

03063

23



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE  
MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERIA  
DE LA COMPUTACION

"ANALISIS COMPUTACIONAL DE ELEMENTOS  
DINAMICOS CON LIMITE EN CAOS Y APLICACIÓN  
EN SISTEMAS DE CONTROL DE PROCESOS"

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
COMPUTACION**

P R E S E N T A:

**ING. DAVID MUÑOZ AGUILAR**

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. VALDISLAV KHARTCHENKO

MEXICO, D.F.

2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

## RECONOCIMIENTOS

Le doy gracias a Dios por haberme permitido terminar este trabajo de tesis y darle salud y vida a todos mis seres queridos.

A mis padres, por haberme dado la vida y todo el cariño que siempre me han brindado al igual que a mis hermanos.

A mi familia, especialmente a mi esposa Silvia a quien le agradezco su sensacional apoyo y amor en este tiempo de 'caos' y 'turbulencia'. Le agradezco su entendimiento, paciencia y coraje en este lapso. A Sarai y Sofia por su empuje.

Deseo expresar mi gratitud a mi tutor el Dr. Vladislav Khartchenko Kirillovich, por su supervisión ya me fue muy útil para poder concluir este trabajo, por su guía, sensibilidad, generosidad y compañerismo.

Al el Instituto Mexicano del Petróleo por el apoyo que me ha brindado para asistir a esta maestría y terminar esta tesis.

.

---

Tabla de contenido

Sección	Lista de Figuras	Página
1	Introducción	1
2	Revisión de Análisis y Control de Sistemas con Bifurcaciones	3
2.1	Introducción a las Bifurcaciones	3
2.1.1	Bifurcaciones Estacionarias	3
2.1.2	Bifurcaciones Hopf	4
2.1.3	Bifurcaciones de Doblamiento de Período	4
2.2	Matemáticas Preliminares (Teoremas de Bifurcaciones)	5
2.2.1	Teorema de la Bifurcación Estacionaria	5
2.2.2	Teorema de Bifurcación de Doblamiento de Período	6
2.3	Bifurcaciones de Doblamiento de Período Degenerado	8
2.4	Control de Bifurcaciones Hopf y Bifurcaciones estacionarias	8
2.4.1	Control Estático no Lineal	9
2.4.2	Filtros de Supresión Continuos en el Tiempo	9
2.4.3	Control no Lineal Asistido por Filtro Supresor	10
3	Mapas Escalares	12
3.1	El Algoritmo de Euler y los Mapas	12
3.1.1	Logístico y Euler	13
3.1.2	Raíces con el Método de Newton	14
3.2	La Geometría de los Mapas Escalares	15
3.2.1	Mapas Lineales	16
3.2.2	Cálculo de $\lambda, 2$	19
3.2.3	Punto Fijo no Hiperbólico I	20
3.2.4	Punto Fijo no Hiperbólico II	21
3.2.5	Puntos Fijos no Hiperbólicos	22
3.3	Bifurcaciones de Mapas Monotono	24
3.4	Bifurcación: Doblamiento de Período	28
3.4.1	Mapas con Perturbación de un Parámetro	31
3.5	El Mapa Logístico	34
4	Pseudo Caos en Diagramas de Bifurcación	44
4.1	$F(X) = (1 - X) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n X^n \right) \dots \dots \dots n = 2$	46
4.2	$F(X) = (1 - X) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n X^n \right) (-1)^{n+1} \dots \dots \dots n = 2$	48

4.3	$F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) \dots n = 3$	51
4.4	$F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 3$	53
4.5	$F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) \dots n = 4$	55
4.6	$F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 5$	57
4.7	$F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 7$	59
4.8	$F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 9$	61
4.9	$F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 11$	63
4.10	$F(X) = \beta (1-X) X$	65
4.11	$F(X) = \beta (1-X) X - R$	67
4.12	$F(X) = [\beta X(1-X)] / [1 + \beta(1-X)]$	69
4.13	$F(X) = AX_t^3 + (1-A)X_t$	71
4.14	$F(X) = \beta \sin(\pi X)$	73
4.15	$F(X) = \beta \cos(\pi X)$	75
4.16	$F(X) = (1-X)(1 - e^{-\beta X})$	77
4.17	$F(X) = Rx[1 - (X/k)^{m-1}] / (m-1)$	79
4.18	$F(X) = \lambda X - (\lambda + 1) X^3 - \mu$	81
5	Control de Bifurcaciones y Ruta al Caos en Sistemas Dinámicos	83
5.1	Control Lineal, Control no Lineal y Control de Bifurcaciones	85
5.2	Bifurcaciones Locales	87
5.2.1	Ejemplos de Baja Dimensión	87
5.3	Bifurcaciones Globales, Caos y Crisis	89
5.4	Bifurcaciones Catastróficas	89
5.5	Filtro Supresor	90
5.6	Control de la Bifurcación de Doblamiento de Período a través de Filtros Supresores	92
5.7	Sistema Hénon: El Doblamiento de Período en Ruta al Caos	93
5.7.1	Control Robusto no Lineal de la Bifurcación	94
5.7.2	Control Robusto Lineal de la Bifurcación	95
5.8	Aplicaciones en Sistemas de Control de Procesos	97
5.8.1	Diagrama de bifurcación de la linearización de una válvula de igualación de porcentaje	97
5.8.2	Diagrama de bifurcación de la ganancia del proceso	98

---

	5.8.3 Diagrama de bifurcación de la zona muerta de un proceso	99
	5.8.4 Desarrollo de programa para la visualización de bifurcaciones en sistemas	100
6	Conclusiones	103
	Anexo 1	104
	Anexo 2	117
	Bibliografía	120

---

## Lista de Figuras

Número		Página
3.1	Ecuación diferencial escalar logística $x = ax(1-x)$	13
3.2	Diagramas típicos de paso de escalón del mapa lineal $x_{n+1} = ax_n$	18
3.3	Puntos fijos asintóticamente estables de $f(x) = x/2 + 1/x$	20
3.4	El punto fijo no hiperbólico $x = 0$ de $f(x) = x + x^2$ es inestable	21
3.5	Punto fijo no hiperbólico del mapa estable de $f(x) = -x - 3x^2$ : (a) gráfica de $f'$ y (b) su segunda iteración $f^2(x) = x - 18x^3 - 27x^4$	22
3.6	Puntos fijos no hiperbólicos en el origen: (a) estable en $f(x) = x - x^3$ , (b) inestable en $f(x) = x + x^3$ , (c) inestable $f(x) = -x - x^3$ , y (d) estable en $f(x) = -x + x^3$	23
3.7	Puntos fijos hiperbólicos asintóticamente estables de $F(\lambda, x) = \lambda + 0.5x$ persisten aún si el valor de $\lambda$ es variado	26
3.8	Bifurcaciones de puntos fijos de $F(\lambda, x) = \lambda + x + x^2$ cerca del origen: (a) $\lambda = -0.1$ , (b) $\lambda = 0$ , (c) $\lambda = -0.1$	27
3.9	Bifurcaciones de $F(\lambda, x) = \lambda_1 + (1+\lambda_2)x - x^3$	28
3.10	Diagrama de bifurcación de un doblamiento de período supercrítico	29
3.11.a	Gráficas del mapa $F(\lambda, x) = -(1+\lambda)x - (3+\lambda)x^2$ cerca del origen: (a) para $\lambda < 0$ , punto fijo asintóticamente estable en el origen, (b) para $\lambda = 0$ , el origen no es hiperbólico pero aún es atrayente, (c) para $\lambda > 0$ , existe una órbita periódica asintóticamente estable de período 2 (continua)	32
3.11.b	La misma secuencia de animación que la de la página anterior pero para $F^2$ , la segunda iteración del mapa	33
3.12	Punto fijo asintóticamente estable del mapa logístico para el valor del parámetro $\lambda = 1.8$	35
3.13.a	El mapa logístico cerca de la primer bifurcación de doblamiento de período: (a) $\lambda = 2.8$ , (b) $\lambda = 3$ , y (c) $\lambda = 3.2$ (continua)	36
3.13.b	Segunda iteración del mapa logístico para los valores de $\lambda$ mostrados en la página anterior	37
3.14	Secuencia del doblamiento del período en el mapa logístico: órbitas periódicas asintóticamente estables para: (a) período 2 con $\lambda = 3.2$ , (b) período 4 con $\lambda = 3.52$ , (c) período 8 con $\lambda = 3.5567$ , y (d) período 16 con $\lambda = 3.5675$ .	39
3.15	Caos aparente, u órbita periódica con un período muy grande, en el mapa logístico para $\lambda = 3.891$	40
3.16	Diagrama de bifurcaciones del mapa logístico	41
3.17	Secuencia del doblamiento de período en el mapa logístico de órbitas de período 3 asintóticamente estables para: (a) período	42

	3 con $\lambda = 3.839$ , (b) período 6 con $\lambda = 3.8455$ , (c) período 12 con $\lambda = 3.849$	
4.1.a-f	Gráficas de la función $F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) \dots n = 2$	46-47
4.2.a-f	Gráficas de la función $F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 2$	49-50
4.3.a-f	Gráficas de la función $F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) \dots n = 3$	51-52
4.4.a-f	Gráficas de la función $F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 3$	53-54
4.5.a-f	Gráficas de la función $F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) \dots n = 4$	55-56
4.6.a-f	Gráficas de la función $F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 5$	57-58
4.7.a-f	Gráficas de la función $F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 7$	59-60
4.8.a-f	Gráficas de la función $F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 9$	61-62
4.9.a-f	Gráficas de la función $F(X) = (1-X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 11$	63-64
4.10.a-f	Gráficas de la función $F(X) = \beta (1-X) X$	66
4.11.a-e	Gráficas de la función $F(X) = \beta (1-X) X - R$	68
4.12.a-f	Gráficas de la función $F(X) = [\beta X(1-X)] / [1 + \beta(1-X)]$	69-70
4.13.a-f	Gráficas de la función $F(X) = AX_t^3 + (1-A)X_t$	71-72
4.14.a-f	Gráficas de la función $F(X) = \beta \sin(\pi X)$	73-74
4.15.a-d	Gráficas de la función $F(X) = \beta \cos(\pi X)$	75-76
4.16.a-f	Gráficas de la función $F(X) = (1-X)(1 - e^{-\beta X})$	77-78
4.17.a-f	Gráficas de la función $F(X) = Rx[1 - (X/k)^{m-1}] / (m-1)$	79-80
4.18.a-e	Gráficas de la función $F(X) = \lambda X - (\lambda + 1) X^3 - \mu$	81-82
5.1	Bifurcación de Silla de Montar (Saddle)	88
5.2	Diagrama esquemático de la función fase-parámetro de las bifurcaciones continuas y discontinuas en $\mu = \mu_0$ ; la trayectoria de P continua al superar el punto de bifurcación, mientras que la trayectoria Q es interrumpida	90
5.3	Diagrama de bifurcación del sistema Hénon de lazo abierto	94
5.4	Diagrama de bifurcación del sistema Hénon con control dinámico cúbico con $k_j = 0.9$	95

## Capítulo 1

### INTRODUCCION

En una gran variedad de aplicaciones tales como circuitos electrónicos, sistemas de potencia, sistemas mecánicos y sistemas de reacción química, una bifurcación, o cambio cualitativo en el comportamiento de un sistema, muchas veces representa un límite de rendimiento. Por ejemplo, un sistema parametrizado puede operar en algún punto de operación de estado estable para los valores del parámetro para obtener un punto de bifurcación dado, pero puede exhibir comportamiento indeseado para valores del parámetro después del punto de bifurcación. Por lo tanto, dado un sistema parametrizado el cuál exhibe bifurcaciones, uno puede desear aplicar control para extender el rendimiento del sistema.

Existen muchos trabajos que se han enfocado en el análisis de sistemas que exhiben bifurcaciones, y muchos que se han dirigido al control de las bifurcaciones del sistema. En este trabajo nos enfocamos a la bifurcación de doblamiento de período. En una bifurcación de doblamiento de período, una órbita periódica estable (o inestable) de un sistema parametrizado se convierte en inestable (estable) en algún valor crítico del parámetro cuando el parámetro es cuasi-estáticamente variado. Simultáneamente, una nueva órbita de período duplicado emerge de la órbita periódica original. Las bifurcaciones de doblamiento de período son importantes porque son observadas en estudios de simulación de sistemas reales. Esta es una reflexión del hecho de que matemáticamente, las bifurcaciones de doblamiento de período son genéricas.

Un escenario específico que motiva este estudio de la bifurcación de doblamiento de período es que el doblamiento de período es la ruta al caos. En esta bifurcación global, las bifurcaciones de doblamiento de período ocurren en una forma de cascada que se dirige al comportamiento caótico. En muchas aplicaciones, el comportamiento caótico es indeseable. Abed, Wang y Chen [1] han demostrado que, el uso de realimentación dinámica simple con filtros pasa alta referidos como filtros supresores (washout) pueden ser utilizados para suprimir el comportamiento caótico en sistema que exhiben el doblamiento de período en ruta del caos. El uso de realimentación dinámica con filtros supresores para la eliminación del caos fue considerado por Wang y Abed [2].

Este trabajo se enfoca a las bifurcaciones de doblamiento de período en sistemas discretos en el tiempo, a pesar de que muchas aplicaciones son modeladas como sistemas continuos en el tiempo. El enfoque es sobre dos aspectos el análisis y control de las bifurcaciones de doblamiento de período, al dirigirnos a controlar un sistema localmente alrededor de algún punto dado de bifurcación de doblamiento de período. Se consideran dos objetivos principales del control para sistemas bajo bifurcaciones de doblamiento de período: retrasar el punto de bifurcación, y

asegurar que la órbita de doblamiento de período que emerge sea estable y permanezca muy cerca de la órbita original.

Para producir ciertas propiedades de robustez, el uso de filtros supresores en la realimentación de control de bifurcaciones estacionarias y bifurcaciones Hopf fueron consideradas por Lee [3]. En esta tesis, se examinan las condiciones bajo las cuales se pueden producir el control aplicando realimentación que incorpore filtros supresores y que resulten en sistemas de lazo cerrado con ciertas propiedades de robustez.

Aparece un problema más específico en el análisis computacional de las bifurcaciones. Los conceptos teóricos de estabilidad, atractores de bifurcación, etc., son de carácter asintótico, esto es, ellos utilizan la noción de límite parcial o completo en el infinito. Hablando estrictamente las características asintóticas no dan garantía en la dinámica en intervalos de tiempo finitos. Una manera estándar de resolver esta contradicción, y probablemente la única, es considerar un intervalo finito lo suficientemente grande iel cuál es infinitesimal aún comparado con el infinito! Por lo tanto bajo el análisis computacional pueden ocurrir algunos efectos que no están explicados por la teoría asintótica. Uno de tales efectos, que hemos denominado pseudo caos en diagramas de bifurcación, se considera en nuestro trabajo. Este efecto aparece cuando el dato inicial esta cercano a valores extremos ( cero o la unidad en nuestra escala).

El objetivo final de la tesis es la visualización del comportamiento de varios sistemas que exhiben bifurcaciones, y su respuesta cuando el valor inicial de la variable en cuestión tiende a cero y a uno. Los sistemas considerados han sido utilizados en diferentes modelos matemáticos de transmisión de enfermedades en poblaciones biológicas.

Entre ellos la dependencia logística clásica de Robert M. May [4], y muchos otros modelos continuos de transmisión de enfermedades], incidencia introducida por F. J. Richards [5]. La función de incidencia exponencial [6] considerada por Lara-Sagahón, Khartchenko y José [7] y sus aproximaciones polinomiales. El comportamiento del pseudo caos en diagramas de bifurcación aunque no es generalizado se presenta en más del 90 % de los sistemas analizados.

En el Anexo 2 se presentan sitios de internet con temas afines a esta tesis.

## Capítulo 2

### REVISION DE ANALISIS Y CONTROL DE SISTEMAS CON BIFURCACION

En este capítulo inspeccionamos algunos trabajos previos referentes al análisis y control de bifurcaciones locales. En adición, se revisa paralelamente las matemáticas elementales que son utilizadas en el estudio de bifurcaciones al establecer teoremas, definiciones básicas, y se dan algunos ejemplos.

#### 2.1 Introducción a las Bifurcaciones

Una bifurcación es un cambio cualitativo en el comportamiento de un sistema dinámico parametrizado en algunos valores críticos del parámetro. Una bifurcación en la cual un punto de equilibrio (valor de  $x$  en donde  $\dot{x}=0$ ) pierde estabilidad cuando un parámetro es variado cuasi-estáticamente se categoriza como una bifurcación local. Ejemplos de bifurcaciones incluye la bifurcación de Hopf, la bifurcación estacionaria, la bifurcación de silla de montar (también llamada bifurcación de doblez), la bifurcación de Neimark-Sacker-Moser (también llamada bifurcación Andronov-Hopf para mapas) y la bifurcación de doblamiento de período.

##### 2.1.1 Bifurcaciones Estacionarias

Existen dos tipos de bifurcaciones estacionarias: las bifurcaciones pitchfork y las transcritical. En una bifurcación pitchfork, un punto en equilibrio estable (o inestable) de un sistema parametrizado se convierte en inestable (estable) y emergen dos nuevos puntos de equilibrio del punto original de equilibrio en cuanto el parámetro de bifurcación es variado cuasi-estáticamente hasta el punto crítico. En tal bifurcación, la estabilidad del par de puntos de equilibrio emergentes es el mismo que el de la estabilidad del punto crítico de equilibrio. Más aún, a mayor sea la estabilidad del punto crítico de equilibrio, mayor será el grado al cuál el par de puntos de equilibrio emergente permanezca cercano al punto original de equilibrio en una vecindad del punto de bifurcación. Sí el punto de equilibrio crítico y el punto de equilibrio del par emergente es estable, la bifurcación es supercrítica. Sí el punto crítico de equilibrio y el punto de equilibrio del par emergente son inestables, la bifurcación es subcrítica. El siguiente es un ejemplo de un sistema que experimenta una bifurcación pitchfork en  $\mu=0$ :

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

Localmente cerca de  $\mu=0$ , para  $\mu>0$ ,  $x = \mu$  y  $x = -\mu$  ambos son puntos de equilibrio del sistema. En este caso, ambos puntos de equilibrio son estables, y el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable para  $\mu=0$ .

En una bifurcación transcítica, un punto de equilibrio se convierte en inestable cuando intersecta a otro punto de equilibrio inestable el cual se convierte en estable, cuando el parámetro de bifurcación es variado cuasi-estáticamente a través del punto crítico. El siguiente es un ejemplo de un sistema que experimenta una bifurcación transcítica en  $\mu=0$ :

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

Localmente cerca de  $\mu=0$ ,  $x=\mu$  es un punto de equilibrio de este sistema. Para  $\mu>0$  (respectivamente  $\mu<0$ ), este punto de equilibrio es estable (respectivamente inestable). El origen es un punto de equilibrio inestable para  $\mu=0$ .

### 2.1.2 Bifurcaciones Hopf

En una bifurcación Hopf, un punto de equilibrio estable (inestable) de un sistema parametrizado se convierte en inestable (estable) cuando el parámetro de la bifurcación es variado cuasi-estáticamente y simultáneamente, emerge una órbita periódica desde este punto de equilibrio. La estabilidad de la órbita periódica emergente tiene la misma estabilidad que el punto crítico de equilibrio. Adicionalmente, a mayor sea la estabilidad del punto crítico de equilibrio, mayor será el grado al cuál la órbita periódica emergente permanecerá cercana al punto de equilibrio original en una vecindad del punto de bifurcación. Al igual que en la bifurcación estacionaria. Sí el punto de equilibrio es asintóticamente estable, entonces la bifurcación es supercrítica. Sí el punto crítico de equilibrio y la órbita periódica emergente son inestables, la bifurcación es supercrítica. El siguiente es un ejemplo de un sistema que experimenta una bifurcación Hopf en  $\mu=0$ .

$$\dot{x} = -y + x(\mu - (x^2 + y^2))$$

$$\dot{y} = x + y(\mu - (x^2 + y^2))$$

Localmente cerca del origen para  $\mu>0$ , existen órbitas periódicas.

### 2.1.3 Bifurcaciones de Doblamiento de Período

En una bifurcación, una órbita periódica estable (inestable) de un sistema parametrizado se convierte en inestable (estable) en algunos valores críticos del parámetro cuando el éste es variado cuasi-estáticamente. Simultáneamente, una órbita de período doble emerge de la órbita periódica original. Una vez más, la estabilidad de la órbita crítica es la misma que la de la órbita de doble período, y la bifurcación se denomina supercrítica sí la órbita crítica es estable, y subcrítica sí la órbita es inestable. Una bifurcación de doblamiento de período puede ocurrir tanto en sistemas continuos en el tiempo como en los discretos.

El siguiente es un ejemplo de un sistema discreto en el tiempo en donde 0 es un punto fijo que experimenta una bifurcación de doblamiento de período en  $\mu=0$ ;

$$x_{k+1} = -(\mu + 1)x_k + x_k^3$$

Localmente cerca de  $\mu=0$ , para  $\mu>0$ ,  $(\bar{\mu}, -\mu)$  es una órbita de período 2 para este sistema. En este caso, las órbitas de período 2 son estables, y el origen es asintóticamente estable para  $\mu=0$ .

## 2.2 Matemáticas Preliminares, Teoremas de Bifurcación

Se establecen dos teoremas de bifurcación

### 2.2.1. Teorema de la Bifurcación Estacionaria

El Teorema 2.2.1 da las suficientes condiciones para la existencia de una bifurcación estacionaria en un sistema continuo en el tiempo. El material del Teorema 2.2.1 se puede encontrar en Howard [8] e Iooss y Joseph[9].

**Teorema 2.2.1.** Se considera la ecuación  $f_\mu(x) = 0$  en donde  $x \in R^n$  y  $\mu$  es un parámetro real valuado. Supongase que  $f$  es derivable respecto a  $x$  y  $\mu$ . Supongase que  $x=0$  es una solución de  $f_\mu(x) = 0$  para toda  $\mu$  en alguna vecindad de 0.

Supongase que  $A_\mu = \frac{d}{dx} f_\mu(x_0(\mu))$  posee un eigenvalor simple  $\lambda(\mu)$  tal que  $\lambda(0) = 0$  y  $\lambda'(0) = \frac{d\lambda}{d\mu} |_{\mu=0} \neq 0$ . Asumiendo que los restantes eigenvalores de  $A_\mu$  tienen partes reales estrictamente negativas para  $\mu = 0$ . Se tiene:

(i) Existe un  $\varepsilon_0 > 0$ , una función  $\mu : R \rightarrow R$ ,

$$\mu(\varepsilon) = \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + \mu_3 \varepsilon^3 + \dots$$

y una función  $x : R \rightarrow R^n$ ,

$$x(\varepsilon) = x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2 + x_3 \varepsilon^3 + \dots$$

tal que para cada  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0)$ ,  $x(\varepsilon)$  es una solución no trivial para  $f_{\mu(\varepsilon)}(x) = 0$ . Además, existe  $\mu_0 > 0$  y  $r > 0$  tal que para toda  $p \in (-\mu_0, 0) \cup (0, \mu_0)$ , todas las soluciones no triviales para  $f_p(x) = 0$  tal que  $\|x\| < r$  esta contenido en la serie  $\{x(\varepsilon) | \mu(\varepsilon) = p\}$ .

(ii) Exactamente un eigenvalor  $\beta(\varepsilon)$  del Jacobiano con respecto a  $x$  de  $f_{\mu(\varepsilon)}(x)$  evaluado en  $x(\varepsilon)$  se aproxima a 0 cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , y esta dado por una función real valuada  $\beta(\varepsilon) = \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + \beta_3 \varepsilon^3 + \dots$

(iii) Los coeficientes en las partes (i) y (ii) satisfacen:

- (1)  $\beta_1 = -\lambda'(0)\mu_1$
- (2) Sí  $\beta_1 = 0$ , entonces  $\beta_2 = -2\lambda'(0)\mu_2$
- (3) Sí  $\beta_1 = 0$  y  $\beta_2 = 0$ , entonces  $\beta_3 = -6\lambda'(0)\mu_3$
- (4) Sí  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$  y  $\beta_3 = 0$ , entonces  $\beta_4 = -24\lambda'(0)\mu_4$

(iv) Sea  $m$  para todo  $1 < k < m$ ,  $\beta_k = 0$  y  $\beta_m \neq 0$ .

- (1) Sí  $m$  es impar, entonces 0 es un punto de equilibrio inestable del sistema  $\dot{x} = f_0(x)$ .
- (2) Sí  $m$  es par y  $\beta_m < 0$  (respectivamente  $\beta_m > 0$ ) entonces 0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable (respectivamente inestable) del sistema  $\dot{x} = f_0(x)$ . Esto es, la bifurcación es supercrítica (respectivamente subcrítica).

### 2.2.2. Teorema de Bifurcación de Doblamiento de Período

Se establece un teorema dando suficientes condiciones para la existencia de una bifurcación de doblamiento de período en un sistema discreto en el tiempo. Se definen los términos básicos:

**Definición 2.2.1.** Un punto de período 2 de un sistema  $x_{k+1} = f(x_k)$  es cualquier punto  $x$  que satisface  $x = f(f(x))$ .

**Definición 2.2.2.** Una órbita de período 2 de un sistema  $x_{k+1} = f(x_k)$  es cualquier par de puntos  $(x, y)$  que satisfacen  $x = f(f(x))$ ,  $y = f(f(y))$ ,  $y = f(x)$ , y  $x = f(y)$ .

**Definición 2.2.3.** Una órbita de período 1 de un sistema  $x_{k+1} = f(x_k)$  es cualquier punto  $x$  que satisface  $x = f(x)$ .

El material del Teorema 2.2.2 se puede encontrar en Peckman and Kevredikis [10] y Guckenheimer y Holmes [11].

**Teorema 2.2.2.** Supongase que se tiene un sistema discreto en el tiempo no lineal

$$x_{k+1} = f_\mu(x_k) \tag{2.1}$$

En donde  $x_k \in R^n, k \geq 0$ , y  $\mu$  es un parámetro real valuado. Supongase que el mapa  $f_\mu(x)$  es derivable con respecto a  $x$  y  $\mu$  y tiene un punto fijo  $x=0$  para toda  $\mu$  en una vecindad de 0. Supongase que  $A_\mu = D_x f_\mu(x_0(\mu))$  posee un eigenvalor simple  $\lambda(\mu)$  tal que  $\lambda(0) = -1$  y  $\lambda'(0) \neq 0$ . Asumiendo que todos los eigenvalores restantes de  $A_\mu$  tienen magnitudes que son menores a la unidad para  $\mu=0$ . Entonces:

(i) Existe un  $\varepsilon_0 > 0$ , una función  $\mu : R \rightarrow R$ ,

$$\mu(\varepsilon) = \mu_2 \varepsilon^2 + \mu_4 \varepsilon^4 + \dots$$

y una función  $x : R \rightarrow R^n$ ,

$$x(\varepsilon) = x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2 + x_3 \varepsilon^3 + \dots$$

tal que para cada  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0)$ ,  $x(\varepsilon)$  es un punto de período 2 de  $x_{k+1} = f_{\mu(\varepsilon)}(x_k)$  tal que  $x(\varepsilon) \neq 0$  (i.e.  $x(\varepsilon)$  es una solución no trivial para  $x = f_{\mu(\varepsilon)}(f_{\mu(\varepsilon)}(x))$ ). Además, existe  $\mu_0 > 0$  y  $r > 0$  tal que para toda  $p \in (-\mu_0, 0) \cup (0, \mu_0)$ , sí  $x$  es un punto de período 2 de  $x_{k+1} = f_p(x_k)$  tal que  $0 < \|x\| < r$  entonces  $x$  esta contenido en la serie  $\{x(\varepsilon) \mid \mu(\varepsilon) = p\}$ .

(ii) Exactamente un eigenvalor  $\beta(\varepsilon)$  del Jacobiano con respecto a  $x$  de  $f_{\mu(\varepsilon)}(f_{\mu(\varepsilon)}(x)) - x$  evaluado en  $x(\varepsilon)$  se aproxima a 0 cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , y esta dado por una función real valuada  $\beta(\varepsilon) = \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + \beta_3 \varepsilon^3 + \dots$

(iii) Los coeficientes en las partes (i) y (ii) satisfacen:

$$(1) \quad \beta_2 = -2\lambda'(0)\mu_2$$

$$(2) \quad \text{Sí } \beta_2 = 0, \text{ entonces } \beta_4 = -24\lambda'(0)\mu_4$$

(iv) Considerando que  $2m$  para toda  $1 < k < 2m$ ,  $\beta_k = 0$  y  $\beta_{2m} \neq 0$ . Sí  $\beta_{2m} < 0$  (respectivamente  $\beta_{2m} > 0$ ), entonces 0 es un punto de equilibrio asintoticamente estable (respectivamente inestable) del sistema  $x_{k+1} = f_0(x_k)$ . Esto es, la bifurcación de doblamiento de período es supercrítico (respectivamente subcrítico).

**Observación.** Sí  $x$  y  $y$  son los únicos puntos de período 2 de  $x_{k+1} = f(x_k)$ , entonces  $(x, y)$  es una órbita de período 2 de  $x_{k+1} = f(x_k)$ . Por lo tanto, el Teorema 2.2.5 da las condiciones para la existencia de una bifurcación la cuál resulta en una única órbita de doblamiento de período para todos los valores del parámetro en alguna vecindad pequeña del origen.

### 2.3 Bifurcaciones de Doblamiento de Período Degenerado

Asumiendo que se está dando un sistema discreto en el tiempo el cuál satisface la hipótesis del Teorema 2.2.2. Esto es, el mapa del sistema es derivable y el sistema experimenta una bifurcación de doblamiento de período. La estabilidad del punto fijo crítico de la bifurcación de doblamiento de período para tal sistema puede ser determinado desde la función que mapea la amplitud de un punto emergente de período 2 con respecto a la órbita original en las cercanías del eigenvalor crítico de la linearización del sistema acerca del especificado punto de período 2. Más específicamente, la estabilidad de la órbita emergente de período doblado está determinada por el signo del primer coeficiente no cero en la serie de expansión de Taylor de esta función. Para bifurcaciones de doblamiento de período, el término de orden impar siempre desaparece. Estos hechos son resumidos en el Teorema 2.2.2.

Para  $k \geq 1$ , los primeros  $2k$  coeficientes en la serie de expansión de Taylor desaparecen genéricamente sólo si existen múltiples parámetros en el mapa asociado con el sistema discreto en el tiempo dado. Sí, para  $k \geq 1$ , los primeros  $2k$  coeficientes en la serie de expansión de Taylor desaparecen, entonces el sistema es degenerado y el comportamiento local cualitativo del sistema es diferente que aquel de un sistema alrededor de un punto de bifurcación de doblamiento de período no degenerado. Esto es, el comportamiento local cualitativo del sistema tiene propiedades las cuales no son descritas por el Teorema 2.2.2. Específicamente, las órbitas de doblamiento de período experimentan bifurcaciones de doblez (o nodo de silla de montar) cerca del punto de la bifurcación de doblamiento de período. Este tipo de bifurcación de doblamiento de período degenerado, se refiere como una bifurcación de doblamiento de período con degeneraciones de más alto orden, se examina en detalle por Peckham y Kevrekidis [10].

### 2.4 Control de Bifurcaciones Hopf y Bifurcaciones Estacionarias

Dado un sistema que exhibe bifurcación local tal como una bifurcación estacionaria o una bifurcación Hopf, existen una variedad de objetivos de control que uno puede desear alcanzar. Para cualquier sistema en particular, sólo ciertos objetivos son alcanzables y prácticos. Un objetivo práctico es retrasar el punto de bifurcación a un valor diferente del parámetro por realimentación lineal. El retraso de una bifurcación local puede estar acompañado únicamente por una estabilización exponencial del punto crítico de equilibrio de la bifurcación, así puede ser utilizada una realimentación que incluya un componente lineal que no desaparezca.

Un objetivo alternativo, estudiado por Abed y Fu [12], [13] y Lee y Abed [14] es incrementar la estabilidad del punto crítico de equilibrio de una bifurcación local

dada mientras se preserva tanto el punto de bifurcación y el punto crítico de equilibrio. Más específicamente, si la bifurcación es subcrítica, uno puede desear aplicar realimentación para que el sistema de lazo cerrado exhiba una bifurcación supercrítica. Si la bifurcación ya es supercrítica, uno puede desear incrementar la estabilidad del punto crítico de equilibrio para que el comportamiento del sistema después de la bifurcación sea similar al comportamiento antes de la bifurcación. Por ejemplo, para un sistema que experimenta una bifurcación Hopf, uno puede desear diseñar un controlador el cuál preserve el valor crítico del parámetro y el punto crítico de equilibrio, pero esto disminuye la amplitud de las oscilaciones bifurcadas. En este caso las oscilaciones pueden servir como una indicación del límite de rendimiento del sistema. En algunos casos, puede desearse tanto retrasar el punto de bifurcación a diferentes valores del parámetro e incrementar la estabilidad del punto crítico de equilibrio.

La estabilización de sistemas críticos ha sido estudiada en los trabajos de Aeyels [15]. Mientras que este trabajo se enfoca en sistemas críticos en general, los trabajos de Abed y Fu [12] [13] y Lee[3] se han desarrollado para el control de bifurcaciones específicas.

#### 2.4.1. Control Estático no Lineal

En Abed y Fu [12] [13], realimentaciones puramente no lineales y estáticas se emplean para el control de bifurcaciones estacionarias y bifurcaciones de Hopf. Los controles realimentados examinados en estos trabajos preservan tanto el valor crítico del parámetro como el punto crítico de equilibrio de una bifurcación estacionaria o Hopf mientras se ajustan la amplitud del comportamiento bifurcado y la estabilidad del punto crítico de equilibrio. El método descrito por Iooss y Joseph [9] es utilizado para analizar la estabilidad del punto crítico de equilibrio y para encontrar las condiciones para la estabilidad. Las realimentaciones estáticas no lineales de Abed y Fu [12] [13] son no robustos ya que la aplicación de tal realimentación en un sistema nominal experimenta una bifurcación local que puede resultar en un sistema de lazo cerrado que exhiba comportamiento cercano al punto crítico nominal de equilibrio que es cualitativamente diferente al del comportamiento del sistema nominal si existe cualquier desviación en el punto crítico de equilibrio actual desde el punto crítico nominal de equilibrio o en el valor crítico actual del parámetro desde el valor crítico nominal del parámetro.

#### 2.4.2 Filtros de Supresión Continuos en el Tiempo

Para muchos problemas de control por realimentación en sistemas parametrizados que deben de operar sobre un rango de valores del parámetro, el sistema de lazo cerrado requiere tener los mismos puntos de equilibrio que el del sistema de lazo abierto. Por ejemplo, considerese el problema de diseñar un controlador para un avión para incrementar el factor de humedecimiento del rodillo holandés. El

## Capítulo 3

### MAPAS ESCALARES

Con la actual proliferación de las computadoras, las simulaciones numéricas han llegado a ser una práctica común, surgiendo nuevos descubrimientos matemáticos y nuevas áreas de aplicación. A pesar de que los esquemas de aproximaciones numéricas sean vistos como herramientas "experimentales" y sea fácil su implantación en las computadoras, siempre existe la dificultad de decidir cuál es la precisión de los cálculos. Aún en el caso de una ecuación diferencial escalar, uno se puede enfrentar con fenómenos matemáticos extraños. Esto es debido de gran manera al hecho de que las aproximaciones numéricas de una ecuación diferencial dirige a una ecuación en diferencia, y que la ecuación en diferencia, a pesar de su inocua apariencia, puede contener una sorprendente dinámica [17]. Las ecuaciones en diferencia, también llamadas *mapas*, se convierten en aproximaciones numéricas. Debido a su importancia se efectúa un estudio en dinámica y mapas de bifurcaciones. En particular se efectúan investigaciones de las clases de mapas, mapas monotonicos, los cuales juegan un papel muy importante en los estudios de ecuaciones diferenciales.

#### 3.1 El Algoritmo de Euler y los Mapas

La mayoría de las ecuaciones diferenciales no tienen soluciones de "forma cerrada". Para obtener soluciones aproximadas, especialmente en aplicaciones, uno debe recurrir a los métodos numéricos. Un problema con valor inicial para una ecuación diferencial es resuelta en una computadora como sigue, se toma una serie discreta de puntos  $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ . Por simplicidad se requiere que la distancia  $h \equiv t_{n+1} - t_n$  entre dos puntos consecutivos, que se denomina tamaño del paso que sea constante. Después, se calculan los valores aproximados de la solución  $x(t)$  en esos puntos igualmente espaciados. Ahora, dado  $\dot{x} = f(x)$  y  $x(t_0)$ , la tarea es encontrar un algoritmo para aproximar a  $x(t_1)$ . Entonces, conocido  $x(t_1)$ , determinamos  $x(t_2)$  y así continuamos con el mismo algoritmo. Denotando el valor aproximado de  $x(t_n)$  por  $x_n$ .

El algoritmo más simple de este tipo es el atribuido a Euler, al tomar  $t_n = nh$  y reemplazar  $\dot{x}(t)$  con el cociente de la diferencia  $(x_{n+1} - x_n)/h$ . Entonces la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  se convierte en la ecuación en diferencia

$$x_{n+1} = x_n + h f(x_n)$$

Dado  $x_0$ , todos los demás valores aproximados  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  pueden ser calculados en sucesión utilizando esta formula. Esta secuencia de números se considera la solución de la ecuación en diferencia con el valor inicial  $x_0$ .

### 3.1.1 Logístico y Euler

Ilustrando el procedimiento con la ecuación logística:

$$\dot{x} = ax(1-x) \tag{3.2}$$

En donde  $a$  es un parámetro positivo. Esta ecuación diferencial representa un modelo simple para la densidad de una población que crece casi exponencialmente para una pequeña densidad inicial y se satura en  $x = 1$ . El parámetro  $a$  refleja la velocidad de crecimiento intrínseca. En la Figura 3.1 se dibuja el flujo de la Ecuación (3.2) en la región  $0 \leq x \leq 1$ , la cuál es la región significativa en el modelo.

Robert M. May [4], [18] ha efectuado un intenso estudio sobre el comportamiento de las ecuaciones en diferencia de primer orden, y encontró que estas poseen espectros extremadamente ricos, desde puntos estables hasta cascadas de ciclos estables hasta llegar a un régimen en el cuál el comportamiento (que es altamente determinístico) es en muchos aspectos "caótico" o indistinguible. Su trabajo se basa principalmente en el análisis de la ecuación para el crecimiento logístico, presentando tablas de comparación de comportamiento de diferentes ecuaciones

Efectuando una aproximación a la ecuación logística (3.2) con el algoritmo de Euler (3.1) y estableciendo  $b \equiv ha$  se obtiene la siguiente ecuación en diferencia:

$$x_{n+1} = bx_n \left( \frac{1+b}{b} - x_n \right) \tag{3.3}$$

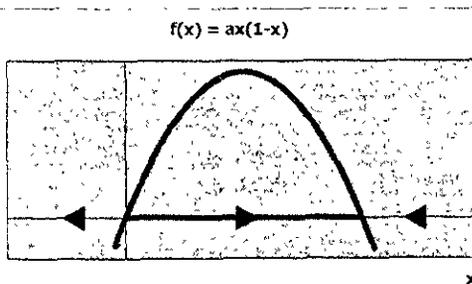


Figura 3.1. Ecuación diferencial escalar logística  $x = ax(1-x)$ .

Dado un valor inicial  $x_0$ , es fácil calcular la solución  $x_0, x_1, x_2, \dots$  de la Ecuación (3.3) en la computadora. Así que ejecutando varios experimentos numéricos, se tiene

que, si  $b$  es muy pequeño, esto es,  $h$  es relativamente muy pequeño con respecto a  $a$ , entonces, para cualquier valor inicial en el intervalo  $(0,1)$ , la solución de la ecuación (3.3) converge monótonicamente a 1 cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Por ejemplo, la solución de la ecuación (3.3) con  $b = 0.3$  y  $x_0 = 0.567$ . Este es exactamente el mismo comportamiento cualitativo que se exhibe por la órbita de la ecuación diferencial (3.2).

Las dificultades comienzan a suceder cuando  $b > 1$ . Puesto que  $b = ha$ , sucede, por ejemplo, para  $a = 1000.0$  y  $h = 0.002$  numéricamente,  $h=0.002$  parece ser un tamaño de paso pequeño, pero esta sobrecompensado por el valor de  $a$  en la ecuación diferencial. Por esta razón, la solución de la ecuación en diferencia (3.3) con  $b = 1.3$  y  $x_0 = 0.567$  tiene un poco de parecido a la órbita correspondiente de la ecuación diferencial (3.2). Además la solución de la ecuación en diferencia converge a 1 cuando  $n \rightarrow +\infty$ , es no monótonica y abandona el intervalo  $[0,1]$ . Como experimento numérico final, se considera la solución de la Ecuación (3.3) con  $b = 2.8$  y  $x_0 = 0.567$ . En este caso, aún no es claro que la solución aproximada converja a 1 cuando  $n \rightarrow +\infty$ .

La dinámica de la ecuación en diferencia (3.3) es sorprendentemente complicada. De hecho, una variante de esta ecuación en diferencia, la cuál se ajusta naturalmente en la biología cuando se modela el crecimiento de una población, ha sido en gran medida la responsable del reciente auge de las actividades en esta área. A continuación se desarrollará el papel de las ecuaciones en diferencia en las matemáticas numéricas con un ejemplo para el cálculo de ceros en una función por el Método de Newton.

### 3.1.2 Raíces con Método de Newton

Los ceros de una función pueden ser encontrados como las series límite  $\alpha$ - o  $\omega$ - de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$ , y este proceso puede ser implantado en la computadora utilizando un procedimiento de aproximación tal como el algoritmo de Euler. Desafortunadamente este método no siempre es rápido, y más aún no se puede generalizar a funciones de vector valuadas.

Existen otros métodos, por ejemplo el Método de Newton, diseñado específicamente para resolver  $f(x)=0$  la cual supera las dificultades mencionadas anteriormente. Dada una función  $f$ , se considera la ecuación escalar diferencial:

$$\dot{x} = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Si se aproxima esta ecuación diferencial utilizando el algoritmo de Euler con tamaño de paso  $h = 1$ , entonces resulta la ecuación en diferencia:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.4)$$

Que es el método de Newton. Por ejemplo considerando la función  $f(x)=x^2-2$ , la cual contiene dos ceros en  $\pm \sqrt{2}$ . Para esta función, la ecuación en diferencia llega a ser:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \quad (3.5)$$

Sí se comienza con un valor inicial, por ejemplo,  $x_0=3$ , entonces la solución de la ecuación en diferencia converge a  $\sqrt{2}$ :

3.00000, 1.83333, 1.46212, 1.41499, 1.414231, .....

De hecho, cualquier solución con un valor inicial de  $x_0 > 0$  converge a  $\sqrt{2}$  y con  $x_0 < 0$  converge a  $-\sqrt{2}$ . Para esta función en particular, una aproximación de Euler con un tamaño de paso más grande se obtiene el resultado esperado.

Para explorar la excitante dinámica de las ecuaciones en diferencia, se seguirá con una serie de conceptos y teoremas.

### 3.2 La Geometría de los Mapas Escalares

Dada una función  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  y un valor inicial  $x_0$ , se considera la secuencia de iteraciones de  $x_0$  bajo la función  $f$ :

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

En la secuencia, se utiliza la notación  $f^n$  para denotar la  $n$ -ésima composición de una función  $f$  consigo misma, e.g.,  $f^2(x_0) = f(f(x_0))$ . La iteración de  $x_0$  bajo  $f$  puede ser escrita como la solución de la ecuación en diferencia de primer orden:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (3.6)$$

En ciertas publicaciones se refieren a las ecuaciones en diferencia como un mapa de  $f$ .

**Definición 3.3.** Una órbita positiva de  $x_0$  es la serie de puntos  $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$ , y esta denotada por  $\gamma^+(x_0)$ .

Es importante observar que una órbita positiva de la Ecuación (3.6) es una serie de puntos discretos, no un intervalo. De hecho, esta es la principal razón de la gran riqueza dinámica de las ecuaciones en diferencia, aún en una sola dimensión.

**Definición 3.4.** El punto  $\bar{x}$  se denomina el punto fijo para  $f$  si  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Se debe de notar que los puntos fijos de  $f$  permanecen fijos bajo las iteraciones del mapa. Sin embargo, en el cálculo de los puntos fijos, se debe de determinar los ceros de la función  $f(x) - x$ , y no de  $f(x)$ . Esta observación es muy importante en el estudio de bifurcaciones de mapas.

Existe un método geométrico denominado diagramas de paso de escalón (Stair Step Diagrams) para seguir las soluciones de una ecuación en diferencia de una dimensión. Primero se debe graficar la función  $f$  al igual que una línea diagonal a  $45^\circ$ . Puesto que  $x_{n+1} = f(x_n)$ , el eje horizontal es  $x_n$  y el eje vertical como  $x_{n+1}$ . La línea vertical desde  $x_0$  interseca la gráfica  $f$  en  $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$ . La línea horizontal desde este punto interseca la diagonal en  $(x_1, x_1)$ . La línea vertical desde este punto interseca el eje horizontal en  $x_1$ , al repetir los mismos pasos se puede obtener  $x_2, x_3$ , etc. También es importante observar que los puntos fijos de la Ecuación (3.6) corresponden a los puntos de intersección de la gráfica  $f$  con la línea diagonal.

### 3.2.1 Mapas Lineales.

Considerandose la ecuación lineal en diferencia

$$x_{n+1} = ax_n \tag{3.7}$$

donde  $a$  es un parámetro real. Es fácil observar que la órbita positiva de un valor inicial  $x_0$  es la serie de puntos  $x_n = a^n x_0$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Los diagramas de paso de escalón para los valores del parámetro de  $a = 2.0, a = 0.5, a = -0.5$ , y  $a = -2.0$  se muestran en la Figura 3.2. Cuando  $a > 0$ , la órbita positiva es monotonícamente incrementada o decrementada sobre uno de los lados. Sin embargo, cuando  $a < 0$  una órbita alternativamente salta de uno a otro lado del origen y no es monotonica.

Después de haber establecido cuales son los puntos fijos se debe de efectuar un análisis de sus propiedades de estabilidad.

**Definición 3.6.** Un punto fijo  $\bar{x}$  de  $f$  se dice que es estable sí, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\delta > 0$  tal que, para cada  $x_0$  para la cuál  $|x_0 - \bar{x}| > \delta$ , la iteración

de  $x_0$  satisface que  $|f^n(x_0) - \bar{x}| < \varepsilon$  para toda  $n \geq 0$ . Se dice que el punto fijo  $\bar{x}$  es inestable si no es estable.

**Definición 3.7.** Un punto fijo  $\bar{x}$  de  $f$  se dice que es asintóticamente estable sí es estable y, en adición existe una  $r > 0$  tal que  $f^n(x_0) \rightarrow \bar{x}$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  para toda  $x_0$  que satisface  $|x_0 - \bar{x}| < r$ .

Bajo ciertas condiciones, el tipo de estabilidad del punto fijo  $x$  de un mapa  $f(x)$  es el mismo que el tipo de estabilidad de un punto fijo en el origen del mapa lineal  $f'(x)x$ . Es evidente que del diagrama de paso de escalón del mapa lineal en la Figura 3.2 que el punto fijo en el origen es asintóticamente estable sí  $|a| < 1$ , e inestable sí  $|a| > 1$ . Por lo tanto esto sugiere el siguiente teorema de linealización de un punto fijo.

**Teorema 3.8.** Considerando  $f$  un mapa  $C^1$ . Un punto fijo  $x$  de  $f$  es asintóticamente estable sí  $|f'(x)| < 1$ , y es inestable sí  $|f'(x)| > 1$ .

Prueba. Por conveniencia primero se traslada el punto  $(\bar{x}, x) = (x, f(x))$  al origen  $(0,0)$ . Considerando a  $u$  como una nueva variable definida por  $u \equiv x - \bar{x}$ . Entonces el mapa  $f$  en las nuevas coordenadas se convierte en

$$g(u) \equiv f(\bar{x} + u) - f(\bar{x})$$

De aquí,  $g(0) = 0$  y estudiando la estabilidad del punto fijo  $\bar{x}$  de  $f$  es equivalente a estudiar la estabilidad del punto fijo cero de  $g$ . También,  $g'(u) = f'(\bar{x} + u)$ . Ahora, si se fija  $\varepsilon > 0$  y se define:

$$m_\varepsilon \equiv \min_{|s| \leq \varepsilon} |f'(\bar{x} + s)|, \quad M_\varepsilon \equiv \max_{|s| \leq \varepsilon} |f'(\bar{x} + s)|$$

Puesto que  $g(u) = \int_0^u f'(\bar{x} + s) ds$ , sí  $|u| \leq \varepsilon$  entonces

$$m_\varepsilon |u| \leq |g(u)| \leq M_\varepsilon |u|$$

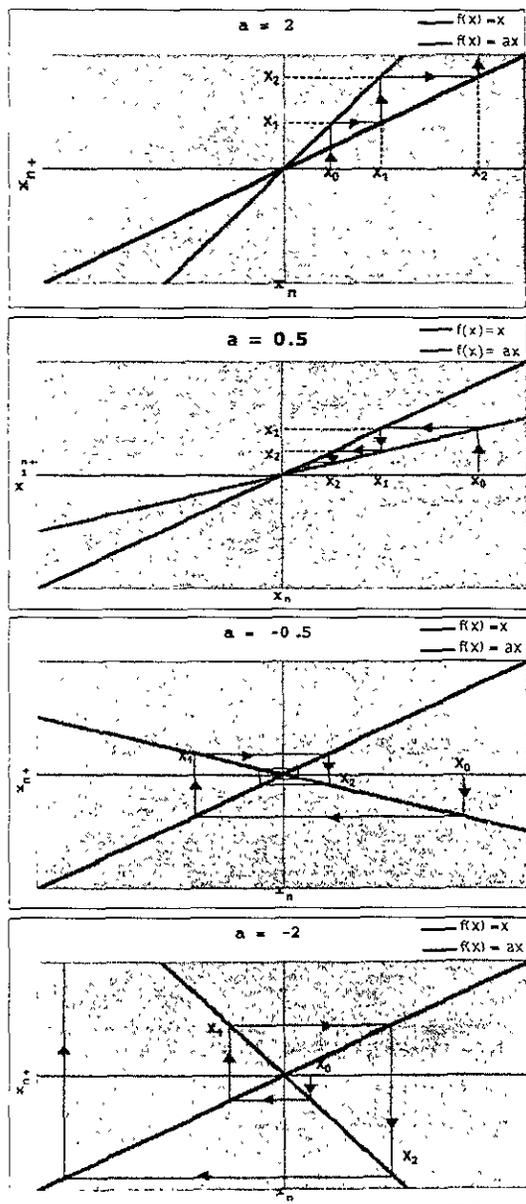


Figura 3.2. Diagramas típicos de paso de escalón del mapa lineal  $x_{n+1} = ax_n$ .

Por lo tanto, aplicando repetidamente la regla de la cadena, se tiene:

$$m_c^n |u| \leq |g^n(u)| \leq M_c^n |u| \text{ para } n \geq 0.$$

Esto muestra, que al tomar  $\delta = \varepsilon$  en la Definición 3.6, que el punto fijo cero de  $g$  es estable. También, puesto que  $M_c < 1, M_c^n \rightarrow +0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Entonces  $g^n(u) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  y así el punto fijo es asintóticamente estable.

Para probar la segunda parte del teorema se observa que, si  $|f'(x)| > 1$ , entonces existen  $\varepsilon_0 > 0$  y  $\delta_0 > 0$  tal que  $m_{\varepsilon_0} > 1 + \delta_0$ . Si  $u \neq 0$  y  $|u| \leq \varepsilon_0$ . Entonces se tiene:

$$|g^n(u)| \geq m_{\varepsilon_0}^n |u| \geq (1 + \delta_0)^n |u|,$$

Tan pronto como  $|g^n(u)| \leq \varepsilon_0$ . Esta desigualdad muestra que debe existir un valor de  $n$ , por decir  $\hat{n}$ , tal que  $|g^{\hat{n}}(u)| \geq \varepsilon_0$ . Puesto que  $u$  puede ser tomado arbitrariamente cercano a cero, esto implica que el punto fijo cero  $g$  es inestable.

### 3.2.2 Calculo de $\hat{2}$ .

Regresando al calculo de la  $\hat{2}$  con Newton en la sección anterior. La solución de la ecuación en diferencia (3.5) es equivalente a iterar el mapa

$$f = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

Se muestra en la Figura 3.3 la gráfica de este mapa y el diagrama de paso de escalón de dos de sus órbitas positivas, una con  $x_0 < 0$  y la otra con  $x_0 > 0$ . Se observa que existen dos puntos fijos en  $x = \pm 2$ . Puesto que  $|f'(x)| = 0 < 1$ , se confirma lo indicado en el Teorema 3.8 que ambos puntos fijos son asintóticamente estables.

La siguiente notación es aplicable a puntos fijos de mapas diferenciables a los que el Teorema 3.8 es aplicable.

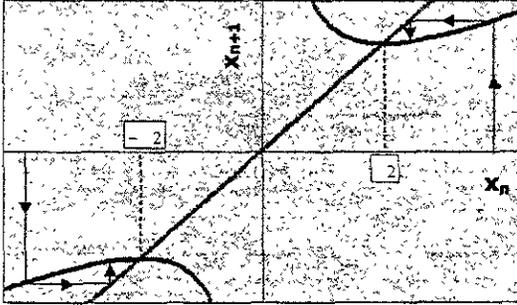


Figura 3.3. Puntos fijos asintóticamente estables de  $f(x) = x/2 + 1/x$ .

**Definición 3.10.** Un punto fijo  $x$  de  $f$  se dice que es hiperbólico si  $|f'(x)| \neq 1$ .

Del Teorema 3.8, si un punto fijo  $x$  de  $f$  es hiperbólico, entonces debe de ser ya sea asintóticamente estable o inestable y el tipo de estabilidad debe de estar determinado por  $f'(x)$ . Sin embargo, se debe enfatizar que el comportamiento de las órbitas cercanas a un punto fijo  $x$  es completamente diferente dependiendo de si  $f'(x) > 0$  o  $f'(x) < 0$ . De hecho, como se evidencia del mapa lineal (3.6), si  $f'(x) > 0$ , entonces en la vecindad de  $x$ , las órbitas positivas permanecen en un solo lado de  $x$ . Si  $f'(x) < 0$ , entonces las órbitas positivas se mueven alrededor de  $x$ .

El tipo de estabilidad de un punto fijo no hiperbólico no puede ser determinado de la primera derivada del mapa.

### 3.2.3 Punto fijo no hiperbólico I

Se considera el mapa cuadrático:

$$f(x) = x + x^2 \tag{3.8}$$

El punto  $x = 0$  es un punto fijo no hiperbólico de este mapa con  $f'(x) = 1$ . Como se puede notar en la Figura 3.4, el punto fijo es inestable debido a que atrae desde la izquierda, pero repele desde la derecha. Este comportamiento es evidente en el mapa completo, no sólo en su término lineal. El término no lineal  $x^2$  siempre es positivo, por lo que cerca del origen, las iteraciones subsecuentes de  $x_0$  se incrementan.

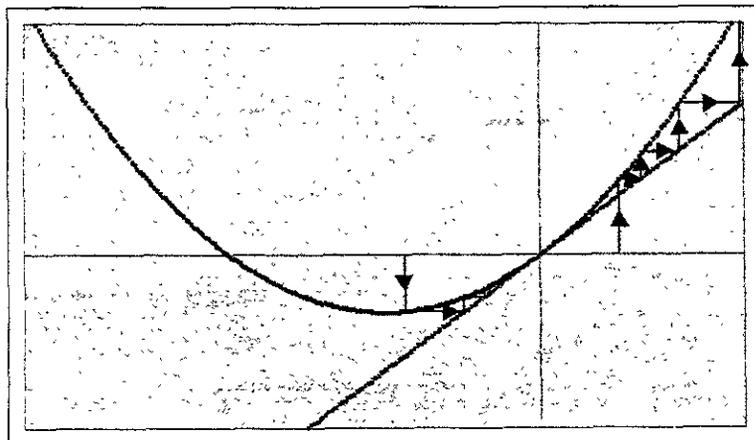


Figura 3.4. El punto fijo no hiperbólico  $x = 0$  de  $f(x) = x - x^2$  es inestable.

### 3.2.4 Punto fijo no hiperbólico II

Se considera el mapa cuadrático:

$$f(x) = -x + 3x^2 \quad (3.9)$$

El punto fijo en  $x = 0$  es no hiperbólico con  $f'(0) = -1$ . Como se observa en la Figura 3.5a, el origen es un punto fijo estable. Se observa que las iteraciones se mueven alternativamente a un lado y a otro del punto fijo. Por lo tanto, para definir el efecto del término no lineal, se debe de considerar una segunda iteración de los puntos del mapa  $f^2(x) = x - 18x^3 - 27x^4$ , ver Figura 3.5b. Con esto es claro que, para pequeñas  $x_0$  las subsecuentes convergen al origen.

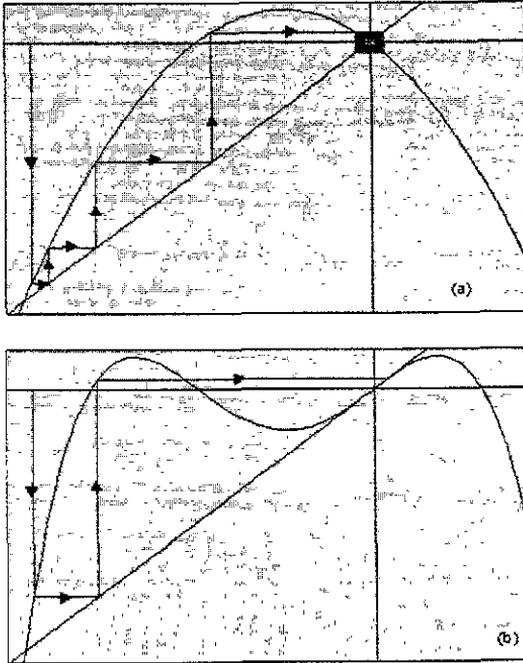


Figura 3.5. Punto fijo no hiperbólico del mapa estable de  $f(x) = -x - 3x^2$  : (a) gráfica de  $f$ , y (b) su segunda iteración  $f^2(x) = x - 18x^3 - 27x^4$ .

### 3.2.5 Puntos fijos no hiperbólicos

Se consideran los mapas cúbicos:

$$f(x) = x - x^3 \tag{3.10}$$

$$f(x) = x + x^3 \tag{3.11}$$

El punto  $x = 0$  es un punto fijo no hiperbólico en estos mapas ya que  $f'(0) = 1$ . Es estable en la Ec. (3.10), pero inestable en la Ec. (3.11), ver la Figura 3.6. Ahora sí se consideran otros dos mapas cúbicos:

$$f(x) = -x - x^3 \tag{3.12}$$

$$f(x) = -x + x^3 \tag{3.13}$$

Una vez más el punto  $x = 0$  es un punto fijo no hiperbólico de estos mapas, pero con  $f'(x) = -1$ . El origen es inestable en la Ec. (3.12) y estable en la Ec. (3.13), ver Figura 3.6. Para descubrir los efectos de los términos no lineales de estos dos mapas, se debe de considerar su segunda iteración  $f^2$ .

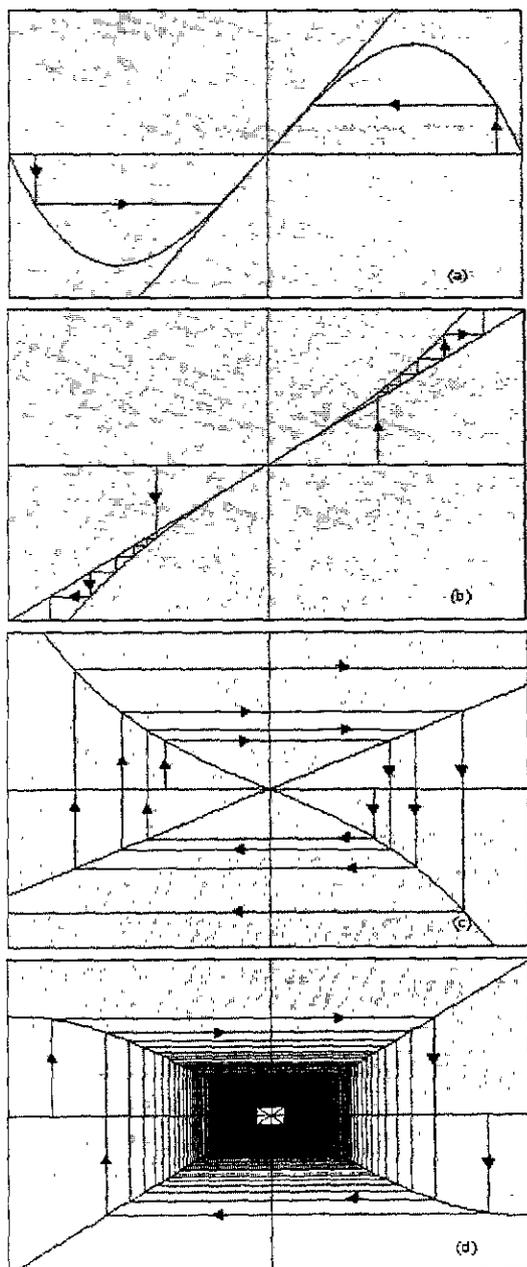


Figura 3.6. Puntos fijos no hiperbólicos en el origen: (a) estable en  $f(x) = x - x^3$ ,  
 (b) inestable en  $f(x) = x + x^3$ , (c) inestable  $f(x) = -x - x^3$ , y (d) estable en  
 $f(x) = -x + x^3$ .

### 3.3 BIFURCACIONES DE MAPAS MONOTONO

Una restringida clase de mapas juegan un papel central en ciertos aspectos de las ecuaciones diferenciales, estos son llamados mapas monotono.

Una órbita positiva  $\gamma^+ = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  de  $f$ , en donde  $x_{n+1} = f(x_n)$  para  $n \geq 0$ , se dice que es monotono no decreciente sí la secuencia  $\{x_n\}$  es no decreciente, esto es  $x_{n+1} \geq x_n$  para cada  $n$  entero positivo. De la misma manera,  $\gamma^-(x_0)$  se dice que es monotono no creciente sí  $x_{n+1} \leq x_n$  para cada  $n$  entero positivo. Combinando estas dos nociones, se dice simplemente que  $\gamma^-(x_0)$  es monotono sí es monotono no decreciente o monotono no creciente. Finalmente, se llama mapa monotono a  $f$  sí para cada órbita positiva  $\gamma^+(x_0)$  de  $f$  existe una secuencia monotono.

**Lema 3.14.** Si  $f$  es una función  $C^1$  con  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en el dominio de la definición de  $f$ , entonces  $f$  es un mapa monotono, esto es, la órbita positiva  $\gamma^-(x_0)$  de cualquier valor inicial  $x^0$  es una secuencia monotono.

**Prueba.** Por el teorema del valor medio, se tiene:

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

para alguna  $\xi_n$ . Por lo tanto,  $x_{n+1} - x_n$ , para cualquier entero positivo  $n$ , tiene el mismo signo que el de  $x_1 - x_0$ .

Para el propósito de dinámica, se requiere que  $f$  sea al menos  $C^1$  con una derivada positiva, y al referirse a tal  $f$  simplemente como un *mapa monotono*. Sí  $f$  es monotono, entonces  $f^{-1}$ , la inversa de  $f$ , existe.

**Definición 3.15.** Sí  $f$  es monotono, entonces la órbita negativa de  $x_0$  es la serie de puntos  $x_0, f^{-1}(x_0), f^{-2}(x_0), \dots$ , y esta denotada por  $\gamma^-(x_0)$ . La órbita  $\gamma$  de  $x_0$  se define  $\gamma(x_0) \equiv \gamma^+(x_0) \cup \gamma^-(x_0)$ .

La geometría de órbitas de un mapa monotono es muy similar a las de una ecuación diferencial escalar: el punto fijo actúa como equilibrio, y se pueden utilizar flechas para indicar la dirección de otras órbitas bajo una iteración continua.

Por simplicidad de notación, se asume que el mapa  $f$  tiene un punto fijo  $x=0$ ; sino, se pueden cambiar las coordenadas para hacerlo así. Lo que es más, suponiendo que  $f'(0) > 0$  así que  $f$  es monotono en una venedad lo suficientemente pequeña al origen. Considerando el mapa perturbado  $F(\lambda, x)$  dependiente de  $k$  parámetros  $\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ :

$$F: \mathfrak{R}^k \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}; (\lambda, x) \rightarrow F(\lambda, x) \text{ con } F(0, x) = f(x)$$

Sí  $F(\lambda, x)$  es una función  $C^1$ , por lo tanto  $F(\lambda, x)$  es también monotono en  $x$  para cada pequeño valor de  $\lambda$ . Ahora, para cada  $\lambda$  fija, la observación clave es que el análisis de puntos fijos de  $F(\lambda, x)$  es equivalente al análisis de ceros de la función

$$F(\lambda, x) = x$$

Para el análisis de las bifurcaciones de los ceros de una función existen varios tipos de hipótesis sobre los términos lineal, cuadrático y cúbico, siendo estos los siguientes para bifurcaciones de puntos fijos de mapas monotono.

**Caso I: Puntos Fijos Hiperbólicos.** Suponiendo que  $f$  es un monotono, mapa  $C^1$  con  $f(0)$  y  $f'(0) \neq 1$ . Considerando un mapa  $C^1$   $F(\lambda, x)$  que satisface:

$$F(\mathbf{0}, x) = f(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{0}, 0) = f'(0) \neq 1$$

Entonces, para  $||\lambda||$  suficientemente pequeña, el mapa perturbado  $F$  tiene un punto fijo único cerca del cero cuyo tipo de estabilidad es el mismo que la estabilidad del punto fijo cero del mapa  $f$  sin perturbación.

**Mapa Lineal con un Parámetro.** Considerando el mapa lineal  $f(x) = 0.5x$  y su perturbación de un parámetro dado por:

$$F(\lambda, x) = \lambda + 0.5x$$

Para cada valor del parámetro  $\lambda$ , existe un punto fijo hiperbólico único cuyo tipo de estabilidad es el mismo que el del punto fijo  $\lambda = 0$ . Ver la Figura 3.7 para el diagrama de paso de escalón del mapa perturbado  $F$  para diversos valores del parámetro  $\lambda$ .

**Caso II: Puntos Fijos con Degeneración Cuadrático.** Suponiendo que  $f$  es un monotono, mapa  $C^2$  con  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ , pero  $f''(0) \neq 1$ . Considerando un mapa  $C^2$   $F(\lambda, x)$  que satisface:

$$F(\mathbf{0}, x) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{0}, 0) = 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{0}, 0) = f''(0) \neq 0$$

Entonces existe una función  $\alpha(\lambda)$ , que satisface  $\alpha(\mathbf{0}) = 0$ , la cual corresponde al valor extremo de la función  $F(\lambda, x) - x$  tal que:

$$\alpha(\lambda) f''(0) < 0 \Rightarrow \text{dos puntos fijos de } F,$$

$$\alpha(\lambda) f''(0) = 0 \Rightarrow \text{un punto fijo de } F,$$

$$\alpha(\lambda) f''(0) > 0 \Rightarrow \text{ningún punto fijo de } F,$$

para valores lo suficientemente pequeños de  $\lambda$ .

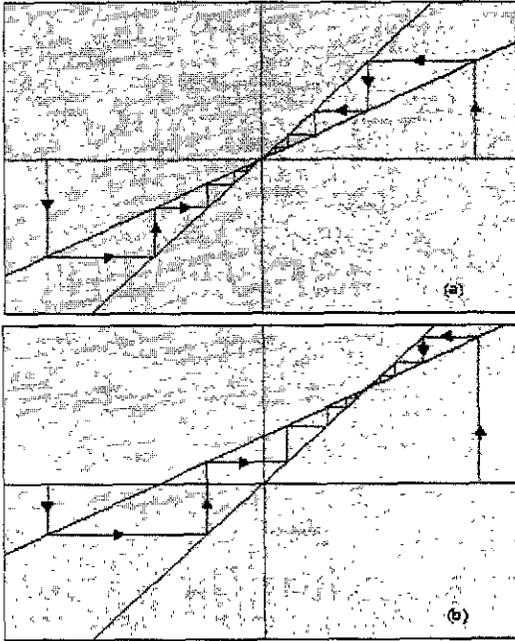


Figura 3.7. Puntos fijos hiperbólicos asintóticamente estables de  $F(\lambda, x) = \lambda + 0.5x$  persisten aún si el valor de  $\lambda$  es variado.

**Mapa Cuadrático con un Parámetro.** Considerando el mapa lineal  $f(x) = x + x^2$  en una vecindad lo suficientemente pequeña del cero para que sea monótono. La bifurcación local de la perturbación con un parámetro de  $f$  esta dada por:

$$F(\lambda, x) = \lambda + x + x^2$$

Se ilustra en la Figura 3.8. En este caso, se tiene que  $\alpha(\lambda) = \lambda$  y  $f'(0) = 2$ . Por lo tanto, cuando  $\lambda < 0$ , existen dos puntos fijos; en  $\lambda = 0$ , existe un punto fijo; para  $\lambda > 0$ , no existen puntos fijos para  $F(\lambda, x)$ .

**Caso III: Puntos Fijos con Degeneración Cúbica.** Suponiendo que  $f$  es un monótono, mapa  $C^3$  con  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$ , pero  $f'''(0) \neq 0$ . Es difícil un análisis completo de bifurcaciones de una perturbación arbitraria  $C^3$  en  $F(\lambda, x)$  de  $f$ .

**Mapa Cúbico con Dos Parámetros.** Considerando el mapa  $f(x) = x - x^3$  en una pequeña vecindad del origen para que  $f$  sea monótono. Para los dos parámetros,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ , la perturbación de  $f$  dada por:

$$F(\lambda, x) = \lambda_1 - (1 + \lambda_2)x - x^3$$

Existe una cúspide en el plano  $(\lambda_1, \lambda_2)$  tal que:

- Existen tres puntos fijos de  $F(\lambda, x)$  para los valores de  $(\lambda_1, \lambda_2)$  dentro de la cúspide.
- Existe un punto fijo de  $F(\lambda, x)$  para los valores de  $(\lambda_1, \lambda_2)$  fuera de la cúspide.
- Existen dos puntos fijos de  $F(\lambda, x)$  para los valores de  $(\lambda_1, \lambda_2)$  sobre la cúspide sí  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ , y un punto fijo sí  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$ .

Las posibles bifurcaciones locales de los puntos fijos de  $F$  listados arriba se ilustran en la Figura 3.9. Aún si  $f$  es no monotono, sus puntos hiperbólicos fijos persisten bajo pequeñas perturbaciones.

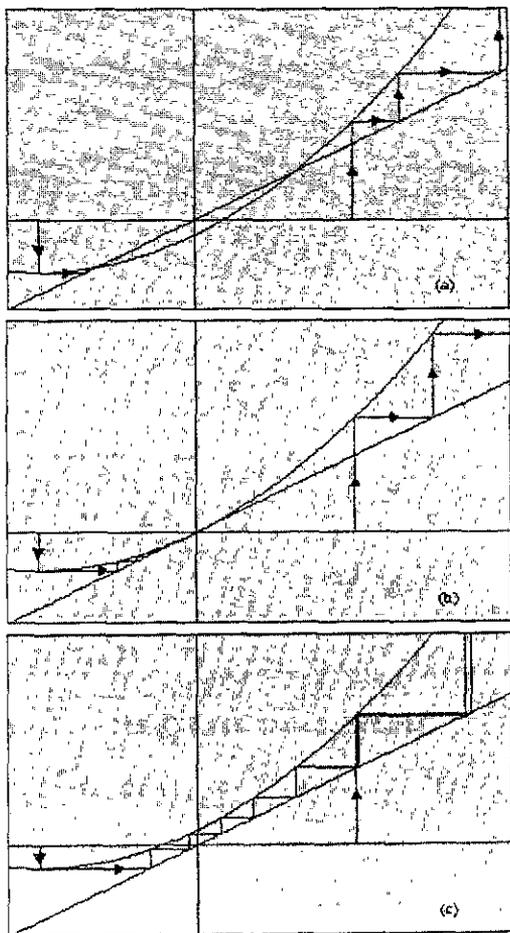


Figura 3.8. Bifurcaciones de puntos fijos de  $F(\lambda, x) = \lambda + x + x^2$  cerca del origen: (a)  $\lambda = -0.1$ , (b)  $\lambda = 0$ , (c)  $\lambda = -0.1$ .

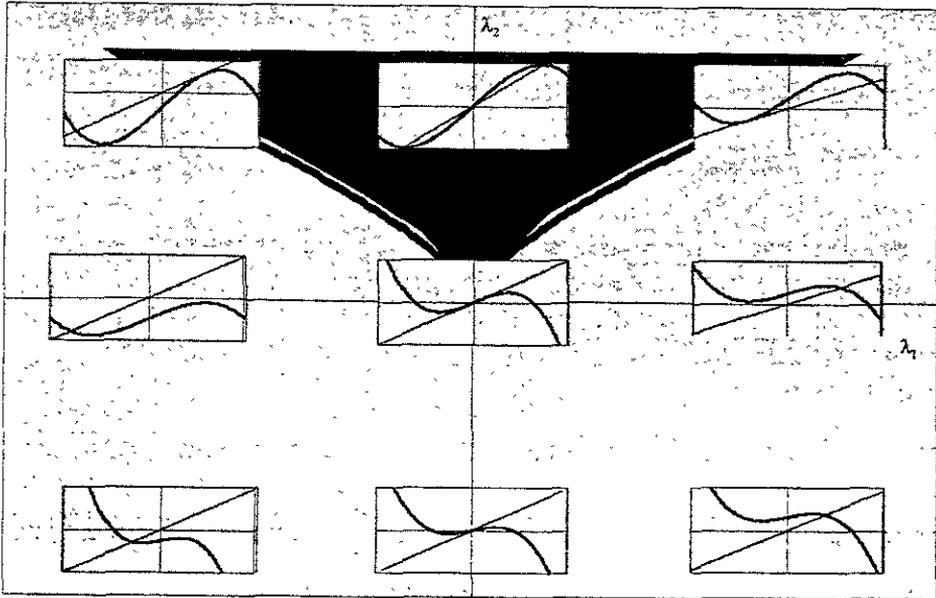


Figura 3.9. Bifurcaciones de  $F(\lambda, x) = \lambda_1 + (1 + \lambda_2)x - x^3$ .

### 3.4. Bifurcación: Doblamiento del Periodo

En esta sección investigaremos una importante bifurcación en la que un punto no hiperbólico fijo  $x$  tiene  $f'(x) = -1$  para experimentar cuando  $f$  es sujeta a perturbaciones.

Cuando  $f'(x) < 0$ , el mapa  $f$  no es monotono y conmuta entre un punto cercano a  $x$  y otro del lado contrario de  $x$ . Si el punto fijo llega a ser inestable, una órbita no se puede aproximar a  $x$ . Sin embargo, si la iteración permanece limitada, es admisible que las iteraciones impares converjan a un punto límite, por decir  $x^*$  y que las iteraciones pares converjan a  $f(x^*)$ . Si este es el caso, entonces  $f^2(x^*) = x^*$  con  $f(x^*) \neq x^*$ , esto es  $x^*$  es el punto periódico de periodo 2. Esta bifurcación es llamada doblamiento de periodo o bifurcación conmutante. Un diagrama de bifurcación típico de esta importante bifurcación se muestra en la Figura 3.10. A pesar de su semejanza, este diagrama no debe de ser confundido con la bifurcación de pitchfork de los puntos de equilibrio.

Se inicia la exploración de la bifurcación de doblamiento de periodo al definir el concepto de un punto periódico general.

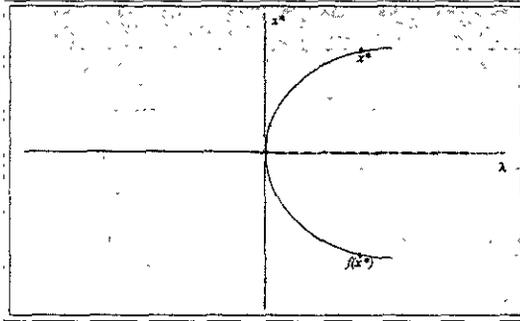


Figura 3.10. Diagrama de bifurcación de un doblamiento de período supercrítico.

**Definición 3.19.** Un punto  $x^*$  es llamado un punto periódico de periodo mínimo  $n$  si  $f^n(x^*) = x^*$  y  $n$  es el menor de tales enteros positivos. La serie de todas las iteraciones de un punto periódico es llamado órbita periódica.

Un punto periódico  $x^*$  de periodo mínimo  $n$  es un punto fijo del mapa  $f^n(x)$ . Por lo tanto, la noción de estabilidad de  $x^*$  sigue a la de un punto fijo y la de linealización resultante en el Teorema 3.8 puede ser aplicada a  $f^n$  para determinar el tipo de estabilidad de  $x^*$ .

**Definición 3.20.** Un punto periódico  $x^*$  de periodo mínimo  $n$  se dice que es estable, asintóticamente estable o inestable si  $x^*$  es, respectivamente un punto fijo estable, asintóticamente estable o inestable de  $f^n$ .

Ahora se establece que las observaciones intuitivas sobre la probabilidad de la bifurcación de doblamiento de periodo de hecho ocurre para perturbaciones típicas de un punto fijo no hiperbólico con  $f'(x) = -1$ .

**Teorema 3.21.** Si  $f(x)$  es una función  $C^3$  con un punto fijo en el origen que satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $f(0) = 0, f'(0) = -1$ ;
- (ii)  $[f^2(0)]'' \neq 0$ .

Considerando una perturbación de un parámetro  $F(\lambda, x)$  de  $f(x)$  con:

- (iii)  $F(0, x) = f(x), F(\lambda, 0) = 0$ ;
- (iv)  $\frac{\partial F(\lambda, 0)}{\partial x} = -(1 + \lambda)$ .

Entonces existe en una vecindad de  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , en la cuál para cada valor de  $\lambda$  con  $\lambda [f^2(0)]'' < 0$ , allí existe una órbita periódica única  $\{x_i, F(\lambda, x_i)\}$  de periodo

mínimo 2 de la función perturbada  $F(\lambda, x)$ ; para valores de  $\lambda$  con  $\lambda [f^2(0)]' > 0$ , no existe órbita periódica de periodo mínimo de 2. Lo que es más, la órbita de periodo 2 es asintóticamente estable [respectivamente, inestable] si el origen es un punto fijo inestable [respectivamente, asintóticamente estable] en este valor de  $\lambda$ .

Prueba. Los puntos periódicos de periodo 2 del mapa  $F(\lambda, x)$  corresponden a los puntos fijos de  $F^2(\lambda, x) = F(\lambda, F(\lambda, x))$ , que es equivalente a los ceros de  $F^2(\lambda, x) - x$ . Sin embargo, debido a la condición (iii), el punto fijo  $x = 0$  es un cero de esta ecuación pero su periodo mínimo es 1. Por lo tanto, para evitar este punto y localizar únicamente los puntos periódicos de periodo mínimo 2, se necesita analizar los ceros de la función:

$$x [F^2(\lambda, x) - x].$$

Para acompañar esto, se comienza por determinar los primeros términos de la expansión de Taylor. Utilizaremos la notación "prima" para denotar la derivada con respecto a  $x$  y calcular algunas derivadas:

$$[F^2(\lambda, x)] = F'(\lambda, F(\lambda, x))F'(\lambda, x).$$

$$[F^2(\lambda, x)] = F'(\lambda, F(\lambda, x))[F'(\lambda, x)]^2 + F'(\lambda, F(\lambda, x))F''(\lambda, x)$$

En particular, en el origen se tiene:

$$[F^2(0,0)] = [f^2(0)] = 1, \quad [F^2(0,0)]' = [f^2(0)]' = 0,$$

De estas fórmulas se sigue que la expansión de Taylor de  $F^2(\lambda, x)$  cerca del origen esta dada por:

$$F^2(\lambda, x) = (1 + \lambda)^2 x + \frac{a(\lambda)}{2} x^2 + \frac{b(\lambda)}{6} x^3 + \dots,$$

En donde las funciones  $a(\lambda)$  y  $b(\lambda)$  satisfacen que:

$$a(0) = 0, \quad b(0) = [f^2(0)]'$$

Por lo tanto la expansión de Taylor buscada es:

$$x [F^2(\lambda, x) - x] = \lambda(2 + \lambda)x + \frac{a(\lambda)}{2} x^2 + \frac{b(\lambda)}{6} x^3 + \dots \tag{3.14}$$

De hecho, si  $\lambda[f^2(0)]' > 0$ , entonces no existen ceros en la Ec. (3.14). Si  $\lambda[f^2(0)]' < 0$ , entonces existen dos ceros en la Ec. (3.14) los cuales corresponden a una órbita sencilla de periodo 2,  $\{x_\lambda^*, F(\lambda, x_\lambda^*)\}$ .

En el caso de  $\lambda[f^2(0)]' < 0$ , para determinar el tipo de estabilidad de la órbita de periodo 2, se considera la función cubica  $F^2(\lambda, x) - x$  y sus tres ceros simples, en una vecindad al origen, dada por  $0, x_\lambda^*$ , y  $F(\lambda, x_\lambda^*)$ . Si la pendiente  $(1+\lambda)^2$  de  $F^2(\lambda, x)$  en  $x=0$  es menor que uno ( $\lambda < 0$  y 0 es estable), entonces la pendiente de  $F^2(\lambda, x) - x$  en  $x_\lambda^*$  y  $F(\lambda, x_\lambda^*)$  debe ser más grande que uno y entonces la órbita de periodo 2 es inestable. De la misma manera, si  $(1+\lambda)^2 > 1$ , esto es,  $\lambda > 0$  y 0 es inestable, entonces la órbita de periodo 2 es estable.

### 3.4.1 Mapas con perturbación de un parámetro.

Considerando la perturbación de un parámetro para las siguientes funciones se tiene:

$$f(x) = -x - 3x^2, \quad F(\lambda, x) = -(1+\lambda)x - (3+\lambda)x^2$$

Puesto que  $f^2(x) = x - 18x^3 - 27x^4$ , se tiene que  $[f^2(0)]' = -108 \neq 0$ . Es fácil verificar que todas las demás condiciones indicadas en el Teorema 3.21, también se satisfacen. Así que, para cada pequeño valor positivo de  $\lambda$ , existe una órbita periódica única de periodo mínimo 2 la cuál es asintóticamente estable; ver Figuras 3.10 y 3.11.

Resumiendo se tiene:

1. Por simplicidad de notación, se asume que  $x = 0$ .
2. Siempre se satisface que la tercera derivada no puede ser reemplazada por una condición sobre la segunda derivada porque  $[f^2(0)]' \neq 0$ .
3. No existe pérdida de generalidad al asumir  $F(\lambda, 0) = 0$ . De hecho, si tomamos  $G(\lambda, x) = F(\lambda, x) - x$ , entonces  $G(0, 0) = 0$  y  $\partial G(0, 0) / \partial x = -2$ . Así que el Teorema de la Función Implícita sugiere que existe una función única  $\psi(\lambda)$ , con  $\psi(0) = 0$ , en la vecindad de  $(\lambda, x) = (0, 0)$  tal que  $G(\lambda, \psi(\lambda)) = 0$ , esto es, existe un punto fijo único de  $F(\lambda, x)$ . Si usamos  $x \rightarrow \psi(\lambda) + x$ , obtenemos  $F(\lambda, 0) = 0$ .
4. La hipótesis (iv) dice que 0 es asintóticamente estable para  $\lambda < 0$  pero inestable para  $\lambda > 0$ , el tipo de estabilidad cambia.
5. El teorema puede ser utilizado para establecer bifurcaciones de doblamiento de periodo de puntos periódicos de cualquier periodo, no sólo para puntos fijos, al considerar un apropiado mapa a iterar. Sin embargo, si el periodo es grande, el cálculo de las derivadas puede ser difícil.

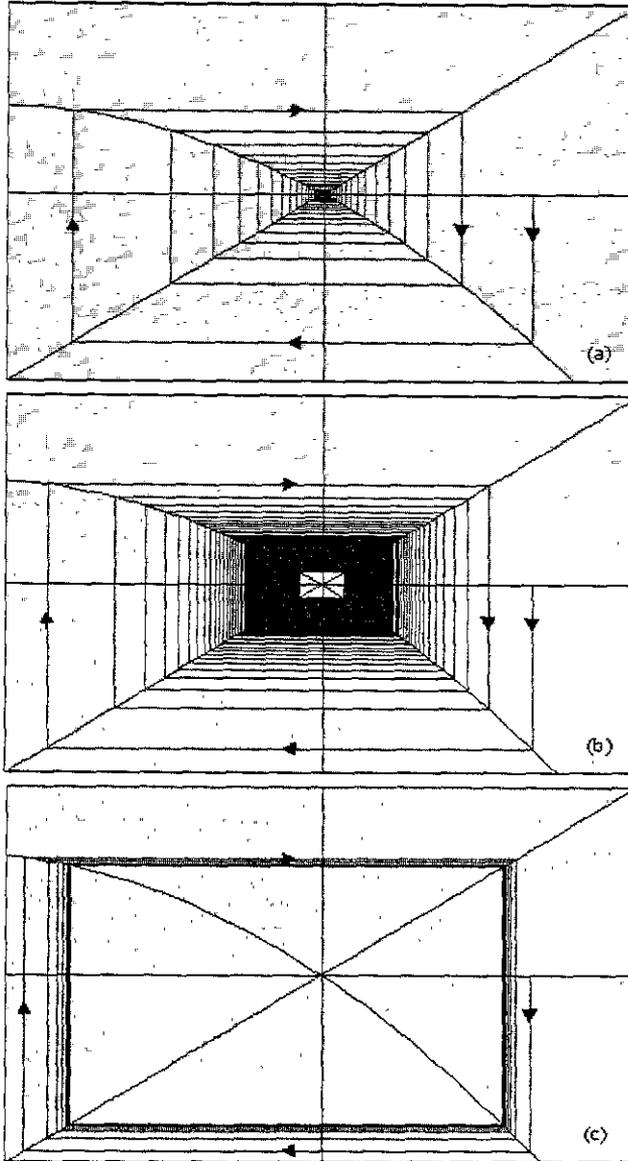


Figura 3.11.a Gráficas del mapa  $F(\lambda, x) = -(1+\lambda)x - (3+\lambda)x^2$  cerca del origen: (a) para  $\lambda < 0$ , punto fijo asintóticamente estable en el origen, (b) para  $\lambda = 0$ , el origen no es hiperbólico pero aún es atrayente, (c) para  $\lambda > 0$ , existe una órbita periódica asintóticamente estable de período 2.

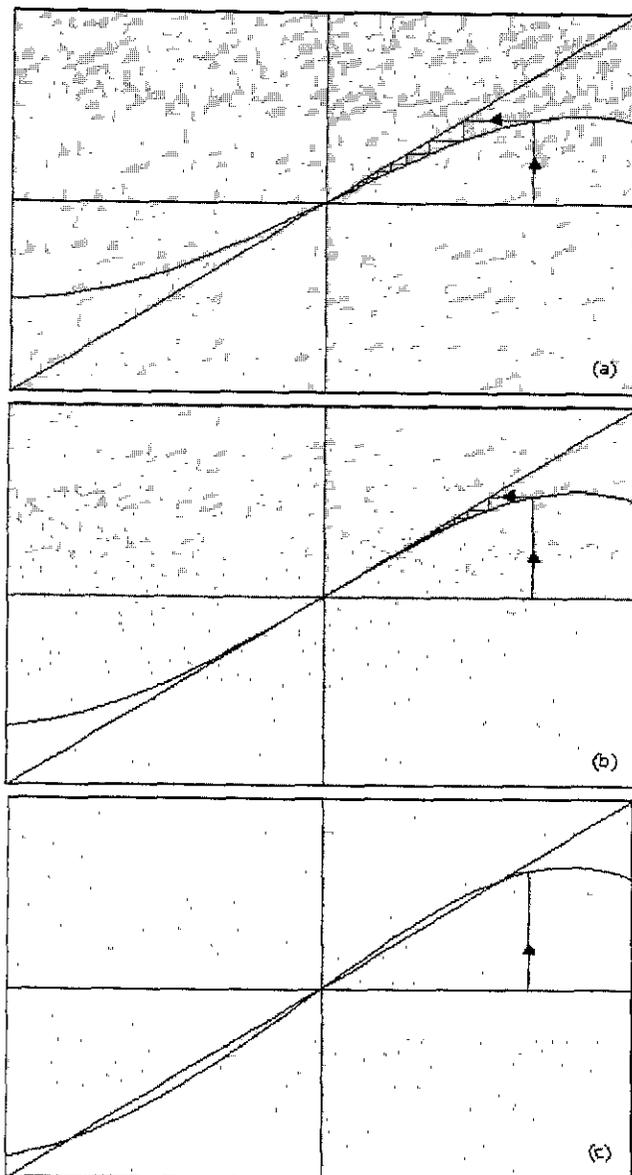


Figura 3.11.b. La misma secuencia de animación que la de la página anterior pero para  $F^{\sim}$ , la segunda iteración del mapa.

### 3.5. El Mapa Logístico

Reconsiderando la ecuación en diferencia:

$$x_{n+1} = bx_n \left( \frac{1+b}{b} - x_n \right)$$

Sí escalamos  $x_n$  y  $x_{n+1}$  por  $(1+b)/b$ , esto es, utilizamos el cambio de variable  $x_n \rightarrow [(1+b)/b]x_n$  y  $x_{n+1} \rightarrow [(1+b)/b]x_{n+1}$ , entonces la ecuación se convierte en:

$$x_{n+1} = (1-x_n)(1+b)x_n$$

Sí hacemos  $(1+b) \equiv \lambda$ , entonces la ecuación en diferencia (3.3) es equivalente a la iteración del siguiente mapa con un parámetro:

$$f(\lambda, x) = \lambda x(1-x), \lambda > 1. \quad (3.15)$$

Este es conocido como el *mapa logístico* del cuál ya se ha hablado en el capítulo I, y que ha sido sujeto de un estudio recientemente. A pesar de su inocua apariencia, el mapa logístico muestra muchos fenómenos importantes encontrados en los sistemas dinámicos [19]. En esta sección tocaremos algunas de sus propiedades.

El inicio del estudio se dirige a encontrar los puntos fijos: existen dos puntos fijos, 0 y  $x_\lambda \equiv 1-1/\lambda$ . Puesto que se asume que  $\lambda > 1$ , el último punto fijo siempre cae en el intervalo (0,1). Para referencia, se denota que:

$$f'(\lambda, 0) = \lambda, f'(\lambda, x_\lambda) = 2 - \lambda. \quad (3.16)$$

Cuando  $1 < \lambda < 4$ , el siguiente lema demuestra la interesante dinámica que ocurre para las condiciones iniciales en el intervalo (0,1) en el mapa logístico. Por supuesto,  $f(\lambda, 0) = f(\lambda, 1) = 0$ .

Lema 3.23. Considerando el mapa logístico (3.15):

- (i) Supongase que  $\lambda > 1$ . Sí  $x_0 < 0$  o  $x_0 > 1$ , entonces  $f^n(\lambda, x_0) \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ .
- (ii) Supongase que  $1 < \lambda < 4$ . Sí  $x_0 \in (0,1)$ , entonces  $f^n(\lambda, x_0) \in (0,1)$  para cualquier entero positivo  $n$ .

**Prueba.** (i) Sí  $x_0 < 0$ , entonces  $f(\lambda, x_0) < x_0$ . Por lo tanto,  $f^n(\lambda, x_0)$  es una secuencia decreciente. Esta secuencia no puede converger debido a que  $f$  no tiene puntos fijos negativos. Sí  $x_0 > 1$ , entonces  $f(\lambda, x_0) < x_0$ ; por el mismo argumento.  
 (ii) El valor máximo de  $f(\lambda, x)$  es menor que 1.

A continuación se investigará la dinámica del mapa logístico (3.15) para diferentes valores del parámetro  $\lambda$ .

$1 < \lambda < 3$ : Del Teorema 3.8 y de la Ec. (3.16) se obtiene que el punto fijo cero es inestable y el otro punto  $x_\lambda = 1 - 1/\lambda$  es asintoticamente estable.

Podemos hablar más de la estabilidad de  $x_\lambda$ . De hecho, sí  $0 < x_0 < 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\lambda, x_0) = x_\lambda$ , esto es,  $x_\lambda$  es globalmente atrayente. Sin embargo, la manera en la cuál la solución se aproxima a  $x_\lambda$  depende del valor de  $\lambda$ . Para observar esto, primero suponemos que  $0 < x_0 \leq 0.5$ . Entonces  $|f(\lambda, x_0) - x_\lambda| < |x_0 - x_\lambda|$ , sí  $x_0 \neq x_\lambda$  y  $f'(\lambda, x) > 0$ . Entonces,  $f^n(\lambda, x_0) \rightarrow x_\lambda$  monotonicamente cuando  $n \rightarrow +\infty$ . El caso cuando  $0.5 < x_0 \leq 1$  sigue el mismo argumento al observarse que la primer iteración  $f(\lambda, x_0)$  cae en el intervalo  $(0, 0.5)$ . De la misma manera es evidente de la Ec. (3.16) cuando  $1 < \lambda < 2$ , que después de la primer iteración, la solución se aproxime a  $x_\lambda$  monotonicamente; ver Figura 3.12.

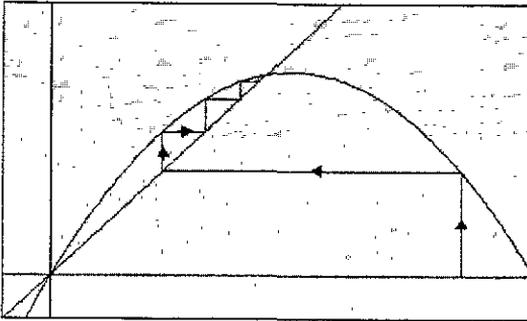


Figura 3.12 Punto fijo asintoticamente estable del mapa logístico para el valor del parámetro  $\lambda = 1.8$ .

Sí  $1 < \lambda < 2$ , entonces  $x_\lambda$  es globalmente atrayente pero la aproximación no es monotonica (esto es esperado por la linealización); ver Figura 3.13.

$\lambda = 3$ : El punto fijo cero es inestable, pero el tipo de estabilidad de  $x_\lambda$  no puede ser determinado por el Teorema 3.8 debido a que  $f'(x_\lambda) = -1$  (se puede demostrar que  $x_\lambda$  aún es globalmente atrayente). Esto sugiere que  $\lambda = 3$  es un valor de bifurcación.

$3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$ : En este caso, los puntos fijos cero y  $x_\lambda$  son inestables, la iteración  $f^n(x_0)$  no puede aproximarse a ninguno de los puntos fijos. Sin embargo, ellos permanecen en el intervalo  $(0, 1)$ . Es admisible que cuando  $\lambda$  se incrementa hasta 3, el punto fijo  $x_\lambda$  experimente una bifurcación de doblamiento de periodo dando alcance a una órbita periódica asintoticamente estable de un periodo mínimo de 2; ver Figura 3.13.

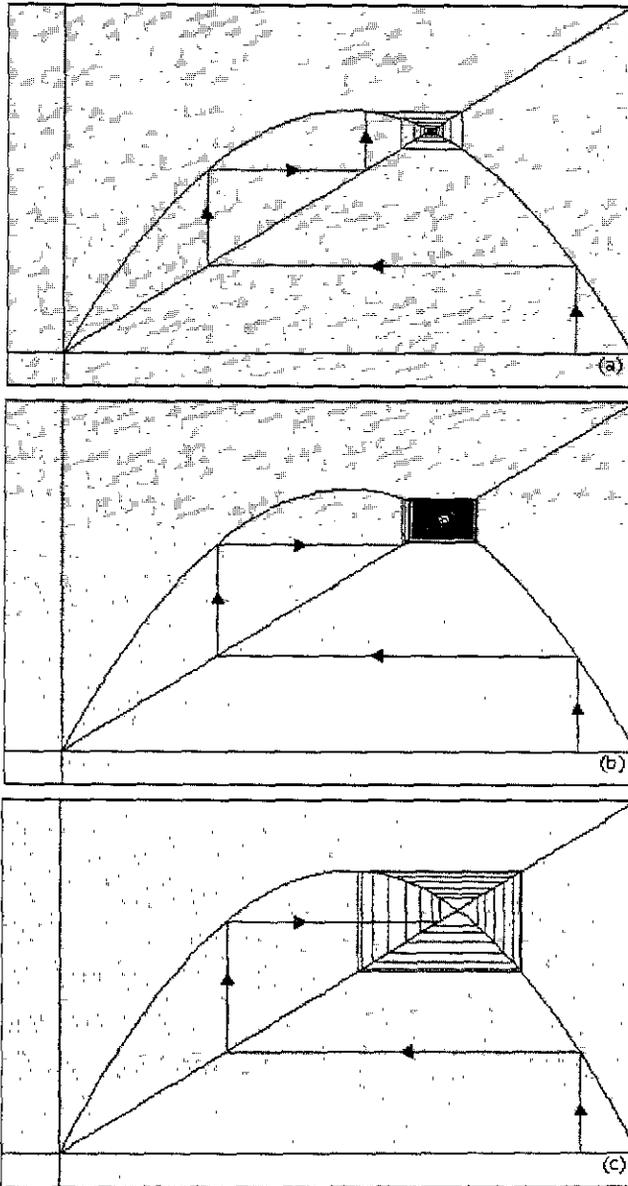


Figura 3.13.a. El mapa logístico cerca de la primer bifurcación de doblamiento de período: (a)  $\lambda = 2.8$ , (b)  $\lambda = 3$ , y (c)  $\lambda = 3.2$ .

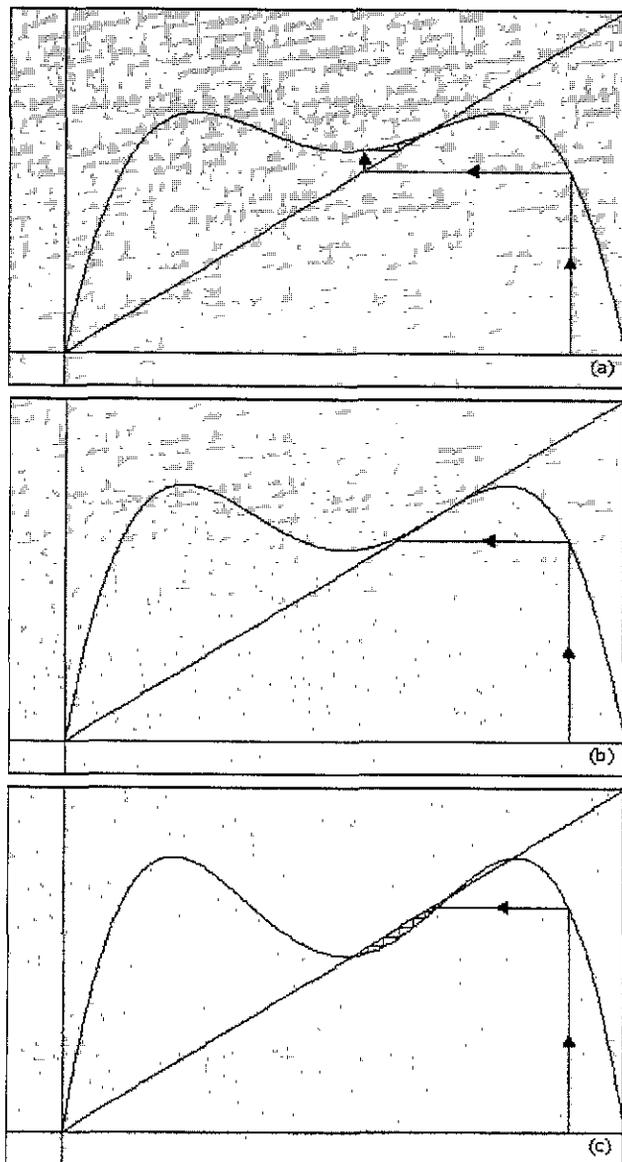


Figura 3.13.b. Segunda iteración del mapa logístico para los valores de  $\lambda$  mostrados en la página anterior.

De hecho este es el caso. La existencia y la estabilidad asintótica de tal órbita periódica puede establecerse al analizar los ceros de la función  $f^2(\lambda, x) - x$ . Con el hecho de que  $x=0$  y  $x=x_\lambda$  son las raíces de  $f^2(\lambda, x) - x$ , se demuestra que la órbita periódica de periodo 2 está localizado en las raíces de la ecuación  $\lambda^2 x^2 - \lambda(\lambda+1)x + \lambda + 1 = 0$ . Para  $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$  esta órbita de periodo 2 es asintóticamente estable. También puede ser demostrado que es globalmente atrayente, excepto para condiciones iniciales muy contadas las cuales tienden a los puntos fijos  $x_\lambda$  después de un número finito de iteraciones.

Por supuesto se debe, poder concluir la presencia de la bifurcación de doblamiento de periodo del Teorema 3.21. Sin embargo, para aplicar este teorema en el mapa logístico, se necesitan trasladar los puntos fijos  $x_\lambda$  al origen, y trasladar también el valor de bifurcación  $\lambda=3$  a cero. Para que en este final, introducir la nueva variable  $y$  y el parámetro  $\mu$ , definidos por:

$$x = 1 - \frac{1}{\lambda} + y, \quad \lambda = 3 + \mu$$

Por lo tanto el mapa logístico se transforma en:

$$f(\mu, y) = -(1 + \mu)y - (3 + \mu)y^2.$$

**3.449 <  $\lambda$  < 3.570:** La apariencia de la órbita de periodo dos cuando  $\lambda$  se incrementa hasta 3 es sólo el inicio de una fascinante secuencia de bifurcaciones que dirigen a la muy complicada dinámica. Por ejemplo, en  $\lambda=3.449$  (aproximadamente) la órbita de periodo dos pierde su estabilidad y da alcance a una órbita de periodo cuatro asintóticamente estable, como se ve en la Figura 3.14. De hecho, existe un incremento del valor del parámetro en la secuencia  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$  en el cuál repetidamente el mapa logístico experimenta una bifurcación de doblamiento de periodo: como  $\lambda$  es incrementada hasta  $\lambda_k$  la órbita periódica asintóticamente estable de periodo  $2^k$  llega a ser inestable y una órbita periódica estable del doble del periodo bifurca desde la órbita del periodo menor; ver Figura 3.14. los primeros valores aproximados en los que se presenta la bifurcación son:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3.449, \lambda_3 = 3.544, \lambda_4 = 3.564, \dots$$

Esta secuencia converge a un número  $\lambda_\infty$  cuando  $k \rightarrow +\infty$  es 3.5699456 (aproximadamente). Más aún, la proporción de la distancia de los valores de los parámetros entre bifurcaciones sucesivas de doblamiento de periodo se aproxima a una constante:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = 4.6692... \quad (3.17)$$

Debido a la naturaleza geométrica de esta secuencia, no es fácil la experimentación en computadora para localizar los valores de las bifurcaciones. Sin embargo, utilizando la Ec. (3.17), esto se convierte en trivial. De hecho es un memorable descubrimiento de Feigenbaum de que los números de encima parecen ser los mismos para una gran clase de mapas, no sólo para el logístico.

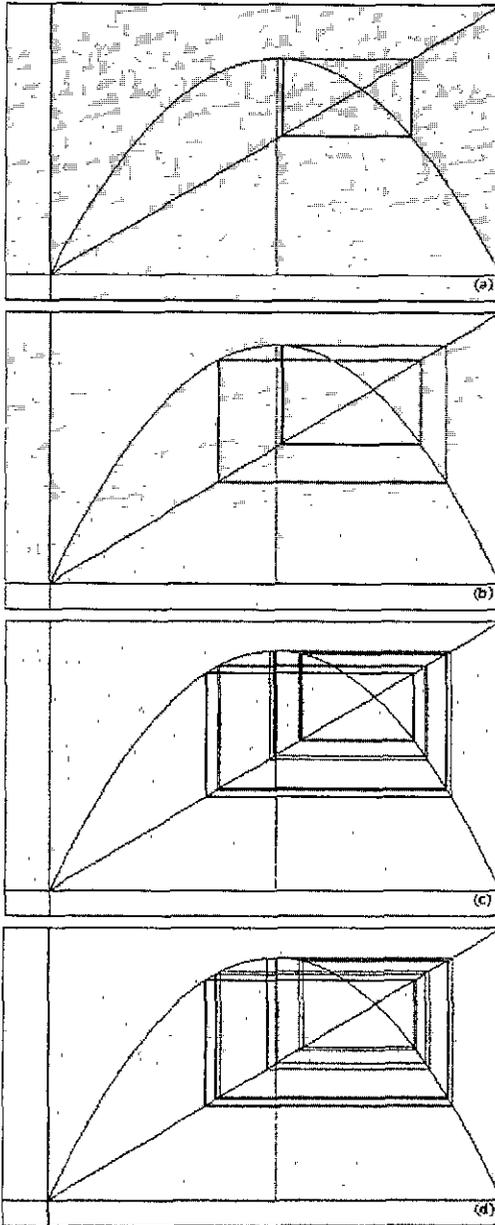


Figura 3.14. Secuencia del doblamiento del período en el mapa logístico: órbitas periódicas asintóticamente estables para: (a) período 2 con  $\lambda = 3.2$ , (b) período 4 con  $\lambda = 3.52$ , (c) período 8 con  $\lambda = 3.5567$ , y (d) período 16 con  $\lambda = 3.5675$ .

$\lambda > 3.570$ : En este rango del parámetro dinámico del mapa logístico se empieza a comportar de manera complicada. Para algunos valores de  $\lambda$ , la iteración se mueve de manera muy errática, con un comportamiento denominado *caos*: ver Figura 3.15. De hecho, mucho antes que la dinámica del mapa logístico fuera descifrada, los analistas numéricos la utilizaban para generar números aleatorios. Para otros valores de  $\lambda$ , existen puntos periódicos los cuales experimentan secuencias de bifurcaciones de doblamiento de periodo cuando se varia el parámetro. Toda esta dinámica se encapsula en el diagrama de bifurcaciones mostrado en la Figura 3.16.

En el estudio de los fenómenos no lineales, un problema que inevitablemente siempre se encuentra es la bifurcación. El cuál existe universalmente en la naturaleza. La teoría de la bifurcación, como uno de los principales contenidos de las ciencias no lineales, se ha desarrollado rápidamente en las 3 últimas décadas. Los problemas de bifurcaciones son estudiados de diferentes formas y se han utilizado diferentes definiciones, Zhou y Wu definen cuales son los puntos de bifurcación en sistemas no lineales [20].

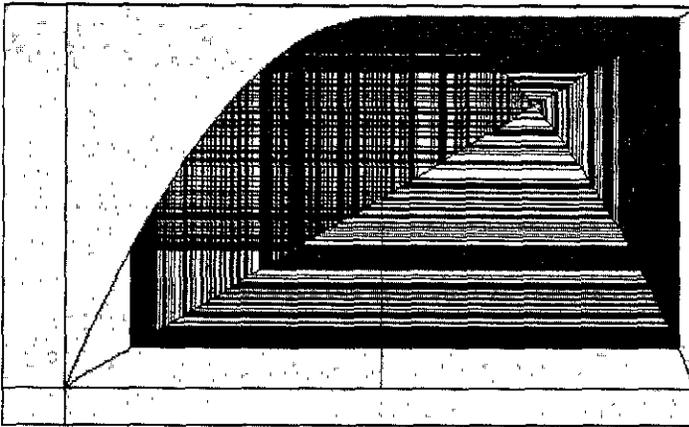


Figura 3.15. Caos aparente, u órbita periódica con un período muy grande, en el mapa logístico para  $\lambda = 3.891$ .

$\lambda = 3.839$  Existe una órbita única periódica asintóticamente estable de periodo mínimo 3. Esta órbita es fácilmente localizable en el diagrama de bifurcaciones, y cuenta con los siguientes valores:

$$x^* = 0.149888, f(x^*) = 0.489172, f^2(x^*) = 0.959299, f^3(x^*) = 0.149888$$

Sin embargo, existen más zonas dinámicas en el mapa logístico en 3.839 que lo que es realmente visible en la computadora, como un teorema de inicio esta el de Sharkovskii [21].

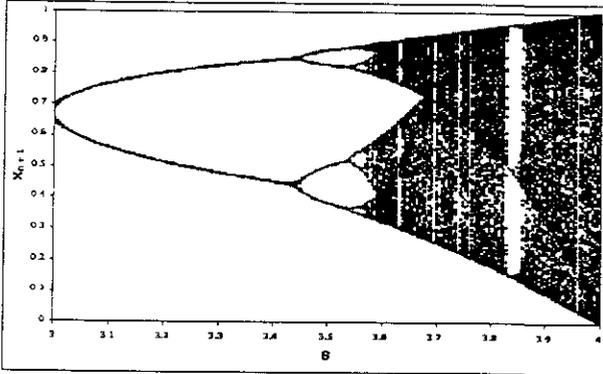


Figura 3.16. Diagrama de bifurcaciones del mapa logístico.

Para establecer este teorema, ordenaremos los enteros positivos de la siguiente manera, que es denominado ordenamiento de Sharkovskii :

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \bullet 3 \triangleright 2 \bullet 5 \triangleright 2 \bullet 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \bullet 3 \triangleright 2^2 \bullet 5 \triangleright 2^2 \bullet 7 \triangleright \dots$$

$$\triangleright 2^3 \bullet 3 \triangleright 2^3 \bullet 5 \triangleright 2^3 \bullet 7 \triangleright \dots \text{---} \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

Para describirlo en palabras, escribir todos los números impares menos el 1, entonces 2 veces los números impares,  $2^2$  veces los números impares,  $2^3$  veces, etc. Finalmente escribir las potencias de 2 en orden decreciente, con 1 al final. A pesar de su rareza, esta lista incluye todos los enteros positivos.

**Teorema 3.24. (Sharkovskii)** Sea  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  un mapa continuo. Supongase que  $f$  tiene un punto periódico de periodo mínimo  $m$ . Si  $m \blacklozenge n$  en el orden de Sharkovskii, entonces  $f$  también tiene un punto periódico de periodo mínimo  $n$ .

Una consecuencia muy importante de este teorema es que si  $f$  tiene un punto periódico de periodo mínimo de 3, entonces tiene puntos de periodo de cada uno de los periodos mínimo. En particular, el mapa logístico en  $\lambda = 3.839$ , en adición a la órbita de periodo 3, tiene órbitas periódicas de todos los periodos mínimos. Sin embargo, debido a su inestabilidad, ellos no son muy fácilmente detectables en la computadora [22].

**$\lambda > 3.839$**  En tanto el parámetro  $\lambda$  es incrementado, la órbita de periodo 3 experimenta una bifurcación de doblamiento de periodo y obtiene su estabilidad hasta una órbita de periodo 6 asintóticamente estable; ver la Figura 3.17. Si  $\lambda$  se incrementa aún más, existe una secuencia de bifurcaciones de doblamiento de periodo. Es sumamente importante que la proporción de la distancia entre bifurcaciones de doblamiento de periodo sucesivas se aproxima a la constante 4.6692.

## Capítulo 4.

### PSEUDO CAOS EN DIAGRAMAS DE BIFURCACION

El caos es un campo avanzado de las matemáticas que envuelve el estudio de los sistemas dinámicos (sistemas en movimiento). La Teoría del Caos consiste en la pruebas y teorías matemáticas las cuales intentan describir los procesos en movimiento. Un ejemplo de un sistema dinámico caótico es el movimiento de las estrellas, planetas y galaxias, las cuales han sido intentadas entender por los matemáticos y científicos.

En esta tesis se ha efectuado el análisis del comportamiento de varios sistemas, y se ha encontrado que la gran mayoría de estos sistemas, al momento de efectuar el análisis cuando tiende a cero y/o a uno el valor inicial de las variables se genera un comportamiento caótico en ciertos rangos del diagrama de bifurcaciones de cada uno de ellos.

Se ha observado que este efecto es diferente al comportamiento regular que presentan los diagramas de bifurcaciones existentes y por esta causa es especial esta representación en los sistemas analizados.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de los estudios y análisis efectuados para este trabajo de tesis. Para cada uno de los estudios se presenta:

- A.** Diagrama de bifurcación.
- B.** Gráfica del sistema
- C.** Gráfica iterada del sistema
- D.** Gráfica de atractores del sistema.

Estos 4 diagramas se realizaron con valores de  $X_0$  dentro del rango de 0 a 1 y valores de los parámetros de las funciones dentro del rango de comportamiento entre su máximo y mínimo, para ciertos casos especiales estos rangos se modificaron para operar entre -1 y 1, tanto para el valor de  $X_0$  como para los parámetros.

El último diagrama para cada uno de los sistemas se efectuó con valores iniciales de  $X_0$  que tienden a cero y a uno, denominando a este último:

- E.** Diagrama de bifurcación con pseudo caos.
- F.** Ampliación de la zona de pseudo caos.

Los sistemas que se presentan son los siguientes:

4.1	$F(X) = (1 - X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) \dots \dots \dots n = 2$
4.2	$F(X) = (1 - X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots \dots \dots n = 2$
4.3	$F(X) = (1 - X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) \dots \dots \dots n = 3$
4.4	$F(X) = (1 - X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots \dots \dots n = 3$
4.5	$F(X) = (1 - X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) \dots \dots \dots n = 4$
4.6	$F(X) = (1 - X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots \dots \dots n = 5$
4.7	$F(X) = (1 - X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots \dots \dots n = 7$
4.8	$F(X) = (1 - X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots \dots \dots n = 9$
4.9	$F(X) = (1 - X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots \dots \dots n = 11$
4.10	$F(X) = \beta (1 - X) X$
4.11	$F(X) = \beta (1 - X) X - R$
4.12	$F(X) = [\beta X(1 - X)] / [1 + \beta(1 - X)]$
4.13	$F(X) = AX_t^3 + (1 - A)X_t$
4.14	$F(X) = \beta \sin(\pi X)$
4.15	$F(X) = \beta \cos(\pi X)$
4.16	$F(X) = (1 - X)(1 - e^{-\beta X})$
4.17	$F(X) = Rx[1 - (X/k)^{m-1}] / (m-1)$
4.18	$F(X) = \lambda X - (\lambda + 1) X^2 - \mu$

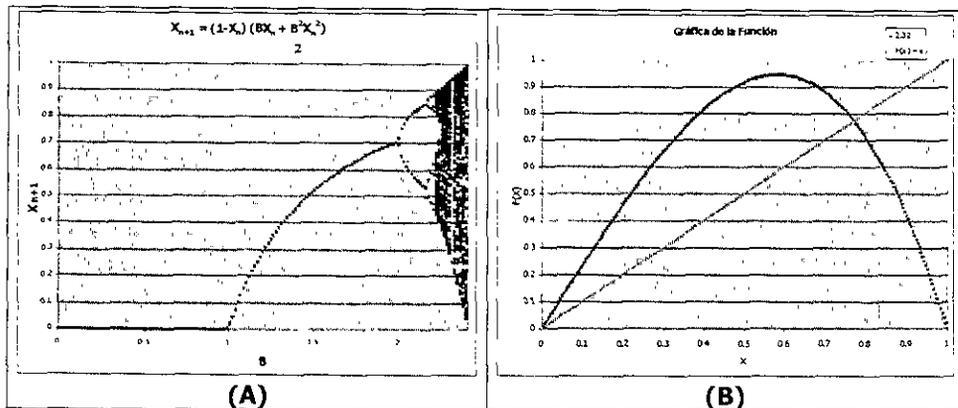
Estos sistemas fueron elegidos debido a que son ecuaciones en diferencia que presentan comportamientos dinámicos.

4.1 
$$F(X) = (1-X) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) \dots \dots \dots n = 2$$

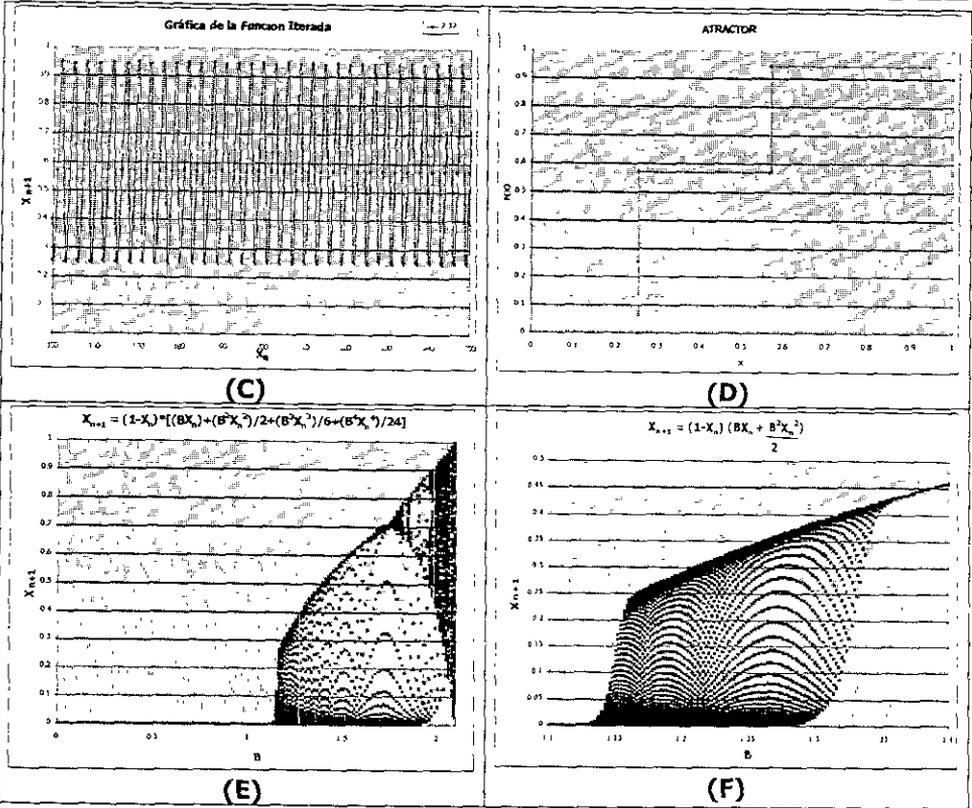
En este sistema el comportamiento de x con relación a β con respecto a X<sub>0</sub> es:

β		Valores Estables en X	X <sub>0</sub>
De	A		
0	1	0	[0,1]
1	1.9964	1	[0,1]
1.9964	2.1683	2	[0,1]
2.1683	2.2033	4	[0,1]

Posteriormente se obtienen mayor cantidad de puntos estables para cada uno de los valores mayores a 2.2033, existen zonas de comportamiento especial en las que de un valor de β de 2.31 y comportamiento caótico, se pasa a un valor de 2.315 y se obtiene una región de 3 valores fijos estables independientemente del valor inicial de X<sub>0</sub>. El valor máximo de β es 2.4. Cuando X<sub>0</sub> → 0 y X<sub>0</sub> → 1, se produce el efecto pseudo caos en la zona de inicio de valores estables (después de β > 1), inclusive el inicio de esta zona se desplaza de 1 a 1.15 ver Figura E de este apartado.



DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH



4.2 
$$F(X) = (1 - X) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n X^n \right) (-1)^{n+1} \dots \dots \dots n = 2$$

En este sistema el comportamiento de x con relación a β con respecto a X<sub>0</sub> es:

β		Valores Estables en X	X <sub>0</sub>
De	A		
0	1	0	[0,0.4]
1	3.72	1	[0,0.4]
3.72	4.30	2	[0,0.4]
4.30	4.43	4	[0,0.4]

Con estos valores iniciales de X<sub>0</sub> el comportamiento del diagrama de bifurcaciones es normal, con zonas caóticas (β > 4.93) y zonas con valores estables de X. El valor máximo de la β es 4.93.

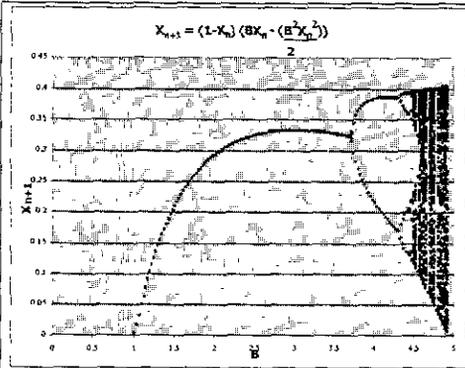
β		Valores Estables en X	X <sub>0</sub>
De	A		
0	1	0	[0.41,0.54]
1	3.72	1	[0.41,0.54]
3.72	4.30	2	[0.41,0.54]
4.30	4.43	4	[0.41,0.54]

Con estos valores iniciales de X<sub>0</sub>, los valores máximos de β se van reduciendo desde 4.43 hasta 3.72.

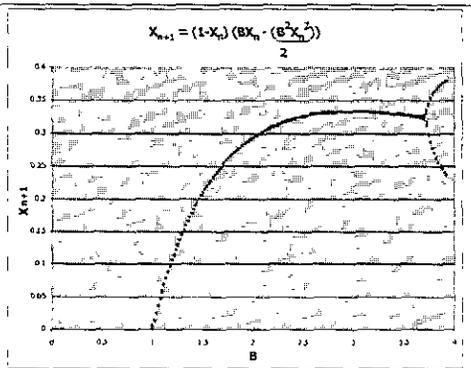
β		Valores Estables en X	X <sub>0</sub>
De	A		
0	1	0	[0.54,1]
1	3.72	1	[0.54,1]

Con estos valores iniciales de X<sub>0</sub> el sistema se comporta de manera muy especial, ya que sólo presenta un valor estable para todo este rango de X<sub>0</sub>, pero también la β máxima se reduce hasta llegar a 2 con X<sub>0</sub> → 1.

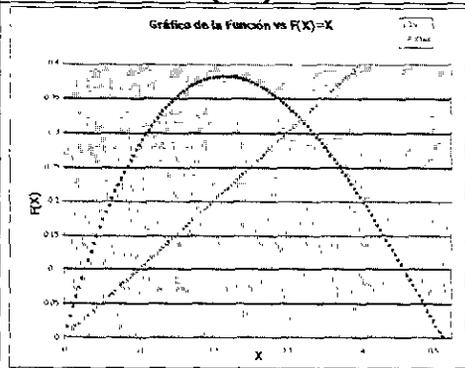
Cuando X<sub>0</sub> → 0 y X<sub>0</sub> → 1, se produce el efecto cortina en la zona de inicio de valores estables (con β > 1), inclusive el inicio de esta zona se desplaza de 1 a 1.13 ver Figura E. En este caso cuando X<sub>0</sub> → 0 es completamente diferente a cuando X<sub>0</sub> → 1, ya que en el primer caso se llega a contemplar el diagrama de bifurcaciones completo y en el segundo sólo se observa hasta β = 2.



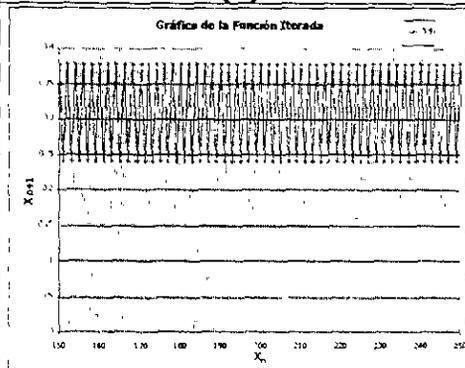
(A.1)



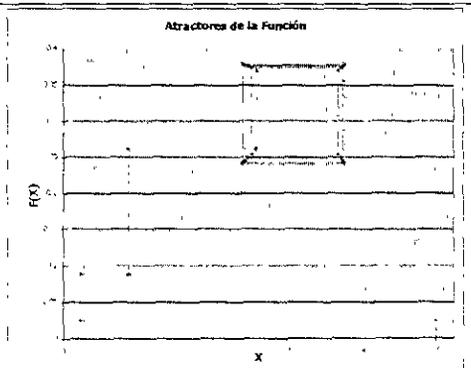
(A.2)



(B)

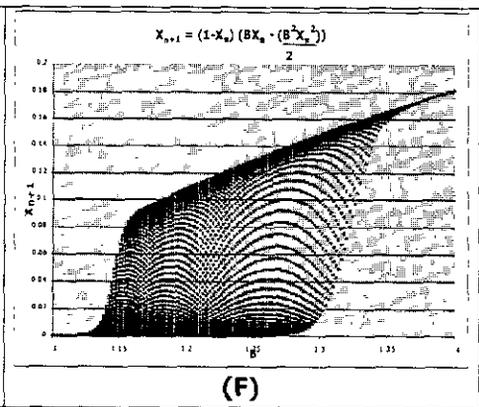
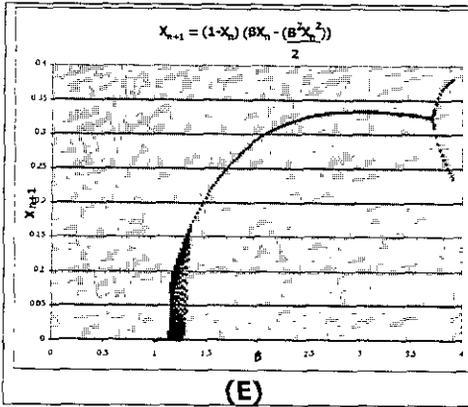


(C)



(D)

DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH



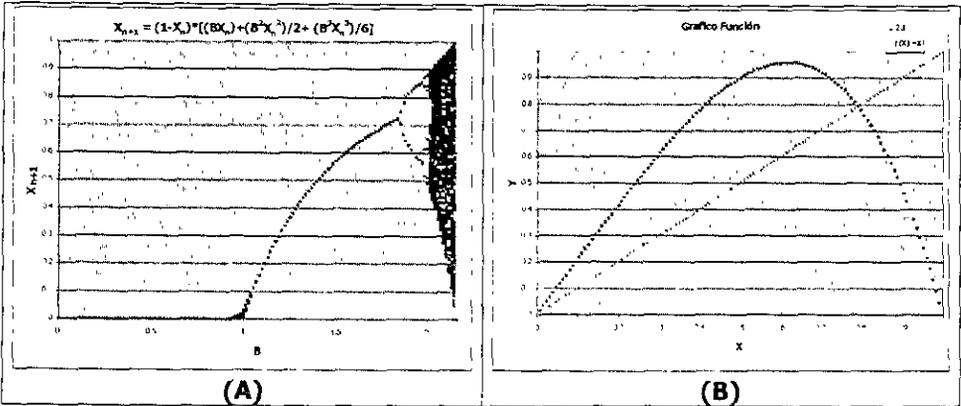
4.3

$$F(X) = (1 - X) \left( \sum \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) \dots \dots \dots n = 3$$

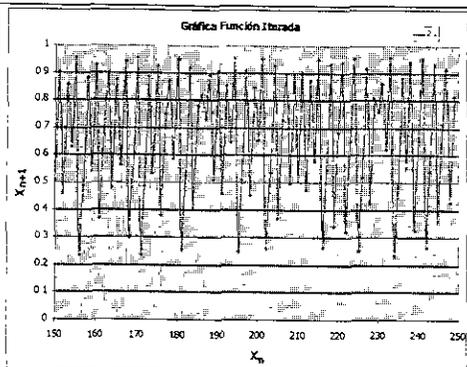
En este sistema el comportamiento de x con relación a β con respecto a X<sub>0</sub> es:

β		Valores Estables en X	X <sub>0</sub>
De	A		
0	1	0	[0,1]
1	1.84	1	[0,1]
1.84	1.9714	2	[0,1]
1.9714	1.9959	4	[0,1]

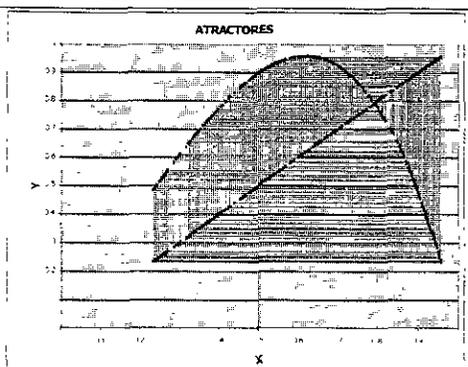
Posteriormente se obtienen mayor cantidad de puntos estables para cada uno de los valores mayores a 1.9959, existen zonas de comportamiento especial en las que de un valor de β de 2.31 y comportamiento caótico, se pasa a un valor de 2.315 y se obtiene una región de 3 valores estables independientemente del valor inicial de X<sub>0</sub>. La β máxima del sistema es 2.1462. Cuando X<sub>0</sub> → 0 y X<sub>0</sub> → 1, se produce el efecto de pseudo caos en la zona de inicio de valores estables (cuando β > 1), inclusive el inicio de esta zona se desplaza de 1 a 1.15 ver Figura E.



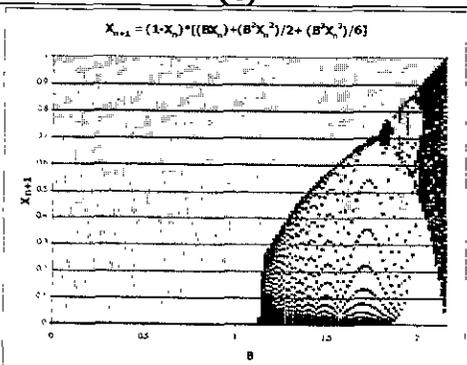
DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH



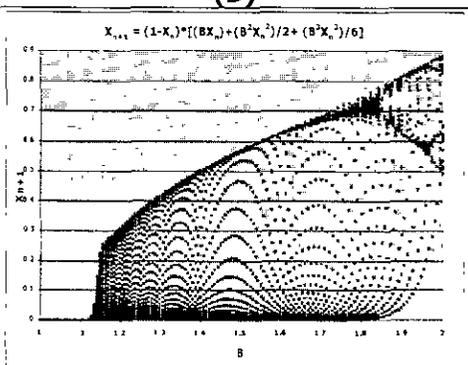
(C)



(D)

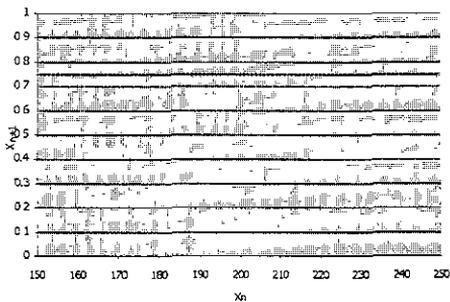


(E)



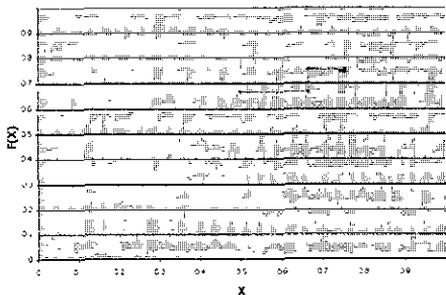
(F)

Gráfico Función Iterada



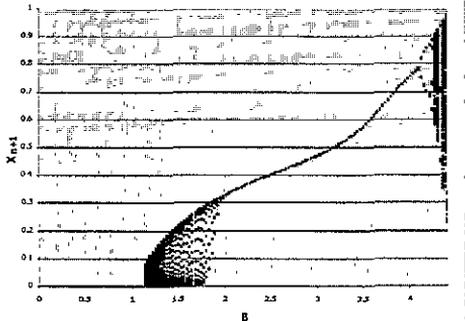
(C)

Atractores de la Función



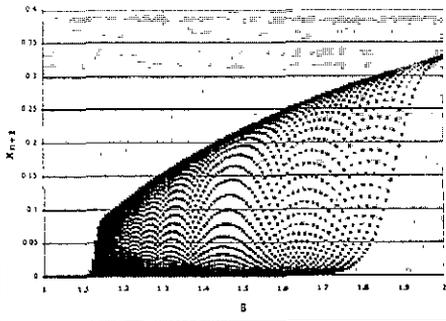
(D)

$$X_{n+1} = (1-X_n) * [(BX_n) - (B^2 X_n^2) / 2 + (B^3 X_n^3) / 6]$$



(E)

$$X_{n+1} = (1-X_n) * [(BX_n) - (B^2 X_n^2) / 2 + (B^3 X_n^3) / 6]$$



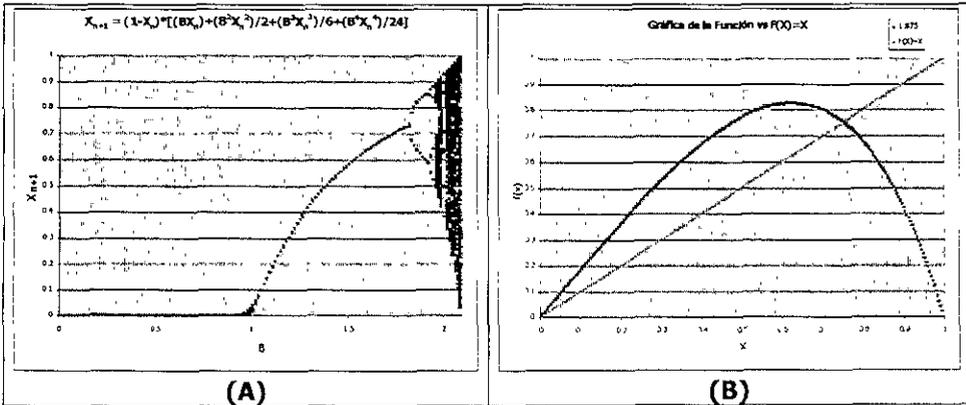
(F)

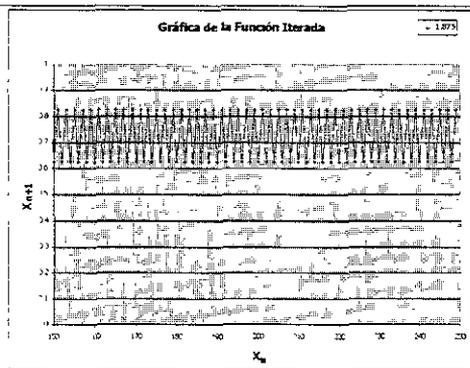
4.5 
$$F(X) = (1 - X) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n X^n}{n!} \right), \dots, n = 4$$

En este sistema el comportamiento de x con relación a  $\beta$  con respecto a  $X_0$  es:

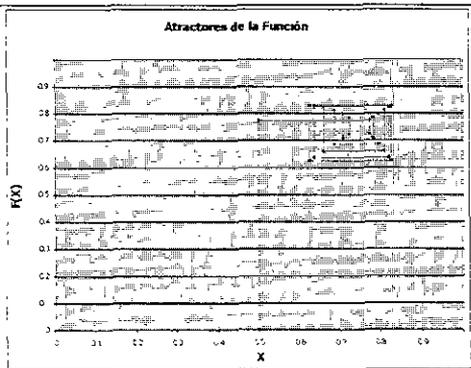
$\beta$		Valores Estables en X	$X_0$
De	A		
0	1	0	[0,1]
1	1.8142	1	[0,1]
1.8142	1.9285	2	[0,1]
1.9285	1.9530	4	[0,1]

Posteriormente se obtienen mayor cantidad de puntos estables para cada uno de los valores mayores a 1.9530, existen zonas de comportamiento especial en las que de un valor de  $\beta$  de 2.0183 y comportamiento caótico, se pasa a un valor de 2.0210 y se obtiene una región de 3 valores estables independientemente del valor inicial de  $X_0$ . La  $\beta$  máxima del sistema es 2.1 ( para  $0 < X_0 < 1$ ). Cuando  $X_0 \rightarrow 0$  y  $X_0 \rightarrow 1$ , se produce el efecto pseudo caos en la zona de inicio de valores estables (cuando  $\beta > 1$ ), inclusive el inicio de esta zona se desplaza de 1 a 1.1530 ver Figura E.

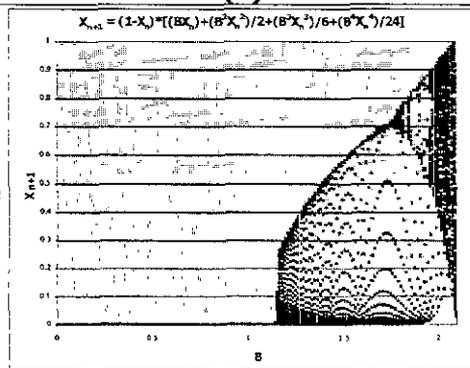




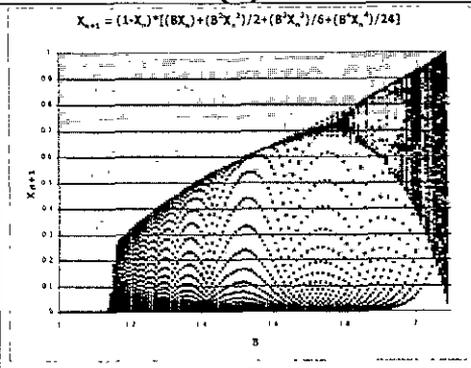
(C)



(D)



(E)



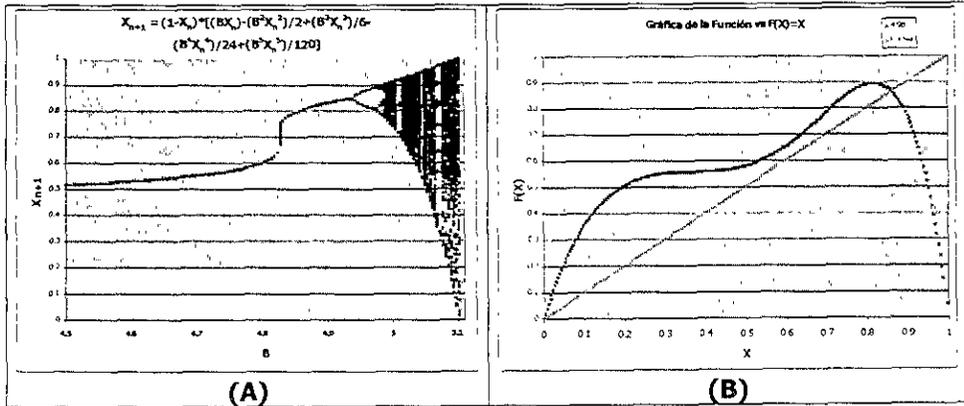
(F)

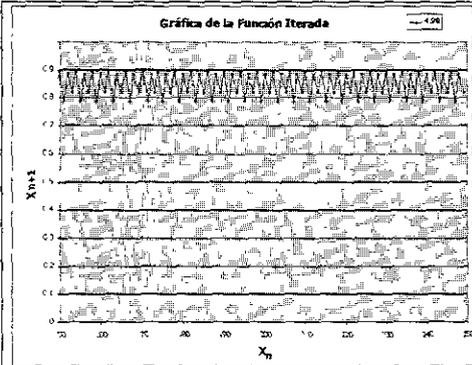
**4.6** 
$$F(X) = (1 - X) \left( \sum_{n=0}^5 \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots \dots \dots n = 5$$

En este sistema el comportamiento de x con relación a β con respecto a X<sub>0</sub> es:

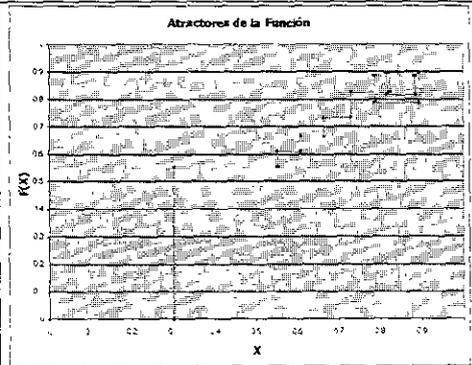
β		Valores Estables en X	X <sub>0</sub>
De	A		
0	1	0	[0,1]
1	4.8246	1	[0,1]
4.8246	4.9420	2	[0,1]
4.9420	4.9764	4	[0,1]

Posteriormente se obtienen mayor cantidad de puntos estables para cada uno de los valores mayores a 4.9764, existen zonas de comportamiento especial en las que de un valor de β de 5.0075 y comportamiento caótico, se pasa a un valor de 5.0098 y se obtiene una región de 3 valores estables independientemente del valor inicial de X<sub>0</sub>. La β máxima del sistema es 4.11 ( para 0 < X<sub>0</sub> < 1). Cuando X<sub>0</sub> → 0 y X<sub>0</sub> → 1, se produce el efecto pseudo caos en la zona de inicio de valores estables (cuando β > 1), inclusive el inicio de esta zona se despiaza de 1 a 1.1496 ver Figura E.

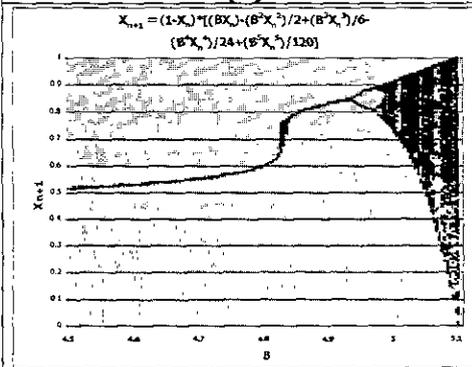




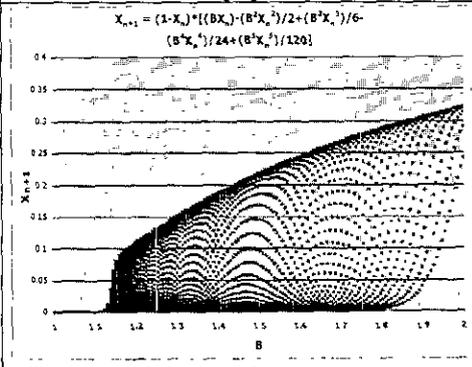
(C)



(D)



(E)



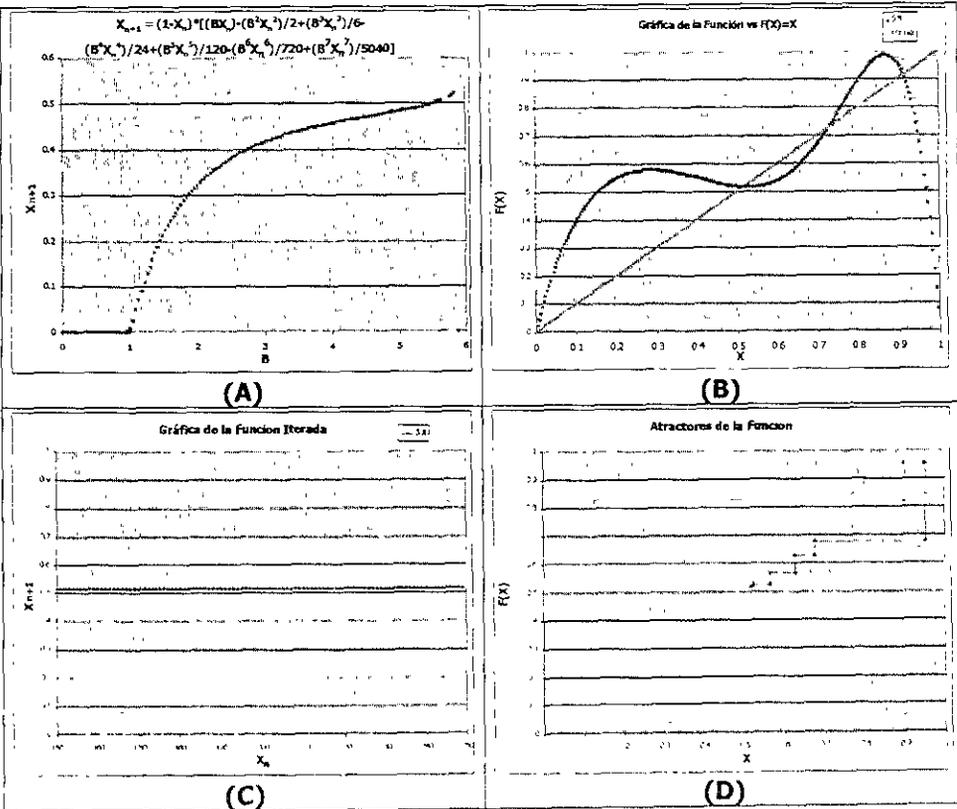
(F)

4.7 
$$F(X) = (1 - X) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots \dots \dots n = 7$$

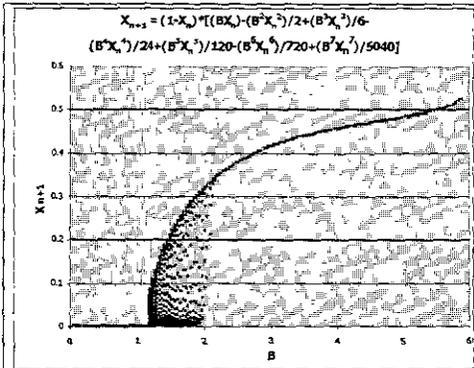
En este sistema el comportamiento de x con relación a β con respecto a X<sub>0</sub> es:

β		Valores Estables en X	X <sub>0</sub>
De	A		
0	1	0	[0,1]
1	5.84	1	[0,1]

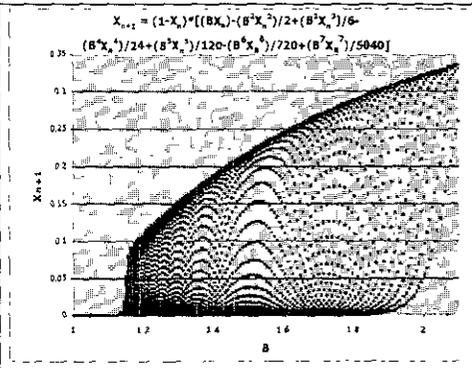
Este sistema proporciona un comportamiento extremadamente estable en el rango de X<sub>0</sub> desde un valor de 0 hasta 1, por lo que es de especial comportamiento, ya que no contiene zonas con 2, 4 valores estables, inclusive ni zonas caóticas. La β máxima del sistema es 5.84 ( para 0 < X<sub>0</sub> < 1). Cuando X<sub>0</sub> → 0 y X<sub>0</sub> → 1, se produce el efecto pseudo caos en la zona de inicio de valores estables (cuando β > 1), inclusive el inicio de esta zona se desplaza de 1 a 1.1360 ver Figura E.



DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH



(E)



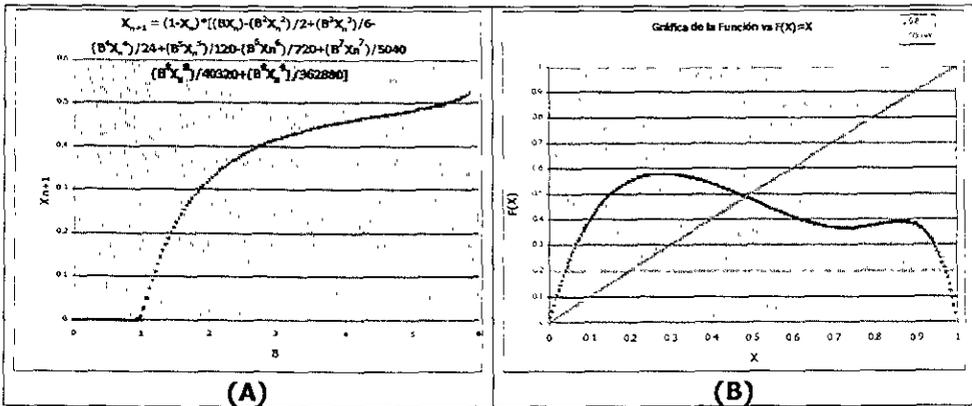
(F)

**4.8** 
$$F(X) = (1-X) \left( \sum_{n=1}^9 \frac{\beta^n X^n}{n!} \right) (-1)^{n+1} \dots n = 9$$

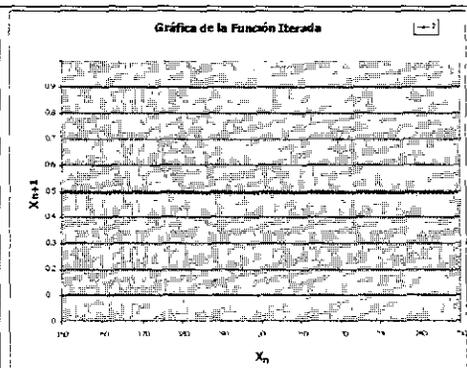
En este sistema el comportamiento de x con relación a  $\beta$  con respecto a  $X_0$  es:

$\beta$		Valores Estables en X	$X_0$
De	A		
0	1	0	[0,1]
1	5.88	1	[0,1]

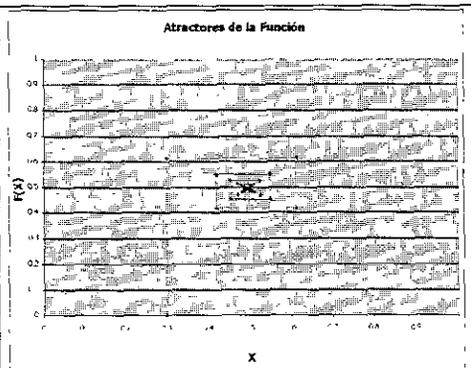
Este sistema al igual que el anterior nos permite obtener un comportamiento extremadamente estable en el rango de  $X_0$  desde un valor de 0 hasta 1, por lo que es de especial comportamiento, ya que no contiene zonas con 2, 4 valores estables, inclusive ni zonas caóticas. La  $\beta$  máxima del sistema es 5.88 ( para  $0 < X_0 < 1$ ). Cuando  $X_0 \rightarrow 0$  y  $X_0 \rightarrow 1$ , se produce el efecto pseudo caos en la zona de inicio de valores estables (cuando  $\beta > 1$ ), inclusive el inicio de esta zona se desplaza de 1 a 1.17 ver Figura E.



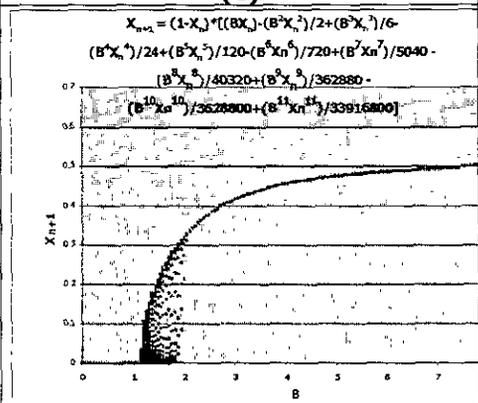
DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH



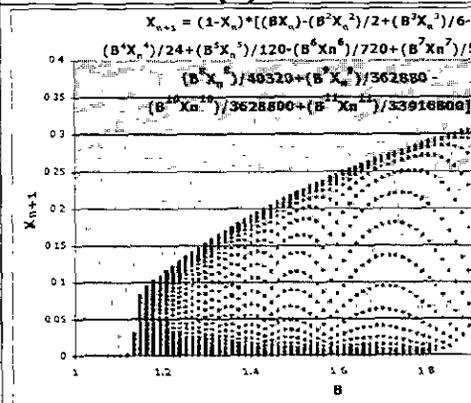
(C)



(D)



(E)



(F)

**4.10  $F(X) = \beta (1-X) X$**

Este análisis corresponde al sistema logístico [4] [18] y el comportamiento de  $x$  con relación a  $\beta$  con respecto a  $X_0$  es:

$\beta$		Valores Estables en X	$X_0$
De	A		
0	1	0	[0.1]
1	3	1	[0.1]
3	3.4412	2	[0.1]
3.4412	3.5442	4	[0.1]

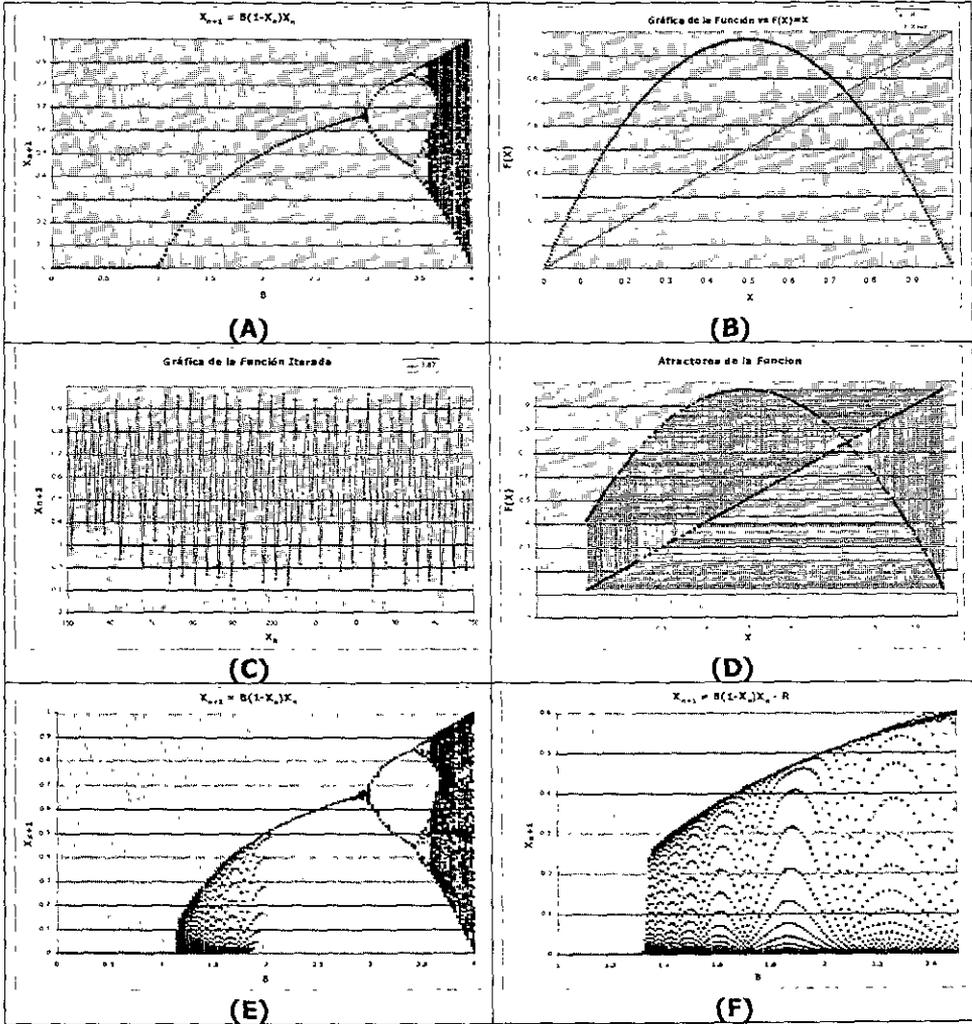
Este sistema es el que se utiliza generalmente para efectuar el análisis del diagrama de bifurcación, atractores y zonas caóticas, ya que presenta zonas en las que la cantidad de valores fijos estables no son potencias de 2 e inclusive impares, como son:

$\beta$		Valores Estables en X	$X_0$
De	A		
3.6265	3.6329	6	[0.1]
3.6621	3.6628	8	[0.1]
3.7016	3.7027	7	[0.1]
3.7382	3.7418	5	[0.1]
3.8287	3.842	3	[0.1]
3.8421	3.8502	4	[0.1]
3.9055	3.9067	5	[0.1]
3.9601	3.9615	4	[0.1]

Entre cada uno de estos rangos de valores de  $\beta$  existen zonas en las que no se puede definir la cantidad de valores que presenta el sistema para un solo valor de  $\beta$ . El valor máximo de  $\beta$  para este sistema es 4.

Cuando  $X_0 \rightarrow 0$  y  $X_0 \rightarrow 1$ , el diagrama de bifurcaciones presenta el efecto pseudo caos en  $\beta=1.15$ , expandiéndose hasta  $\beta= 2.06$  y llegando a un valor fijo estable final, Ver Figura E.

DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH



**4.11  $F(X) = \beta (1-X) X - R$** 

En este sistema el comportamiento de  $x$  con relación a  $\beta$  con respecto a  $X_0$  es:

$\beta$		Valores Estables en $X$	$X_0$
De	A		
0	3.95	0	[0.15,0.85]
3.95	4.1224	1	[0.15,0.85]
4.1224	4.5102	2	[0.15,0.85]
4.5102	4.5918	4	[0.15,0.85]

Este sistema es una modificación al anterior, el cual mostraba un comportamiento caótico con una  $\beta = 3.95$  independientemente al valor inicial de  $X (X_0)$ . Este nuevo sistema se obtiene de la adición del parámetro de Recolección ( $R$ ) y provoca que se tengan modificaciones en:

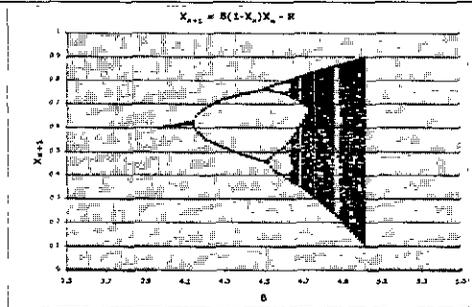
- La posición inicial de  $\beta$  en la que existen valores fijos estables (o con  $X \neq 0$ ) ya que se produce un desplazamiento del diagrama de bifurcaciones en su conjunto.
- Los valores máximos y mínimos de  $X$ , ya que en el sistema anterior los valores eran 1 y 0, respectivamente.
- La zona de máxima operación del sistema logístico, ya que en el caso anterior el máximo valor de  $\beta$  era de 4.

El rango inicial de  $X_0$  debe de estar comprendido en el rango [0.15,0.85] ya que si se elige un valor diferente se llega a valores estables de 0 (que como se mostró en el Capítulo 1 representa la extinción de la población). Dependiendo del valor inicial de  $X_0$  el principio del diagrama de bifurcaciones va tendiendo a 3, esto es, la zona representativa de un sólo valor estable llega a iniciar en 3.0816 y finaliza en 4.1224.

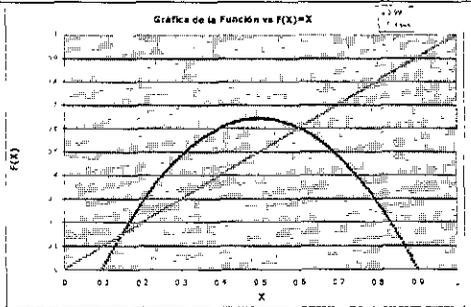
El valor máximo y mínimo se modifica a 0.8862 y 0.1027 (en el sistema anterior eran 1 y 0).

Al aumentar el valor de la recolección ( $R$ ) y manteniendo el valor inicial de  $X_0$  dentro de los rangos óptimos, se va modificando completamente los valores a los que puede responder la  $\beta$  para poder dar como respuesta un comportamiento estable de 1, 2, 4, ...etc puntos fijos estables, con esta evaluación se comprueba que se puede operar el modelo logístico más allá de los valores de  $\beta > 4$  (Figura E) y que el diagrama de bifurcaciones de este sistema es un ente fractal ya que se obtuvo el diagrama con valores de  $X_0 = 0.5$ ,  $\beta = 640000.000025$  y  $R = 159999.5$  y se obtiene una auto-similitud del diagrama mostrado en la Figura A del sistema anterior.

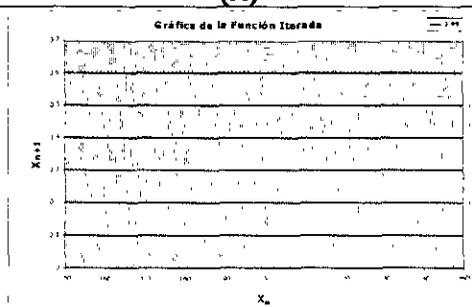
Todas estas anotaciones han permitido efectuar la modificación de un sistema con comportamiento caótico a uno con un comportamiento de un valor fijo estable, ya que comparando las Figuras C y D del sistema anterior con las mostradas en este sistema, se puede comprobar que para el mismo valor de  $\beta$  podemos controlar la cantidad de valores fijos estables a los cuales deseamos un establecimiento o la anulación de la operación del modelo (extinción).



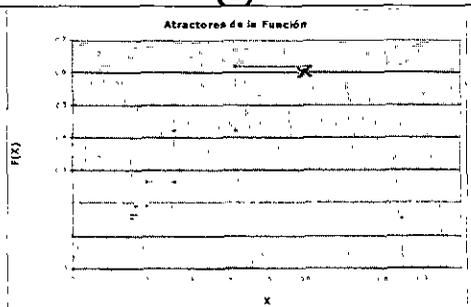
(A)



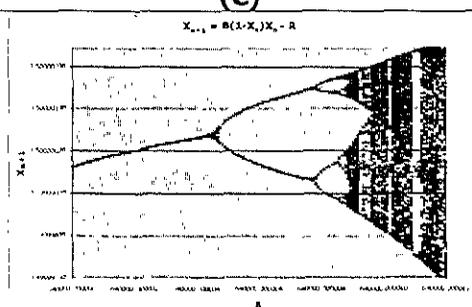
(B)



(C)



(D)



(E)

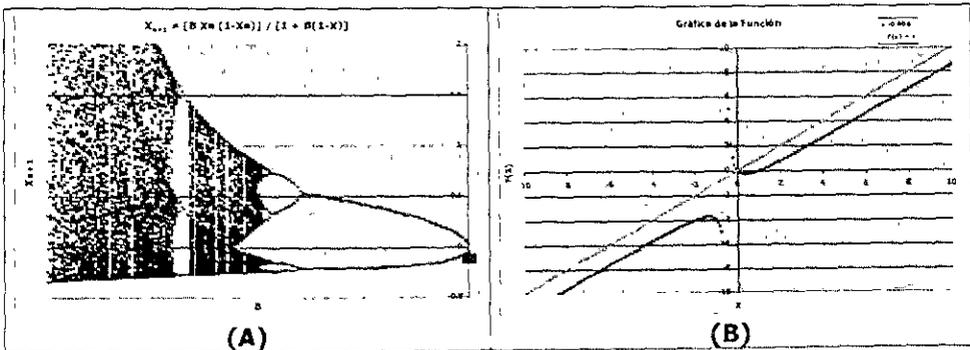
**4.12  $F(X) = [BX(1-X)]/[1+B(1-X)]$**

En este sistema el comportamiento de x con relación a  $\beta$  con respecto a  $X_0$  es:

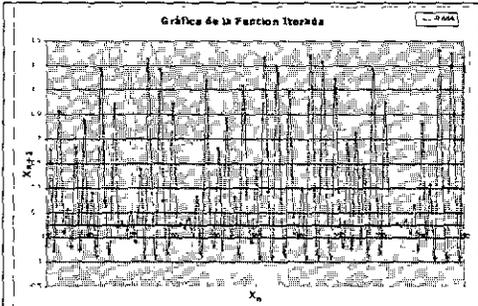
$\beta$		Valores Estables en X	$X_0$
De	A		
2	-0.5	0	[-0.64, -1E-16] [1E-16, 0.999999] [1.01, 2]
-0.6	-0.51	2	[-0.64, -1E-16] [1E-16, 0.999999] [1.01, 2]
-0.616	-0.6	4	[-0.64, -1E-16] [1E-16, 0.999999] [1.01, 2]

Como se observa en la figura (A), este sistema se comporta de una manera muy diferente a los sistemas anteriormente analizados, ya que sólo puede operar en un rango muy limitado de  $\beta$  entre  $-0.75$  y  $-0.50$  y los valores iniciales de  $X_0$  sólo pueden estar dentro de los rangos mostrados en la tabla anterior. Una de las características notables es que no existen zonas para obtener 1 valor fijo estable, ya que inicia con 2 valores fijos estables. Las zonas caóticas inician en  $-0.624$  hasta  $-0.666$  aquí surge la zona de 3 valores fijos estables y permanece hasta  $-0.67062$ , se inicia la zona de 6 valores fijos estables hasta  $-0.676$ , a partir de aquí surge nuevamente la zona caótica.

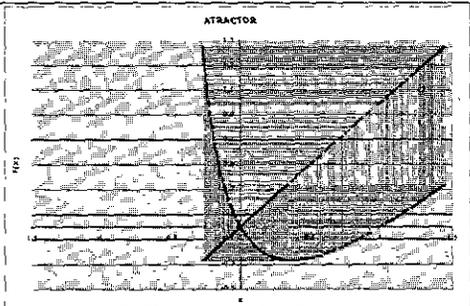
Con relación al comportamiento del sistema cuando  $X_0 \rightarrow 0$  y  $X_0 \rightarrow 1$ , se presenta el efecto pseudo caos tanto para X positivas como para las X negativas, se desplaza el inicio del diagrama de bifurcaciones a  $-0.5333$ , siendo más sensible cuando  $X_0 \rightarrow 0$  que  $X_0 \rightarrow 1$ .



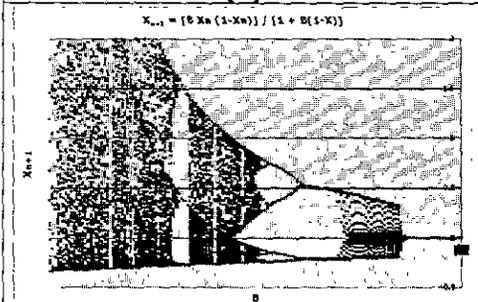
DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH



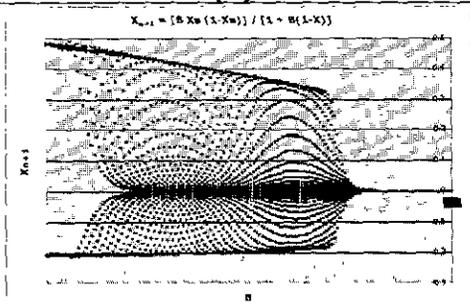
(C)



(D)



(E)



(F)

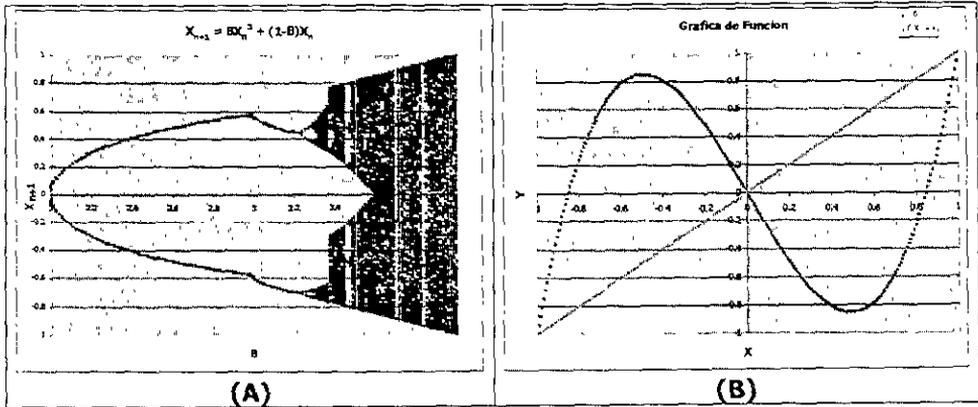
**4.13**  $F(X) = \beta X^2 + (1 - \beta)X$

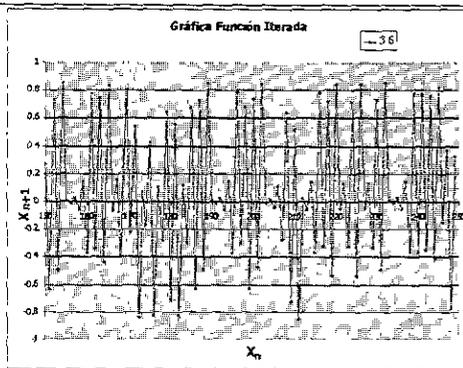
En este sistema el comportamiento de  $x$  con relación a  $\beta$  con respecto a  $X_0$  es:

$\beta$		Valores Estables en $X$	$X_0$
De	A		
0	2	0	$[-1,1]$
2	3.2	2	$[-1,1]$
3.2	3.6	4	$[-1,1]$

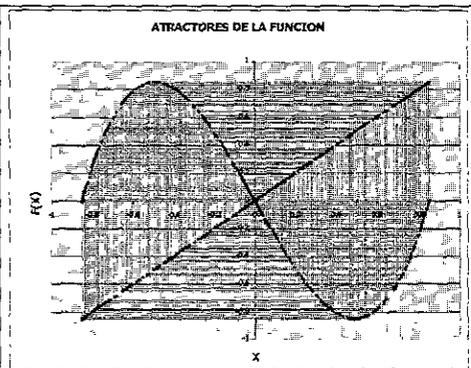
Este sistema se comporta de una manera similar al sistema anterior (4.12), ya que sólo opera en el rango de  $\beta$  entre 2 y 4 y con una  $X_0$  comprendida entre  $-1$  y  $1$ . No contiene zonas con un valor fijo estable por iniciar con 2 valores, contiene dos zonas de comportamiento estable entre las regiones caóticas, la primera con  $\beta$  entre 3.4517 y 3.4727 para 6 valores fijos estables y la segunda entre 3.8285 y 3.8486 para 4 valores fijos estables

Cuando  $X_0 \rightarrow 0$  y  $X_0 \rightarrow 1$  el comportamiento del sistema presenta el efecto pseudo caos para el rango completo de  $X_0$ , se desplaza el inicio del diagrama de bifurcaciones hasta 2.136, siendo más sensible cuando  $X_0 \rightarrow 0$  que  $X_0 \rightarrow 1$ .

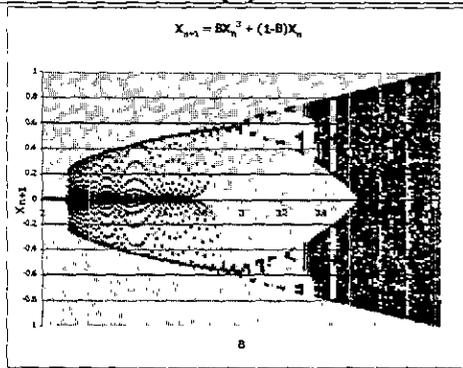




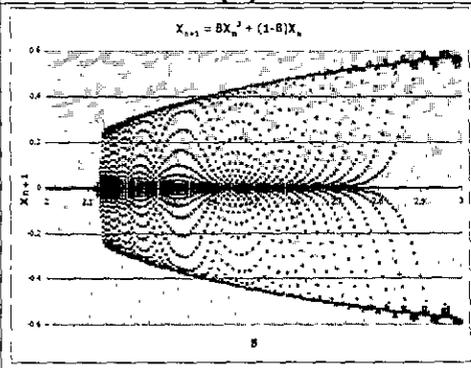
(C)



(D)



(E)



(F)

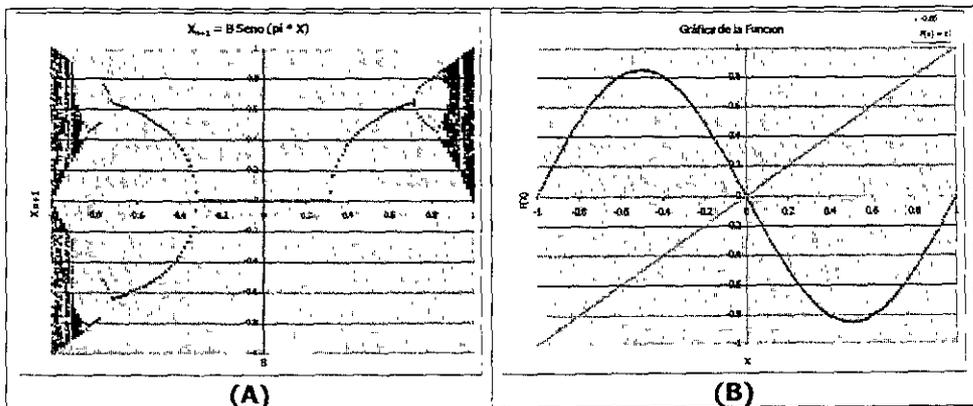
**4.14**  $F(X) = \beta \text{Sin}(\pi X)$

En este sistema el comportamiento de  $x$  con relación a  $\beta$  con respecto a  $X_0$  es:

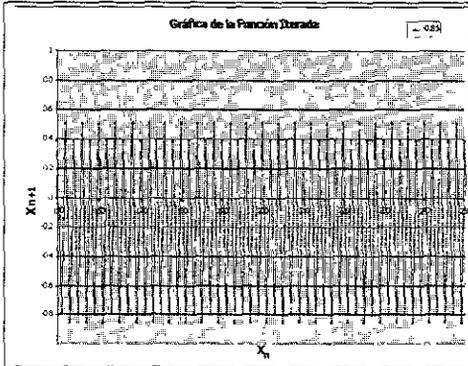
$\beta$		Valores Estables en X	$X_0$
De	A		
-0.8266	-0.3066	2	$[-1,1]$
-0.3066	0.3066	0	$[-1,1]$
0.3066	0.7066	1	$[-1,1]$
0.7066	0.8266	2	$[-1,1]$

Este sistema tiene uno de los comportamientos más complicados de los hasta ahora analizados, ya que presenta bifurcaciones tanto para  $\beta$  positivas como para negativas, también presenta zonas es las que se pueden definir valores fijos estables entre las zonas caóticas siendo las principales para  $\beta$  entre 0.9378 y 0.9424 para 3 valores fijos estables y para  $\beta$  entre  $-0.9455$  y  $-0.9378$  para 6 valores fijos estables para  $X$  positivos y negativos.

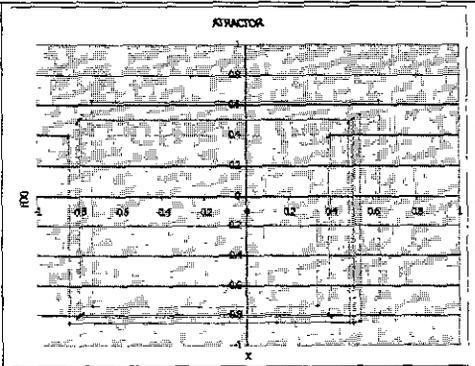
Para  $X_0 \rightarrow 0$  y  $X_0 \rightarrow 1$  el comportamiento del sistema es afectado por el efecto pseudo caos, se desplaza el inicio del diagrama de bifurcaciones hasta  $-0.37$  y  $0.37$  en el valor de  $\beta$ , siendo más sensible cuando  $X_0 \rightarrow 0$  que  $X_0 \rightarrow 1$ .



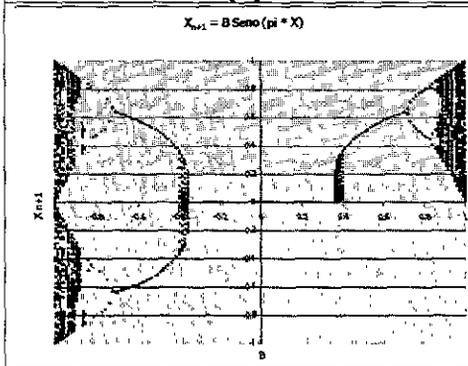
DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH



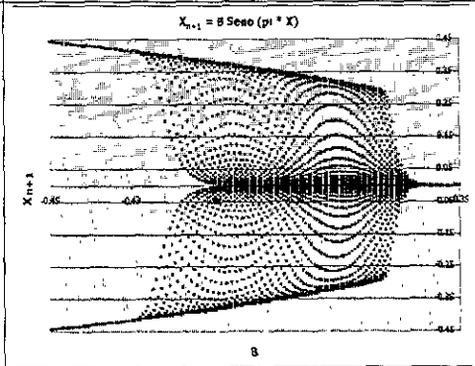
(C)



(D)



(E)



(F)

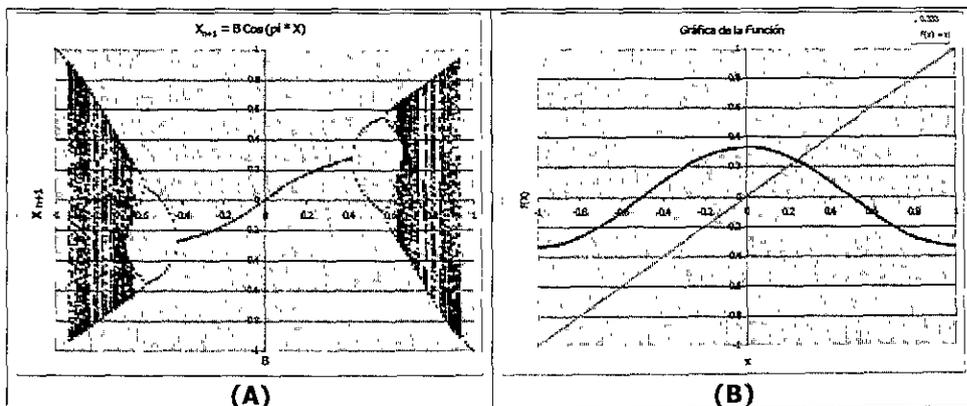
**4.15**  $F(X) = \beta \text{Cos}(\pi X)$

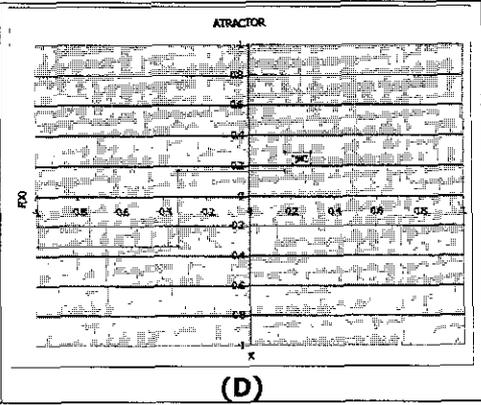
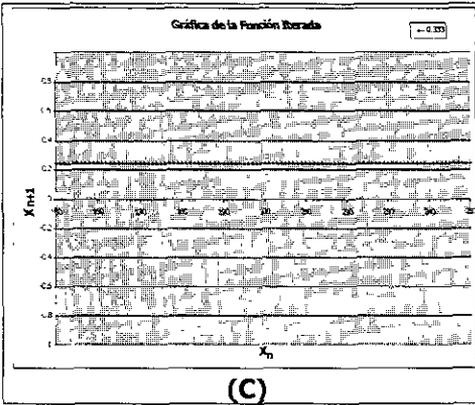
En este sistema el comportamiento de  $x$  con relación a  $\beta$  con respecto a  $X_0$  es:

$\beta$		Valores Estables en $X$	$X_0$
De	A		
-0.6222	-0.5724	4	$[-1,1]$
-0.5724	-0.4106	2	$[-1,1]$
-0.4106	0.4106	1	$[-1,1]$
0.4106	0.5724	2	$[-1,1]$
0.5724	0.6222	4	$[-1,1]$

El comportamiento de este sistema es realmente simétrico desde el punto de vista numérico y presenta una inversión de signo entre los valores positivos y negativos, presenta zonas caóticas, zonas de valores fijos estables entre estas zonas y las más representativas son para valores de  $\beta$  entre  $-0.7460$  y  $-0.7341$  para 3 valores fijos estables y  $0.7341$  y  $0.7460$  también para 3 valores fijos estables.

Con relación al comportamiento cuando  $X_0 \rightarrow 0$  y  $X_0 \rightarrow 1$  el diagrama de bifurcaciones no es afectado, por lo que no presenta el efecto pseudo caos.





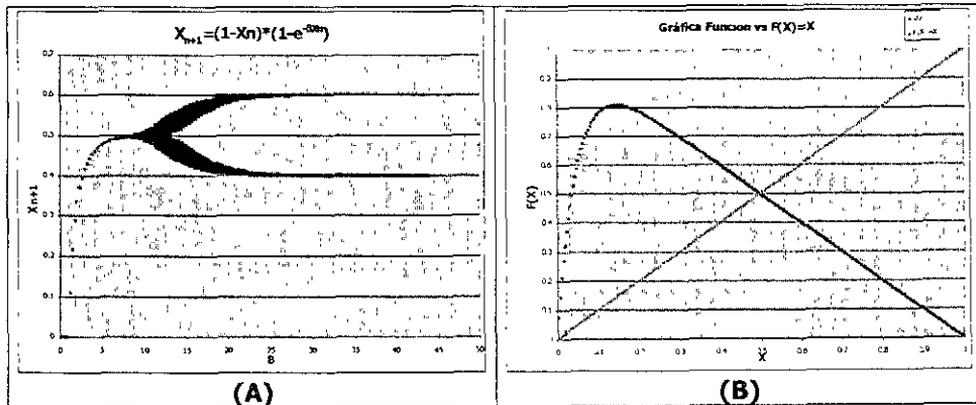
**4.16**  $F(X) = (1-X)(1-E^{-\beta X})$

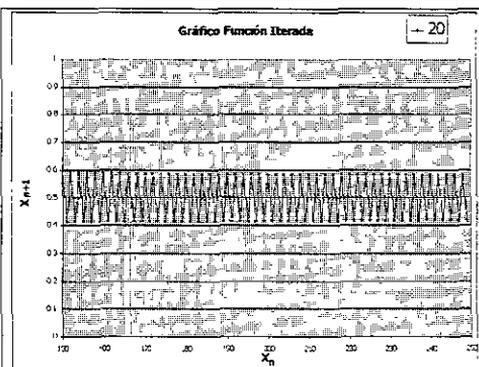
Este sistema es el modelo epidémico SIS discreto [7] y el comportamiento de  $x$  con relación a  $\beta$  con respecto a  $X_0$  es:

$\beta$		Valores Estables en $X$	$X_0$
De	A		
0	1	0	$[-1,1]$
1	25.5	1	$[-1,1]$
25.5	108	2	$[-1,1]$

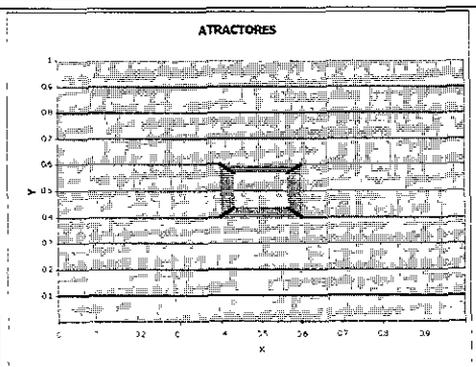
Este sistema es extremadamente estable desde  $\beta = 1$  hasta 9, a partir de aquí es más lenta la llegada a un valor estable, a partir de  $\beta = 25.5$  se genera una bifurcación que mantiene los dos valores estables en  $X_0$  y en  $(1-X_0)$ , presenta zonas caóticas que llegan a valores estables.

Con relación al comportamiento cuando  $X_0 \rightarrow 0$  y  $X_0 \rightarrow 1$  el diagrama de bifurcaciones si es afectado, por lo que presenta el efecto pseudo caos, tanto después de  $\beta = 1$  y  $\beta > 8$ .

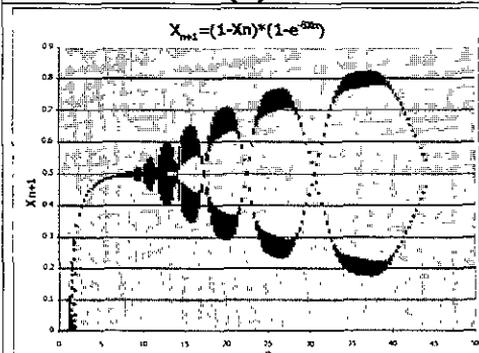




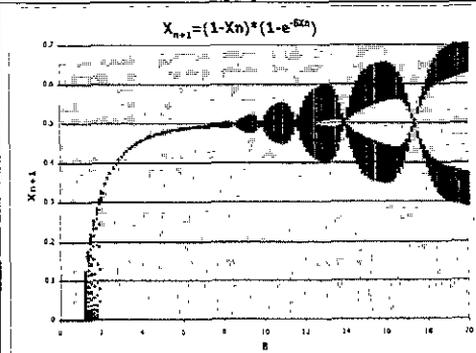
(C)



(D)



(E)



(F)

**4.17**  $F(X) = rX[1-(X/k)^{m-1}]/(m-1)$

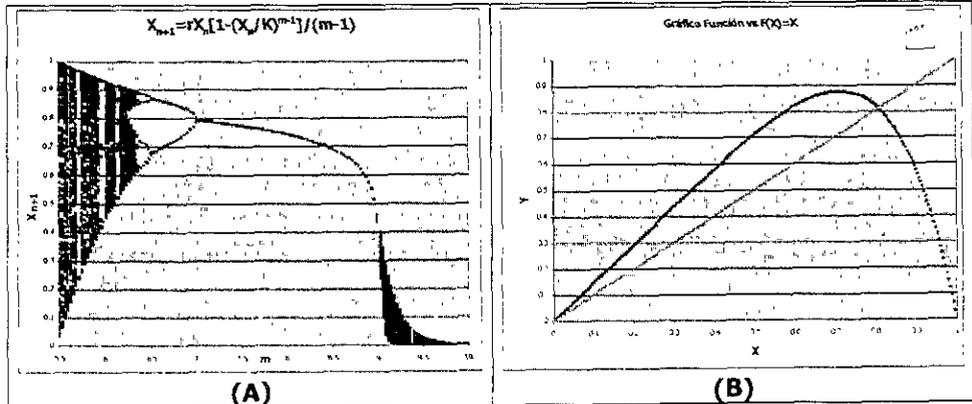
Este modelo esta denominado como velocidad de incremento de infecciones [5]. En este sistema existen 3 parámetros r, m y k, en donde r es un factor de escalamiento en m, m es la forma del comportamiento y k es el escalamiento en X, por lo que el comportamiento de m (con r=8 y k=1) con respecto a X<sub>0</sub> es:

m		Valores Estables en X	X <sub>0</sub>
De	A		
10	7	1	[0,1]
7	6.4976	2	[0,1]
6.4976	6.4665	4	[0,1]

Este sistema muestra un comportamiento invertido a lo que es el diagrama de bifurcaciones del sistema logístico, ya que la zona caótica se presenta del lado izquierdo (valores menores de m) y la zona estable del lado derecho (valores mayores de m).

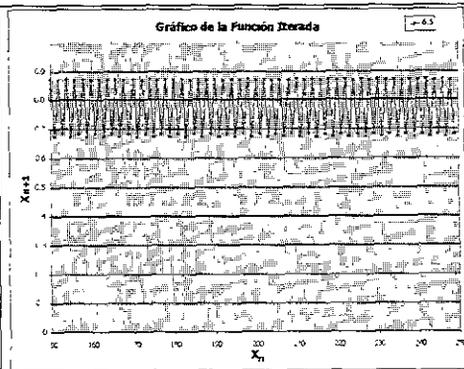
La principal zona de valores fijos estables que se presenta en medio de la zona caótica esta con m entre 5.9763 y 6.0097 con 3 valores fijos estables, el estudio se realizó hasta m = 5.47.

Al iniciar las gráficas de bifurcaciones con X<sub>0</sub> → 0 y X<sub>0</sub> → 1 se produce el efecto pseudo caos y el final del diagrama se modifica hasta m= 8.

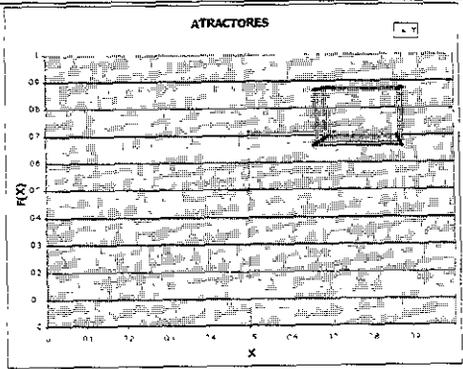


NOVA REVISIÓN DE  
2011

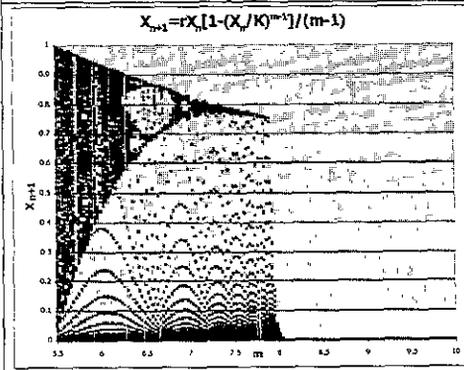
DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH



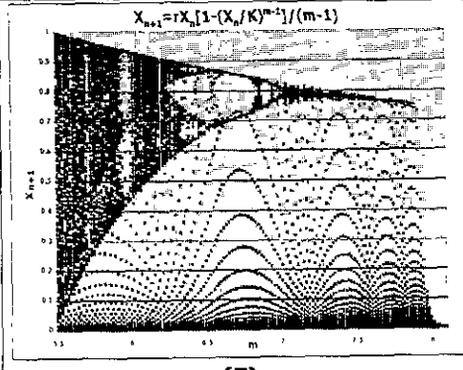
(C)



(D)



(E)



(F)

**4.18**  $F(X) = \lambda X - (\lambda + 1)X^3 - \mu$

Este modelo se utiliza para efectuar el cálculo del consumo en la economía [24], para el diagrama se mantiene a  $\lambda$  constante y  $\mu$  se gráfica contra X, por lo que el comportamiento de  $\mu$  (con  $\lambda=0.8$ ) con respecto a  $X_0$  es:

$\mu$		Valores Estables en X	$X_0$
De	A		
-0.6795	-0.6428	4	[-0.9,0.9]
-0.6428	-0.4591	2	[-0.9,0.9]
-0.4591	0.4591	1	[-0.9,0.9]
0.4591	0.6428	2	[-0.9,0.9]
0.6428	0.6795	4	[-0.9,0.9]

Este sistema muestra un comportamiento dos diagrama de bifurcaciones del sistema logístico, presenta zonas caóticas tanto para valores positivos como negativos y entre ellas la zona especial en la que encontramos desde 5 valores fijos estables hasta 9 con  $\mu$  desde 0.8033 hasta 0.8671 en la zona positiva y desde -0.8671 hasta -0.8033 en la zona negativa. El estudio se realizó para un rango de  $\mu$  de [-0.9, 0.9].

Las gráficas de bifurcaciones con  $X_0 \rightarrow 0$  no se produce ningún efecto pseudo caos sobre el diagrama pero cuando  $X_0 \rightarrow 1$  se eliminan el comportamiento de la zona positiva de  $\mu$ , por no estar dentro de los rangos de operación (Figura E).

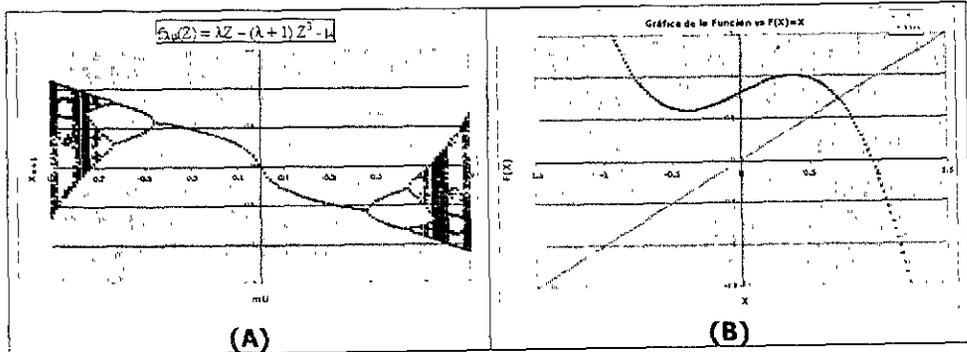
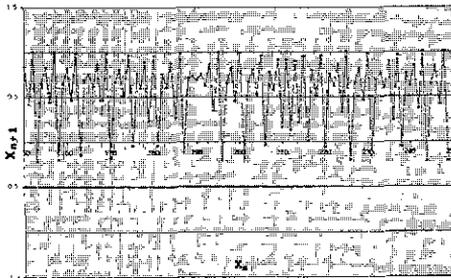
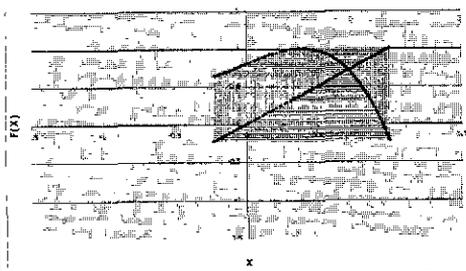


Gráfico de la Función Iterada



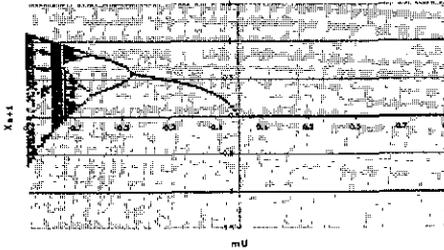
(C)

Atractores de la Función



(D)

$$F_{\mu}(Z) = \lambda Z - (\lambda + 1)Z^2 - \mu$$



(E)

## Capítulo 5.

### Control de Bifurcaciones y Ruta al Caos en Sistemas Dinámicos

En este capítulo nos enfocaremos al control de inestabilidades en sistemas de ingeniería de alto desempeño. Se considera específicamente a los sistemas de control no lineal que operan cerca de su límite de operación. Existen situaciones altamente no lineales que ocurren en la operación de alto desempeño de una gran variedad de sistemas. Estos sistemas tienden a exhibir inestabilidades en términos de un salto a un nuevo punto de operación de bajo desempeño, comportamiento oscilatorio, comportamiento caótico o colapso del sistema en la ausencia de apropiadas acciones de control. Tales situaciones requieren el estudio para controlar los fenómenos no lineales como son las bifurcaciones y el caos.

Existe el control de sistemas dinámicos caóticos denominado control de la ruta al caos, el cuál utiliza el diseño por medio de las leyes de control realimentado que aseguran un grado suficiente de estabilidad para una bifurcación primaria en las rutas al caos. Más aún, como la cascada de doblamiento de período es una de las más famosas rutas al caos, la estabilización de las bifurcaciones de doblamiento de período para sistemas no lineales discretos en el tiempo de dimensión  $n$  se investigan. La técnica presentada aquí se enfoca en la considerable flexibilidad en términos del comportamiento que es aplicable a los sistemas no lineales sobre un rango de los valores del parámetro.

Una aplicación importante es el fenómeno de estancamiento en los compresores de flujo axial. Una combinación de análisis de bifurcación y control no lineal se utiliza para estudiar la dinámica y el control activo del estancamiento rotatorio en un modelo de compresor de flujo axial.

Cada uno de los sistemas de ingeniería tiene sus límites en su ambiente de operación, más allá del cuál la función no es útil. En respuesta al incremento de demanda en el desempeño de muchos sistemas de ingeniería, existe un gran interés en operarlos cerca del borde de estos límites. Estas son situaciones altamente no lineales que ocurren en las operaciones de alto desempeño de una gran variedad de sistemas. Este capítulo se enfoca en el control de inestabilidades no lineales en sistemas de ingeniería de alto desempeño. Estas pertenecen al tipo de problemas que no pueden ser dirigidos adecuadamente sin retomar resultados de la dinámica no lineal. Por ejemplo, se requiere estudiar el control de fenómenos no lineales tales como las bifurcaciones y caos. Se consideran problemas teóricos y aplicaciones. La aplicación se basa en máquinas rotatorias.

El importante papel que juegan los conceptos de la teoría de bifurcación en la ciencia, ingeniería y ciencias sociales esta bien establecido. Los fenómenos no lineales tales como la aparición de ciclos límite, divergencias a nuevos estados estables, y la transición a comportamientos caóticos han sido observados y estudiados para una gran variedad de sistemas. Se toman como referencia los siguientes trabajos en el control de tales fenómenos no lineales (e.g. [12], [13], [25], [26], [27], [2], [1], [28], [29], [30]). El interés en estos problemas de control es debido parcialmente al incremento de desempeño que es potencialmente permisible en los sistemas modernos de ingeniería cuando operan cerca de sus límites de estabilidad. Los sistemas que funcionan en o cerca de los límites de sus operación tienden a experimentar bifurcaciones bajo disturbios moderados. Estas bifurcaciones pueden resultar en:

- ❖ Un salto a un nuevo punto de operación de bajo desempeño.
- ❖ Comportamiento oscilatorio.
- ❖ Comportamiento caótico.
- ❖ Colapso del sistema.

Ejemplo de las consecuencias de operar un sistema cerca de sus límites inherentes incluyen:

- Estancamiento de aviones en supermaniobras;
- Pérdida de carga en sistemas eléctricos de potencia;
- Estancamiento en la rotación en compresores axiales.

Aunque un sistema este operado dentro de sus límites físicos, aun puede presentar eventos catastróficos si operan muy cerca de estos límites. En tales modos de operación, el sistema es altamente vulnerable a pequeños o moderados disturbios externos. Es muy frecuente encontrar que en este tipo de modo de operación, los modelos matemáticos deben ser no lineales. Esto es, los modelos linealizados no pueden ser utilizados para predecir la subsecuente respuesta del sistema a un disturbio desestabilizante.

Existe un gran interés en una gran cantidad de aplicaciones que operan muy cerca de sus límites de sus propiedades, debido al incremento de demanda en los sistemas actuales, ya que se debe de incrementar el desempeño mientras se mantiene un margen de seguridad aceptable y este es un reto para la ingeniería. Un aspecto importante en este reto es el diseño de sistemas de control para estos sistemas forzados no linealmente.

Para entender cualquiera de estos comportamientos complejos que se caracterizan por la inestabilidad de un sistema forzado no linealmente, uno se debe de refugiar en el modelado matemático. Puesto que los transientes dominan estos fenómenos, los modelos matemáticos útiles caen dentro del rango de los modelos dinámicos.

Esto es, se trata con sistemas de ecuaciones de evolución con un parámetro independiente del tiempo. Estos pueden incluir ecuaciones diferenciales o en diferencia de varios tipos. Por supuesto, las ecuaciones de evolución pueden estar sujetas a apremios algebraicos, condiciones límites, etc.

Los cambios cualitativos en el comportamiento de los sistemas no lineales sujetos a disturbios es un tema ligado a los conceptos de la teoría de bifurcación. Esta teoría ha llegado a ser una herramienta indispensable en el análisis de muchos problemas de las matemáticas aplicadas. La teoría de bifurcación, cuya historia esta muy ligada con las aplicaciones, ha sido aplicada exitosamente en diversos problemas de la ciencia y tecnología.

Existe el interés en las implicaciones de la teoría de bifurcación en el control de sistemas forzados no linealmente con un pequeño margen de estabilidad. En estas aplicaciones se presentan una gran variedad de bifurcaciones, tanto estáticas, dinámicas, locales y globales. Estos conceptos pueden ser aplicados para el control de los compresores de flujo axial, ya que el estancamiento del compresor es un tipo de fenómeno de bifurcación de los aviones [31] y procesos industriales, caracterizados por una gran caída de flujo masico (en promedio) que dirige a la máquina a correr en unas condiciones de operación muy deficientes. En particular, el estancamiento de la rotación es un tipo de estancamiento muy difícil del cual se pueda recobrar, usualmente requiere de un disparo completo y un subsecuente re-arranque [32]. Puesto que la condición más eficiente de operación es en el punto en donde el compresor esta cerca del estancamiento, la condición de operación normal estará muy cerca del punto de estancamiento. Por lo tanto, la máquina tiene una posibilidad no insignificable de entrar en estancamiento después de un disturbio o durante un período de transición. El diseño de un control activo mejora la operabilidad en la vecindad del punto de estancamiento y que la máquina regrese a condiciones de operación normal de frente a un disturbio.

### **5.1. Control Lineal, Control no Lineal y Control de Bifurcación**

Tradicionalmente, el diseño de linearización aproximado y el control lineal han sido la metodología principal para el desarrollo de la teoría de control y sus aplicaciones. Las leyes de control son diseñadas principalmente con referencia a una condición fija de operación, tal como un punto fijo de equilibrio. Posteriormente, gana campo en el diseño de control el empleo del ajuste a diferentes (cambiando) condiciones de operación

Desde el inicio, la ingeniería de control se ha interesado con el desempeño de sistemas de control no lineal. En el proceso de evaluación el desempeño de los sistemas de control no lineal, la gente ha comenzado a interesarse en la dinámica no lineal de los sistemas de control. Los resultados más excitante ligados con dinámica no lineal para el control de este tipo [33], [34], [35], [36], [37], [38].

Chang y sus colaboradores han efectuado un trabajo sistemático sobre la dinámica de los sistemas de control [36], [37], [38]. Es bien conocido que el criterio de estabilidad establecido en la teoría de control lineal sólo es válido en la vecindad local de un punto de ajuste de un sistema no lineal. Más allá de esta vecindad inmediata, otros estados atrayentes de equilibrio, los cuales no pueden ser estudiados con el modelo lineal localizado, pueden destruir la estabilidad global del punto de ajuste estabilizado localmente, con esto, mucho de la fuerza de las teorías lineales. En [36], [37], [38] se propone una aproximación a bifurcación para estudiar sus características de bifurcación y la dinámica global del sistema no lineal controlado. La idea principal es tratar a la ganancia del controlador como un parámetro de bifurcación y estudiar el cambio cualitativo del comportamiento del sistema al variar la ganancia del controlador. En particular, [36] estudió las características de la bifurcación de sistemas no lineales bajo control PID convencional. Un modelo de inhibición de sustrato de bioreactores es utilizado para ilustrar la riqueza de los comportamientos dinámicos que pueden ser investigados por un controlador simple. Estos comportamientos dinámicos en el sistema de lazo cerrado incluyen múltiples puntos de equilibrio, ciclos límite, y atractores extraños. En otro trabajo [37] la dinámica global de un reactor autotérmico bajo control por realimentación lineal también es estudiado. Se encuentra que la estabilidad global del punto de ajuste es destruida en tanto la ganancia de control cruza más allá del valor marginal, y que variaciones adicionales de la ganancia del control resulta en pérdida de estabilidad en el punto de bifurcación Hopf. En el caso de una bifurcación subcrítica de Hopf, un punto de ajuste localmente estable puede coexistir con un ciclo de gran amplitud y límite estable. Este es un ejemplo del tan llamado límite de estabilidad "peligroso" [38]. Continuando con el trabajo de [36], [37], el efecto global de la saturación del controlador sobre la dinámica de lazo cerrado es investigado en [38].

En este capítulo se está interesado principalmente en el control de la dinámica no lineal. El marco principal es *el control de bifurcación*. El tipo de trabajo de Chang y colaboradores está cercanamente relacionado al control de bifurcación pero existen diferencias mayores. En el estudio de dinámica no lineal de sistemas de control, las características de bifurcación y la dinámica de los sistemas controlados se analizan pasivamente. Mientras que el control de bifurcación incluye el diseño de controles realimentados para modificar activamente la estabilidad y amplitud de las soluciones bifurcadas en sistemas de control no lineal.

Existe un interés muy amplio en las implicaciones de la teoría de bifurcación para el control de sistemas no lineales con margen pequeño de estabilidad [12], [13], [19], [25], [2], [1], [28], [29]. En [12] el control de estabilización local para sistemas muestra bifurcación de Hopf. En [13], la estabilización con realimentación local y control de bifurcación se estudia para sistemas que muestran bifurcación estacionaria. En [19], [3], los resultados de [12] se extienden al emplear

realimentación dinámica con un *filtro supresor*. la principal ventaja del uso de filtros supresores es el lazo de realimentación es la preservación de equilibrio en todo el sistema aún bajo cierta incertidumbre. También se considera en [3] las leyes de control asistido por filtros *supresores* para sistemas que poseen una bifurcación pitchfork estacionaria.

## 5.2 Bifurcaciones Locales

Existen muchos tipos de bifurcaciones. De particular interés en muchos sistemas de ingeniería son las bifurcaciones locales, i.e., aquellos que resultan de la pérdida de estabilidad o equilibrio. Las bifurcaciones globales son aquellas que toman lugar sobre algún dominio en el espacio del estado.

### 5.2.1 Ejemplos de baja dimensión

El término *bifurcación* se refiere al cambio cualitativo en la fase presentada por los sistemas dinámicos que ocurre con ligeras variaciones en los parámetros del sistema. Una valor del parámetro en el cuál ocurre un cambio es llamado un *valor crítico del parámetro*. Poncaire [40] inicialmente utilizó el término "bifurcación" para describir la partición de las soluciones de equilibrio para una familia de ecuaciones diferenciales. Las bifurcaciones sólo consideran los puntos de equilibrio que son conocidos como estacionarios o bifurcaciones estáticas. También existen bifurcaciones del tipo Hopf, las cuales incluyen tanto soluciones de equilibrio como periódicas basandose en la siguiente estructura:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (5.1)$$

Los tipos de bifurcaciones se sumarizan en las siguientes:

i) Bifurcación de nodo silla de montar: la forma normal esta dada por:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (5.2)$$

Las soluciones de equilibrio bifurcado existen para  $\mu > 0$  y están dadas por  $x = \pm \sqrt{\mu}$ . La rama  $x = \sqrt{\mu}$  es estable, mientras que la otra rama  $x = -\sqrt{\mu}$  es inestable. La Figura 5.1 muestra el diagrama de esta bifurcación.

ii) Bifurcación transcritica: La forma normal esta dada por:

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (5.3)$$

El equilibrio bifurcado,  $x = \mu$ , existe para ambos  $\mu > 0$  y  $\mu < 0$ . Para  $\mu > 0$  la rama bifurcada es estable y para  $\mu < 0$  es inestable.

iii) Bifurcación de Pitchfork La forma normal (para el caso supercrítico) esta dado por:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \tag{5.4}$$

Existen dos ramas de equilibrio,  $x = \pm \mu$  para  $\mu > 0$ , ambos son estables.

iii) Bifurcación Hopf: La forma normal esta dada por:

$$\dot{x} = -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \tag{5.5}$$

$$\dot{y} = x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \tag{5.6}$$

Las soluciones bifurcadas asociadas son trayectorias periódicas no constantes.

El caos esta muy cercanamente relacionado a las bifurcaciones. Si (5.1) posee un punto de equilibrio  $x_0(\mu)$  para un rango de valores del parámetro  $\mu$ . Se asume que éste es un equilibrio asintoticamente estable para una gran porción de este rango. Entonces el equilibrio puede como una condición de operación posible para el sistema físico modelado por (5.1). Cuando los sistemas operan en una condición altamente forzada es posible para el equilibrio  $x_0(\mu)$  perder estabilidad para algunos valores del parámetro  $\mu_c$ . en tal pérdida de estabilidad, el sistema no lineal (5.1) generalmente presenta una bifurcación local. Tal bifurcación puede dar alzamiento a nuevos equilibrios u órbitas periódicas de (5.1).

En las aplicaciones, puede suceder que un equilibrio asintoticamente estable pierda estabilidad por medio de una bifurcación estacionaria, pero la solución del equilibrio sobreviva por sí sola. En tal caso ocurre la bifurcación transcritical o un pitchfork.

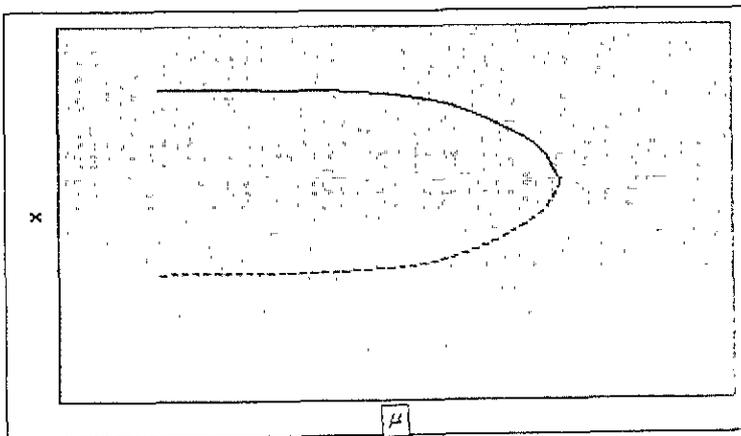


Figura 5.1. Bifurcación de Silla de Montar (Saddle).

### 5.3 Bifurcaciones Globales, Caos y Crisis

Thompson y Stewart [41] se refieren a un tipo de bifurcación global en el espacio del estado involucra la desaparición continua de un ciclo limite a través de la colisión con un punto de equilibrio se define como *catástrofe de cielo azul*. Este no es una bifurcación local. Sin embargo, posee las características de la bifurcación de nodo de silla de montar. Aquí es útil referirse a esta y otras bifurcaciones ya que poseen la característica de la desaparición de una solución (estable) del sistema (5.1) por una colisión con un movimiento invariante de la silla de montar. Por lo tanto la bifurcación de nodo de silla de montar puede ser vista como una bifurcación de cielo azul de un equilibrio estable.

Esta bifurcación de cielo azul puede tomar dos formas: la desaparición de un ciclo limite estable y la desaparición de un ciclo limite inestable. Más aún, es una bifurcación global, discontinua o catastrófica. También sirve como un prototipo de una bifurcación de cielo azul para atractores extraños (un atractor muestra comportamiento caótico).

El caos es un comportamiento irregular que pareciera aleatorio y despliega sensibilidad extrema a las condiciones iniciales [41], [42]. En los resultados para las condiciones iniciales, al menos inicialmente, en trayectorias que divergen exponencialmente rápido.

El término *crisis* fue introducido en [43], [44] y aplicado a repentinos cambios cualitativos en atractores extraños con cambios cuasi-estáticos en los parámetros. Una crisis involucra la destrucción repentina de un atractor extraño por una colisión con un punto de silla de montar, una órbita periódica inestable y se denomina *crisis limite*.

### 5.4 Bifurcaciones Catastróficas

En la clasificación de las bifurcaciones, es muy útil distinguir entre bifurcaciones continuas y discontinuas (o catastróficas). En el caso de bifurcaciones discontinuas, el sistema exhibe un salto desde el atractor nominal a otro, posiblemente infinito. Mientras que en el caso de bifurcaciones continuas, el sistema desarrolla en forma continua a otro atractor. La bifurcación de nodo de silla de montar, en la cual un par de equilibrios (una silla de montar y un nodo) desaparecen simultáneamente al pasar a un valor critico del parámetro, esto es una bifurcación fundamental en la dinámica no lineal. Es el ejemplo más simple de una bifurcación discontinua o catastrófica.

En el caso de la bifurcación de silla de montar, la trayectoria interrumpida del atractor (equilibrio estable) indica una bifurcación inestable. Un caso contrastante es la bifurcación estable (supercritica) de pitchfork la cual es una bifurcación

continua. Una manera para definir una bifurcación discontinua o continua es el uso de la llamada función fase-parámetro, la cual asocia cada uno de los valores del parámetro  $\mu$  al correspondiente atractor [41]. Utilizando esta noción, una bifurcación discontinua ocurre en un valor del parámetro  $\mu$  en donde la función fase-parámetro es discontinua.

Los diagramas esquemáticos de bifurcación continua y discontinua  $\mu = \mu_0$  se muestran en la Figura 5.2 [41].

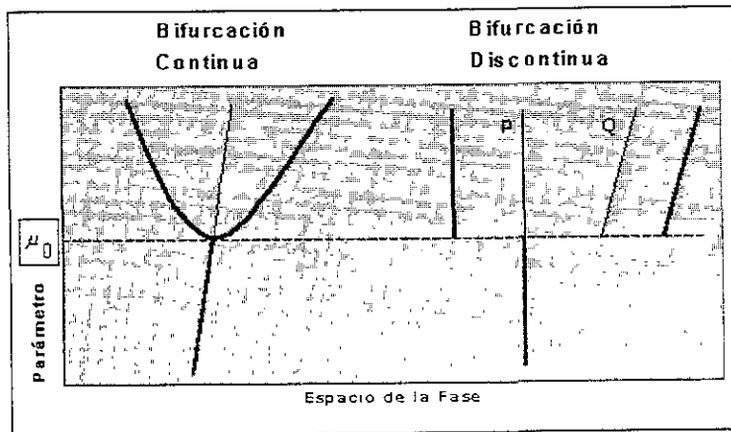


Figura 5.2. Diagrama esquemático de la función fase-parámetro de las bifurcaciones continuas y discontinuas en  $\mu = \mu_0$ ; la trayectoria de P continua al superar el punto de bifurcación, mientras que la trayectoria Q es interrumpida.

### 5.5 Filtro Supresor

Los filtros supresores se utilizan comúnmente en los sistemas de control para sistemas de potencia [45] y aviones [46]. La principal ventaja en el uso de estos filtros es la robustez del punto de operación del sistema para modelar incertidumbres y para otras acciones de control que puedan ser utilizadas. A continuación se presenta una breve discusión de estos filtros, su uso en el control de sistemas parametrizados y especialmente en problemas de bifurcación.

Un filtro supresor (o circuito supresor) es un filtro estable pasa altas cuya función [47, p. 477] de transferencia es:

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{s}{(s+a)} = 1 - \frac{a}{(s+a)} \tag{5.7}$$

Aquí,  $a > 0$  es el inverso de la constante de tiempo del filtro. Teniéndose:

$$z(s) := \frac{1}{(s+a)} x(s), \quad (5.8)$$

La dinámica del filtro puede ser escrita como:

$$\dot{z} = x - az \quad (5.9)$$

Y

$$\dot{y} = x - az. \quad (5.10)$$

La realimentación a través de los filtros supresor resulta en la *preservación del equilibrio* en la presencia de incertidumbres en el sistema y otros mecanismos de control. De hecho, la propiedad más relevante de un sistema controlado a través de un filtro supresor es que todo el equilibrio original es preservado. Así, uno se puede concentrar en el diseño del controlador enfatizando el incremento en el desempeño alcanzado para un equilibrio en particular, sin el riesgo de afectar la localización de otros equilibrios. Como puede ser observado en [48], aún con un cuidadoso ajuste de la curva, es posible que equilibrios extraños sean traídos muy cercanamente al equilibrio nominal, incrementando significativamente la vulnerabilidad de la estabilidad del equilibrio. Aquí, la vulnerabilidad ocurre debido al dominio de la atracción para el equilibrio nominal estará comprometido en la dirección de un equilibrio extraño cercano.

Los puntos de equilibrio representan, de alguna forma, una capacidad del sistema para permanecer de una cierta manera en el estado estable. Este filtro el cual rechaza señales de entrada de estado estable, tiene el efecto de "lavar" la proporción de cambio de la señal en el estado estable y por lo tanto minimiza la tendencia opuesta a salir de la estabilidad. En otras palabras, sí el controlador es puramente no lineal, la estabilidad lineal de cada uno de los puntos de equilibrio también será preservado.

Los filtros supresor rechazan las entradas de estado estable, mientras pasan los transientes. En estado estable:

$$z = \frac{x}{a} \quad (5.11)$$

Se han eliminado la salida  $y=0$  y la señal de estado estable.

Considerandose un sistema:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (5.12)$$

Con

$$f(x_c, 0) = 0 \quad (5.13)$$

En donde  $u$  es la entrada de control y  $x_c$  es un punto de equilibrio para el sistema con entrada cero. Dejando que la entrada de control  $u$  sea una función de  $y$ , definido por  $u=h(y)$ , y que  $h$  satisface:

$$h(0) = 0 \quad (5.14)$$

De las ecuaciones (5.9) y (5.10), es claro que  $y$  desaparece en el estado estable. Por lo tanto:

$$f(x_c, h(y_c)) = f(x_c, 0) = 0 \quad (5.15)$$

Y  $x_c$  permanece en un punto de equilibrio en el sistema de lazo cerrado. Esto demuestra que al incorporar un filtro supresor en la realimentación, los puntos de equilibrio del sistema original son preservados y son idénticos a los componentes correspondientes de los equilibrios de lazo abierto.

## 5.6 Control de la Bifurcación de Doblamiento de Período a través de Filtros Supresores

Aquí se presentan los resultados sobre el control de la bifurcación de doblamiento de período por medio de filtros supresores discretos en el tiempo.

Específicamente, para:

$$x_{k+1} = f_{\mu}(x_k, u) \quad (5.16)$$

La dinámica de los filtros supresor esta dada por:

$$z_{k+1} = x_k - (d-1)z_k \quad (5.17)$$

Y la función de salida esta dada por:

$$y_k = x_k - dz_k \quad (5.18)$$

En donde  $0 < d < 2$  corresponde a los filtros supresores estables. En esta fórmula,  $n$  filtros supresores, uno para cada estado del sistema, son presentados.

La propiedad decisiva de los filtros supresores es que rechazan las entradas de estado estable, mientras que dejan pasar los transientes de las entradas. Para verificar esto con (5.17)-(5.18), se observa el estado estable:

$$x_k = dz_k$$

La salida  $y_k=0$  y la señal de estado estable ha sido eliminada.

Sí la entrada de control  $u$  es una función de  $y_k$ ,  $u=u(y_k)$  con  $u(0)$ ,  $y_k$  desaparece en estado estable. Por lo tanto, al incorporar filtros supresor en la realimentación, el equilibrio del sistema se preserva.

### 5.7 Sistema Hénon: El Doblamiento de Período en Ruta al Caos.

Considerando el sistema no lineal Hénon:

$$x_{n+1} = \rho - x_n^2 + py_n \tag{5.19}$$

$$y_{n+1} = x_n \tag{5.20}$$

En donde  $p$  y  $\rho$  son parámetros reales. A continuación fijamos a  $p=0.3$  y observando  $\rho$  como el parámetro de bifurcación. Se presentan los resultados para  $\rho \in [0, 1.4]$ . La Figura 5.3 muestra el diagrama de bifurcación del sistema Hénon bajo este rango del parámetro  $\rho$ . Existe una cascada de doblamiento de período que llega al caos. Este doblamiento de período es el foco del diseño.

En la Figura 5.3, los puntos fijos  $(x^*, y^*)$  son:

$$\left( \frac{\rho - 1 + \sqrt{(1 - \rho)^2 + 4\rho}}{2}, \frac{\rho - 1 + \sqrt{(1 - \rho)^2 + 4\rho}}{2} \right)$$

El punto crítico  $\rho_c$  en el cuál se presenta el primer doblamiento de período es:

$$\rho_c = \frac{3}{4}(1 - p)^2$$

Esto traslada a  $\rho_c = 0.3675$  para el caso de  $p=0.3$ .

Considerando el control del sistema Hénon:

$$x_{n+1} = \rho - x_n^2 + py_n + u_n \tag{5.21}$$

$$y_{n+1} = x_n \tag{5.22}$$

En donde  $u_n$  es la entrada de control. Notese que esta entrada de control puede ser interpretada como una perturbación al parámetro de bifurcación  $\rho$ . La linearización del sistema en el punto fijo  $(x^*, y^*)$  es controlable en el valor crítico del parámetro  $\rho_c$  (de hecho, para todos los valores de  $\rho$ ).

Existen varias consideraciones para la elección de la forma de la función de control  $u_n$ . Al aplicar realimentación estática, se toma  $u_n$  con la siguiente forma  $u_n = u_n(x_n - x^*, y_n - y^*)$ . Claramente se observa que se requiere el conocimiento preciso de  $(x^*, y^*)$  sobre un rango de valores del parámetro. Esto requiere más severidad en el control para depender del parámetro  $\rho$ . También esta elección del controlador no preserva los otros puntos fijos existentes en el sistema (5.19)-(5.20). Estas consideraciones dirigen al empleo de la salida del filtro supresor como el argumento para el control  $u_n$  en la siguiente sección.

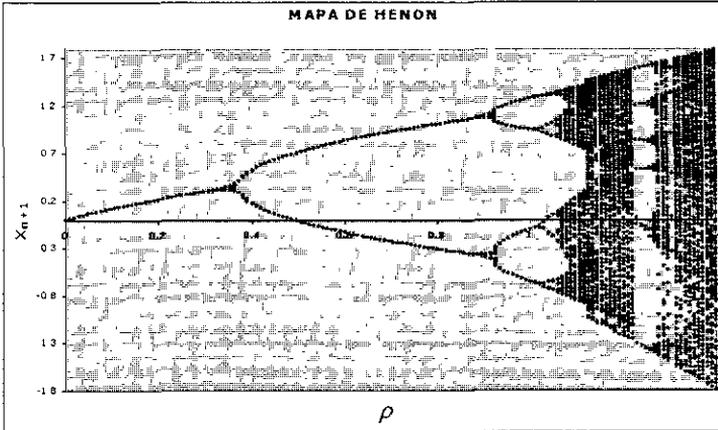


Figura 5.3. Diagrama de bifurcación del sistema Hénon de lazo abierto.

### 5.7.1 Control Robusto no Lineal de la Bifurcación

Al emplear una ley control de realimentación dinámica resulta en la siguiente descripción del sistema:

$$x_{n+1} = \rho - x_n^2 + py_n + u_n \tag{5.23}$$

$$y_{n+1} = x_n \tag{5.24}$$

$$\omega_{n+1} = x_n + (1-d)\omega_n \tag{5.25}$$

$$z_n = x_n - d\omega_n \tag{5.26}$$

$$u_n = k_1 z_n^3 \tag{5.27}$$

Esto envuelve el uso de un filtro supresor discreto en el tiempo. Aquí  $\omega_n$  es la variable de estado del filtro,  $z_n$  es la salida de la función y  $0 < d < 2$  esta relacionado a la constante de tiempo del filtro. Sólo se utiliza un filtro. El controlador  $u_n$  (5.27) es un función de la salida  $z_n$  y no depende del conocimiento de  $(x^*, y^*)$  y/o  $\rho$ .

La ley de control asegura que localmente el grado de estabilidad es lo suficientemente grande. Por lo tanto para bifurcaciones de doblamiento de período adicionales se previenen en el rango de interés del parámetro. La Figura 5.4 muestra el diagrama de bifurcación en el cuál se aplica esta elección de control para  $k_1 = 0.9$ .

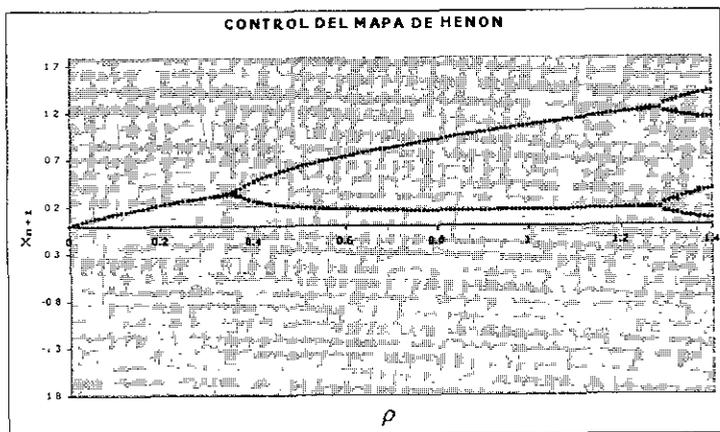


Figura 5.4. Diagrama de bifurcación del sistema Hénon con control dinámico cúbico con  $k_1=0.9$ .

### 5.7.2 Control Robusto Lineal de la Bifurcación

Finalmente, se considera el control lineal asistido por filtro supresor para retrasar la ocurrencia de bifurcación de doblamiento de período en el sistema Hénon. El sistema de lazo cerrado ahora está dado por las ecuaciones (5.23)-(5.26) junto con la ley de control lineal:

$$u_n = k_1 z_n \tag{5.28}$$

Con este control, la primera bifurcación de doblamiento de período es pospuesta a valores mayores de  $\rho$ . También es pospuesta la cascada de doblamientos de período y el caos. El valor crítico  $\rho_c$  en el cual toma lugar el doblamiento de período después de la realimentación está dado por:

$$\rho_c^* = \rho_c + \frac{2(1-p)}{2-d} k_1 + \frac{2(1-p)^2}{(2-d)^2} k_1^2$$

La Figura 5.5 muestra el efecto del control lineal sobre el sistema Hénon, con un valor de  $k_1=0.3$  y en la Figura 5.6 con una ganancia  $k_1=0.9$ . Como puede observarse se ha desplazado la acción de la generación de bifurcaciones de doblamiento de período al máximo. Las órbitas alcanzadas no son órbitas inestables incrustadas en un atractor caótico, sino que son órbitas del sistema para valores del parámetro en ruta a caos a través de la cascada de doblamiento de período. Esto difiere de la aproximación de Ott, Grebogi y Yorke [26], la cual exige la estabilización de las órbitas periódicas inestables incrustadas en un atractor caótico. Las principales características del algoritmo de Ott, Grebogi y Yorke son:

1. Este es un método de realimentación;
2. Cualquier parámetro accesible del sistema puede ser utilizado como parámetro de control;

3. El ruido puede destabilizarla órbita controlada resultante en explosiones caóticas ocasionales.
4. Antes de establecerse en la órbita periódica deseada la trayectoria exhibe un largo transiente caótico [49].

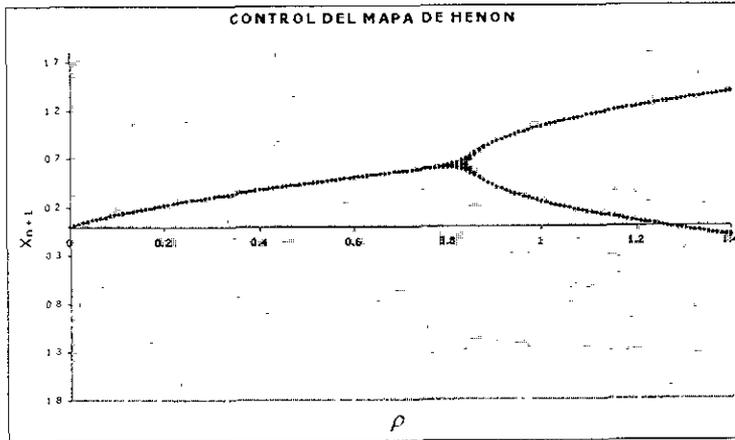


Figura 5.5. Muestra de la respuesta en tiempo del sistema Hénon bajo control lineal con un valor de  $k_f = 0.3$  de ganancia.

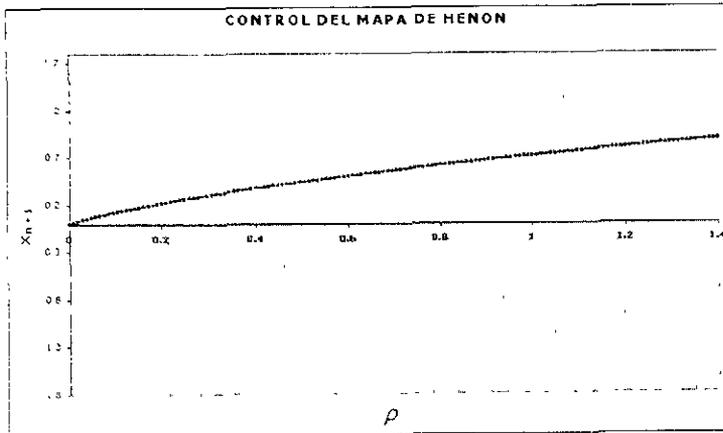


Figura 5.6. Muestra de la respuesta en tiempo del sistema Hénon bajo control lineal con un valor de  $k_f = 0.9$  de ganancia.

Al efectuarse el análisis del pseudo caos en el sistema de Hénon, se observó que es eliminado al aplicar el filtro supresor, ya sea este de manera lineal o no lineal.

Recientemente el control por realimentación con retraso en el tiempo (TDFC) ha provocado un renovado interés dentro del contexto de los sistemas dinámicos

caóticos. Originalmente, el control por realimentación con retraso fue introducido para la supresión del caos; como un resultado de esto, las bifurcaciones existentes en los sistemas dinámicos eran eliminadas. El trabajo de Chen, Lu, Nicholas y Rangatham [50] reportó la observación de que al contrario, la realimentación con retraso también puede crear nuevos fenómenos de bifurcaciones, o modificar la forma y estabilidad de algunas bifurcaciones existentes. Esto implica que si no se efectúa adecuadamente el diseño, los controles por realimentación con retraso pueden no trabajar correctamente en algunos casos.

### 5.8. Aplicaciones en Sistemas de Control de Procesos

En esta sección efectuaremos un análisis de algunas situaciones que ocurren en el área de control de procesos, aquí se presentan los diagramas de bifurcaciones de:

- Linearización de una válvula de igualación de porcentaje
- Ganancia del proceso
- Banda muerta

#### 5.8.1 Diagrama de bifurcación de la linearización de una válvula de igualación de porcentaje.

Existen ocasiones en las que es deseable una característica lineal pero no esta disponible. Este es muchas veces el caso en donde las válvulas de mariposa o boia deben de ser utilizadas debido a las consideraciones mecánicas sin el desempeño lineal requerido [51]. Un método para moderar las características de igual porcentaje, es a través del uso de un divisor, como se muestra en la Fig. 5.7. La mayoría de los divisores tienen factores de escalamiento ajustables, obteniendose cálculos de la forma:

$$X = \frac{\gamma Y}{z + (1 - z)Z} \tag{5.29}$$

en donde  $Y, Z$  = señales de entrada,  $X$  = señal de salida,  $\gamma$  = factor multiplicativo constante,  $z$  = elevación ajustable del cero.

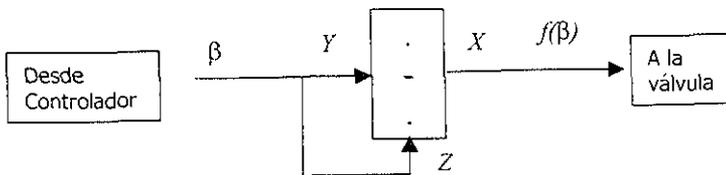


Figura 5.7. Un divisor puede generar una función no lineal adecuada para cancelar la característica de igualación de porcentaje.

Cuando es utilizado como se muestra en la Fig. 5.7, con  $y$  fijo en 1, la fórmula se convierte en:

$$f(m) = \frac{\beta}{z + (1-z)\beta} \tag{5.30}$$

ésta función pasa a través de los puntos (0,0) y (1,1) para todos los valores de  $z$ , con la salvedad de que la curvatura esta determinada por  $z$ ,  $\beta$  es la variable manipulada.

A continuación se presenta el diagrama de bifurcación del sistema.

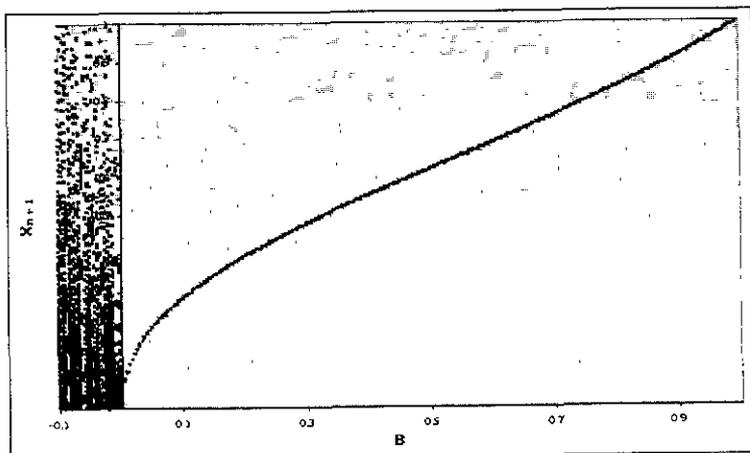


Figura 5.8. Diagrama de bifurcación de la linearización de una válvula de igualación de porcentaje.

En la Fig. 5.9 se puede observar que el comportamiento de la válvula es estable y no se presenta fenómeno de bifurcación alguno.

### 5.8.2 Diagrama de bifurcación de la ganancia del proceso.

Considerando un sistema de mezclado en donde el concentrado  $X$  es adicionado al diluyente  $\beta$  para producir una mezcla que tenga la composición  $x$ . Un balance de materia da:

$$x = \frac{X}{\beta + X} \tag{5.31}$$

La ganancia en estado estable de este proceso es:

$$Kp = \frac{dx}{d\beta} = \frac{x(1-x)}{\beta} \tag{5.30}$$

A continuación se muestra el diagrama de bifurcación de este parámetro de ganancia del proceso.

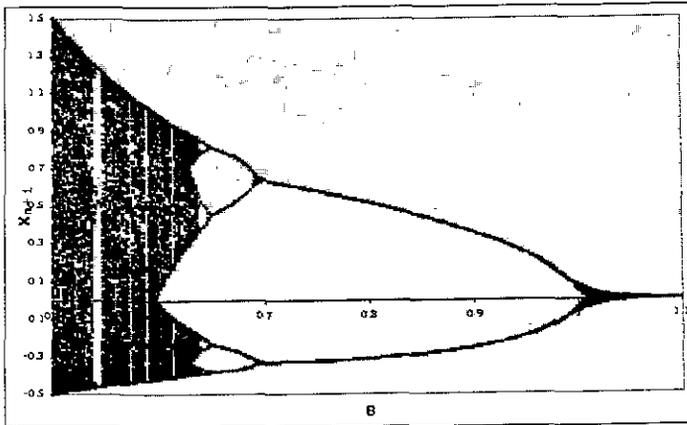


Figura 5.9. Diagrama de bifurcación de la ganancia del proceso.

En este diagrama podemos observar que el comportamiento de la mezcla obtenida con respecto al diluyente es inverso al típico diagrama de bifurcaciones ya que los doblamientos de período son de derecha a izquierda.

### 5.8.3 Diagrama de bifurcación de la zona muerta de un proceso.

El elemento de zona muerta es utilizado en algunos sistemas de control para filtrar la sensibilidad a la amplitud del ruido y para prevenir sobresaltos en funciones secuenciales.

La función que describe este comportamiento es el complemento de un limitador.

$$Gz = 1 - \frac{\alpha}{90^\circ} - \frac{2z}{\pi\beta} \cos\alpha \tag{5.32}$$

## CAPITULO 6.

### CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se ha comprendido que todo sistema dinámico tiene incrustado características que permiten definir su comportamiento, ya que podemos establecer y definir con exactitud, los valores de los parámetros en los cuales se presentan los diferentes tipos de bifurcaciones de cada uno de ellos, adicionalmente el estudio profundo de su comportamiento, nos lleva a descubrir nuevas propiedades. En los estudios referentes a los diagramas de bifurcaciones se hacen referencia generalmente a los estados estables después de un gran número de iteraciones, pero existen sistemas en los que el comportamiento inicial es de suma importancia, ya que se deben establecer los rangos o velocidad de respuesta de sus componentes, y el efecto de pseudo caos se ha presentado en más del 90% de los sistemas estudiados.

El control de las bifurcaciones se puede efectuar con el uso de técnicas que permite definir la cantidad de estados estables que se desea tener en un sistema, dependiendo del tipo de bifurcación es la técnica a utilizar. Se pretende seguir estudiando estos efectos en mayor cantidad de sistemas en investigaciones futuras.

La importancia de este trabajo es que en los estudios más importantes sobre bifurcaciones se pone más interés en el valor de los parámetros (ya que de su valor depende la zona del diagrama de bifurcación en que opera un sistema), y el valor inicial de la variable queda como segundo término, en esta tesis se comprueba que dependiendo del valor inicial de la variable, el comportamiento del diagrama de bifurcación puede variar considerablemente.

**ANEXO 1**

## ▪ Programa del sistema logístico.

```

/* PROGRAMA QUE EVALUA EL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCION LOGISTICA */
/* POR MEDIO DEL DIAGAMA DE BIFURCACION */
/* DESARROLLADA POR EL ING. DAVID MUÑOZ AGUILAR CON LA ASESORIA */
/* DEL DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH */
/* DE NOVIEMBRE DEL 2001 */

#include <graphics.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <dos.h>

#define HORIZ_DIR 0 /* direccion horizontal */
#define VERT_DIR 0 /* direccion vertical */

/* nombres de las diferentes tarjetas de video soportadas */
char *dname[] = { "solicitud de deteccion",
                 "CGA",
                 "MCGA",
                 "EGA",
                 "EGA 64K",
                 "EGA monocromatica",
                 "IBM 8514",
                 "Hercules monocromatica",
                 "PC AT&T 6300",
                 "VGA",
                 "PC IBM 3270"
                 };

double calc_logi(double variable, double a),
void rectangulo(int izq, int arr, int der, int aba);

int main(void)
{
    int i, x, y, color, maxx, maxy, maxcolor, bkcol;

    /* regresa la informacion del hardware detectado */
    int gdriver, gmode, errorcode;

    /* variables para el logistico */
    double j,k,l,m,r,s,a;

    /* variables para la iteraci3n de la funci3n */
    double X0;
    double B0,Bn,Xn,Bmax, Bmin,Xmax, Xmin,
    int d,e,f,g;
    long itormax, itcgraf, itera, contitera;

    /* se definen los limites del rectangulo */
    int izq, arr, der, aba;

```

DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH

```

char msg[80];

/* detecta el hardware disponible */
detectgraph(&gdriver, &gmode);

/* lee los resultados de la llamada a detectgraph */
errorcode = graphresult();
if (errorcode != grOk) /* ocurrio un error */
{
    printf("Error en Graficor: %s\n", grapherrormsg(errorcode));
    printf("Oprimir cualquier tecla para salir:");
    getch();
    clrscr();
    exit(1); /* termina con un codigo de error */
}

/* despliega la informacion detectada */
clrscr();
printf("Ud. cuenta con una tarjeta de Video %s.\n", dname[gdriver]);
printf("El numero de codigo es %d y el modo es %d\n", gdriver, gmode);

/* datos iniciales para funciön iterada */
printf("Dar el Valor inicial de X0 => ");
scanf("%lf", &X0);
printf("Dar el Valor Maximo de B => ");
scanf("%lf", &Bmax);
printf("Dar el Valor Minimo de B => ");
scanf("%lf", &Bmin);
printf("Dar el Valor Maximo de X => ");
scanf("%lf", &Xmax);
printf("Dar el Valor Minimo de X => ");
scanf("%lf", &Xmin);
printf("Dar el Numero Maximo de Iteraciones a Calcular por B => ");
scanf("%U", &itermax);
printf("Dar el Numero de Iteraciones a Desplegar => ");
scanf("%U", &itergraf);

printf("Oprimir cualquier tecla para continuar:");
getch();

/* inicializar gr ficas y variables locales */
initgraph(&gdriver, &gmode, "");

maxx = getmaxx() + 1;
maxy = getmaxy() + 1;
maxcolor = getmaxcolor() + 1;

/* establece el nuevo color del fondo */
bkcol = 15;
setbkcolor(bkcol);

/* coordenadas dibujar rectanguio bifurcaciön */
izq = 0;
arr = 0;
der = getmaxy();
aba = getmaxy();
color = 1;

```

DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH

```

/*      seleccionar un nuevo color de fondo
setcolor(color);

/*      dibujar rectangulo de bifurcacion
rectangulo(izq,arr,der,aba);

/*      dibujar rectangulo para datos
izq = getmaxy()+1;
arr = 0;
der = getmaxx() ;
aba = getmaxy() ;

/*      dibujar rectangulo de datos
rectangulo(izq,arr,der,aba);

/*      despliega mensaje de la función
x = getmaxx() -5;
y = getmaxy() -460;

settextjustify(RIGHT_TEXT, RIGHT_TEXT),
outtextxy(x, y, "BIFURCACION");
outtextxy(x, y+20, "LOGISTICA");
outtextxy(x, y+60, "VALOR DE X(0)");
outtextxy(x, y+100, "RANGO DE B");
outtextxy(x, y+140, "RANGO DE X(n)");
outtextxy(x, y+300, "ING. DAVID MUÑOZ");
outtextxy(x, y+320, "AGUILAR");
outtextxy(x, y+350, "TUTOR: VLADISLAV");
outtextxy(x, y+370, "KHARTCHENKO");
outtextxy(x, y+390, "KIRILLOVICH");
outtextxy(x, y+440, "NOVIEMBRE DEL 2001");

/*      enviar mensaje a la pantalla
color = 2;
setcolor(color);

/*      crear mensaje para valor de X(0)
sprintf(msg, "%.4e", X0);
outtextxy(634, 90, msg);

/*      crear mensaje para valor de Bmin
sprintf(msg, "%.4e", Bmin);
outtextxy(634, 131, msg);

/*      crear mensaje para valor de Bmax
sprintf(msg, "%.4e", Bmax);
outtextxy(634, 142, msg);

/*      crear mensaje para valor de Xmin
sprintf(msg, "%.4e", Xmin),
outtextxy(634, 170, msg);

/*      crear mensaje para valor de Xmax
sprintf(msg, "%.4e", Xmax);
outtextxy(634, 181, msg);

/*      iniciamos con el calculo logistico
Xn = X0;
s = 0.0;

```

DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH

```

Bn = 0.0;
itera = itermax-itergraf;

while (!kbhit())
{
    inicializar el parametro B
    for (d=1; d<maxy; d++)
    {
        l = d;
        m = maxy;
        Bn = Bmin +((1/m)*(Bmax - Bmin));
        for (contitera=1; contitera<:itermax; contitera++)
        {
            s = calc_logi(Xn,Bn);
            Xn = s;
            if (contitera > itera)
            {
                dibujar punto de operacion
                x = ((Bn - Bmin)/(Bmax - Bmin)) * maxy;
                y = maxy * (1-((Xn - Xmin)/(Xmax - Xmin)));
                color = 1;
                putpixel(x, y, color);
            }
            Xn = X0;
        }
    }
}

/* limpiar pantalla
getch();
closegraph();
return 0;
}

double calc_logi (double variable,double a)
{
    double logistico;
    char msg[80];
    int color;

/*    calculo del valor de la función
logistico = a * variable * (1 - variable);

    return(logistico);
}

void rectangulo (int izq, int arr, int der, int aba)
{
    rectangle(izq,arr,der,aba);
}

```

## ■ Programa del sistema de Richards

```

/* PROGRAMA QUE EVALUA EL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCION DE          */
/* RICHARDS POR MEDIO DEL DIAGRAMA DE BIFURCACION                   */
/* DESARROLLADA POR EL ING. DAVID MUÑOZ AGUILAR CON LA ASESORIA    */
/* DEL DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH                       */
/* NOVIEMBRE DEL 2001                                              */
#include <graphics.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <dos.h>

#define HORIZ_DIR    0          /* direccion horizontal      */
#define VERT_DIR     0          /* direccion vertical        */

/* nombres de las diferentes tarjetas de video soportadas          */
char *dname[] = { "solicitud de deteccion",
                  "CGA",
                  "MCGA",
                  "EGA",
                  "EGA 64K",
                  "EGA monocromatica",
                  "IBM 8514",
                  "Hercules monocromatica",
                  "PC AT&T 6300",
                  "VGA",
                  "PC IBM 3270"
                };

double calc_rich(double variable, double a, double ka, double ere);

void rectangulo(int izq, int arr, int der, int aba);

int main(void)
{
    int i, x, y, color, maxx, maxy, maxcolor, bkcol;

    /* regresa la informacion del hardware detectado                */
    int gdriver, gmode, errorcode;

    /* variables para el calculo de la ecuacion de Richards        */
    double j, k, l, m, r, s, a, ka, ere;

    /* variables para la iteracion de la funcion                    */
    double B0, Bn, X0, Xn, Bmax, Bmin, Xmax, Xmin;
    int d, e, f, g;
    long itermax, itergraf, itera;

    /* se definen los limites del rectangulo                        */
    int izq, arr, der, aba;

    char msg[80];

    /* detecta el hardware disponible                               */
    detectgraph(&gdriver, &gmode),

```

DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH

```

/* lee los resultados de la llamada a detectgraph */
errorcode = graphresult();
if (errorcode != grOk) /* ocurre un error */
{
    printf("Error en Graficor: %s\n", grapherrormsg(errorcode));
    printf("Oprimir cualquier tecla para salir:");
    getch();
    clrscr();
    exit(1); /* termina con un código de error */
}

/* despliega la información detectada */
clrscr();
printf("Ud. cuenta con una tarjeta de Video %s \n", dname[gdriver]);
printf("El número de código es %d y el modo es %d\n",gdriver,gmode);

/* datos iniciales para función iterada */
printf("Dar el Valor inicial de X0 => "),
scanf("%lf", &X0);
printf("Dar el Valor Máximo de B => ");
scanf("%lf", &Bmax);
printf("Dar el Valor Mínimo de B => ");
scanf("%lf", &Bmin);
printf("Dar el Valor Máximo de X => ");
scanf("%lf", &Xmax);
printf("Dar el Valor Mínimo de X => ");
scanf("%lf", &Xmin);
printf("Dar el Valor de r => ");
scanf("%lf", &ere);
printf("Dar el Valor de k => ");
scanf("%lf", &ka);
printf("Dar el Número Máximo de Iteraciones a Calcular por B => ");
scanf("%U", &itermax);
printf("Dar el Número de Iteraciones a Desplegar => ");
scanf("%U", &itergraf);

printf("Oprimir cualquier tecla para continuar:");
getch();

/* inicializar gráficas y variables locales */
initgraph(&gdriver, &gmode, "");

maxx = getmaxx() + 1;
maxy = getmaxy() + 1;
maxcolor = getmaxcolor() + 1;

/* establece el nuevo color del fondo */
bkcol = 15;
setbkcolor(bkcol),

/* coordenadas dibujar rectángulo bifurcación */
izq = 0;
arr = 0;
der = getmaxx() ;
aba = getmaxy() ,
color = 1;

/* seleccionar un nuevo color de fondo */

```

DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH

```

setcolor(color);

/*  dibujar rectangulo de bifurcaci6n                               */
rectangulo(izq,arr,der,aba);

/*  dibujar rectangulo para datos                                   */
izq = getmaxx()+1;
arr = 0;
der = getmaxx() ;
aba = getmaxy() ;

/*  dibujar rectangulo de datos                                    */
*/
rectangulo(izq,arr,der,aba);

/*  despliega mensaje de la funci6n                                */
x = getmaxx() -5;
y = getmaxy() -460;

settextjustify(RIGHT_TEXT, RIGHT_TEXT);
outtextxy(x, y, "ECUACION DE");
outtextxy(x, y+20, "RICHARDS");
outtextxy(x, y+60, "VALOR DE X(0)");
outtextxy(x, y+100, "RANGO DE B");
outtextxy(x, y+140, "RANGO DE X(n)");
outtextxy(x, y+180, "VALOR DE R");
outtextxy(x, y+220, "VALOR DE K");
outtextxy(x, y+300, "ING. DAVID MUÑOZ");
outtextxy(x, y+320, "AGUILAR");
outtextxy(x, y+350, "TUTOR: VLADISLAV");
outtextxy(x, y+370, "KHARTCHENKO");
outtextxy(x, y+390, "KIRILLOVICH");
outtextxy(x, y+440, "NOVIEMBRE DEL 2001");

/*  enviar mensaje a la pantalla                                   */
color = 2;
setcolor(color);

/*  crear mensaje para valor de X(0)                               */
sprintf(msg, "% 4e", X0);
outtextxy(634, 90, msg);

/*  crear mensaje para valor de Bmin                               */
sprintf(msg, "% 4e", Bmin);
outtextxy(634, 131, msg);

/*  crear mensaje para valor de Bmax                               */
sprintf(msg, "% 4e", Bmax);
outtextxy(634, 142, msg);

/*  crear mensaje para valor de Xmin                               */
sprintf(msg, "% 4e", Xmin);
outtextxy(634, 170, msg);

/*  crear mensaje para valor de Xmax                               */
sprintf(msg, "% 4e", Xmax);
outtextxy(634, 181, msg);

/*  crear mensaje para valor de R                                 */

```

DR VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH

```

    sprintf(msg, "%.4e", ere);
    outtextxy(634, 210, msg);

/* crear mensaje para valor de K                                     */
    sprintf(msg, "%.4e", ka);
    outtextxy(634, 250, msg);

    Xn = X0;
    s = 0.0;
    Bn = 0.0;
    itera = itermax-itergraf;

    while (!kbhit())
    {
/* inicializar el parametro B                                       */
        for (d=1; d<maxy; d++)
        {
            l = d;
            m = maxy;
            Bn = Bmin + ((l/m)*(Bmax - Bmin));
            for (i=1; i<itermax; i++)
            {
                s = calc_rich(Xn,Bn,ka,ere);
                Xn = s;
                if (i > itera)
                {
/* dibujar punto de operacion                                       */
                    x = ((Bn - Bmin)/(Bmax - Bmin)) * maxy;
                    y = maxy * (1-((Xn - Xmin)/(Xmax - Xmin)));
                    color = 1;
                    putpixel(x, y, color);
                }
                Xn = X0;
            }
        }
    }

/* limpiar pantalla                                                 */
    getch();
    closegraph();
    return 0;
}

double calc_rich (double variable,double a, double ka, double ere)
{
    double rich, xx, yy, zz;

    char msg[80];
    int color;

/* calculo del valor de la funci3n de richards                       */
    xx = variable/ka;
    yy = a-1;
    zz = pow(xx, yy);
    rich = ( ere * variable * (1 - zz))/(a-1);
    color = 4;

    return(rich),
}

```

```
void rectangulo (int izq, int arr, int der, int aba)
{
    rectangle(izq,arr,der,aba);
}
```

DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH

```

    izq = getmaxy()+1;
    arr = 0;
    der = getmaxx();
    aba = getmaxy();

/*  dibujar rectangulo de datos                                */
    rectangulo(izq,arr,der,aba);

/*  despliega mensaje de la funciön                            */
    x = getmaxx()-5;
    y = getmaxy()-460;

    settxtjustify(RIGHT_TEXT, RIGHT_TEXT);
    outtextxy(x, y, "BIFURCACION");
    outtextxy(x, y+20, "DE EC. DE SAGAHON");
    outtextxy(x, y+60, "VALOR DE Y(0)");
    outtextxy(x, y+100, "RANGO DE B");
    outtextxy(x, y+140, "RANGO DE Y(n)");
    outtextxy(x, y+300, "ING. DAVID MUÑOZ");
    outtextxy(x, y+320, "AGUILAR");
    outtextxy(x, y+350, "TUTOR: VLADISLAV");
    outtextxy(x, y+370, "KHARTCHENKO");
    outtextxy(x, y+390, "KIRILLOVICH");
    outtextxy(x, y+440, "NOVIEMBRE DEL 2001");

/*  enviar mensaje a la pantalla                                */
    color = 2;
    setcolor(color);

/*  crear mensaje para valor de X(0)                            */
    sprintf(msg, "%.4e", X0);
    outtextxy(634, 90, msg);

/*  crear mensaje para valor de Bmin                            */
    sprintf(msg, "%.4e", Bmin);
    outtextxy(634, 131, msg);

/*  crear mensaje para valor de Bmax                            */
    sprintf(msg, "%.4e", Bmax);
    outtextxy(634, 142, msg);

/*  crear mensaje para valor de Xmin                            */
    sprintf(msg, "%.4e", Xmin);
    outtextxy(634, 170, msg);

/*  crear mensaje para valor de Xmax                            */
    sprintf(msg, "%.4e", Xmax);
    outtextxy(634, 181, msg);

    Xn = X0;
    s = 0.0;
    Bn = 0.0;
    itera = itermx-itergraf;

    while (!kbhit())
    {
/*      inicializar el parametro B                                */
        for (d=1; d<maxy; d++)
        {

```

DR. VLADISLAV KHARTCHENKO KIRILLOVICH

```

        l = d;
        m = maxy;
        Bn = Bmin + ((1/m)*(Bmax - Bmin));
        for (i=1; i<itermax; i++)
            {
                s = calc_saga(Xn,Bn);
                Xn = s;
                if (i > itera)
                    {
                        dibujar punto de operacion
                        x = ((Bn - Bmin)/(Bmax - Bmin)) * maxy;
                        y = maxy * (1 - ((Xn - Xmin)/(Xmax - Xmin)));
                        color = 1;
                        putpixel(x, y, color);
                    }
            }
        Xn = X0;
    }
}

/* limpiar pantalla
getch(),
closegraph();
return 0;
}

double calc_saga (double variable,double a)
{
    double sagahon;
    char msg[80];
    int color;

/*    calculo del valor de la función de Sagahon
sagahon = (1 - variable) * ( 1 - exp (-1 * a* variable));
color = 4;

    return(sagahon);
}

void rectangulo (int izq, int arr, int der, int aba)
{
    rectangle(izq,arr,der,aba);
}

```

## ANEXO 2

Sitios de Internet con información sobre bifurcaciones y caos

Chaos at Maryland

<http://www-chaos.umd.edu/>

Jared K. Olson

<http://www.physics.utah.edu/~jaredo/>

James A. Yorke

Institute for Physical Science & Technology

<http://www.ipst.umd.edu/Faculty/Yorke.htm>

Edward Ott

Department of Electrical Engineering

University of Maryland at College Park (joint with ISR and Physics )

<http://www.ee.umd.edu/faculty/ott.html>

EYAD H. ABED

Professor, Electrical and Computer Engineering and the Institute for  
Systems Research

<http://www.isr.umd.edu/~abed/>

Chaotic Circuits

[http://chaos-mac.nrl.navy.mil/circuits/chaotic\\_circuits.html](http://chaos-mac.nrl.navy.mil/circuits/chaotic_circuits.html)

Chaos Journal

<http://ojs.aip.org/journals/doc/CHAOEH-home/top.html>

SIAM Journal on Numerical Analysis

<http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/toclist/SINUM>

Journal of Difference Equations and Applications

<http://www.gbhpa.com/journals/731/731-top.htm#>

International Journal of Bifurcations and Chaos

<http://ejournals.wspc.com.sg/ijbc/ijbc.html>

MATHEMATICS AND BIOLOGY:

THE INTERFACE

CHALLENGES AND OPPORTUNITIES

<http://www.bis.med.jhmi.edu/Dan/mathbio/T.html>

Applied Nonlinear Mathematics

<http://www.enm.bris.ac.uk/research/nonlinear/nonlinear.html>

Elements of Applied Bifurcation Theory

Yu. A. Kuznetsov

[http://www.amsta.leeds.ac.uk/Applied/news\\_dir/issue2/review.html](http://www.amsta.leeds.ac.uk/Applied/news_dir/issue2/review.html)

## BIBLIOGRAFIA

- [1] E.H. Abed, H.O. Wang and R.C. Chen, "Stabilization of period doubling bifurcations and implications for control of chaos," Proceedings of the 31th IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, December 1992, pp. 2119-2124.
- [2] H.O. Wang and E.H. Abed, "Bifurcation control of chaotic dynamical systems," Proc. Of the Second NOLCOS (Nonlinear Control System Design) Conference, June 24-26, 1992 Bordeaux, France.
- [3] H.-C. Lee, "Robust Control of Bifurcating Nonlinear Systems with Applications," Ph. D. Dissertation, Dept. of Electrical Eng., Univ. Of Maryland, College Park, 1991.
- [4] May Robert M., Simple mathematical models with very complicated dynamics, Am. Nature., Vol. 261 , 459-467 (1976).
- [5] Richards, F. J., A flexible growth function for empirical use, J. Exp. Bot., 10, 290-300.
- [6] Allen, L. J., Jones, M. A., & Martin, C. F., A discrete time model with vaccination for a measles epidemic, Math. Biosci. 105 (1991), 111-131.
- [7] Lara-Sagahón, A. V., Khartchenko, V. K., José, M. V., A discrete SIS epidemic model with an exponential incidence., Por aparecer.
- [8] L.N. Howard, "Nonlinear Oscillations," in Nonlinear Oscillations in Biology, F. C. Hoppensteadt, ed., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 1-68.
- [9] G. Iooss y D.D. Jopseph, Elementary Stabiity and Bifurcation Theory, Springer Verlag, New York, 1980.
- [10] B.B. Peckham and I.G. Kevrekidis, "Period doubling with higher order degeneracies," SIAM J. Math. Anal., Vol. 22, pp. 1552-1574, 1991.
- [11] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical System, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [12] E.H. Abed and J.-H Fu, "Local feedback stabilization and bifucation control," Systems and Control Letters, Vol.7 1986, pp 11-17.
- [13] E.H. Abed and J.-H Fu, "Local feedback stabilization and bifucation control," Systems and Control Letters, Vol.8, 1986, pp 467-473.
- [14] H.-C. Lee and E.H. Abed, "Washout filters in the bifurcation control of high alpha flight dynamics," Proc. 1991 American Contol Conference, Boston, pp. 206-211.

- [15] D. Aeyels, "Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control," *Systems and Control Letters* 8, 1987, pp. 467-473.
- [16] J.H. Blakelock, *Automatic Control of Aircraft and Missiles*, Wiley, New York, 1965.
- [17] J. Hale & H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [18] May Robert M., *Nonlinear phenomena in ecology and epidemiology*, NYAS, Vol. 357, 267-281 (1980)
- [19] G. L. Baker and J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics, An Introduction*, Cambridge University Press, Second Edition, 1996.
- [20] Zhou K. & Wu. J. K., On the definitions of bifurcation, *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol 7, No. 8 (1997) 1861-1865.
- [21] A. N. Sharkovskii, Coexistence of cycles of a continuous map of line into itself, *Ukraine Math. Z.* 16 (1964), 61-71.
- [22] R C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics, An Introduction for Scientifics and Engineers*, Oxford University Press, 1994.
- [23] Yorke, J. A., Li, T., Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, (1975), 985-992.
- [24] Tõnu Puu, *Attractors, Bifurcation and Chaos, Nonlinear Phenomena in Economics*, Springer, 2000.
- [25] D.-C. Liaw and E.. Abed, Stabilization of tethered satellites during station keeping," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-35, No. 11, 1990, pp. 1186-1196.
- [26] E. Ott, C. Grebogi and J.A. Yorke, "Controlling Chaos," *Physical Review Letters*, Vol. 64, 1990 pp. 1196-1199.
- [27] A.M. Bloch and J.E. Marsden, " Controlling homoclinic orbits," *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, Vol. 1, 1989, pp. 179-190.
- [28] D.-C. Liaw and E.H. Abed, "Analysis and control of rotating stall," *Proceedings of NOLCOS '92: Nonlinear Control System Design Symposium*, (M. Fliess, Ed.), June 24-26, 1992, Bordeaux, France, pp. 88-93; Published by the International Federation of Automatic Control.
- [29] H.O. Wang, R.A. Adomaitis and E.H. Abed, "Active Stabilization of Rotating Stall in Axial-Flow Compressors," *Proc. 1<sup>st</sup> IEEE Regional Conf. On Aerospace Control Systems*, Thousand Oaks, CA, May 1993; in press.

- [30] H.O. Wang and De.h. Abed, "Control of nonlinear phenomena at the inception of voltaage collapse," Proc. 1993 American Control Conference, San Francisco, CA, June 1993, pp. 2071-2075.
- [31] E.H. Abed, P.K. Houpt and W.M. Hosny, "Bifurcation analysis of surge and rotating stall ein aial flow compressors," Proc. 1990 American Control Conference, San Diego, 1990, pp. 2239-2246. Also ASME J. Turbomachinery, Vol. 115, 1993, pp. 817-824.
- [32] E.M. Greitzer, "Surge and rotating stall in axial flow compressor, Part I: Theoretical compression system model," ASME J. Engineering for Power, 1976, pp. 190-198.
- [33] J. Baillieul, R.W. Brockerr and R.F. Washburn, "Chaotic motion in non-linear feedback systems," IEEE Trans. Circuits and Systemas, Vol. CAS-27, 1980, pp. 990-997.
- [34] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dymanical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [35] A. Fukma, Matsubara, N. Watanabe and K. Onogi, "Bifurcations in the frequency response of nonlinear feedback control systems, " IEEE Trans. Automatic Contorni, Vol. AC-29, 1984, pp. 450-452.
- [36] H.C. Chang and L.- H. Chen, "Bifurcation caracteristicas of nonlinear systems under conventional PID control, " Chemical Engineering Sciennce, Vol.39, 1984, pp. 1127-1142.
- [37] P.E. McDermott and H.-C Chng, "On the global dynamics of an autothermal reactor stabilized by linear feedback control," Chemical Engineering Science, Vol. 39 1984, pp. 1347-1356.
- [38] L.-H. Chen and H.-C. Chang "Global effect of controller saturation on closed-loop dynamics," Chemical Engineering Science, Vol. 40, 1974, pp.2191-2205.
- [39] L.P. Sil'nikov, "A case of the existence of a enumerable ser of periodic motions," Soviet Math. Dokl, Vol. 6 1965, pp. 1123-1125.
- [40] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste, Vols. 1-3, Gauthier-Villars, Paris.
- [41] J.M.T. Thompson and H.B. Stewart, Nonlinear Dynamics and Chaos, Wiley Chichester, 1986.
- [42] E. Ott, Chaos in Dynamical Systems, Cambrige University, Cambrige, 1993.
- [43] C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, "Chaotic attractors in crisis," Physical Review Letters, Vol. 48, No. 22, May 1982, pp.1507-1510.

- [44] C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, "Crises, sudden changes in chotic atractors, and transient chaos," *Physica*, Vol. 7D, 1983, pp.181-200.
- [45] P.M. Anderson and A.A. Fouad, *Power System Control and Stability*, Iowa State Univ. Press, Ames, IA 1977.
- [46] D. McRuer, I. Ashkenas and D. Graham, *Aircraft Dynamics and Automatic Control*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1973.
- [47] G.F. Franklin, J.D. Powell and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley, Reading, MA, 1986.
- [48] E.H. Abed and H.-C. Lee, "Nonlinear stabilization of high angle of attack flight dynamics using bifurcation control," *Proc. 1990 Am. Cnt. Conf.*, May 1990, pp2235-2238.
- [49] T. Kapitaniak, *Chaos for Engineers, Theory, Applications and Control*, Springer, Second Edition, 2000.
- [50] Chen G., Lu J., Nicholas B., Ranganathan S., "Bifurcation dynamics in discrete time delayed-feedback control systems," *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol 9, No.98 (1999) 287-293.
- [51] Shinskey, G. A., *Process Control Systems*, Mc. Graw Hill (1988).