO y que son las siguientes:

- Guíe al estudiante a que forme sus (sic) propias ideas y descubra relaciones y propiedades matemáticas por sí mismo, en lugar de imponerle el pensamiento adulto ya elaborado.
- Asegúrese que ha adquirido los procesos y las ideas operacionales antes de introducirlo al formalismo.
- No confíe al automatismo ninguna operación que no se haya asimilado.
- Asegúrese que el estudiante adquiera primero experiencia con las entidades y relaciones matemáticas para después iniciarlo en el razonamiento deductivo.
- Extienda la construcción deductiva de las matemáticas de manera progresiva.

•Enseñe al estudiante a plantear los problemas, establecer datos, explorarlos y sopesar los resultados.

• Dé preferencia a la investigación heurística de problemas en lugar de la exposición doctrinaria de teoremas.

• Estudie los errores que cometen los estudiantes y véalos como un medio para entender su pensamiento matemático.

• Entrene a los estudiantes en la práctica de la verificación personal y la auto-corrección.

• Infunda gradualmente en los estudiantes el sentido de aproximación.

• Dé prioridad a la reflexión y al razonamiento.

Estas ideas junto con el marco teórico expuesto me llevarán a concretizar la propuesta didáctica de la siguiente forma:
Primero me hice las siguientes preguntas.

- ¿ Los ejercicios que propongo se pueden entender como "problemas" y sobre esto el alumno obtiene conocimientos?

- ¿ Cómo construyo el conocimiento de los alumnos ?

- Qué estrategias de las que utilizo realmente generan aprendizaje ?

- De las propuestas sugeridas por Piaget, ¿ Cuáles aterrizo en el salón de clase ?

- ¿Qué formas de aprendizaje tienen los estudiantes ?, ¿ son todas iguales ?

- ¿ El trabajo en equipo que realizo en clase, realmente contribuye a que los estudiantes obtengan conocimientos ?

- Los profesores decimos que los diferentes niveles académicos de nuestros alumnos no nos permiten optimizar el aprendizaje pero ¿ todos los alumnos, sin importar su nivel académico, pueden aprender ?

De la respuesta a estas preguntas, que en el marco Metodológico explicaré detalladamente, ubiqué que la planeación que hago y las formas de trabajo son muy acorde a las ideas constructivista y a la resolución de problemas por lo que para darle forma a la propuesta traté de guiarme por las preguntas propuestas por David Block y Alcibiades Papacostas en su artículo "Didáctica Constructivista y Matemáticas: una Introducción", las cuales son:

¿Para qué puede servir un concepto?
¿Qué preguntas le dan sentido?
¿Qué problemas puede resolver?

Al contestar estas preguntas, le fui dando forma a los ejercicios como lo expongo posteriormente en el Marco Metodológico.

En conclusión, creo que estas dos teorías son complementarias porque por un lado el profesor propone ejercicios con los que el alumno puede ir construyendo su conocimiento y por otro lado al resolver problemas reafirma ese conocimiento.

Las tomé como punto de partida por que en el constructivismo es fundamental que el alumno tenga claro hacia dónde lo lleva la materia para que pueda construir su propio conocimiento; esto es, que debe tener interés por lo que se le enseña.

Marco Metodológico:

Cuando un profesor se enfrenta ante la situación de impartir un curso, de lo primero que deberá estar seguro es de que domina los contenidos del programa, en forma particular y en forma global; esto es muy importante, porque le permitirá además de enseñar contenidos, prestar atención a las estrategias didácticas y al desarrollo de habilidades necesarias para el razonamiento, el pensamiento creativo, la solución de problemas y la construcción del conocimiento.

De la misma forma los alumnos a nivel bachillerato, al estudiar Matemáticas deberán ir construyendo su aprendizaje, ya que de otra forma, sus conceptos matemáticos sólo serán apartados de Álgebra, Geometría y algunos conceptos de Cálculo sin ninguna relación, y en su proceso de aprendizaje emplearan diferentes métodos de solución de problemas que en el momento le serán adecuados, pero que no dejan ninguna huella por que no fueron construyendo su aprendizaje; esto se refleja al iniciar sus cursos posteriores en donde muestran serias dificultades.

Las Matemáticas resultan mucho más importantes para la formación integral de un individuo si existe el desarrollo de habilidades y la transferencia de lo aprendido hacia otras ramas del saber o de la vida cotidiana, pero ¿bajo cuáles circunstancias se pueden asegurar el desarrollo de habilidades y éstas transferencias a partir de lo aprendido en el salón de clases? "No resulta juicioso dar por supuesto que hay una transferencia de destreza durante la enseñanza de las Matemáticas" (Orton. Didáctica de las Matemáticas)

Pero si es posible suponer que el desarrollo de habilidades y algunas transferencias dependan de las condiciones en las que se produce el aprendizaje.

Krutetskii opina que el proceso de solución de problemas, involucra una serie de habilidades que han de desarrollarse en los estudiantes a través de la actividad de solución. Al hablar de habilidades se está refiriendo a todos los rasgos psicológicos individuales de una persona que pueden conducir al dominio exitoso de la actividad matemática.

Psicólogos y Teóricos del aprendizaje opinan que puede darse una transferencia dentro de una disciplina y quizá incluso fuera. Así se puede suponer que probar unos resultados de Geometría se puede transferir a probar en otras disciplinas científicas o incluso en un tribunal judicial.

Otros más estiman que sólo tiene lugar en forma limitada, quizá sólo en la medida en que surjan elementos idénticos.

Ante estos puntos de vista, lo que queda claro es que si el alumno construye su conocimiento paso a paso, tendrá la oportunidad de lograr éxito en sus estudios al desarrollar las habilidades necesarias para la construcción de conceptos y estrategias en la solución de problemas que posiblemente pueda transferir. Esta idea se contempló para la elaboración de la propuesta.

A continuación se establecerán los aspectos que dan cuerpo a la propuesta didáctica para guiar el aprendizaje vía la construcción del conocimiento y la resolución de problemas y se explicará cómo se construyó el material didáctico "Practica Matemática IV"al que llamaré problemario y que ejemplifica la propuesta.

¿Cómo se Construye el Conocimiento?

El constructivismo sugiere que el conocimiento matemático es el resultado de la formación de modelos como respuesta a las preguntas y a los retos que surgen de problemas matemáticos y ámbitos atractivos, y no como resultado del acopio de información ni del mero florecimiento de un don innato. Desde este punto de vista existen muchos planteamientos para mejorar la enseñanza: buscar diferentes formas de atraer a los estudiantes, desarrollar ambientes ricos para la exploración, preparar problemas que se centren en el esfuerzo de construcción de modelos, hacer surgir y comunicar las percepciones y las interpretaciones del estudiante, etc. Lo evidente es, que para construir su conocimiento, el alumno debe tener interés en lo que se le ofrece para aprender.

Cuando queremos que el alumno adquiera un conocimiento matemático, nos preguntamos cuál sería la manera más clara y sencilla de presentarle este conocimiento y cuál la forma de que tuviera sentido estudiarlo; nosotros los profesores tenemos muy variadas formas de presentarlo, pero la construcción del conocimiento exige un cambio en nuestra metodología, en virtud de que se trata ahora de no proporcionar el conocimiento, sino de producir las condiciones para que el alumno lo construya, es decir, debemos crear situaciones que lleven a una génesis escolar del conocimiento (Piaget). Partiendo de la idea que en el constructivismo se da relevancia a la interacción del sujeto y el objeto y que el sujeto construye sus esquemas interpretativos conforme a esta interacción, es preciso que el sujeto actúe sobre el objeto de forma física y mental.

En este sentido, para generar un conocimiento matemático específico en la elaboración del problemario, como mencioné anteriormente, partí de las siguientes preguntas:

¿Para qué puede servir este conocimiento? ¿Qué preguntas le dan sentido? ¿Qué problemas permite resolver?[3]

Para contestar estas preguntas, se hace necesario conocer con más profundidad el concepto y su relación con otros contenidos (su ubicación en el programa tanto en forma horizontal como vertical), sus propiedades, etc.; también nos es útil conocer su historia, las condiciones que lo hicieron evolucionar, etc. y sobre todo los conocimientos y estrategias que los alumnos a los que nos dirigimos están en condiciones de realizar, para poder hacer interesante al alumno el conocimiento.

Por lo que la propuesta sugiere iniciar cada capítulo con un breve bosquejo histórico correspondiente al tema y que sea entendible para el alumno para que por curiosidad o porque su maestro se lo indique, el alumno lo lea. Esto sienta en él un precedente histórico, que podrá profundizar, si es de su interés, con finalidad de que el alumno, de manera general, al menos ubique las personas que lo descubrieron, en qué siglo, qué problemas lo generaron y si es el caso, qué problemas resolvió este descubrimiento.

Un ejemplo, el bosquejo histórico de la Elipse.

Bosquejo Histórico

La profundidad con la que Arquímides y Apolonio estudiaron las cónicas (Parábola, Elipse e Hipérbola) es tal, que a su trabajo nada nuevo se tuvo que añadir en los siglos posteriores.

En la obra de Apolonio, que él denominó secciones cónicas, se encuentran las siguientes afirmaciones: la sección cónica llamada elipse se forma al intersecar un plano (que no pasa por el vértice) con un cono circular recto, ya que corta todos los elementos de una parte del cono y forma una figura cerrada. Un caso particular de la elipse es la circunferencia; en el plano, el lugar de un punto (móvil) cuyas distancias a dos puntos fijos dan una suma constante, es una elipse que tiene como focos esos puntos fijos. El mismo Apolonio aclara también que una tangente a la elipse deja los dos focos de un mismo lado de dicha tangente.

Las propiedades que Apolonio enuncia para la elipse fueron tomadas por F de la Hire (1640 – 1718) como definición de las curvas que tienen centro y la manera de descubrir la elipse por trazo continuo. Esta construcción la indicó por primera vez el bizantino Antemio (siglo VI).

Kepler, en 1609, expuso dos de sus grandes leyes del movimiento planetario; una de estas leyes que marcan una época en la historia de la ciencia matemática es:

"La órbita de todo planeta es una elipse con el sol en un foco"

El movimiento circular había reinado como soberano desde los tiempos antiguos hasta los días de Copérnico y Tycho Brade, pero ahora era reemplazado por la elipse, y, con el descubrimiento de que la elipse era, realmente, un camino trazado en los cielos y por la tierra misma, un hermoso capítulo de la Geometría antigua había pasado inexplicablemente, al centro de una filosofía práctica natural.

La respuesta a: ¿para qué puede servir este conocimiento? Se recomienda se ubique en el objetivo de cada tema; como ejemplo, cada capítulo tiene su contenido correspondiente y cada contenido se inicia con el objetivo general del tema a tratar. Así por ejemplo, para el capítulo I denominado "Sistema de Coordenadas Rectangulares", su contenido es:

1. Coordenadas Rectangulares.
2. Distancia entre 2 puntos.
3. Area de un Triángulo.
4. División de un segmento en una Razón dada.
5. Lugar Geométrico.

El objetivo de 1) Coordenadas Rectangulares (¿Para qué puede servir este conocimiento?) es :

"El alumno reconocerá la necesidad de localizar puntos, utilizando para ello un plano de coordenadas rectangulares como uno de los sistemas existentes".

Los objetivos, al contestar la pregunta ¿para qué puede servir este conocimiento? ayudan tanto al profesor como a los alumnos a ubicar el tema: al profesor porque en el enunciado del objetivo tendrá la oportunidad de ampliarlo o profundizarlo más según sus conocimientos y su experiencia, y al alumno porque le da una visión general del tema a tratar; también los objetivos pueden servir para que el profesor aterrice de una manera más concreta ejemplos, posiblemente visuales, que generen interés en el alumno; por ejemplo la necesidad de ubicar algún lugar, etc.

La segunda: ¿Qué preguntas le dan sentido? La relacioné con los ejercicios conceptuales, porque con estos ejercicios se trata de inducir a los alumnos por los pasos necesarios para adquirir el conocimiento en cuestión. Estas preguntas se tienen que pensar de acuerdo a la forma en que se construye el concepto, pero no de una manera impuesta, porque al ser preguntas abiertas, el alumno tiene la oportunidad de interaccionar con el objeto en cuestión para obtener sus propias definiciones y conceptos y el profesor, en el último de los casos, tendrá una especie de guía didáctica que le permita llevar de la mano a los alumnos al conocimiento, o en el mejor de los casos, manejar estas preguntas y otras que él crea convenientes, de acuerdo a su experiencia para que el alumno construya el conocimiento.

Es importante aclarar en este momento que los procesos cognitivos que entiendo como Básicos, de Categorización y Complejos se pueden dar en este momento, ya que los ejercicios conceptuales tratan de iniciar desde que el alumno ponga atención a lo que se hará hasta hacer inferencias.

En estas preguntas de concepto el profesor puede usar medios visuales, de manipulación inclusive, hasta aquellos que impliquen movimientos para captar de mejor manera la atención del alumno.

Como ejemplo mencionaré las preguntas conceptuales necesarias para construir el concepto de ecuación de una circunferencia.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1 ¿Qué elementos necesitas para trazar una circunferencia en el plano de coordenadas?

2 Traza las siguientes circunferencias localizando al menos 4 puntos de cada una de ellas.

a).- $C(3, 5)$ y $r = 3$

b).- $C(-7, 4)$ y $r = 5$

c).- $C(3, 0)$ y $r = \frac{3}{2}$

d).- $C(0, 0)$ y $r = \frac{7}{5}$

3 ¿Cuál es la definición de Circunferencia como lugar geométrico?

4 ¿Cuáles son los elementos importantes de una circunferencia?

5 A partir de la definición de la circunferencia como lugar geométrico, determinar la ecuación de la circunferencia con centro en (3, 5) y radio 2.

6 Generaliza la forma en que se puede encontrar la ecuación de cualquier circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

La última pregunta ¿Qué problemas puede resolver? Pueden ser los ejercicios tradicionales que el profesor ya ha elaborado. Estos problemas, el profesor deberá jerarquizarlos en problemas que se puedan resolver en forma individual o en equipo, o bien en problemas tan difíciles que sólo se puedan resolver cuando el alumno maneje contenidos, procesos y tenga habilidades. Este tipo de ejercicios en el problemario les llamé: prácticos, colaborativos y de Reto. Estos problemas que tradicionalmente elabora el profesor y que el alumno en en muchas ocasiones, hasta que los resuelve sabe para qué le sirvió el conocimiento adquirido, no es del todo su objetivo, ya que con la estructura dada se pretende que también estos problemas, en el mejor de los casos, puedan plantearse como generadores de conocimientos, por ejemplo el ejercicio de reto del problemario.

"Imagina que la costera de Acapulco (orilla del mar) fuera recta y que tuvieras que construir una maqueta donde quedaran representados la costera, el Centro de Convenciones y un conjunto habitacional, cada casa con la característica de que su distancia al Centro de Convenciones sea la misma que su distancia a la orilla del mar. ¿Cómo construirías este conjunto habitacional? ¿Necesitas un plano de coordenadas para representar mejor esta situación? Constrúyelo".

Existen muchos obstáculos a los que nos podemos enfrentar en este proceso y tal vez no siempre lograremos crear las condiciones para que los estudiantes realicen una absoluta reconstrucción de un conocimiento; muchas veces sólo lograremos una aproximación a él y en este sentido el profesor deberá dosificar los ejercicios prácticos colaborativos y de reto según los alcances y limitaciones de los alumnos en la construcción del concepto.

Otro aspecto en el que se debe pensar para la elaboración de un material didáctico es en la necesidad de diseñar problemas que puedan tener características tales como ser accesibles a los alumnos, propicien el diálogo entre ellos, sirvan para generar conceptos que a su vez los utilicen como herramientas para resolver otros problemas y que desarrollen habilidades tanto generales como específicas.

Las habilidades generales son necesarias para la ejecución de cualquier actividad e incluyen características como la diligencia, perseverancia y eficiencia. Rasgos como una memoria voluntaria bien preparada, atención activa y habilidad para mantener el interés en una actividad y trabajar en ella. Las habilidades específicas comprenden los aspectos de la actividad mental peculiar y específica de la matemática como son: flexibilidad del pensamiento, reversibilidad, memoria generalizada, clasificación completa, imaginación espacial y estimación.

Problemas como: Graficar la ecuación $(x+y)^2 = x - y$, estarían cumpliendo con lograr que el alumno haya adquirido todas las habilidades mencionadas. Este tipo de problemas sería ideal que el alumno resolviera al terminar el curso de Geometría Analítica.

Interés:

En primer lugar sería la motivación para querer graficar cualquier ecuación general de segundo grado y el reto de poder graficar esta ecuación que tiene otra presentación distinta al modelo que él está acostumbrado a manejar.

A continuación ejemplifico las habilidades requeridas.

Memoria generalizada.

El alumno desarrolla el binomio cuadrado y le da forma de ecuación general de 2° grado.

$$(x+y)^2 = x - y$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = x - y$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$$

Clasificación Completa

Clasificación Completa al observar que es una ecuación de 2° grado, sabe que es una cónica, entonces utiliza el indicador para saber qué tipo de cónica es:

$$I = (2)^2 - 4\,(1)\,(1)$$

$$I = 4 - 4 = 0$$

$I = 0$, Por lo tanto es una parábola.

Imaginación Espacial y estimación.

El alumno espera que la gráfica obtenida sea una parábola trasladada y rotada debido a que la ecuación contiene términos x, y y términos lineales.

Flexibilidad del pensamiento.

El alumno sabe que para graficar estudió dos formas de hacerlo: en un plano de coordenadas rectangulares o en un plano de coordenadas polares y para tomar su decisión de cuál es el que mejor conviene transformará la ecuación rectangular a ecuación polar utilizando para ello también todas las habilidades ya mencionadas.

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$$

como:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x = r \cos \sigma$$
$$y = r \operatorname{sen} \sigma$$

sustituyendo:

$$r^2 + 2r \cos \sigma \; r \operatorname{seno} - r \cos \sigma + r \operatorname{sen} \sigma = 0$$
$$r^2 + 2r^2 \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma = r \cos \sigma - r \operatorname{sen} \sigma$$
$$r^2 (1 + 2 \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma) = r (\cos \sigma \operatorname{sen} \sigma)$$
$$r (1 + 2 \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma) = \cos \sigma \operatorname{sen} \sigma$$
$$r = \frac{\cos \sigma \; sen \; \sigma}{1 + 2 seno \cos \sigma}$$

Reversibilidad:

Es cuando el alumno regresa por todos los pasos para poder construir una gráfica.

En coordenados rectangulares	En coordenados Polares
- Usar Rotación y traslación	- Sustituir valores de σ pora obtener r.
o	o
- El método de análisis de curvas Algebraicas	- Determinar los parámetros para construir la parábola

Entonces el alumno decidirá el camino más adecuado para la solución de este "problema".

Ante este análisis me surge la necesidad de contestar a la pregunta ¿Qué es un problema?

¿Cómo se resuelven problemas?

Se está ante un problema (Creación y Solución de problemas: Alejandro Chávez y Lourdes Romero), "cuando se busca conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente establecida, pero no inmediata de alcanzar; cuando se tiene conciencia de que existe una dificultad, existen deseos de resolverla, no hay caminos inmediatos para resolverla, y la solución implica un esfuerzo intelectual que involucra su uso de habilidades, conocimientos y estrategias".

Un problema lo es en la medida que el estudiante, al que se le plantea o que se plantea él mismo, dispone de los elementos para comprender la situación que se describe pero no tiene un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera casi inmediata y le representa una tarea intelectualmente exigente.

Al resolver problemas se espera que los estudiantes discutan estrategias, critiquen y valoren los resultados y compartan la búsqueda de argumentos sólidos. En este sentido es necesario que al resolver problemas, reconozcan que encontrar la solución de un problema no es el punto final de la empresa, sino el inicio para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones; que es un proceso activo que requiere de discusiones sobre conjeturas y procesos que pueden guiarlos al desarrollo de nuevas ideas matemáticas.

Los problemas se pueden clasificar de muy diversas formas y para ejemplificarlos utilizaré los problemas propuestos en el problemario.

Por la forma del enunciado

- **Concreta:** Cuando el enunciado involucra un contexto. Por ejemplo:

La órbita de la tierra es una elipse con el sol en uno de sus focos, la longitud de su eje mayor es de 186 millones de millas y su excentricidad es de 0.0167. Encuentra la distancia mínima de la tierra al sol.

- **Semiabstracta**: La situación se plantea fuera de un contexto, aunque los valores involucrados se especifiquen.

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son: A(-2,3), B(1,6) y C(3,-4)

- **Abstracta**: No se establece un contexto y sin valores específicos, se puede decir que se busca una solución general.

Generaliza la forma en que se puede encontrar la ecuación de cualquier circunferencia con centro en (h,k) y radio r.

Presentación del problema.

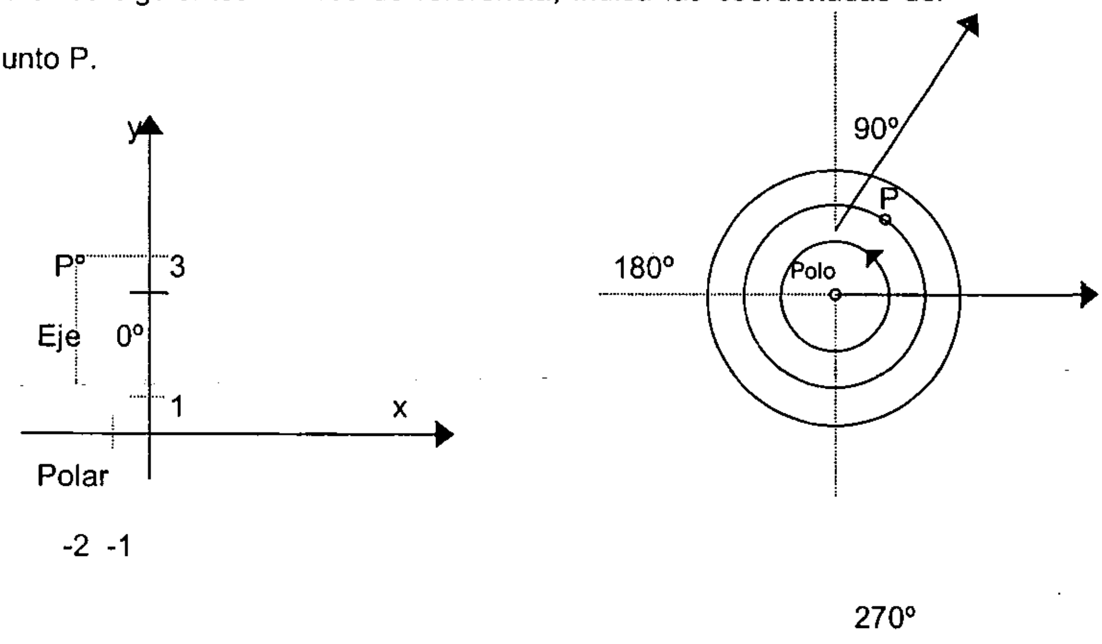
Se refiere al tipo de información con que cuentan los estudiantes, dentro del enunciado.

- **Forma física**: Involucra la manipulación de objetos.

En un plano de coordenadas construido en una hoja cuadriculada localiza los puntos A(5,6) y B(1,3), únelos con un segmento de recta, mide el segmento AB, ¿Cuánto mide?, ¿Cuál fue tu unidad de medida?

- **Diagramas**: Involucra la manipulación de información dada en tablas o figuras.

1) Para los siguientes marcos de referencia, indica las coordenadas del punto P.



- **Verbal**: El problema se presenta a través de ciertos enunciados, se utiliza el lenguaje natural para presentar el problema.

En un cuarto obscuro se tiene un reflector parabólico con su foco a 60 cms. de distancia sobre el vértice. Un pequeño reflector hiperbólico se encuentra a 50 cms. Sobre el vértice con uno de sus focos en el mismo lugar que el foco de la parábola, refleja las ondas de luz hacia su otro foco (de la hipérbola) que queda a 10 cms. abajo del vértice de la parábola. Determinar el largo mínimo (longitud del eje focal) y el ancho mínimo (longitud del lado recto) del cuarto obscuro.

- **Simbólica**: El problema se presenta a través de símbolos matemáticos.

Hallar el punto al cual debe trasladarse el origen para que la ecuación transformada no tenga términos de 1° grado.

$$x^2 + 9y^2 - 10x + 36y + 52 = 0$$

Nivel de interés de los estudiantes

Se refiere al contexto en que se ubica a los estudiantes a través del enunciado:

- **De acción**: Son aquellos cuya respuesta puede afectar directamente la vida diaria de los estudiantes.

Los alumnos del grupo organizaron una fiesta y deberán poner un arco de globos en forma parabólica, los extremos del arco se amarrarán a 2 metros de altura sobre dos paredes, la distancia entre las paredes es de 20 metros, ¿de qué tamaño deberán poner un polín en el centro del arco para que el arco conserve su forma parabólica?

Son el grupo de problemas que se determinan a través de los intereses de los alumnos, sus gustos o aficiones y pueden construirse a partir del análisis de situaciones de la vida diaria, en el problemario no están considerados; el problema anterior fue inventado por los alumnos, en una tarea que les dejé para saber sus inquietudes.

- **Creíbles**: Aquellos que pueden reconocerse como problemas de acción por los estudiantes a futuro o por alguien con un interés particular.

El costo de un automóvil es de $80,000, se espera que su servicio sea de 10 años, después de este tiempo su valor será solo de $18,000. ¿ Cuál es su depreciación anual?

- **Curiosos**: Aquellos que intrigan, ya sea porque el fenómeno estudiado es de por sí intrigante o, porque el análisis lo es.

Un recinto tiene forma semielíptica con 20 metros de longitud y 5 m. en su parte más alta. ¿Donde se deben colocar dos personas que no sea una junto a la otra para que se puedan comunicar sin que nadie más los escuche (para dar la ubicación utiliza un plano de coordenadas).

- **Dudosos**: Son para probar ejercicios a través de técnicas matemáticas.

Genera una familia de triángulos isósceles que tengan como base el segmento AB donde A(-6,2) y B(-3,2)

- **Educativos**: Lo componen problemas esencialmente dudosos, pero que forman un importante punto de principios matemáticos (o de otras ciencias) claros y atractivos.

Grafica las siguientes ecuaciones utilizando puntos de intersección, asíntotas y tablas de tabulación.

$4x^2 - 9y - 36 = 0$

$y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$

$xy - 2y - 3 = 0$

$xy - 2x + 2y - 2 = 0$

Son aquellos que aparecen en los libros de texto usados en la escuela.

Por la novedad.

Hacen referencia a procesos y situaciones previamente trabajados en el salón de clases.

- **Rutinarios**: Son situaciones que se han trabajado anteriormente en clase. Implican la selección de procesos mecanizados o memorizados.

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (-7,4) y tiene pendiente –2.

- **No rutinarios**: Son situaciones novedosas, que no se han trabajado previamente en clase.

Un albañil para construir una escalera usa 2 ladrillos de huella por 1 peralte. Si cada ladrillo mide 20 cms. x 20 cms, ¿qué altura alcanzará la escalera cuando halla construido 5 escalones?

Son un medio natural para discutir actividades que ilustren el uso de conjeturas, contraejemplos, aproximaciones, estrategias y monitoreo. En éstos se pueden incluir aquellos que se buscan analogías, se descubren analogías falsas, se hacen referencias a modelos intuitivos, se investigan comportamientos extremos y construyen problemas más simples.

Por el tipo de respuesta

Hacen referencia al tipo de solución que se pide encontrar a los estudiantes:

- **Respuestas específicas**: Aquellos en que se pide encontrar un valor concreto.

Encuentra los puntos medios del triángulo cuyos vértices son A(0,0) B(-5,3) C(-1,5)

- **De prueba**: Aquellos en que se pide probar la veracidad de alguna afirmación, o lo conveniente de un proceso.

Demuestra que el circuncentro, baricentro y ortocentro del triángulo cuyos vértices son A(-5,8) B(11,2) C(-3,-4) son colineales.

Aunque los ejercicios del problemario no están escritos como "Problemas", estos se consideran como tales, ya que el alumno deberá buscar conscientemente alguna acción apropiada para llegar a su solución.

El contar con gran variedad de problemas aumentará la posibilidad de motivar las clases; la participación de los estudiantes ayudará a establecer contextos para el aprendizaje; clarificará la necesidad de nuevas ideas y procesos de simbolización; ellos podrán relacionar nociones y nuevos aprendizajes dentro del contexto del problema; podrán olvidar una noción, pero el contexto en que se aprendió servirá para recordarla o reconstruirla, permitiendo robustecer la comprensión conceptual de los estudiantes, dando significado y relevancia a lo aprendido. En el problemario se pretende ofrecer esta variedad en los ejercicios prácticos, colaborativos y de reto, para que el profesor seleccione los más adecuados, o en este camino, invente o indague en la bibliografía correspondiente los problemas que se adecuen a la secuencia que en este problemario se está dando para la construcción del conocimiento.

Los estudiantes tienen que comprender el problema para poder llegar a su solución. En este sentido Polya describe 4 etapas para llegar a la solución del problema y para cada etapa propone una serie de heurísticos con el fin de ayudar al estudiante. Estas etapas en el problemario se contemplan de la siguiente forma.

1° Etapa: Comprensión del Problema: Aquí influye preponderantemente la forma en que el alumno oye o lee el problema, el significado que le da, el manejo del lenguaje matemático y sobre todo las habilidades y conceptos que él está en condiciones de dar.

Los heurísticos que se proponen para llegar al entendimiento de los problemas son precisamente las preguntas que haría un profesor para que el alumno entienda determinado concepto; en el problemario son los ejercicios conceptuales, ejemplo:

Para poder resolver el problema "calcular la distancia entre los puntos A(-3, -2) y B(4, 7)".

Los supuestos de los que se parten son los de el alumno sabe lo que es un sistema de coordenadas y puede localizar puntos en este sistema.

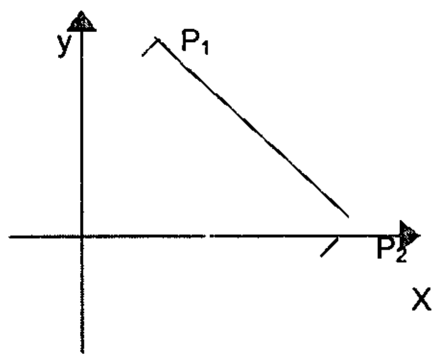
Las preguntas de concepto (heurísticos) para que el alumno le dé significado al problema (lo entienda) serían:

EJERCICIOS CONCEPTUALES.,

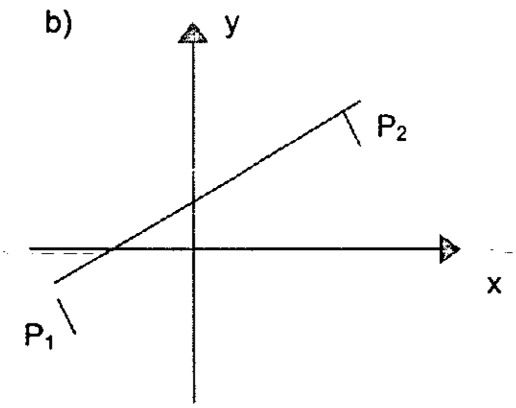
1) En un plano de coordenadas localiza los puntos $P_1(1,3)$ y. $P_2(5,6)$, únelos con un segmento de recta. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{P_1P_2}$?

2) Encuentra las longitudes de los siguientes segmentos en las unidades que creas más adecuadas.

a)



b)



2° Etapa: Concepción de un Plan: En esta etapa es necesario el uso de un conocimiento previo el cual se deberá adaptar a la nueva situación, muchas veces las situaciones a las que se adapten podrán ser conocidas (problemas rutinarios), pero en otras, puede ser novedosa (problemas no rutinarios); para ésta se deberán pensar en posibles caminos para su solución.

En esta parte también es importante la disposición del alumno para emprender el camino de solución, su esfuerzo, su tiempo, su creatividad y sus habilidades.

Por ejemplo, en el problema: (del problemario) "Un niño que pesa 40 kgs. Está sentado en un sube y baja en (1, 4) y el centro del sube y baja está en (3, 6) (las unidades son metros) ¿En qué punto deberá sentarse un niño que pese 60 kilos para mantenerse el equilibrio?"

Es un problema no rutinario en el que se deben pensar posibles caminos para su solución; en esta etapa el profesor debe estar alerta en la supervisión de los posibles caminos para su solución con el fin de no permitir que el alumno tome algún camino equivocado o tan largo y cansado que le aburra y después ya no tenga deseos de emprender otro camino de solución.

En muchas ocasiones se trata de buscar el camino de solución más corto, pero esto no siempre es posible, ya que sería necesario explorar todos los caminos que se plantea el alumno, esta búsqueda puede limitarse si se es selectivo en los procesos y esto implica contar con cierto tipo de habilidades y estrategias las cuales serán mejor si el alumno ha construido el concepto para la solución del problema.

El resolver constantemente problemas desarrolla la habilidad para elegir el mejor camino para la solución y en consecuencia la buena elección del sistema de coordenadas, incógnitas, notación, etc.

3ª ETAPA: Ejecución del Plan.

Después de haber establecido el plan de trabajo, este se pone en práctica. En esta etapa se llega a una solución, pero no significa que el proceso deba terminar allí.

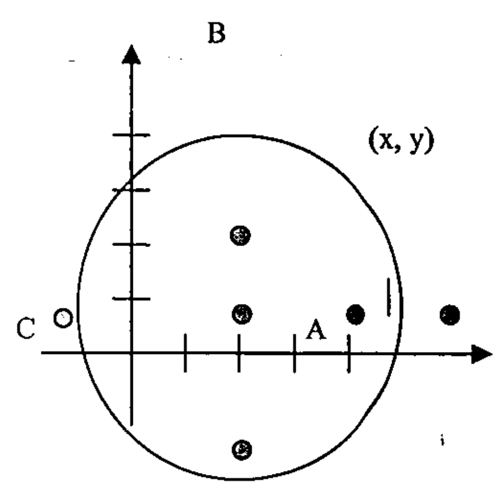
En esta etapa el alumno transforma la información visual o verbal del problema en una imagen mental, la cual exterioriza mediante una gráfica o una ecuación y esto otra vez dependerá de las habilidades del estudiante y los conceptos hasta aquí obtenidos.

Es importante que el alumno trabaje en equipo, ya que al exponer sus conceptos de forma verbal o con una gráfica o ecuación a sus compañeros, clarifica el concepto y si es incorrecto, también tendrá la oportunidad de corregirlo.

En este proceso el alumno también tendrá la oportunidad de poder hacer inferencias estableciendo relaciones o nexos entre dos situaciones y es posible que ésta sienten las bases para adquirir ciertos tipos de pensamiento como el inductivo y desarrollar habilidades para poder hacer transferencias.

Ejemplo, en el problema (del problemario):
"Determinar la ecuación que represente el conjunto de puntos (x, y) tales que su distancia al punto fijo (2, 1) sea 3 unidades".

Después de la compresión del problema, el alumno visualiza la siguiente circunferencia:



Aún más, el alumno podrá determinar 4 puntos de la forma (x, y) A, B, C y D que cumplan con estas condiciones; la ecuación correspondiente tendrá que partir de la fórmula de distancia entre 2 puntos. A partir de aquí, el alumno podrá hacer inferencias para cualquier otra circunferencia con distinto centro y distinto radio, por último, si este concepto quedó claro, es posible que el alumno pueda hacer transferencias de procesos para cualquier otro lugar geométrico.

4ª Evaluación del Proceso de Solución.

Muchas veces no se llega a esta etapa ya que el alumno sólo se limita a llegar a un resultado sin interpretarlo en términos de la situación original. En Geometría Analítica es muy importante desarrollar en el alumno esta habilidad de interpretar sus resultados, ya que por un lado tendrá la oportunidad de llegar a un resultado en forma algebraica o en forma geométrica y por otro lado la verificación de que éste es correcto en el contexto de que le dio forma, en este sentido, su proceso involucrará la construcción de nuevos conceptos que deberán fundamentarlos para usarlos en futuras ocasiones.

Un ejemplo fundamental sería el de encontrar las coordenadas del baricentro de cualquier triángulo dadas las coordenadas de sus vértices. En este problema, después de su comprensión, el alumno podrá llegar a tener como plan de acción obtener la solución haciendo sobre el triángulo los trazos correspondientes para encontrar las medianas del triángulo o bien utilizar una serie de procesos algebraicos.

Generalmente el alumno se inclina más por el proceso algebraico, ya que no está acostumbrado a encontrar una solución geométrica y por otro lado se le ha inculcado la precisión de la solución y una aproximación pareciera ser incorrecta.

En este tipo de problemas si el alumno elige un proceso algebraico para la solución es importante hacer notar la evaluación permanente de su proceso (cálculo de puntos medios de la pendiente de la recta, de su ecuación, etc.) con la construcción geométrica que se va generando para finalmente evaluar su solución final.

En este proceso de manera natural el alumno irá corrigiendo otros conceptos o reafirmándolos como el de la aplicación correcta de la fórmula para calcular el punto medio de un segmento, realización de operaciones aritméticas fundamentales, etc. y posiblemente podrá llegar hasta la inferencia del cálculo de otros puntos importantes del triángulo.

Cada una de las etapas descritas anteriormente involucra como ya mencioné el desarrollo de algunas habilidades en los estudiantes y la construcción de conocimientos bien determinados.

Algo sobre Habilidades.

Las habilidades que se utilizan y desarrollan en el proceso de solución de problemas, se pueden agrupar en XVII niveles (creación y solución de problemas, Alejandro Chávez y Lourdes Romero) como se clasifican en la siguiente tabla:

ETAPA	HABILIDAD.
	I.- CAPTACIÓN Y DISCRIMINACIÓN DE LA INFORMACIÓN.
ENTENDIMIENTO	II.- CODIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA DEL PROBLEMA. MANEJO DE RELACIONES CUANTITATIVAS Y ESPACIALES. MANEJO DE DIFERENTES REPRESENTACIONES.
	III.- ANÁLISIS DE POSIBLES SOLUCIONES.
	IV.- MANEJO, INTERPRETACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE SÍMBOLOS MATEMÁTICOS, PENSAMIENTO EN TÉRMINOS MATEMÁTICOS.
PLANEACIÓN	V.- IDENTIFICACIÓN DE SIMILITUDES Y DIFERENCIAS ENTRE PROBLEMAS, RECONOCIMIENTOS DE FORMAS Y ESTRUCTURAS.
	VI.- IDENTIFICACIÓN DE TÉCNICAS MATEMÁTICAS.
	VII.- GENERALIZACIONES AMPLIAS Y RÁPIDAS DE OBJETOS, OPERACIONES Y RELACIONES. ABREVIACIÓN DEL PROCESO.
	VIII.- FLEXIBILIDAD DE PENSAMIENTO.
EJECUCIÓN.	IX.- USO DE TÉCNICAS EXISTENTES EN SITUACIONES NUEVAS. IMPROVISACIÓN DE TÉCNICAS.
	X.- CLARIDAD, SIMPLICIDAD, ECONOMÍA Y RACIONALIDAD DEL PROCESO.
	XI.- MEMORIA MATEMÁTICA.
	XII.- REVERSIBILIDAD DE PENSAMIENTO.
	XIII.- VERIFICACIÓN DEL PROCESO.
	XIV.- ANÁLISIS DE SOLUCIÓN.
EVALUACIÓN	XV.- TRANSFERENCIA DE RESULTADOS.
	XVI.- ABSTRACCIÓN DE PRINCIPIOS Y PROCESOS.
	XVII.- COMUNICACIÓN DE IDEAS.

Habilidades para el Entendimiento del Problema.

I.- Captación y Discriminación de la Información.

Con esta habilidad se tiene la posibilidad de manejar todo tipo de información y con diferentes representaciones, pudiendo establecer el exceso, la suficiencia o falta de información para determinar las relaciones planteadas en el problema.

En práctica Matemáticas IV, problemas como el siguiente nos dan estas posibilidades:

Ejemplo:

Los extremos de un puente de concreto de forma parabólica están a 2,000 metros de distancia y a 150 metros sobre el piso, mientras que el centro del puente está a nivel del piso. Encontrar la altura del puente sobre el piso a una distancia de 500 metros de la base de la torre de amarre en los extremos del puente, suponiendo que resiste una carga de igual peso en distancias horizontales iguales.

En este problema la información es suficiente porque indica los elementos necesarios de la parábola.

II.- Codificación de la Estructura Matemática.

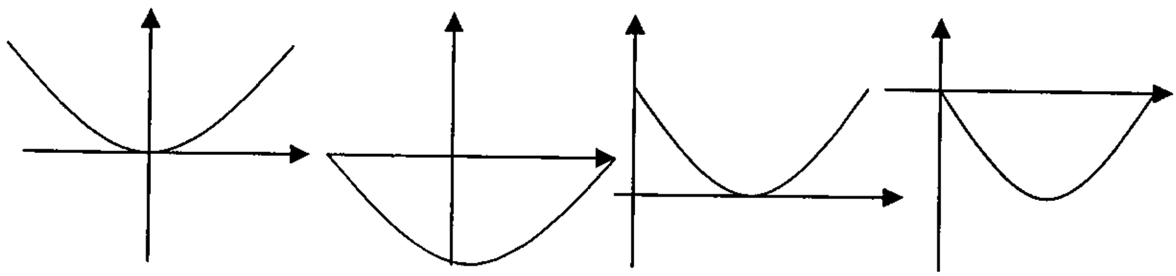
Manejo de relaciones cualitativas y espaciales, manejo de distintas representaciones.

Es la habilidad para transformar las relaciones entre los diferentes datos de la información en un modelo matemático (Ecuación o gráfica en un plano de coordenadas).

En el problema anterior el concepto básico es determinar la ecuación de una parábola con los elementos dados y para ésta existen varias posibilidades.

Para establecer el modelo matemático que representa el problema es necesario manejar adecuadamente las relaciones numéricas y geométricas que existen en los datos del problema.

Para el problema en cuestión, el alumno podrá interpretar geométricamente el problema con parábolas de las siguientes formas:

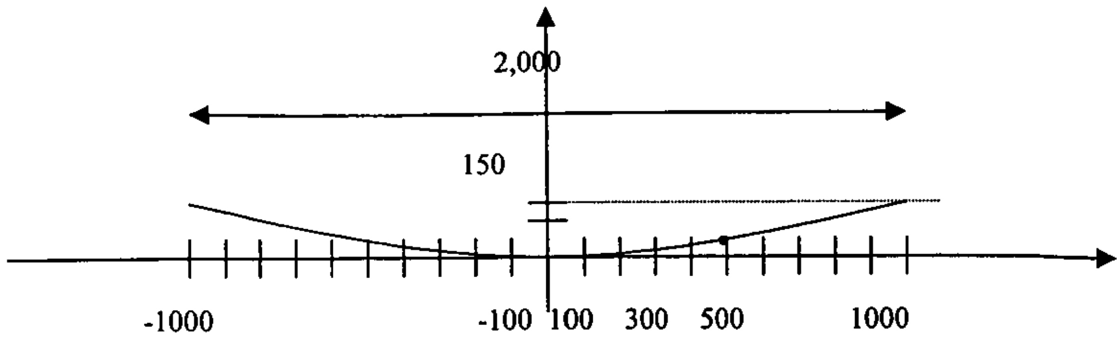


Relacionando adecuadamente para cada una de éstas la forma canónica correspondiente.

III.- Análisis de posibles Soluciones.

Una de las habilidades que es básica en esta etapa del proceso es la identificación de la pregunta a responder que permita el planteamiento de posibles soluciones a la estimación del resultado. Su análisis hace más viable un camino de solución que otro.

En el problema, teniendo la representación en un dibujo con la escala adecuada:



La solución estimada deberá ser menor de 50 metros.

Habilidades para la Concepción de un Plan.

IV.- Manejo, Interpretación y Construcción de Símbolos Matemáticos, Pensamiento en Términos Matemáticos.

En Geometría Analítica esta habilidad facilita el proceso de solución ya que no se trata sólo de aprenderse de memoria las ecuaciones canónicas de la parábola, sino saber interpretar los símbolos que intervienen en ésta y su correspondiente relación con los elementos de la parábola.

En nuestro ejemplo, se tiene que saber que el vértice de una parábola puede estar en el origen (0, 0), que la profundidad del puente no necesariamente deberá coincidir con el foco, que en el problema nos dan las coordenadas de diferentes puntos que están sobre la parábola y que uno de ellos es la solución.

V.- Identificación de Similitud y Diferencias Entre Problemas. Reconocimiento de Formas y Estructuras.

El enunciado de un nuevo problema muchas veces lo ignoramos en forma global sin entender sus particularidades, una gran ayuda es buscar de manera sistemática aquellos problemas que tengan algunas similitudes con el que se trata de resolver, de tal manera que el proceso que se aplicó en el problema conocido pueda aplicarse, con algunas modificaciones al que se resuelve.

El problema del ejemplo deberá resolverse después de haber encontrado la ecuación de una parábola dados diferentes elementos de ella porque el alumno en esta etapa ha construido su conocimiento con problemas como los siguientes:

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1 Sin realizar la gráfica, determina la ecuación en forma general de:
   a).- La parábola con V(3, 1) y Directriz $x - 7 = 0$
   b).- La parábola con F(-4, -2) y Directriz $y + 12 = 0$
2 Una parábola tiene su vértice en (2, 1) y extremos del lado recto en C(-1, 7) y C'(-1, 5)
   a).- Traza la parábola.
   b).- Localiza las coordenadas del foco.
   c).- Determina la longitud de un diámetro de la parábola que pasa por la recta $x = 1$
   d).- ¿Cuántos diámetros puedes encontrar en una parábola?
   e).- ¿El lado recto se puede considerar como un diámetro de la parábola?

VI.- Identificación de Técnicas Matemáticas.

Es la habilidad que se necesita para diferenciar y reconocer los procesos matemáticos para la resolución de un modelo matemático.

En el problema de nuestro ejemplo en la ecuación canónica

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$$

saber sustituir cada uno de los elementos que se dan en el problema como el vértice (0, 0) y un punto (1000, 150) y saber despejar "p" que en nuestro caso sería la incógnita que debemos averiguar para poder encontrar otro punto de la parábola de coordenadas (500,y) que será la solución del problema.

Habilidades para la Ejecución del Plan.

VII.- Generalizaciones Amplias y Rápidas de Objetos, Operaciones y Relaciones, Abreviación del Proceso.

Esta habilidad tiene que ver con el proceso de respuesta automática a determinadas operaciones matemáticas y que los estudiantes puedan "saltarse pasos" estando conscientes de como lo hicieron, en nuestro ejemplo:

$$(1000-0)^2 = 4P\,(150-0)$$

Pueden abreviar este paso por el siguiente:

$$1000^2 = 4p\,(150)$$

Y llegar al valor de P, haciendo abreviaturas tales como

$$P = \frac{(1000)(1000)}{4(150)}$$

$$P = \frac{10000}{6}$$

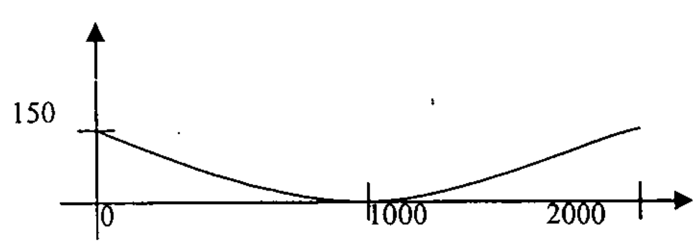
$$P = \frac{5000}{3}$$

O bien realizar cada operación.

VIII.- Flexibilidad Del Pensamiento.

Tal vez el camino elegido no sea el adecuado, por lo que se debe tener la pericia de cambiar en el momento oportuno y seguir otro de los caminos viables.

En el problema anterior podría ser en el momento de elegir el modelo matemático de la parábola que represente su problema, si éste hubiera sido elegido como:



entonces el vértice sería el punto (1000, 0), un punto de la parábola sería (0, 150), y el despeje de P debería de ser en la ecuación

$$(0 - 1000)^2 = 4P\ (150 - 0)$$

IX.- Uso de Técnicas Existentes en Situaciones Nuevas, Improvisación de Técnicas.

Esta habilidad se refiere a la dificultad que tienen los alumnos para adaptar los conocimientos y procesos conocidos en situaciones nuevas.

En el ejemplo, el volver a sustituir el punto (500, y), conociendo P es una técnica ya utilizada pero se les dificulta esta doble sustitución para llegar a la solución. Esto es:

$$(500 - 0)^2 = 4(\frac{5000}{3})(y\text{-}0)$$

Despejar y de la siguiente forma:

$$250000 = \frac{20000}{3} y$$

$$750000 = 20000\ y$$

$$\frac{750000}{20000} = y$$

$$y = 37.5 \text{ m.}$$

X.-Claridad, Simplicidad, Economía y Racionalidad del Proceso

Es muy común que el alumno en el despeje anterior no vea claro el proceso porque no lo está razonando, ya que algunas operaciones quedan ocultas, sin embargo aunque muchas veces se vuelva a repetir lo ya escrito, el alumno puede seguir sin dificultad si se le señala en cada paso la justificación del proceso.

$$(500-0)^2 = 4(\frac{5000}{3})(y-0)$$ Sustituimos (h, k) por (0, 0)

$$(500)^2 = 4(\frac{5000}{3})y$$ Porque cero es neutro aditivo

$$250000 = \frac{20000}{3}y$$ elevamos al cuadrado y multiplicamos por 4 porque $\frac{4}{1}(\frac{5000}{3}) = \frac{20000}{3}y$

$$750000 = 20000\ y$$ Multiplicamos por 3

$$\frac{750000}{20000} = y$$

$$y = 37.5$$ despejamos y (pasa dividiendo)

XI.- Memoria Matemática.

La aplicación de procesos y conceptos matemáticos requiere de la habilidad de recuperar la información almacenada con la estructura matemática requerida, esto es de la construcción del conocimiento básico adecuado para resolver cualquier problema que involucre los conceptos del tema.

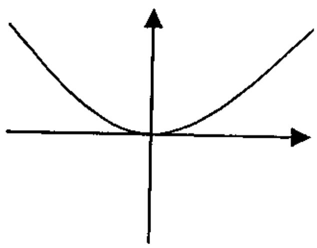
En el problema anterior la memoria matemática depende de cómo el alumno construyó conceptos como

¿Qué elementos tiene una parábola?
¿Cómo se grafica con estos elementos?
¿Cuáles son las ecuaciones que representan según su posición?
¿Cuál es la ecuación general de una parábola?

XII.- Reversibilidad del Pensamiento.

Si un paso no es claro, se hará necesario regresar sobre él para identificar el momento en el que se provocó la falta de claridad.

Es frecuente preguntar al alumno ¿desde dónde no entendiste?, y parece que el alumno ubica perfectamente dónde no tiene claridad, entonces el profesor hace un proceso de reversibilidad del pensamiento como se expresa a continuación:



Esta parábola representa el problema

Su ecuación es de la forma $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$

Qué representan x, y, h, k. y p en la ecuación.

- Qué información tenemos.
- Entonces sustituimos lo que tenemos y despejamos p.
- Volvemos a sustituir el punto (5, y) para obtener la solución.

Habilidades para la Evaluación del Proceso y la Solución.

XIII.- Verificación del Proceso.

Teniendo la estimación del resultado y un conjunto de procesos a seguir, hay que tener la habilidad de retomar todo el procedimiento, desde el inicio para verificar su valor, justificando cada paso dado hacia la solución.

Cuando los alumnos trabajan en equipo se preguntan el porqué de cada paso; esta habilidad debe fomentarse en los alumnos a través de la solución de problemas.

XIV.- Análisis de la Solución.

Se debe comparar lo esperado con lo encontrado de tal modo que se modifique la manera de estimar soluciones o en su caso la solución.

En el problema en cuestión el valor estimado fue menor de 50 m. y la solución de 37.5m por lo que la habilidad incluye la pertinencia del resultado, si se apega al contexto y si cumple con las restricciones y condiciones dadas en el problema.

XV.- Transferencia de Resultados.

Es la habilidad que se tiene cuando el resultado o el proceso pasan a formar parte de los conocimientos que previamente se tenían para que en su momento puedan ser usados en la solución de futuros problemas de la misma área o de otras áreas del conocimiento.

Nuestro ejemplo puede sentar bases para resolver problemas como:

Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen, vértice en (0,-5) y pasa por el punto $(-2\sqrt{3}, \frac{5}{2})$.

XVI.- Abstracción de Principio y Procesos.

La abstracción de principios y procesos así como la generalización de resultados es una habilidad que puede generarse en la solución de problemas, ya que al llegar a una solución por determinado proceso estimula la pericia del alumno para poder establecer analogías con otros problemas.

XVII.- Comunicación de Ideas.

Esta habilidad es de suma importancia en un trabajo en equipo, ya que los estudiantes deben tener la posibilidad de explicar con sus propias palabras el significado que le dan a los conceptos y la manera que los aplican en diferentes contextos.

El poder expresarse con sus compañeros les da la oportunidad de interactuar con los objetos y tener un proceso de acomodación en sus ideas y es en esta habilidad donde creo que el alumno alcanzaría el proceso de construcción del conocimiento.

Es el momento en que el alumno pondrá en práctica los conocimientos teóricos adquiridos mediante acciones concretas que inician en su mismo equipo de trabajo y que posteriormente podrán trascender a éste en acciones dentro de su entorno.

El Marco Operativo y Resultados.

El análisis de los problemas planteados en el problemario a través del enfoque del constructivismo y resolución de problemas tal y como lo concibo, requiere solamente de reflexionar sobre nuestra práctica docente y entender que nuestra didáctica debe tener un cambio en el sentido de encaminarla a situaciones problemáticas y a promover el diálogo entre los estudiantes y los estudiantes y el profesor.

Si bien no hay diseños de problemas que respondan adecuadamente a la enseñanza vía Resolución de Problemas, con nuestra reflexión sobre los ejercicios que proponemos a nuestros alumnos podemos generar problemas interesantes y motivar a los alumnos para generar conceptos; y tener presente que la Resolución de Problemas se encuentra en todo el proceso de la enseñanza y no sólo al finalizar un tema.

Otro aspecto importante es analizar que no sólo el profesor es el que debe motivarse en la resolución de problemas sino también analizar en qué condiciones está el alumno para poder resolver problemas, no es necesario poner problemas sofisticados, muchas veces los ejercicios más sencillos ya son problemas para los alumnos.

Entonces el papel de la Resolución de Problemas en el aprendizaje debe entenderse como un componente importante que ayuda a los estudiantes a hacer matemáticas porque los involucra en el proceso reflexivo y en el uso de conocimientos previos, no importando el nivel académico que tengan siempre se podrá generar en ellos aprendizajes óptimos; con esto quiero decir que debemos tener en mente que todos los estudiantes pueden aprender.

Por otra parte el Constructivismo ha sido frecuentemente criticado con fundamentos sólidos, pero el enfoque de esta propuesta, es hacer conciencia de que el Constructivismo nos ayuda a entender nuestro papel como docentes ya que nos aporta una serie de herramientas que podemos aplicar para la organización de nuestra practica docente y tener presente siempre que es preciso que el sujeto actúe sobre el objeto de forma física y mental, que conforme avance en esta interacción los conocimientos se vuelven mas complejos. Esta interacción puede realizarse en forma individual, trabajo colaborativo o grupal y también debemos tener en mente el sentido que nuestros alumnos le dan a su aprendizaje, esto es, el interés que podemos despertar en ellos para lograrlo.

Esta propuesta pretende ser una guía que oriente al profesor en qué reflexionar sobre su práctica docente para elaborar material didáctico para sus estudiantes.

Y la puesta en práctica del material didáctico en el salón de clase requiere que el alumno trabaje en forma individual y en equipo; en ambos casos es muy importante que el profesor evalúe estas actividades en el momento indicado.

El profesor deberá promover un ambiente cordial y de respeto en el salón de clase animando a sus alumnos a explorar cualquier idea para la solución de los problemas y para la construcción de sus conocimientos.

Para lograr esto es necesario en primer lugar establecer las premisas bajo las cuales de regirán las actitudes de los alumnos y el profesor dentro del salón de clases, como por ejemplo:

- Todas las personas en el salón de clases incluyendo al profesor deberán tratarse con respeto.
- Nadie tiene derecho a interrumpir el proceso de enseñanza, aprendizaje

Y establecer claramente la forma en que se evaluará el curso, como por ejemplo:

- Todas las tareas serán individuales, se revisarán en la clase siguiente y se marcarán con una firma, se aclararán dudas y las tareas con firma contaran el 12 % de tu calificación total.

Así mismo también deberá invitarlos a resolver los ejercicios conceptuales y prácticos de manera individual y los colaborativos y de reto en trabajo en equipo o grupal.

El trabajo en equipo ha sido muy cuestionado desde distintos enfoques, para la puesta en práctica del problemario, es necesario que los alumnos trabajen en forma cooperativa en grupos pequeños, que se esfuercen por que todos los integrantes dominen el material asignado.

Para que el profesor pueda lograr esto, debe estar pendiente desde el lugar adecuado, la distribución de las sillas, etc., hasta hacer que los alumnos sientan que están vinculados entre sí de manera que uno no puede triunfar a menos que todos los integrantes de su equipo triunfen en sus objetivos.

El material didáctico ya elaborado es una ayuda fundamental para lograr esto, ya que el profesor contará con:

- Un material estructurado para trabajar en equipo (ejercicios colaborativos).
- Lecciones adaptadas para el aprendizaje cooperativo acorde a los programas.
- Conocer de antemano qué problemas pueden causar dificultades en qué tipo de alumnos e intervenir de manera eficiente.

En el proceso del trabajo en equipo, como ya mencioné, la habilidad de comunicación de ideas se da cuando el alumno explica verbalmente cómo solucionar problemas, conversa acerca de los conocimientos adquiridos y vincula el aprendizaje presente con el pasado.

Para lograr esto es necesario desarrollar estrategias en donde los alumnos desarrollen todos sus potenciales, Howard Gardner ha encontrado que cada alumno sobresale en dos o tres o siete tipos de inteligencia, en esta tesis no las explico, peró sí las tomó en cuenta para desarrollar las actividades de aprendizaje, como por ejemplo:

- Exposición de acetatos
- Hacer gráficas, buscar definiciones en los libros, hacer notas sobre lo visto en clase, etc.
- Colocar (los alumnos) las mesas adecuadamente para poder hacer su trabajo en equipo y cuando terminen volver a ponerlas en su lugar.
- En ocasiones poner música para que el alumno tenga un ambiente adecuado a su contexto para realizar sus trabajos.
- Poner a los alumnos alguna vez a discutir problemas no necesariamente de la materia.
- Etc.

También es necesario que en el salón de clase se fomenten cierto tipo de valores como el respeto y la responsabilidad.

La responsabilidad individual es un valor que puede ser fomentado en el trabajo en equipo. Cuando un alumno sabe quién necesita de su apoyo y ayuda para completar de mejor forma el trabajo asignado y sabe que no puede aprender por el trabajo de los demás, está adquiriendo una responsabilidad individual dentro de un grupo de trabajo. Este valor se puede fomentar si el profesor califica el trabajo en equipo y al día siguiente indica cuáles fueron los errores que se cometieron.

En este punto se debe tener mucho cuidado, ya que el alumno puede caer en el individualismo (de querer hacerlo sólo para que el trabajo salga bien) o en la competencia (competir con sus compañeros haciendo solo unos cuantos ejercicios y querer demostrar con la calificación que sólo éstos son los que están bien sin importarle el trabajo de los demás). Entonces es necesario fomentar también habilidades que permitan al alumno relacionarse de manera eficiente en su grupo de trabajo tales como: crear confianza, comunicarse, saber mandar, tomar decisiones, comportarse dentro de un grupo, etc.

Los sociólogos han descubierto que cuando los estudiantes realizan trabajo en equipo, los alumnos que tienen capacidades tienden a contestar más preguntas y en consecuencia aprenden más y los que tienen menos aprenden menos. Elizabeth Gen ha descubierto formas prácticas de combatir este problema, ha descubierto que si los grupos son heterogéneos y a cada integrante se le asigna a una función específica para realizar, tienden a interactuar en mayor igualdad.

En el problemario, los ejercicios están diseñados para que después de formarse el equipo heterogéneo, de manera natural, se distribuyan los alumnos los ejercicios de acuerdo a sus capacidades (ellos mismos eligen qué problema resolverán).

Es muy importante, para lograr las habilidades antes mencionadas, que el profesor se involucre en cada equipo para supervisar el trabajo, aclarar dudas y encaminar a los equipos a una discusión final de los problemas elaborados.

Cuando esto se logra, se pueden establecer metas en un grupo de trabajo y obtener éxito.

En conclusión, cuando se trabaja en equipo:

- Los estudiantes construyen, descubren, transforman y amplían sus conocimientos.
- Los profesores se esfuerzan por desarrollar las habilidades de los estudiantes.
- Los profesores y estudiantes trabajan juntos.
- Se construye el conocimiento.
- Se resuelven problemas

Un material didáctico elaborado, como se indicó, se pretende que se trabaje de esta forma. A continuación expongo de qué manera se podría planear un trabajo en equipo tomando como base el material didáctico "Práctica Matemática IV".

Para resolver los Ejercicios Colaborativos marcados en el problemario, la planeación podría partir de las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son los objetivos académicos para este trabajo? Estos se señalan en el problemario al inicio de cada subtema.

2. ¿Cuál será el tamaño de los equipos? Según el número de alumnos que se tengan, pueden ser 3 ó 4.

3. ¿Cómo se eligen los alumnos para cada equipo? El profesor deberá tomar esta decisión dependiendo de las características de sus alumnos, es recomendable poner alumnos en cada equipo que:

   - Tengan conocimientos algebraicos.
   - Sean ordenados.
   - Dominen los conceptos anteriores.
   - Sepan organizar el equipo.

De esta forma se obtendrá un equipo heterogéneo.

4. ¿Qué responsabilidades se asignarán a cada integrante del equipo? El profesor lo decidirá según los caracteres de sus alumnos.
5. ¿Qué conocimientos previos deberán tener los alumnos antes de realizar este trabajo? Los ejercicios conceptuales del tema los marcan.

6. ¿Cómo supervisar en cada equipo que cada miembro del grupo tiene la responsabilidad de aprender y que todos los miembros del grupo también

aprendan? El Profesor deberá estar muy pendiente del trabajo de cada equipo, su funcionamiento y sus dudas.

7. ¿Cómo se calificará este trabajo en equipo y qué porcentaje representará en su evaluación final? Esta parte es de suma importancia para el alumno, ya que al verse premiado por una calificación de equipo que ayude a su calificación final, lo motivará a superarse clase a clase.

8. ¿Cómo se dará la retroalimentación de los resultados obtenidos del trabajo? Es muy importante que el profesor califique inmediatamente el trabajo en equipo y a la clase siguiente lo entregue a sus alumnos, esto ayudará al profesor a retroalimentar las deficiencias y al alumno a darse cuenta de los errores cometidos y corregirlos oportunamente.

9. ¿Qué conceptos puede descubrir por sí mismo el alumno con este tipo de problemas? El trabajo en equipo puede dar muchas sorpresas. Cuando los alumnos analizan ideas juntos descubren que el conocimiento acumulado puede llevarlos a una explicación lógica de nuevos conocimientos y sus preguntas pueden tomar diversas dimensiones; esto fomenta habilidades en el estudiante que le permitirán continuar aprendiendo y construyendo su entendimiento.

10. ¿Qué ejercicios individuales se pueden dejar de tarea para cada integrante del equipo después de haber elaborado este trabajo en equipo? Pueden ser algunos ejercicios prácticos o bien, ejercicios de reto, dependiendo del éxito obtenido en el trabajo en equipo.

Parecieran cosas triviales exigir un tipo de cuaderno adecuado a la materia, pero esto es importante en la formación del alumno porque implica orden y limpieza. Establecer los formas de evaluación y respetarlas implica respeto y cumplimiento, Interesarse en el trabajo de los alumnos cuando éstos trabajan en equipo implica valorar el trabajo de los demás y compartir esfuerzos etc. Todo esto nos lleva a un valor importante: La Honestidad.

Para los ejercicios colaborativos (Fichas) se requiere un fólder para que un integrante del equipo se responsabilice en archivarlas y tenerlas en orden de tal suerte que si algún miembro del equipo las requiere para estudiar siempre estén en orden.

Para las auto evaluaciones se requiere copiarlas en una hoja aparte para que sean evaluadas por el profesor y posteriormente el alumno corregirá errores, las pegará en un cuaderno para poder estudiar posteriormente.

Resultados.

La validación, es otro de los rubros en la educación que se debe tratar con mucho cuidado, en primer lugar lo que hice, como ya lo había mencionado, fue compartir el problemario con tres profesoras que imparten esta materia y pedirles que lo aplicaran con sus alumnos, asimismo yo también lo apliqué.

En segundo lugar en la aplicación de la propuesta fui haciendo las anotaciones correspondientes de los comentarios de los alumnos y de las profesoras, las correcciones al problemario y las soluciones a algunos problemas

En tercer lugar busqué alguna teoría que me permitiera obtener la validación en términos de estimar la calidad de la educación aplicando esta propuesta, y no la validación en términos de analizar los resultados obtenidos después de aplicar algún examen que midiera lo aprendido por los alumnos después de que resolvieran este problemario, la validación implicaría una investigación cualitativa y uno de los principales autores es Peter Woods.

Para Woods el principal problema de la investigación Cualitativa aplicada en el aula, se debe al hecho de que no siempre es la misma persona la que realiza la producción de conocimientos y la demostración de su aplicabilidad a la práctica educativa.

Y aún más complejo, si esto se diera, los maestros suelen actuar por intuición; lo cual descansa sobre una sólida base de conocimientos y en este sentido, dice Woods, existe una "certeza abierta y una imperfección cerrada",

Entonces, para fundamentar estas situaciones el profesor puede utilizar técnicas etnográficas para evaluar su trabajo orientarlo y controlarlo.

Al enfoque cualitativo se le ha acusado de ser demasiado subjetivo, principalmente porque actúa como un instrumento para la recolección e interpretación de los datos y porque promueve el contacto personal y la cercanía con las personas y situaciones observadas; esto plantea dos importantes preguntas:

a).-¿Cómo podemos estar seguros de la generalidad?

b).-¿Cómo podemos estar seguros de que lo que se descubre sea un producto auténtico y no permeado por la presencia del investigador?

Hay dos enfoques diferentes de la etnografía:

1) Los que ven este tipo de investigación como ideográfica, sólo descriptiva de situaciones particulares y que la información descubierta no está respaldada por la valoración estadística (Holísticos).

2) Los que consideran esta investigación monotécnica, es decir generalizadora, comparativa y teórica a partir de áreas de interés.

Según el autor estas dos corrientes no son excluyentes, ya que se puede tener una descripción rica e intensa y a la vez generalizada.

En este sentido creo que los resultados que obtuve fueron Holísticos, porque la educación es un asunto de experiencia tanto del alumno como del profesor y se orienta hacia la integridad del proceso educativo: Considero que el aprendizaje es un proceso natural y que los profesores necesitamos autonomía para diseñar propuestas educativas apropiadas para las necesidades de nuestros alumnos en turno y el tener una propuesta base que permita esta autonomía ayuda mucho al profesor .

De entre los resultados obtenidos al aplicar este problemario, puedo mencionar los siguientes:

En los alumnos al término del curso:

- Los alumnos se adelantaban con los temas porque ya sabían de qué forma se tenían que estudiar y estaban pendientes a las respuestas de los ejercicios conceptuales.

- Podían reconstruir sus apuntes con las preguntas conceptuales y la ayuda de la bibliografía correspondiente.

- Hubo más comunicación y confianza entre ellos y su profesor .

- Cuando se les aplicó un examen tradicional de Geometría Analítica, tardaron más tiempo en contestarlo, pero las preguntas que lograron contestar, fueron correctas.

- Trataban de resolver los ejercicios de reto sin que se los indicara.

- Hubo dudas de cursos anteriores que en este curso se pudieron aclarar y que los alumnos comprendieron para dar forma a sus conocimientos anteriores.

Posteriormente me pregunté: ¿ Qué pasa con los alumnos que tomaron este curso, un semestre después ?, ¿ qué conocimientos conservan ?. Para contestar las preguntas seleccioné una muestra de cinco de estos alumnos y les apliqué el siguiente examen:

Examen de Investigación

Nombre:____

Período en el que cursaste Geometría Analítica: ____________________

Fecha de aplicación del Examen: ____________________________

1.- Determina el área del triángulo cuyos vértices son:

A(-3,7) 8(-3,1) C(5,1)

2.- Determina Gráfica ó Algebraicamente las coordenadas del circuncentro del triángulo con vértices en:

P(-2,-3) Q(1,4) R(3,-1)

3.- Indica qué tipo de cónicas son las siguientes:

a) $x^2 -2x + 4y -5 = O$

b) $2x^2 -3y^2 + 4x + 9y -12 = O$

c) $4x^2 + 9y^2 + 8x -27y -3 = O$

4.-Cuántos sistemas de coordenadas conoces, menciona las características de cada uno y su utilidad.

Los resultados fueron en general:

Para la 1ª pregunta no trataran de usar fórmula alguna, dibujaron el triángulo en un plano de coordenadas y a partir de este dibujo calcularon el área.

Para la pregunta 2 construyeron las mediatrices y encontraron gráficamente una aproximación de las coordenadas del circuncuentro. Algunos trataron de encontrar las ecuaciones de las mediatrices para encontrar el circuncentro..

Para la pregunta 3, contestaron que las tres eran cónicas porque las ecuaciones eran de 2° Grado y en términos generales dijeron el tipo de cónica que representaba.

Para la pregunta 4, sólo dos recordaron que además del plano cartesiano, se puede contar también con el plano polar, mencionan el plano tridimensional.

En los profesores:

Realicé una encuesta con compañeros que se apoyaron en el problemario, obteniendo las siguientes respuestas :

¿De qué forma te ayudó el problemario para preparar tus clases?

- Al inicio de cada capítulo, en los objetivos y temas que se deben de dar, sirve mucho de guía para preparar las clases de forma ordenada y con una secuencia lógica. También, la secuencia de los ejercicios sirve mucho, por ejemplo, los primeros sirven para comprender conceptos básicos de ellas para que cuando se ven conceptos más complicados, se entiendan mucho mejor .

- La secuencia de los ejercicios ¿ Cómo la entendiste?

Al principio sirven para indagar definiciones, o encontrar elementos al graficar , entender la lógica de los conceptos. Más adelante van incrementando en dificultad y variedad hasta llegar a los ejercicios de reto que implican cierto grado de conocimiento y dificultad.

- En general, ¿Cómo utilizaste los ejercicios?

Al principio de un tema, para indagar alguna definición, características, ecuación, gráfica; más adelante para generalizar un resultado y después para ejercitar, los ejercicios colaborativos para trabajos en equipo así como los de reto.

- ¿ como crees que apoyaría la bibliografía existente de Geometría Analítica al problemario?

Como complemento uno del otro, pues la bibliografía existente trae teoría que serviría de apoyo al problemario y viceversa, ya que los libros no traen ejercicios suficientes y ordenados.

- ¿ Qué defectos le encuentras al problemario ?

Siento que cada capítulo trae muchos apartados que por su nombre no son fáciles de citar por dar una tarea, por ejemplo, traen "Ejercicios Prácticos", "Ejercicios Colaborativos", "Ejercicios de Reto", "Auto evaluación", etc. Entiendo la razón de cada uno de estos, más corto o por ejemplo incisos.

- ¿ Qué modificaciones sugieres para el problemario ?

además de los comentarios anteriores, poner los resultados a los ejercicios y más gráficas.

- ¿ Crees que con algunas modificaciones este problemario sirva de apoyo a los profesores que imparten la materia por primera vez ?

Sí, bastante.

- Comentario en general.

Me parece un gran apoyo para el curso en general, los ejercicios están bastante bien y la lógica y orden del mismo está pensado, a mi parecer, muy bien.

Conclusiones.

En términos generales sobre una propuesta didáctica.

- Es importante volver a decir que para elaborar un material didáctico lo primero que se debe conocer es el programa global y las unidades que lo componen en particular y con base a los conocimientos del profesor construir su planeación.

- Tener una comunicación afectiva entre los profesores para socializar este modelo de planeación.

- Aplicarlo en el salón de clase para darse cuenta de cúal pudiera ser la mejor metodología.

- No podemos dar una respuesta concreta sobre cierta didáctica hasta que la hayamos vivido, pero sí podemos valorar la estructura de ésta.

- Una propuesta facilita la comunicación con los profesores de nuevo ingreso.
- Una propuesta abre la posibilidad de recibir aportaciones de otros profesores y de otras corrientes metodológicas que posiblemente puedan complementarla.

- No existen recetas para poder impartir una clase, hay sugerencias y siempre se aprenden nuevos enfoques de las experiencias de otros profesores.

- Es difícil establecer comunicación con otros profesores y convencerlos de llevar cierta Metodología.

- Dejar que un profesor imparta libremente un tema no es bueno ya que los enfoques y profundidad que se les dan son distintos, es necesario entonces mínimamente tener metas comunes aunque los contenidos sean flexibles.

- Es importante que una metodología tenga propuestas académicas y propuesta para su desarrollo.

- Es útil discutir trabajos realizados por profesores y no sólo los que hacen los grandes autores.

- Es importante desarrollar además de habilidades, valores y actitudes en nuestro ámbito de trabajo.

- El trabajo colaborativo es muy importante para que el alumno desarrolle su inteligencia intrapersonal e interpersonal.

En el problemario en particular que aquí propongo.

interactivo, no hay que asumirlos como personas esperando pasivamente la verdad del profesor y del libro de texto.

- Los estudiantes hacen uso de una gran variedad de habilidades, muchas veces desconocidas por el profesor para experimentar y entender la materia.

BIBLIOGRAFIA

Bonilla, Elisa. "La dimensión de la Cultura en la Investigación Matemática" MEMORIAS DE LA PRIMERA REUNIÓN CENTROAMERICANA Y DEL CARIBE SOBRE FORMACIÓN DE PROFESORES E INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS EDUCATIVA. Mérida, Yucatán, México, 1987.

Morris, Robert. ESTUDIOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. VOL.2 Ed. UNESCO 1981

D'Ambrosio, Ubiratan. "Metas y Objetivos Generales de la Educación Matemática" NUEVAS TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. VOL IV. UNESCO. 1979.

NCTM. CURRÍCULO AND EVALUATION STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS. En Wenzelburger, Elfride. "Reseña "EDUCACIÓN MATEMÁTICA. VOL 1 No. 3. 1989.

Polya, G. ¿CÓMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS?. Trad. Profr. Julián Zagazagoitia. Ed. Trillas. México, 1990.

Krutetskii, V. A. THE PSICHOLOGY OF MATHEMATICAL ABILITIES IN SCHOOL CHILDREN. Trans. J. Teller. Chicago: University of Chicago Press. 1976.

Santos, Manuel. Resolución de Problemas; el Trabajo de Alan Schoenfeld: Una Propuesta a Consederar en el Aprendizaje de las Matemáticas. EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Vol. 4. No. 2. Agosto, 1992. México.

Nickerson, Raymond y otros. ENSEÑAR A PENSAR. Aspectos de la aptitud intelectual. Ed. Piados. Barcelona, 1990.

Burkhardt, Hugh. THE REAL WORLD AND MATHEMATICS. Ed. Blackie an Son Limited. Londres. 1988.

McLone, R y W. Döfler "Mathematics as a School Subject". PERSPECTIVES ON MATHEMATICS EDUCATION. 1986.

Nickerson Raymond y otros. ENSEÑAR A PENSAR . aspectos de la aptitud intelectual. Ed. Paidos. Barcelona, 1990.

Resnick, Lauren B. y Wendy W. Ford. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y SUS FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS. Ed. Paidos. Barcelona. 1990.

Santos, L. Manuel. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: ELEMENTOS PARA UNA PROPUESTA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Cuadernos de Investigación. No. 25. Depto. de Matemáticas Educativas. CINVESTAV. IPN. México, 1993.

De Sánchez Margarita. DESARROLLO DE HABILIDADES DEL PENSAMIENTO. Razonamiento Verbal y solución de Problemas. Guía del Instructor. Ed. Trillas. México, 1992.

Valenzuela, Ricardo. Resolución de Problemas: Un enfoque psicológico. EDUCACIÓN MATEMÁTICA. VOL. 4. No. 3. dic. 1992. México.

Parra, Blanca. Dos Concepciones de Resolución de Problemas de Matemáticas. EDUCACIÓN MATEMÁTICA. VOL. 3. No. 3. dic. 1990. México.

Pág. http://www.sedl.org/scimath/compass/v01n03/class.html

David Block y Alcíbiades Papacostas. Didáctica Constructivista y Matemáticas. UNA INTRODUCCIÓN, publicada en la revista "Cero en Conducta año 1 No. 4 México, 1985"

Alejandro Chávez y Lourdes Romero. CREACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS. ITESM, sin publicar.

Peter Woods, LA ESCUELA POR DENTRO, La Etnografía en al Investigación Educativas.

Coll, Gómez Granell. DE QUE HABLAMOS CUANDO HABLAMOS DE CONSTRUCTIVISMO, Cuadernos de Pedagogía, 221, 8-10.

Coll, César. EL CONSTRUCTIVISMO EN EL AULA, BARCELONA, Ed. Grab, Barcelona 1993.

Carvajal, M. Torres, A. Machado, M Didina y J.L. Gallego, LA PLANEACIÓN Y LA EVALUACIÓN EN EL PROCESO EDUCATIVO.

PROBLEMARIO

CONTENIDO.

INTRODUCCIÓN.

¿Por Qué Escribir?

Todos los profesores tenemos la necesidad de tomar cursos para actualizarnos; en uno de estos cursos, nuestro instructor comentó lo importante que sería atrevernos a publicar nuestro trabajo diario con los alumnos y ponerlo a la consideración de nuestros compañeros.

Este comentario fue un reto y después de pensarlo mucho nos decidimos a publicar este material, que es el producto de impartir geometría analítica durante algunos años.

¿Qué es Geometría Analítica?

En la geometría analítica están estrechamente conectados los conceptos algebraicos y los conceptos geométricos, por lo que cualquier problema que se planteé en esta rama de las matemáticas se podrá resolver, en forma geométrica para tener una aproximación al resultado o en forma algebraica para tener precisión en él. Es por esto que la Geometría Analítica resulta un método muy fértil tanto para resolver problemas como para descubrir nuevos resultados.

¿Qué contiene Práctica Matemática IV?

Práctica Matemática IV está dividida en una sección inicial llamada "Lo Que Debes Saber Para Este Curso" y diez capítulos: Sistema de Coordenadas Rectangulares, Línea Recta, Circunferencia, Parábola, Elipse, Hipérbola, Transformación de Coordenadas, Análisis de Curvas Algebraicas, Sistemas de Coordenadas Polares y Desigualdades.

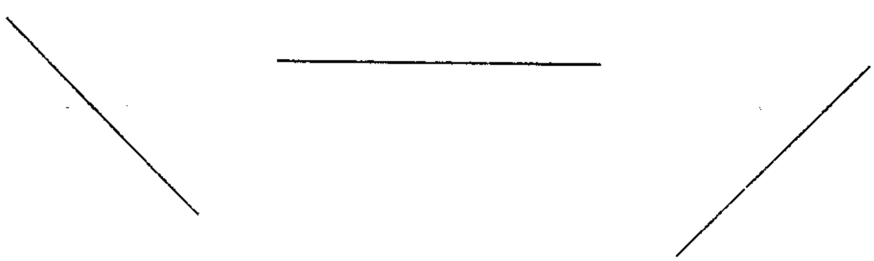
La Sección Inicial "Lo Que Debes Saber Para Este Curso" es optativa y dependerá de las necesidades del grupo, ya que aquí se proporcionan una serie de ejercicios algebraicos y aritméticos básicos para la mejor comprensión de los capítulos posteriores. Cada uno de los capítulos contiene: Un Bosquejo Histórico donde se muestra un pequeño fragmento de la historia referente al capítulo. Nombre del Capítulo y los Contenidos o Subtemas del Capítulo. Objetivos de cada subtema, con el propósito de que desde el inicio se conozca qué es lo que desea que se aprenda. Ejercicios Conceptuales para cada subtema, en donde se pretende que poco a poco se construya el aprendizaje necesario para resolver los Ejercicios Prácticos que son los ejercicios que tradicionalmente se resuelven en clase o de tarea. Ejercicios Colaborativos cuyo fin es propiciar el trabajo en equipo, ya que son ejercicios laboriosos que requieren de cooperación entre los alumnos para su rápida solución. Ejercicios de Reto, son ejercicios optativos con un mayor grado de dificultad a los ejercicios prácticos y colaborativos y para su solución se requiere de ingenio, manejo de contenidos, procesos y habilidades. Ficha integradora para cada capítulo es la tradicional guía de estudio, que engloba todos los subtemas del capítulo en cuestión. Autoevaluación, es un examen que permite la autoevaluación sobre los conocimientos adquiridos en cada capítulo.

"LO QUE DEBES SABER PARA ESTE CURSO"

Para tener éxito en este curso tienes que saber los siguientes conceptos:

a) Medición de un segmento.
b) Operaciones elementales con los números reales (suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada).
c) Desarrollo de un binomio al cuadrado.
d) Resolver ecuaciones de 1° y 2° grado (por factorización, completar cuadrados y fórmula general).
e) Simplificar radicales.
f) Resolver ecuaciones simultáneas 2 x 2 y 3 x 3.
g) Teorema de Pitágoras
h) Funciones Trigonométricas.
i) Ángulos notables.
j) Desigualdades lineales.

1) Mide los siguientes segmentos usando como unidades cm, cuadritos y mm.



a) ¿La longitud del segmento depende de la unidad con que midas?.
b) ¿Las medidas obtenías con cm, mm, ó cuadritos de las longitudes son equivalentes?

2) Simplifica

a) $3 + 5(2 - 7) =$

b) $-3 + \frac{7}{4}(2 - (-9)) =$

I

"SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES"

BOSQUEJO HISTÓRICO:

El hallazgo consistente en fijar la posición de un punto en el plano asignándole dos números (coordenadas) que expresan su distancia a dos líneas perpendiculares entre sí, fue enteramente de Descartes (1569 - 1650).

Descartes no habla de ejes, ni de abscisas ni de ordenadas, y mucho menos de coordenadas; sólo utiliza una recta en posición horizontal que a veces llama diámetro.

L'Hospital (1661-1704) introdujo a fines del siglo XVII los dos ejes, no necesariamente perpendiculares y dió signos a las coordenadas solamente para el primer cuadrante.

Newton (1642-1720) merece particular mención por ser el primer matemático que en realidad consideró los signos de los ejes coordenados.

CONTENIDO:

1) Coordenadas Rectangulares

2) Distancia entre 2 puntos

3) Área de un triángulo

4) División de un segmento rectilíneo en una razón dada.

5) Lugar Geométrico.

I.1.- COORDENADAS RECTANGULARES

OBJETIVO:

- El alumno reconocerá la necesidad de localizar puntos, utilizando para ello un plano de coordenadas rectangulares como uno de los sistemas existentes.

EJERCICIOS CONCEPTUALES

1) ¿Qué es un sistema de coordenadas rectangulares?
2) ¿Qué elementos tiene un sistema de coordenadas rectangulares?
3) ¿Qué son las abscisas?
4) ¿Qué son las ordenadas?
5) ¿Qué significa ordenada al origen?
6) ¿Qué significa abscisas al origen?
7) ¿Qué representa en el plano coordenado el punto $P(x_1, y_1)$?

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1. Localiza en un solo plano de coordenadas los siguientes puntos:
   a) $B(5,4)$, $C(-4,-3)$, $D(1,0)$.
   b) $P_1(-4,-2)$, $P_2(-6,4)$, $P_3(0,-4)$, $P_4(5,5)$
   c) $P_4(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$, $Q(-\frac{5}{2},\frac{7}{3})$, $R(0,-\frac{10}{8})$, $V(\frac{9}{4},\frac{0}{-5})$, $Y(-7,\sqrt{-5})$
   d) $A_1(0,0)$, $A_2(-1,\frac{8}{5})$, $A_3(\frac{7}{4},2)$, $A_4(4,-\frac{8}{3})$, $A_5(\frac{0}{3},-5)$, $A_6(\sqrt{-4}, 5)$
   e) $P(-\sqrt{5},\frac{5}{2})$, $Q(-\frac{8}{5},-\sqrt{3})$, $R(0,4\sqrt{2})$, $S(-\frac{13}{4},0)$, $X(-2, \frac{3}{0})$, $Z(\frac{-5}{0},\sqrt{-4})$

EJERCICIO COLABORATIVO:

Para hacer los siguientes ejercicios necesitas hojas de papel milimétrico, escuadras y un lápiz con punta muy fina.

Traza un sistema de coordenadas, localiza los puntos y únelos en el orden que se dan por renglón, al concluir obtendrás una figura., (colorea si lo deseas)

1) (-7,1), (-7,5), (-6.5,7.5), (-5,9), (-3,9), (-1,7), (-3,7), (-3,5), (-5,3), (-5,1), (-3,.1), (1,-3), (9,.3), (1,5), (-3,5) corte (-7,1),(-5,-3), (-1,-5), (3,-5), (7,-9), (5,-3) corte (-1,7), (-3,8) corte (7,-9), (4,-4) corte (2,0), (-1,2.5) corte (2.5,-2), (-2,5.2) Fin.
2) (-14,-8), (4,-8), (6,-6), (7,-4), (7,0), (2,10), (2,12), (3,14) corte (2,15), (3,14), (6,14), (7,15), (10,16), (7,17), (5,18), (4,18), (2,17), (0,13), (0,9), (3,3), (3,1), (1,-1) corte (4,16), (5,16), (5,17), (4,17), (4,16) corte (7,15), (6,16), (7,17) corte (6,16), (10,16) corte (3,1), (2,3), (-4,9), (-6,10), (-10,14), (-10,9) corte (-2,2), (-8,8), (-10,9), (-14,13), (-14,9), (-13,8), (-15,9), (-12,6), (-15,7), (-11,3), (-14,4),(-8,-2), (-5,-3) corte (-8,-2), (-8,-3), (-9,-2), (-9,-3), (-10-2), (-10,-3),(-11,-2), (-11,-3) corte (-10,-4), (-12,-3), (-10,-5), (-12,-5), (-10,-6), (-11,-6), (-10,-7), (-11,-7), (-10,-8) corte (8,6), (12,6) corte (10,2), (16,2) corte (8,-4), (11,-4) corte (5,-7), (8,-7) corte (-6,-10), (-2,-10) corte (2,-12), (6,-12) corte (-18,-4), (-14,-4) Fin.

EJERCICIOS DE RETO

Para realizar los siguientes ejercicios sólo necesitas lápiz y papel, regla sin graduación y compás.

1) Localiza en un plano de coordenadas el punto ($\sqrt{2}$, 0)
2) Localiza en un plano de coordenadas el punto (-$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$)
3) Localiza en un plano de coordenadas el punto ($\frac{5}{\sqrt{5}}$, -$\frac{2}{\sqrt{2}}$)

I.2.- DISTANCIA ENTRE 2 PUNTOS.

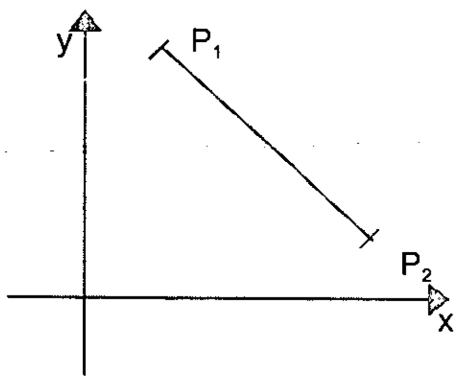
OBJETIVOS:

- El alumno inducirá la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos
- El alumno calculará la distancia entre dos puntos mediante la fórmula correspondiente y comprobará su resultado gráficamente
- El alumno valorará la importancia de ésta en la solución de problemas matemáticos que se le presentará posteriormente.

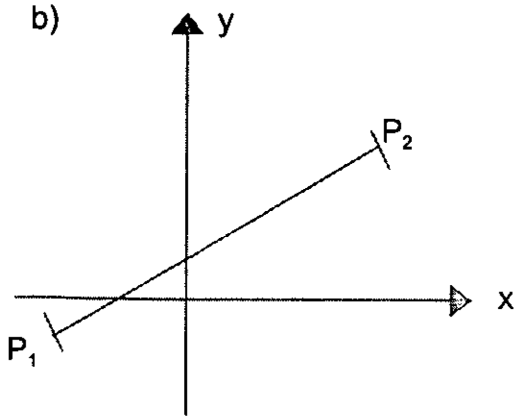
EJERCICIOS CONCEPTUALES.,

1) En un plano de coordenadas localiza los puntos $P_1(1,3)$ y $P_2(5,6)$, únelos con un segmento de recta. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{P_1P_2}$?
2) Encuentra las longitudes de los siguientes segmentos en las unidades que creas más adecuadas.

a)



b)



EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Encuentra la distancia AB, donde A(-5,-2) y B(4,7)

2) Sean los puntos P(3,-4), Q(-5,0) encuentra $\overline{PQ}$.

3) Encuentra el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:

a) A(0,0) B(6,2) C(1,5)

b) P(-3,1) Q($2\sqrt{3}$,-2) R($2\sqrt{3}$,4)

c) P(-1,1) Q(6,-2) S(4,3)

d) T(5,4) R(8,9) S(5,2)

e) A(-3,5) B(3,-2) C(5,-3)

f) $A_1(6,2)$ $A_2(2,-3)$ $A_3(-.2,2)$

4) Indica qué tipo de triángulos son los anteriores.

5) Demuestra si el polígono cuyos vértices son A(4,2) B(7,5) C(5,8) D(2,5) es un cuadrado o un rectángulo.

6) Hallar, el perímetro del polígono ABCDE que tiene como vértices A(-3,0) B(0,-1) C(3,1) D(1,4) E(-2,2).

7) Dados los puntos A(3,-4) B(5,2) C(1,3) demuestra si se cumple la ecuación $\overline{AC}+\overline{AB}=\overline{BC}$

8) Sean $P_1(1,5)$, $P_2(x,2)$ y entre P_1 y P_2 hay 5 unidades, encuentra el valor de x.

9) Si P(x,4) es equidistante de A(5,-.2) y B(3,4) encuentra el valor de x.

10) A(3,y), B(7,4) y d(A,B)=5 Encontrar el valor de y.

11) P(6,3), Q(-1,y) y d(P,Q)=$\sqrt{65}$ Encontrar el valor de y.

12) Hallar el punto sobre el eje Y que es equidistante de (-4,-2) y (3,1)

13) Determina si los siguientes puntos forman un triángulo ó son colineales.

a) (-2,-1) (7,8) (3,3)

b) (4,2) (7,0) (4,-3)

c) (0,0) (-3,-3) (2,2)

EJERCICIO COLABORATIVO

1) Determina si los tres puntos citados son los vértices de un triángulo rectángulo

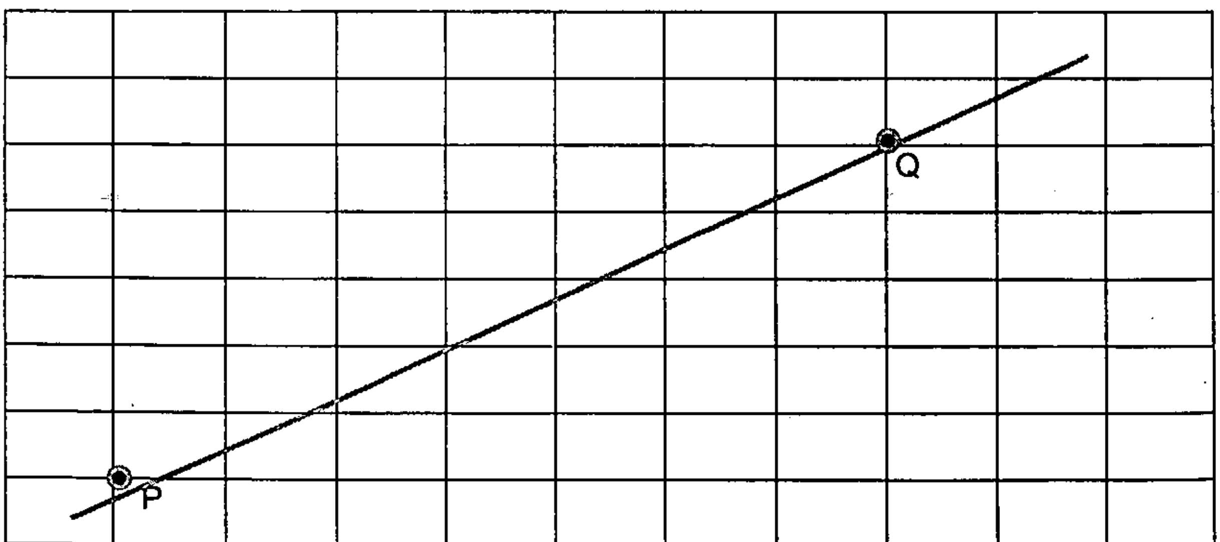
(9,6), (-5,4), (7,10)

2) Encuentra la cantidad desconocida

$P_1(a, a)$, $P_2(1,4)$, $\overline{P_1P_2} = \sqrt{5}$

3) Calcula todos los valores posibles de "y" para que (5,8), (-4,11) y (2,y) sean los vértices de un triángulo rectángulo.

4) En la siguiente figura se presenta un plano. ¿Cúantas unidades hay entre P y Q?



EJERCICIOS DE RETO.

1) Encuentra las coordenadas del vértice C(x, y) del triángulo equilátero ABC, donde A(4,1) y B(5,1)

2) Genera una familia de triángulos isósceles que tengan como base el segmento $\overline{AB}$ donde A(-6,2) y B(-3,2)

I.3.- "ÁREA DE UN TRIÁNGULO"

OBJETIVO:

- El alumno calculará el área de un triángulo dados 3 vértices de éste, utilizando para ello el concepto de distancia y el método de determinantes. Así mismo, generalizará el concepto del cálculo de área de un triángulo, para el cálculo del área de cualquier polígono.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.,

1) ¿Qué significa calcular el área de una figura plana?
2) Cuáles son las fórmulas para calcular el área de:
   a) triángulos b) cuadrados c) rectángulos d) polígonos regulares
3) ¿Cómo se calcula el área de un polígono irregular.?
4) Cuál es la fórmula que se utiliza para calcular el área de un triángulo, conociendo únicamente las medidas de sus lados (fórmula de Herón).

EJERCICIOS PRÁCTICOS

1) Calcular el área de los siguientes triángulos
   a) P(-2,3) Q(1,6) R(3,-4)
   b) A(3,-2) B(7,0) C(-1,5)
   c) A(-1,3) B(2,7) C(5,6)
   d) E(2,-3) F(7,4) G(5,-3)

2) Calcular el perímetro y el área del triángulo cuyos vértices son A(-3,4) B(6,4) C(6,-5).

3) Calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son: A(4,2) B(7,5) C(5,8) D(2,5).

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Calcular el perímetro y el área de los siguientes triángulos cuyos vértices son:

    a) A(-3,7) B(-3,1) C(5,1)

    b) $A(\frac{1}{2},5)$ $B(2,\frac{7}{2})$ $C(-1,\frac{1}{2})$

2) Calcular el área del polígono irregular cuyos vértices son A(-5,2) B(4,2) C(7,0) D(4,-3) E(-5,-3)

3) Calcular por dos métodos distintos el área del triángulo cuyos vértices son: A(-2,-3) B(-3,4) C(4,3)

EJERCICIOS DE RETO:

1) El triángulo cuyos vértices son: $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ lo graficamos como se indica en la figura

c) $-\frac{1}{4}-\frac{2}{5}(-3-2)=$

d) $(4-5)^2+(7-(-5))^2=$

e) $(-2-7)^2+\left[9-(-3)^2\right]=$

f) $\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}{2}=$

g) $\dfrac{-\frac{9}{4}+\left(-\frac{7}{3}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=$

h) $\sqrt{36+81}=$

i) $\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=$

j) $\sqrt{(2-(-5)^2)+(3-(-6)^2)}=$

3) Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba los resultados:

a) $x=5-\frac{9}{10}(3-(-2))$

b) $-9=-7+\frac{3}{5}[x-(-1)]$

c) $-3=y+\frac{3}{2}(4-y)$

d) $7=-\frac{1}{2}+r(2-(-7))$

e) $(x-2)^2+(5-(-7))^2=313$

f) $(-9+3)^2+(3-y)^2=37$

g) $\sqrt{(4-6)^2+(2-y)^2}=4$

h) $x-7=\sqrt{(x-(-2))^2+(3-5)^2}$

i) $\sqrt{(x-\left(-\frac{1}{2}\right))^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\sqrt{(x-\frac{1}{3})^2+\left(\frac{7-2}{2}\right)^2}$

5) Realiza la siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{80}=$

b) $\sqrt{50}-\sqrt{75}+\sqrt{108}-\sqrt{72}=$

c) $\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{72}+\sqrt{18}=$

d) $(3-\sqrt{5})^2+(\sqrt{5}-4)^2=$

e) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2+\left[2-(-\sqrt{2})\right]^2}=$

I

"SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES"

BOSQUEJO HISTÓRICO:

El hallazgo consistente en fijar la posición de un punto en el plano asignándole dos números (coordenadas) que expresan su distancia a dos líneas perpendiculares entre sí, fue enteramente de Descartes (1569 - 1650).

Descartes no habla de ejes, ni de abscisas ni de ordenadas, y mucho menos de coordenadas; sólo utiliza una recta en posición horizontal que a veces llama diámetro.

L'Hospital (1661-1704) introdujo a fines del siglo XVII los dos ejes, no necesariamente perpendiculares y dió signos a las coordenadas solamente para el primer cuadrante.

Newton (1642-1720) merece particular mención por ser el primer matemático que en realidad consideró los signos de los ejes coordenados.

CONTENIDO:

1) Coordenadas Rectangulares

2) Distancia entre 2 puntos

3) Área de un triángulo

4) División de un segmento rectilíneo en una razón dada.

5) Lugar Geométrico.

I.1.- COORDENADAS RECTANGULARES

OBJETIVO:

- El alumno reconocerá la necesidad de localizar puntos, utilizando para ello un plano de coordenadas rectangulares como uno de los sistemas existentes.

EJERCICIOS CONCEPTUALES

1) ¿Qué es un sistema de coordenadas rectangulares?
2) ¿Qué elementos tiene un sistema de coordenadas rectangulares?
3) ¿Qué son las abscisas?
4) ¿Qué son las ordenadas?
5) ¿Qué significa ordenada al origen?
6) ¿Qué significa abscisas al origen?
7) ¿Qué representa en el plano coordenado el punto $P(x_1, y_1)$?

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1. Localiza en un solo plano de coordenadas los siguientes puntos:
   a) B(5,4), C(-4,-3), D(1,0).
   b) $P_1(-4,-2)$, $P_2(-6,4)$, $P_3(0,-4)$, $P_4(5,5)$
   c) $P_4(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$, $Q(-\frac{5}{2},\frac{7}{3})$, $R(0,-\frac{10}{8})$, $V(\frac{9}{4},\frac{0}{-5})$, $Y(-7,\sqrt{-5})$
   d) $A_1(0,0)$, $A_2(-1,\frac{8}{5})$, $A_3(\frac{7}{4},2)$, $A_4(4,-\frac{8}{3})$, $A_5(\frac{0}{3},-5)$, $A_6(\sqrt{-4},\ 5)$
   e) $P(-\sqrt{5},\frac{5}{2})$, $Q(-\frac{8}{5},-\sqrt{3})$, $R(0,4\sqrt{2})$, $S(-\frac{13}{4},0)$, $X(-2,\ \frac{3}{0})$, $Z(\frac{-5}{0},\sqrt{-4})$

EJERCICIO COLABORATIVO:

Para hacer los siguientes ejercicios necesitas hojas de papel milimétrico, escuadras y un lápiz con punta muy fina.

Traza un sistema de coordenadas, localiza los puntos y únelos en el orden que se dan por renglón, al concluir obtendrás una figura., (colorea si lo deseas)

1) (-7,1), (-7,5), (-6.5,7.5), (-5,9), (-3,9), (-1,7), (-3,7), (-3,5), (-5,3), (-5,1), (-3,.1), (1,-3), (9,.3), (1,5), (-3,5) corte (-7,1),(-5,-3), (-1,-5), (3,-5), (7,-9), (5,-3) corte (-1,7), (-3,8) corte (7,-9), (4,-4) corte (2,0), (-1,2.5) corte (2.5,-2), (-2,5.2) Fin.
2) (-14,-8), (4,-8), (6,-6), (7,-4), (7,0), (2,10), (2,12), (3,14) corte (2,15), (3,14), (6,14), (7,15), (10,16), (7,17), (5,18), (4,18), (2,17), (0,13), (0,9), (3,3), (3,1), (1,-1) corte (4,16), (5,16), (5,17), (4,17), (4,16) corte (7,15), (6,16), (7,17) corte (6,16), (10,16) corte (3,1), (2,3), (-4,9), (-6,10), (-10,14), (-10,9) corte (-2,2), (-8,8), (-10,9), (-14,13), (-14,9), (-13,8), (-15,9), (-12,6), (-15,7), (-11,3), (-14,4),(-8,-2), (-5,-3) corte (-8,-2), (-8,-3), (-9,-2), (-9,-3), (-10-2), (-10,-3),(-11,-2), (-11,-3) corte (-10,-4), (-12,-3), (-10,-5), (-12,-5), (-10,-6), (-11,-6), (-10,-7), (-11,-7), (-10,-8) corte (8,6), (12,6) corte (10,2), (16,2) corte (8,-4), (11,-4) corte (5,-7), (8,-7) corte (-6,-10), (-2,-10) corte (2,-12), (6,-12) corte (-18,-4), (-14,-4) Fin.

EJERCICIOS DE RETO

Para realizar los siguientes ejercicios sólo necesitas lápiz y papel, regla sin graduación y compás.

1) Localiza en un plano de coordenadas el punto ($\sqrt{2}$, 0)
2) Localiza en un plano de coordenadas el punto (-$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$)
3) Localiza en un plano de coordenadas el punto ($\frac{5}{\sqrt{5}}$. -$\frac{2}{\sqrt{2}}$)

I.2.- DISTANCIA ENTRE 2 PUNTOS.

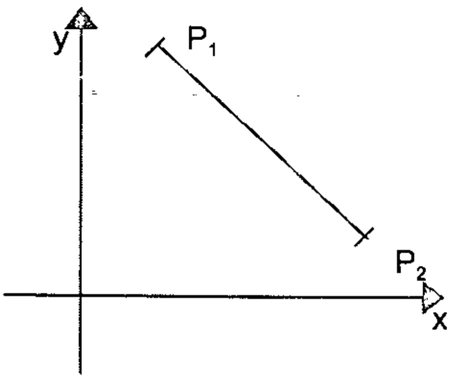
OBJETIVOS:

- El alumno inducirá la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos
- El alumno calculará la distancia entre dos puntos mediante la fórmula correspondiente y comprobará su resultado gráficamente
- El alumno valorará la importancia de ésta en la solución de problemas matemáticos que se le presentará posteriormente.

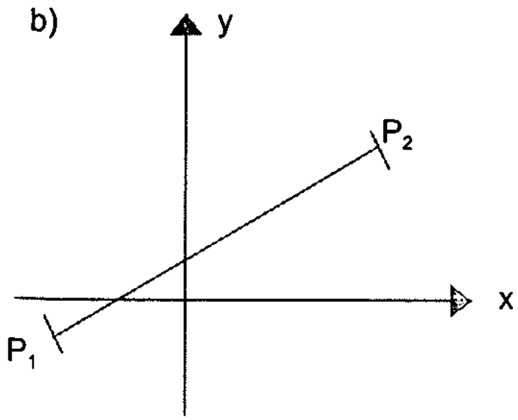
EJERCICIOS CONCEPTUALES.,

1) En un plano de coordenadas localiza los puntos $P_1(1,3)$ y $P_2(5,6)$, únelos con un segmento de recta. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{P_1P_2}$?
2) Encuentra las longitudes de los siguientes segmentos en las unidades que creas más adecuadas.

a)



b)



EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Encuentra la distancia AB, donde A(-5,-2) y B(4,7)

2) Sean los puntos P(3,-4), Q(-5,0) encuentra $\overline{PQ}$.

3) Encuentra el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:

a) A(0,0) B(6,2) C(1,5)

b) P(-3,1) Q($2\sqrt{3}$,-2) R($2\sqrt{3}$,4)

c) P(-1,1) Q(6,-2) S(4,3)

d) T(5,4) R(8,9) S(5,2)

e) A(-3,5) B(3,-2) C(5,-3)

f) A_1(6,2) A_2(2,-3) A_3(-.2,2)

4) Indica qué tipo de triángulos son los anteriores.

5) Demuestra si el polígono cuyos vértices son A(4,2) B(7,5) C(5,8) D(2,5) es un cuadrado o un rectángulo.

6) Hallar, el perímetro del polígono ABCDE que tiene como vértices A(-3,0) B(0,-1) C(3,1) D(1,4) E(-2,2).

7) Dados los puntos A(3,-4) B(5,2) C(1,3) demuestra si se cumple la ecuación $\overline{AC}+\overline{AB}=\overline{BC}$

8) Sean P_1(1,5), P_2(x,2) y entre P_1 y P_2 hay 5 unidades, encuentra el valor de x.

9) Si P(x,4) es equidistante de A(5,-.2) y B(3,4) encuentra el valor de x.

10) A(3,y), B(7,4) y d(A,B)=5 Encontrar el valor de y.

11) P(6,3), Q(-1,y) y d(P,Q)=$\sqrt{65}$ Encontrar el valor de y.

12) Hallar el punto sobre el eje Y que es equidistante de (-4,-2) y (3,1)

13) Determina si los siguientes puntos forman un triángulo ó son colineales.

a) (-2,-1) (7,8) (3,3)

b) (4,2) (7,0) (4,-3)

c) (0,0) (-3,-3) (2,2)

EJERCICIO COLABORATIVO

1) Determina si los tres puntos citados son los vértices de un triángulo rectángulo

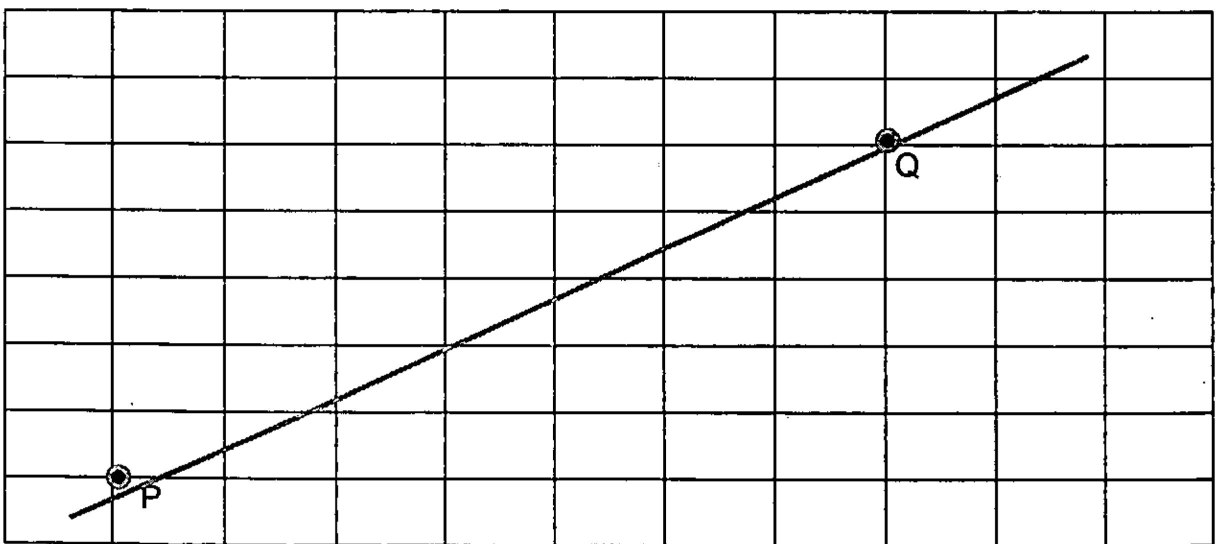
(9,6), (-5,4), (7,10)

2) Encuentra la cantidad desconocida

$P_1(a, a)$, $P_2(1,4)$, $\overline{P_1P_2} = \sqrt{5}$

3) Calcula todos los valores posibles de "y" para que (5,8), (-4,11) y (2,y) sean los vértices de un triángulo rectángulo.

4) En la siguiente figura se presenta un plano. ¿Cúantas unidades hay entre P y Q?



EJERCICIOS DE RETO.

1) Encuentra las coordenadas del vértice C(x, y) del triángulo equilátero ABC, donde A(4,1) y B(5,1)

2) Genera una familia de triángulos isósceles que tengan como base el segmento $\overline{AB}$ donde A(-6,2) y B(-3,2)

I.3.- "ÁREA DE UN TRIÁNGULO"

OBJETIVO:

- El alumno calculará el área de un triángulo dados 3 vértices de éste, utilizando para ello el concepto de distancia y el método de determinantes. Así mismo, generalizará el concepto del cálculo de área de un triángulo, para el cálculo del área de cualquier polígono.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.,

1) ¿Qué significa calcular el área de una figura plana?
2) Cuáles son las fórmulas para calcular el área de:
    a) triángulos   b) cuadrados   c) rectángulos   d) polígonos regulares
3) ¿Cómo se calcula el área de un polígono irregular.?
4) Cuál es la fórmula que se utiliza para calcular el área de un triángulo, conociendo únicamente las medidas de sus lados (fórmula de Herón).

EJERCICIOS PRÁCTICOS

1) Calcular el área de los siguientes triángulos
    a) P(-2,3) Q(1,6) R(3,-4)
    b) A(3,-2) B(7,0) C(-1,5)
    c) A(-1,3) B(2,7) C(5,6)
    d) E(2,-3) F(7,4) G(5,-3)

2) Calcular el perímetro y el área del triángulo cuyos vértices son A(-3,4) B(6,4) C(6,-5).
3) Calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son: A(4,2) B(7,5) C(5,8) D(2,5).

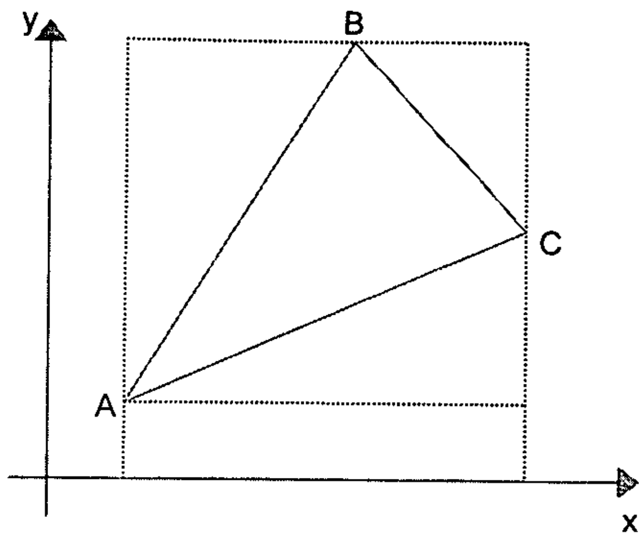
EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Calcular el perímetro y el área de los siguientes triángulos cuyos vértices son:
   a) A(-3,7) B(-3,1) C(5,1)
   b) $A(\frac{1}{2},5)$ $B(2,\frac{7}{2})$ $C(-1,\frac{1}{2})$
2) Calcular el área del polígono irregular cuyos vértices son A(-5,2) B(4,2) C(7,0) D(4,-3) E(-5,-3)
3) Calcular por dos métodos distintos el área del triángulo cuyos vértices son: A(-2,-3) B(-3,4) C(4,3)

EJERCICIOS DE RETO:

1) El triángulo cuyos vértices son: $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ lo graficamos como se indica en la figura

2)



Encuentra el área del triángulo ABC tomando para ello el área del rectángulo que se marca con las líneas punteadas en la figura.

I.4.- DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA.

OBJETIVOS:

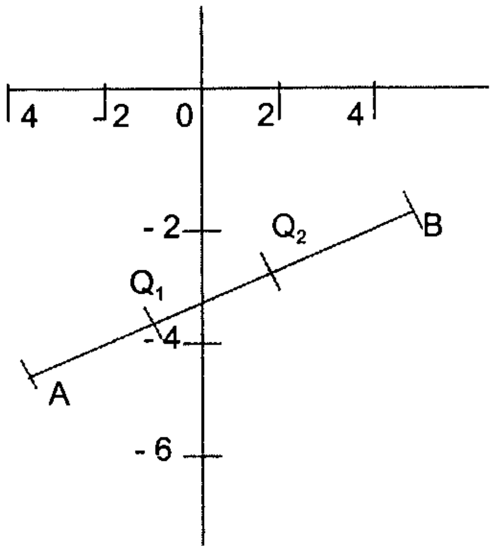
Dado un segmento de recta:

- El alumno comprenderá gráficamente el concepto de división de éste en n partes iguales.
- El alumno de manera gráfica se aproximará a las coordenadas de los puntos de división de un segmento.
- El alumno inducirá la fórmula para la obtención de las coordenadas de los puntos de división de un segmento.
- El alumno aplicará la fórmula correspondiente para el cálculo de las coordenadas de los puntos de división de un segmento.

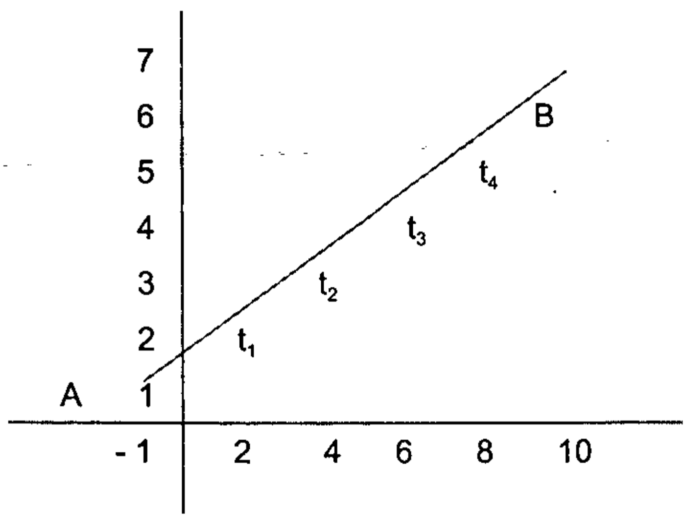
EJERCICIOS CONCEPTUALES.

En las siguientes gráficas localiza lo que se indica.

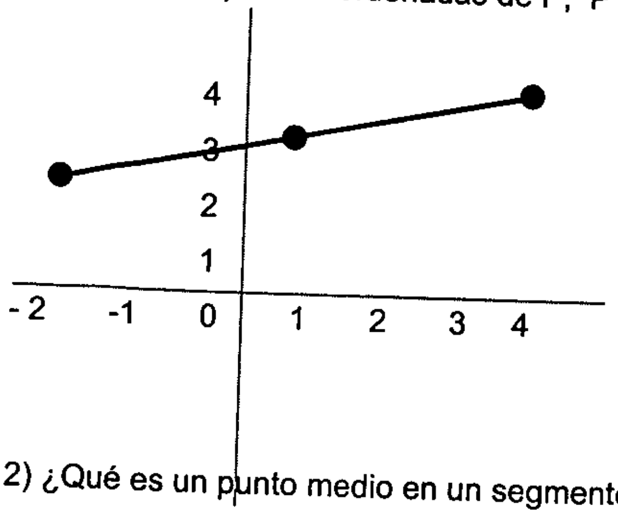
a) Las coordenadas de Q_1 y Q_2, estas coordenadas dividen al segmento $\overline{AB}$ en 3 partes iguales, se llaman puntos de trisección.



b) Las coordenadas de t_1, t_2, t_3 y t_4 que dividen al segmento $\overline{AB}$ en 5 partes iguales.



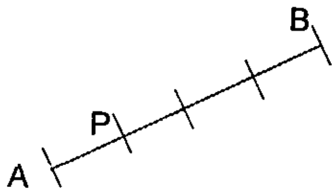
c) Las coordenadas de P, P es le punto medio de $\overline{AB}$.



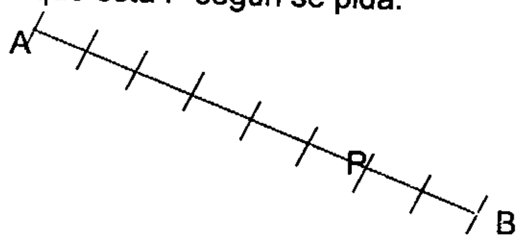
2) ¿Qué es un punto medio en un segmento?

3) En los siguientes segmentos indica la razón en la que está P según se pida.

a)



b)



a)	b)
$\frac{AP}{AB}=$	$\frac{AP}{AB}=$
$\frac{BP}{BA}=$	$\frac{BP}{BA}=$
$\frac{AP}{PB}=$	$\frac{AP}{PB}=$
$\frac{BP}{PA}=$	$\frac{BP}{PA}=$

4) ¿Qué es la razón?

5) Gráfica los siguientes segmentos y ubica P, según la razón indicada.

$a)\frac{AP}{AB}=\frac{3}{4}$ $c)\frac{AP}{PB}=\frac{7}{5}$ $e)\frac{AP}{AB}=\frac{4}{3}$ $g)\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}$

$b)\frac{BP}{BA}=\frac{4}{5}$ $d)\frac{BP}{PA}=\frac{8}{3}-$ $f)\frac{AP}{AB}=2$

EJERCICIOS PRÁCTICOS

1) Encuentra gráficamente las coordenadas del punto P que queda exactamente sobre el segmento $\overline{AB}$ y a la mitad del camino que va de A a B, donde A(-7,0) y B(3,7)
2) Localiza gráficamente los puntos que dividen al segmento $\overline{AB}$ en 3 partes iguales con A(-5,2) B(3,7)
3) Hallar el punto P(x, y) tal que la razón de $\overline{\mathrm{AP}}$ a $\overline{\mathrm{AB}}$ sea igual a r, de los siguientes ejercicios.

   a) $A(-4,3), B(5,-1),\ r=\frac{1}{3}$

   b) $A(-2,0)\ B(2,3),\ r=\frac{4}{3}$

   c) $A(2,5)\ B(7,3),\ r=\frac{4}{5}$

   d) $A(3,6)\ B(-4,0),\ r=\frac{3}{7}$

   e) $A(2,-4)\ B(-3,-3),\ r=2$
4) Encontrar los puntos que cuatrisecan al segmento cuyos extremos son A(4,-2) B(-6,1).

EJERCICIOS COLABORATIVOS

1) Obtener los puntos medios del triángulo cuyos vértices son A(0,0) B(-5,-3) C(-1,5) y calcular la longitud de las medianas.

2) Encontrar las coordenadas de P(x, y) cuando A(1,3) B(-9,-10) y $\frac{AP}{PB}=\frac{3}{4}$.

3) Encontrar las coordenadas de P(x, y) cuando A(5,8) B(2,1) y $\frac{AP}{PB}=\frac{5}{2}$.

4) Encontrar las coordenadas de P(x, y) cuando A(1,3), B(7,5) y r = $-\frac{3}{2}$

5) Un niño que pesa 20 kilos está sentado en A(-3,4) y otro niño que pesa 30 kilos está en B(6,7) (las unidades son metros). Hallar el punto P entre A y B que podría utilizarce como fulcrum de una palanca que podría poner a los niños en equilibrio (Sugerencia: considérese $\frac{AP}{AB}=\frac{2}{5}$ ¿Por qué?)

6) Un niño que pesa 40 kilos está sentado en un sube y baja en (1,4) y el centro del sube y baja está en (3,6) (las unidades son metros) ¿En qué punto deberá sentarse un niño que pese 60 kilos para mantenerse el equilibrio?

7) Encontrar las coordenadas de A(x_1, y_1) de manera que P(4,7) y B(2,-1) cumple con $\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}$.

8) Encontrar las coordenadas de A(x_1,y_1) de manera que P(4,7) y B(2,-1) cumple con $\frac{AP}{AB}=\frac{2}{5}$.

9) Encontrar las coordenadas de A(x_1,y_1) si P(3,-4) y B(5,-2) cumple con $\frac{AP}{AB}=\frac{1}{2}$.

10) Encontrar las coordenadas P(x, y) donde A(6,-2) B(-2,7) cumple con $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$.

EJERCICIOS DE RETO

1) Los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos A(-1,3) B(1,-2) C(5,-3). Determina en donde se encuentran los vértices del triángulo.

2) Encuentra las coordenadas del punto A(X_1, Y_1) del segmento $\overline{AB}$ donde B(2,5), P(-7,-2) y $\frac{AP}{AB}=\frac{-3}{5}$

I.5.- LUGAR GEOMÉTRICO

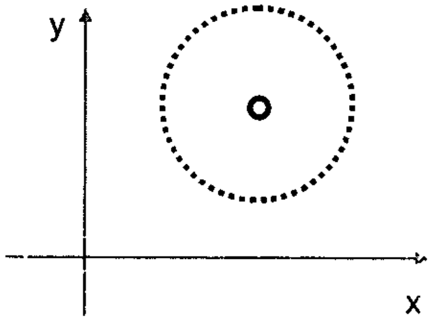
OBJETIVOS:

- El alumno definirá el concepto de lugar geométrico.
- El alumno asociará un lugar geométrico de acuerdo a las condiciones que cumpla con el modelo matemático correspondiente.

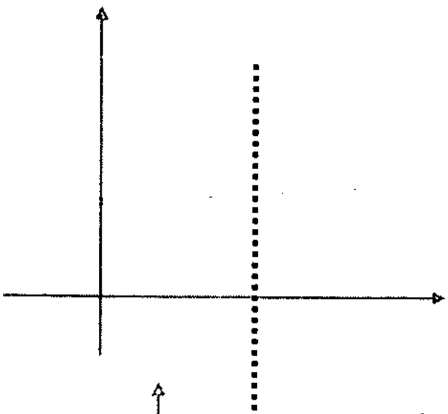
EJERCICIOS CONCEPTUALES

1) ¿Qué es un lugar Geométrico?.
2) En las siguientes gráficas, indica qué características pueden cumplir el conjunto de puntos que las forman.

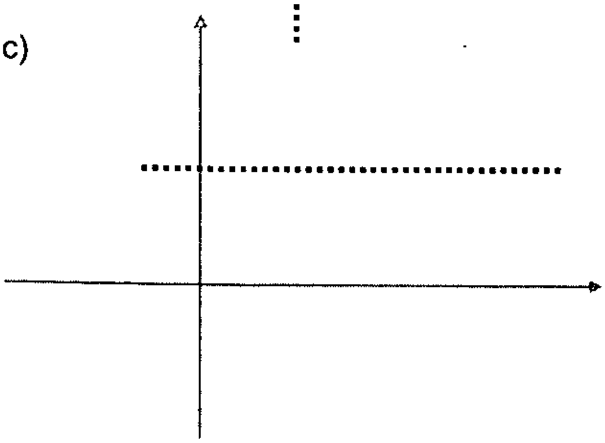
a)



b)

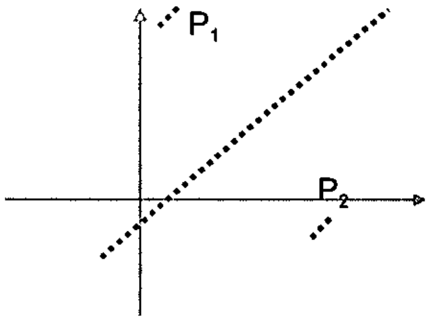


c)

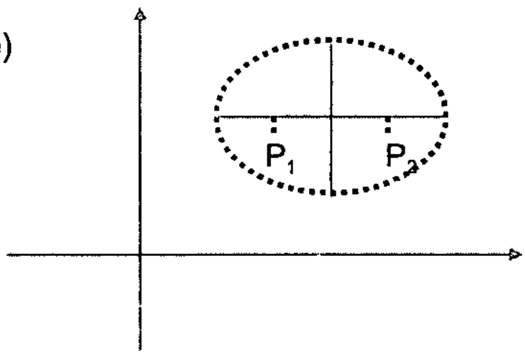


x

d)



e)



EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Encontrar la ecuación que representa cada uno de los lugares geométricos que definiste en los ejercicios conceptuales.
2) Obtener la ecuación del lugar geométrico, de manera que la distancia de los puntos que formen el lugar geométrico al punto A(2,-3) sea 4 unidades.
3) Obtener la ecuación del lugar geométrico, de tal forma que la distancia de cualquier punto del lugar geométrico al punto P(-3,4) sean 5 unidades.
4) Obtener la ecuación del lugar geométrico de manera que sea equidistante a los puntos A(-3,0) y B(1,4).
5) Obtener la ecuación del lugar geométrico que sea equidistante a los puntos P(3,1) y Q(-4,5).
6) Encontrar la ecuación del conjunto de los puntos (x,y) que su distancia al punto (0,0) sea al triple de su distancia a (5,0).

EJERCICIOS COLABORATIVOS

1) Encontrar la ecuación del conjunto de puntos (x,y) que su distancia al eje "y" sea la mitad que su distancia al punto (3,0).
2) Obtener la ecuación del lugar geométrico de los puntos (x,y) tal que la suma de sus distancias a (2,0) y (-2,0) sea 6 unidades,
3) Hallar la ecuación de los puntos (x,y) tales que su diferencia a los puntos (0,3) y (0,-3) sea 4unidades.
4) Obtener la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y) tales que la suma de sus distancias a los puntos A(7,2) y B(3,2) sea 6 unidades.

EJERCICIOS DE RETO

1) De los ejercicios colaborativos 1 y 2, grafica su lugar geométrico.

FICHA INTEGRADORA.

1) Hallar el punto sobre el eje Y que es equidistante de (-4,-2) y (3,1)
2) Calcular el perímetro y el área del triángulo cuyos vértices son:
   a) A(-3,7) B(-3,1) C(5,1)
   b) A(1,5) B(2,7) C(-1,1)

   Además indicar en cada caso qué tipo de triángulo es.
3) Calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son: A(4,2) B(7,5) C(5,8) D(2,5)
4) Graficar los siguientes segmentos y ubicar P según la razón indicada.

a) $\frac{AP}{AB}=\frac{3}{5}$ b) $\frac{AP}{PB}=\frac{7}{5}$ c) $\frac{AP}{AB}=2$

d) $\frac{BP}{BA}=\frac{3}{4}$ e) $\frac{AP}{AB}=\frac{4}{3}$ f) $\frac{AP}{AB}=\frac{-1}{3}$

5) Obtener los puntos medios de los triángulos cuyos vértices son: A(0,0) B(-5,-3) y C(-1,5) y calcular las longitudes de las medianas.

6) Calcular las coordenadas de los puntos de trisección del segmento $\overline{AB}$, A(-5,2) B(3,7).

7) Encontrar las coordenadas de A(x_1,y_1) del segmento $\overline{AB}$ de manera que $\frac{AP}{AB}=\frac{2}{5}$, B(2,-1) y P(4,7)

8) Encontrar las coordenadas de A(x_1,y_1) del segmento $\overline{AB}$ donde A(6,-2), B(-2,7) y $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$

9) Un niño que pesa 30 kilos está sentado en A(3,4) y otro niño que pesa 50 kilos, está en (6,7). Si las unidades son metros, hallar el punto P entre A y B que podría utilizarce como fulcrum de una palanca que podría poner en equilibrio a los niños. (Sug. Considera 50 AP=30 AB ¿Por qué?)

10)Determinar la ecuación del conjunto de puntos (x, y) tales que su distancia al punto (-1,2) sea la mitad de la distancia al punto (3,4).

AUTOEVALUACIÓN

1) Calcula el Perímetro y el Área del triángulo formado por los vértices A(-1,-3) B(6,-1) y C(2,5) y determina qué tipo de triángulo es.
2) Hallar el punto sobre el eje Y que es equidistante de (-4,-2) y (3,1).
3) Si A(2,-1), B(4,5) y $\frac{AP}{PB}=\frac{-2}{3}$, encuentre las coordenadas de P.
4) Hallar la ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos (x, y) de tal forma que su distancia al punto (1,3) sea un tercio de la distancia al punto (1,-3).
5) Encontrar las coordenadas del punto A(x_1, y_1) de manera que el punto medio de $\overline{AB}$ es P(3,7) y B(-5,$\frac{3}{4}$)
6) Encontrar la longitud de la mediana del lado $\overline{AC}$ del triángulo cuyos vértices son: A(-2,5) B(6,5) C(-2,-3)

II

LA LÍNEA RECTA

BOSQUEJO HISTÓRICO.

El primer principio de los griegos fue que las matemáticas deberían de ocuparse de abstracciones. Así la línea recta matemática debe abarcar las cuerdas tirantes, los límites de los campos o las trayectorias de los rayos de luz. De acuerdo con esto, la línea recta no podía tener grosor, color, estructura molecular o tensión. De aquí que las matemáticas trataran ante todo de conceptos abstractos, entre ellos la línea recta, porque más tarde a partir de éstos se podrían definir conceptos tales como el triángulo, cuadrado, etc.

Años más tarde (1629) la tarea de esta época fue la restauración de obras perdidas de la antigüedad a base de la información contenida en los tratados clásicos que se habían conservado. Como resultado de ello, Fermat y Descartes (Siglo XVII) hicieron algunos descubrimientos relacionados con la línea recta. Fermat descubrió la ecuación lineal como la expresión algebraica que representa una recta y Descartes al inicio de su primer libro de geometría menciona: "Cualquier problema de geometría puede reducirce fácilmente a términos que únicamente sea necesario para construirlos, conocer las longitudes de algunas líneas rectas".

CONTENIDO.

1) Ángulo de inclinación de una recta.
2) Pendiente de una recta.
3) La recta como lugar geométrico.
   a) Ecuación en forma general de una recta.
   b) Ecuación en forma de pendiente y ordenada al origen.
   c) Ecuación en forma simétrica.
4) Ángulo entre 2 rectas:
   a) Rectas oblicuas.

b) Rectas perpendiculares.

c) Rectas paralelas

d) Punto de intersección entre 2 rectas.

e) Problemas de corte Euclideano (líneas principales de un triángulo).

5) Distancia de un punto a una recta.

6) Ecuación de familia de rectas..

7) Problemas de aplicación de rectas.

II.1.-ÁNGULOS DE INCLINACIÓN DE UNA RECTA.

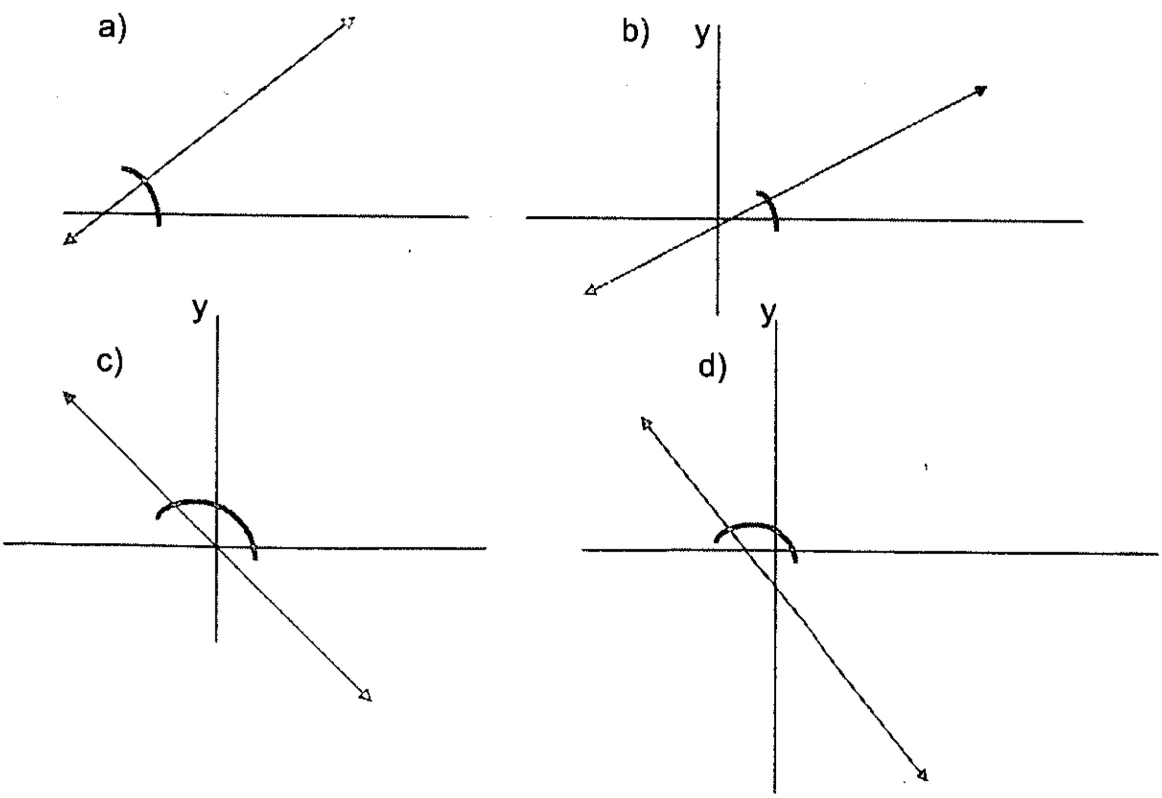
OBJETIVOS:

- El alumno comprenderá el concepto de ángulo de inclinación de una recta como elemento fundamental para determinar la ecuación de ella.
- El alumno inducirá la fórmula correspondiente para el cálculo del ángulo de inclinación de una recta.

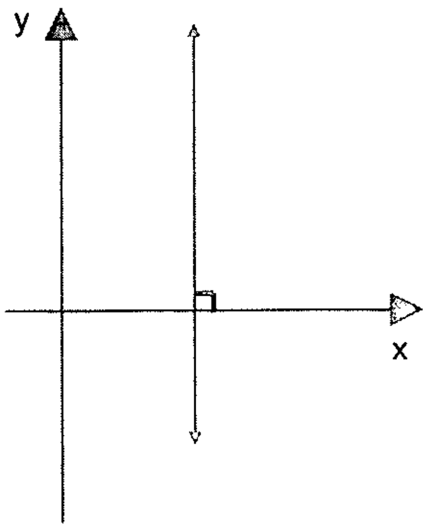
EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) ¿Qué es el ángulo de inclinación de una recta?

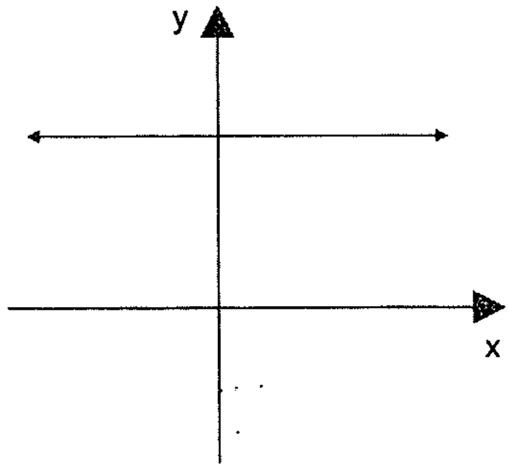
2) Mide el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas con un transportador.



e)



f)



3) Trata de inducir una fórmula, que permita encontrar el ángulo de inclinación de una recta suponiendo que tienes las coordenadas de 2 puntos de la recta.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Hallar el ángulo de inclinación de las rectas que pasan por los puntos indicados utilizando la fórmula correspondiente:

a) (4,2) y (8,9)

b) (-2,-1) y (-1,6)

c) (2,3) y (-4,-1)

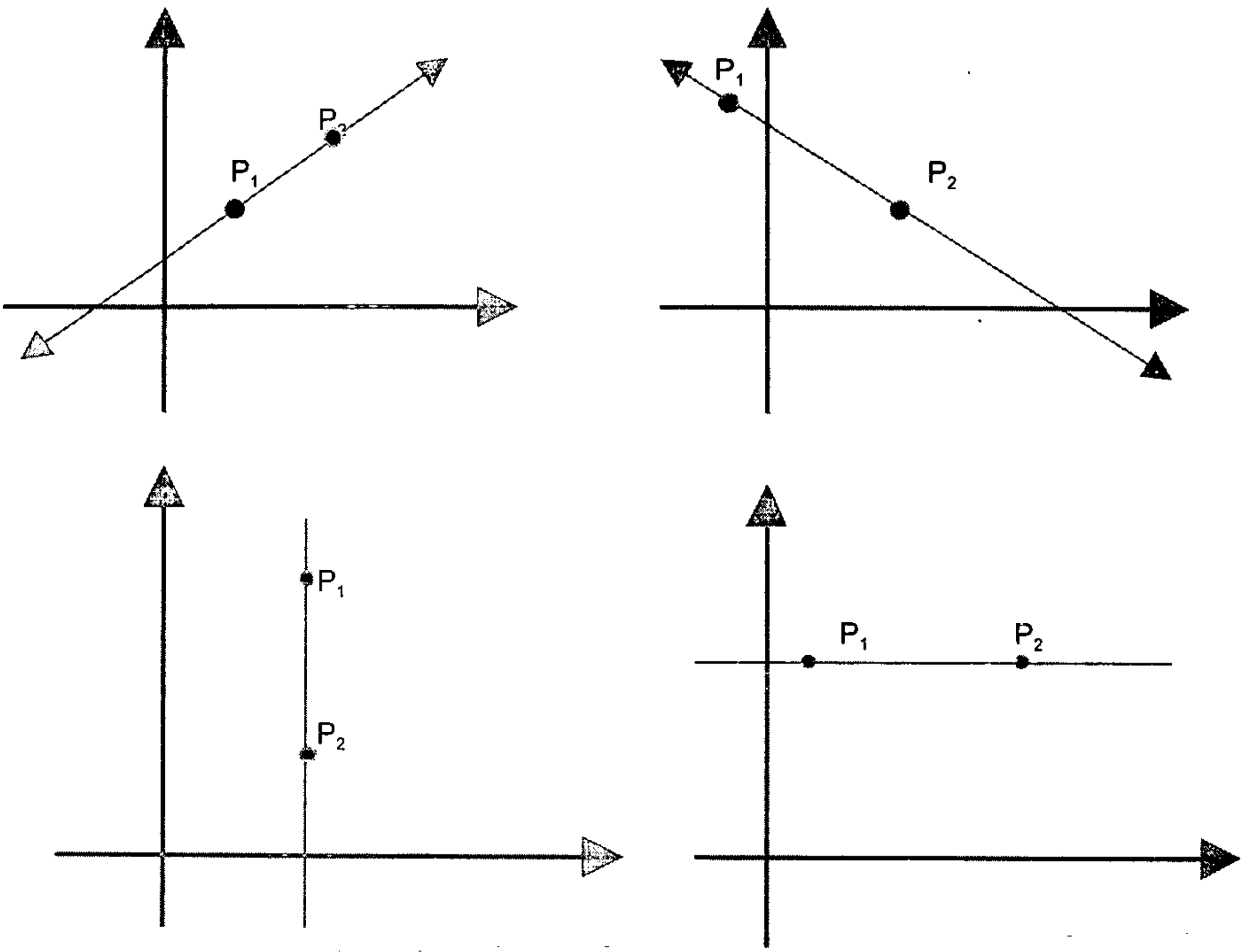
d) (0,0) y (-5,4)

e) (5,7) y (5,4)

f) (2,-2) y (-4,-2)

EJERCICIO COLABORATIVO.

1) En las siguientes gráficas:



a) Proporciona las coordenadas que tendrían cada uno de los puntos que determinan las rectas.
b) Encuentra el ángulo de inclinación de cada una de las rectas.

2) Cuáles son las posibilidades de medida, para el ángulo de inclinación de cualquier recta, ubicada en un plano de coordenadas.

EJERCICIOS DE RETO:

1) Encuentra los ángulos de Inclinación de cada uno de los lados del triángulo cuyos vértices son: A(-3,4) B(4,8) C(6,-2)

II.2.- PENDIENTE DE UNA RECTA

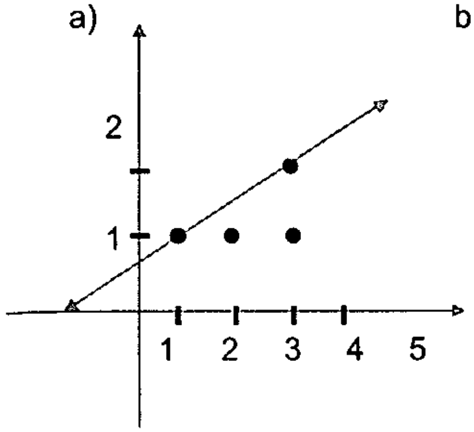
OBJETIVOS

- El alumno asociará el concepto de ángulo de inclinación con la pendiente de una recta.
- El alumno comprenderá gráficamente el concepto de pendiente de una recta.
- El alumno calculará las pendientes de diferentes rectas, utilizando la fórmula correspondiente.

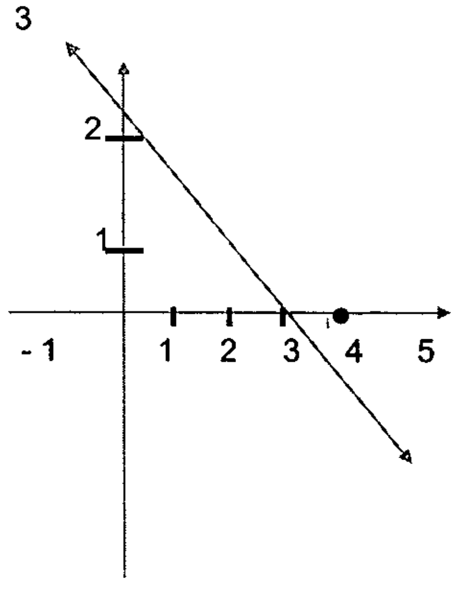
EJERCICIOS CONCEPTUALES.

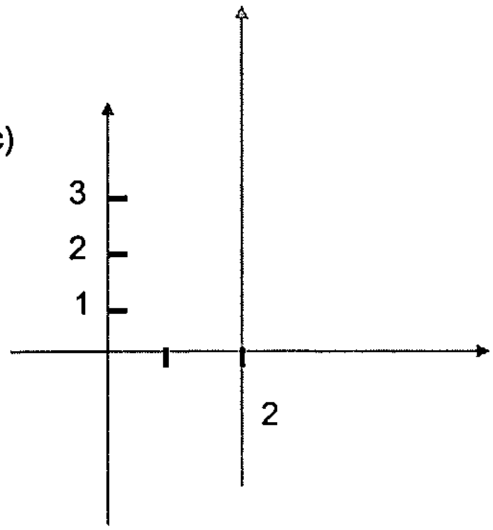
1) ¿Qué es la pendiente de una recta?
2) En las siguientes rectas, indica el valor de las pendientes y la forma en que la obtienes

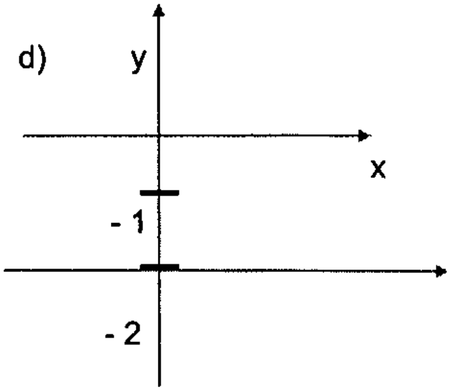
a)



b)



c) 

d) 

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Calcular la pendiente de las rectas que pasan por los puntos indicados:

a) (4,2) y (8,9)
b) (-2,-1) y (-1,6)
c) (2,3) y (-4,-1)
d) (0,0) y (-5,4)
e) (5,7) y (5,4)
f) (2,-2) y (-4,-2)

2) Graficar las rectas que pasan por el punto dado y tienen pendiente dada.

a) (2,-3) y m = 4
b) (+2,2) y $m = \frac{2}{3}$
c) (-4,6) y m = - 3
d) (1,2) y $m = -\frac{7}{4}$
e) (1,4) y m = 0
f) (0,-5) y pendiente indeterminada

EJERCICIOS COLABORATIVOS

1) Graficar las siguientes rectas:

a) (-7,4) y m = -2

b) (4,9) y m = $-\frac{7}{5}$

c) (-1,1) y α=45°

d) (5,-2) y α=0°

e) (2,$\frac{7}{4}$) y α=90°

2) Una recta de pendiente $\frac{4}{3}$ pasa por el punto (7,-5). Indica las coordenadas de 5 puntos que estén sobre esta recta.

EJERCICIOS DE RETO

1) Grafica la recta que pasa por el punto Q($\frac{-1}{2}$,$\frac{7}{4}$) y tiene ángulo de inclinación de 60° 15'

2) Un albañil para construir una escalera usa 2 ladrillos de huella por 1 de peralte. Si cada ladrillo mide 20 cms. x 20 cms. Qué altura alcanzará la escalera cuando halla construido 5 escalones.

II.3.- LA RECTA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

OBJETIVOS:

- El alumno interpretará a la recta como lugar geométrico.

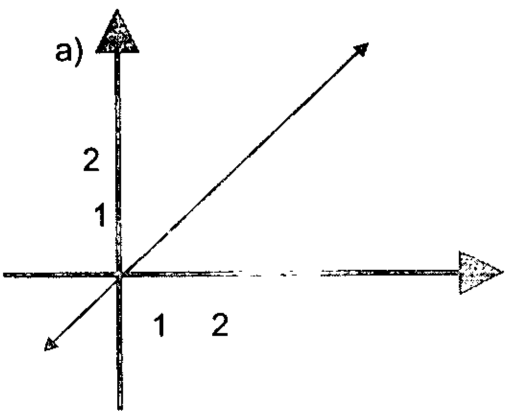
- El alumno identificará una función lineal, en términos de una ecuación de 1er. Grado con 2 variables, que representa una línea recta.
- El alumno determinará la ecuación de una recta dados algunos elementos de ella.
- El alumno reconocerá las diversas formas de las ecuaciones que representan a una recta (general, pendiente, ordenada al origen y simétrica)
- El alumno aplicará las propiedades de la recta en la solución de problemas.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

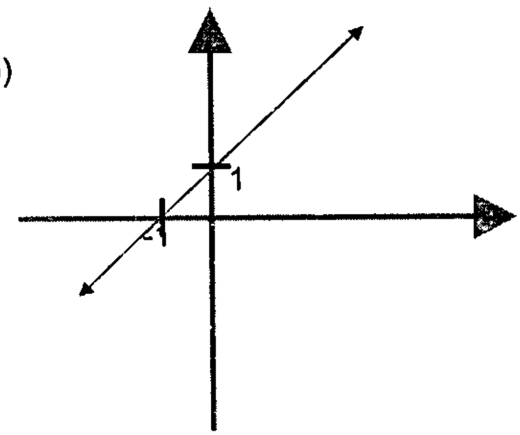
1) El conjunto de puntos que forman una recta ¿Qué requisitos deben cumplir?

2) Trata de indicar los requisitos que deben cumplir las siguientes rectas:

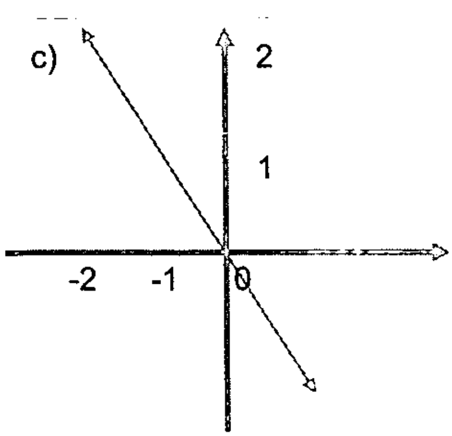
a)



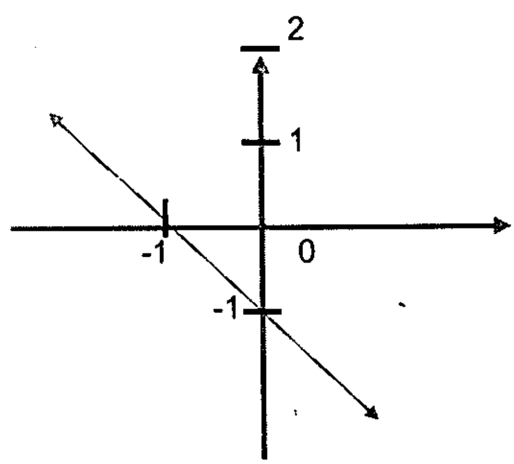
b)



c)



d)



EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Encuentra la ecuación en forma general y simétrica de las siguientes rectas:

a) De la recta que pasa por (3,2) y $m=-\frac{2}{5}$

b) De la recta que pasa por (-2,4) y $m=\frac{3}{4}$

c) De la recta que pasa por (-1,-2) y m=-2

d) La recta que pasa por los puntos (-3,1) y (4,-5)

e) De la recta que pasa por (-3,2) y α =45°

f) De los lados del triángulo cuyos vértices son (1,5) (3,1) (-1,-1)

2) Graficar las siguientes rectas:

a) $-4x + y-7 = 0$

b) $y = -x + 6$

c) $3x - 2y = 9$

d) $y = -7x + 5$

e) $y = \frac{3}{4}x - 2$

f) $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$

g) $\frac{2x}{3}+\frac{7y}{4}=1$

h) $5x - 9y = 4$

i) $y = 3x$

j) $y=\frac{1}{2}$

k) $x = -\frac{4}{5}$

l) $x = 0$

m) $y = 0$

3) Grafica y encuentra la ecuación en forma general, simétrica y pendiente y ordenada al origen de las rectas que se indican:

a) De la recta que pasa por (8,2) y $m = -\frac{5}{7}$

b) De la recta que pasa por: $(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ y $(\frac{7}{9}, -\frac{9}{10})$

c) De la recta que pasa por (5,3) y $\alpha = 135°$

d) De la recta que pasa por (1,-3) y $\alpha = 90°$

e) De la recta que pasa por (5,-2) y $\alpha = 0°$

f) De la recta que pasa por (-4,5) y $\alpha = 60°15'$

4) Encuentra la ecuación de cada uno de los lados del cuadrilátero cuyos vértices son: A(-3,1), B(7,8), C(5,-5) y D(-7,-2).

EJERCICIOS COLABORATIVOS

1) Encuentra las ecuaciones de las medianas del triángulo cuyos vértices son: A(1,-8), B(4,-2) y C(8,-5).

2) Encuentra el baricentro del triángulo anterior.

3) En una empresa textil se fabrican 1,000 vestidos con un costo de \$ 75,000.00 y 600 vestidos con un costo de \$ 45,000.00. Suponiendo que el costo es función lineal de la cantidad fabricada, determina la ecuación en forma de pendiente y ordenada de la situación (interpreta el significado de la pendiente y de la ordenada al origen en este problema).

4) El costo de una lavadora es de \$12,000.00, se espera que su servicio sea de 15 años, después de este tiempo su valor será solo de \$ 1,500.00.

a) Determinar una ecuación lineal que represente la depreciación del costo de la lavadora.

b) Para qué intervalo de tiempo es válida esta ecuación.

c) Si la ecuación la propones en la forma $y = mx + b$, ¿Qué representan "m" y "b" en el contexto del problema?

5) En la fábrica de lecha "La Vaquita", el costo de elaboración de un litro de leche es de \$ 2.50. El costo fijo de elaboración (es aquel que tiene la fábrica independientemente de los litros que se elaboren) es de \$ 5,000.00

a) Determina la ecuación lineal que representa el costo de elaboración dependiendo del número de litros que se produzcan

b) Grafica la ecuación.

c) Encuentra el costo de producción de 1,500 litros.

d) Expresa la ecuación en forma simétrica e indica lo que representan las constantes de esta ecuación.

EJERCICIOS DE RETO

1) Encuentra los vértices del triángulo cuyos lados están sobre las rectas: $4x + 7y + 13 = 32$, $-4x + y + 11 = 0$ y $-4x + 9y - 29 = 0$

2) Se observó que el precio de renta de videocintas aumentó en \$ 1.50 mensuales durante 1998, en el mes de agosto su precio fue de \$ 20.00.

a) Deduce una ecuación que represente el precio de las videocintas en función del tiempo.

b) Determina el precio de las videocintas en el mes de julio de 1999.

c) ¿Cuál será el precio de las videocintas en octubre del 2000?

3) Encuentra las ecuaciones de las diagonales del cuadrilátero cuyos lados están en las ecuaciones: $2x - 3y = 0$, $x + y - 5 = 0$, $2x - 3y + 15 = 0$, $x + y = 0$

II.4.- ÁNGULOS FORMADOS ENTRE DOS RECTAS

OBJETIVOS:

- Basados en el concepto de ángulo de inclinación de una recta, el alumno inducirá la forma de obtener el ángulo formado entre dos rectas que se cortan entre sí.

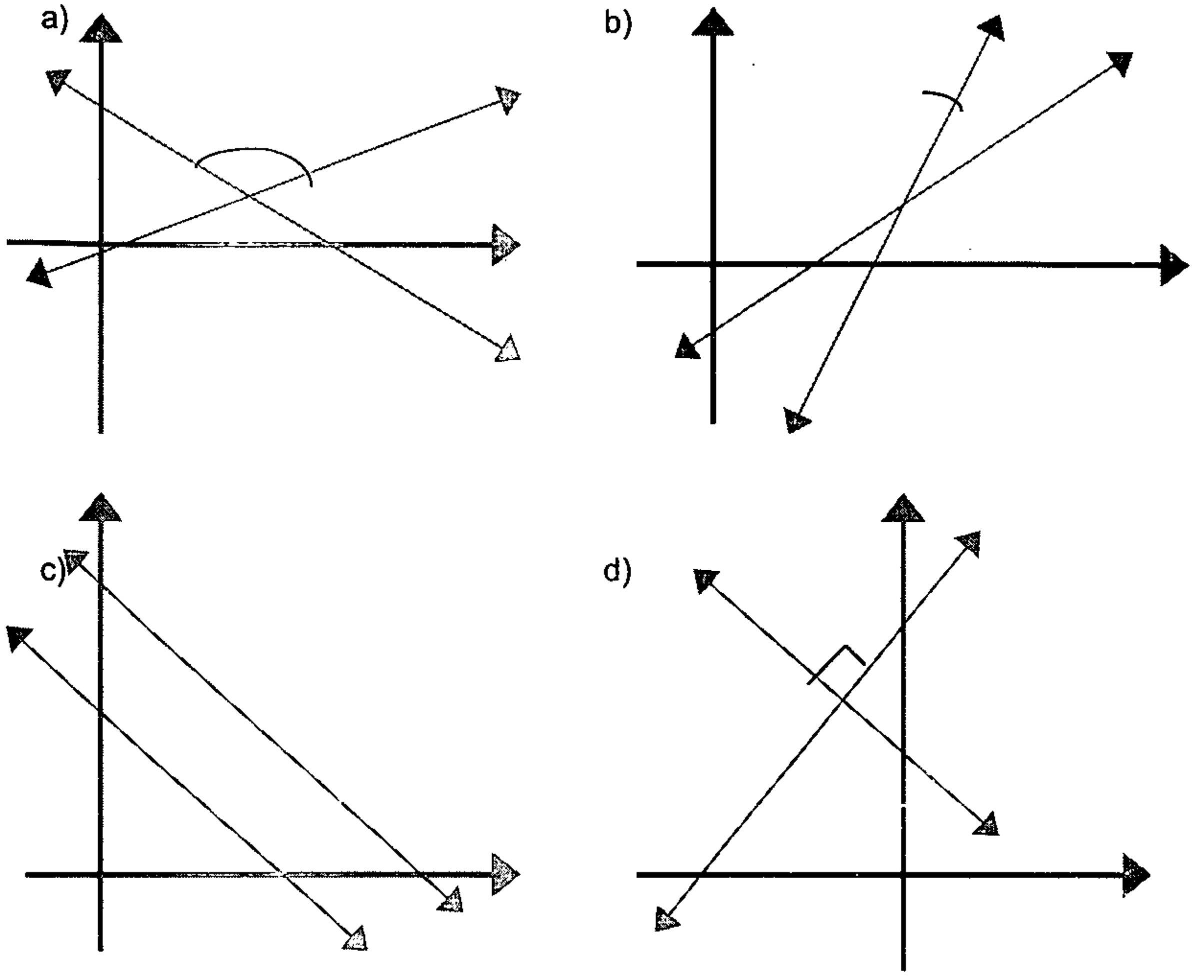
- El alumno aplicará la fórmula correspondiente para el cálculo del ángulo formado entre dos rectas.

- A partir del ángulo formado entre dos rectas, el alumno definirá rectas paralelas, rectas perpendiculares y rectas oblicuas.

- Utilizando el concepto de pendiente, el alumno identificará cúando un par de rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) Grafica en un solo plano lo siguiente:
   a) Trazar la recta $2x + 3y + 5 = 0$ indicando "m" (pendiente) y su ángulo.
   b) Trazar la recta $4x - 2y + 1 = 0$ indicando su "m" (pendiente) y su ángulo.
   c) En geometría analítica dos rectas se clasifican como paralelas, perpendiculares u oblicuas; las rectas trazadas ¿de qué tipo son?
   d) Encuentra el valor de uno de los ángulos formados cuando las rectas se intersectan.
2) En las siguientes rectas encuentra el ángulo formado entre ellas según se indica:



3) Para las rectas anteriores determina qué tipo de rectas son.

4) Induce una fórmula para encontrar uno de los ángulos formados entre dos rectas.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Determina si las siguientes rectas son perpendiculares u oblicuas; y si fuesen oblicuas determina el ángulo agudo y obtuso formado entre ellas.
   a) $l_1(1,8)$ $(-3,-4)$ $l_2(-1,8)$ $(0,10)$
   b) $l_1(1,-1)$ $(-5,5)$ $l_2(1,-2)$) $(7,2)$
   c) $l_1(-6,-4)$ $(22,8)$ $l_2(-5,7)$ $(7,-8)$
   d) $l_1(1,-4)$ $(1,-1)$ $l_2(1,1)$ $(10,2)$

2) Traza las gráficas de las siguientes rectas e indica si son paralelas, perpendiculares u oblicuas

   a) $2x + 3y + 5 = 0$; $4x - 2y + 1 = 0$
   b) $5x - 7y = -4$; $5x = 7y + 6$
   c) $x - 9y = -8$; $y = -9x + 1$
   d) $4x - y = -1$; $-2x + 3y = 8$
   e) $-x + 3y = 0$; $x + 2y = 6$
   f) $x - y = 0$; $3x = 3y$
   g) $3x - 2y = 4$; $3y = 2x$

3) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y es paralela a la recta indicada

   a) $P(-4,-1)$; $2x = 3y + 6$
   b) $P(6, 1)$; $x + 2y = -1$
   c) $P(0, 0)$; $-4x = 2y + 5$
   d) $P(4, 0)$; $-3x = 2y$

4) Con los datos del ejercicio anterior encontrar la ecuación de ia recta que pasa por el punto dado y es perpendicular a la recta dada

5) Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto dado y son paralelas y perpendiculares a la recta que pasa por los puntos indicados

   a) $P(4,-1)$; l: $Q_1(-2,4)$ y $Q_2(-5,-3)$
   b) $P(0,-3)$; l: $Q_1(2,4)$ y $Q_2(5,-1)$
   c) $P(5,0)$; l: $Q_1(1,3)$ y $Q_2(-3,-4)$

6) Hallar el punto de intersección de las rectas

   a) $5x - 7y = 11$; $5x = 7y + 6$
   b) $x - 9y = -8$; $y = -9x + 1$
   c) $2x + 3y + 5 = 0$; $4x - 2y + 1 = 0$

7) Encontrar las ecuaciones de la mediatriz, mediana y altura de los siguientes triángulos.

   a) $A(-2,4)$ $B(1,2)$ $C(7,1)$
   b) $A(-2,5)$ $B(6,5)$ $C(-2,-3)$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Encontrar las coordenadas del ortocentro, baricentro y circuncentro de los triángulos cuyos vértices son:
   a) A(-1,5), B(4,5), C(4,9)
   b) A(-2,4), B(1,2), C(7,3)
   c) A(2,-3), B(7,4), C(5,-3)

EJERCICIOS DE RETO:

1) Demuestra que el circuncentro, baricentro y ortocentro del triángulo cuyos vértices son: A(-5,8), B(11,2) C(-3,-4)

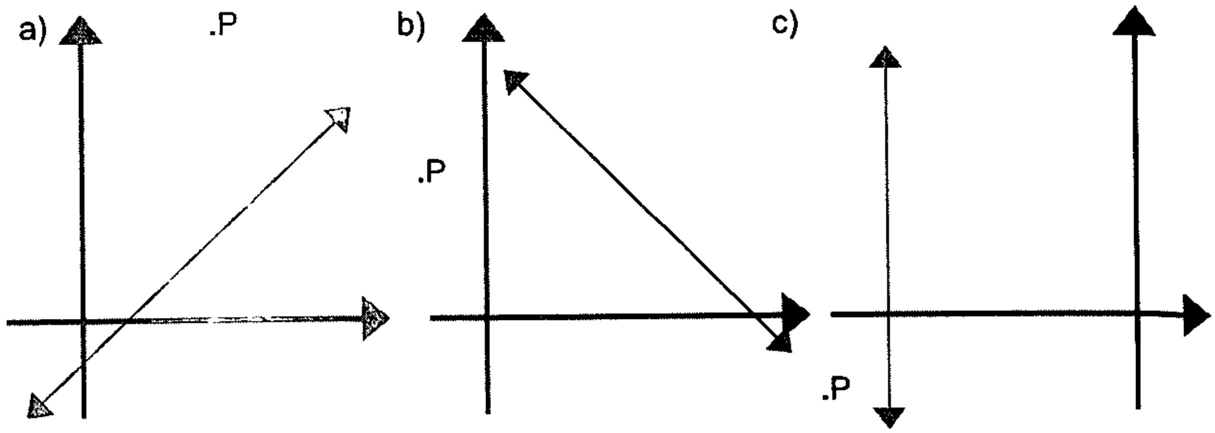
II.5.- DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

OBJETIVO:

- El alumno definirá el concepto de distancia de un punto a una línea recta.
- El alumno determinará la distancia de un punto a una recta de manera gráfica.
- El alumno inducirá la fórmula para obtener la distancia de un punto a una recta
- El alumno aplicará la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta.
- El alumno utilizará el concepto de distancia entre 2 puntos para resolver problemas prácticos

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) En los siguientes esquemas determina la distancia del punto a la recta



2) ¿Cómo definirías la distancia de un punto a una recta?

3) ¿Cómo encontrarías esta distancia de manera algebraica?

EJERCICIOS PRÁCTICOS

1) Encontrar la distancia del punto dado a la recta dada

   a) P(7,5); $4x - 5y + 5 = 0$

   b) P(-5,1); $3x - 4y = 0$

   c) P(2,5); $2x + 2y - 10 = 0$

   d) P(0,-1); $5x + 12y + 12 = 0$

   e) P(0,0); $y = 6$

   f) P(-2,1); $y = \dfrac{8x-7}{6}$

   g) P(2,1); La recta pasa por (-3,1) y (7,9)

2) Encontrar la distancia que existe entre las siguientes rectas paralelas:

a) $2x - 5y + 3 = 0$; $2x - 5y - 7 = 0$

b) $x + 2y - 2 = 0$: $2x + 4y - 12 = 0$

c) $3x - 2y = -1$; $6x = 4y - 2$

3) Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos agudo y obtuso de las rectas:

a) $x - 2y + 2 = 0$; $x + 3y - 4 = 0$

b) $15x + 8y + 10 = 0$; $15x + 8y - 11 = 0$

c) $x + y = 2$; $x = 2y + 1$

EJERCICIOS COLABORATIVOS

1) Encontrar la distancia entre el punto (-3 , -7) y la recta que pasa por los puntos $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ y $(\frac{5}{2},-\frac{7}{4})$.

2) Un automovilista trata de alcanzar a un motociclista en una carretera recta; en ese momento la moto presenta una falla mecánica ocasionando la pérdida de control quedando en el punto P(14,-2); el auto lleva una trayectoria cuya ecuación es $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$.¿Se estrellará el auto con el motociclista? Si no se estrellan, calcula la distancia más cercana a la que pasa el auto de la motocicleta.

3) Dos avionetas realizan una maniobra para ejecutar una acrobacia en el desfile del 16 de Septiembre, ambos suelta humo de colores para lucir el espectáculo. El humo

que dejan las avionetas describen las siguientes rectas: $3x - 4y + 8 = 0$ y $6x = 8y - 9$, calcular a qué distancia se encuentran las avionetas.

4) Encontrar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo de las rectas:

   a) $3x + 4y = 0$ y $12x - 5y - 12 = 0$

   b) $2x + 3y + 5 = 0$ y $4x - 2y + 1 = 0$

   c) $7x - 2y = 10$ y $-3x - 4y = 12$

EJERCICIOS DE RETO:

Encuentra las coordenadas del incentro del triángulo cuyos vértices son A(-5,8), B(11,2), C(-3,-4).

II.6.- FAMILIA DE RECTAS

OBJETIVO:

- El alumno determinará las condiciones que generan una familia de rectas.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) Graficar y hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el origen y tienen pendientes:
   a) $m = 1$
   b) $m = -3$
   c) $m = \frac{1}{4}$
   d) $m = -\frac{3}{2}$
2) Grafica y determina las ecuaciones de las rectas cuya pendiente es igual a 3 y pasa por:
   a) $A(0,0)$
   b) $B(0,1)$
   c) $C(0,2)$
3) ¿Qué conclusiones puedes obtener de los ejercicios 1 y 2?

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Escribir la ecuación de la familia de rectas, según las condiciones inidicadas:
   a) Rectas paralelas a la recta $4x - 7y = 3$
   b) Rectas paralelas a la recta $2x + y = 6$
   c) Rectas que pasan por el punto $(-3,2)$
   d) Rectas con $m = 2$
   e) Rectas con $m = -1$
2) Graficar las siguientes familias de rectas:
   a) $y = mx - 3$
   b) $y = -2x + b$

c) $2x - 3y = k$

d) $y - 4 = m(x + 3)$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Encontrar la ecuación de la familia de rectas perpendiculares a la recta

$$5x - 7y + 3 = 0$$

2) Obtener la ecuación de la familia de rectas, cuya intersección con el eje "X" es la mitad de su intersección con el eje "Y".

3) Encontrar la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas $2x - 3y + 6 = 0$ y $3x + 2y = 0$

EJERCICIOS DE RETO:

1) Encontrar las ecuaciones de la familia de rectas verticales.

2) Obtén la ecuación de la familia de rectas que distan una unidad del origen.

FICHA INTEGRADORA.

1) Encontrar el ángulo de inclinación y la ecuación en forma general de las siguientes rectas:

   a) pasa por (1,4) y (-1,6)

b) Pasa por (0,0) y $m = -\frac{7}{5}$

c) Pasa por (3,2) y es paralela al eje "y"

d) Pasa por (-3,5) y es paralela al eje "x"

2) Graficar las siguientes rectas:

a) $3x + 7y + 9 = 0$

b) $11x + 4y + 2 = 0$

c) $y = -\frac{6}{7}x + 2$

d) $2x - 5 = 0$

3) Pasar a la forma simétrica las rectas de los incisos b) y c) del ejercicio 2

4) Pasar a la forma de pendiente y ordenada al origen las rectas de los incisos a) y b) del ejercicio 2.

5) Determinar si las siguientes rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas, si son oblicuas, encontrar el ángulo formado entre ellas.

a) L_1(-6,-4) y (22,8); L_2 (-5,7) y (7,-8)

b) $5x - 2y = -4$ y $5x = 7y + 6$

c) $2x - 18y = -16$ y $y = -9x + 1$

d) $5x + 3y = 4$ y $5x = y + 2$

e) $3x - 18y = 0$ y $y = -6x + 5$

6) Encontrar las coordenadas del baricentro del triángulo cuyos vértices son: A(-1,2), B(-4,2) y C(1,-4)

7) Encontrar la ecuación de la altura que pasa por B del triángulo anterior.

8) Encontrar la ecuación de la mediatriz de $\overline{AB}$ del triángulo del ejercicio 6

9) Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2,3) y es perpendicular a la recta que une los puntos (4,1) y (-2,3).

10) Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2,-3) y es paralela a la recta $2x-3y+6=0$

11) Encontrar la distancia del punto a la recta

a) P(-2,4) L: $4x+5y-3=0$

b) P(1,1) L: $3x+4y-5=0$

c) P(2,1) L: (-3,1) y (7,9).

12) Encontrar la distancia entre dos rectas paralelas $2x-5y+3=0$ y $2x-5y+7=0$

13) Encontrar el ángulo formado por las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del triángulo cuyos vértices son A(-1,1), B(3,5) y C(5,-3)

14) Encontrar la ecuación de la familia de rectas horizontales.

15) Encontrar la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto $(\frac{1}{2},-7)$

16) Determina el ángulo formado por las medianas de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del triángulo cuyos vértices son A(1,5), B(3,-1) y C(-1,-1)

17) A la empresa "Chocolates Blanc" le cuesta \$ 9,500.00 fabricar 100 cajas de chocolate al día, y le cuesta \$ 12,250.00 fabricar 150 cajas; suponiendo que el costo es función lineal de la cantidad fabricada, determina la ecuación que representa el costo de las cajas de chocolate y el aumento del costo por cada caja.

AUTOEVALUACIÓN

1) Calcula la ecuación de la recta AB del triángulo formado por los vértices A(-1,-3), B(6,-1), C(2,5).

2) Encontrar la medida del ángulo "c" del triángulo anterior.

3) Determina si las siguientes rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas; si son oblicuas, calcula el ángulo formado entre ellas. $x - 3y + 5 = 0$ y $5x + 12y - 38 = 0$

4) Encontrar la ecuación de la mediatriz del segmento AB del triángulo cuyos vértices son A(-2,5), B(6,5) y C(-2,-3).

5) Encontrar la ecuación de la altura que pase por el vértice A del triángulo anterior.

6) Un avión vuela con una trayectoria lineal dada por los puntos (1,12) y (-3,-7); el pico de una montaña tiene coordenadas (5,-2) en el mismo plano. Encontrar la distancia más corta a la que pasa el avión del pico de la montaña.

7) Encontrar la ecuación de la familia de rectas que tengan pendiente $m = 2$

III

CIRCUNFERENCIA.

BOSQUEJO HISTÓRICO

En geometría el estudio de la círcunferencia, en primer lugar evoca la gran figura de Arquímedes quien se planteó como problema: "evaluar la longitud de una circunferencia". Este problema que Arquímedes resolvió construyendo polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia, con el objetivo de aproximarse al número π fue retomado por babilonios, hebreos, los hindúes del siglo VI y en 1593 por Francois Viete quien calculó 11 guarismos exactos para el número π

Por otro lado la circunferencia como lugar geométrico, nos lleva a recordar el libro de Descartes "La Geómetrie" (siglo XVII) en el que ya se plantea el trazar una curva en una superficie plana y que existe una relación entre ésta y una expresión algebraica.

Femat, contemporáneo de Descartes, con sus concepciones geométricas precisó que la representación algebraica

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$$

es una circunferencia, como uno de los diversos casos posibles de las ecuaciones cuadráticas.

CONTENIDO:

1) Circunferencia como lugar geométrico.

2) Gráfica de la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \qquad \text{con } A = B,\ A \text{ y } B \neq 0$$

3) Condiciones para determinar una circunferencia:

a) Dados el centro del círculo y una recta tangente.

b) Dados una recta tangente, su punto tangencial y una recta que pasa por el centro

c) Dados 3 puntos de la circunferencia.

d) Dados dos puntos y una recta tangente cuyo punto tangencial es uno de ellos.

e) Dados el radio, una recta tangente y una recta que pasa por el centro.

III.1.- CIRCUNFERENCIA COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

OBJETIVOS:

- El alumno graficará una circunferencia dados distintos elementos de ella.
- el alumno deducirá la ecuación que representa una circunferencia.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) ¿Qué elementos necesitas para trazar una circunferencia en el plano de coordenadas?
2) Traza las siguientes circunferencias localizando al menos 4 puntos de cada una de ellas
   a) C(3,5) y $r = 3$
   b) C(-7,4) y $r = 5$
   c) C(3,0) y $r = \frac{3}{2}$
   d) C(0,0) y $r = \frac{5}{7}$
3) ¿Cuál es la definición de circunferencia como lugar geométrico?
4) ¿Cuáles son los elementos importantes de una circunferencia ?
5) A partir de la definición de la circunferencia como lugar geométrico, determinar la ecuación de la circunferencia con centro en (3,5) y radio 2.
6) Generaliza la forma en que se puede encontrar la ecuación de cualquier circunferencia con centro en (h,k) y radio r

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Encuentra la ecuación general de las siguientes circunferencias y grafícalas:
   a) C(0,0) $r = 6$
   b) C(0,0) $r = \frac{7}{3}$
   c) C(0,0) $r = \sqrt{3}$
   d) C(1,4) $r = 5$
   e) C(-2,3) $r = 4$
   f) C(4,-3) $r = 6$
   g) C(-1,0) $r = \frac{8}{3}$

h) $C(5,-\frac{2}{3})$ $r = \sqrt{5}$

i) $C(\frac{3}{-4},-1)$ $r = 3$

j) $C(0,5)$ $r = \frac{9}{4}$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el punto de intersección de las rectas $x - 2y + 1 = 0$ y $2x + 3y - 12 = 0$ y radio 4 unidades.
2) Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyos puntos A(-4,6) y B(2,3) son los extremos de un diámetro.
3) Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en C(1,3) y pasa por el punto P(4,0)
4) Encuentra la ecuación del círculo cuyos puntos indicados son el diámetro:
   a) A(-3,4), B(4,-1)
   b) A(0,-1), B(5,3)
   c) A(1,-1), B(-5,-4)

EJERCICIOS DE RETO:

1) Demostrar que la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ representa una circunferencia con centro en (h,k) y radio r
2) Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el punto de intersección de las rectas $2x - 8y + 7 = 0$ con $16x + 4y + 5 = 0$ y su radio es igual a la longitud entre los puntos A(7,3) y B(9, -1).
3) Encontrar la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas en (5,7).

III.2.- "GRÁFICA DE LA ECUACIÓN GENERAL DE 2º GRADO"

$Ax^2 \times By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Con $A = B$, A y $B \neq 0$

OBJETIVOS:

- El alumno graficará la circunferencia a partir de la ecuación general de 2° grado.
- El alumno determinará cúando una ecuación de 2° grado representa una circunferencia real, imaginaria o un punto.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) Grafica las siguientes ecuaciones:
   a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$
   b) $x^2 + (y-3)^2 = 9$
2) Desarrolla la ecuación $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ y obtén la ecuación general.
3) Grafica la ecuación general $x^2 + y^2 -4x - 2y + 1 = 0$
4) Generaliza un proceso para graficar una circunferencia a partir de su ecuación general.

EJERCICIOS PRÁCTICOS

1) Grafica las siguientes ecuaciones:
   a) $x^2 + y^2 = 25$
   b) $x^2 + y^2 - 9 = 0$
   c) $2x^2 + 2y^2 - 32 = 0$
   d) $3x^2 + 3y^2 -36 = 0$
   e) $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 44 = 0$
   f) $x^2 + y^2 +4x -4y - 2 = 0$
   g) $x^2 + y^2 + 16x + 16y +8 = 0$
   h) $x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$

i) $2x^2 + 2y^2 + 20x - 48y + 50 = 0$

j) $3x^2 + 3y^2 + 24x - 18y - 33 = 0$

2) Determina en cada una de las siguientes ecuaciones si representan un círculo real, un círculo imaginario o un punto. Si se trata de un círculo real, grafícalo.

a) $x^2 + y^2 + 10x - 4y - 7 = 0$

b) $x^2 + y^2 + y = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 18 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 20 = 0$

e) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Demuestra que las circunferencias cuyas ecuaciones son

$$8x^2 + 8y^2 + 32x - 24y + 26 = 0$$

y

$$8x^2 + 8y^2 + 32x - 24y + 45 = 0$$

a) Son concéntricos

b) Grafícalas.

2) Determina que las siguientes circunferencias

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 16y + 26 = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$$

no se cortan (por dos métodos distintos)

EJERCICIOS DE RETO

1) Una circunferencia de radio $\sqrt{\frac{52}{2}}$ es tangente a la circunferencia

$2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 94 = 0$

en el punto (6,5). Hallar su ecuación.

III.3.-CONDICIONES PARA DETERMINAR UNA CIRCUNFERENCIA

OBJETIVOS

- El alumno encontrará la ecuación de la circunferencia dadas algunas condiciones para determinarlas.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Grafica las siguientes circunferencias según las condiciones que se indican.
    a) La circunferencia pasa por 3 puntos dados.
    b) La circunferencia es tangente a los ejes de coordenadas
    c) La circunferencia es tangente a una recta dada pasando (la circunferencia) por otro punto dado.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Hallar la ecuación del circulo que es tangente a:

   a) El eje "X" y tiene centro en (4,5)

   b) El eje "X" y tiene centro en (-2,1)

   c) La recta $x + 2y - 6 = 0$ y centro en (2,7)

   d) La recta $3x - 2y = 0$ y centro en (-1,6)

   e) La recta que une los puntos (-2,4) y (2,1) y centro en (-1,-3)

2) Hallar la ecuación de la circunferencia que se describe con las siguientes condiciones:

   a) El círculo es tangente a la recta $x + y = 3$ en el punto (2,1) y el centro está en el eje X.

   b) El círculo es tangente a la recta $2x - 3y = 6$ en el punto (3,0) y el centro en el punto (-1,6).

   c) El círculo es tangente a la recta $3x + 5y + 1 = 0$ en el punto (-2,-1) y centro en $2x - 3y + 12 = 0$

3) Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos...

   a) P(-2,-3) Q(1,4) R(3,-1)

   b) P(0,0) Q(-5,0) R(-1,6)

   c) $C(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y $r = \sqrt{\frac{29}{2}}$

   d) $C(-\frac{5}{2},3)$ y $r = \sqrt{\frac{61}{2}}$

4) Hallar la ecuación del círculo circunscrito al triángulo:

   a) Con vértices A(-3,2) B(2,-4) C(2,1)

   b) Con lados determinados por las rectas $x - 2y = 0$; $3x + 2y - 24 = 0$; $5x - 2y - 8 = 0$

5) Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P(2,-9) y que es tangente a la recta $3x + 4y - 15 = 0$ en el punto (5,0)

6) Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (3,-8) y (-7,2) y su centro se localiza en la recta $6x - 2y + 6 = 0$

7) Hallar la ecuación del círculo cuyo centro está en la recta $3x + 4y + 34 = 0$; es tangente a la recta $4x + 3y + 7 = 0$ y su radio es de 4 unidades (dos soluciones)

8) Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las recta $4x + 3y - 50 = 0$ y $3x - 4y - 25 = 0$ y cuyo radio sea 5 unidades (2 soluciones)

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Relaciona cada gráfica con su ecuación:

   a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{64}{5}$

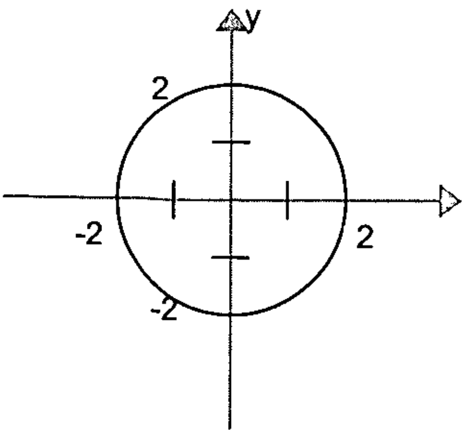
   b) $x^2 + y^2 = 4$

   c) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 8 = 0$

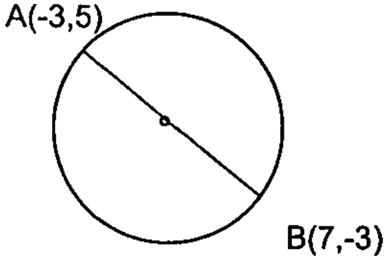
   d) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$

   e) $x^2 + y^2 = 16$

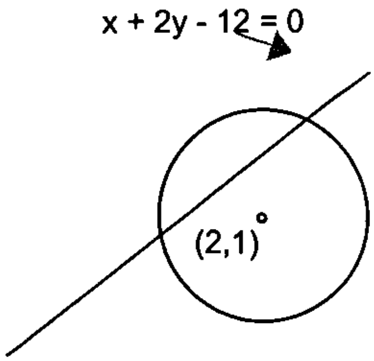
   f) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 41$



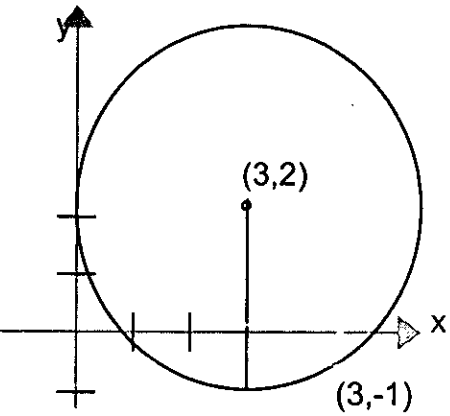
Ecuación (   )



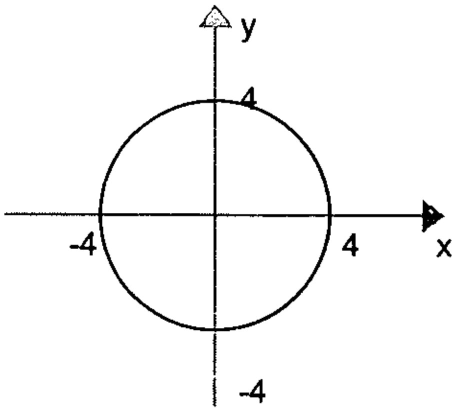
Ecuación (   )



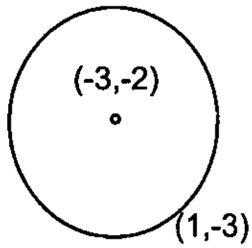
Ecuación (   )



Ecuación (   )



Ecuación (   )

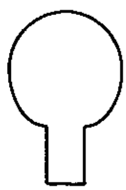


Ecuación (   )

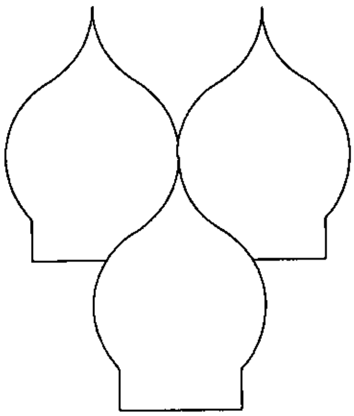
2) Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (6,2) (8,0) y su centro se localiza en la recta $3x + 7y + 2 = 0$

3) Encontrar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x + 4y + 17 = 0$ y concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

4) Una puerta antigua tiene una cerradura como se muestra en la figura. Deduce una ecuación del círculo de la cerradura si sabemos que tiene un radio de 3 mm.



5) Una de las figuras de los vitrales de un museo está formada por círculos tangentes como se indica en la figura .



Todos los círculos tienen 13 cm de radio y la base rectangular es de 24 cm. Deduce las ecuaciones de los 3 círculos.

EJERCICIOS DE RETO:

1) Hallar las ecuaciones de las circunferencias tangentes a las rectas $3x - 4y + 1 = 0$ y $4x + 3y - 7 = 0$ y que pasen por el punto (2,3)

2) Hallar las ecuaciones de las circunferencias tangentes a las rectas $x - 2y + 4 = 0$ y $2x - y - 8 = 0$ y que pasen por el punto (4,1)

FICHA INTEGRADORA.

1) Encontrar la ecuación en forma general de las siguientes circunferencias:
   a) El segmento que une a A(-1,5) y B(4,3) es un diámetro.
   b) El círculo es tangente a la recta $3x + 4y = 16$ y el centro está en (3,-4)

c) Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$; $2x - 5y + 2 = 0$ y radio 6 unidades.

d) El círculo es tangente a la recta $3x - 4y - 34 = 0$ en el punto (10,-1) y también es tangente a la recta $4x + 3y - 12 = 0$ en el punto (3,0)

e) El círculo pasa por los puntos (0,3) (2,4) y (4,0)

f) El círculo pasa por A(-3,3) y B(1,4) y su centro sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$

g) El círculo pasa por (16,0) y es tangente a la recta $5x - 12y + 24 = 0$ en (-1,7)

h) La recta $3x - 4y + 1 = 0$ es tangente a una circunferencia que pasa por los puntos (2,3) y (7,8) en el punto (1,1). Grafica la situación y calcula la ecuación de la circunferencia que cumple con esas condiciones.

2) Grafica las siguientes circunferencias:

a) $2x^2 + 2y^2 + 12x - 2y - 3 = 0$

b) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 5y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 20 = 0$

d) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 7x + 1 = 0$

g) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$

AUTOEVALUACIÓN

Escribe la ecuación general de las circunferencias, según las restricciones.

1) Circunferencia que pasa por los puntos A(1,4), B(3,5) y C(1,2)
2) Circunferencia cuyo centro se encuentra sobre la recta $5x + 4y - 33 = 0$ y pasa por los puntos A(-7,-3) y B(0,-10)
3) Su centro en (-2,-4) y tangente a la recta que une los puntos (-2,4) y (2,1)
4) Pasa por el punto (12,9) y es tangente a la recta $2y = x + 2$ en el punto (8,5)
5) Encuentra el centro y el radio

   a) $5x^2 + 5y^2 - 20x + 30y + 65 = 0$
   b) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y \div 6 = 0$

IV

PARÁBOLA.

BOSQUEJO HISTÓRICO.

La geometría analítica en ocasiones se considera el estudio particularizado de las tres grandes curvas: Parábola, Elipse e Hipérbola. Esto se debe a Menecmo (Siglo IV A. C.) a quien se atribuye la invención de dichas curvas.

Menecmo descubrió la Parábola en su intento por encontrar la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble del cubo dado (duplicación del cubo) sólo con regla y compás, que después se comprobó que es imposible resolver.

Posterior a Menecmo, Arquímedes amplió el campo del estudio de estas tres curvas. Apolonio de Perga por su parte, concibió las secciones cónicas como resultado de la intersección de un plano con un cono circular ya sea rectangular o no. Si el plano es paralelo a un elemento y la intersección se extiende indefinidamente a lo largo de una parte del cono sin cortar a la otra, entonces se forma una parábola. No se conoce cómo pudo haber llevado las secciones cónicas a un plano.

Kepler, siglos después (1609) señaló detalles de la teoría abstracta que Apolonio había pasado por alto, como la existencia de un foco para la parábola.

Fue Fesmat, años después (1601-1666), contemporáneo de Descartes, quien utilizando la notación de Viete, demuestra en su breve tratado titulado "Ad Locos Planos et Solidos Isagoge" (Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos), que la parábola como lugar geométrico se puede expresar por la ecuación $a^2 \pm x^2 = by$ y que $y = x^n$ si n es positivo representa una parábola y si es negativo representa una hipérbola en su tratado titulado "Método para hallar Máximos y Mínimos".

CONTENIDO:

1) La parábola como lugar geométrico
2) Gráfica de la ecuación general de 2° grado de la forma

   $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ con $A = 0$ ó $B = 0$
3) Ecuación de una parábola a partir de algunos elementos de ella y problemas de aplicación.

IV.1.- LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

OBJETIVOS:

- El alumno graficará una parábola a partir de su definición como lugar geométrico.
- El alumno graficará una parábola dados distintos elementos de ella.
- El alumno deducirá la ecuación que representa una parábola.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Indaga la definición de Parábola como Lugar Geométrico.
2) Indaga cuáles son los elementos más importantes de una parábola.
3) Grafica las siguientes parábolas:
    a) F(2,3) y Directriz $x = 4$
    b) F(-7,5) y Directriz $y = 1$
    c) F(4,0) y Directriz $x = -2$
    d) F(0,-5) y Directriz $y = 5$
    e) F(2,3) y Directriz $x = -3$
4) A partir de la definición de la parábola como lugar geométrico, determinar la ecuación de la parábola con F(0,4) y directriz $y = -4$
5) Generaliza la forma en que se puede encontrar la ecuación de la parábola con vértice en (h,k) y lado recto igual a 4a.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

Graficar y determinar la ecuación en forma general de las siguientes parábolas:

a) V(0,0) F(-2,0)
b) F(3,2) y Directriz $y = 8$
c) V(-1,-3) F(0,-3)
d) V(3,4) F(1,4)

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

Grafica las parábolas según los elementos que se indican y determina su ecuación en forma general.

a) F= (-1,0)

Directriz x = 1

b) V = (0,0)

F = (0,2)

Extremos del lado recto (4,2), (-4,2)

c) V(1,-2), F(3,-2) y Directriz x = -1

d) V = (-3,1), F = (-3,-2) y extremos del lado recto (0,-2) y (-6,-2)

e) V(-1,-2) y F(-1,0)

f) F(-3,4) y Directriz x = 1

g) F(4,0) y Directriz y = -2

EJERCICIOS DE RETO.

1) Imagina que la costera de Acapulco (orilla del mar) fuera recta y que tuvieras que construir una maqueta en donde quedarán representados la costera, el Centro de Convenciones y un conjunto habitacional; cada casa con la característica de que su distancia al centro de Convenciones sea la misma que su distancia a la orilla del mar. ¿Cómo construirías este conjunto habitacional? ¿Necesitas un plano de coordenadas para representar mejor esta situación? Constrúyelo.

IV.2.- GRÁFICA DE LA ECUACIÓN DE 2º GRADO DE LA FORMA:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \text{ con } A = 0 \text{ ó } B = 0$$

OBJETIVO:

- El alumno graficará una parábola a partir de su ecuación en su forma general.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) Grafica las siguientes ecuaciones:
   a) $(x - 3)^2 = 8 (y - 2)$
   b) $(y + 1)^2 = -4 (x - 5)$
2) Desarrolla la ecuación $(x-3)^2 = (y-2)$ hasta obtener la ecuación general.
3) ¿Cómo graficarías la siguiente ecuación general?

$$x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$$

Generaliza tu proceso.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Dada la ecuación de la parábola, construye su gráfica indicando sus elementos:
   a) $x^2 = 5y$
   b) $2y^2 - 4x = 0$
   c) $3x^2 + 9y - 18 = 0$
   d) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$
   e) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$
   f) $4x^2 + 16x - 3y + 28 = 0$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Hallar la longitud de la cuerda que forma la recta L con la parábola P

L: $2x - y + 5 = 0$ P: $y^2 + 8x - 6y - 15 = 0$

2) Suponga que la superficie reflectora de una antena de televisión se forma girando la parábola $y = \frac{1}{20}x^2$ alrededor de su eje de simetría en el intervalo $-6 \leq x \leq 6$. Suponiendo que las mediciones están expresadas en pies, ¿A qué distancia del fondo o vértice de esta antena de plato se debe colocar el receptor? ¿Qué profundidad tiene esa antena?

3) Encontrar los puntos de intersección de la recta $6x - y - 15 = 0$ con la parábola $x^2 + 4x - 5 = 0$.

EJERCICIO DE RETO:

Demuestra que la ecuación $(x - h)^2 = 4a(y - k)$ representa una parábola con vértice en (h,k) y lado recto $4a$.

IV.3.- "ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA A PARTIR DE ALGUNOS ELEMENTOS DE ELLA Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

OBJETIVO:

- El alumno determinará la ecuación en forma general de una parábola a partir de algunos elementos de ella.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Sin realizar la gráfica, determina la ecuación en forma general de:

a) La parábola con $V(3,1)$ y Directriz $x - 7 = 0$

b) La parábola con $F(-4,-2)$ y Directriz $y + 12 = 0$

2) Una parábola tiene su vértice en (2,1) y extremos del lado recto en C(-1,7) y C'(-1,-5),

a) Traza la parábola.

b) Localiza las coordenadas del foco.

c) Determina la longitud de un diámetro de la parábola que pasa por la recta $x = 1$

d) ¿Cuántos diámetros se pueden encontrar en una parábola?

e) ¿El lado recto se puede considerar como un diámetro de la parábola?

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Hallar la ecuación de las parábolas

a) Cuyo vértice y foco son los puntos (-5,3) y (1,3) respectivamente.

b) Foco (4,-3) y Directriz $y - 1 = 0$

2) Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el punto (-1,-1), eje paralelo al eje "y" y que pasa por el punto (1,6).

3) Encuentra la ecuación de la parábola cuyo foco es (5,1) y su directriz es la recta $y + 7 = 0$

4) Escribe las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a) $V\left(1,\frac{1}{3}\right)$, Lado Recto $\frac{2}{3}$ y abre hacia abajo.

b) V(-2,3) y F(1,3).

c) Eje paralelo al eje x, V(4,1) y pasa por (3,6)

d) V(0,0) y directriz $x + 3 = 0$

e) $V(2,1)$ y directriz $y = 3$

f) $F(0,0)$, pasa por $(1,3)$ y eje focal el eje "x"

g) $F(0,-3)$ y directriz $2x - 5 = 0$

5) Encontrar la ecuación en forma general de las parábolas:

a) Con eje vertical y que pasa por los puntos $(1,4)$, $(3,0)$ y $(0,0)$

b) Con eje horizontal que pasa por los puntos $(2,3)$, $(1,-2)$ y $(-1,1)$

c) Con eje horizontal que pasa por los puntos $(6,-4)$, $(3,3)$ y $(6,6)$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Construye la gráfica y determina la ecuación de las parábolas a partir de los datos que se proporcionan

a) $V(\frac{1}{3},1)$ y Lado Recto igual a 5

b) $V(0,0)$ eje focal el eje de las abscisas y pasa por $(1,3)$

2) Los extremos del cable de un puente está a 2,000 metros de distancia y a 150 metros sobre el piso, mientras que el centro del cable está a nivel del piso. Encontrar la altura del cable sobre el piso a una distancia de 500 metros de la base de la torre de amarre en los extremos del puente suponiendo que el cable resiste una carga de igual peso en distancias horizontales iguales.

3) Un reflector parabólico tiene 1.5 metros de diámetro y 75 cms. de profundidad. ¿A qué distancia del vértice se debe colocar el bulbo luminoso de este reflector? Encuentra la ecuación que represente esta situación.

4) Se desea construir un túnel de forma parabólica bajo el cual pasará una carretera de 30 metros de ancho. El ancho de la base del túnel será de 40 metros y su altura máxima de 9 metros. Calcula la altura máxima que deberán tener los vehículos que circulen debajo del puente.

EJERCICIOS DE RETO:

1) Graficar la parábola cuyo foco es el punto (3,6) y directriz $x - y = 0$

FICHA INTEGRADORA.

1) Escribir las ecuaciones en forma general de las siguientes parábolas:

a) V(0,0) y Directriz $2x + 3 = 0$

b) V(3,2) y F(3,4)

c) V(4,1) y Directriz $y + 3 = 0$

d) V(4,-2) y Lado recto igual a 8 y abre hacia abajo

e) V(3,-2) y extremo del lado recto A$(-2, \frac{1}{2})$ y B$(8, \frac{1}{2})$

f) V(3,-2) Eje focal horizontal y pasa por (2,-5)

g) Eje focal horizontal y pasa por (-1,5), (-1,-2) y (6,1)

2) Graficar las siguientes parábolas indicando las coordenadas del vértice, foco y extremos del lado recto.

a) $y^2 - 6y - 4x + 9 = 0$

b) $x^2 + 2x + 12y + 37 = 0$

c) $4y^2 - 48x - 20y = 71$

d) $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

e) $y^2 + 4x = 7$

f) $x^2 - 6y = 0$

3) Desde una plataforma de 5 metros de altura se coloca un cañón y se lanza una bala hacia arriba, la altura máxima que alcanza la bala medida desde el piso es de 50 metros, y esta altura la alcanza a una distancia de 20 metros de la plataforma. Encuentra a qué distancia de la plataforma choca la bala contra el suelo.

AUTOEVALUACIÓN.

1) La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$ y su foco es el punto (4,-3). Hallar la ecuación de la parábola.

2) Construye la gráfica de la parábola con vértice (0,0) y directriz $2y - 5 = 0$. Encuentra su ecuación en forma general.

3) Hallar la ecuación de la parábola de vértice (3,-2) y extremos del lado recto $(-2, \frac{1}{2})$ y $(8, \frac{1}{2})$.

4) Graficar la parábola $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$

5) Un túnel de forma parabólica tiene una altura de 25 metros y una base de 40 metros. Una carretera pasa debajo de él. ¿Cuál será el ancho de la carretera si queremos que la altura en los extremos de ella sea de 5 metros?

V

ELIPSE

BOSQUEJO HISTÓRICO

La profundidad con la que Arquímedes y Apolonio estudiaron las cónicas (Parábola, Elipse e Hipérbola) es tal, que a su trabajo nada nuevo se tuvo que añadir en los siglos posteriores.

En la obra de Apolonio, que él denominó secciones cónicas, se encuentran las siguientes afirmaciones: la sección cónica llamada elipse se forma al intersectar un plano (que no pasa por el vértice) con un cono circular recto, ya que corta todos los elementos de una parte del cono y forma una figura cerrada, un caso particular de la elipse es la circunferencia; en el plano, el lugar de un punto (móvil) cuyas distancias a dos puntos fijos dan una suma constante, es una elipse que tiene como focos esos puntos fijos. El mismo Apolonio aclara también que una tangente a la elipse deja los dos focos de un mismo lado de dicha tangente.

Las propiedades que Apolonio enuncia para la elipse fueron tomadas por F. de la Hire (1640 - 1718) como definición de las curvas que tienen centro y la manera de descubrir la elipse por trazo continuo. Esta construcción la indicó por primera vez el bizantino Antemio (siglo VI).

Kepler, en 1609, expuso dos de sus grandes leyes del movimiento planetario; una de estas leyes que marcan una época en la historia de la ciencia matemática es:

"La órbita de todo planeta es una elipse con el sol en un foco"

El movimiento circular había reinado como soberano desde los tiempos antiguos hasta los días de Copérnico y Tycho Brake, pero ahora era reemplazado por la elipse, y, con el descubrimiento de que la elipse era, realmente, un camino trazado en los cielos y por la tierra misma, un hermoso capítulo de la geometría antigua había pasado inexplicablemente, al centro de una filosofía práctica natural.

CONTENIDO:

1) La elipse como lugar geométrico.
2) Gráfica de la ecuación de 2° grado de la forma

   $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ con $A \neq B$

   A y B del mismo signo y diferente de cero
3) Ecuación de una elipse a partir de algunos elementos de ella y problemas de aplicación.

V.1.- La elipse como lugar geométrico

OBJETIVOS.

- El alumno graficará una elipse a partir de su definición como lugar geométrico.
- El alumno graficará una elipse dados distintos elementos de ella.
- El alumno deducirá la ecuación que representa una elipse.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Indaga la definición de la elipse como lugar geométrico.

2) Indaga cuáles son los elementos básicos de una elipse.

3) Construye las siguientes elipses.

a) $C(0,0)$	b) $C(0,0)$	c) $F_1(7,1)$	d) $F_1(-4,-2)$
$F_1(3,0)$	$F_1(0,4)$	$F_2(1,1)$	$F_2(-4,-6)$
$F_2(-3,0)$	$F_2(0,-4)$		
Eje mayor 8	Eje mayor 10	Eje mayor 8	Eje mayor 6

4) En cada una de las elipses anteriores indica cómo encontrarías las coordenadas de los puntos que determinan el eje menor

5) Indaga el concepto de excentricidad de una elipse y con éste explica

   a) ¿Cómo debe ser el valor de la excentricidad para que represente una elipse?

   b) ¿Qué quiere decir que la excentricidad sea cero?

   c) ¿Qué quiere decir que la excentricidad sea uno?

6) Determina la ecuación en forma general de una elipse con centro en el origen y en forma horizontal a partir de su definición como lugar geométrico.

7) Generaliza tu resultado para encontrar la ecuación general de cualquier elipse con centro en (h,k) eje mayor 2a y eje menor 2b.

8) Indaga el concepto de lado recto (longitud del ancho focal) de una elipse y la forma de calcularse.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Grafica las elipses según las condiciones que se te marcan (C = centro; F = foco; V = vértice; y B = extremo del eje menor; e = excentricidad y LR = Lado Recto):

a) F(0,3)
C(0,0)
B(±4,0)

b) C(0,0)
V(±5,0)
B(0,±3)

c) C(2,-3)
F(2,-5)
V(2,1)

d) C(-4,2)
B(-4,5)
F(-2,2)

e) F_1(4,-2)
F_2(10,-2)
V_1(12,-2)

f) Extremos del eje - Menor (-1,2) y (-1-4)
Foco en (1,-1)

2) Encuentra la ecuación canónica y general de la elipse según los datos.

a) excentricidad $\frac{2}{3}$

semieje focal 4

C(0,0)

paralela al eje y

b) Centro (3,1)

F(1,1)

V(7,1)

c) $B_1(-1,4)$

$B_2(-1,-2)$

Longitud del Ancho Focal $\frac{9}{2}$

d) excentricidad $\frac{1}{2}$

$V_1(2,3)$

$V_2(2,-5)$

e) Longitud del eje menor = 6

Longitud del eje focal =4

Paralelo al eje x

f) Longitud del Lado Recto $\frac{32}{5}$

Centro (-2,-3)

V=(3,-3)

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

Gráfica determinando todos los elementos y encuentra la ecuación general de las siguientes elipses:

a) F (3,-2)

C (5,-2)

Semieje mayor 4

b) $V_1(3,-6)$

$V_2(3,6)$

B (1,0)

c) $V_1(-6,1)$

$V_2(2,-1)$

F(-3,-1)

d) $B_1(2,-1)$

$B_2(-4,-1)$

$F_1(-1,1)$

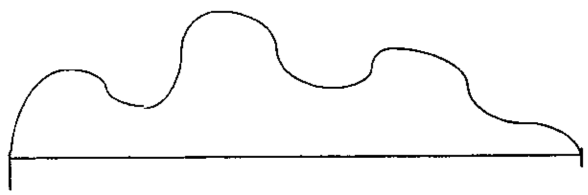
e) $F_1(-4,-3)$

$F_2(4,-3)$

excentricidad $\frac{2}{3}$

EJERCICIOS DE RETO.

Un jardinero desea trazar en su jardín figuras de diferentes tamaños para lo cual utiliza dos estacas y una cuerda como se indica en la figura:



estaca 1 estaca 2

¿Qué figura se formará con este proceso?

Para formar figuras de diferentes tamaños ¿Qué tiene que hacer con las estacas y con la cuerda?

V.2.-"GRÁFICA DE LA ECUACIÓN GENERAL DE 2º GRADO DE LA FORMA:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ con $A \neq B$

A y B del mismo signo y diferente de cero.

OBJETIVO:

- El alumno Graficará una elipse a partir de su ecuación en forma general.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) Grafica las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

b) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

2) ¿Cuál es la diferencia al graficar las elipses del a) y b) del ejercicio anterior?

3) Desarrolla las ecuaciones del ejercicio 1 hasta obtener las ecuaciones generales.

4) Cómo graficarías las siguientes ecuaciones generales

a) $4x^2 + 9y^2 - 24x - 18y + 9 = 0$

b) $9x^2 + 4y^2 - 54x - 8y + 49 = 0$

c) Generaliza tu proceso.

EJERCICIOS PRÁCTICOS

1) Encuentra todos los elementos de las elipses y grafícalas según su ecuación.

a) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$

b) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$

c) $\frac{(x-1)^2}{100}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

d) $\dfrac{(x+3)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

e) $9x^2 + 25y^2 + 54x - 80y + 221 = 0$

f) $6x^2 + y^2 - 6x + y - 38 = 0$

g) $9x^2 + 25y^2 - 18x + 50y - 191 = 0$

h) $11x^2 + 36y^2 + 44x - 144y - 208 = 0$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Graficar las siguientes elipses indicando todos sus elementos:

a) $3x^2 + 4y^2 + 28x + 16y + 48 = 0$

b) $x^2 + 2y^2 + 8x - 4y = 0$

c) $4x^2 + 16y^2 - 24x - 28 = 0$

d) $9x^2 + 25y^2 + 100y - 125 = 0$

e) $9x^2 + 13y^2 + 18x + 26y - 95 = 0$

EJERCICIO DE RETO:

1) Determina la longitud de la cuerda que cae en la recta $x - 2y = 0$ de la elipse $9x^2 + 4y^2 - 9x - 8y + 193 = 0$

V.3.- ECUACIÓN DE UNA ELIPSE A PARTIR DE ALGUNOS ELEMENTOS DE ELLA Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

OBJETIVO:

- El alumno determinará la ecuación en forma general de una elipse a partir de algunos elementos de ella.
- Conociendo los elementos principales de una elipse, el alumno resolverá problemas de aplicación.

EJERCICIOS CONCEPTUALES

1) Sin realizar la gráfica, determina la ecuación en forma general de la elipse.

   a) Con excentricidad $\frac{1}{3}$ y sus vértices son (-5,1) y (7,1)

   b) Con Focos (-3,-1) y (-1,-1) y longitud del eje menor $2\sqrt{15}$.

2) Traza la siguiente elipse:

$$36x^2 + 9y^2 + 144x - 18y - 171 = 0$$

   a) Determina las coordenadas de 8 puntos que estén sobre la elipse

   b) Tomando como punto fijo uno de los focos, encuentra las coordenadas del punto que esté sobre la elipse y cuya distancia al foco sea la más alejada a éste (la máxima distancia)

   c) Como en el inciso b, ahora determina la minima distancia.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Los vértices de una elipse son (1,-6) y (9,-6) donde la longitud del lado recto es 9. Hallar la ecuación general de la elipse.

2) Encontrar la ecuación general de la elipse cuyos vértices son V(-3,7) V(-3,-1) y longitud de ancho focal 2

3) Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen, vértice (0,-5) y pasa por el punto $\left(-2\sqrt{3},\frac{5}{2}\right)$

4) La órbita de la tierra es una elipse con el sol en uno de sus focos. La longitud del eje mayor es 186 millones de millas y la excentricidad es 0.0167. Encuentra ...

   a) La ecuación que represente al problema

   b) Las distancias mínima y máxima de la tierra al sol.

5) La órbita del cometa Haley tiene una excentricidad de 0.97 y su semieje mayor mide 2,885 millones de kilómetros. Deduce una ecuación de su órbita, con centro en el origen (2 soluciones)

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Encuentra todos los elementos de la elipse que tiene como vértices (-5,2) V(3,2) y longitud de eje focal 6

2) Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son (-4, 7) y (-4,-1) y la longitud del lado recto es $\frac{20}{3}$.

3) Grafica la elipse que tiene como Focos $(2+\sqrt{3},-3)$ y $(2-\sqrt{3},-3)$ y longitud del eje menor 6

4) Encuentra la ecuación en forma general de la elipse con centro en el origen, vértice en (0,12) y los extremos del lado recto (9,-6) y (-9,-6).

5) Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de la tierra de tal modo que el centro de ésta, es uno de los focos. El punto más alejado del satélite a la superficie terrestre está a 250 mil millas y el más cercano está a 100 mil millas. Las distancias se miden a lo largo del eje mayor que se supone está en el eje "y". Suponiendo que el radio de la tierra es de 400 mil millas deducir la ecuación de la órbita del satélite.

EJERCICIOS DE RETO:

1) Un punto P(x,y) se mueve en forma que el producto de las pendientes de las dos rectas que unen P con los dos puntos fijos (-2,1) y (6,5) es constante e igual a 4. Demuestra que dicho lugar es una elipse y encuentra el centro.

2) Expresar la elipse $4x^2 + y^2 + 16x + 6y + 21 = 0$ en forma canónica y hallar las coordenadas de sus focos y sus vértices

FICHA INTEGRADORA.

1) Expresar la siguiente elipse en forma canónica y hallar las coordenadas de sus focos y sus vértices:

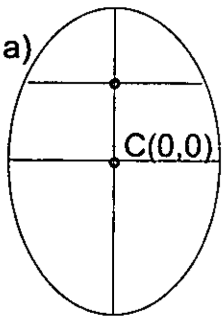
   a) $4x^2 + y^2 - 16x - 6y - 43 = 0$

   b) $x^2 + 3y^2 + 2x + 12y + 7 = 0$

   c) $7x^2 + 16y^2 - 28x - 128y + 172 = 0$

2) Escribe la ecuación y los datos que se piden de las siguientes elipses:

a)



e = ½

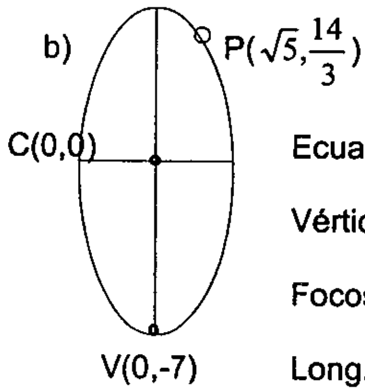
Long. Lado Recto=

Foco 2 =

Vértices =

Ecuación =

b)



Ecuación =

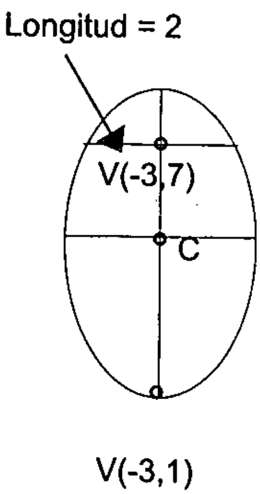
Vértice 2 =

Focos =

Long. Eje Mayor =

Long. Eje Menor =

Long. Lado Recto =



Ecuación =

Focos =

Excentricidad =

Long. Eje Mayor:

Long. Eje Menor:

3) Resuelve los siguientes problemas:

a) Una pelota en el vacío se mueve en forma elíptica alrededor de un punto fijo que está en uno de los focos de la elipse, si la excentricidad es de ½ y el eje mayor de la elipse es de 8 unidades, encuentra la distancia máxima a la que se puede encontrar la pelota del punto fijo.

b) Un recinto tiene forma semielíptica con 20 metros de longitud y 10 m. en su parte más alta ¿Donde se deben colocar dos personas que no sea una junto a la otra para que se puedan comunicar sin que nadie más los escuche (para dar la ubicación utiliza un plano de coordenadas).

AUTOEVALUACIÓN.

1) Traza la siguiente elipse según las condiciones dadas y determina, si es necesario, las coordenadas de: centro, vértices, focos, extremos del eje menor y las longitudes de los ejes: mayor, menor, focal, lado recto y excentricidad.

C(-2,3) F(-2,5) y V(-2,-1)

2) Grafica la elipse que tiene como focos (-5,-4) (-5,12) y excentricidad 4/5.

3) Encuentra la ecuación en forma general de las siguientes elipses:

a) $V_1(6,1)$, $V_2(-6,1)$ y longitud del semieje menor $3\sqrt{3}$.

b) Centro en (0,0) V(0,-5) y pasa por el punto $P(-2\sqrt{3}, \frac{5}{2})$

4) Grafica la siguiente ecuación: $25x^2 + 16y^2 - 150x - 160y + 225 = 0$

5) La órbita de la tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse es 148.5 millones de kilómetros y que la excentricidad es 0.017, hallar la máxima y la mínima distancias de la tierra al sol.

VI

HIPERBOLA

BOSQUEJO HISTÓRICO.

Un tipo de problemas que interesó a Pitágoras (569 - 500 A. C.) fue el método de aplicación de superficies. Su solución consistía en la resolución de una ecuación cuadrática, el problema principal era trazar sobre una línea recta dada, una figura que tuviera el tamaño de una figura dada y la forma de otra también dada, en el desarrollo de la solución debía ocurrir una de las tres cosas siguientes: la base de la figura construida se ajustaría, ¿sería demasiado corta o excedería a la longitud de la línea recta dada?. A estas tres posibilidades se les llamó Parábola, Elipse e Hipérbola respectivamente. Años después Apolonio introdujo estas curvas como secciones cónicas, ya que se forman al intersectar un cono circular recto y un plano, si el plano es paralelo a uno de los elementos y corta a ambas partes del cono se forma lo que se conoce como hipérbola.

En la obra de Apolonio que él denominó Secciones Cónicas, se encuentra la afirmación de que en el plano, el lugar de un punto (móvil) cuyas distancias a dos puntos fijos dan una diferencia constante, es una hipérbola que tiene como focos esos puntos fijos. El mismo Apolonio aclara que una tangente a la hipérbola deja los dos focos separados, de un lado un foco y el otro del otro lado.

Siglos después, Fermat (1601-1666) demuestra que la representación de una hipérbola es: $a^2 + x^2 = ky^2$ Y en uno de sus tratados llamado "Metodo para hallar máximos y mínimos" descubre también la ecuación de la forma $y = x^n$ que se conoce como "parábolas de Fermat" si "n" es positivo, o "hipérbola de Fermat" si "n" es negativo.

Newton (1642-1727) fue el primer matemático que consideró la hipérbola como una curva de dos ramas, cosa que no se había hecho antes, pues Apolonio no consideraba ambas ramas como pertenecientes a una misma curva.

CONTENIDO:

1) La Hipérbola como lugar geométrico.

2) Gráfica de la ecuación general de 2° grado de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$$

Con $A \neq B$, de diferente signo y deferentes de cero

3) Ecuación de una hipérbola a partir de algunos elementos de ella y problemas de aplicación.

VI.1.-LA HIPÉRBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

OBJETIVOS:

- El alumno graficará una hipérbola a partir de su definición como lugar geométrico.
- El alumno graficará una hipérbola dados distintos elementos de ella.
- El alumno deducirá la ecuación que representa una hipérbola.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) Si en la definición de lugar geométrico de una elipse en lugar de decir:

"...la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es igual a una constante 2a", la sustituimos por:

"...la diferencia de sus distancias a 2 puntos fijos llamados focos es igual a una constante 2a"

¿Qué figura se formaría?

2) Indagar la definición de Hipérbola como lugar geométrico.

3) Indagar cuales son los elementos importantes de la hipérbola.

4) Investigar cuáles son los diferencias y similitudes básicas entre los elementos de una hipérbola y los elementos de una elipse.

5) Utiliza los conceptos de la pregunta 4 para graficar una hipérbola con focos (-5,0) y (5,0) y longitud del eje transverso igual a 8.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Construir las siguientes hipérbolas con los elementos indicados:

a) $F_1(3,0)$ $F_2(-3,0)$ y eje transversal igual a 4.

b) F_1 $(0,5)$ $F_2(0,-5)$ y eje transverso igual a 6.

c) F_1 $(-7,3)$ $F_2(-1,3)$ y eje transverso igual a 4.

d) F_1 $(4,-3)$ $F_2(4,6)$ y eje transverso igual a 5.

2) Encuentra la ecuación canónica y general de la hipérbola, según las siguientes condiciones (C = centro; F = foco; V = vértices, B = extremos del eje conjugado; LR = Lado recto; e = excentricidad).

a) $C(0,0)$	b) $C(0,0)$	c) $C(1,3)$	d) $C(0,0)$	e) $F_1(-7,3)$
$V(\pm 3,0)$	$B = (\pm 4,0)$	$V(1,0)$	$F(0,-5)$	$F_2(-1,3)$
$e = \frac{5}{3}$	L. R.= 8	$F(1,-2)$	$V(0,3)$	Longitud del eje imaginario $2\sqrt{5}$.

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Determina la ecuación general de las siguientes hipérbolas:

a) $F_1(-2,6)$	b) $V_1(-4,2)$	c) Eje transversal paralelo al eje "x"
$F_2(-2,-2)$	$V_2(-4,-8)$	$V(-6,-2)$
$B(1,2)$	$e = 2$	$B(-3,1)$

d) $F_1(2,1)$ e) $C = (2,-3)$ f)Extremos de un lado recto $(-4,1)$ $(8,1)$

$F_2(2,-7)$	Semieje conjugado. 4	Semieje real o transversal
$V_1(2,-1)$	Lado Recto 8	igual a 2
	Paralela al eje "x"	

g) $C(2,-2)$

$V(2,4)$

$F(2,6)$

EJERCICIO DE RETO:

Determinar por dos métodos distintos la ecuación en forma general de una hipérbola con centro en el origen y focos (4,0) y (-4,0)

VI.2.- GRÁFICA DE LA ECUACIÓN GENERAL DE 2º GRADO DE LA FORMA:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$$

Con $A \neq B$, de diferente signo y diferente de cero.

OBJETIVOS:

- El alumno graficará una hipérbola a partir de su ecuación en forma general.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) Identifica (sin graficar) cuáles de las siguientes ecuaciones podrían representar una hipérbola

   a) $9x^2 - 6y^2 + 8x + 32y + 5 = 0$

   b) $9x^2 + 16y^2 - 12x + 10y - 3 = 0$

   c) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 10y - 3 = 0$

   d) $-x^2 + y^2 + 5 = 0$

   e) $y^2 - 3x + 2y - 7 = 0$

   f) $7y^2 - 12x^2 + 28y - 31 = 0$

   g) $x^2 + y^2 - 13x + 2y = 0$

2) Grafica las siguientes ecuaciones:

   a) $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

   b) $\frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{16} = 1$

3) Indica las diferencias al graficar las hipérbolas del inciso a) y b) del ejercicio 2

4) Desarrolla las ecuaciones del ejercicio 2 hasta obtener sus ecuaciones generales respectivas.

5) Generaliza un proceso para graficar una ecuación general que represente una hipérbola.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

Grafica las siguientes hipérbolas:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$

c) $3y^2 - x^2 - 27 = 0$

d) $100x^2 - 44y^2 = 275$

e) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

f) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$

g) $16x^2 - 9y^2 - 32x - 36y - 124 = 0$

h) $4x^2 - y^2 + 4x - 3y - 26 = 0$

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Grafica la ecuación

$$3x^2 - 4y^2 - 3x - 16y - 18 = 0$$

2) Grafica y determina: centro, vértices, Focos, Longitud del Ancho Focal, Excentricidad y las Ecuaciones de las asíntotas.

a) $9x^2 - 16y^2 + 18x - 32y - 151 = 0$

b) $x^2 - 2y^2 - x + 8y - 8 = 0$

c) $9x^2 - 16y^2 + 64y - 208 = 0$

d) $9x^2 - 9y^2 + 54x = 0$

EJERCICIO DE RETO

Determina si la siguiente ecuación representa una hipérbola, de lo contrario indica qué lugar geométrico representa, justificando tu respuesta.

$$x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$$

VI.3.- ECUACIÓN DE UNA HIPÉRBOLA A PARTIR DE ALGUNOS ELEMENTOS DE ELLA Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

OBJETIVOS:

- El alumno determinará la ecuación en forma general de una hipérbola, a partir de algunos elementos de ella.
- Conociendo, los elementos principales de una hipérbola, el alumno resolverá problemas de aplicación.

EJERCICIOS CONCEPTUALES

1) Sin realizar la gráfica, determina la ecuación general de la hipérbola.

   a) V(0,4) V(0,-4) y excentricidad 3/2.

   b) C(-2,2) V(4,2) F(6,2)

2) Traza la siguiente hipérbola $12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 128 = 0$ determinando las coordenadas de 8 puntos que estén sobre ella.

3) En la hipérbola del ejercicio 2, calcula las siguientes distancias:

   a) Entre V_1 y F_1

   b) Entre V_1 y F_2

   c) Entre F_1 y C_1 (C_1 es un extremo del lado recto)

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Los vértices de una hipérbola son (2,-7) y (2,1) y la longitud del lado recto $\frac{9}{2}$, hallar la ecuación general de la hipérbola y las ecuaciones de sus asíntotas.

2) Encontrar la ecuación general de la hipérbola cuyos vértices son (-1,3), (9,3) y semieje conjugado 4.

3) Encuentra la ecuación en forma general de la hipérbola con centro en (3,5), longitud del eje conjugado igual a 6 y longitud del eje transverso igual a 4 paralelo al eje de las abscisas.

4) Determina la ecuación general de la cónica con vértice en (0,4) y (0,-4) y excentricidad igual a $\frac{3}{2}$.

5) Determinar la ecuación general y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola con focos (-7,3) y (-1,3) y longitud del eje transverso igual a 4.

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Determinar las ecuaciones en forma general de las siguientes cónicas:

a) C(0,0), eje transverso sobre el eje X, excentricidad igual a $\frac{5}{4}$ y la hipérbola pasa por el punto $(10,\frac{9}{2})$

b) Vértices en (-3,-4) y (-3,6) y excentricidad igual a 2.

c) Focos en (8,-1) y (-4,1) lado recto igual a 10.

2) En un cuarto obscuro se tiene un reflector parabólico con su foco a 60 cms. de distancia sobre el vértice. Un pequeño reflector hiperbólico se encuentra a 50 cms. sobre el vértice con uno de sus focos en el mismo lugar que el foco de la parábola; refleja las ondas de luz hacia su otro foco (de la hipérbola) que queda a 10 cms. abajo del vértice de la parábola. Determinar el largo mínimo (longitud del eje focal) y el ancho mínimo (longitud del lado recto) del cuarto obscuro.

3) Un meteorito sigue una órbita hiperbólica al pasar cerca de la tierra y alcanza su punto más cercano a ésta en el vértice a 40 millones de millas de la tierra. Cuando la

recta que une a la tierra con el meteorito es perpendicular al eje transversal de la hipérbola, el meteorito está a 106 millones de millas de la tierra. Hallar una ecuación de la órbita del meteorito si el eje transverso se coloca sobre el eje X, el centro en el origen y la tierra en uno de los focos; redondear los resultados a números enteros para encontrar la ecuación en forma general.

EJERCICIOS DE RETO.

Un alpinista se extravió en una montaña; el lugar en donde se encuentra es una vereda que es paralela a una carretera que va de norte a sur a una distancia de 2 millas de la vereda. En la carretera se encuentran 2 grupos de rescate a 3 millas de distancia entre sí. El alpinista activa una señal de explosión y el sonido llega al grupo de rescate que está al norte 3 segundos antes de llegar al otro grupo de rescate. Determina la ubicación del alpinista en relación con los grupos de rescate, teniendo en cuenta que la velocidad del sonido es 1100 pies/seg.

FICHA INTEGRADORA:

1) Encontrar la ecuación general y ecuaciones de sus asíntotas de las siguientes hipérbolas.

   a) V_1 (-2,2) V_2(-2,-4) y LR = 6

   b) LR = 12 y focos (3,-8) y (3,0)

c) e = $\frac{\sqrt{13}}{2}$ y extremos del eje imaginario (-2,1) (-2,-5)

2) Graficar e indicar todos los elementos de las siguientes ecuaciones:

$$9x^2 - 4y^2 + 36x - 16y - 16 = 0$$

$$4x^2 - 4y^2 + 20x - 16y + 25 = 0$$

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 40y - 19 = 0$$

3) Encontrar la ecuación de la hipérbola vertical cuyas asíntotas son x - 2y = 0; x + 2y - 3 = 0 y la distancia entre los vértices es 2.

4) Deducir de la Hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$:

a) La ecuación de su hipérbola conjugada.

b) Las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola conjugada.

c) Coordenadas de los focos de ambas.

5) Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por (6,2), tiene su centro en el origen, eje transverso sobre el eje x y una de sus asíntotas es 2x - 5y = 0.

AUTOEVALUACIÓN.

1) Grafica la hipérbola que tiene como vértices (3,-1) (3,3) y e = $\frac{3}{2}$.

2) Determinar la ecuación general de la hipérbola cuyas asíntotas son y $= \pm 2x$ y un foco está en (0,5)

3) El centro de una hipérbola es el punto (-1,3), uno de los extremos del eje conjugado es (-1,6) y su lado recto igual a 6, encuentra todos los elementos de la cónica y su ecuación general.

4) Encuentra la ecuación canónica y la gráfica de la hipérbola que tiene como ecuación general:

$$4x^2-4y^2-4x-16y-31=0$$

5) Una pelota en el vacío se mueve en forma hiperbólica al rededor de un punto fijo que está en uno de sus focos, si la excentricidad es de $\frac{5}{4}$ y el eje transversal es 8 unidades, encuentra la distancia más cercana de la pelota al foco y una ecuación que represente la trayectoria de la pelota.

VII

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

BOSQUEJO HISTÓRICO.

Fermat y Descartes (Siglo XVII) fueron los dos personajes principales en hallar métodos generales para el estudio de curvas, ellos estaban conscientes de la necesidad de métodos cuantitativos en el estudio de la geometría e incorporaron a ésta la ayuda del álgebra llamando a esta conjugación Geometría de Coordenadas o Geometría Analítica.

Para sus investigaciones sobre las curvas, Fermat partió de la obra de los geómetras griegos y gracias a sus contribuciones al álgebra, estuvo en condiciones de aplicarla al estudio de las curvas. Su propósito fue iniciar el estudio de lugares geométricos que los griegos no habían llegado a hacer. Fermat no utilizó coordenadas negativas y sus ecuaciones no podían representar curvas completas, pensó entonces en la posibilidad de trasladar y girar los ejes, ya que al considerar ecuaciones de segundo grado más complicadas, las podría reducir a formas más sencillas.

La geometría algebraica nos indica que la ecuación de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

determina curvas que estudiaron los antiguos griegos y que resultan de cortar un cono sólido de base circular o dos conos iguales con la misma generatriz cuyo único punto de contacto es el vértice. De éstas secciones cónicas un caso particular es el círculo.

CONTENIDO:

1) La ecuación general de 2° grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

2) El discriminante o indicador.

3) Traslación de ejes y simplificación de ecuaciones.

4) Rotación de ejes y simplificación de ecuaciones.

5) Simplificación de ecuaciones por rotación y traslación.

VII.1.- LA ECUACIÓN GENERAL DE 2° GRADO.

OBJETIVOS:

- El alumno obtendrá la ecuación general de 2° grado a partir de la definición de las cónicas como lugares geométricos.
- El alumno identificará el significado de los elementos Bxy, Dx y Ey de la ecuación general en la construcción de la gráfica de las cónicas.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) Usando la definición de lugar geométrico encuentra la ecuación en forma general de las siguientes parábolas:

   a) $F(0,-3)$ y directriz $y = 3$

   b) $F(-2,5)$ y directriz $y = -1$

   c) $F(2,3)$ y directriz $x + y - 1 = 0$

2) Compara las ecuaciones obtenidas en los incisos del ejercicio 1). Señala cuáles son las diferencias entre el inciso c) y los incisos a) y b), argumenta tu respuesta.

3) indaga cuál es la forma general de la ecuación de segundo grado con dos variables.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Para cada una de las siguientes ecuaciones indica si se trata de una cónica vertical, horizontal u oblicua y si su centro está en el origen o fuera del origen.

   a) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$

   b) $3x^2 + 3y^2 - 18y = 0$

   c) $x^2 - xy + y^2 = 1$

   d) $4x^2 - y^2 + 4x - 3y - 26 = 0$

   e) $9x^2 - 9y^2 + 54x = 0$

   f) $xy - x - 3y = 0$

   g) $x^2 = 5y$

   h) $2x^2 + 3y^2 - 5 = 0$

i) $xy + 4y = 1$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) En la forma general de la ecuación de 2° grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, indica qué sucede cuando:

   a) $A = 0$ y $B = 0$

   b) $B = 0$

   c) $D = 0$

   d) $E = 0$

   e) $D = 0$ y $E = 0$

   f) $B = 0$ y $C = 0$

   g) $B = 0$, $D = 0$ y $E = 0$

2) Para las siguientes ecuaciones discutan el tipo de gráfica que representarían (sin construirlas)

   a) $xy - 3x - y = 0$

   b) $3x + 2y - 5 = 0$

   c) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 17 = 0$

   d) $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 8$

   e) $xy^2 + xy - 2x - 2 = 0$

EJERCICIOS DE RETO

1) Encontrar la ecuación y la gráfica de una elipse con focos (3,1) y (6,5) y longitud del eje mayor 7 unidades y graficarla.

VII.2.- DISCRIMINANTE O INDICADOR.

OBJETIVO:

- Que el alumno identifique el tipo de cónica que representa una ecuación general de segundo grado mediante el uso del indicador.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) Indaga cuál es la fórmula del indicador o discriminante.
2) Indica qué tipo de cónicas son las siguientes:
    a) $x^2 - 2x + 4y - 5 = 0$
    b) $2x^2 - 3y^2 + 4x + 9y - 12 = 0$
    c) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 27y - 3 = 0$
3) Aplica el indicador en cada una de las ecuaciones del ejercicio anterior.
4) Cuál fue tu resultado numérico del indicador en el ejercicio anterior.
5) Qué conclusiones darías cuando el indicador es:
    a) Mayor a cero

b) Menor a cero

c) Igual a cero.

6) ¿Se podrían generalizar estos resultados para ecuaciones de la forma

$x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$?

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

Mediante el uso del discriminante (o indicador) indica qué tipo de cónicas son las siguientes:

a) $2x^2 + 3y - 5 = 0$

b) $x^2 = 5y$

c) $3x^2 + 9y - 18 = 0$

d) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$

e) $x^2 - xy + y^2 = 0$

f) $xy - 3x + 5y + 1 = 0$

g) $5x^2 - 5y^2 - 7x + 2y - 1 = 0$

h) $5x^2 - \sqrt{3}xy + 4y^2 = 2$

i) $8x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x + 8y + 1 = 0$

j) $5x^2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

Indica la naturaleza de las siguientes cónicas:

1) $5x^2 - 5y^2 - 7x + 2y = 7$

2) $5x^2 + 5y^2 - 7x + 2y = 7$

3) $5x^2 - 5xy - 5y^2 - 7x + 2y = 7$

4) $5x^2 + 5xy + 5y^2 - 7x + 2y = 7$

5) $x^2 - \sqrt{7}\,xy + 3y^2 = 0$

6) $2x + 3y - 5 = 0$

EJERCICIOS DE RETO:

1) Demuestra que el discriminante $I = B^2 - 4AC$ indica la naturaleza de cualquier cónica aplicada a la ecuación general de segundo grado.

2) ¿Qué pasa con el valor del discriminante si la cónica es del género circunferencia?

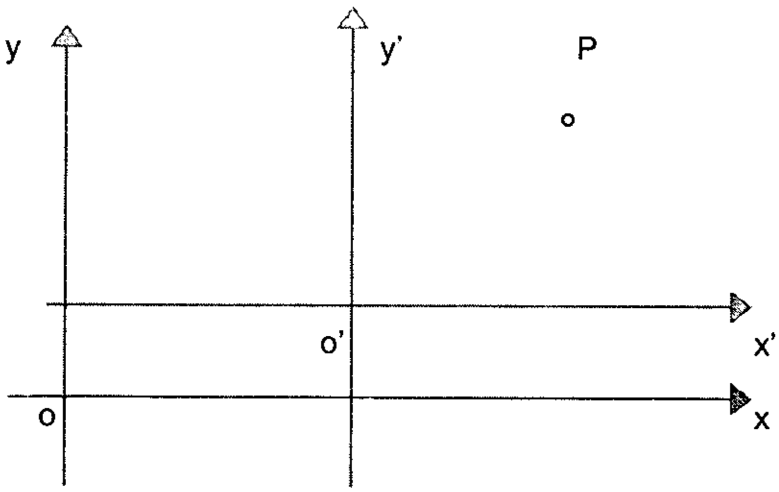
VII.3.- TRASLACIÓN DE EJES Y SIMPLIFICACIÓN DE ECUACIONES.

OBJETIVOS:

- El alumno transformará la ecuación general de segundo grado en otra que carezca de los términos lineales a través de una traslación de ejes.
- El alumno aplicará las ecuaciones de transformación de traslación en la ecuación general de 2º grado para obtener la ecuación transformada.
- El alumno graficará la ecuación transformada.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

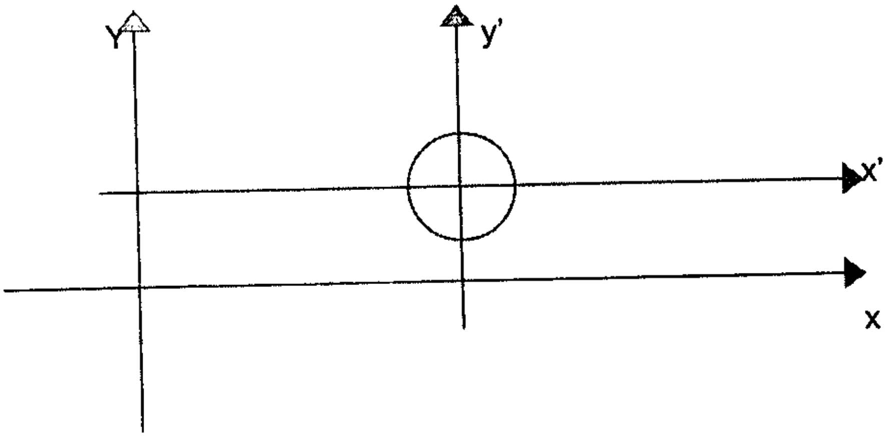
1) Considera los dos planos de coordenadas.(xy y x'y') como se indican en la figura:



a) Indica cuales son las coordenadas del punto "P" en cada uno de los planos de coordenadas.

b) ¿Qué relación existe entre las coordenadas obtenidas?

2) Determina la ecuación en forma general de la siguiente figura en cada uno de los planos indicados.



a) Cuál es la diferencia entre la ecuación del plano xy y la ecuación del plano x'y'.

3) Indaga qué significa una transformación de coordenadas.

4) Indaga que significa trasladar los ejes de coordenadas rectangulares.

5) Investiga cuales son las ecuaciones de transformación por traslación.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Hallar las coordenadas nuevas de los siguientes puntos cuando el origen se mueve hasta la coordenada o'(-2,3).

a) P(4,-1)

b) Q(-5,-7)

c) R($\frac{3}{4}$,$\frac{1}{2}$)

d) S($\sqrt{3}$,5)

2) Hallar el punto al cual debe trasladarse el origen para que la ecuación transformada no tenga términos de 1° grado.

a) $x^2 +9y^2 -10x +36y +52 = 0$

b) $9x^2 -4y^2 + 90x - 32y + 125 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y +26 = 0$

d) $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$

e) $2xy + x - y + 4 = 0$

f) $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$

g) $x^3 - 3x - y = 6$

3) Encontrar las ecuaciones de translación de las siguientes curvas:

a) $16x^2 + 16y^2 + 8x - 48y + 5 = 0$

b) $x^2 + 8x - 3y + 10 = 0$

c) $xy - 3x + 4y - 13 = 0$

d) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0$

e) $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$

f) $8x^3 + 24x^2 - 28x - y = 7$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Determina la nueva ecuación si el origen se traslada al punto dado.

a) $3x - 2y = 6$	o'(4,-3)
b) $y^2 - 6x + 4y + 22 = 0$	o'(3,-2)
c) $4y^2 - 5x^2 + 8y - 10x - 21 = 0$	o'(1,-1)
d) $xy - x + y - 10 = 0$	o'(1,1)

2) Graficar las siguientes cónicas usando una traslación de ejes.

a) $x^2 - 5y + 16x - 10y - 9 = 0$

b) $3x^2 + 3y^2 + 12x - 12y - 1 = 0$

c) $30xy + 24x - 25y - 80 = 0$

d) $x^2 - 8x + 8y + 8 = 0$

EJERCICIOS DE RETO.

1) Demuestra que las ecuaciones $x = x' + h$ y $y = y' + k$ eliminan los términos de 1° grado en la ecuación general de 2° grado.

2) Grafica la siguiente ecuación aplicando una translación de ejes.

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 68x - 24y - 12 = 0$$

3) Cuál sería la explicación lógica de no poder eliminar todos los términos lineales por una translación de ejes en la ecuación

$$x^2 + 8x - 3y + 10 = 0$$

VII.4.- ROTACIÓN DE EJES Y SIMPLIFICACIÓN DE ECUACIONES.

OBJETIVOS:

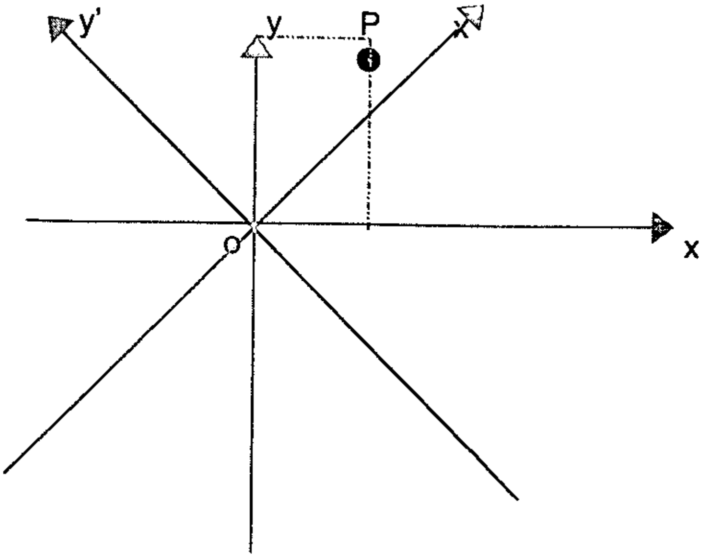
- El alumno transformará la ecuación general de segundo grado en otra que caresca del término Bxy por medio de una rotación de ejes.
- El alumno determinará el ángulo en el que se deben rotar los ejes de coordenadas para eliminar el término Bxy.
- El alumno aplicará las ecuaciones de rotación en la ecuación general de segundo grado para obtener la ecuación transformada.
- El alumno graficará la ecuación transformada.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Indaga qué significa una rotación de ejes de coordenadas.

2) Investiga cuáles son las ecuaciones de transformación por rotación.

3) Considera los dos planos de coordenadas (x,y) y (x',y') como se indica en la figura.



Indica aproximadamente cuáles son las coordenadas del punto P en ambos planos considerando que el plano xy se giró un ángulo de 45°. (Sugerencia: establece las mismas unidades en ambos planos.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Determina el ángulo que deben de rotarse los ejes para que las siguientes ecuaciones carezcan del término xy.
   a) $3x^2 + 10xy + 3y - 4 = 0$
   b) $3x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$
   c) $5x^2 + \sqrt{3}xy + 6y^2 - 7x - 2y + 10 = 0$
   d) $x^2 - xy + y^2 = 1$
   e) $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1$
   f) $2x^2 -5xy +2y^2 - 7x - 1 = 0$
2) Determina las ecuaciones de transformación por rotación de las ecuaciones del ejercicio 1.
3) Transforma mediante una rotación las siguientes ecuaciones de tal manera que se elimine el término xy
   a) $2xy + 3x - 4y = 12$

b) $5x^2 + \sqrt{3}xy + 4y^2 = 2$

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Transforma, mediante rotaciones las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$

b) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$

c) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 4 = 0$

d) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

e) $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 8$

f) $2x^2 + \sqrt{3}xy + 3y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$

g) $3x^2 + 4\sqrt{3}xy - y^2 - 4x + 2\sqrt{3}y - 1 = 0$

2) Transforma mediante una rotación y grafica la ecuación transformada.

a) $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 8$

b) $xy - x + y - 10 = 0$

EJERCICIOS DE RETO.

1) Determinar las coordenadas de los siguientes puntos cuando los ejes se rotan el ángulo indicado.

a) P(3,5) $\sigma = 30°$

b) P(-7,2) $\sigma = 45°$

c) P(-1,3) $\sigma = 60°$

2) Transformar mediante una rotación y graficar la ecuación transformada de

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$$

VII.5.- SIMPLIFICACIÓN DE ECUACIONES POR ROTACIÓN Y TRASLACIÓN.

OBJETIVOS:

- Que el alumno grafique la ecuación general de segundo grado mediante una traslación y una rotación de ejes.
- Que el alumno comprenda que las transformaciones de rotación y traslación son invariantes con la conmutatividad.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Para la siguiente ecuación: $xy - x + y - 10 = 0$

   a) Trasfórmala aplicando primero una rotación y luego una traslación.

   b) Trasfórmala aplicando primero una traslación y luego una rotación.

2) ¿Cómo son las ecuaciones transformadas de los incisos a) y b) del ejercicio 1? ¿Por qué?

3) Grafica las ecuaciones transformadas ¿Cuál es la diferencia?

4) La siguiente proposición: "La gráfica que se obtiene de una ecuación después de aplicar una rotación y una traslación, indistintamente es la misma", ¿Es verdadera o falsa? ¿Por qué?

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Para las siguientes ecuaciones determinar las ecuaciones de rotación y de traslación.

a) $2xy - 3x + 4y - 10 = 0$

b) $x^2 + xy + y^2 - x - 5y + 5 = 0$

c) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

d) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 4 = 0$

2) Encuentra las ecuaciones transformadas del ejercicio 1, aplicando primero una traslación y después una rotación.

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Para las siguientes ecuaciones:

- Determina la ecuación transformada por rotación y translación.
- Grafica la ecuación transformada.

a) $4x^2 - \sqrt{3}xy + 3y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$

b) $5x^2 - \sqrt{3}xy + 6y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

c) $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$

d) $xy + 2x - y + 5 = 0$

EJERCICIOS DE RETO.

1) Simplifica las siguientes ecuaciones por rotación y translación.

a) $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y - 2 = 0$

b) $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

FICHA INTEGRADORA:

En las siguientes preguntas identifica el tipo de cónica antes de resolverlas.

1) Encuentra las ecuaciones de transformación, de traslación o rotación según se indique de las siguientes ecuaciones:

a) $16x^2 + 16y^2 + 8x - 48y + 5 = 0$ (Traslación)

b) $x^2 + 8x - 3y + 10 = 0$ (Traslación)

c) $xy - 3x + 4y - 13 = 0$ (Rotación)

d) $2x^2 + \sqrt{3}xy + 3y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$ (Rotación)

2) Transforma las siguientes ecuaciones por traslación.

a) $x^2 + 3y^2 + 6x + 6y + 3 = 0$

b) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0$

3) Transforma las siguientes ecuaciones por rotación.

a) $5x^2 - \sqrt{3}\,xy + 4y^2 = 2$

b) $x^2 + 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$

4) Grafica las siguientes cónicas usando una traslación, una rotación o una traslación y una rotación según sea necesario.

a) $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$

b) $2x^2 + \sqrt{3}\,xy + y^2 = 8$

c) $30xy + 24x - 25y - 80 = 0$

d) $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$

AUTOEVALUACIÓN:

1) Encuentra las ecuaciones de traslación e indicar el tipo de cónica que representa.

$9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$

2) Encuentra las ecuaciones de transformación por rotación e indica el tipo de cónica que representa.

$2x^2 - \sqrt{3}\,xy + 3y^2 + 2x - 7y + 5 = 0$

3) Determina la ecuación transformada usando una translación.

$9x^2 - 4y^2 + 54x - 8y + 113 = 0$

4) Determina la ecuación transformada usando una rotación.

$$3x^2 + xy + 3y^2 + 6 = 0$$

5) Grafica usando una rotación y una traslación.

$$xy - 2x + 4y - 4 = 0$$

VIII

ANÁLISIS DE CURVAS ALGEBRACAS:

BOSQUEJO HISTÓRICO.

En 1704, Newton publicó su tratado "La Opticks" y en ella figuraban como apéndices dos obras matemáticas, una de las cuales fue titulada: "Enumeratice Linearum Tertii Ordinis" (o Enumeración de las Curvas de Tercer Grado) la cual desde 1676 constituyó el primer ejemplo de una obra dedicada exclusivamente al estudio de las representaciones gráficas de curvas planas de grado superior en álgebra. Newton cataloga setenta y dos tipos de cúbicas (omite 6 de ellas) y dibuja cuidadosamente una curva de cada tipo. Aquí se usan por vez primera los ejes de coordenadas completos y entre las propiedades interesantes que figuran en este tratado, está el hecho de que una curva de tercer grado no puede tener más de tres asíntotas, lo mismo que una cónica no puede tener más de dos.

La palabra "Asíntota" aparece usada por Antolico, y llega a ser un término técnico para Apolonio que la consideraba como una recta cuya distancia a la curva disminuye constantemente. El primero que consideró las asíntotas como rectas tangentes cuyo punto de tangencia se halla en el infinito fue F. Desarguez.

Los ejes de simetría fueron usados por Arquímedes como las rectas que contienen los puntos medios de cuerdas paralelas a una recta dada.

CONTENIDO.

1) Identificación de curvas algebraicas.

2) Intersección de una curva con los ejes coordenados.

3) Simetría de una curva con respecto a los ejes coordenados.

4) Asíntotas de una curva.

5) Análisis de ecuaciones para el trazo de una curva algebraica.

VIII.1.- IDENTIFICACIÓN DE CURVAS ALGEBRAICAS.

OBJETIVO:

- Que el alumno identifique las ecuaciones que representan curvas algebraicas.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Indaga lo que es una curva algebraica.

2) Además de las curvas algebraicas, ¿qué otro tipo de gráficas existen?

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) De las siguientes ecuaciones indica cuáles representan curvas algebraicas.

a) $xy - 2y - 3 = 0$

b) $x^2y - 2x + 5y = 0$

c) $y = \dfrac{5x-4}{(x+2)^2}$

d) $y = 3\text{sen}(5x+2)^2 - 4$

e) $3y - 2e^{3x} + 5 = 0$

f) $y = \dfrac{(x+1)(x-5)(x+3)}{x(x-2)(x+7)}$

g) $y = \dfrac{x^2-16}{x^2-9}$

h) $xy^2 - 7y + 8x - 11 = 0$

i) $\cos 2x - \tan 3y = 5$

j) $2\text{Ln}3x - 5\text{Ln}4y = 2$

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) En las siguientes ecuaciones indica cuáles representan curvas algebraicas; las que representan curvas algebraicas, exprésala en forma explícita (despeja y).

a) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

b) $Ln2y - 3Lny = 0$

c) $y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$

d) $xy - 2x - 2y + 2 = 0$

e) $sen3y + cos3y - x = 0$

f) $x^3 - xy + 2y = 0$

g) $2x^2 - 3y^2 + 6y - 5x + 2 = 0$

EJERCICIOS DE RETO.

La siguiente ecuación representa una curva algebraica; despeja y.

$$7x^2 + 6xy - y^2 - 32 = 0$$

VIII.2.- INTERSECCIÓN DE UNA CURVA CON LOS EJES COORDENADOS.

OBJETIVO:

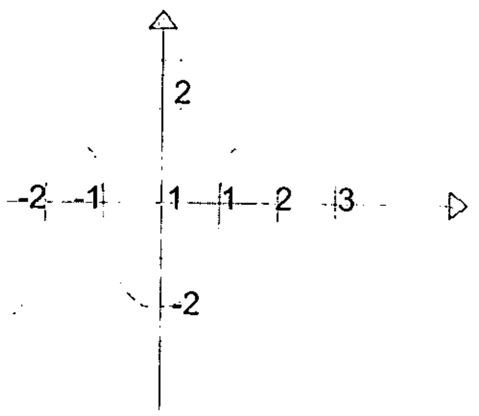
- Que el alumno determine las coordenadas de los puntos en donde una curva algebraica se intersecta con los ejes coordenados.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

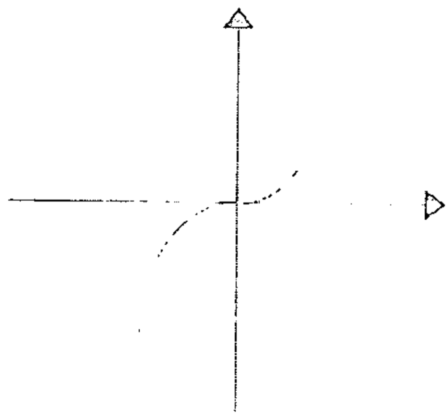
1) En las siguientes gráficas indica:

a) las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados.

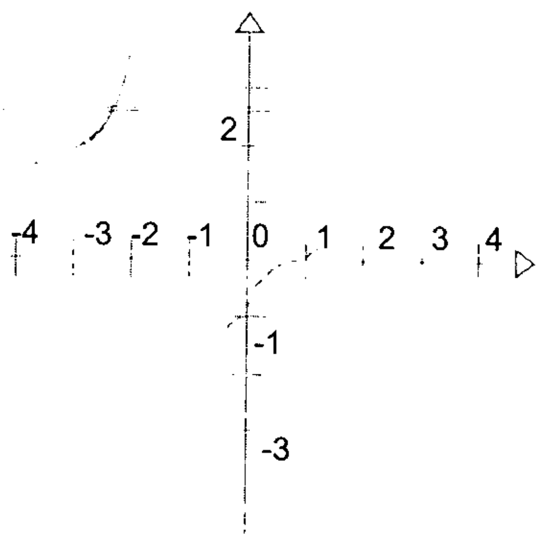
a)



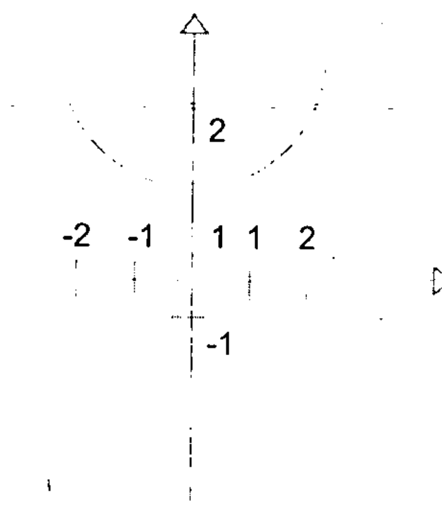
b)



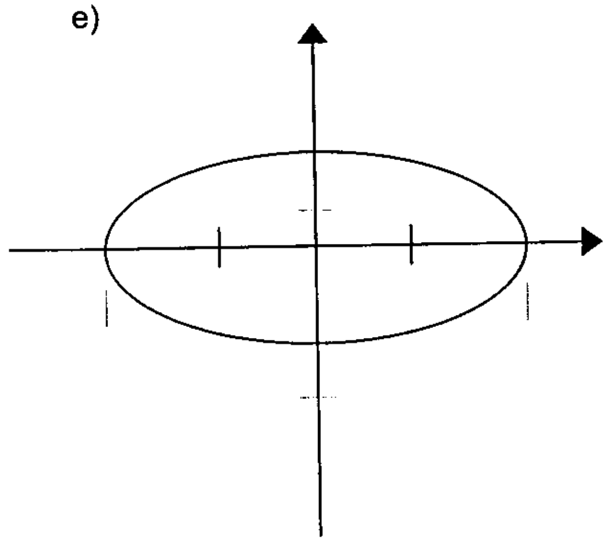
c)



d)



e)



b) ¿Qué observas en los puntos obtenidos? (con respecto al valor de x y de y)

c) Si sólo contaras con la ecuación y no con la gráfica, ¿Cómo determinarías estos puntos de intersección?

d) Generaliza un método para determinar los puntos de intersección a partir de la ecuación.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Determina los puntos de intersección (si los hay) con los ejes coordenados, de las gráficas de las siguientes ecuaciones.

a) $y = \dfrac{1+x}{x-3}$

b) $xy - x + 5 = 0$

c) $x^2y + 2y - 4x = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 8 = 0$

e) $x^2 - y^2 + 8 = 0$

f) $x^3 - 2x^2 + x - 2 - y = 0$

g) $x^2 - 8y + 24 = 0$

h) $x^2y - x^2 = 4y$

i) $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados, de las gráficas de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2y - y = 1$

b) $x^3 + xy^2 = 6x^2 - 2y^2$

c) $x^2 + 2y^2 - 8x + 20y + 64 = 0$

d) $x^3 = y^2$

e) $x^3 + x^2 - 5x + 3 - y = 0$

f) $2x^2 + 2x - y - 3/2 = 0$

EJERCICIOS DE RETO.

Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados, de la gráfica de las siguiente ecuacione:

$$2x^5y - 7x^4y + 3x^2y + 6xy - 5y - y^2 = 0$$

VIII.3.- SIMETRÍA DE UNA CURVA CON RESPECTO A LOS EJES COORDENADOS.

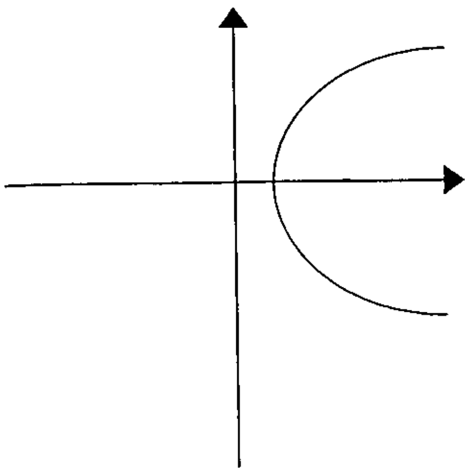
OBJETIVO:

- Que el alumno determine cuándo una curva algebraica es simétrica con respecto a los ejes coordenados.

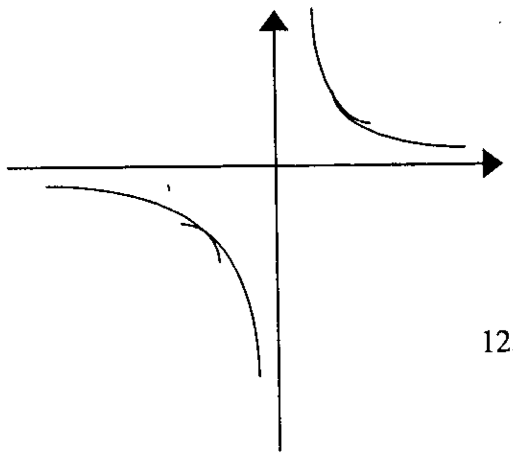
EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Indaga el significado de simetría.
2) En las siguientes gráficas indica si son simétricas con respecto a lo ejes de coordenadas (al eje x ó al eje y ó a ambos ejes).

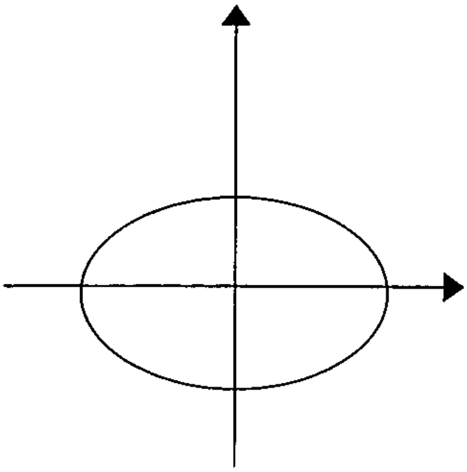
a)



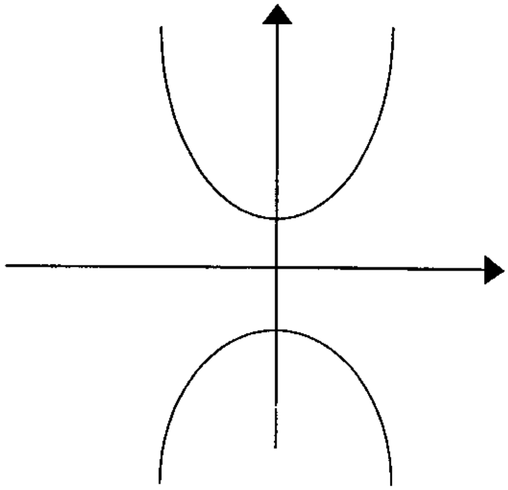
b)



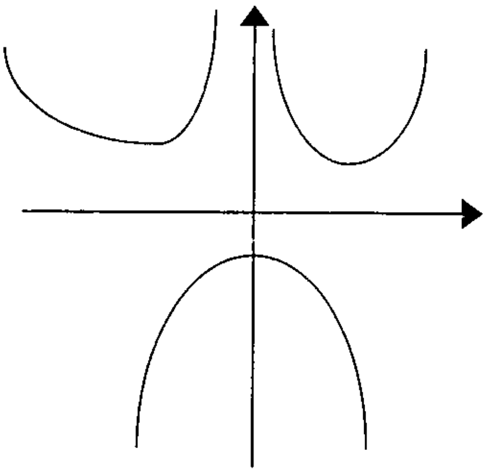
c)



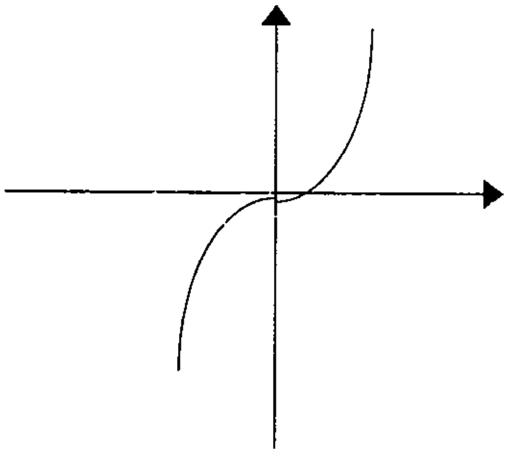
d)



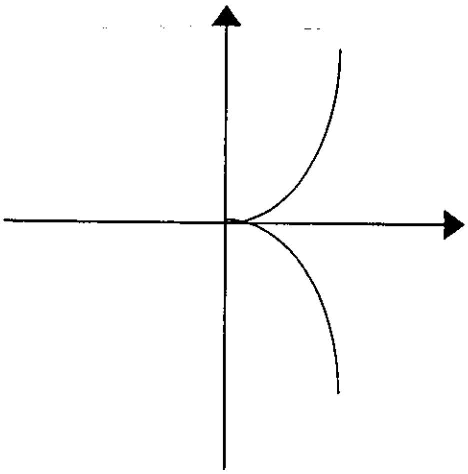
e)



f)

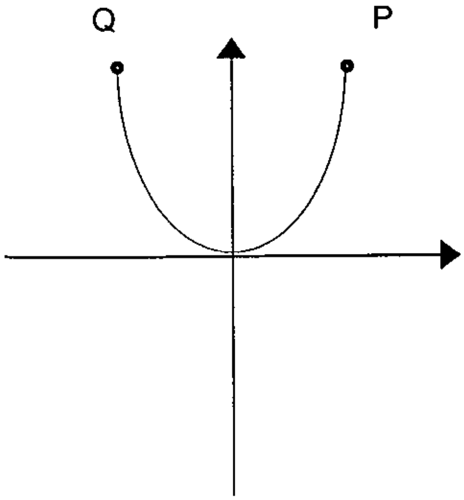


g)

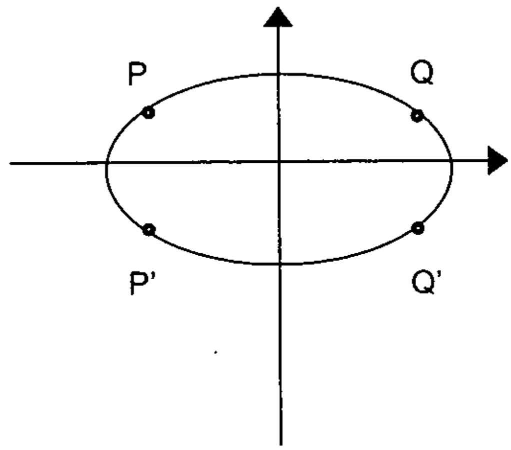


3) Las siguientes gráficas son simétricas con respecto al eje x, al eje y o a ambos; determina las coordenadas de los puntos que se indican.

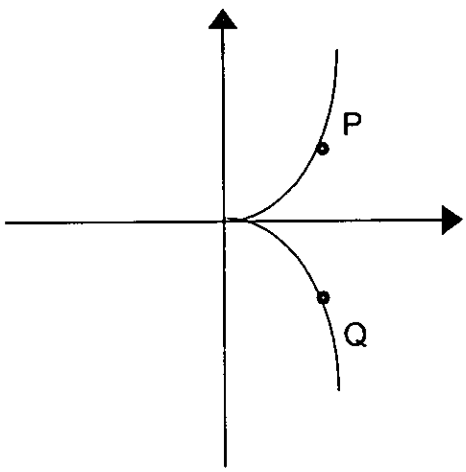
a)



b)



c)



4) Si sólo contaras con la ecuación de una curva algebraica, ¿cómo determinarías si su gráfica es simétrica con respecto a los ejes de coordenadas?

5) Indaga un método para determinar cuando una curva es simétrica con respecto a los ejes coordenados a partir de su ecuación.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son simétricas con respecto a los ejes de coordenadas (Al eje x, al eje y ó a ambos)

a) $y^2 = -14x + 1$

b) $x^2 - 2y = 0$

c) $x^3 - 2y^2 + 5x^2 + 1 = 0$

d) $y = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2 - 3}$

e) $y = x^5 - 6x^2 + 2x - 3$

f) $y = \dfrac{x^2 - 6}{x^2 - 2}$

g) $5x^2 - 5y + 4 = 0$

h) $y = \dfrac{7x - 5}{x - 2}$

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son simétricas con respecto a los ejes.

a) $y = \dfrac{(2x+3)(x-2)^2}{(x-1)(x+1)^2}$

b) $y = \dfrac{x^2 - 5}{(x+2)(x-4)}$

c) $y = (x + 2)(x + 1)(x - 2)(x - 1)$

d) $(x-2)^2 = \frac{y}{x^2-1}$

e) $x^4y^2 - 4y^2 = 8$

f) $2x^3y + 4x^2y - 8xy - y = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$

EJERCICIOS DE RETO.

1) Demostrar que la gráfica de la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 8$ es simétrica con respecto a la recta $y = x$

VIII.4.- ASÍNTOTAS DE UNA CURVA.

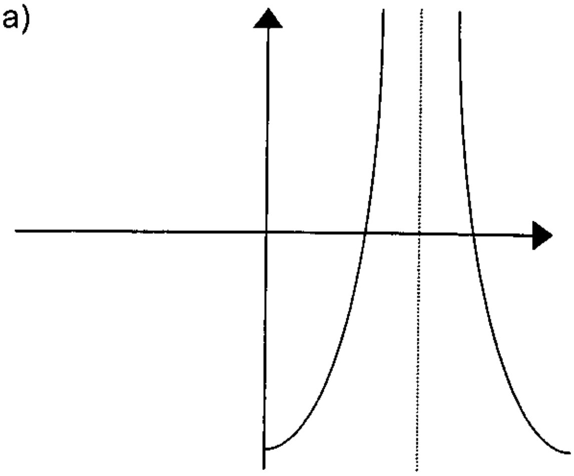
OBJETIVO:

- Que el alumno determine (si existen) las asíntotas verticales y horizontales de una curva algebraica.

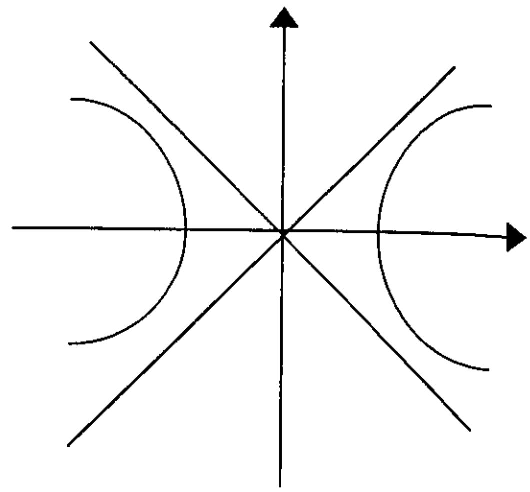
EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Investiga lo que es una asíntota.
2) En las siguientes gráficas indica cuáles de ellas tienen asíntotas y de qué tipo (Horizontal, vertical u oblicua).

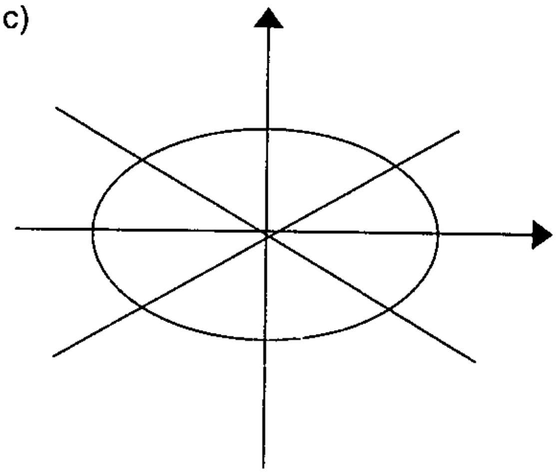
a)



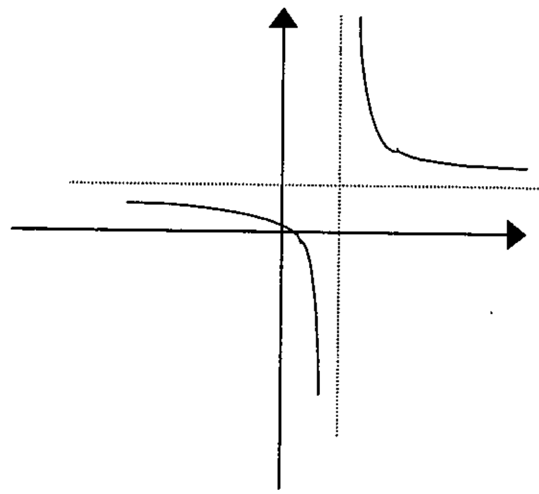
b)



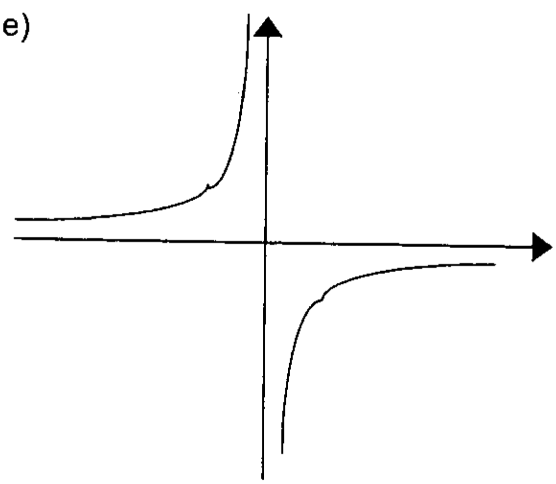
c)



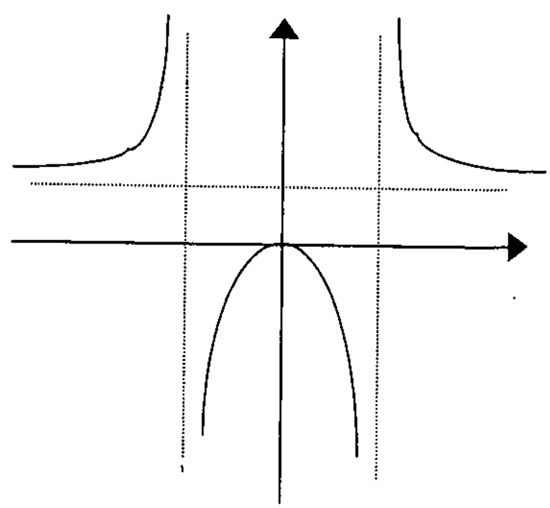
d)



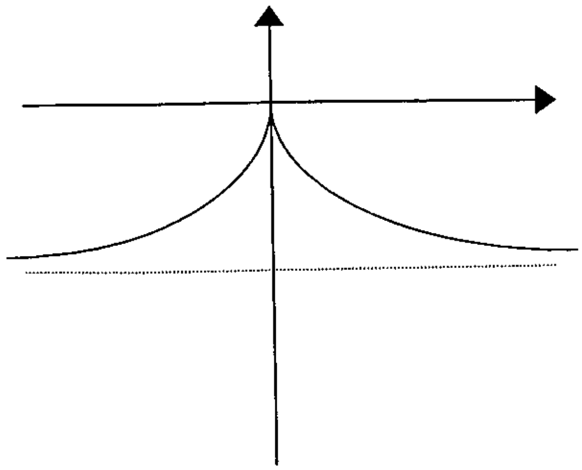
e)



f)



g)



3) Investiga qué métodos se utilizan para determinar si una curva algebraica tiene asíntotas horizontales o verticales a partir de su ecuación.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

Determina las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales (si existen) de las siguientes ecuaciones:

a) $xy - 2y - 2x + 2 = 0$

b) $x^2y = 1$

c) $y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$

d) $x^2y - x^2 - y = 0$

e) $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$

f) $y = \dfrac{2x-5}{x-3}$

g) $y = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-2)(x+1)}$

EJERCICIOS COLABORATIVOS

1) Encuentra las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales (si existen) en las siguientes ecuaciones algebraicas.

a) $x^2y - xy + x - 6y = 1$

b) $x^3 + y^2 = 2$

c) $xy - 1 = 0$

d) $x^2 - 2xy + 5y = 0$

e) $y = \dfrac{x-2}{x^2 - x + 1}$

f) $y = \dfrac{2x+5}{x^3 - 4x}$

g) $x^3y - 4x^2y + xy - x + 6y - 2 = 0$

h) $x^2y + 9y - 4 = 0$

i) $x^3 - 4x^2 - xy + x - 2y + 6 = 0$

j) $y = \dfrac{(x-5)^2(x-4)^3}{(x+3)^5}$

EJERCICIOS DE RETO.

1) Determinar las ecuaciones de las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

$$Y = \frac{x^2 - 2}{x + 3}$$

2) Determinar las asíntotas horizontales y verticales.

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

VIII.5.- ANÁLISIS DE ECUACIONES PARA EL TRAZO DE UNA CURVA ALGEBRAICA.

OBJETIVO:

- El alumno será capaz de trazar curvas algebraicas a partir del análisis de algunos de sus elementos (punto de intersección, simetría y asíntotas).

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) En la siguiente ecuación $y = \frac{x - 3}{2x + 4}$ determina...

a) Puntos de intersección, simetría y asíntotas.

b) Localiza en el plano de coordenadas los puntos de intersección y las asíntotas.

c) Tabula para los valores de x = -5, -4, -3, -1, 1 y 2

d) Con ésta información, traza la gráfica que representa la ecuación.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

Grafica las siguientes ecuaciones utilizando puntos de intersección, simetría, asíntotas y tabla de tabulación.

a) $4x^2 - 9y - 36 = 0$

b) $y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$

c) $xy - 2y - 3 = 0$

d) $xy - 2x + 2y - 2 = 0$

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

Grafica las siguientes ecuaciones utilizando puntos de intersección, simetría, asíntotas y tabla de tabulación.

a) $x^2y - x^2 - y = 0$

b) $x^3 - xy + 2y = 0$

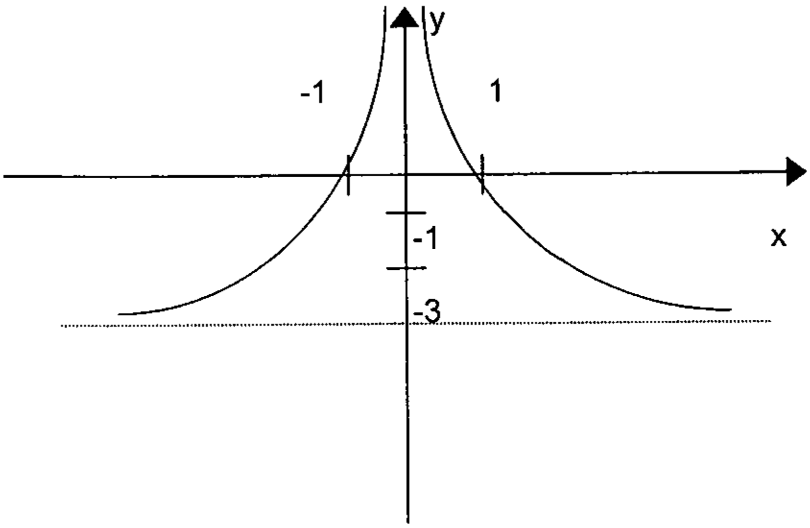
c) $x^2y = 2x + 1$

d) $x^2 = y^3$

e) $y = \dfrac{(x+1)^2(x-3)}{(x-2)^2}$

EJERCICIOS DE RETO.

Para la siguiente gráfica, determina una ecuación que pueda representarla.



FICHA INTEGRADORA.

1) En las siguientes ecuaciones determina los puntos de intersección de sus gráficas con los ejes coordenados.

a) $y = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$

b) $y^2 + 3x^2 - 6y - 2x + 5 = 0$

c) $x^2y - x^2 - y - 8 = 0$

d) $y^2 - 8x + 16 = 0$

e) $y = \dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(x-5)^2}$

2) En las siguientes ecuaciones encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.

a) $xy - 5y - 2x + 4 = 0$

b) $x^2y + 2y = x^2 - 9$

c) $y = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$

3) Determina si las gráficas de las siguientes ecuaciones son simétricas con respecto a los ejes coordenados.

a) $x^2y^2 - y^2 + x - 3 = 0$

b) $x^2 - 7y^2 - 5 = 0$

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(2x - 1)(x + 2)^2}$

4) Grafica las siguientes ecuaciones por el método de análisis de una curva.

a) $x^2y - 2x^2 - 3y = 0$

b) $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$

c) $y^2 + 3x^2 - 6y - 2x + 5 = 0$

d) $2x^2 - 3y^2 + 6 = 0$

e) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^3 + 7x^2 + 4x - 4}$

AUTOEVALUACIÓN.

1) Para la ecuación $3x^2 - 2x^2y + 3y - 9 = 0$, indica:

a) Sus puntos de intersección con los ejes coordenados.

b) Si es simétrica.

c) Las ecuaciones de sus asíntotas.

d) Tabla de tabulación.

e) Su gráfica.

IX

SISTEMA DE COORDENADAS POLARES.

BOSQUEJO HISTÓRICO.

Por lo que se refiere a las coordenadas polares fue Arquímedes quien primero las menciona, pero en realidad fueron inventadas en l691 por Jacobo Bernoulli (1654 - 1705).

El estudio sistemático de las curvas por sus ecuaciones en coordenadas polares se encuentra en una obra de Gourief publicada en 1794. Su notación es moderna: usa **z** para representar el radio vector y **w** para el ángulo vectorial o argumento.

CONTENIDO:

1) Coordenadas polares.
2) Relación entre coordenadas rectangulares y polares.
3) Distancia entre dos puntos en Coordenadas polares.
4) Las secciones cónicas en coordenadas polares.

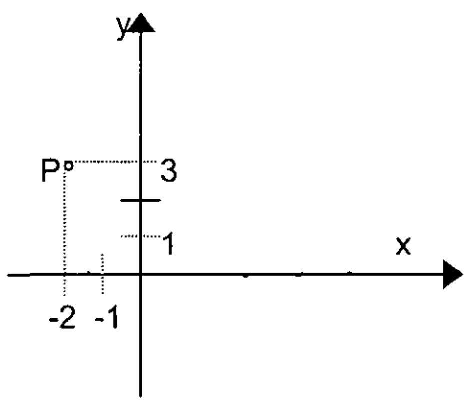
IX.1.- COORDENADAS POLARES.

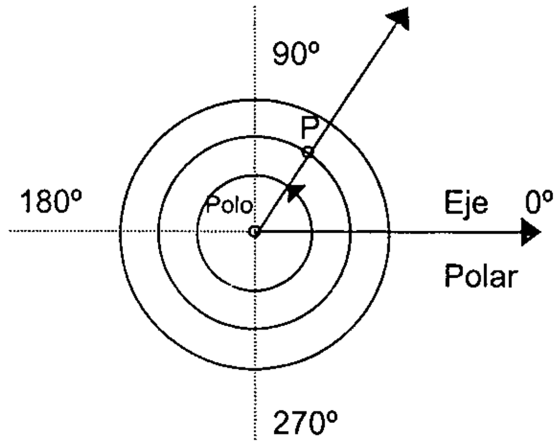
OBJETIVO.

- Que el alumno conozca otro marco de referencia distinto al rectangular, el de coordenadas polares, así mismo que sepa ubicar puntos en este nuevo marco de referencia.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Para los siguientes marcos de referencia, indica las coordenadas del punto P.





2) Investiga qué es un plano polar, cuáles son sus elementos y las reglas para ubicar puntos en este plano.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Localiza los siguientes puntos en el plano polar.

a) A(3,45°)

b) B(3,-30°)

c) C(2,420°)

d) D(-4,45°)

e) E(-3,210°)

f) F(-3,-150°)

g) G(0,30°)

h) H(-7, $\frac{3\pi}{2}$)

i) J(-4,-$\frac{\pi}{6}$)

j) K(2,-$\frac{11\pi}{4}$)

2) Expresa los 10 puntos del ejercicio anterior con otras coordenadas polares equivalentes.

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Expresa con una representación polar alterna las siguientes coordenadas con la condición $0° \leq \sigma < 180°$

a) (+5,240°)

b) $(-1,-\frac{\pi}{3})$

c) (0,480°)

d) $(-3,\pi)$

e) $(\sqrt{3},-276°)$

f) $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{15\pi}{2})$

g) $(-2\sqrt{5},-\frac{\pi}{2})$

h) $(\frac{7}{4},420°)$

i) $(-\frac{1}{2},3\pi)$

j) (0,180°)

2) Expresa los 10 puntos del ejercicio anterior con una representación polar en donde

$0 \leq r$ y $0 \leq \sigma < 360°$

EJERCICIOS DE RETO

Demuestra que una representación polar alterna al punto (r, σ) es de la forma

$(-r, \sigma + 180°)$.

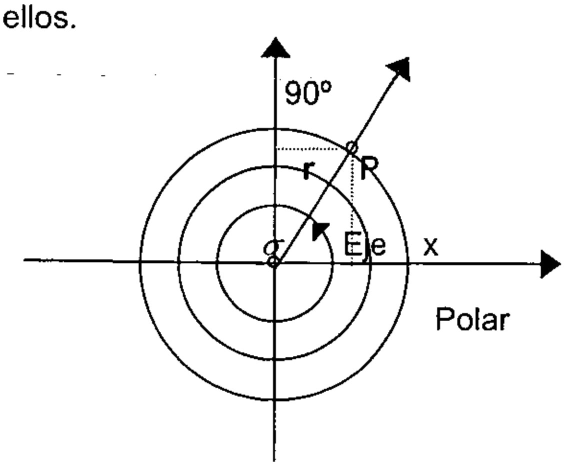
IX.2.- RELACIÓN ENTRE COORDENADAS RECTANGULARES Y POLARES.

OBJETIVO:

- El alumno será capaz de hacer conversiones de coordenadas polares a rectangulares o viceversa.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) En la siguiente figura se muestran los planos rectangular, polar y un punto P en ellos.



P(x,y) rectangulares

P(r, σ) Polares.

a) ¿Cómo determinarías **r** en términos de X y Y?

b) Calcula sen σ

c) Calcula cos σ

d) Calcula tan σ

e) ¿Cómo determinarías σ en términos de X y Y?

f) ¿Cómo determinarías X en términos de **r** y σ?

g) ¿Cómo determinarías Y en términos de **r** y σ?

h) Escribe las fórmulas que puedes utilizar para hacer conversiones de coordenadas polares a rectangulares y viceversa.

2) Una ecuación rectangular contiene variables x,y, por ejemplo $3x + 2y - 7 = 0$. ¿Una ecuación polar que variables contiene?

3) Indaga algunos ejemplos de ecuaciones polares y escribe 5 de ellas.

4) ¿Cómo harias la conversión de una ecuación polar a rectangular y viceversa? Escribe tu método.

5) ¿La gráfica de una ecuación polar se puede trazar usando una tabulación? ¿Cómo se haría?

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Encuentra las coordenadas polares de las siguientes coordenadas rectangulares.

a) (3,4)

b) (-4,3)

c) (-2,-2)

d) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$

e) (-1,-1)

f) (0,-3)

g) $(-2\sqrt{3},3)$

h) (5,-4)

i) (-2,0)

j) $(\frac{\sqrt{2}}{2},-2)$

2) Encuentra las coordenadas rectangulares de las siguientes coordenadas polares.

a) (2,30°)

b) $(-4,\frac{\pi}{3})$

c) (5,210°)

d) $(0,\frac{3\pi}{4})$

e) $(\sqrt{2},-\frac{\pi}{2})$

f) $(-2,3\pi)$

g) $(-3,\frac{7\pi}{6})$

h) (4,0°)

i) $(-\frac{7}{4},390°)$

j) $(\frac{1}{2},-\frac{11\pi}{6})$

3) Grafica en un plano polar las siguientes ecuaciones.

a) $r = \cos\sigma$

b) $r = 2\text{sen}\,\sigma$

EJERCICIOS COLABORATIVOS

1) Transforma las siguientes ecuaciones rectangulares a polares.

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $4x - 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 + x)^2$

d) $y = x - (x+y)^2$

e) $x^2 - 6y - 6 = 0$

2) Transforma las siguientes ecuaciones polares a rectangulares.

a) $r = 3 + \text{sen}\,\sigma$

b) $r = 1 - \cos\sigma$

c) $r = 5\cos\sigma$

d) $r = \dfrac{1}{2 + \text{sen}\,\sigma}$

e) $r = \dfrac{-7}{5 - 3\cos\sigma}$

3) Grafica las siguientes ecuaciones:

a) $r = 2(1 + \text{sen}\,\sigma)$

b) $r^2 = 9\text{sen}2\sigma$

c) $r = \dfrac{1}{1 + \text{sen}\,\sigma}$

EJERCICIOS DE RETO

1) Grafica la siguiente ecuación:

$$(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$$

IX.3.- DISTANCIA ENTRE 2 PUNTOS EN COORDENADAS POLARES.

OBJETIVO:

- Que el alumno calcule la distancia entre 2 puntos ubicados en un plano polar, de manera gráfica y trigonométrica.

EJERCICIOS CONCEPTUALES:

1) Localiza los siguientes puntos en un plano polar:

$$P_1(3, \frac{\pi}{3}) \text{ y } P_2(-5, -\frac{\pi}{4})$$

a) Gráficamente determina la distancia entre P_1 y P_2

b) Convierte los puntos a coordenadas rectangulares y calcula la distancia entre ellos.

c) Con tu resultado del inciso a), comprueba si tu resultado del inciso b) es correcto.

d) ¿Cómo calcularías la distancia entre 2 puntos en coordenadas polares?

e) Investiga la fórmula para calcular la distancia entre 2 puntos en coordenadas polares.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Calcula la distancia entre los siguientes puntos:

a) A$(1,\frac{\pi}{6})$ B(2,120°)

b) A$(3,\frac{\pi}{3})$ B$(-4,\frac{\pi}{2})$

c) A(-5,150°) B(3,80°)

d) A$(6,2\pi)$ B(-1,120°)

e) A(5,0°) B(1,70°)

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Halla el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son:

A(1,15°) B(7,30°) C(3,60°) D(-3,-45°)

2) Determina si los siguientes puntos son colineales o forman triángulo; si forman un triángulo, indica de qué clase es.

a) A(6,120°) B$(-1,-\frac{\pi}{3})$ C(9,-240°)

b) A$(-2,-\frac{\pi}{6})$ B(-5,210°) C$(2,-\frac{\pi}{2})$

c) $A(1,\frac{\pi}{3})$ $B(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$ $C(1,0°)$

EJERCICIOS DE RETO.

Demostrar que la distancia entre dos puntos en el plano polar se obtiene por:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\sigma_2 - \sigma_{1)}}$$

IX.4.-LAS SECCIONES CÓNICAS EN COORDENADAS POLARES.

OBJETIVO:

- Que el alumno represente las ecuaciones de las secciones cónicas en forma polar o rectangular, que las identifique en ambos marcos de referencia y que decida en qué plano graficarlas.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Encuentra en forma rectangular la ecuación general de:

  a) Una circunferencia con centro en el origen y radio 3.

  b) Una circunferencia con centro en el origen y radio 5.

  c) Convertir las ecuaciones de los incisos a) y b) a forma polar .

d) Graficar las ecuaciones en ambos planos.

2) Del ejercicio anterior, ¿puedes inducir la forma polar de cualquier circunferencia con centro en el origen? Escríbela.

3) Del ejercicio 1 indica en qué plano te fue más fácil graficar.

4) Un método similar al del ejercicio 1) se podría utilizar para determinar la forma polar de: la recta, la circunferencia fuera del origen, la parábola en el origen y fuera del origen, etc.

a) Determina la forma polar de la recta.

b) Determina la forma polar de la parábola.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

Expresa en forma polar las siguientes ecuaciones y grafícalas en el plano que quieras:

a) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

b) $x^2 - 2x - y - 3 = 0$

c) $25y^2 - 16x^2 - 400 = 0$

d) $16x^2 + 25y^2 + 160x + 200y + 400 = 0$

e) $3x - 5y + 7 = 0$

f) $x^2 - xy - y - 1 = 0$

2) Identifica qué tipo de cónica representan las siguientes ecuaciones polares. Nota: recuerda que las relaciones entre x, y, r y σ son:

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r\cos\sigma \Rightarrow \cos\sigma = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\sigma \Rightarrow \mathrm{sen}\,\sigma = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a) $r = \dfrac{-5}{3\cos\sigma + 2\,\mathrm{sen}\,\sigma}$

b) $r = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,\sigma}{3\cos^2\sigma}$

c) $r = \dfrac{16}{4 + 2\cos\sigma}$

d) $r = \dfrac{5}{1 - \mathrm{sen}\,\sigma}$

e) $r^2 - 2r\cos\sigma = 3$

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Indica el tipo de cónica que representan las siguientes ecuaciones y grafícalas en el plano adecuado.

a) $r = \dfrac{3}{2 + 5\cos\sigma}$

b) $r^2 + 2r(2\,\mathrm{sen}\,\sigma - \cos\sigma) + 1 = 0$

c) $r - \dfrac{9}{4} = 0$

d) $r = \dfrac{4}{\frac{3}{2}\cos\sigma - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\sigma}$

e) $r = \dfrac{5}{2 + 2\cos\sigma}$

f) $r - 9\cos\sigma = 0$

g) $r = 2\cos\sigma + 4\operatorname{sen}\sigma$

h) $r = \dfrac{4}{2 + \operatorname{sen}\sigma}$

i) $r^2 = \dfrac{100}{25 - 29\cos^2\sigma}$

EJERCICIOS DE RETO.

1) Demuestra que las formas

$$r = \frac{a}{1 \pm b\operatorname{sen}\sigma}$$

$$r = \frac{a}{1 \pm b\cos\sigma}$$

Representan una elipse, hipérbola o parábola con uno de los focos en el polo.

FICHA INTEGRADORA.

1) Para los puntos: $(-3,90°)$ $(4,\frac{5\pi}{3})$ $(-3,\frac{\pi}{3})$ y $(3\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4})$

dar dos representaciones alternas con $0 \leq \sigma < 360°$ y localizarlos en el plano polar.

2) Halla las coordenadas polares no negativas de los siguientes puntos en coordenadas rectangulares.

a) (-2,0) c) (0,-5) e) (-5,-12)

b) (-4,3) d) ($\sqrt{3}$,-1)

3) Transforma las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

b) $r = 8 \operatorname{sen}\sigma$

c) $r = \dfrac{3}{3\operatorname{sen}\sigma + 4\cos\sigma}$

d) $r = \dfrac{2}{2 + \cos\sigma}$

e) $(x+y)^2 = x-y$

f) $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$

4) Demostrar que el triángulo cuyos vértices son $P_1(-3, \frac{7\pi}{6})$ $P_2(7, \frac{\pi}{3})$ $P_3(3, \frac{\pi}{2})$, es isósceles.

5) Graficar:

a) $r = \dfrac{2}{\cos\sigma + 3\operatorname{sen}\sigma}$

b) $r = \dfrac{2}{3 + 4\cos\sigma}$

c) $r = \dfrac{8}{2 - 4\operatorname{sen}\sigma}$

d) $r = 16 \operatorname{sen}\sigma$

e) $r^2 - 2r(3\cos\sigma + 2\operatorname{sen}\sigma) + 4 = 0$

AUTOEVALUACIÓN.

1) Transforma a coordenadas polares el punto (-5,-12)

2) Encuentra una representación polar equivalente al punto $(-5,\frac{9\pi}{2})$ donde $r \geq 0$ y $0 \leq \sigma \leq 360°$

3) Transformar $r = \frac{4}{\operatorname{sen}\sigma - 2\cos\sigma}$ a coordenadas rectangulares.

4) Transformar la ecuación $3x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0$ a la forma polar.

5) Grafica en el plano polar o en el rectangular las siguientes ecuaciones:

a) $r = \frac{10}{5-2\cos\sigma}$

b) $2x^2 - 3y^2 - x + y = 0$

c) $r = \frac{1}{2\operatorname{sen}\sigma + 3\cos\sigma}$

X

DESIGUALDADES.

BOSQUEJO HISTÓRICO.

La ciencia del álgebra fue introducida entre los árabes por Al-guaritzmi mediante una obra escrita en el siglo IX que ocupa un lugar muy importante en la historia de las matemáticas ya que obras posteriores de la edad media se basaban en ella.

Leonardo de Pisa (1175-1230) introdujo el álgebra en Italia con una obra basada en el tratado de Al-guaritzmi y Robert Record (1510-1558) en Inglaterra, así mismo, Record, Albert Girard (1595-1632), Thomas Harrcot (1560-1621), Descartes y muchos otros introdujeron mejoras en el método o en las notaciones del álgebra.

En materia de notación, a Thomas Harriot se le deben algunos avances importantes en el uso de simbolismos; él fue el responsable de la introducción de los signos > "mayor que" y < "menor que".

CONTENIDO:

1) Teoremas de las desigualdades y gráficas.

2) Desigualdades lineales con una variable.

3) Desigualdades cuadráticas.

4) Desigualdades con valor absoluto.

5) Desigualdades con dos variables.

X.1.- TEOREMAS DE LAS DESIGUALDADES Y GRÁFICAS.

OBJETIVO:

- Que el alumno justifique los teoremas fundamentales de las desigualdades usando para ello el concepto gráfico numérico o algebraico.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Indaga lo que es una desigualdad.

2) Para la explicación de tus respuestas a las preguntas de los siguientes incisos, considera que a, b, c y d representan cualquier número real, por lo que puedes ejemplificarlas gráfica o numéricamente.

   a) Qué significado tienen las expresiones $a < b$, $a > b$, $a = b$.

   b) Si $a \geq b$, la expresión $a + c \geq b + c$ es siempre verdadera ¿por qué?

   c) Si $a > b$, la expresión $a \cdot c > b \cdot c$ es verdadera cuando c toma ¿qué valores?

   d) Si $a > b$, $b > c$ ¿cómo son a y c?

3) Las expresiones anteriores se llaman teoremas de las desigualdades. Investiga 3 teoremas más y justifícalos.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Las siguientes desigualdades represéntalas en forma gráfica y de intervalo.

a) $x \leq -8$

b) $y > 3$

c) $z \geq 0$

d) $a = 5$

e) $x > 2$ y $x < 7$

f) $-5y \leq -4$

g) $x > -3$ ó $x < -1$

h) $x \geq 0$ y $x < 0$

i) $6 \leq 2b \leq -4$

j) $y > -2$ ó $y < 2$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Indica si las siguientes desigualdades son falsas o verdaderas y enuncia el teorema que las justifica:

a) $-5 > -3$

b) Si $x \geq 0$ entonces $x + 5 \geq 5$

c) Si $3x < 9$ entonces $x < 3$

d) Si $2x - 3 \leq 5x$, entonces $2x \leq 5x + 3$

e) Si $-8x \geq 11$, entonces $x \geq -\frac{11}{8}$

EJERCICIOS DE RETO.

1) Demuestra que las expresiones siguientes son verdaderas.

a) Si $a > b$ entonces $-a < -b$

b) Si $a < b$ entonces $b - a > 0$

X.2.- DESIGUALDADES LINEALES CON UNA VARIABLE.

OBJETIVO:

- Que el alumno resuelva desigualdades lineales con una variable y que exprese sus resultados en forma gráfica y de intervalo. Así mismo que compruebe sus resultados.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Indaga qué es una desigualdad lineal con una variable.

2) Qué quiere decir resolver una desigualdad lineal y en qué forma se puede expresar su solución.

3) Para resolver una desigualdad lineal se propone el siguiente procedimiento: indica en cada paso qué teorema de las desigualdades lo justifica.

Desigualdad	Teorema
a) $3x - 2 < 6 + 8x$	______________
$3x - 8x < 2 < 6$	______________
$-5x > 6 + 2$	______________
$x > \frac{8}{-5}$	______________

$\therefore$ El intervalo solución es $(-\frac{8}{5}, \infty)$

Desigualdad	Teorema
b) $\frac{2a+3}{2} \geq \frac{5a-1}{4}$	______________
$4(2a+3) \geq 2(-5a-1)$	______________
$8a+12 \geq -10a - 2$	______________
$8a + 10a \geq -2 - 12$	______________
$18a \geq -14$	______________
$a \geq -\frac{14}{18}$	______________

$a \geq -\frac{7}{9}$

$\therefore\ x \in \left[-\frac{7}{9}, \infty\right]$ es el intervalo solución.

Desigualdad Solución.

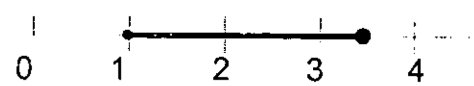
c) $-1 \leq \frac{2y-7}{5} \leq 0$

$-5 \leq 2y - 7 \leq 0$

$-5 + 7 \leq 2y \leq 7$

$2 \leq 2y \leq 7$

$1 \leq y \leq \frac{7}{2}$



EJERCICIOS PRÁCTICOS.

1) Resuelve y comprueba las siguientes desigualdades:

a) $3x + 5 > 2x + 9$

b) $2y + 7 \leq 5y - 8$

c) $2(x + 3) \geq 3(x - 1) + 9$

d) $\frac{1}{3}m - \frac{1}{2} \leq 4 - \frac{1}{6}m$

e) $\frac{z-3}{5} > \frac{1-z}{4}$

f) $-7 < \frac{3-7x}{3} \leq 6$

g) 3x - 9 > -2x y 5x + 2 < 6x

h) $\frac{2}{5}y - \frac{1}{3} > \frac{5}{8}$ ó $\frac{1}{4}y + \frac{5}{2} < 7$

i) 5x - 7 < 2 y 3x - 4 > 4

j) 5a > a + 2 ó 3a + 1 > 8

EJERCICIOS COLABORATIVOS.

1) Resuelve y comprueba las siguientes desigualdades.

a) $3x - 5 \leq 2x + 3 \leq 7x + 10$

b) $-\frac{2x-1}{3} > x - 2 > -\frac{5x-11}{5}$

c) $\frac{2}{x-2} \leq \frac{4}{x+5}$

d) $\frac{3x-2(9x+1)}{5} > \frac{2(5x-7)-9x}{2}$

e) $\frac{-2x+9}{3/5} > 0$ o $\frac{4x-5}{1/3} \leq 0$

EJERCICIOS DE RETO.

Resuelve y comprueba la siguiente desigualdad lineal:

$$\frac{5}{7-2x} > 0$$

X.3.- DESIGUALDADES CUADRÁTICAS.

OBJETIVO:

- Que el alumno resuelva por al menos un método desigualdades de segundo grado con una variable.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Indaga qué es una desigualdad cuadrática con una variable.
2) Localiza en la recta numérica los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

   a) $x^2 > 4$

   b) $x^2 \leq 9$
3) En general la desigualdad $x^2 > a$ con $a \geq 0$ tiene como solución $x > \sqrt{a}$ ó $x < -\sqrt{a}$ ejemplifica este enunciado con al menos 3 valores distintos de a.

4) En general la desigualdad $x^2 \leq a$, con $a \geq 0$ tiene como solución $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ ejemplifica este enunciado con al menos 3 valores distintos de a.

5) Cómo resolverías la desigualdad $x^2 + 2x - 3 > 0$. (Sugerencia: Completa cuadrados)

6) Del ejercicio anterior generaliza un método o métodos para resolver desigualdades cuadráticas.

EJERCICIOS PRÁCTICOS

1) Resuelve la siguientes desigualdades cuadráticas.

a) $x^2 + x - 20 \geq 0$

b) $2x^2 - 5x - 3 > 0$

c) $x^2 - 4x + 4 < 0$

d) $x^2 - x - 2 \leq 0$

e) $x^2 \geq 4x$

f) $5x^2 \leq 6x$

g) $3x + 4 \geq x^2$

h) $x(x + 2) < 8$

i) $12x^2 - 5x - 2 > 0$

j) $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Resuelve las siguientes desigualdades cuadráticas:

a) $(x + 2)(x - 3) < x (2x + 3)$

b) $(3x + 2)(4x - 5) \geq -12x^2 + 10 - 7x$

c) $9x^2 + 6x + 4 \geq 0$

d) $(x + 2)^2 + (2x - 3)^2 - 5x < (x + 2)(x - 2)$

e) $\frac{2x(x+1) - 3(x-1)^2}{4} > \frac{-7x(x-3)}{5}$

EJERCICIOS DE RETO.

1) Resuelve y comprueba la siguiente desigualdad cuadrática:

$$\frac{3}{16x^2 - 9} > 0$$

X.4.- DESIGUALDADES DE VALOR ABSOLUTO.

OBJETIVO:

- Que el alumno resuelva desigualdades lineales con una variable que involucren valor absoluto.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Indaga qué significa Valor Absoluto.

2) Localiza en la recta numérica los valores de x que satisfagan las siguientes desigualdades:

a) $|x| > 3$

b) $|x| \leq 5$

3) En general las expresiones $|x| > a$ tienen como solución x > 0 ó x < -a. Ejemplifica este enunciado con al menos 3 valores distintos de a.

4) En general la expresión $|x| \leq a$ tiene como solución $-a \leq x \leq a$. Ejemplifica este enunciado con al menos 3 valores distintos de a.

5) Cómo resolverías las siguientes desigualdades:

a) $|x-5| < 3$

b) $|x+2| \geq 4$

6) Generaliza un método para resolver desigualdades lineales con valor absoluto.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $|3x-2| \leq 5$

b) $|x-2| \geq 3-x$

c) $|2x+1| < 2+x$

d) $|-x+5| \leq 2x-3$

e) $|-7x+2| \geq -3$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

Resuelve las siguientes desigualdades.

a) $\left|\frac{3}{4}x+2\right| \geq 9$

b) $\left|\frac{5x-4}{2}\right| > \frac{3x-1}{5}$

c) $\left|\frac{-x+3}{4}+\frac{9-x}{6}\right| \leq 2x+5$

d) $|2(x-3)+1| < 4(x+1)$

e) $\left|\frac{\frac{3}{5}x-8}{2}\right| > \frac{2x-4}{\frac{1}{3}}$

EJERCICIOS DE RETO.

1) Resuelve y comprueba la siguiente desigualdad.

$\left|\frac{1}{x-3}\right| > 0$

X.5.-DESIGUALDADES DE DOS VARIABLES.

OBJETIVO:

- Que el alumno determine la gráfica de la región solución de una desigualdad de dos variables.

EJERCICIOS CONCEPTUALES.

1) Para la ecuación x - y + 1 = 0

a) exprésala en forma explícita (despeja y)

b) Gráficala en el plano coordenado.

c) ¿En cuantas regiones divide la gráfica al plano coordenado?

d) Los puntos de la recta satisfacen la ecuación del inciso a). Los puntos de la región superior ¿qué desigualdad satisfacen? ¿y los de la inferior?

2) En general la región solución de una desigualdad con 2 variables de la forma y > mx + b, es el conjunto de puntos que están por encima de la gráfica y = mx + b. Ejemplifica este enunciado para encontrar gráficamente la región solución de la desigualdad y > 7x - 2.

3) El conjunto de puntos que están por debajo de la gráfica y = mx + b, ¿qué desigualdad representan?

4) Las ecuaciones de las secciones cónicas con centro en el origen son de la forma:

	Ecuación Canónica	Ecuación Explícita.
Cónica Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$
Parábola Vertical	$x^2 = ay$	$y = \frac{x^2}{a}$
Parábola Horizontal.	$y^2 = ax$	$y = \pm\sqrt{ax}$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$	$y = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}}{b^2}}$

Hipérbola. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $y = \pm\sqrt{\frac{\frac{x^2}{a^2}-1}{b^2}}$

a) La región solución para las desigualdades $y < \pm\sqrt{r^2-x^2}$ es:

b) La región solución para $y \geq \pm\sqrt{ax}$ es:

c) La región solución para $y > \pm\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}}{b^2}}$ es:

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1) Grafica la Región solución de las siguientes desigualdades:

a) $3x + y > 5$

b) $2x - 3 \geq 5x - y$

c) $4x < y$

d) $4x^2 \leq 9y$

e) $x^2 + y^2 > 25$

EJERCICIOS COLABORATIVOS:

1) Grafica la Región solución de las siguientes desigualdades:

a) $4x^2 + 16y^2 < 64$

b) $25x^2 + 16y^2 + 150x - 160y + 225 \geq 0$

c) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y < -5$

d) $y^2 - x \leq 0$

e) $2x + y \geq 10 + y$

EJERCICIOS DE RETO.

1) Grafica la Región solución de la siguiente desigualdad:

$$xy + y + 2x > 3$$

FICHA INTEGRADORA.

Encuentra el intervalo o la región solución de las siguientes desigualdades.:

1) $7(3x-1) \geq 4 + 5(2x + 1)$

2) $\frac{x-3}{4} > \frac{1-x}{4}$

3) $3x^2 + 5x - 2 < 0$

4) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

5) $2x^2 + 9x + 4 > 0$

6) $x^2 + 2x + 5 < 0$

7) $|-3x-2| \leq 5$

8) $|2x+3| > 7$

9) $|2x+3| \geq 5x$

10) $|x+5| \leq 2x-3$

11) $\left|\frac{2x-2}{4}\right| \geq 1$

12) $|2x+1| \geq 2+x$

13) $y^2 - 2y - 8x + 1 > 0$

14) $3y - 4x + 2 < 3x + y - 1$

15) $y > x^2 - 4$

AUTOEVALUACIÓN

Encuentra el intervalo o la región solución de las siguientes desigualdades:

1) $3(x-1) \leq \frac{5x-2}{8} \leq \frac{7x+9}{3}$

2) $|2x+3| \leq 5x - 2$

3) $4x^2 + 7x - 2 > 0$

4) $\frac{2x-7y}{5} \leq \frac{9x-4y}{3}$

5) $9y > x^2$