94

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MÉXICO

FACULTAD DE PSICOLOGÍA

PROPUESTA DE UN PROGRAMA PARA EL APRENDIZAJE DE ECUACIONES LINEALES PARA ALUMNOS QUE TIENEN PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS II DE LA ESCUELA SECUNDARIA FEDERALIZADA "IGNACIO RAMÍREZ"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN PSICOLOGÍA

P R E S E N T A N

JORGE LUIS GARZA SOLAR

LAURA GUADALUPE GARZA SOLAR

Facultad de Psicología

DIRECTOR DE TESIS: LIC. JOSÉ LUIS [illegible]ULA CALDERÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

MÉXICO, D.F. 2001

EXAMENES PROFESIONALES
FAC. PSICOLOGIA.

AGRADECIMIENTOS

A mi amigo inseparable Jesús, que siempre esta en mi
Gracias

A mi madre Sra. Martina Solar Arriaga: la mujer mas importante en mi vida gracias mama. Dentro de ti palpita la presencia de Dios. Te amo con todo mi corazón.

† A mi padre, señor Pedro Garza Moreira

† A mi hermana, Elena Nieves Garza Solar

Damos gracias a Dios por los hermosos años que vivimos juntos; aunque no nos miremos ni podamos tocarnos, siempre estaremos cerca y sentiremos el calor de su amor en nuestros corazones.
Gracias

A mis hermanos, Marta Yolanda, Jaime, Javier Santiago, José Luis, Mario Matías, Pedro, Leonor, gracias a cada uno de ustedes por el amor y apoyo incondicional que nos brindaron.
Gracias

A mis sobrinos, quien busca no cesa hasta que encuentra.
Gracias

INDICE

RESUMEN

En el presente estudio se elabora una propuesta para el aprendizaje de las ecuaciones lineales por medio de la solución de problemas desde la aproximación cognitiva, dirigido a los alumnos del segundo año del turno vespertino que son reportados por la Escuela Secundaria Federalizada "Ignacio Ramírez" (ESFIR), Estado de México con bajo rendimiento académico en el área de matemáticas.

En primer término se justifica el desarrollo de la propuesta iniciando con la conceptualización del rendimiento escolar, los factores que lo determinan, las formas de evaluación y las medidas pedagógicas para incrementarlo. En segundo término, se vincula el rendimiento escolar con el caso institucional de los índices de reprobación que se presentan en la ESFIR.

Posteriormente se explica el fundamento teórico del enfoque cognitivo para el desarrollo de la propuesta basada en la aproximación de la solución de problemas que proponen los estándares curriculares, como es el caso de nuestro país. El enfoque cognitivo permite comprender el aprendizaje del álgebra por medio de la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades a través del empleo de estrategias, como los algoritmos y los heurísticos, dentro de un

INTRODUCCIÓN

Es bien sabido que una de las áreas del conocimiento que más dificultades plantean a los estudiantes de diversos niveles educativos son las matemáticas. Una gran cantidad de investigadores y educadores de diversas partes del mundo, se han enfocado en mejorar la comprensión y el rendimiento de los alumnos en este ámbito. Los resultados logrados hasta la fecha en términos de modelos teóricos que expliquen los mecanismos involucrados en la transmisión y asimilación de los contenidos matemáticos, así como el desarrollo de las estructuras matemáticas, resultan todavía insuficientes para mejorar substancialmente tanto la calidad de la enseñanza como la promoción de habilidades en este campo, que redunden en un mejor aprovechamiento por parte de los alumnos y se cuente con un mayor número de profesionales dedicados a la enseñanza de los contenidos matemáticos.

Algunas de sus posibles causas se refieren a:

1. Aprender matemáticas es aprender dos lenguajes diferentes, un lenguaje natural (español) y un metalenguaje simbólico. En contraste con el lenguaje natural, el lenguaje matemático es más preciso, no es redundante y relativamente no ambiguo (Brunner, 1976). Su aprendizaje requiere de representación y manejo de las relaciones simbólicas, pensamiento abstracto y solución de problemas en

donde se requiere hacer un análisis de la situación problemática, descomposición de elementos y reestructuración de las relaciones; como lo constituye la traducción de enunciados verbales a expresiones algebraicas, que permitirán la elaboración de un modelo mental para dar respuesta al problema planteado, tanto en situaciones escolares como de la vida diaria.

2. Los alumnos que ingresan tanto a educación primaria y secundaria se encuentran ante actividades prácticas, en las cuales el razonamiento formal no funciona, a pesar de que muchos conceptos matemáticos se aplican en la vida diaria, como la compra y venta de satisfactores y servicios al estudiante. Esto se debe en gran parte a que los conocimientos aprendidos en el aula son descontextualizados, dando por resultado que los alumnos perciban a la matemática y a la vida diaria como entidades separadas en la que no tiene que ver una de la otra, porque él no vive la realidad matemática (por ejemplo, aprenden en forma mecánica, sin un razonamiento del por qué el cálculo de operaciones básicas como la suma, multiplicación, división y resta); además representan para él una maraña de datos, números, signos y símbolos sin una relación coherente y carente de significado. Esta forma de aprender las matemáticas promueve un ambiente sin motivación y de conocimiento abstracto. La ausencia de experiencias significativas de aprendizaje de las matemáticas no permiten al sujeto participar activamente en la instrucción, así como pensar, decidir y resolver problemas dentro de un contexto; es decir, carecen de estrategias para aprender

los conocimientos y procedimientos propios de la disciplina, como serían los de tipo algebraico.

3. Algunos libros de matemáticas enfatizan generalmente la memorización mecánica al aplicar fórmulas preestablecidas en la resolución de problemas sin llegar a un verdadero análisis del razonamiento de cada una de las partes involucradas. Este panorama se agudiza con la aplicación de métodos rígidos de instrucción y el gran número de estudiantes por grupo que tiene que atender el profesor, sin olvidar el prejuicio negativo que el alumno le da a la asignatura.

Todos estos factores propician altos índices de reprobación, fracaso escolar y bajo rendimiento en este dominio del conocimiento, como es el caso de la *Escuela Secundaria Federalizada "Ignacio Ramírez"* (ESFIR). ESFIR es una de las escuelas de mayor arraigo no sólo en el Estado de México, sino que también cuenta con estudiantes provenientes de regiones aledañas como San Cristóbal Ecatepec, San Francisco Coatepec, Los Reyes La Paz, Nezahuacoyotl, San Juan Totoloapa, Ixtapaluca, entre otros. Incluso, en ella han surgido profesionales de la salud, la ingeniería, la política, el deporte, el espectáculo y presidentes municipales. Sin embargo, como la mayoría de las escuelas de nivel medio básico, es una institución que presenta una problemática de bajo rendimiento en matemáticas que ni la planta directiva, docente, así como padres de familia y alumnado, han podido disminuir para poder incrementar el aprovechamiento académico.

Las estadísticas que ESFIR reporta durante el periodo 1991-1996 muestran que de 238 alumnos reprobados en el 1er. año, 210 alumnos (90.7%) correspondían a esta asignatura; mientras que para el 2°. grado, de los 167 alumnos reprobados, 153 alumnos (86.9%) pertenecian a este rubro. Estos datos indican un alto índice de reprobación en matemáticas, en comparación con las demás materias. Además al finalizar el periodo escolar 1995-1996, la Institución aplicó un examen de 50 reactivos a 249 alumnos de 2° año, de una población de 268 inscritos, con la finalidad tanto de evaluar el aprovechamiento académico en esta área, particularmente el grado de abstracción desarrollado a partir de los contenidos y su aplicación en contextos significativos, así como para efectuar programas de remedio. Los resultados obtenidos indican que sólo 46 de ellos (18 %) lograron obtener más del 50% de aciertos y 203 alumnos (82%) obtuvieron menos del 50% de aciertos, quienes en promedio (131 alumnos) obtuvieron entre 16 y 25 aciertos. Cifras que nos refieren que la mayoria de los alumnos presentan un rendimiento por abajo del promedio, como para no poder acreditar la materia. Por último, el 2°. grado del turno vespertino, es quien presenta más índice de reprobación y deserción escolar, a pesar de que las cifras de reprobación decrementó en dos puntos, por lo que estos estudiantes, más que los alumnos de 1°. y 3°. requieren más apoyo pedagógico para que incrementen su rendimiento académico.

Para incidir en esta problemática, así como para diseñar prácticas instruccionales más eficientes que permitan por una parte involucrar la participación tanto del profesor y el alumno, y del alumno con sus compañeros; y por otra parte, enfrentar las dificultades que presentan los estudiantes de segundo grado del turno vespertino de la Escuela *"Secundaria Federalizada Ignacio Ramírez"*, en el aprendizaje de los conceptos y procedimientos algebraicos correspondiente a este grado escolar, el presente estudio de tesis plantea la *Propuesta de un Programa para el Aprendizaje de Ecuaciones Lineales desde la perspectiva de la solución de problemas fundamentado en los lineamientos de un enfoque cognitivo del aprendizaje.*

CAPÍTULO 1. RENDIMIENTO ESCOLAR

1.1 DEFINICIÓN

El rendimiento escolar constituye un elemento clave en el diagnóstico de cualquier sistema educativo. Si bien es cierto que los resultados de la educación se manifiestan sobre todo a largo plazo y no deben reducirse a la adquisición de conocimientos y destrezas en determinadas asignaturas, no es menos cierto que el grado en que esta adquisición se produce proporciona una información privilegiada sobre la eficacia real de las escuelas en lo que constituye su objetivo más obvio: la instrucción de la juventud o Proyecto educativo.

El rendimiento escolar o académico se ha definido de diversas maneras. En su sentido etimológico, rendimiento proviene del latín "rendere" que significa vencer sujetos, someter una cosa al dominio de uno, dar fruto o utilidad a una cosa. El rendimiento es la productividad que algo nos proporciona, al poner la relación de utilidad de algo con el esfuerzo realizado.

El rendimiento en su acepción actual se acuño en las sociedades industriales, y específicamente del mundo laboral, donde las normas, criterios y procedimientos de medida se refieren a la productividad del trabajador, al evaluar su rendimiento con escalas objetivas para asignar salarios y méritos. Por lo que el rendimiento es un criterio de racionalidad referido a la productividad y rentabilidad de las inversiones, de los procesos y del uso de los recursos (Camarena y Gómez, 1986)

Las empresas regularmente realizan una comparación entre los factores tiempo y ganancias calculados por medio de las horas de producción, costos de producción y producto, y su demanda en el mercado, que se podría denominar como rendimiento en el negocio.

Ellos también ellos agregan que el traslado del rendimiento al ámbito educativo ha preservado su situación económica. Está asociado con los desarrollos teórico-metodológicos que se han dado en el campo de la economía de la educación, desde la determinación del costo-beneficio hasta el análisis de sistemas.

En las instituciones educativas estaríamos hablando de distintos tipos de rendimiento, tales como el educativo, el escolar, el académico y del alumno. El primero estaría referido al sistema como resultado de una inversión del estado y en relación a la política económica y aprovechamiento de la mano de obra preparada para la producción nacional. El rendimiento escolar estará en función a los recursos de la escuela y al escolar que surge de ella. El resultado del trabajo de los docentes conforme al progreso de la institución y del alumno, se contemplaria como el rendimiento académico. Por lo anterior diriamos que el rendimiento del educando estaría determinado por los factores que intervienen en la productividad escolar y, que si bien se pueden contemplar como variantes los tres primeros tipos de rendimiento, también influye la variante de personalidad del estudiante, como el nivel intelectual, extroversión, introversión, ansiedad, motivación, aptitud, habilidades, hábitos y autoestima.

Dentro de este contexto, se le circunscribe a través de resultados de un proceso escolar determinado, al asociarlo con el aprovechamiento escolar, las calificaciones, aprobación y reprobación, repetición, deserción, egreso, eficiencia terminal y titulación.

1.2 DETERMINANTES DEL RENDIMIENTO ESCOLAR

La forma que cada alumno tiene para reconocer y asimilar la información básica y desarrollar sus estructuras cognitivas depende de sus características personales (hábitos, personalidad, actitudes, entre otras.), sus metas y de sus expectativas que actúan como variables intervinientes en el proceso de aprendizaje. Con base en esto el sujeto tendrá la intención de comprender o la intención de cumplir los requisitos de la tarea, o la intención de obtener las notas más altas posibles según como realicen el procesamiento de la información. Sin embargo no todos siguen estos lineamientos, porque abandonan su misión educativa desertan, reprueban y repiten el ciclo escolar.

En los últimos 25 años se han realizado alrededor de una centena de investigaciones que tratan de identificar los determinantes del rendimiento escolar en América Latina, el Caribe y Europa (Desmond, 1994). Estas investigaciones han identificado la influencia que tienen diversas variables en el rendimiento escolar, como la personalidad del individuo, la inteligencia, la disciplina, el autoconcepto, la motivación al logro, la atribución, los factores sociológicos, el nivel de ansiedad, las expectativas de los profesores hacia los alumnos y, más recientemente se incluyen las funciones de producción como la disponibilidad de textos y la provisión de infraestructura básica, la cual presenta una correlación alta con el rendimiento. Otras relaciones positivas, la constituyen los métodos de enseñanza más personalizada y flexible, formación docente inicial, experiencia del profesor, asistencia del profesor a clases, tiempo dedicado al aprendizaje, tareas para casa, participación de los padres y la cobertura del currículo.

Rendimiento escolar y Personalidad

Beltrán y Bueno (1997) reportan investigaciones que recogen la aportación de las variables de personalidad del alumno con la explicación de su rendimiento escolar, señalando tres posibilidades teóricas de acercamiento al mismo:

Primera interpretación. Determinados rasgos de personalidad influyen en el rendimiento efectivo de la materia educativa.

Segunda interpretación. La experiencia académica de éxito o fracaso puede moldear determinadas caracteristicas y actitudes personales de tipo emocional, que por un proceso de feed-back incidirán de nuevo sobre el logro futuro.
Integración de las dos anteriores. Las aptitudes intelectuales y rasgos de personalidad se desarrollan paralelamente con destrezas especificas que culminan en alto o bajo rendimiento en la escuela.

También mencionan que entre las variables de personalidad que influyen en el rendimiento escolar son la extroversión, introversión, y los problemas emocionales. Se ha observado que la extroversión seria favorecedora del rendimiento a niveles escolares primarios y perturbadora del mismo en niveles superiores, mientras que los sujetos introvertidos y neuróticos son los sujetos que obtienen los mejores resultados. Por otra parte, el lenguaje y la ansiedad son variables fundamentales en las relaciones de personalidad-rendimiento, porque el "lenguaje refleja... la experiencia personal, a consecuencia de lo cual actúa como variable intermedia en el procesamiento de la información de una persona y, por tanto, en su metacognición, en sus expectativas, evaluaciones, percepciones, etc., es decir, en su forma de actuar y de afrontar el aprendizaje" (Barriguete, 1987, p. 170, citado en Beltrán y Bueno, op. cit.); la ansiedad perturba el rendimiento escolar, al favorecer la deserción debido al fracaso escolar, aunque en algunos resultados las correlaciones entre ansiedad y rendimiento son bajas. Por último, la inestabilidad emocional, expresada por medio de tensión nerviosa, frecuentes cambios de humor sin causa aparente, falta de control, etc., conduce a niveles bajo de rendimiento, puesto que sujetos muy neuróticos tienen menos éxito que los poco neuróticos.

Concluyen que el rendimiento también se ve afectado por las variables sexo, edad, CI, rasgos de los profesores a la hora de evaluar y motivación, pero que se presenta una relación más estrecha con factores de personalidad, la cual es específica de cada grupo y diferentes en cualidad. Todas estas variables intervienen a la hora de estructurar la información, desarrollando una percepción personalizada del proceso de enseñanza-aprendizaje que será la base de aprendizajes posteriores.

Rendimiento escolar y autoconcepto

El trabajo realizado por Shaalvik y Hagtvet (1990, citado en Nuñez y González,1994) resume las aportaciones teóricas que diversos autores han realizado en este campo, en el sentido de que en las últimas tres décadas se diferencian cuatro posibles patrones o modelos de causalidad entre el autoconcepto y el rendimiento académico, así como sus implicaciones educativas:

1. El rendimiento determina al autoconcepto. En este modelo si el alumno obtiene un buen rendimiento académico, llega a formarse un autoconcepto positivo y firme, siendo el autoconcepto un reflejo del logro académico. Los supuestos básicos de este modelo de relaciones causales implica que el profesor debe intentar modificar el nivel de logro, antes que el autoconcepto, para que cambie éste.

2. Los niveles de autoconcepto determinan el grado de logro académico. Un alumno con un autoconcepto académico bajo buscaría situaciones que implicaran mantener su nivel de autoconcepto, para no cambiar sus autopercepciones, y por lo tanto realizaria escaso esfuerzo en las tareas escolares; además terminaría adoptando con respecto a sí mismo las actitudes que están siendo expresadas por otras personas significativas para él. Por el contrario, un alumno con un autoconcepto fuerte y positivo tendrá confianza en sí mismo para emprender nuevas tareas. Desde esta perspectiva, los profesores podrían aumentar el logro académico incidiendo previamente en el autoconcepto y su nivel de competencia percibida.

3. El autoconcepto y rendimiento se influyen y determinan mutuamente. Este modelo propone relaciones recíprocas entre autoconcepto, atribuciones y rendimiento académico, con la particularidad de que un cambio en cualquiera de ellos produce cambios en los otros. Por lo tanto, se debe investigar en qué medida la conducta de un profesor hacia determinados alumnos puede afectar el autoconcepto de estos últimos; en qué medida estos autoconceptos afectarán a su propia conducta y rendimiento, etc.

4. Terceras variables son la causa tanto del autoconcepto como del rendimiento. Las terceras variables que influyen entre ambos conceptos son de tipo personal o ambientales, académicas y no académicas. Por ejemplo, la presencia de variables como el interés del alumno por realizar la tarea, el nivel de ansiedad, exigencias familiares, actitud del profesor, e incluso la significatividad de las tareas a realizar (si la dificultad está acorde con las posibilidades reales del niño), etc.

De acuerdo con Nuñez y González (op. cit.), con base a la evidencia empírica proporcionada por cada modelo, se pueden derivar dos conclusiones fundamentales: 1) la interrelación entre rendimiento y autoconcepto se logra bajo determinadas condiciones y a unas edades concretas, recursiva con causación de la segunda sobre la primera variable, mientras que en las demás condiciones la relación es recíproca, y 2) se precisa de una perspectiva evolutiva para poder valorar la exactitud de cada uno de los modelos.

Al respecto, estos mismos autores a través de la conducción de una serie de estudios primero trataron de conocer qué variables (intelectuales, de personalidad y autoconcepto) eran las que incidían significativamente en el rendimiento académico de las asignaturas de lengua y matemáticas, y en qué medida lo hacían; en segundo lugar, aportar conocimiento sobre las características estructurales del autoconcepto, la influencia del sexo y la edad de los sujetos en su autoconcepto y la relación especifica que mantiene el autoconcepto y el rendimiento académico. Sus resultados muestran que la capacidad intelectual y el autoconcepto del alumno son las variables que mejor predicen el rendimiento escolar. Sin embargo, obtuvieron evidencia de que la influencia del autoconcepto sobre el rendimiento puede ser inmediata, mientras que la incidencia del logro académico sobre el autoconcepto se encontraría mediatizada por la elaboración cognitiva-afectiva de éste último, a partir de los procesos de atribución y las expectativas de logro. Por otra parte, parece que no son las experiencias de fracaso en sí quienes determinan los niveles del autoconcepto, sino más bien la naturaleza de las causas a las que el sujeto recurre para explicar su fracaso o las atribuciones que él realiza. En la interpretación de logro académico, el autoconcepto juega un papel significativo sobre cómo ha de ser juzgada la evidencia. A su vez, el modo de juzgar las experiencias de éxito o fracaso contribuirá a la aparición de bajo rendimiento académico y dificultades de aprendizaje.

Rendimiento escolar y factores sociológicos

Aparecen asociados de alguna manera con el rendimiento y el fracaso escolar de un sujeto las *variables sociológicas* siguientes: La clase social, el estatus socioeconómico, el contexto ambiental o familiar, las caracteristicas psicológicas del sujeto e incluso el método empleado por los profesores. El fracaso escolar nunca se debe a una sola causa o factor, más bien se debe a una conjunción de varios elementos, algunos de ellos de tipo social. Se ha observado que los hijos de clases trabajadoras o de renta normal o baja tienen un mayor porcentaje de fracaso escolar y dificultades, mientras que es menor en los que provienen de clases más elevadas o mejor situadas socialmente. Los hijos de padres con un nivel ocupacional elevado obtienen puntuaciones medias más altas en los test de inteligencia y rendimiento, en los parámetros objetivos y en las calificaciones escolares, que los hijos de los que tienen un nivel ocupacional más bajo. La misma relación existe entre padres con un mayor nivel educativo (Levera, 1998, citado en Corbalan, 2001). De esta manera, el niño de la clase trabajadora presenta estas dificultades:

- Bajo nivel de curiosidad intelectual
- Empleo de un lenguaje inadecuado
- Mal manejo de conceptos abstractos en asignaturas como lenguaje y matemáticas.

En cuanto a los factores psicológicos, la estimulación afectiva y propioceptiva puede favorecer el rendimiento escolar o viceversa.

"Por tanto, el nivel socio-cultural de origen desempeñaría un papel decisivo en el rendimiento escolar, y no sólo los estimulos que constantemente se le ofrece al niño por el estudio, las actividades hacia el trabajo escolar y las expectativas futuras", (Levera, 1998, p. 2, citado en Corbalan, op. cit.).

Al respecto, la literatura internacional reconoce ampliamente que uno de los determinantes esenciales en dicho rendimiento es la familia: su nivel de educación y sus características socioeconómicas (Mizala y cols., 2001)

Por otra parte, Pérez y cols. (2001) realizaron una investigación acerca de la aportación explicativa que diferentes variables psicosociales y personales tienen sobre el rendimiento académico de los alumnos según su status sociométrico. Es decir, la importancia de las percepciones que los alumnos tienen acerca de su ambiente familiar, escolar y social, así como la conjunción de ciertos factores de tipo personal como la inteligencia, el autoconcepto o diversas aptitudes, en la explicación de su aprovechamiento escolar. Los resultados obtenidos con una muestra de 270 alumnos mostraron que en la explicación del aprovechamiento escolar de los alumnos intervienen los siguientes factores:

1.La inteligencia forma parte de la ecuación explicativa del rendimiento académico de todos los grupos de alumnos, excepto en el de status más bajo.

2. En el grupo de status alto predominan las variables de tipo perceptivo, en el grupo de status bajo predominan las variables de tipo personal-objetivo; parece

como si los alumnos de status bajo, al ser conscientes de la poca simpatía que despiertan entre sus iguales, se refugiasen en sí mismos.

3. En el grupo de alumnos clasificados como de estatus medio-bajo aparecen variables explicativas del rendimiento académico relacionadas con la adaptación (escolar y personal) y el autoconcepto.

4. La percepción que el hijo tiene de la importancia que sus padres le dan al estudio en casa forma parte de la ecuación de todos los grupos, excepto el de status alto.

5. La variable adaptación personal contribuye negativamente a la explicación del rendimiento académico, lo cual constituyó un resultado extraño para el estudio.

Otra investigación bajo esta perspectiva fue realizada por Omar y cols. (2001), quienes exploraron las causas más comúnmente empleadas por los estudiantes argentinos, brasileños y mexicanos de nivel secundaria de escuelas públicas y privadas para explicar sus éxitos y/o sus fracasos escolares. Se verificó que los alumnos de los tres países consideran el esfuerzo, la capacidad para estudiar y la inteligencia como las causas más importantes sobre su rendimiento escolar, las cuales son causas de tipo interno y estable, y frecuentes en los alumnos exitosos; mientras que los argentinos consideran al estado de ánimo como una causa interna y estable. Además, factores como la dificultad de la prueba, el apoyo familiar y el juicio de los profesores, fueron evaluados como causas incontrolables por argentinos y brasileños, aunque no por mexicanos. Frente al fracaso, emergieron esquemas de respuestas singulares. Estos hallazgos se discuten a la luz de los valores socio-culturales y las peculiaridades educacionales de cada país interviniente.

Una de estas variables sociométricas se refiere a las interacciones que se dan entre los alumnos, y que muchas veces son concebidas como algo no deseable, al ejercer una influencia negativa sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. Las relaciones que se producen entre los propios alumnos desempeñan un papel importante en el proceso de socialización de los niños porque aprenden a respetar y a adoptar los puntos de vista ajenos en el marco de los contactos con sus iguales. De esta manera se hacen más competentes socialmente, desarrollan la capacidad para funcionar con éxito dentro del grupo, y aumentan su nivel de aspiraciones y su rendimiento académico. Esto es así porque al sentirse aceptado, puede ser un motivo esencial para adquirir confianza en sí mismo y para que puedan manifestarse sus capacidades intelectuales y de personalidad. Siendo estas cualidades de personalidad el contar con un espíritu de equipo, ser organizador, no molestar a los demás, ayudar a los compañeros en las tareas escolares, poseer capacidad, ingenio, iniciativa, etc. (Gimeno, 1976), puesto que el rendimiento académico correlaciona negativamente con los comportamientos antisociales y positivamente con los sociales (Ma y cols., 1996, citados en Sánchez, 1985). De ahí la necesidad de desarrollar una competencia social de los niños en el marco del grupo-clase.

Estos autores señalan que si un alumno no se siente aceptado por sus compañeros puede conducir a que se inhiba en las situaciones de enseñanza-aprendizaje, y que esto repercuta en la obtención de malos resultados académicos. Por otra parte, hay quienes plantean que el rechazo social es un síntoma de abandono de la institución escolar, lo cual origina un autoconcepto social negativo, que el sujeto atribuye a causas internas, estables e incontrolables por su parte (falta de habilidades, de capacidad, o antipatía). Este tipo de atribución genera futuras expectativas de fracaso en las relaciones con los demás, con su consiguiente repercusión en los resultados escolares; incluso la actitud que describen los alumnos con bajo aprovechamiento escolar se relaciona con apatía ante los estudios, dificultad para mantener la atención en clase, indisciplina e incumplimiento de labores escolares.

Por último, la asociación entre la influencia del profesor y el bajo rendimiento académico se determina por la deficiente formación de éste, los paros sindicales y el permanente cambio de autoridades y funcionarios, además de gran cantidad de maestros interinos. (Hoz de Vila, 1999).

Dentro de este contexto, Jiménez (2000) analizó algunas de las variables personales o individuales, que intervienen en la reprobación de la materia de matemáticas a nivel bachillerato, tales como los hábitos de estudio del alumno, las técnicas para leer y tomar apuntes, técnica de concentración, distribución del tiempo, los hábitos y actitudes hacia el trabajo, así como la evaluación que se da en torno a la relación maestro-alumno en los estudiantes de primer semestre. Sus hallazgos confirman que los estudiantes no conocen ni aplican estrategias de aprendizaje que les permitan comprender significativamente las matemáticas, debido en parte a que la institución escolar y docente no promueven su enseñanza.

Rendimiento escolar e Inteligencia

El proceso de enseñanza-aprendizaje está condicionado por múltiples factores dependientes del educando, de la familia y del sistema escolar, los cuales estarían afectando la matrícula, la asistencia y, en último término, el rendimiento y deserción escolar. Tomando como referencia las características del educando, desde un punto de vista biológico como es la nutrición y la salud, son de vital importancia en el crecimiento y maduración del cerebro y en general todo el sistema nervioso para el desarrollo intelectual. Por ejemplo, Ivanovic (1998) correlacionó la circunferencia craneana de los escolares con su rendimiento escolar en pruebas de aptitud de académica, constatándose que un alto porcentaje de ellos presentaban circunferencia craneana subóptima y obtenían bajos puntajes, a diferencia de la influencia del peso y la estatura. La explicación que propone Ivanovic es un factor determinante en casos extremos, pero con programas de estimulación el alumno puede incrementar su nivel de rendimiento.

1.3 EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO ESCOLAR

La evaluación del rendimiento escolar tiene, de hecho, un doble interés: por un lado, nos indica hasta qué punto consiguen los alumnos los concretos aprendizajes a los que dirigen su principal esfuerzo; por otro, nos proporciona un síntoma certero sobre la eficacia de la escolarización.

De ahí que el primer esfuerzo de diagnóstico debe ir dirigido a comprobar lo que los alumnos aprenden en la escuela con respecto a las materias fundamentales.

Ahora bien, averiguar lo que los alumnos aprenden en el sistema escolar tiene especiales dificultades. Es difícil, si no imposible, separar los efectos que en ellos causa el aprendizaje escolarizado, es decir, lo recibido en la escuela, con relación al aprendizaje más general y difuso que se deriva de la propia inmersión de los estudiantes en el sistema social, sus familias, sus diversos entornos sociales, los medios de comunicación, etc., porque como ya se mencionó, en el análisis del rendimiento escolar intervienen variables tanto de tipo personal como de tipo contextual, subdivisibles estas últimas en «escolares» y «socio-familiares».

Los estudios de diagnóstico del rendimiento escolar son también de gran importancia. Como cabría esperar, se centran sobre todo en acciones de aula, y de ellos cabe deducir sugerencias de indudable utilidad metodológica. También son pocos -sobre todo si se tiene en cuenta su gran incidencia social- los estudios referentes al fracaso escolar, que, en cualquier caso, ponen de relieve las altas tasas de resultados insatisfactorios que se producen en diversas carreras terminales.

Señalando que, contrariamente a lo que habitualmente se hace, el éxito o fracaso escolar no puede hacerse consistir sólo en el rendimiento académico medido en notas o calificaciones y superación de cursos. En cualquier caso, conviene tener en cuenta que son muchas las causas que inciden en el considerado como fracaso escolar y que no son siempre imputables a factores académicos, sino muy a menudo a otros de tipo económico-social, administrativo, psicopedagógico, etc., y que es combatiendo todas estas causas como podría ponérsele remedio.

Una forma de evaluar el rendimiento escolar es mediante el uso de tests estadandarizados con el fin de detectar los factores que inciden en el desempeño de los alumnos. (Mizala y cols. op. cit.)

Siguiendo a Terwiller (citado en Repetto, 1984), existen cuatro marcos de referencia para determinar el rendimiento de los alumnos:

1. *Respecto a un criterio.* Es el resultado de averiguar la situación de cada alumno respecto a campos de conducta bien definidos previamente por una institución educativa y/o docente.

2. *Respecto al progreso realizado por el sujeto en un curso escolar.* El rendimiento se mide por el éxito logrado durante el calendario escolar. Es la definición implícita en los planes de estudio y en los sistemas educativos de la mayoría de los países, porque incluso los cuestionarios y los programas son derivados de la autoridad central, y especifican para cada nivel educativo los contenidos que deben aprender los alumnos en cada curso escolar.

3. *Con referencia a los otros alumnos.* Es una comparación con los propios iguales, que afecta el nivel emocional del alumno, ya que se le etiqueta como fracaso escolar o atraso respecto al conjunto de compañeros que obtienen el grado correspondiente a su edad cronológica.

4. *Respecto a su propia capacidad.* Es un rendimiento satisfactorio o insatisfactorio que experimenta el estudiante. En el ámbito institucional educativo, las calificaciones asignadas por el profesor constituyen el criterio legal del rendimiento del alumno, aunque se observan discrepancias constantes al asignar una calificación tanto en ellos como en las escuelas.

El rendimiento es una expresión valorativa particular del proceso educativo, que se da en el marco de la institución escolar. Este proceso incorpora el conjunto de relaciones pedagógicas y sociales que inciden en la institución y condicionan el rendimiento o aprovechamiento escolar, ya que está subordinado a todas las variaciones, contradicciones, cambios y transformaciones del mismo (De Ibarrola, citado por Jiménez, op. cit.)

Desde un punto de vista institucional, generalmente se utilizan dos tipos de operaciones para obtener el rendimiento académico: 1) uso de datos globales, como el número de alumnos atendidos entre el número de certificados o títulos otorgados, y; 2) el empleo de las calificaciones obtenidas por los alumnos para determinar el promedio, y que de forma simple conocemos como aprovechamiento, la cual es la operación más comúnmente utilizada. Desafortunadamente en las escuelas no se distingue entre uno y otro rendimiento, porque regularmente son englobados y confundidos entre sí, e indistintamente se emplean como sinónimos.

Garrido (2001) considera importante como criterios de evaluación el conocer los procesos con los que están vinculadas la falta de motivación y la falta de atención por las tareas y actividades escolares. Ello permitirá establecer herramientas y técnicas de medida que posibiliten una adecuada detección y evaluación de los problemas que el alumnado presenta.

Por su parte, ciertos países occidentales como España, Francia e Inglaterra llevan a cabo estudios a gran escala para evaluar el rendimiento escolar por medio del desarrollo de metodologías que detectan la influencia de ciertos indicadores como las características de la institución, la práctica educativa y las características del escolar, asi como la política educativa del Estado y las condiciones sociodemograficas. Este trabajo los ha llevado a evaluar constantemente los resultados obtenidos en cuanto al incremento del rendimiento de su población estudiantil y a detectar los factores que inciden en él. Por ejemplo, en cuanto a la medición del aprendizaje, se detecta en general una falta de preparación del profesorado en técnicas de evaluación, lo que le lleva muy frecuentemente a no establecer criterios previos de evaluación ni de promoción, ni a fijar los contenidos mínimos exigibles, ni a utilizar instrumentos adecuados y variados, ni a fomentar los ejercicios de autoevaluación por parte del alumno, etc. En materia de evaluación continua el divorcio entre la teoría y la realidad. (García y cols., 1996)

1.4 MÉTODOS PARA INCREMENTAR EL RENDIMIENTO ESCOLAR

El incremento del rendimiento escolar es una tarea compleja, que requiere la participación conjunta de todos los actores que intervienen en este proceso, tales como el Estado, las instituciones escolares, su personal docente y administrativo, padres de familia y el educando. Por consiguiente, algunos métodos a implementar son:

- ✓ Desarrollar un aprendizaje más eficiente a través de métodos de estudio. El método se refiere a una serie de actividades realizadas sistemáticamente, que al permanecer en el tiempo permitirán al alumno no sólo la modificación de su rendimiento escolar, sino también la capacidad para controlar su conducta, ser paciente y proyectar metas a largo plazo. (Mendoza, 2000)

- ✓ Utilización del tiempo. Las autoridades recomiendan que los escolares pasen más horas en las aulas y tengan menos vacaciones para así aumentar su rendimiento escolar. Al respecto, los profesores comentan que lo que necesitan con urgencia es más tiempo para enseñar. Sin embargo, algunos educadores consideran que el desafío principal para las autoridades y los profesionales de la enseñanza pública es cómo se utiliza el tiempo de estudio: el problema no es la falta de horas, sino la forma en que se estructura ese tiempo para impartir los conocimientos necesarios a los alumnos.

- ✓ Algunos autores consideran que el bajo rendimiento académico pertenece al ámbito de las estructuras del Estado, quien debe planear y aplicar políticas sociales y económicas destinadas a solucionarlos así como paradigmas educacionales de carácter administrativo y metodológico conducentes a la corrección del problema del bajo rendimiento escolar. Ya que se considera medir el efecto específico de otros factores como el nivel de gasto invertido, las características de los profesores y escuelas o insumos del proceso educativo. En particular, se han realizado investigaciones en América Latina y el Caribe que tienden a destacar que el insumo educativo contribuye a la adquisición de habilidades cognitivas, independientemente de las características del medio familiar.

- ✓ A partir de un marco de referencia de la enseñanza-aprendizaje, se recomienda el empleo de estrategias de aprendizaje e instruccionales en función del dominio de conocimiento.(Beltrán y Bueno, Op. cit.)

En conclusión se concibe al rendimiento escolar en las escuelas primarias y secundarias por la influencia de diversos factores que repercuten en la tasa de repetición en los primeros grados, así como la medición del mismo por diversos indicadores. Para solucionar este problema, el Estado proporciona financiamiento para la distribución de materiales y capacitación docente, pero se detecta cierta burocratización de la problemática del fracaso escolar. No se ha logrado promover el cuestionamiento de la práctica de enseñanza como factor de fracaso, sino que los docentes consideran al alumno y/o su medio como causas del fenómeno, y no como una responsabilidad propia (Birgin, Dossel y Tiramonti, 1998 y Corbalan, op: cit.). Mientras que otros lo atribuyen a factores perceptuales (Roche, 2000). En cualquier caso, la coincidencia es total a la hora de determinar el hecho de que el fracaso escolar es un problema de especial gravedad por cuanto puede suponer un cierto grado de marginación o de aislamiento del individuo, y que dificulta su integración laboral y social; observándose casos de ausentismo, abandono, fracaso y deserción.

"Fracaso escolar": un tema recurrente

El fracaso escolar se conceptualiza como una serie de situaciones problemáticas que se manifiestan por rezago escolar (alumnos que se retrasan en las inscripciones correspondientes al trayecto escolar de su grupo, o en el egreso del mismo), el bajo rendimiento escolar (obtención de bajas calificaciones), la reprobación (recursamiento de materias o de un grado escolar) y la deserción escolar (el abandono voluntario u obligado de los estudios) El fracaso escolar incluye aspectos de orden cuantitativos y cualitativos. Los primeros afectan a una población más o menos amplia; mientras que los segundos afectan a un plano más profundo de la personalidad del estudiante (Tovar, 2001) Respecto a los aspectos cualitativos, cabe expresar que es una situación en la que el educando no consigue alcanzar las metas normales para el desarrollo social de su inteligencia, de tal modo que toda su personalidad queda comprometida y alterada repercutiendo en su rendimiento global y en la adaptación sana y eficaz del ambiente que le rodea, de ahi que la reprobación sea un factor del fracaso escolar, ya que esta implica una desadaptación a un proceso general de aprendizaje, considerando que la organización curricular de la escuela contempla la verticalidad y horizontalidad del contenido programático en cualquier situación formal.

Dentro del marco de referencia del fracaso escolar, aprobar o reprobar implica una opinión o juicio de valor donde se establece directa o indirectamente una relación entre la formación integral del sujeto y su entorno social y material. Esta relación conlleva necesariamente una clasificación a partir de la cual se define el grado moral de aceptación social.

En sentido didáctico, aprobar significa superar o conseguir una meta establecida previamente y con miras a adquirir un determinado desarrollo intelectual, fisico y social, que se expresa en la manifestación de sus habilidades, aptitudes, destrezas, actitudes con una vinculación con los contenidos y actividades guiadas por una planeación escolar. Estableciéndose un grado de aceptación y superación por medio de la asignación de una calificación cuantitativa y cualitativa al rendimiento del estudiante.

La reprobación y aprobación, como equivalentes de rendimiento escolar suponen procesos de toma de decisiones de los profesores, ligados a la normatividad de la institución, que se cristalizan en las calificaciones casi numéricas y suponen determinado nivel de aprendizaje logrado. En su sentido más amplio, el rendimiento escolar equivale a la "Norma", porque el profesor parte de la base de que ésta es una exigencia. Si bien es cierto que se realizan evaluaciones referidas a criterio (los objetivos del programa), la verdad es que se toma el puntaje máximo obtenido por los estudiantes y sus desviaciones estándar para asignar las calificaciones subsecuentes.

Aprobar o reprobar en esa dirección significan dos juicios opuestos integrados por una calificación o descalificación académica, indicativo de una superación o no de los objetivos de formación contemplados en el plan curricular, es decir, es una meta trazada por un proyecto educativo que implica la conformación integral del educando. Reprobar en consecuencia, si bien no determina el fracaso escolar del proyecto educativo, de la labor escolar, de la práctica educativa, de la integración familiar y de la orientación social del estudiante, si repercute en pérdidas materiales, morales y económicas de todos los actores que intervienen en este proceso, como: las autoridades escolares, los padres de familia, los docentes, la institución, la sociedad y, principalmente el estudiante. Por ejemplo, en relación al educando, se observa pérdidas de valores (como la falta de respeto al profesor, a los compañeros y hacia él mismo) que deberian adquirir al finalizar el año escolar, el tiempo para volver cursar un año más, pérdida de conocimientos, así como de inversión familiar y pública.

En base a la experiencia docente se ha observado que son muchos los factores que contribuyen al éxito escolar y/o fracaso como la capacidad general para el aprendizaje, la base de conocimientos, la motivación, los hábitos de estudio y la actitud del profesor. A un nivel más general, implica el fracaso de toda la institución escolar, incapaz de cumplir aquellos fines mínimos para los que ha sido creada.

Por otra parte, el fracaso escolar no es en realidad un viejo problema, sino un problema bastante reciente, surgido en torno a la generalización de la escolaridad. Al menos bajo un punto de vista subjetivo —que, por cierto, no es el único importante en este terreno—. Uno fracasa sólo en aquello que intenta conseguir y no consigue. De aquí se desprende, entre otras cosas, que el "fracaso escolar" es en realidad un fenómeno típico de países que han conseguido ya un cierto desarrollo educacional, y no tanto de aquellos otros que todavía luchan por generalizar la escuela, incluso a nivel de enseñanza primaria. En realidad, tan típico es de los paises educacionalmente desarrollados que todos ellos lo padecen, en mayor o menor grado.

Parece obvio que cualquier intento de solución tiene que pasar por encontrar sistemas institucionales –sin pretender que sean sólo ellos quienes solucionen el problema –que permitan recuperar el interés de los alumnos.

Interesar a los alumnos desinteresados no es un problema que afecte sólo a ellos mismos, sino también a sus compañeros (que también tienen bajo rendimiento) y al conjunto de la acción escolar. Una de las principales situaciones de indisciplina que se producen en las escuelas es, precisamente, el "desinterés del alumnado, seguida de los problemas familiares y la presencia de alumnos repetidores".

Resumiendo, una de las metas prioritarias que debe imponerse el sistema educativo nacional es la lucha decidida contra el fracaso escolar desde el comienzo mismo de la escolaridad obligatoria, y seguramente antes, pero muy particularmente durante el período de secundaria. Es fundamental que la propia sociedad sea consciente de que el problema existe y de que se trata de un problema grave.

Un caso institucional a nivel medio básico lo podemos observar en los índices de reprobación que presenta la población escolar de *la Escuela Secundaria Federalizada "Ignacio Ramírez" (ESFIR)*, Estado de México, particularmente en la materia de Matemáticas II.

1.5 ÍNDICES DE REPROBACIÓN EN EL NIVEL MEDIO BÁSICO: CASO INSTITUCIONAL DE LA ESCUELA SECUNDARIA FEDERAL "IGNACIO RAMÍREZ"

La Escuela Secundaria Federalizada "Ignacio Ramírez" (ESFIR) es uno de los recintos educativos de mayor arraigo no sólo en el Estado de México, sino también a nivel nacional, porque desde su fundación en el año de 1938, se constituyó como una de las primeras instituciones de nivel medio básico establecidas en el país. Su importancia es notable, pues dentro de sus aulas se cuenta con estudiantes provenientes de regiones aledañas como San Cristóbal Ecatepec, San Francisco Coatepec, Los Reyes La Paz, Nezahualcoyotl, San Juan Totoloapa, Ixtapaluca, entre otros. Incluso, en ella han surgido personajes de nuestra sociedad como profesionales de la salud, la ingenieria, la politica, el deporte, el espectáculo y presidentes municipales. Sin embargo, como la mayoria de las escuelas de nivel medio básico, es una institución que presenta problemas de bajo rendimiento en matemáticas, que ni la planta directiva, docente, así como padres de familia y alumnado, han podido disminuir para poder incrementar el aprovechamiento académico en esta área.

El bajo rendimiento escolar de la Institución forma parte de una problemática más global. La Dirección General de Programación, Estadística Básica del Sistema Educativo Nacional de la Secretaria de Educación Pública (SEP), reportó que entre 1989 y 1998 se presentó de un 27% a 30% de Reprobación Nacional en las Escuelas Secundarias Generales, lo cual indica que un tercio de esta población de alumnos enfrentan problemas de reprobación escolar.

En la ESFIR, esta situación se presenta de manera constante en los últimos años. De acuerdo con sus estadísticas escolares, durante los periodos de 1991 a 1996, de una población escolar de 1845 alumnos inscritos en el 1er. grado, reprobaron 238 alumnos (12.9%); mientras que para el 2° grado, de un total de 1621 alumnos registrados, reprobaron 167 alumnos (10.3%) (Ver Tabla 1). Por otra parte, en ambos grados, se observa un porcentaje mayor de reprobación en los grupos "E" (48 alumnos, 20.17%; 32 alumnos, 23.35%) y "F" (43 alumnos, 18.07%; 39 alumnos, 19.16%), respectivamente, dado que en estos grupos se canalizan a los alumnos con problemas de aprendizaje por factores físico-motor o un CI bajo. No obstante que la demanda creció un 19.3 %, se presentó una deserción del 12.14%, existiendo entonces la posibilidad de que los alumnos con problemas de reprobación abandonen definitivamente el proceso de formación educativa.

TABLA 1. Población escolar de Inscritos y Reprobados por grupo y grado de ambos turnos durante 1991 a 1996 en ESFIR, Estado de México.

Población de 1er. año

Inscritos								**Reprobados**							
Grupo	*Periodo*						*Total*	*Grupo*	*Periodo*						*Total*
	1991	1992	1993	1994	1995	1996			1991	1992	1993	1994	1995	1996	
A	52	53	54	50	53	50	**312**	A	7	5	6	3	11	5	**37**
B	53	53	53	50	52	51	**312**	B	5	4	5	3	9	5	**31**
C	50	49	55	50	51	51	**306**	C	5	5	6	4	12	6	**38**
D	52	52	55	49	50	50	**308**	D	6	8	7	2	13	5	**41**
E	51	51	57	49	50	50	**308**	E	4	9	6	4	15	10	**48**
F	49	47	56	50	49	48	**299**	F	4	6	8	4	13	8	**43**
TOTAL	**307**	**305**	**330**	**298**	**305**	**300**	**1845**	TOTAL	**31**	**37**	**38**	**20**	**73**	**39**	**238**

Población de 2do. Año

Inscritos								**Reprobados**							
Grupo	*Periodo*						*Total*	*Grupo*	*Periodo*						*Total*
	1991	1992	1993	1994	1995	1996			1991	1992	1993	1994	1995	1996	
A	41	42	48	49	45	44	**269**	A	4	3	3	3	1	5	**19**
B	33	33	49	50	45	44	**254**	B	5	3	2	3	2	6	**21**
C	43	41	46	48	46	45	**269**	C	4	4	3	2	4	8	**25**
D	40	40	46	51	48	47	**272**	D	2	6	5	4	3	8	**31**
E	48	48	48	53	48	47	**292**	E	7	5	4	4	2	10	**32**
F	41	49	42	51	41	41	**265**	F	8	7	7	20	3	10	**39**
TOTAL	**246**	**253**	**279**	**302**	**273**	**268**	**1621**	TOTAL	**33**	**28**	**24**	**24**	**20**	**15**	**167**

Índices de Reprobación en la materia de Matemáticas

A nivel nacional, el problema de reprobación también se manifiesta por materias. Por ejemplo, el resultado obtenido en el examen exploratorio que se aplicó en toda la República en1993 a 473 alumnos, al inicio de su 3er. año de secundaria en el área de matemáticas, mostró un alarmante bajo rendimiento escolar en esta materia, puesto que estos alumnos obtuvieron un promedio general de 3.47, y sólo aprobaron el 7%.

Por otra parte, las estadísticas que ESFIR reporta muestran que de los 238 alumnos reprobados en el 1er. año, 210 alumnos (90.7%) correspondían a esta asignatura; mientras que para el 2°. grado, de los 167 alumnos reprobados, 153 alumnos (86.9%) pertenecían a este rubro. Estos datos nos indican un alto índice de reprobación en matemáticas, en comparación con las demás materias.

Por consiguiente, al finalizar el periodo escolar 1995-1996, la Institución aplicó un examen de 50 reactivos a 249 alumnos de 2° año, de una población de 268 inscritos, con la finalidad tanto de evaluar el aprovechamiento académico en esta área, particularmente el grado de abstracción desarrollado a partir de los contenidos y su aplicación en contextos significativos, así como para efectuar programas de remedio. Los resultados obtenidos, con un rango de frecuencias para un intervalo de tamaño 5 (Ver Tabla 2) muestran que en cuanto al máximo número de aciertos logrados, el 2° "A" ocupó el primer lugar (3 alumnos con 36 aciertos), y el grupo 2° "F" ocupó el último lugar (2 alumnos con 26 aciertos). Estos datos pueden explicarse probablemente con base a dos variantes: 1) la conformación de los grupos y 2) el planteamiento didáctico del profesor. En cuanto a la integración de los grupos, estos se conforman con base al número de aciertos conseguidos por el alumno en un examen de ubicación al inicio de la generación escolar, de esta manera, el grupo 2° "A" está constituido por alumnos que obtuvieron mayor calificación en el mismo, y así sucesivamente. Por otra parte, el planteamiento didáctico implementado por el profesor es diferente en cada uno de los grupos, puesto que de los tres profesores que imparten la asignatura, uno de ellos está asignado a los grupos "A" y "B", otro profesor a los grupos "D", "E" y "F", y un profesor más para el grupo "C"; que cabe mencionar, con base en una entrevista realizada a los alumnos, es el maestro a quien menos entienden.

TABLA 2. Rango de aciertos obtenidos en el examen de Matemáticas por alumnos de 2°. grado durante el periodo 1995-1996 en ESFIR, Estado de México.

*Rango de aciertos	Alumnos por grupo *A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	Frec.	%
1-5					5	4	9	3
6-10	1	3	5	1	9	5	24	10
11-15	3	1	8	8	10	9	39	15
16-20	12	18	15	16	11	14	86	32
21-25	6	13	7	12	3	3	45	17
26-30	14	8	4	6	3	**2**	34	13
31-35	4	3	1	1			9	3
36-40	**3**						3	1
41-50								
No asistieron	3	3	3	1	4	5	**19**	7
Total	46	49	43	45	42	43	268	100

*Frecuencias sobre un rango de 5

Es importante destacar que 19 alumnos (7%) no presentaron el examen. Además, de los 249 estudiantes que si lo presentaron, sólo 46 de ellos (18 %) lograron obtener más del 50% de aciertos y 203 alumnos (82%) obtuvieron menos del 50% de aciertos, quienes en promedio (131 alumnos) obtuvieron entre 16 y 25 aciertos. Cifras que nos indican que la mayoría de los alumnos presentan un rendimiento por abajo del promedio, como para no poder acreditar la materia.

Sin embargo, si se realizará una evaluación únicamente sobre el número máximo de aciertos obtenidos en el examen, en este caso 36 es el 100% y con un rango de frecuencias para un tamaño de intervalo de 4, aproximadamente sólo 27 alumnos (11 %) podrían aprobar con un promedio mayor a 8, como generalmente lo determinan la mayor parte de los maestros cuando asignan una calificación al aprovechamiento del estudiante; pero sobre una escala de 50 es el 100%, la calificación sería de 5.4 (Ver Tabla 3). De acuerdo con el primer estándar (36 aciertos es el 100%), aprobaría el 64% y reprobarían el 36% de los alumnos, comparado con el 9% de reprobación proporcionado por la Institución de 1991 a 1996. Este tipo de estándar otorga al alumno la posibilidad de no reprobar la materia.

TABLA 3. Rango de aciertos obtenidos en el examen de Matemáticas por alumnos de 2º grado durante el periodo 1995-1996 en ESFIR, Estado de México.

*Rango de aciertos	Alumnos por grupo						Frec.	Calif. sobre 36	Calif. sobre 50
	A	B	C	D	E	F			
1-4					4	2	6	**2**	**0.6**
5-18	1	1	2		6	5	15	**3**	**1.4**
9-12		3	2	3	7	3	18	**4**	**2.2**
13-16	5	4	2	17	12	10	50	**5**	**3.0**
17-20	11	12	17	10	10	9	69	**6**	**3.8**
21-24	4	10	6	9	3	4	36	**7**	**4.6**
25-28	10	5	5	7		1	28	**8**	**5.4**
29-32	8	8	1	3		1	21	**9**	**6.2**
33-36	5	1					6	**10**	**7**
Total	44	44	35	49	42	35	249		

* Frecuencias sobre un rango de 4

Por otra parte, atendiendo a la población a quien va dirigida el propósito del estudio, un análisis más específico del problema de bajo rendimiento académico en esta materia, nos permite observar en la tabla 4 y en la figura 1, que la población de 2°. grado del turno vespertino, es quien presenta más indice de reprobación y deserción escolar (12% y 5% para el periodo 1997-1998; 12.5% y 5% para 1998-1999, y; 10.6% y 3.8% para 1999-2000, respectivamente), que el 1er. y 3er. grado; y no obstante que los alumnos de 2°. grado obtuvieron el promedio más bajo de los tres grados (6.74 y 6.97 para 1997-1998 y 1998-1999), para 1999-2000 sólo lo incrementaron en 26 centésimas (7.10).

A pesar de que el índice de reprobación decrementó de 12.5 % a 10.6% para este grado escolar, debido en parte a que se aplicaron estrategias lúdicas como el uso del juego para el aprendizaje de la unidad, estos estudiantes, más que los alumnos de 1°. y 3°. requieren más apoyo pedagógico para que incrementen su rendimiento académico, por medio de la realización de medidas correctivas, en primer instancia, y posteriormente de tipo preventivas, tanto por parte de la institución, la planta docente, como de la participación del alumno.

TABLA 4. Informe de Rendimiento Escolar en matemáticas por grado del turno vespertino durante los ciclos escolares 1997 a 2000 en ESFIR, Estado de México.

Población / Grado	Periodo 1997-1998						Periodo 1998-1999						Periodo 1999-2000					
	1º.		*2º.*		*3º.*		*1º.*		*2º.*		*3º.*		*1º.*		*2º.*		*3º.*	
	No.	%	No	%	No.	%	No.	%	No.	%	No.	%	No.	%	No.	%	No.	%
Inscritos	297	100	275	100	269	100	300	100	278	100	239	100	297	100	274	100	245	100
Existentes	294	99	262	95	267	99	290	99	265	95	234	97.9	282	94.7	264	96.2	241	88
Reprobados	22	**7.5**	32	**12**	17	**6.4**	27	**10.7**	33	**12.5**	8	**3.4**	25	**8.8**	28	**10.6**	4	**1.7**
Deserción	3	**1**	12	**5**	2	**1**	3	**1**	13	**5**	5	**2.1**	15	**5.3**	10	**3.8**	29	**12**
Promedio	**7.4**		**6.7**		**7.5**		**7.1**		**6.9**		**7.2**		**7.0**		**7.1**		**6.9**	

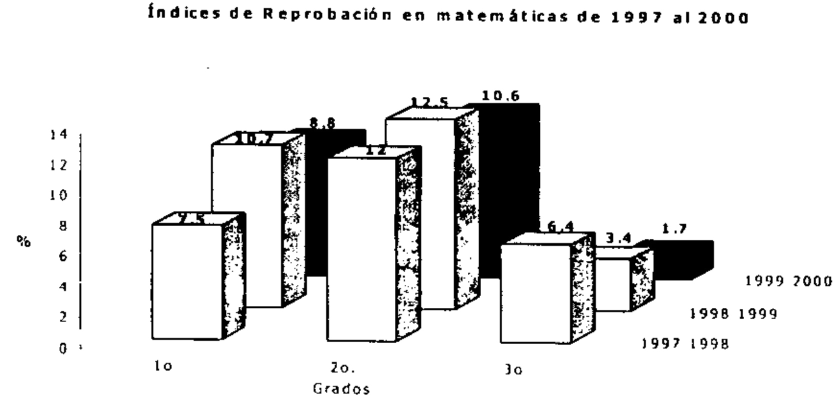


Figura 1. Índices de reprobación en matemáticas por grado y periodo escolar en ESFIR, Edo de México

Una de las alternativas viables para incrementar el aprovechamiento en matemáticas, consiste en promover un ambiente de aprendizaje basado en la inducción de estrategias para la solución de problemas, particularmente para el aprendizaje de ecuaciones lineales, asi como la formación de grupos de trabajo cooperativo. Técnicas que han sido empleadas con éxito en otros dominios del conocimiento, como la escritura, la lectura y la aritmética (Glaser, Lesgold, y Lajoie, 1987), y contempladas en la curricula de diversos países latinos y norteamericanos, como es el caso en el Plan de Estudios a nivel Medio Básico propuesto por la Secretaria de Educación Pública (1992). Esto en gran parte, porque la resolución de problemas constituye un importante soporte metodológico del proceso enseñanza-aprendizaje (Alda y Hernández, 1999). Además, de acuerdo con Jackson, Fletcher y Messer (1992), el aprendizaje cooperativo brinda a los alumnos la oportunidad de discutir, criticar, explicar, y cuando es necesario, justificar sus interpretaciones; encuentran sentido al problema, revisan y planean varias estrategias, verifican las soluciones más adecuadas, y todos los miembros luchan juntos para resolverlo y adquieren conocimientos que ninguno de ellos ha dominado previamente, es decir, es un reto para el equipo.

CAPÍTULO 2. ENFOQUE COGNITIVO DEL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

2.1 APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Actualmente muchos países han ido incorporando en su curricula la enseñanza de las matemáticas desde el enfoque de la estructura matemática para solucionar problemas, aunque la pericia matemática es una capacidad de cálculo que puede ser adquirida mediante ejercicios prácticos, hay más cosas que aprender que el cálculo puro. Los educandos deben comprender algunos conceptos básicos de las matemáticas, entre ellos, los conceptos subyacentes a las reglas y los procedimientos de la aritmética sencilla. También tienen que aprender a aplicar de forma flexible y correcta sus conocimientos conceptuales y de procedimiento de la resolución de problemas matemáticos. Por lo que los profesores y las escuelas deben dedicar tiempo y recursos para enseñar a los alumnos los aspectos de las matemáticas no relacionados solamente con el cálculo (Resnick, 1990)

La matemática es una de las asignaturas que con frecuencia presenta un mayor grado de dificultad para su aprendizaje, en particular, el álgebra es un factor determinante en el rendimiento académico de esta asignatura. Esta dificultad radica en que aprender matemáticas es aprender dos lenguajes diferentes, un lenguaje natural (español) y un metalenguaje simbólico. En contraste con el lenguaje natural, el lenguaje matemático es más preciso, no es redundante y relativamente no ambiguo (Brunner, 1976). Su aprendizaje requiere de representación y manejo de las relaciones simbólicas, pensamiento abstracto y solución de problemas donde se necesita hacer un análisis de la situación problemática, descomposición de elementos y reestructuración de las relaciones (Sánchez, op. cit.).

Una forma de comprender las bases conceptuales del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas es caracterizándola por las diversas escuelas de pensamiento agrupadas en :

Platónica: Concibe las entidades matemáticas como objetos reales que existen independientemente del sujeto. El matemático es un científico empírico que no puede inventar las cosas porque éstas existen de antemano, lo que puede hacer es descubrirlas.

Formalismo: Relaciona el desarrollo de las matemáticas con un conjunto de axiomas, definiciones y teoremas.

Constructivista: Las matemáticas pueden obtenerse solamente a través de la construcción finita de pasos verificables.

La escuela platónica y formalista coinciden en cuanto a los principios de razonamiento que son permisibles en la práctica de las matemáticas; pero las tres corrientes de pensamiento consideran al contenido matemático como un producto: para los platonistas, el contenido lo constituye los elementos de una matemática clásica (sus definiciones, sus postulados y teoremas); para los formalistas, las matemáticas contenían estructuras axiomáticas formales para liberar a las matemáticas clásicas de sus problemas (p. ej. las paradojas); y para los constructivistas, los contenidos eran los teoremas que habían sido construidos a partir de principios vía patrones válidos de razonamiento.

A partir de este contexto, Dossey (1992, citado en Trigo, 1998) sugiere que el desarrollar matemáticas debe aceptarse como una actividad no gobernada estrictamente por alguna escuela de pensamiento, sino que incorpore los elementos que describen la práctica de hacer matemáticas (lo que hace un matemático al trabajar con las ideas matemáticas) y no normar el trabajo en base a una corriente de pensamiento.

Además de la influencia que han tenido las diversas escuelas de pensamiento para su enseñanza, también han surgido diferentes movimientos que han sugerido cambios en los acontecimientos y en la forma de instrucción, por ejemplo:

- *Las matemáticas modernas* (1960) recomendaban el aprendizaje de la estructura y el lenguaje formal de las matemáticas desde los niveles elementales. Se incluyen nuevos contenidos como el estudio de los conjuntos y la lógica matemática y los métodos de demostración.

- *El regreso a lo básico*. daba mucha importancia al manejo de las operaciones fundamentales y los procedimientos algorítmicos. Sin embargo, aun cuando algunos estudiantes eran capaces de resolver operaciones. muchas veces no entendían el significado o sentido de las respuestas; incluso había casos en que el estudiante encontraba la "respuesta" a problemas cuyos datos no tenían sentido o eran insuficientes.
- *El aprendizaje de las matemáticas fundamentadas en la resolución de problemas*, constituye el corazón de esta disciplina, porque los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema. Éste desempeña un papel muy importante cuando se discuten las estrategias y el significado de las soluciones, las cuales están en relación con el conocimiento referente a los axiomas, principios y métodos matemáticos.

Estas formas de enseñanza, que se relacionan en cuanto a la naturaleza de la disciplina, convergen en las diversas conceptualizaciones del currículum matemático, entre los cuales se destacan:

a. El curriculum francés, que enfatiza el aspecto formal de las matemáticas al adoptar una terminología y lenguaje precisos, el reemplazo de la tradicional geometría euclidiana por el estudio del álgebra lineal.
b. El currículum británico, el cual da mucha importancia a las aplicaciones de las matemáticas, como sería el aprendizaje de conceptos de una forma gradual e intuitiva.

c. El curriculum norteamericano y canadiense, intentan asociar la resolución de problemas al aprendizaje de las matemáticas así como la introducción de las nuevas tecnologías en la educación.

Bajo esta última perspectiva, el curriculum que se sigue en la mayoría de los programas para el enseñanza de las matemáticas a nivel secundaria en nuestro país, está concebido de manera que los alumnos tengan la oportunidad de revisar y utilizar constantemente las nociones y procedimientos básicos de esta disciplina. Resaltando también la importancia que tiene para el aprendizaje de las matemáticas, el que los alumnos aprendan a resolver problemas utilizando el lenguaje y procedimientos de esta asignatura (SEP, op. cit.). Asimismo, se abordan cuestiones básicas sobre qué son y cómo deben entenderse los hechos, conceptos, procedimientos y las actitudes que se deben asumir para una mejor adquisición del conocimiento matemático.

Por lo anterior, uno de los principales objetivos de la propuesta educativa de la Secretaria de Educación Pública (SEP), en lo que respecta a la asignatura de matemáticas dirigida a nivel secundaria, está orientada a que los alumnos a partir de los conocimientos previos de tipo aritmético, comprendan el significado de los conceptos algebraicos y puedan utilizarlos como herramientas para resolver diversas situaciones problemáticas (Alsina y Burgués, 1996).

El cambio en la instrucción deriva en parte porque tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas ha abordado sólo la adquisición de un tipo de contenido: los conceptos. De igual modo, se le había dado mayor importancia al aspecto formal de la disciplina, que a los procedimientos intuitivos y naturales, más adecuados al momento evolutivo y las etapas de aprendizaje de los alumnos y, como consecuencia, predominó siempre una metodología deductiva y memorística en menoscabo de la inductiva.

Siguiendo este lineamiento, Trigo (op.cit.) plantea una propuesta fundamentada en los principios y métodos de la resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas, en el que se requiere discutir las ideas principales alrededor de esta actividad, como ¿qué es un problema?, ¿qué es la resolución de problemas?, ¿qué significa el aprender matemáticas?, el papel del estudiante y del profesor, etc. Es decir, es la mejora de la capacitación para la solución de problemas, área de gran interés para los investigadores cognitivos. Este interés radica no sólo por su importancia teórica, sino también por las dificultades que muchos estudiantes tienen para resolver problemas.

2.2 PROCESO DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En los últimos veinticinco años la resolución de problemas ha sido identificada como una actividad importante en el aprendizaje de las matemáticas, y como una línea de investigación para el estudio del pensamiento (De Vega, 1989.) La resolución de problemas no se reduce a un conjunto de reglas que puedan aplicarse en la instrucción: es una perspectiva en la que existe una conceptualización dinámica de las matemáticas y en la cual es importante identificar elementos que ayuden a desarrollar y promover una disposición matemática en los estudiantes. La idea esencial consiste que los estudiantes reflexionen abiertamente sobre los conceptos, problemas y estrategias de resolución durante el aprendizaje de las matemáticas.

Así, la resolución de problemas es una forma de pensar donde el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en su aprendizaje de las matemáticas, porque implica tanto resolver un problema como aprender algún concepto matemático. Es decir, al resolver un problema o al aprender el contenido, el estudiante tiene que discutir sus ideas alrededor del entendimiento de la situación o problema, usar sus representaciones, estrategias cognitivas y metacognitivas, y utilizar contraejemplos ya sea para avanzar, resolver y entender esa situación o problema. Por lo tanto, la resolución de problemas se relaciona no solamente con el uso y desarrollo de habilidades para que el estudiante tenga acceso y utilice diversos recursos; sino también con estrategias que le permitan trabajar eficientemente con tales recursos en diversas situaciones (Trigo, op.cit.)

Trigo (ibidem) expresa que para comprender en qué consiste esta actividad con fines de instrucción matemática, es importante definir qué es un problema, en qué consiste este proceso y los métodos de solución implicados .

¿Qué es un problema?

Un componente esencial de una propuesta de la resolución de problemas es la conceptualización que se tenga acerca de lo que es un problema. En el campo de las matemáticas existen problemas que pueden resolverse en poco tiempo, otros requieren más análisis y discusión, otros más que hasta el momento no han tenido solución, hecho que ha conducido a algunos teóricos de la educación matemática y de la psicología cognitiva al planteamiento de diversas concepciones del mismo. Pero en general un **problema** está ligado a la relación o interacción entre el individuo y la tarea a solucionar, en el cual aparecen los siguientes componentes:

1. La existencia de un interés.
2. La no existencia de una solución inmediata.
3. La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico)
4. La atención de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver una tarea.

La idea fundamental consiste en que el alumno se enfrente a una variedad de situaciones en donde sea necesario analizar y evaluar diversas estrategias en las diferentes fases de solución. En esta perspectiva, la palabra problema incluye situaciones en donde se identifique el aprendizaje de determinado contenido, por ejemplo, pensar en el problema de aprender el concepto de variable o expresiones algebraicas.

Tipos de problemas matemáticos

Los problemas matemáticos pueden clasificarse según el tipo de representación que evocan, tales como problemas gráficos, problemas simbólicos y textuales. Un problema gráfico permite una representación organizada de las representaciones mentales acerca de la situación problema mediante el empleo de una gráfica.

Un problema simbólico hace uso de símbolos que representan fórmulas matemáticas para que puedan ser sustituidas por los valores de los datos. Por ejemplo, un problema de esta categoría es:

" Cierta sustancia radiactiva se descompone de acuerdo con la fórmula S=S o E 0.04 t, donde S es la cantidad inicial de la sustancia y S la cantidad de dicha sustancia que queda después de t años"
a) Resuelve para *t* la fórmula dada.
b) Si al principio hay 50 gr. de la sustancia radiactiva ¿cuánto tiempo se necesitará para que se descomponga la mitad?
c) Si t=0, ¿qué pasará?"

Mientras que un problema textual o verbal se caracteriza por ser un cálculo expresado por medio de un relato con palabras, el cual suele ser frecuentemente empleado en el área de matemáticas y dentro del programa curricular de enseñanza elemental para proporcionar práctica en cálculos determinados, en las habilidades generales de resolución de problemas o en la aplicación a las tareas de la vida real, por ejemplo:

"Roberto compró dos cajas de clavos a un peso cada una, y tres latas de pintura que le costaron cuatro pesos cada una. Si al principio disponía de veinte pesos ¿cuánto dinero le queda para llevar a María al cine el sábado por la tarde?"

En este tipo de problemas el estudiante debe poner en práctica tres habilidades muy importantes a saber: 1) leer e interpretar las palabras mediante el uso de habilidades lingüísticas para el reconocimiento de nombres, adjetivos y verbos, y el uso de claves referenciales del lenguaje, así como el conocimiento de esquemas generales para la comprensión de los relatos; 2) determinar qué operaciones se requieren al traducir las palabras a un lenguaje matemático a través del conocimiento de las estructuras matemáticas; y 3) ajustar el problema de forma que se puedan seguir procedimientos de resolución conocidas, lo cual implica el manejo de una estrategia para identificar lo que se conoce y lo que se debe de descubrir.

Al respecto, ciertas investigaciones (Brownell y Stretch, 1931; Hydle y Clapp, 1927; Kramer, 1933; Loftus y Suppes, 1972, citados en Resnick op. cit.) que midieron los errores cometidos por los alumnos al resolver una serie de problemas verbales que exigían cálculos idénticos, pero con textos y contextos diferentes, pusieron de manifiesto que este tipo de problemas presentaban ciertas variables que aumentaban su dificultad como la familiaridad de las situaciones que se describían en los problemas; la ordenación de los problemas en series; el número de objetos poco familiares y de elementos no esenciales; si los problemas eran interesantes para ellos; la dificultad del vocabulario; si los problemas se presentaban en forma de oración aseverativa o interrogativa. Además, Loftus y Suppes (1972, ibidem), aprovechando los sistemas de enseñanza asistidos por ordenador, identificaron otras características de las variables estructurales que también contribuían a la dificultad de los problemas, como: el número de operaciones aritméticas necesarias para llegar a la solución; a la secuencia de los problemas, es decir, si el problema se resolvía por medio de las mismas operaciones que la anterior y en el mismo orden.; a la longitud del problema o número de palabras del enunciado; a la profundidad, identificada como la complejidad gramatical del enunciado; y si era preciso o no una conversión de unidades de medida.

Con base al criterio de las variables estructurales, el problema de Roberto y María resultaría un problema adecuado para un estudiante de quinto o sexto grado porque exige la ejecución de tres operaciones diferentes , (la multiplicación, suma y resta), tiene 45 palabras y contiene oraciones subordinadas e información irrelevante. En una versión más organizada y resumida, este problema sería idóneo para los estudiantes más jóvenes o menos hábiles porque se reduce el número de palabras y se simplifica la sintaxis, por ejemplo:

"Roberto compra: 4 cajas de clavos, a $ 1 cada una
3 latas de pintura a $ 4 cada una
Roberto tenía $20. ¿Cuánto le queda?"

Como se puede comprender, el uso de las variables estructurales permitirían diseñar mejores secuencias prácticas y, al mismo tiempo, servirían para poder conocer los procesos mentales que se llevan a cabo en algunos tipos de resolución de problemas, porque al identificar las variables que afectan la dificultad del problema, se puede indicar el número y tipo de procesos mentales necesarios para llegar a la solución.

Dentro de esta perspectiva Bañuelos (1995) proporciona evidencia empirica en relación al tipo de representación diferencial de cada uno de los problemas matemáticos, y menciona que el simple planteamiento impone una forma de aproximación y resolución, resultando esto como un facilitador u obstaculizador.

En este estudio encontró que la versión textual o verbal actúo como obstaculizadora al opacar la comprensión de los estudiantes sobre el planteamiento del problema, obligándolos a emplear un número mayor de estrategias para la solución. Mientras que la versión gráfica representó un planteamiento facilitador al promover la organización de las representaciones mentales que los estudiantes realizan al resolverlo.

Fases para la resolución de problemas

Para poder resolver un problema es necesario considerar tres elementos: 1) la representación del problema, 2) el entorno de la tarea, y 3) la estructura del conocimiento del individuo (Van Lehn, 1996).

La representación del problema esta constituida por dos subetapas: a)traducción del problema o imagen acerca del conocimiento lingüístico y factual, durante el cual se forma una interpretación de cada una de las oraciones; y b)integración del problema, que se relaciona con el conocimiento esquemático del tipo de problema, a través del cual se representa una estructura integrada y coherente mediante la formación de relaciones entre las proposiciones.

La solución del problema se caracteriza por dos subetapas: la planeación de la solución y la ejecución de la solución, las cuales involucran la selección de un procedimiento.

1. Representación del problema

La representación o espacio del problema es el primer paso para resolver un problema, se caracteriza por la elaboración de una representación que vincula el planteamiento del problema o tipo de problema, por una parte, y la red semántica de la persona, su conocimiento de los procedimientos, y su conocimiento general acerca de las relaciones matemáticas y espaciales, por la otra. (Lesgold, 1982)

De ahí que la interpretación de un problema exige toda una serie de habilidades lingüísticas (reconocimiento de nombres, adjetivos y verbos, y aplicación de indicaciones referenciales del lenguaje). El procesamiento lingüístico sirve como codificador del problema para su procesamiento, relacionando las palabras del problema con las categorías lingüísticas que tiene almacenadas la persona, lo cual supone replantear el problema en las propias palabras de uno. Posteriormente, si el sujeto no tiene conocimientos sobre un tema específico, requerirá un procesamiento lingüístico informal que consiste en identificar lo que se sabe y lo que se debe descubrir (De Vega, op.cit.) Este proceso requiere la participación de un bagaje de conocimientos sobre la estructura general del lenguaje en que está redactado el problema, y sobre las formas determinadas en que se expresa lingüísticamente la información cuantitativa y comparativa. Lo anterior refleja el por qué los problemas verbales les resultan muy difíciles a los estudiantes, que los mismos cálculos presentados directamente de forma numérica. La dificultad es todavía más comprensible cuando se tienen muchas cosas en mente al resolver el problema. A la luz de la capacidad limitada de la memoria de trabajo, no es de extrañar que los alumnos olviden a veces algún paso o algún resultado intermedio de cálculos ya realizados, aunque comprendan perfectamente el lenguaje en que está expresado el problema. Porque frecuentemente no tienen acceso a todos los estados del espacio problema que han ido construyendo.

Afortunadamente, nuestro sistema cognitivo puede hacer uso de diferentes ayudas para salvaguardar estos obstáculos, tales como disponer de una "memoria externa", por ejemplo, anotar en un papel los movimientos de la torre de Hanoi, y así poder evocar los movimientos que conducen a los callejones sin salida; o también, elaborar diferentes tipos de representaciones intermedias no lingüísticas como la representación gráfica, la representación visual y la representación algebraica, entre otras (Bañuelos, op.cit.; Alarcón y cols., 2000)). Una representación física es la creación de una imagen mental basándose en el análisis lingüístico del problema, por ejemplo de tres niños puestos de pie uno al lado de otro para comparar sus estaturas; esta comparación será traducida a expresiones matemáticas de más o menos para resolver el problema con facilidad. La representación visual mantiene la información del problema en un formato accesible mientras se ejecutan los cálculos, reduciendo la probabilidad de error.

La representación algebraica permite la construcción de todas las ecuaciones sobre la base de la información lingüística del texto del problema, pero dejando todos los cálculos para el final.

Cada tipo de representación puede hacer entrar en juego diferentes tipos de conocimientos, y apoyándose en diferentes estrategias para resolver el problema. La representación visual se apoya en el conocimiento de las relaciones espaciales, y plantea el cálculo como una comparación visual directa; y la representación algebraica trae a la mente reglas de la manipulación de expresiones simbólicas en una ecuación.

Cabe mencionar que las personas pueden hacer uso de varias formas de representación para elegir una de ellas o una combinación de las mismas que conduzcan al proceso final de resolución. Además, algunas representaciones tendrán más éxito que otras para cada problema dado, puesto que las diferentes representaciones pueden traer a la mente datos y procedimientos diferentes de la memoria a largo plazo, lo que a su vez afectará al proceso de resolución y a sus probabilidades de éxito.

¿Pero qué es lo que determina el tipo de representación óptima, o que se establecerá con mayor probabilidad para un problema dado?. Las posibilidades dependen de las diferencias individuales en cuanto al alcance y a la estructura del aprendizaje previo, incluyendo las limitaciones que imponen al desarrollo la edad y la experiencia, además del entorno de la tarea.

2. Entorno de la tarea

El entorno de la tarea se refiere a todos los datos del problema que están disponibles para que sean percibidos por la persona que lo resuelve. Un problema se puede presentar de forma física, como cuando un profesor le da a su alumno dos conjuntos de bloques y le pregunta cuál de ellos tiene más bloques. Se puede presentar de forma verbal, como en el caso de los problemas orales, o simbólica, como en la resolución de incógnitas de una expresión algebraica. Es más frecuente que el problema se presente mediante alguna forma de combinación de objetos, imágenes, símbolos e instrucciones verbales.

En sí, el planteamiento del problema, cualquiera que sea su forma, proporciona los materiales brutos a partir de los cuales el sistema cognitivo del sujeto elabora una representación del problema. Esta representación determinará a su vez qué estrategia de solución se elegirá.

Por consiguiente, el individuo debe de determinar qué procedimientos y estrategias globales evocan los datos, porque éstos demandan la ejecución de ciertas actividades (Resnick, op.cit). Por ejemplo, el dibujo de unas tijeras inspiran la acción de cortar; un símbolo de raíz cuadrada inspira el procedimiento para extraer la raíz cuadrada de un número; las instrucciones de la tarea representan estrategias generales que indican los objetivos específicos para la solución del problema, por ejemplo: "Demostrar que los triángulos *abc* y *def* son congruentes", o "Descubrir el conjunto de números enteros que satisface la ecuación 3X+X-10=0"; así como la funcionalidad de los objetos, p.ej. una demostración empírica de lo expresado la constituye los experimentos guestalticos sobre la "fijación funcional" para determinar el papel del insight en la resolución de problemas, en los cuales se observó que la gente tiende a pensar en los objetos en función de sus usos establecidos, lo cual restringe el empleo de dichos objetos para situaciones nuevas o de soluciones creativas. Incluso, la aplicación de la misma regla al entorno de la tarea puede conducir a la selección de estrategias habituales que pueden tener éxito o pueden no tenerlo. Además, el simple hecho de variar las instrucciones en un mismo experimento, puede formar diferentes representaciones mentales, y a su vez, diferentes ejecuciones del mismo problema (Magone, 1977, citado en Resnick, op. cit.)

Es así, que el entorno de la tarea está compuesto del estado inicial, la meta y las restricciones, los cuales constituyen los elementos objetivos de la tarea, incluidas las instrucciones o enunciados del problema, y de los elementos físicos de la misma, como son los dibujos, diagramas u objetos concretos. Estos elementos se codifican para un procesamiento mental del problema o representación, en el cual, el entorno de la tarea es más complejo, porque no sólo incluye los datos del problema, reformulados en términos familiares, sino también todos los datos relevantes y los procedimientos con lo que se conectan estos elementos replanteados en la memoria a largo plazo. Esta representación fue lo que Newell y Simon (1972. citado en De Vega, op.cit.) llamaron el espacio del problema.

Para complementar los procesos de representación y el entorno de la tarea, es necesario agregar el proceso de búsqueda de la información almacenada en la memoria, mediante la generación de estrategias para la solución de problemas, como:

- Algoritmos y Heurísticos

Los algoritmos son métodos muy eficientes que conducen a una solución segura, porque generan un espacio problema exhaustivo y seleccionan la alternativa mejor. Sin embargo, algunos problemas no poseen algoritmos, y en otros casos, el procedimiento es muy lento.

Por otra parte, los heurísticos, que son reglas de "andar en casa", permiten un acceso más rápido a la solución, reduciendo el número de estados del espacio problema. En sí, los problemas requieren heurísticos de uso específico y de propósitos generales. Entre estos se encuentran las estrategias de Análisis medio-fin y la planificación.

a) Análisis medio-fin. Es el principal heurístico que guía a los sujetos en el construcción de un espacio problema, en una gama amplia de problemas. Se basa en la resolución de diferencias entre el estado actual y la meta deseada. Esto se realiza mediante la selección de operadores que producen un cambio de estado, el cual permite un grado de acercamiento aparente hacia la solución. Por ejemplo, en el problema de misioneros y canibales, el heurístico induce a seleccionar los movimientos que sitúan la mayor cantidad de pasajeros en la orilla.

Y aunque produce un efecto de acercamiento a la solución, a veces la resolución de un problema exige una vuelta a estados más distantes de la meta. De ahí que el sujeto realice movimientos hacia adelante y hacia atrás, es decir, entre la meta y la solución.

b) Planificacion. Es un heurístico muy útil en los problemas complejos. El solucionador construye un problema simplificado o más abstracto y lo resuelve. Esto le permite olvidar provisionalmente alguna información que obstaculizaba la búsqueda, al excederse los límites de la memoria del sujeto.

La investigación científica está sujeta al heurístico de planificación; el investigador construye una versión estilizada de un fenómeno o problema en su laboratorio y analiza los resultados para generalizarlos a situaciones más complejas.

Castañeda y López (1992) considera que los procesos de aprendizaje y de pensamiento requeridos en las actividades del salón de clases y en las de estudio independiente, varian principalmente por dos causas fundamentales: los algorítmicos, en los que basta que el alumno se ajuste al modelo establecido, y los heurísticos, donde el alumno debe ajustar cada paso de la solución al problema hasta conseguir la meta. Cada proceso requiere formas diferentes de operar. Por ejemplo los algoritmos útiles en el dominio del álgebra están representados por los métodos de cálculo para resolver una ecuación lineal de una y dos incógnitas; mientras que los heurísticos importantes lo constituyen los diversos caminos o métodos de búsqueda que siguen los estudiantes para plantear una ecuación lineal que dará respuesta al problema planteado, es decir, las diferentes representaciones de un mismo problema, pero que todas conducen a la solución correcta del mismo.

En síntesis, la solución de problemas se concibe como generadora de un proceso de búsqueda a partir de un estado inicial a un estado meta, a través del cual quien aprende combina elementos de conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a una situación nueva, y su aplicación en las matemáticas consiste en que aprenda a operar en este campo;. Gagné (1987) considera que la solución de problemas puede definirse cómo la verdadera esencia de las matemáticas, ya que tras haber resuelto un problema se ha aprendido, y si bien puede que sólo se haya aprendido a resolver ese problema, es probable que se haya aprendido a solucionar una variedad de problemas semejantes.

Existen tres fases en la solución de un problema: la preparación que supone un análisis e interpretación de los datos disponibles inicialmente: La producción, que comprende operaciones como la recuperación de información de MLP, la transformación en Memoria a Corto Plazo (MCP), aplicando diferentes estrategias con la utilización de procedimientos heuristicos o cómputos algoritmicos, por otro lado la fase de enjuiciamiento evalúa la solución generada, contrastándola en el criterio de solución (De Vega, op.cit.; Alda y Hernández, 1999)

Sin embargo, de acuerdo con Castañeda y López (1989), cada área del conocimiento representa el repertorio social sistematizado y registro de reglas y procedimientos útiles para problemas particulares para esa área, como seria el caso de la aritmética y la geometría en los problemas de tipo algoritmico, lo que ha arrojado resultados negativos respecto a la posibilidad de transferir este tipo de procedimientos. Esto conlleva a que los diseños instruccionales deben integrar los conocimientos propios de la materia tomando en cuenta el contexto en que se aplica.

2.3 HISTORIA DEL ÁLGEBRA

El álgebra es el lenguaje en que se desarrollan la mayoria de las disciplinas de las matemáticas, por ejemplo la geometría analitica, la teoria de las probabilidades, la estadistica, el cálculo diferencial e integral, y otras muchas expresiones de la matemática. También es una herramienta que permite modelar problemas de la vida cotidiana así como situaciones teóricas de las ciencias exactas, al constituir diversas formas de representación matemática.

El álgebra como muchas ramas de la matemática, tiene raíces tan antiguas como los orígenes de la civilización. Kieran (1982) presenta un análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico y de sus reglas de transformación, destaca la distinción entre el uso de letras para representar incógnitas y el uso de letras para representar cantidades dadas cuando se expresan soluciones generales y como herramienta para probar reglas que gobiernan relaciones numéricas. También destaca la pérdida gradual de significado al ir pasando de descripciones generales en lenguaje ordinario hacia representaciones simbólicas y procedimientos. El énfasis del recuento está alrededor del simbolismo algebraico. Sin embargo el resumen histórico sugiere que el desarrollo del simbolismo algebraico facilitó un cambio de una perspectiva procedimental a una estructural en el álgebra. Algunos procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra escolar tienen sus raíces en el desarrollo histórico del álgebra como sistema simbólico.

Esta autora resume en tres etapas la evolución del álgebra:

1. *Etapa retórica.* Antes de Diofanto, 250 a.C. Se caracterizó por el uso de descripciones en lenguaje ordinario en el proceso de resolución de algunos problemas particulares. Una ausencia total de símbolos o de signos especiales para representar las incógnitas.

2. *Etapa lacónica.* Se inicia con Diofanto, quien introduce letras para la representación de cantidades desconocidas. El problema de los algebristas, entre el siglo III y el XVI radicaba en encontrar la identidad de las letras más que en

encontrar una forma de expresar lo general. Diofanto no tenía un método general; los 189 problemas de la Aritmética fueron resueltos de manera diferente. Este simbolismo lacónico de Diofanto no empieza a evolucionar sino hacia el siglo XVII. Después de la conquista musulmana, en el siglo VII, los árabes, que utilizan las matemáticas griegas e hindúes se encargan de difundirla por Europa, aunque utilizan métodos retóricos. Durante el Renacimiento se utilizan abreviaturas de palabras normales, p para el más (+, plus), m para el menos. Hacia el 1500 se traduce el trabajo de Diofanto al latín.

3. *Etapa simbólica.* Hacia finales del 1500, el trabajo de Diofanto en latín indujo a Vieta (1540-1603) a utilizar letras para las cantidades dadas y para las incógnitas. Se empiezan a expresar soluciones generales y a formular reglas para relaciones numéricas. El uso de simbolismos permite la eliminación de información superflua y da pie para empezar a generar otros conceptos matemáticos tales como el concepto de función. Aunque el simbolismo algebraico facilita su desarrollo, lo mismo que la relación entre el álgebra y la geometría, las definiciones de los conceptos de variables independientes y dependientes dadas por Euler en 1755 son definitivas.

El concepto inicial de función como un proceso de entrada y salida, se reemplazó por uno más estructurado. En 1830 Dirichlet modifica el concepto euleriano de función para definirla como una correspondencia arbitraria entre números reales. Cien años más tarde, Bourbaki generaliza el concepto de función definiéndola como una relación entre dos conjuntos.

Desarrollo del conocimiento del álgebra

Actualmente el álgebra se concibe como la rama de las matemáticas que trata la simbolización de relaciones numéricas generales y de estructuras matemáticas así como de la operación sobre esas estructuras.

Los temas típicos incluyen:

- propiedades de los números reales y complejos
- el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado en una incógnita
- la simplificación de expresiones polinómicas y racionales
- la representación simbólica de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, junto con sus gráficas
- sucesiones y series

Al comienzo de los años 60 se vio una brecha muy grande entre el álgebra escolar y las necesidades de ella en campos como la física nuclear, la exploración espacial, las comunicaciones y la tecnología computacional. Se crean entonces las nuevas matemáticas. Se incluyen las desigualdades y se hace énfasis en conceptos unificadores como conjunto y función a fin de enseñarlos de manera que su estructura y carácter deductivo fuera evidente.

Se mantiene el carácter estructural que era evidente a comienzos del siglo. Ejemplos de aspectos estructurales del álgebra superior tradicional incluyen:

simplificación y factorización de expresiones y resolución de ecuaciones haciendo operaciones en ambos lados.

El capítulo introductorio de la mayor parte de los textos enfatiza la aritmética. Las representaciones algebraicas se tratan como enunciados generalizados de las operaciones aritméticas; es decir que se trabaja en términos procedimentales en donde los valores numéricos se sustituyen por expresiones algebraicas para obtener resultados específicos Sin embargo, una vez que se ha completado esta introducción, relativamente suave, las representaciones algebraicas empiezan a tratarse como objetos matemáticos sobre los cuales se ejecutan ciertas operaciones estructurales tales como combinar términos; factorizar o restar un término en ambos lados de una ecuación (SEP,1993).

Kieran (op. cit) hace una distinción entre los conceptos procedimental y estructural en el área de las matemáticas. El concepto procedimental, se refiere a las operaciones aritméticas que se realizan sobre los números para obtener números. Mientras que el concepto estructural se refiere a un conjunto de operaciones que se ejecutan, no a partir de los números, sino sobre expresiones algebraicas.

2.4 CONSIDERACIONES PSICOLÓGICAS PARA LA ADQUISICIÓN DEL ÁLGEBRA

Sfard (1991, citado en Kieran, 1989) ha sugerido que las nociones matemáticas abstractas pueden concebirse en dos formas fundamentalmente diferentes: estructuralmente (como objetos) y operacionalmente (como procesos). Ella asegura que para la mayoría de las personas la concepción operacional es el primer paso en la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos. La transición desde una concepción de "proceso" hacia una concepción de "objeto" no se logra ni rápidamente ni sin esfuerzo. Una vez que ambas concepciones se han desarrollado, ellas juegan papeles muy importantes en la actividad matemática ulterior.

Los alumnos no encuentran relación entre las concepciones operacional y estructural. Ver una entidad matemática como un objeto significa ser capaz de referirse a ella como si fuese algo real, una estructura estática, que existe en algún tiempo y lugar. También significa ser capaz de reconocer la idea a primera vista y de manipularla como un todo sin requerir los detalles. En contraste, interpretar una noción como un proceso implica verla como una entidad potencial más que como una entidad real, que tiene existencia por ser consecuencia de una serie de acciones. Así, mientras que la concepción estructural es estática, instantánea e integradora, una concepción operacional es dinámica, secuencial y detallada. Kieran (op. cit).

Además señala la existencia de etapas históricas en las que conceptos como número y función han evolucionado desde la concepción operacional hasta la estructural. Sfard (citado en White y Mitchelmore, 1996) presenta un modelo de tres fases paralelas del desarrollo conceptual:

1. Interiorización, en la que se hace algún proceso sobre objetos matemáticos familiares.
2. Condensación, el proceso o la operación se divide en unidades más manejables. La fase de condensación dura hasta que se concibe una nueva entidad únicamente en forma operacional.
3. Materialización involucra la habilidad repentina para reconocer algo familiar con una nueva perspectiva.

Kieran (op. cit.) señala mientras que la interiorización y la condensación son largas sucesiones de cambios cuantitativos y graduales más que cualitativos, la materialización parece ser un salto en el que el proceso se convierte en un objeto, en una estructura estática. La nueva entidad se desprende del proceso que la produjo. Por ejemplo, Sfard (op. cit.) afirma: "En el caso de las funciones la materialización puede evidenciarse por la habilidad de resolver ecuaciones en las cuales las incógnitas son funciones (ecuaciones diferenciales y funcionales, ecuaciones con parámetros); por medio de la habilidad para expresarse con respecto a propiedades generales de diferentes procesos realizados sobre funciones (como composición e inversión) y por último por el reconocimiento de que la computabilidad no es característica necesaria de los conjuntos de parejas ordenadas que se consideran como funciones". (Citado en Kieran, op. cit.)

Kieran (ibidem.) señala que de la misma forma que el proceso histórico puede verse como una evolución procedimiento--estructura, el álgebra escolar es una serie de ajustes proceso--objeto que los estudiantes deben hacer a fin de comprender todo el aspecto estructural del álgebra. Es importante destacar las adaptaciones que los estudiantes deben hacer cuando comienzan el estudio de las expresiones algebraicas y de ecuaciones: no pueden seguir interpretando estas entidades como operaciones aritméticas sobre algún número sino que más bien deben aprender muy rápidamente a verlas como objetos en sí mismos, sobre los cuales se realizan procesos de cierto nivel (es decir, operaciones). En otras palabras, los estudiantes deben darse cuenta pronto de que los objetos con los que están operando son expresiones algebraicas y no solamente números; además que las operaciones que se realizan son las de simplificación, factorización, racionalización del denominador, resolución o diferenciación de ecuaciones, etc, y no sumas, restas, multiplicaciones o divisiones. La diferencia fundamental entre la aritmética y el álgebra es que en ésta las magnitudes numéricas se representan con números y letras; el uso de las letras en las expresiones algebraicas permite representar cantidades que tienen diversas funciones, como simbolizar variables o incógnitas y constantes (Rivera, Bahena y Garnica, 1998). Tall (1989) menciona que en el momento en que un estudiante es capaz de concebir una expresión algebraica como un objeto matemático y no sólo como un proceso, la manipulación algebraica puede representar un fuerte conflicto.

Otro ajuste que deben hacer quienes inician su estudio de álgebra, es aprender a manejar la estructura del álgebra; en particular que la representación simbólica de relaciones numéricas tiene que ver con la traducción de situaciones problemáticas a ecuaciones. Las ecuaciones algebraicas son representaciones estructurales que requieren una perspectiva no aritmética tanto en el uso del signo igual (=) como en la naturaleza de las operaciones que se requieren.

Filloy y Riojano (1984) resaltan que los estudiantes no sólo deben comenzar a pensar en términos de operaciones "hacia adelante" para efectos de modelar estos problemas con ecuaciones, sino que deben contar con un método de resolución que opere sobre ambos lados de la ecuación, es decir de un método que opere sobre un objeto algebraico. Lesh, Post y Behr (1987) han distinguido la solución de problemas algebraicos de la solución de problemas aritméticos haciendo notar que en álgebra el problema requiere primero describir y luego calcular.

Esta descripción implica elaborar un modelo integrado por una ecuación, asi como las restricciones implicitas, más que llevar a cabo manifestaciones algebraicas (Jehavi y Mann, 1992). Al concentrarse en los aspectos conceptuales o semánticos del razonamiento algebraico, se puede reflexionar en las relaciones que vinculan la notación formal y los procedimientos para ejecutar las tareas matemáticas.

Sin embargo, es posible hacer descripciones tanto en términos estructurales como en términos procedimentales.

Los estudiantes las pueden interpretar siempre como números sobre los cuales se pueden realizar operaciones aritméticas específicas con el fin de obtener un resultado numérico. Los estudiantes tienen mayor éxito con la aproximación procedimental (la cual requiere un algoritmo para obtener una cantidad) que con la estructural (que requiere una relación de igualdad entre variables). Kieran (op. cit.) sugiere que aun en el nivel universitario, los estudiantes de álgebra pueden encontrar mayor significado en las representaciones procedimentales basadas en interpretaciones numéricas que en las representaciones estructurales.

Para resumir, las demandas cognitivas que se imponen a los estudiantes de álgebra incluyen:

- El tratamiento de representaciones simbólicas que tienen muy poco o ningún contenido semántico como objetos matemáticos y la operación sobre estos objetos con procesos que usualmente no arrojan resultados numéricos
- La modificación de sus interpretaciones iniciales de ciertos símbolos
- La inducción a representar las relaciones de situaciones enunciadas en palabras con operaciones que frecuentemente son las inversas a las que ellos usaban casi automáticamente, para resolver problemas similares en la aritmética

Transcurrieron siglos en el campo del álgebra para que estos desarrollos se produjeran. No obstante se espera que los estudiantes que comienzan su primer curso de álgebra los realicen casi inmediatamente (Sfard, op. cit) En la práctica escolar se observa que para cubrir su falta de comprensión, los estudiantes tienden a recurrir a la memorización de reglas y procedimientos y eventualmente llegan a creer que esta actividad es la esencia del álgebra. Además, la gran mayoría de ellos piensan que las matemáticas están basadas en reglas, mientras que otros consideran que su aprendizaje requiere principalmente de memorización.

2.5 PERSPECTIVA COGNOSCITIVA DEL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

Sobre el aprendizaje del álgebra Kieran (op. cit.) señala dos temas importantes: la "accesibilidad" de las interpretaciones estructurales y la dificultad para adquirir la concepción estructural del álgebra.

La "accesibilidad" se refiere a la facilidad con que los estudiantes producen prescripciones verbales o programas de ordenador para calcular soluciones versus la mayor dificultad para utilizar ecuaciones para representar las mismas relaciones; la fluidez con que generan representaciones de entrada y salida para representar las soluciones a los problemas; la forma en que ciertos ambientes en la computadora apoyan la visión de las letras como los números, la preferencia de los estudiantes para dar justificaciones numéricas en las relaciones de generalización, etc.

La comprensión de la estructura del álgebra implica las dificultades que presentan los alumnos, como:

- Ensayo y error en sus intentos de convertir expresiones en ecuaciones para tener una representación que incluya un resultado;
- Los errores estratégicos y no sistemáticos que cometen al momento de simplificar expresiones;
- Resistencia a operar sobre una ecuación como un objeto, que se evidencia en la imposibilidad de utilizar el método de "hacer lo mismo a ambos lados";
- Dificultad para entender que el signo igual es un símbolo de simetría;
- Dificultad para considerar las letras como variables o como "cantidades dadas" y para traducir problemas de palabras a ecuaciones;
- Dificultad para ver la estructura escondida de las ecuaciones;
- El no-uso del álgebra como herramienta para probar relaciones numéricas;
- Dificultad para convertir interpretaciones de procesos de entidades algebraicas en interpretaciones de objetos.

Kieran (op. cit.) afirma que una de las dificultades principales en el aprendizaje del álgebra se centra en comprender el significado de las letras involucradas. Booth (1988) sugiere que el significado nunca esta presente en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, porque los estudiantes solamente aprenden la manipulación de reglas sin la referencia sobre el significado de las expresiones manipuladas. Es decir, muy pocos estudiantes comprenden el término variable en su más alto nivel conceptual.

También resalta la importancia de no sólo trabajar en la construcción de la conexión en el sentido aritmético hacia álgebra, sino también mantener viva la conexión álgebra hacia aritmética, es decir, desarrollar la habilidad de ir y venir entre los dos niveles de concepción y de ver las ventajas de ser capaz de escoger una perspectiva u otra, dependiendo del problema que se tenga que resolver.

Ya que muchos profesores dicen enseñar básicamente lo que está en los libros, éstos pueden ser un medio para asegurar que las concepciones procedimentales sean bien desarrolladas y encaminadas hacia concepciones estructurales. Sin embargo, el impacto de largo plazo de estos textos aún no se ha podido evaluar.

Birenbaum y Tatsuoka (1993) encontraron que las dificultades que se presentan para el desarrollo de habilidades procedimentales, está en función del método de cálculo elegido para solucionar ecuaciones lineales con una incógnita, por ejemplo, uso de un heurístico simple (inicialmente evaluar la ecuación para determinar si se obtiene una solución lineal al reescribir la ecuación en una forma estándar hasta el paso final) o aplicar el método estándar (con las variables del lado izquierdo de la ecuación y las constantes en el lado derecho).

Otro aspecto que deben considerar quiénes elaboran el curriculo de álgebra y quienes escriben los textos, es el papel de la tecnología. Los que están a favor de una reforma del currículo del álgebra en tal sentido tienden a restarle importancia a la manipulación de símbolos y a favorecer las interpretaciones procedimentales. Un argumento que defiende un menor énfasis en el proceso de simplificación de expresiones, es precisamente la existencia de herramientas computarizadas de manipulación de símbolos, que pueden hacer el mismo trabajo.

En este estudio se ha argumentado que es posible extender el contenido de álgebra haciendo más énfasis en actividades que promuevan el desarrollo de las interpretaciones procedimentales y que hagan explícita la transición entre las concepciones procedimentales y estructurales. El aumentar la relevancia de las interpretaciones procedimentales se encadena favorablemente con los que abogan por utilizar más extensivamente la tecnología nueva en las clases de álgebra. Este punto ha sido también anotado por el National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (1989) en sus estándares de curriculo y evaluación.

White y Mitchelmore (op. cit.) proponen el uso de la computadora como una herramienta para realizar procedimientos de cálculo y álgebra, con el propósito de que el alumno invierta sus recursos para explorar las aplicaciones; es decir, no enfatizar en el desarrollo de habilidades, pero si en los conceptos subyacentes. El uso didáctico de la tecnología consiste entonces liberar recursos cognitivos (la manipulaciones sintácticas o el cálculo de la ecuación) para enfocarse en la estructura del modelo algebraico subyacente en la tarea de solución (Jehavi y Mann, op.cit.).

Kaput (1989) ha descrito cómo utilizar la tecnología para ayudar a los estudiantes a establecer lazos entre diferentes sistemas notacionales para dos variables: tablas de datos, gráficas y ecuaciones. sin embargo, a excepción de las gráficas, que permiten obtener visiones holísticas y estructurales, la mayoría de las actividades cognitivas involucradas en el trabajo con estas notaciones permanecen en el nivel procedimental. Las trancisiones entre las dos concepciones es aún implícita (Kieran, op. cit).

Las concepciones estructurales y procedimentales son importantes en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Como se estableció anteriormente, aunque los matemáticos prefieren confiar en sus concepciones estructurales, también utilizan las procedimentales. Más aún, se ha visto cómo el álgebra ha evolucionado históricamente de procesos a estructuras. Existe fuerte evidencia que apoya la noción de que los estudiantes siguen el mismo ciclo. Así pues, se sugiere que tanto el contenido como la enseñanza del álgebra se reconsideren a la luz de una dinámica de aprendizaje en la forma de proceso-estructura.

Para elevar la calidad del aprendizaje en el álgebra es indispensable que los alumnos se interesen y encuentren significado y funcionalidad en el conocimiento matemático, que valoren y hagan de él un instrumento que les ayude a reconocer, plantear y resolver problemas presentados en diversos contextos de su interés (SEP, op. cit.)

2.6 EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA EN LAS ESCUELAS SECUNDARIAS MEXICANAS

La SEP (2000) incluye en sus Planes y Programas de Estudio para las escuelas secundarias oficiales, un aprendizaje del álgebra bajo un orden de inclusividad y grado de dificultad creciente. En el primer grado se promueve *la adquisición de un lenguaje prealgebraico*, a través de vivir experiencias que implican un aprendizaje gradual en el uso de las expresiones con literales, las primeras reglas sencillas de escritura algebraica, y la resolución de problemas verbales, cuya estructura conduce al empleo de ecuaciones que pueden resolverse por medios aritméticos o de un solo paso (Fuson y Willis, 1989; Bovenmayer, 1989; Asha y Kathryn, 1996), así como las primeras ideas relacionadas con la jerarquía de operaciones y del paréntesis, a partir del estudio de la aritmética y la geometría, como es el uso de fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes; el aprendizaje de estos conocimientos representa una serie de prerrequisitos para iniciarse en el estudio formal del álgebra de segundo año, los cuales deberán contextualizarse en situaciones concretas y su representación por medio de tablas y gráficas, para que el alumno explore regularidades y patrones y aprenda expresarlos simbólicamente, antes de intentar la manipulación algebraica de los símbolos

(Alfonse, 1990). En el segundo año, el álgebra inicia con el estudio de las ecuaciones lineales, las regiones y subconjuntos del plano cartesiano, el planteo de problemas que conducen a sistemas sencillos de ecuaciones lineales y su solución por el método de sustitución y las primeras operaciones con monomios y polinomios. En el tercer grado se profundiza y completa el estudio de los temas anteriores y se introducen además los temas de productos notables, factorización de polinomios de segundo grado y la solución de ecuaciones cuadráticas por diversos métodos.

Además, se sugiere que durante todo el aprendizaje del álgebra, los alumnos la utilicen para resolver problemas con el propósito de que las nociones y procedimientos algebraicos tengan sentido para ellos.

De esta manera, su aprendizaje requiere la adquisición de *nociones y procedimientos básicos, técnicas de uso frecuente, ejercitación para la solución de problemas, experiencias necesarias y precisión de nociones*.

Las *nociones y procedimientos básicos* forman la base del conocimiento algebraico y son necesarios para cualquier aprendizaje ulterior de las matemáticas. Por ejemplo, para el segundo año son importantes los conceptos de:

- Elaboración de tablas de valores y gráficas de expresiones algebraicas.
- Planteamiento y solución de problemas que conducen a ecuaciones lineales; métodos de solución de ecuaciones lineales.

- Problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales 2x2; su solución por el método de sustitución.
- Planteamientos, en casos sencillos, de funciones; conocimiento de las gráficas de funciones de la forma $y = ax + b$
- Ejercicios de despeje y sustitución algebraica.

Estos conocimientos deberán ser contextualizados para la solución de problemas en situaciones muy diversas y variadas y con cierto nivel de dificultad creciente. Es así, que cuando se estudian las ecuaciones lineales, no conviene introducir desde muy pronto los coeficientes fraccionarios o los casos complicados de ecuaciones con paréntesis, pues pueden confundirlos en la adquisición de los procedimientos básicos para operar con ambos miembros de la ecuación y transponer términos de un lado a otro.

Con respecto a las *técnicas de uso frecuente*, el alumno debe saber cuándo y cómo emplear correctamente los procedimientos algebraicos, sin caer en su utilización mecánica o irreflexiva. El esfuerzo pedagógico estará encaminado a que los alumnos conozcan diversas formas de enfrentar o resolver una misma situación o problema, tomen conciencia de su utilidad y aprendan a reconocer las circunstancias de empleo. Por ejemplo, se ha observado que los alumnos tienden a preferir el método de suma y resta para resolver sistemas de ecuaciones lineales, quizá porque les resulta el más cómodo de emplear. Sin embargo, es muy importante que tengan la oportunidad de practicar los otros métodos y muy particularmente el de sustitución, ya que la idea de despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituirla en la otra, es una de las nociones fundamentales no sólo del álgebra, sino de todas las matemáticas.

Por último, el *empleo de ejercicios y problemas*, así como la *promoción de experiencias y la precisión de nociones*, permiten al alumno aprender un número suficiente de ejemplos de aplicaciones y problemas de búsqueda e investigación dentro de contextos significativos que permitan la utilidad del conocimiento algebraico y la discusión grupal.

2.7 ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS

Durante el proceso de solución de un problema se hace uso de reglas de transformación (instruccionales) y la derivación de una nueva información para la modificación de la estructura de un problema. Esta tarea cognitiva requiere el uso de estrategias que permitan el acceso y uso adecuado de los recursos cognitivos, además de los algoritmos y los heurísticos, tales como:

- ***Modelos de Representación***

Hegarty (citado en González, s/f) demostró que los alumnos universitarios no tienen éxito a la hora de resolver problemas porque basan su plan de solución en los números y palabras clave que seleccionan a partir del texto del problema (estrategia de traducción directa), mientras que los que tienen éxito construyen un modelo de la situación descrita en el problema y basan su plan de solución en este modelo (estrategia del modelo-problema).

En esta misma línea de investigación, Rivera, Bahena y Garnica (op. cit.) recomiendan que para resolver un problema algebraico, se debe promover el empleo de la *representación en sus tres formas: aritmética, geométrica y algebraica.* En ocasiones, algunas formas de representación- por la manera de exhibir el contenido-, se pueden ubicar en una forma de representación, estas formas de representación nos dicen más características que otras representaciones del problema. Por ejemplo, una serie de datos de alguna situación problemática a resolver en forma matemática, la podemos representar en escalas de valores, ya sea en variables numéricas o de rangos, en las cuales se pueden observar expresiones numéricas sobre la discreción de los datos, también estos datos se pueden transformar a un esquema o gráfica, lo cual revele aspectos que la acumulación numérica no lo permite tan fácilmente. Otras veces se puede dar un tratamiento abstracto de la matemática y posibilitar una representación algebraica.

De esta forma, las relaciones entre los datos o variables de un problema específico se pueden representar de las siguientes maneras:

Representación numérica	1. *Operaciones básicas con números.* Uso de tablas, conjuntos de pares ordenados.
Representación geométrica	2. *Mediante un diagrama.* Gráficos, pares ordenados en el plano cartesiano.
Representación algebraica	3. *Ecuaciones o fórmulas y expresiones algebraicas.*

Para Jiménez (1999) la solución de un problema algebraico puede realizarse mediante una de tres propuestas:

Primera
1°. Anotar los datos generales.

2°. Extraer los datos importantes y aplicar las preguntas clave.

3°. "Traducir" los datos ya seleccionados para resolver el problema de acuerdo con el lenguaje algebraico.

4°. Plantear y buscar una ecuación de primer grado.

5°. Resolver la ecuación encontrada.

6°. Analizar las soluciones y comprobar los resultados.

7°. Interpretar las soluciones en el contexto del problema.

Segunda
1°. Leer detenidamente el problema hasta que quede claro su enunciado.

2°. Identificar claramente las cantidades conocidas y desconocidas, poniendo una letra que represente la incógnita.

3°. Elegir una de las cantidades desconocidas y representarla mediante una letra, digamos "X". Después, expresar las cantidades desconocidas en términos de esa letra.

4°. Buscar datos en el problema que indiquen qué cantidades o combinaciones son iguales

5°. Formar la ecuación, igualando las cantidades o combinaciones de éstas encontradas en el paso anterior.

6°. Resolver la ecuación y comprobar la solución obtenida.

Tercera

1°. Partir de una situación concreta que puede ser:
una anécdota; un suceso actual de importancia mundial, un fenómeno fisico, histórico o social, etc. que responda a la situación real y del "aqui y ahora" de los alumnos.

2°. Buscar qué cosas se conocen –datos- y cuáles son desconocidas –incógnitas.

3°. Seleccionar datos e incógnitas relevantes.

4°. Identificar las relaciones que existen entre los datos, incógnitas y entre ambos.

5°. Simbolizar esos datos, incógnitas y relaciones.

6°. Analizar lo anterior: precisando conceptos y sus simbolizaciones, relaciones y sus simbolizaciones, reglas operacionales para llegar inductivamente a la formulación de una nueva teoría por medio de una abstracción-generalización.

7°. Lograr habilidad en la especificación de relaciones y aplicación de reglas operacionales o de inferencia.

8°. Aplicar la teoría en casos concretos.

Además agrega que en las estrategias de enseñanza del álgebra, de manera específica para las ecuaciones lineales, es conveniente apoyarse en principios y modelos como:

1) Introducir un nivel.
2) Facilitar el proceso de generalización.
3) Tener presente la importancia de la formación.
4) Utilizar un lenguaje para modelar situaciones.
5) Emplear diagramas numéricos.
6) Combinar tablas.
7) Elaborar modelos para la resolución de problemas.

- ***Estrategias de aprendizaje***

En el campo educativo ha existido una amplia aplicación de los principios del Paradigma del Proceso Humano de Información para la conformación de una psicología instruccional, cuyos objetivos se centran en lograr el desarrollo de habilidades de aprendizaje y no sólo la enseñanza de conocimientos. Su nacimiento en el campo de la psicología educativa se encuentra vinculado con la explicación del rendimiento académico, dado que no es posible relacionarlo en función exclusivamente de la capacidad intelectual o las habilidades básicas de los sujetos, puesto que los estudiantes con la misma capacidad obtienen rendimiento distintos.

Las estrategias de aprendizaje son aquellas acciones que un estudiante realiza para aprender, y en la cual utiliza tanto su estilo cognoscitivo particular como sus habilidades representacionales, tanto de la aritmética como del álgebra, de tipo selectivas y de control ejecutivo sobre su persona, así como la utilización de sus conocimientos y sus presuposiciones sobre el mundo en general (Castañeda y López, 1989)

Para Weinstein (1989) las estrategias de aprendizaje son consideradas como cualquier comportamiento o pensamiento que facilite de tal manera la codificación, que mejoren la integración y recuperación del conocimiento, lo que representa la constitución de planes organizados de acción, diseñados para alcanzar una meta.

Según del Pozo (1990), es posible relacionar cada tipo de aprendizaje con la utilización de una serie de estrategias de aprendizaje. Por ejemplo, el aprendizaje significativo de cualquier dominio del conocimiento estaría relacionado con las estrategias de selección, organización y elaboración.

La *estrategia de selección* consiste en separar la información relevante de la información poco relevante en el contexto concreto y específico. Es el primer paso que el estudiante tiene que realizar para comprender el significado de los materiales informativos.. Entre las técnicas que pueden activar y mejorar la estrategia de selección están el *subrayado, el resumen, el esquema y la extracción de la idea principal.*

La *estrategia de organización* trata de combinar los elementos informativos seleccionados en un todo coherente y significativo. Se aplica para establecer explícitamente *relaciones internas* entre los elementos que componen los materiales de aprendizaje. Básicamente se dan dos formas de organización: a) inducida por el material y b) la que es impuesta por el sujeto. Las técnicas de organización de uso más frecuente son: *la red semántica, el análisis del contenido estructural (estructuración de los textos narrativos y expositivos; mapas conceptuales, etc.)*

La *estrategia de elaboración* trata de unir los materiales informativos relacionando la nueva información con la información ya almacenada en la memoria es decir, establece conexiones externas a fin de acentuar el significado y mejorar el recuerdo de lo que se aprende (Beltrán, 1993, citado en Beltrán y Bueno, op.cit.) Se distinguen estrategias de elaboración simple y estrategias de elaboración compleja: las primeras se caracterizan por facilitar el aprendizaje de un material escasamente significativo, mediante una estructura de significado externa que sirve de apoyo o andamiaje al aprendizaje, sin proporcionarle un nuevo significado, como lo constituyen las *técnicas mnomotécnicos*; entre las estrategias complejas destacan el uso de *analogías y modelos, y el conjunto de técnicas para la elaboración de un texto escrito* (p. ej. los resúmenes)

Un aspecto importante en la enseñanza de las estrategias es tener en cuenta algunas consideraciones: 1. Al introducir una estrategia conviene enseñar cómo usar esa estrategia, por qué es útil usarla y cuándo se puede usar; 2. Es conveniente desarrolla un experimento o prueba que les demuestre a los estudiantes los beneficios de usar la estrategia, comprobando las ventajas de una situación de aprendizaje con estrategias frente a otra sin estrategias; 3. Es bueno discutir con los alumnos por qué se introduce y se practica una estrategia; 4. Resulta de gran interés relatar alguna historia que haga palpables los resultados de la instrucción de una estrategia (Beltrán y Bueno, op.cit.)

En este orden de ideas, Castañeda y López (op. cit.), consideran que la enseñanza de las habilidades cognoscitivas requieren una mayor atención, puesto que los fracasos consistentes en el aprendizaje de las matemáticas, han centrado el interés por entender cómo es que se desarrollan para poder enseñarlas.

A partir de la perspectiva de resolución de problemas para el aprendizaje de ecuaciones lineales, estas estrategias pueden aplicarse porque en cada fase del proceso de resolución, el alumno tiene que seleccionar la información relevante de la irrelevante (p.ej. de qué trata el problema), organizarla en categorías (p.ej. datos conocidos y desconocidos) para posteriormente traducirla a expresiones algebraicas ($3x$, representa los datos desconocidos), así como el planteamiento de una ecuación lineal ($3x-5=128$) a partir de la elaboración de un modelo (interacción entre la estructura de conocimientos del estudiante y la información proporcionada en el texto del problema) (Jiménez, 1999; Jehavi, y Mann, op.cit.; MacGregor y Stacey, 1993).

- ***Estrategias de Autorregulación***

Las "estrategias de aprendizaje" son equiparadas con la elección de un método para resolver una tarea, consideradas como las partes flexibles del sistema cognoscitivo, mismas que modifican a los componentes fijos del sistema como es la capacidad de la memoria de trabajo, por ejemplo. Para esto es necesario cubrir los requisitos relacionados con la autorregulación, es decir, la metacognición, entendiéndose ésta como el conocimiento de la persona acerca de sus propios procesos cognoscitivos, los procesos que controlan la manera en que organizamos y recuperamos lo que sabemos, la manera en que organizamos nuestra búsqueda o nuestros recursos para aprender algo nuevo, a diferencia de algo que tenga relación con lo que ya sabemos (Castañeda y Smeet, 1994) Esto implica el control del propio pensamiento y del aprendizaje, así como la aplicación de una estrategia que permita a la persona pasar de un tipo de estrategia cognoscitiva a otra, o seleccionar entre estas a la mejor, es decir, una estrategia ejecutiva, con posibilidades de desarrollo mediante experiencias relativas a una variedad de situaciones (Gagné, op. cit.). Son cuatro formas generales de la metacognición:

1. La predicción con base en lo que ya sabemos.
2. La planeación para resolver tareas que implican organizaciones novedosas de los elementos que definen la situación.
3. La supervisión del avance y resultados obtenidos en cada etapa.
4. El monitoreo de la manera como aplicamos los recursos disponibles para alcanzar ciertas metas.

A estas cuatro formas generales de metacognición, es necesario complementarlas con los procesos que la educación debe promover, como la creatividad, la eficiencia en el uso del pensamiento critico ante situaciones que requieren modificarse y la solución de problemas.

Cárdenas y Yañez (1994) y Madeiros (1992) describieron algunas estrategias para la solución de problemas aritméticos, consistentes en inducir a los alumnos a definir metas, descubrir problemas, explorar y evaluar alternativas de solución, con el objetivo de autorregular sus propias habilidades matemáticas. Estas comprendian:

a) El análisis de las metas y demandas de un problema.
b) Planeación de las estrategias especificas para la solución, como pueden ser las estrategias del conteo.
c) Aplicación de estrategias específicas como simplificación de expresiones.

d) Estas deben ser supervisadas por un adulto para corregir los errores.
e) Es necesario evaluar todo el proceso para llegar a la solución del problema.

Estas habilidades son desarrolladas a partir de los procesos autorregulatorios que se requieren para que los individuos ejerzan control sobre sus procesos psicológicos.

Cabe destacar que durante el proceso de solución, el aprendizaje del alumno involucra la transferencia del control ejecutivo del experto hacia éste bajo su supervisión, lo que determinaria la autosuficiencia cognitiva sobre los procesos de adquisición de un conocimiento específico.

Tanto las estrategias de aprendizaje y las de autorregulación son estrategias involucradas en el procesamiento de la información que realiza el alumno, en el primer caso el énfasis se pone en el material y el segundo en el alumno, pero ambas permiten al estudiante lograr un aprendizaje significativo.

- ***Estrategias instruccionales***

Aunque es innegable el carácter individual y endógeno del aprendizaje escolar, éste se compone no sólo de representaciones personales, sino que se sitúa asimismo en el plano de la actividad social y la experiencia compartida. Es evidente que el estudiante no construye el conocimiento en solitario, sino gracias a la mediación de los otros y en un momento y contexto cultural particular. En el ámbito de la institución educativa, esos "otros" son, de manera sobresaliente el docente y los compañeros de aula. De esta forma, puede concebirse a la enseñanza como un proceso de negociación de significados y de establecimiento de contextos mentales compartidos, donde resaltan la colaboración y el trabajo en equipo (Díaz-Barriga y Hernández, 1997).

El diseño de experiencias de aprendizaje colaborativo promueve que los estudiantes comparen sus procedimientos de solución con otros pares, de este modo los mejorarán hasta llegar a los más abreviados. Además cuando los alumnos se enfrentan a un problema matemático, y al principio no saben cómo resolverlo individualmente, la situación representa un desafío para cada uno. En contraste cuando trabajan en equipo le encuentran sentido al problema, revisan y planean varias estrategias, verifican las soluciones más adecuadas. Cuando se resuelve un problema en equipo, todos los miembros luchan juntos para resolverlo y adquieren conocimientos que ninguno de ellos ha dominado previamente, es un reto para el equipo.

Los estudiantes en el curso de su proceso cognitivo participan activamente con sus compañeros dentro del aula, negociando significados prácticos en matemáticas, para los estudiantes esta interacción no sólo es aprendizaje individual, también ofrece alternativas diferentes a la matemática escolar (Bakhurst, 1988, citado en Cobb y Steffe, 1983).

Cobb y Steffe (ibidem) afirman que esta interacción social del aprendizaje en matemáticas se caracteriza por:

1. Brindar a los alumnos la oportunidad de discutir, criticar, explicar, y cuando es necesario, justificar sus interpretaciones y soluciones.
2. Reinventar otras explicaciones resultado de intercambiar opiniones con sus compañeros. Indicar acuerdos y desacuerdos.
3. Cuestionar las alternativas o estrategias de solución propuestas por el maestro por sus compañeros.
4. La influencia que tienen las creencias de los alumnos y el maestro en su conducta dentro y fuera del aula escolar.

Los maestros deben tomar en cuenta su papel como guías en la negociación de las normas sociales dentro del salón de clase cuando planean sus actividades instruccionales. Así mismo el conocimiento cultural y creencias expresado en la vida cotidiana, y las dificultades encontradas en el salón de clases dan la oportunidad para reorganizar el conocimiento en matemáticas.

La tarea del educador consiste como primer paso, diseñar y presentar situaciones que, apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. El siguiente paso consiste en socializar estos significados personales a través de una negociación con otros estudiantes (Schoenfeld, 1996)

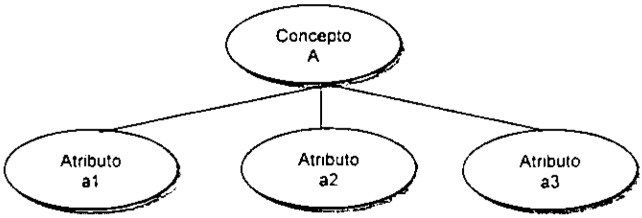
Este primer paso consiste en la promoción de una visión integradora de todos los conocimientos conceptuales y procedimentales que intervienen para el dominio del álgebra, como lo representa el empleo de mapas conceptuales durante la instrucción. Un mapa conceptual es una representación gráfica de segmentos de información, estructurados jerárquicamente por varias proposiciones conceptuales con diferentes niveles de generalidad o inclusividad (Novak y Gowin, 1988) Estas proposiciones están formadas por conceptos y palabras de enlace, que se representan gráficamente mediante nodos y lineas, respectivamente.

Díaz Barriga y Hernández (op.cit.) sugieren algunas recomendaciones para el diseño y empleo de mapas conceptuales:

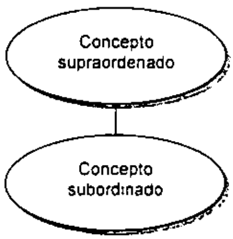
- Identificar el concepto nuclear a enseñar. Si es de mayor abstracción o antecedente de los demás conceptos y contenidos a relacionar en el mapa, ubicarlo en la parte superior y destacarlo con color, sombreado, mayúsculas o negritas.
- Realizar un inventario de los contenidos (incógnita, ecuaciones simultáneas, coeficiente, igualdad, etc.) involucrados y pertinentes al tema a enseñar.
- Organizar jerárquicamente dichos contenidos, en función de los más generales, abarcativos o importantes. Estableciendo relaciones de supra, co o subordinación existentes entre los contenidos.
- Encerrar los contenidos centrales en óvalos o rectángulos y vincularlos entre sí con palabras de enlace apropiadas (se inicia con, se define como, es un caso de, se caracteriza por, etc.) Todos los enlaces deberán estar rotulados. Un mapa se lee de arriba hacia abajo, vinculando los conceptos incluídos en el mismo.

También expresan que los mapas conceptuales pueden evaluarse considerando:

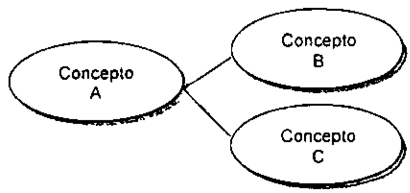
Diferenciación progresiva
(Proposiciones)



Conceptos ordenados por jerarquía de arriba hacia abajo



Reconciliación integradora
(conexiones cruzadas)



El uso conjunto de estas estrategias pedagógicas por parte del profesor, facilitará en el alumno el aprendizaje significativo de cualquier dominio del conocimiento, como lo representa el álgebra.

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE UNA PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DE ECUACIONES LINEALES

3.1 JUSTIFICACIÓN

Una de las áreas del conocimiento que más dificultades plantean a los estudiantes de diversos niveles educativos son las matemáticas. Algunas de sus posibles causas se refieren a que la matemática es una de las asignaturas que con frecuencia presenta un mayor grado de dificultad para su aprendizaje, en particular, el álgebra es un factor determinante en el rendimiento académico de esta asignatura. Por ejemplo, el bajo rendimiento escolar en ESFIR se presenta de manera constante en los últimos años. De acuerdo con sus estadísticas escolares, durante los periodos de 1991 a 1996, de los 238 alumnos reprobados en el 1er. año, 210 alumnos (90.7%) correspondían a esta asignatura; mientras que para el 2º. grado, de los 167 alumnos reprobados, 153 alumnos (86.9%) pertenecían a este rubro. Estos datos nos indican un alto índice de reprobación en matemáticas, en comparación con las demás materias. Además, no obstante que la demanda creció un 19.3 %, se presentó una deserción del 12.14%, existiendo entonces la posibilidad de que los alumnos con problemas de reprobación abandonen definitivamente el proceso de formación educativa.

Una de las alternativas viables para incrementar el aprovechamiento en matemáticas, consiste en promover la adquisición de estrategias para la solución de problemas dentro de un contexto de trabajo cooperativo. Técnicas que han sido empleadas con éxito en otros dominios del conocimiento, como la escritura, la lectura y la aritmética (Glaser, Lesgold, y Lajoie, op. cit.; Schoenfeld, 1985 citado por Santos, 1992), y contempladas en la curricula de diversos paises latinos y norteamericanos, como es el caso en el Plan de Estudios a nivel Medio Básico propuesto por la Secretaría de Educación Pública (1992). Esto en gran parte, porque la resolución de problemas constituye un importante soporte metodológico del proceso enseñanza-aprendizaje (Alda y Hernández, op. cit.)

La adquisición de estrategias para la solución de problemas permitirá el dominio del conocimiento y habilidades para la comprensión del álgebra, particularmente el aprendizaje de las ecuaciones lineales, debido a que aprender matemáticas es aprender dos lenguajes diferentes, un lenguaje natural (español) y un metalenguaje simbólico, como lo representa el simbolismo algebraico.

El **álgebra**, más que cualquier otra parte de las matemáticas en la secundaria, **representa la transición entre la aritmética y la geometría elementales de la primaria y las matemáticas de grados superiores**. Casi todas las matemáticas de la preparatoria y la universidad requieren del lenguaje del álgebra para modelar situaciones y resolver problemas, así como para expresar conceptos y operar con ellos en niveles cada vez más abstractos.

El aprendizaje del álgebra es importante para todos los alumnos y no sólo para aquellos que van a continuar sus estudios en una carrera técnica y universitaria, como es el caso de los alumnos de la Escuela Secundaria Federalizada "Ignacio Ramírez" (ESFIR), Edo. de México. Aun actividades que se han vuelto tan cotidianas y necesarias para el trabajo, como llenar un formulario o leer un instructivo o manual de operación, necesitan que las personas conozcan y estén familiarizados con los modos de expresión simbólica y pensamiento abstracto que se desarrollan por medio del estudio del álgebra, como son poder extraer información de cuadros, tablas y gráficas, comprender fórmulas y saber utilizarlas.

Sin embargo, un gran número de estudiantes presentan dificultades para dominar este lenguaje simbólico. Es común que al principio se desconcierten por el uso de literales y que, un poco más tarde, desarrollen formas de expresión y solución de problemas donde se mezclan el lenguaje natural con el uso, no siempre correcto, de expresiones simbólicas. Por ello, el instructor debe diseñar actividades que los ayuden a rebasar paulatinamente estas etapas del aprendizaje y, al mismo tiempo, les comuniquen la importancia que tiene *pasar de una situación o enunciado a su expresión simbólica y operar con ella*. La solución exitosa de un problema requiere primero comprenderlo, y en segundo, ejecutar el procedimiento adecuado. Es decir, la comprensión del problema implica contar con una representación exacta del mismo, como resultado de vincular nuestros propios conocimientos con los requisitos del problema, antes de ejecutar un procedimiento de solución.

Una forma de llevar a cabo esta misión es mediante el concepto de estructura y el empleo de estrategias para el aprendizaje del álgebra. Desde un punto de vista matemático, una estructura es un conjunto de conocimientos matemáticos organizados e interrelacionados internamente. La información almacenada se organiza en términos tanto de un conocimiento conceptual como procedimental.

El conocimiento conceptual y procedimental, al constituir dos formas del conocimiento matemático, revisten vital importancia para la enseñanza y aprendizaje del álgebra. El conocimiento procedimental se refiere a la pericia en las habilidades de cálculo y el conocimiento de procedimientos para identificar los elementos matemáticos, algoritmos y definiciones (conocer cómo identificar un problema y cómo resolverlo). Más específicamente, el conocimiento procedimental implica dos aspectos: a) conocimiento del formato y la sintaxis del sistema de representación simbólica, y b) conocimiento de las reglas y algoritmos, de tipo simbólico, que pueden ser empleados para completar la tarea. Por ejemplo, para la enseñanza de fracciones se ejemplifica una presentación paso a paso de las reglas y algoritmos, así como las estrategias para recordarlas.

El conocimiento conceptual se refiere al conocimiento de la estructura subyacente de las matemáticas- las relaciones e interconecciones de ideas que explican y dan significado a los procedimientos matemáticos. Por ejemplo, en el caso de la división de fracciones, éste involucra la naturaleza de las fracciones en general, y en particular las fracciones a ser divididas y los medios para realizar esta operación. Una forma de enseñarlas es a través del empleo de modelos concretos y semiconcretos (ej. dibujos rectangulares o circulares que representan la división de fracciones); otro aspecto de este conocimiento se refiere a la discusión de los vínculos entre las ideas matemáticas (ej, el significado de partición en la división, cómo experimentar primero con números enteros y después con fracciones, cómo la división de fracciones esta relacionado con el conocimiento de las proporciones; cómo la multiplicación esta relacionada con la división, y cómo los problemas verbales se relacionan con los números de las oraciones). Por lo tanto, ambos conocimientos juegan un papel muy importante para la comprensión matemática (Eisenhart, 1993).

Otro de los conocimientos esenciales para el aprendizaje y la enseñanza de cualquier dominio, como el álgebra, es el de tipo estratégico. Al alumno le permite contar con un conjunto de operaciones mentales (conductas de autorregulación, p. ej.) para facilitar y desarrollar los diversos procesos del aprendizaje escolar, el conocimiento y control de los mismos, dejando en sus manos la responsabilidad de su aprendizaje, a la vez que aumenta su nivel de motivación intrínseca; por lo tanto, promueve el saber qué, el saber cómo y el saber cómo lo hizo y cuándo aplicarlo. Al profesor le brinda una serie de procedimientos o recursos (especificación de objetivos, preguntas intercaladas, organizadores anticipados, redes semánticas, mapas conceptuales y esquemas de estructuración de textos) para promover aprendizajes significativos (Meyer, 1988, citado en Beltrán, op. cit.)

3.2 OBJETIVO

El objetivo de este estudio consiste en la elaboración de una Propuesta para el Aprendizaje de Ecuaciones Lineales desde la perspectiva de la solución de problemas para que los alumnos desarrollen dos habilidades muy importantes: 1. Generar la representación del problema basada en los principios algebraicos y el cálculo de la ecuación que permitirá dar respuesta al problema o solución, como lo constituyen los contenidos conceptuales y procedimentales para el dominio de las ecuaciones lineales, y; 2. La adquisición de una estrategia de control (autorregulación) para que ellos mismos puedan guiar su ejecución de solución.

La Propuesta está dirigida a los alumnos de segundo grado, del turno vespertino de la Escuela Secundaria Federalizada "Ignacio Ramírez" del Estado de México, quienes son reportados con bajo rendimiento académico en esta área. Para ello se retoman los contenidos temáticos correspondientes a Álgebra II referentes al aprendizaje de las ecuaciones lineales de una y dos incógnitas, planteados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) y un proceso de enseñanza-aprendizaje de tipo cognitivo, con el fin de incrementar el rendimiento escolar de los estudiantes de esta institución.

Las experiencias de aprendizaje contempladas para el desarrollo de la propuesta serán realizadas a través de tres momentos didácticos (Fase de Exploración, Fase de Modelamiento y Fase de Práctica en Equipo) y mediante el trabajo conjunto entre los profesionales de la psicología y el profesor de matemáticas responsable del grupo, quién dependiendo del ritmo de aprendizaje de los alumnos podrá introducir o agregar otros problemas diferentes a los que se proponen; o bien, puede tomar la decisión de continuar con esta forma de enseñanza-aprendizaje para los demás contenidos temáticos de la materia, como lo constituyen la comprensión de los conceptos geométricos.

3.3 ESTRUCTURA DE LA PROPUESTA

La estructura de la Propuesta se sustenta en dos dimensiones: los contenidos temáticos y el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra desde un punto de vista cognitivo.

1ª. Dimensión: Contenidos Temáticos

- ***Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones Lineales***

Ecuaciones de primer grado o lineales

La enseñanza del álgebra propiamente dicha comienza en el segundo grado de la secundaria con la introducción de las ecuaciones lineales y los métodos que sirven para resolverlas, porque representan el primer contacto de los alumnos con algunas de las nociones y procedimientos fundamentales del álgebra, como son la noción misma de ecuación, de incógnita y los procedimientos para despejar la incógnita. De ahí la importancia que su aprendizaje involucre actividades de solución de problemas, para que comprendan cómo las condiciones del mismo se traducen en una ecuación.

Proceso para el aprendizaje de las ecuaciones lineales

- Enriquecer la comprensión de las reglas de escritura abreviada vistas en la preálgebra, con el fin de dejarlos en libertad de proponer y escribir sus propias ecuaciones, lo que probablemente dará lugar a muchas escrituras diferentes con respecto al problema planteado, que puede ser de geometría, aritmética o física.

Ej. Todos estos resultados son formas equivalentes del mismo problema.

$x+3+x+3+x+3+x+3+x+3+x=21$	$6x+15=21$
$3+3+3+3+3+x+x+x+x+x+x=21$	$21=6x+15$
$15+ x+x+x+x+x+x=21$	$21=15+6x$
$21= x+x+x+x+x+x+15$	$15+3x+3x=21$
$15+6x=21$	$15+4x+2x=21$

- Conocer la estructura semántica del problema para ecuaciones de un solo paso y ecuaciones lineales (Ver tabla 5)

  a) Ecuaciones de un solo paso, cuya estructura implica la distribución de objetos o "repartir", bajo la ejecución de operaciones de suma, resta, división y multiplicación.

  Ej. Hay un total de 40 objetos repartidos entre dos personas. La primera persona tiene siete veces el número de objetos que la segunda persona. ¿Cuántos objetos tiene cada persona?

  Formas de simbolización

1ª. Persona	2ª. Persona	Total
7s	s	40

  $7s+s=40$

Posteriormente incrementar el número de ocurrencias de la incógnita y el tipo de operaciones involucradas.

Ej. Se reparten 76 dulces entre tres grupos. El segundo recibe 3 veces el número de dulces que el primero y el tercero recibe 2 dulces menos que el primero ¿Cuántos dulces recibe cada grupo?

Forma de simbolización

1er. grupo	2do. grupo	3er. grupo	Total
d	3d	d-2	76

$d+3d+(d-2)=76$

- Cálculo de las ecuaciones lineales

Un paso importante hacia el pensamiento algebraico consiste en *poder resolver ecuaciones cuando la incógnita aparece en ambos lados de la ecuación*, en la cual la técnica de invertir operaciones ya no es suficiente.

a) Método de la balanza o Principio de Igualdad:

El modelo consiste en realizar las mismas operaciones en ambos miembros de la ecuación <<si hacemos lo mismo en ambos platillos de la balanza (en ambos miembros de la ecuación), el equilibrio se conserva (la igualdad no se pierde)>>. Posteriormente aplicar las reglas de transposición para pasar de un miembro a otro miembro de la ecuación.

b) Una vez adquirido este método, continuar con las excepciones al mismo, como son las ecuaciones lineales que dan lugar a soluciones negativas o del tipo $ax - b = cx.$, entre otras.

c) Introducir las ecuaciones con coeficientes decimales sencillos y con soluciones negativas.

d) Cálculo de ecuaciones con paréntesis y con coeficientes fraccionarios. Estos últimos serán complementados en el tercer grado cuando se vean los procedimientos para eliminar los denominadores, así como ejemplos de ecuaciones que se traducen en lineales, previas transformaciones algebraicas.

e) Ecuaciones simultáneas y sustitución algebraica. Es mejor que se apropien gradualmente de estas nociones introducidos mediante problemas, y posteriormente que aprendan los otros métodos de solución. Así, los alumnos podrán ver que en algunos problemas no hay sólo una, sino varias incógnitas (que se refieren a cantidades bien determinadas, aunque desconocidas), que se traducen por lo general en varias ecuaciones (condiciones), por lo que para resolverlos hay que encontrar los valores que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones; es decir, en un sistema de dos ecuaciones, las incógnitas x e y representan los mismos valores en ambas ecuaciones y, por lo tanto, que comprendan el *principio de sustitución* y las otras nociones asociadas a la solución de sistemas de ecuaciones.

Los contenidos temáticos están orientados a la adquisición de conocimiento conceptual (el saber qué) y procedural (el saber cómo) sobre los conceptos relacionados con ecuaciones lineales con una y dos incógnitas.

Estos contenidos se aprenderán en un contexto de solución de problemas, es decir, se plantean problemas que enfrentan los alumnos en su vida cotidiana, fuera del salón de clase o del libro de texto; con el fin de promover en el estudiante la relevancia y el significado que tienen estos conceptos para él.

Tabla 5. Características diferenciales entre las ecuaciones de un paso y las ecuaciones lineales.

Características	*Características*
-Se simbolizan con las literales $x, y, z, w, etc.$	-Se simbolizan con las literales $x, y, z, w, etc.$
-La incógnita aparece en un solo lado de la ecuación: $x + a = b$ $\quad x/a = b$ $\quad ax = b$ $x - a = b$ $\quad ax + b = c$	-La incógnita aparece en ambos lados de la ecuación y pueden ser con: Una incógnita $ax + b = cx + d$ $\quad ax + bx + c = dx + ex + f$ Dos incógnitas $3x - 2y = z$ $2x + y = w$
-Se resuelven utilizando el procedimiento de **inversión de las operaciones indicadas o Reglas de transposición** <<pasar sumando (o restando o multiplicando o dividiendo) de un lado a otro de la ecuación >>	-Se resuelven aplicando los siguientes métodos: **1. Método del Modelo de la Balanza**. 1°. **Modelo de la balanza** <<si hacemos lo mismo en ambos platillos de la balanza (en ambos miembros de la ecuación), el equilibrio se conserva (la igualdad no se pierde) >> Esto permite reducir la ecuación inicial a una del tipo $ax + b = c$, con la incógnita de un solo lado. 2o. Emplear el procedimiento de invertir operaciones para resolver la ecuación o **Reglas de transposición** <<pasar sumando (o restando o multiplicando o dividiendo) de un lado a otro de la ecuación >> Una vez adquirido este método, continuar con las excepciones al mismo, como son las ecuaciones lineales que dan lugar a soluciones negativas o del tipo $ax - b = cx$, entre otras.

- Introducir las ecuaciones con coeficientes decimales sencillos y con soluciones negativas.
- Cálculo de ecuaciones con paréntesis y con coeficientes fraccionarios. Estos últimos serán complementados en el tercer grado cuando se vean los procedimientos para eliminar los denominadores, así como ejemplos de ecuaciones que se traducen en lineales, previas transformaciones algebraicas.

2. Método de ecuaciones simultáneas

Contiene varias incógnitas que se traducen en varias ecuaciones. Las incógnitas se refieren a cantidades desconocidas, que presentan la *restricción de satisfacer simultáneamente ambas ecuaciones por medio del principio de sustitución.*
Para ello se requiere partir de lo sencillo a lo complejo:

1°. Explorar y construir tablas para observar como *X* e *Y* se puedan sumar y multiplicar al mismo tiempo (p.ej. "Encontrar dos números cuya suma sea 20 y cuyo producto sea 96")

2°. Aplicar el método de cálculo de ecuaciones simultáneas por medio del principio de sustitución y el procedimiento gráfico.

El sistema gráfico resalta los aspectos cualitativos de las soluciones del sistema (una recta, p.ej.), mientras que la resolución algebraica permite el cálculo preciso de las mismas. Estos sistemas de ecuaciones lineales 2X2 se continúan practicando en el tercer grado mediante los métodos de igualación, suma y resta y el método gráfico, además de introducirse los sistemas 3 x 3 utilizando el método de eliminaciones sucesivas.

2ª. Dimensión: Proceso de enseñanza-aprendizaje para las ecuaciones lineales

El proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra promueve en el alumno la adquisición de conocimientos algebraicos y una estrategia de control, dentro de un ambiente de trabajo colaborativo y elaboración de mapas conceptuales, tomando como punto de partida la aproximación de solución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas propuesta por Alan Schoenfeld (Santos, 1992).

Schoenfeld se basa en un nuevo análisis del conocimiento y los procesos requeridos para la pericia, la cual es entendida como la habilidad para llevar a cabo tareas complejas de solución de problemas. Su método incorpora los elementos básicos del aprendiz cognitivo como el *modelamiento, el "coucheo" y el desvanecimiento* para promover en el estudiante la reflexión de su propio proceso de solución. Además incluye nuevos aspectos relacionados con la articulación de una estructura más general para el desarrollo y la evaluación de ambientes ideales de aprendizaje.

Uno de estos aspectos es el empleo de heurísticos que se han adquirido a través de una práctica intensa. Para enseñarlos, recurre a un conjunto de estrategias heurísticas derivadas de los heurísticos formulados por Polya:

- Reglas para aproximarse a la meta final del problema (cómo distinguir casos especiales para la solución de problemas matemáticos que pueden aplicarse a otro tipo de problemas)
- Las estrategias de control y el sistema de creencias. Las primeras están relacionadas con la toma de decisiones ejecutivas, tales como generar cursos de evaluación, qué heurísticos aplicar, evaluar el progreso hacia la solución, etc.

- Los sistemas de creencias implican creencias de uno mismo hacia las matemáticas (p.ej. fobia a las matemáticas), acerca del mundo (los fenómenos físicos son derivados de causas físicas) y acerca del dominio (el uso de la prueba no se aplica para los problemas geométricos)

Su método de enseñanza implica que al hacer matemáticas no solamente se aplican procedimientos de solución de problemas, sino también el razonamiento, el uso de heurísticos, de estrategias de control y el sistema de creencias. Para ello emplea estrategias pedagógicas como el modelamiento, el "coucheo", el andamiaje y el desvanecimiento en una variedad de actividades con el objetivo de diferenciar los procesos requeridos y las estructuras de conocimiento requeridas para la pericia. Por ejemplo:

Primer paso: Modela el heurístico a enseñar que es relevante para el problema a solucionar (modela a los estudiantes los heurísticos y las estrategias de control) por medio del autocuestionamiento de las siguientes preguntas:

"¿Qué haces cuando te enfrentas con este tipo de problemas?
Tal vez no sé cómo comparar las raíces de esta ecuación, pero lo que sí puedo hacer es encontrar ejemplos más simples que me relacionen éstas con el problema de la ecuación...etc."

Segundo paso: Permite que toda la clase trate de solucionar un problema con el heurístico que acaba de modelar. Durante esta actividad grupal, él actúa como moderador, solicitando heurísticos y enseñando soluciones, mientras modela diversas estrategias de control y juzgando qué tan bien funcionan las mismas.

Esta división tiene varios efectos, al permitir que los estudiantes generen diferentes alternativas de acción, pero les proporciona andamiaje para el manejo de la toma de decisiones. Asimismo, hace uso de otro tipo de modelamiento para cambiar los creencias acerca del proceso de solución, como lo constituye el no sólo modelar el uso de heurísticos y las estrategias de control, sino también que algunas veces éstas fallan, y por lo tanto, el experto tiene que abandonar la tarea por algún tiempo. Esta actividad permite observar a los estudiantes que no todos los problemas son resolubles, como nos lo muestran la mayoría de los textos que se emplean durante la enseñanza.

Tercer paso: Además de las demostraciones y la actividad de solución conjunta, los estudiantes tienen que participar en sesiones de grupos pequeños. En esta sesiones, él actúa como "consultor" formulando las siguientes preguntas:

¿Qué están haciendo?
¿Por qué lo están haciendo?
¿Cómo se llegará a una solución exitosa?

El propósito de la actividad consiste en que los estudiantes reflexionen acerca de sus propias actividades (desarrollo del automonitoreo y la evaluación de sus habilidades) y motivarlos para que articulen el razonamiento implícito en sus decisiones.

El presente estudio retoma de la propuesta de Schoenfeld, el empleo de las *estrategias pedagógicas como el modelamiento y el trabajo en grupos pequeños*, que en conjunción con la *estrategia del mapa mental*, promoverán en el alumno de nivel secundaria la adquisición conocimientos y una estrategia heurística de control (autorregulación) para la solución de problemas algebraicos.

Las estrategia del trabajo colaborativo y del mapa conceptual son importantes porque:

La organización de equipos de trabajo cooperativo genera una interdependencia positiva entre los miembros del grupo, donde las metas y compromisos son equitativos, compartidos y donde todos y cada uno trabaja hasta completar la actividad exitosamente. Por lo que a través de los intercambios entre pares, los alumnos podrán desarrollar habilidades para la solución de problemas al igual que actitudes de tolerancia, solidaridad y colaboración

Se ha demostrado que los alumnos aprenden más, les agrada más la escuela, establecen mejores relaciones con los demás, aumentan su autoestima y aprenden habilidades sociales más efectivas cuando trabajan en grupos de colaboración en comparación al aprendizaje basado en estructuras competitivas o individualistas. (Johnson, Johnson y Holubec, 1990; Díaz Barriga y Hernández, 1998, citados en Díaz Barriga y Muriá, 1999).

Ahora bien, es responsabilidad del docente enseñar a sus alumnos a colaborar. Para trabajar en grupos colaborativos es necesario explicar a los alumnos en qué consiste este tipo de trabajo, qué significa equipo colaborativo, qué responsabilidades personales y compartidas adquieren, qué actitudes deben demostrar; y sobre todo, el docente requiere supervisar el desarrollo del trabajo, cuidar el proceso, retroalimentar a los alumnos y ayudarlos a corregir el rumbo.

El empleo de la estrategia del mapa conceptual durante la instrucción permitirá que el profesor muestre tanto una visión de conjunto del entramado conceptual del tema de las ecuaciones lineales, así como poder evaluar la comprensión lograda por los alumnos. Para estos últimos, los apoya en su aprendizaje al permitirles integrar los conocimientos algebraicos (primero con los problemas de una incógnita y después con los problemas de dos incógnitas), mediante dos códigos de procesamiento (visual y lingüístico o semántico), así como la negociación de significados entre el profesor y los alumnos y entre pares. Esto les permitirá identificar las características constitutivas de la estructura de los dos tipos de ecuaciones, y paralelamente diferenciarlas.

3.4 Diseño de la Propuesta

La propuesta para el aprendizaje de ecuaciones lineales contempla el diseño de un ambiente de enseñanza-aprendizaje a partir de la perspectiva de solución de problemas (Ver figura 4) integrada por tres momentos didácticos:

1. Fase de Exploración.
2. Fase de Modelamiento
3. Fase de Práctica en Equipo

A través del desarrollo de estos tres momentos didácticos, por una parte, los estudiantes adquirirán los conocimientos conceptuales y procedimentales requeridos para poder solucionar problemas que impliquen ecuaciones lineales con una y dos incógnitas, así como una estrategia de control (proceso de autorregulación) que les permitirá guiar su actividad de solución para lograr la meta. Por otra parte, el profesor irá introduciendo y explicando cada uno de los conceptos algebraicos y algoritmos implícitos para la solución de la ecuación generada a partir de la representación del problema. Además les proporcionará una visión integradora de esta temática, al elaborar conjuntamente con los equipos que participarán mapas conceptuales, primero para las ecuaciones de una incógnita y posteriormente para las ecuaciones con dos incógnitas. De esta manera, las fases promueven la adquisición y aplicación de estrategias heurísticas y algorítmicas para solucionar problemas algebraicos bajo un contexto de trabajo colaborativo y elaboración de mapas conceptuales.

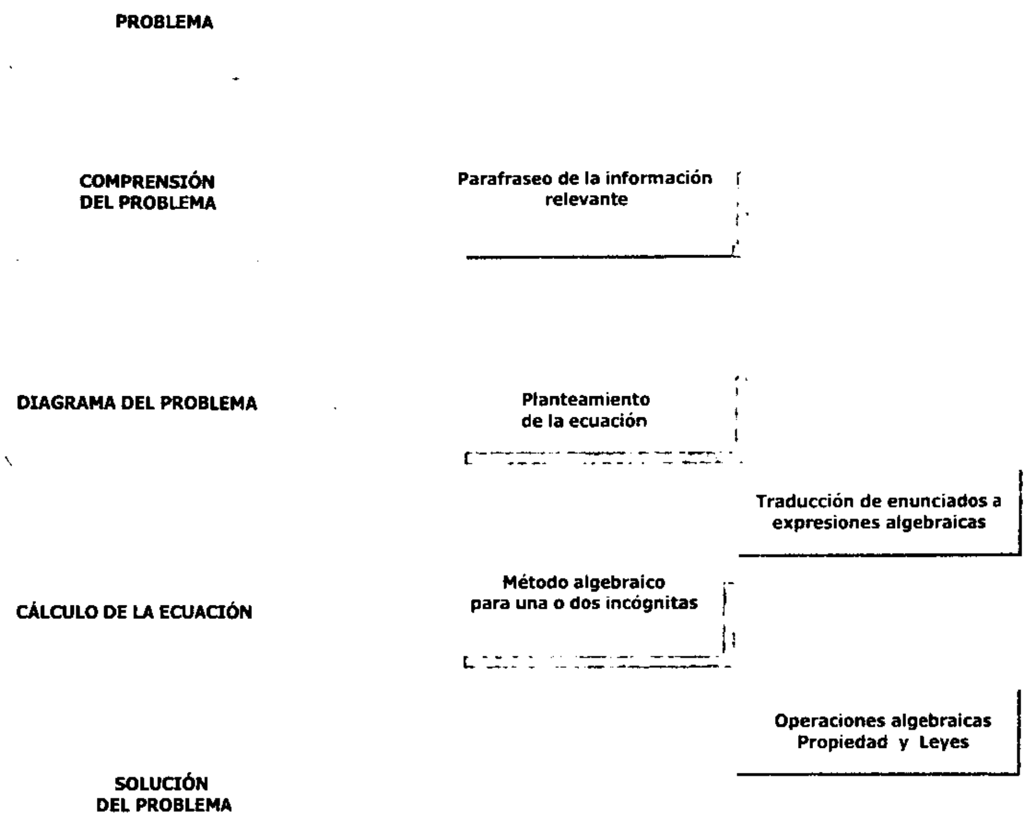


Figura 2. Proceso de Resolución de Problemas

Objetivo General

El alumno adquirirá habilidades de autorregulación para desarrollar conocimiento algebraico (ecuaciones de una y dos incógnitas) por medio de la solución de problemas dentro de un contexto de aprendizaje cooperativo y elaboración de mapas conceptuales.

Objetivos Específicos

El equipo de trabajo será capaz de:

1. Elaborar un modelo mental del problema a través de la traducción del lenguaje natural a un lenguaje algebraico por medio de la comprensión de lectura y el conocimiento matemático.
2. Operar con diversos métodos de cálculo en ambos "miembros" de la ecuación y transponer términos de un lado a otro de la ecuación.
3. Interpretar los resultados de la ecuación para resolver el problema.

FASE DE EXPLORACIÓN*: "Buscando el camino hacia la meta"*

Metodología de Trabajo

Función del (la) instructor (a)

1. Organizar a todo el grupo para que formen un círculo alrededor de él.
2. Indicarles que el objetivo de la clase consistirá en realizar un juego titulado *"Buscando el camino hacia la meta"*, el cual implica proponer entre todos alternativas de solución para el siguiente problema.

3. Mostrar en el rotafolio el problema 1.

   "El primo de Jaime trabaja como cajero en McDonalds. Cuando Jaime inició su turno, había cierta cantidad de dinero en la caja. Una hora después había el doble y dos horas después había el triple que una hora antes. Cuando un cliente pago $60.00, Jaime contó el total y encontró que había $1.100.00. ¿Cuánto había inicialmente en la caja?"

4. Escribir en el pizarrón las ideas y estrategias que propone el grupo para solucionar el problema.

5. Proporcionar ayudas durante el proceso de solución, por medio de la introducción de algunas de las siguientes preguntas claves, que estarán en relación con las condiciones del problema. Además los motivará con expresiones tales como "los felicito, ya están por concluir el problema" o "palmaditas en los hombros", etc.

   ¿De qué trata el problema?
   ¿De quién están hablando?
   ¿Qué nos piden?
   ¿Leímos todo?
   ¿Qué parte?
   ¿Qué operación podemos aplicar?
   ¿Cuáles?
   ¿A dónde?
   ¿Está completo?
   ¿Por cuánto tiempo?
   ¿Con qué datos contamos?
   ¡Qué datos desconocemos?
   ¿Cómo comprobamos la operación?
   ¿Cuál es el resultado completo?

6. La ecuación que representa la estructura del problema es:

   $X+2X+3(X)=1,100$, a la cual será resuelta y comprobada para dar respuesta al problema planteado.

7. Realizar un cierre al final de la actividad para hacerles reflexionar que, "con <u>las ideas que propusieron entre todos</u>, siguieron un *camino o estrategia* para dar respuesta al problema, llamada **Estrategia de Solución"**. Esta estrategia consistió en:

- ✓ Delimitación de la meta (¿Qué voy hacer?)
- ✓ Planeación (Con qué lo voy hacer y cómo lo voy hacer?)

- ✓ Ejecución (¿Cómo lo estoy haciendo?)
- ✓ Evaluación (¿Cómo lo hice?)

Sin embargo también contamos con diversos caminos que nos conducen a la consecución de la meta". Para ello deberá mencionar algunos ejemplos de razonamiento producidos por los alumnos durante la actividad.

Función del grupo:

1. Todos los miembros del grupo participarán en la solución del problema con sus propios recursos y estrategias; para ello, tendrán que proponer uno por uno sus ideas, o bien complementar o modificar las ideas de sus compañeros.

Tiempo: Una hora

Recursos: Texto del problema 1, pizarrón y gises

FASE DE MODELAMIENTO: ***"Un modelo a seguir"***

Metodologia de Trabajo

Función del (la) instructor (a)

1. Organizar al grupo para que formen un circulo alrededor de él.
2. Escribir en el pizarrón una síntesis sobre la forma cómo solucionaron el problema anterior.
3. Indicar al grupo que en esta sesión, ahora tendrán que observar cómo ella (él) emplea otro método llamado "Un modelo a seguir", entre otros muchos, para solucionar un problema algebraico.

4. Dar a conocer los criterios de solución por medio de hojas de rotafolio, que serán pegadas en el pizarrón cada una en secuencia con el proceso de solución. Cabe mencionar que estos criterios posteriormente serán sustituidos por las tarjetas 1, 2 y 3 en la Fase de Práctica en Equipo.

5. Mostrar en el rotafolio el problema 2:

> *"El maestro del 2º. "D" repartirá entre 3 alumnos $70.00. con motivo de que encontraron y devolvieron su cartera extraviada en la escuela, pero como cada uno de ellos realizó un esfuerzo diferente de búsqueda, decidió que el primero reciba $5.00 más que el segundo y éste $10.00 más que el tercero. ¿Cuánto debe recibir cada alumno?"*

6. Decir en voz alta el siguiente monólogo (modelamiento cognoscitivo):

Instructor (a): ¿Qué tengo que hacer con esta tarea? [1]
Instructor (a): Buscar una solución al problema.
Instructor (a): ¿Cómo puedo solucionarlo?
Instructor (a): Con la ayuda de estas tres tarjetas.
Instructor (a): ¿Cómo?
Instructor (a): Leyendo los pasos que me indica cada una para poder realizarlos.
Instructor (a): Mi tarjeta 1 dice:

TARJETA 1

Leer el problema

- ✓ Leo cada una las oraciones del texto
- ✓ Pregunto el significado de las palabras que desconozco
- ✓ Vuelvo a leer cada oración
- ✓ Escribo en el pizarrón qué entendí en cada una de las oraciones
- ✓ Junto todas las ideas que entendí para decir o escribir **de qué trata el problema**.

[1] La formulación de estas preguntas de autorregulación pueden cambiar de acuerdo con el estilo de enseñanza del instructor.

LECTURA DE COMPRENSIÓN

Leo la primera oración:
El maestro del 2°. "D" repartirá entre 3 alumnos $70.00. con motivo de que encontraron y devolvieron su cartera extraviada en la escuela.

Pregunto por el significado de palabras desconocidas
No hay ninguna palabra que no entienda

Escribo o digo qué entendí en cada oración
Lo que entendí fue que el maestro del 2°. "D" repartirá entre 3 alumnos $70.00

Estos tres pasos se deben realizar con cada una de las oraciones del problema. Por lo que el resultado de la secuencia de los pasos 1 a 3 para las siguientes oraciones son:

- *Pero como cada uno de ellos realizó un esfuerzo diferente de búsqueda, decidió que la primera reciba $5.00 más que la segunda y ésta $10.00 más que la tercera.*

  El primero recibirá $5.00 más que la segunda
  La segunda, $10.00 más que la tercera

- *¿Cuánto debe recibir cada alumno?*

  Lo que se quiere saber es cuánto recibirá cada uno de ellos

Escribo un frase con todas las oraciones o ideas que entendí

a) Identifica el agente del problema:

El maestro repartirá $70.00
¿A quién? A tres alumnos (no necesitamos saber cuántos años tienen, de qué color es el cabello o los ojos, ni que ropa visten, etc., pero si, cómo debe ser el reparto)

¿Cómo? La primera recibirá $5.00 más que la segunda, y la segunda $10.00 más que la tercera.

b) Identifica la interrogante

¿Cuánto recibirá cada uno?

Instructor (a): ¿Ya sé exactamente de qué me piden hacer?
Instructor (a): Si, porque...
Instructor (a): No, porque no entendí que...Entonces vuelvo a leerlo para continuar con la siguiente tarjeta.
Instructor (a): Ahora como ya se de qué trata el problema, continuo con los pasos de mi tarjeta 2 [El (la) instructor (a) expresará de qué trata el problema]

TARJETA 2

☞ *Realizar un diagrama del problema*

✓ ¿Qué información o datos se conoce del problema?
✓ ¿Qué información o datos se desconoce del problema?
✓ Organizo mis datos en una tabla:
  a) Elijo el dato desconocido, y lo represento mediante las letras *X*, *y o Z*.
  b) Identifico la relación que existe entre mis datos mediante una igualdad
✓ Hago un diagrama con los datos conocidos y con los datos desconocidos.
✓ Escribo la ecuación lineal que me permite relacionar mis datos conocidos y desconocidos con las condiciones del problema.

DIAGRAMA DEL PROBLEMA

Escribo los datos que conozco del problema

La cantidad que recibe más la segunda persona?	\$10
La cantidad que recibe más la primera persona?	\$5

Escribo los datos que desconozco del problema

La **cantidad que recibirá cada una**, y que podemos *simbolizar por* **"X"**, llamada también *variable o incógnita*.

EXPLICACIÓN DE CONCEPTOS

Un símbolo que puede representar valores diferentes (puede variar) se le denomina variable o incógnita. [illegible] la variable es el valor que representa uno de los datos del problema que tratamos de conocer.

Realizo un diagrama con los datos y las condiciones del problema

DATOS CONOCIDOS		DATOS DESCONOCIDOS
Tercera persona		cantidad asignada, que simbolizamos por **X**
Segunda persona	$10.00 más	cantidad asignada que simbolizamos por **X**
Primera persona	$5.00 más	cantidad asignada que simbolizamos por **X**
Cantidad total a repartir	$70.00	

Escribo una ecuación lineal en relación con el diagrama

Supongamos que la tercera recibe X cantidad y la segunda $10.00 más que la tercera, asi que la segunda recibe X+10.

Primera persona recibe	
Segunda persona recibe	*X+10*
Tercera persona recibe	*X*

Por los datos del problema, la primera persona debe recibir $5.00 más que la segunda, es decir (X+10)+5 que es lo mismo que X+15.

primera persona	**X** *+15*	
segunda persona	**X** *+10*	Ahora sumemos la "X" (incógnita)
tercera persona	**X**	Y también el 10 y el 15.
	3X+25	

El reparto a las 3 personas sobre la cantidad es de $70.00, entonces

Tenemos la ecuación **3X+25=70**

[illegible]

[illegible]

Instructor (a): ¿De qué otra forma puedo formular la relación entre los datos y las condiciones del problema?

El (la) instructor (a) les mostrará otra forma equivalente de representar el mismo problema.

Instructor (a): ¿Realice el diagrama correcto del problema?
Instructor (a): Si, porque...
Instructor (a): No, porque ...Entonces verifico en qué me equivoque, para poder continuar con la siguiente tarjeta.
Instructor (a): Por último, la Tarjeta 3 me dice que tengo que:

TARJETA 3

☞ *Realizar la operación del problema*

✓ Selecciono la operación adecuada
✓ Resuelvo la ecuación
✓ La compruebo (sustitución de valores en la incógnita)
✓ Corrijo mis errores y vuelvo a realizarla
✓ Verifico que el resultado corresponda a la pregunta
✓ Escribo el resultado completo

CÁLCULO DE LA ECUACIÓN

<u>*Selecciono la operación o método adecuado (suma, resta o sustitución)*</u>

Es una resta algebraica

EXPLICACIÓN DE CONCEPTOS

La operación algebraica permite encontrar los valores de la variable que al ser sustituidos en la ecuación hagan que se cumpla la igualdad

Resuelvo la ecuación

EXPLICACIÓN DE CONCEPTOS

El procedimiento de solución consiste en despejar la incógnita a través de transformar la ecuación original en ecuaciones equivalentes, haciendo uso de la propiedad de la igualdad.

$3X+25=70$

$3x+25-25=70-25$ Si sumamos a ambos miembros de la igualdad, el número -25 (inverso aditivo), la igualdad no se altera y obtenemos una ecuación equivalente (LEY DE LA IGUALDAD)

EXPLICACIÓN DE CONCEPTOS

La ley de la igualdad: si en ambos miembros de una ecuación se hacen operaciones iguales con cantidades iguales la igualdad se conserva.

Y al hacer operaciones correspondientes
Tenemos:

$3X+0= 45$ Si a un número le sumamos cero el resultado es ese mismo número.

$3X = 45$

$\frac{3X}{3} = \frac{45}{3}$ Si dividimos entre 3 ambos miembros de la igualdad ésta no no se altera (aprovechamos la propiedad de la igualdad)

$\mathbf{X=15}$ Esto nos da como resultado o **conjunto solución**.

Compruebo la ecuación

$3X+25= 70$

$3(15)+25= 70$

$45+25=70$

$70=70$

EXPLICACIÓN DE CONCEPTOS

Al conjunto de valores que al ser sustituidos en una ecuación hacen que se cumple la igualdad, se denominan **conjunto solución**. En este caso es [illegible]

Corrijo errores

No tuve errores porque 70 es igual a 70, puesto que se cumple la igualdad.

Verifico que el resultado corresponda con la pregunta

A "X" la habíamos designado como la parte que recibe la tercera persona.

Entonces	la primera persona recibe	15+15
	la segunda persona recibe	15+10
	la tercera persona recibe	15
TOTAL		70.00

Escribo el resultado completo en relación con la pregunta

¿Cuánto debe recibir cada alumno?

la primera persona recibe	30
la segunda persona recibe	25
la tercera persona recibe	15
TOTAL	70.00

Instructor (a): ¿Pude resolver el problema?
Instructor (a): Si, porque...
Instructor (a): No, porque ...Entonces vuelvo empezar de nuevo.

8. Realizar un cierre al final de la actividad para preguntarles:

a) ¿Qué diferencia existe entre este método y el que aplicaron la vez pasada?

b) ¿Cuál son sus ventajas?

c) Expresarles que "esta es una forma más fácil de poder solucionar un problema, porque se van cumpliendo uno a uno los pasos o criterios requeridos. Además que también implica plantearse uno mismo, una serie de preguntas que dirigen nuestra atención para la consecución de la tarea"

9. Indicar que en la siguiente clase aplicarán este método de trabajo, pero en una condición un poco diferente llamada, "Uniendo esfuerzos para encontrar la solución".

Papel del Alumno

1. Observar la ejecución del (la) instructor (a) mediante el seguimiento de los pasos o criterios de solución.

Tiempo: Una hora y media.

Recursos: Texto del problema 2, tres hojas de rotafolio con los criterios de solución, rotafolio, pizarrón y gises.

FASE DE PRÁCTICA EN EQUIPO: *"Uniendo esfuerzos para encontrar la solución"*

Metodología de Trabajo

Función del (la) instructor (a)

1. Realizar una síntesis de la actividad anterior.
2. Organizar al grupo en equipos heterogéneos de trabajo de 4 alumnos e indicarles que nombren a su equipo.
3. Comentarle al grupo que el objetivo de esta sesión, así como los cuatro restantes, implican "unir esfuerzos de todos los integrantes de cada equipo

para encontrar la solución del problema". Para lograr esta tarea tendrán que trabajar en conjunto aplicando los criterios de solución vistos en la clase anterior.

4. Proporcionar a cada equipo un cuaderno y lápices, 3 Tarjetas con los criterios de solución y la Lista Cotejable.
5. Indicar al grupo que "cada equipo solucionará el mismo problema, pero cumpliendo en orden los pasos o criterios que contienen las 3 tarjetas mediante el empleo de una Lista Cotejable, que les permitirá verificar qué tanto se aproximan al logro de la tarea; así como el planteamiento de una serie de preguntas que dirigirán su atención hacia la misma, las cuales aprendieron en la clase pasada.
6. Mostrar en el rotafolio el problema 3 para que inicien su trabajo:

   El papá de Angel trabaja en el INEGI, entre una de sus funciones es realizar año con año las estadísticas del número de habitantes que viven en nuestro país. ¿Quieres saber cómo lo hace?
   "Actualmente la población de la República Mexicana es de alrededor de 82 millones de habitantes y crece a una tasa del 2.2 % anual. ¿Cuántos seremos para el año 2002, 2003 y 2004?"

7. Supervisar el trabajo de cada equipo, para que traten de seguir el mismo procedimiento de la fase de modelamiento al proporcionarles ayudas y sugerencias (p.ej. "¿Se acuerdan qué se entiende por dato desconocido?, ¿Cómo se realiza el método de sustitución?")
8. Pedir a cada equipo que anoté brevemente en el pizarrón sólo los productos obtenidos de su trabajo, empleando para ello su cuaderno y la lista cotejable. Esto con la finalidad de que el grupo les brinde retroalimentación, que consistirá en anotar el puntaje asignado así como la argumentación del por qué asignan ese puntaje, que corresponde a las columnas "Puntaje Grupo" y "Argumentación" de la lista cotejable.
9. Hacer un cierre de sesión por medio de una reflexión, que indique cómo se sintieron al solucionar de esta forma el problema y qué ventajas tiene para su aprendizaje.

10. Indicarles que con esta modalidad de trabajo continuarán solucionando los cuatro problemas restantes.

Una vez que se hayan resuelto los problemas correspondientes a las ecuaciones con una incógnita (1, 2 y 3 del Anexo 4), se elaborará un mapa conceptual con las aportaciones generadas por todos los equipos y por él mismo, con el propósito de mostrarles una visión integradora de la estructura de las mismas.

Este mismo procedimiento se procederá para los problemas con ecuaciones de dos incógnitas (4 y 5 del Anexo 4)

11. Explicar gráficamente mediante un mapa conceptual que integre los dos mapas elaborados en las sesiones previas, la diferenciación entre la estructura de los problemas con una y dos incógnitas, para que los alumnos puedan identificar y relacionar los conceptos asociados con la s ecuaciones lineales.

Función del equipo:

1. Por medio de un sorteo, cada uno de ellos realizarán una de las siguientes actividades.
   a) Leer en voz alta los criterios de cada tarjeta.
   b) Anotar en el Formato de Lista Cotejable si van siguiendo los criterios de solución.
   c) Escribir en el cuaderno los productos realizados que han obtenido para resolver el problema (p. ej. anotar de qué trata el problema)
   d) Motivar la ejecución del equipo por medio de elogios (!eso es, adelante!, !Bien, ya vamos en el la operación!, "tocar el hombro" "Sonreírle al compañero (a) cuando sugiere la solución correcta de un paso etc.)
   e) Indicar cuando se cometen errores y corregirlos.

2. Todos los miembros del equipo participarán en la aplicación de todos los pasos de la estrategia de solución haciendo uso de las tres tarjetas de criterios, la lista cotejable y su cuaderno y lápiz.
3. En actividad grupal, cada equipo calificará el trabajo de solución de los demás y fundamentará la misma, siguiendo los criterios de la lista cotejable.

Tiempo: Dos horas.

Recursos: Texto de los problemas 1 al 5 del Anexo 4), tres tarjetas con los criterios de solución, una Lista Cotejable por equipo, un pizarrón, cuadernos y lápices y un rotafolio.

MÉTODO

Objetivo

Diseñar una Propuesta para el Aprendizaje de Ecuaciones Lineales por medio de la solución de problemas, dirigida a alumnos de 2do. grado del turno vespertino, que son reportados con bajo rendimiento académico en esta área por la Escuela Secundaria Federalizada "Ignacio Ramírez" del Estado de México.

Sujetos

Se seleccionarán intencionalmente dos grupos aproximadamente de 40 a 45 alumnos de ambos sexos, del segundo grado y del turno vespertino con bajo rendimiento escolar (con un promedio obtenido de 5) en el área de álgebra.

Diseño

Se empleará un diseño cuasi-experimental de grupo control y experimental con pretest-postest, con el propósito de determinar la eficacia de la propuesta para el aprendizaje de ecuaciones lineales por medio de la solución de problemas.

G1	O_1	X	O_2
G2	O_3	------	O_4

Instrumentos

- Una Lista Cotejable "Solución de Problemas Algebraicos" (Ver Anexo 2), cuyo contenido implica la verificación de cada uno de los criterios de evaluación necesarios para solucionar un problema algebraico, agrupados en tres categorías: Comprensión del problema, Diagrama del problema y Cálculo de la ecuación.
- Formato de Evaluación de un Mapa Conceptual, para comparar la organización de la estructura cognoscitiva del equipo al solucionar problemas algebraicos antes, durante y después de la aplicación del programa (Ver Anexo 3)

Materiales

Un rotafolio

Hojas de rotafolio

Pizarrón, gises y borrador

3 tarjetas por equipo con los criterios de evaluación y preguntas de autorregulación

10 cuadernos de cuadro chico de grapas

10 lápices

Textos con 10 problemas algebraicos

Escenario

Un salón de la institución, que cuente con 40 o 45 pupitres individuales acomodados en forma circular, un pizarrón, un rotafolio y una mesa.

Procedimiento

La propuesta implica el desarrollo de 3 etapas: Pretest, Fases de trabajo y Postest.

Etapa I. Aplicación del Pretest

Para evaluar la efectividad de la propuesta, de los dos grupos de alumnos reportados con bajo rendimiento en álgebra, uno será seleccionado como grupo control y el otro como grupo experimental. A cada grupo, en diferentes sesiones de trabajo de dos horas cada una, el profesor dividirá lo dividirá en equipos heterógeneos integrado por 4 alumnos cada uno (hombres y mujeres en igual cantidad si es posible, y con diferentes niveles de habilidades), a quienes se les proporcionará dos problemas algebraicos que tendrán que resolver en sus cuadernos asignados previamente (Ver Anexo 1)

Al terminar la actividad de solución se les pedirá a cada equipo que elaboren un mapa conceptual con el fin de evaluar cualitativamente que también están organizados sus conocimientos algebraicos. Posteriormente, cada equipo tendrá que exponer en voz alta y argumenten ante el grupo el proceso que siguieron para dar respuesta al problema planteado, el cual será evaluado paralelamente por el profesor mediante el empleo de una Lista Cotejable "Solución de problemas algebraicos".

Cabe mencionar que durante esta actividad de evaluación, si es necesario el profesor mostrará cómo elaborar un mapa conceptual.

Por ejemplo:

1. Identificar los conceptos claves y formen una lista.
2. Ordenar los conceptos colocando los más generales, y abarcativos en la parte superior y gradualmente hacia abajo los conceptos más particulares y específicos.
3. Los conceptos de igual grado de generalidad se ubican dentro del mapa en un mismo renglón horizontal.
4. Conectar los conceptos con líneas y rotule las líneas utilizando una conjunción, un verbo o una o más palabras claves que definan la relación entre los conceptos.
5. Los conceptos y las palabras clave deben formar una proposición explicitando el significado de la relación.

Al final de la sesión se les dará las gracias por su participación, y al grupo experimental se le invitará para la siguiente sesión de trabajo, mientras que al grupo control se le evaluará al final de la aplicación de la propuesta y continuará su aprendizaje conforme a la enseñanza programada por el profesor.

Los resultados obtenidos de ambos grupos mediante la lista cotejable y el mapa conceptual serán comparados posteriormente con la Etapa de Postest.

Etapa II. Fases de Trabajo

Esta etapa tiene como propósito que el alumno aprenda a resolver problemas que impliquen la solución de ecuaciones lineales de una y dos incógnitas por medio de la aplicación de una estrategia de control a través de tres Fases de trabajo: *Exploración, Modelamiento y Práctica en Equipo*.

La Fase de Exploración tiene como finalidad promover la iniciativa y la ejecución de diversos tipos de razonamiento de todos los miembros del grupo, al solucionar un problema planteado por el instructor. Es decir, brindarles la oportunidad para que ellos apliquen sus propios recursos y estrategias de solución; consistiendo sólo el trabajo de instrucción en proporcionar ayudas por medio de la formulación de preguntas dirigidas o preguntas clave. Al final de la sesión, el (la) instructor (a) en unión con el grupo realizarán una reflexión para comprender la importancia de solucionar problemas algebraicos por medio de la aplicación de una estrategia.

La Fase de Modelamiento permite al grupo observar cómo el instructor va cubriendo tanto con una serie de criterios de solución que facilitan el logro de la meta planteada previamente, así como la aplicación de diversas preguntas de autorregulación para dirigir su atención hacia la tarea.

Por último, la Fase de Práctica en Equipo, les brinda a los aprendices la oportunidad de experimentar una interdependencia positiva para la consecución de la tarea, al participar en una condición de trabajo colaborativo y la adquisición de una estrategia de autorregulación, con el propósito de automatizar estas habilidades durante tres sesiones de trabajo.

En cada una de estas fases se indica la *Metodología de trabajo* a seguir, el *Tiempo* disponible y los *Recursos requeridos,* como se indica en el procedimiento.

Etapa III. Aplicación del Postest

Esta etapa se realiza siguiendo el mismo procedimiento que en el pretest, excepto que se emplearán problemas paralelos (Ver Anexo 1).

Análisis de datos

Se aplicará una prueba paramétrica de diferencias entre grupos Anova para determinar la efectividad de la propuesta.

VENTAJAS, LIMITACIONES Y SUGERENCIAS

Ventajas y Limitaciones

Algunas de las ventajas que presenta la propuesta consiste en el diseño de un ambiente de aprendizaje para las ecuaciones lineales a nivel secundaria fundamentada en los estándares curriculares desde la perspectiva de la solución de problemas, una de las habilidades de pensamiento de alto nivel (Lesgold, op. cit.) Las escuelas deberían de diseñar practicas educativas acorde con estos lineamientos, como lo establecen los Planes y Programas de Estudio de la SEP, sin embargo, algunos maestros no cuentan con el tiempo y estudios de actualización para llevar cabo estas actividades, debido en gran parte a la carga de trabajo, gran número de estudiantes por grupo, las evaluaciones referidas a la norma que realizan para la institución, la falta de material didáctico idóneo y su resistencia al cambio.

De esta manera, la estructura de la propuesta trata de brindar al profesor de matemáticas un ambiente de trabajo colaborativo entre él y sus alumnos, y entre el alumno y sus compañeros de grupo; la cual promueve la adquisición de estrategias de solución de problemas, como los algoritmos y los heurísticos, con la finalidad de lograr un aprendizaje significativo de las ecuaciones lineales. Esto implica que el alumno comprenda que la elaboración de un modelo o representación del problema por medio de la colaboración de todos los miembros del equipo de trabajo, es la tarea cognitiva más importante para poder dar respuesta al problema planteado, que los procedimientos del cálculo de la ecuación.

Con esta postura se trata de remediar un poco el bajo rendimiento escolar en esta área, particularmente en el estudio del tópico de las ecuaciones lineales. Pero sobre todo, cambiar la visión de lo que implica el aprendizaje del álgebra, una de las materias que desde la perspectiva de la enseñanza tradicional se aprende mecánicamente y sin sentido, por una representación dinámica e interesante que implica su estudio: hacer uso de una herramienta para solucionar problemas no solo escolares, sino también de la vida diaria a través de la aplicación de sus conceptos y procedimientos simbólicos.

Sin embargo, entre una de las limitaciones del estudio consiste en constituir solamente una propuesta dirigida para el aprendizaje de ecuaciones lineales de una y dos incógnitas, limitando la inclusión del aprendizaje de funciones, correspondientes a este grado escolar. Y no solamente de este tópico, sino que el aprendizaje del álgebra inicia desde el nivel básico, para pasar gradualmente de un conocimiento aritmético a un conocimiento algebraico. Esto implica que la mayoría de los alumnos reportados con bajo rendimiento en esta área podrían carecer de los prerrequisitos necesarios para iniciarse en el aprendizaje de este dominio; y por lo tanto, primeramente se requiera diseñar cursos propedéuticos para el dominio aritmético, antes de aplicar la propuesta.

Además, resultaría un obstáculo cambiar la perspectiva docente que se tiene respecto al aprendizaje del álgebra, porque la propuesta demanda al profesor inversión de mayor tiempo dedicado para la planeación, conducción y evaluación de experiencias de aprendizaje.

Pero esperamos que sea de utilidad para futuras investigaciones de corte empírico en este campo, puesto que se cuenta con pocos estudios realizados a nivel secundaria y en poblaciones mexicanas, puesto que la mayoría de los estudios se llevan a cabo en el nivel básico, sobre todo en el área de solución de problemas verbales aritméticos.

Por último, las acciones encaminadas para incrementar el rendimiento escolar en esta área debe contemplar la participación conjunta de los diversos agentes que intervienen en él, como son la política educativa del Estado, la propia escuela, los profesores, el alumno y la familia.

Sugerencias

La evaluación del aprendizaje del álgebra debe enfocarse a la detección de habilidades diferenciales y las estructuras que permiten el desarrollo conceptual algebraico, ya que los alumnos emplean diferentes formas de representación de lo que han aprendido. Además, cabe expresar que las oportunidades que brinda la curricula escolar al estudiante para elaborar diferentes representaciones del fenómeno a aprender, está en función de las formas de representación que privilegia e inhabilita, de ahí que se requiere la congruencia entre aptitudes y las oportunidades para emplearlos. Incluso, como el significado es de naturaleza múltiple, se deben emplear diferentes formas de representación y modos de tratamiento, porque ésta es un mediador del contenido, que requiere del empleo de diversas habilidades por parte del estudiante, para tratar la información.

Se deben promover diferentes tipos de representaciones, porque de acuerdo con Kozma y cols (2000), en el área del estudio del experto-novato de la física y la química, se ha observado que los científicos expertos, además de emplear el conocimiento del dominio, ejecutan formas múltiples de representación, al ser capaces de transfomar cualquier representación dentro de representaciones significativas que les permitan razonar acerca de la solución del problema. Este hallazgo tiene implicaciones educativas porque permite el diseño de ambientes representacionales apoyados tanto por la tencología de mulitmedios como por sistemas simbólicos, que pueden apoyar al estudiante a comprender las estructuras subyacentes y los procesos del fenómeno, así como los procesos sociales y físicos por los cuales estas estructuras se han establecido. Es decir, pasar de un estado procedimental a un estado estructural del aprendizaje del álgebra.

Por lo que se necesita realizar una evaluación dinámica del aprendizaje del álgebra para comprender las dimensiones cognitivas de la pericia adquirida, que permita identificar el desarrollo de las estructuras y los procesos durante la competencia en un dominio, como sería tanto el uso de sistemas expertos y evaluaciones cualitativas, antes de poder diseñar y aplicar una propuesta para el la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales.

REFERENCIAS

Alarcón, J. y cols. (2000) Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. México: SEP.

Alda, F. L. y Hernández, D. (1999) Resolución de problemas. Cuadernos de Pedagogía, No. 265.

Alfonse, G. (1990) Álgebra elemental. México: Grupo Editorial Iberamericana.

Asha, K. y Kathryn, H. (1996) The effects of schema-based instruction on the mathematical word-problem-solving performance of students with learning disabilities. Journal of Learning Disabilities. Vol. 29, No. 4.

Bañuelos, M. (1995) Resolución de problemas matemáticos en estudiantes de bachillerato. Perfiles educativos, No. 67.

Beltrán, J. y Bueno, J. A. (1997). Psicología de la educación. México: Alfaomega.

Birenbaum, M., Kelly, A.E. y Tatsuoka, K. (1993). Diagnosing knowledge states in algebra using the rule-space model. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 24, No. 5.

Birgin, A., Dussel, I. y Tiramonti, G. (1998) Nuevas tecnologías de intervención en las escuelas: Programas y Efectos. Revista Propuesta Educativa, Argentina, Año 9, N° 18

Booth, L.R. (1988) Children´s difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.) The ideas of algebra K-12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bovenmayer, L. (1989) Training students to represent arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, Vol. 81, No. 4.

Camarena, R. y Gómez, G. (1986) Aprobación y reprobación en la UNAM: Una propuesta para su análisis cuantitativo. Perfiles educativos, No. 32, CISE-UNAM

Castañeda, S. y López, M (1989) Evaluación metacurricular (¿desarrollo o deterioro de las habilidades de aprendizaje a partir de las prácticas docentes?) En S. Castañeda y M. López (Eds.) Antología: La psicología cognoscitiva del aprendizaje. Aprendiendo a aprender. México: UNAM.

Castañeda, S. y López, M. (1992) La psicología instruccional mexicana. Revista Intercontinental de Psicologia y Educación. Vol. 5, No. 1.

Castañeda y Smeet (1994). Curso de capacitación para profesores. Facultad de Psicología, UNAM.

Cobb, P. y Steffe, L.P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. Journal for Research in Mathematics Education, 23.

Corbalan, J. (s/f). La educación. Estudio sociológico. 2ª. Gestión Administrativa Pública. Asignatura optativa sociología del estado del bienestar. http://www.lafacu.com/apuntes/sociologia/educa/default.htm (2001)

Desmond, B. (1994) Las matemáticas en las escuelas del Caribe. Aglofono: Trascendiendo la década de los 90. Traducción. Education Annual, Vol. III. UNESCO/CARNEIP

De Vega, M. (1989) Introducción a la psicología cognitiva. México: Alianza Psicología.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (1997) Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. México: McGraw-Hill.

Educación Básica Secundaria (1992) Plan y Programas de Estudio, Secretaría de Educación Pública, SEP.

Educación Básica Secundaria (1993) Plan y Programas de Estudio, Secretaría de Educación Pública, SEP.

Educación Básica Secundaria (2000) Plan y Programas de Estudio, Secretaría de Educación Pública, SEP.

Eisenhart, M. y cols. (1993) Conceptual Knowledge falls through the cracks:complexities of learning to teach mathematics for understanding. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 24, No. 1.

Estadísticas de la Dirección General de Programación de la SEP (1998).

Estadísticas del periodo 1991-2000 del Departamento de Educación Secundaria General. Subjefatura Técnico Pedagógica. Escuela Secundaria Federalizada "Ignacio Ramírez", Estado de México.

Filloy, E. y Riojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought. In J.M. Moser (Ed.), Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA. Madison: University of Wisconsin.

Fuson, L. y Willis, G. (1989) Second graders use of schematics drawings in solving addition and substracction word problems. Journal of Educational Psychology. Vol. 3, No.11.

Gagné, R.M. (1987) Las condiciones del aprendizaje. México: Editorial Interamericana.

García, J. L. y cols. (1996) Elementos para un diagnóstico del sistema educativo español. Informe global. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE) Madrid, España. http://www.ince.mec.es/elem/cap2-1.htm (2001).

Garrido, I. (s/f) Desmotivación, déficit de atención y fracaso escolar. Facultad de Psicología, Universidad Complutense, España. ESPAÑA http://copsa.cop.es/congresoiberoa/base/educati/er156.htm (2001)

González, J. (s/f) Comprensión de problemas aritméticos: una comparación entre alumnos con y sin éxito en la resolución de problemas. España. http://copsa.cop.es/congresoiberoa/base/educati/er154.htm (2001)

Glaser, R., Lesgold, A. y Lajoie, S. (1987) Toward a cognitive theory for the measurement of achievement. En: R.R. Ronning, J. Glover, J.C. Conely (Eds.) The influence of cognitive psychology en testing. Vol. 3. Hillsdale, N. J: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Hoz de Vila, T. (1999), EL DIARIO, La Paz, Bolivia. http://www.eldiario.net/2001_0123/sec05_3.html

Ivanovic, D. (1998). El desarrollo cerebral, inteligencia y rendimiento escolar en estudiantes que egresan del sistema educacional. Revista Enfoques Educacionales, *Vol. 1. No. 1.* http://rehue.esociales.uchile.cl/

Jackson, A. C., Fletcher, B. y Messer, D. J. (1992) When Talking doesn't help: An Investigation of Microcomputer-based group problem solving. Learning and Instruction, Vol. 2

Jehavi, N. y Mann, G. (1992) Didactical use of CAS in story problems. Forum 4. Presentation. Montreal, Canadá.

Jiménez, B. (1999) Encuentra la ecuación. Cuadernos de actualización matemática. México: SEP-UPN.

Jiménez, Y. (2000) Factores que intervienen en el rendimiento académico en matemáticas en estudiantes de bachillerato. Tesis de Licenciatura, Facultad de Psicología, UNAM.

Kaput, J.J. (1989) Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner y C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. NY: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1982). The learning of algebra: A teaching experiment. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Association, N.Y.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner y C. Kierna (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra. National Council of Teachers of Mathematics. Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (s/f) El aprendizaje y la enseñanza del álgebra. http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/traducciones/kieran.html.(2001)

Kozma, R., Chin, E., Russell, J. Y Marx, N. (2000) The roles of representation and tools in the chemistry laboratory and their implications for chemistry learning. The Journal for the Learning Sciencies, 9 (2), 105-143.

Lesgold, A. (1988) Problem solving. In R. Sternberg y E. Smith (Eds.) The psychology of human thought. NY: Cambridge University Press.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987) Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments. In Wirzup y R. Streit (Eds.) Developments in schools mathematics education around the world. National Council of Teachers of Mathematics.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1993) Cognitive models underlying students'formulation of simple linear equations. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 24, No. 3.

Madeiros, C. (1992) La independencia promovida en las tareas preescolares a través de un programa de autocontrol para el manejo de estrategias cognitivo-conductuales. Tesis de Licenciatura, Facultad de Psicología, UNAM.

Mendoza, C. (2000) Factores que afectan el rendimiento escolar. Para tener buenas notas, no todo es estudio. Cero Drama. Vi-e, Virtual educativo. http://www.vi-e.cl/src_cero/columna03_04.htm

Mizala, A. y cols. (s/f) Factores que inciden el rendimiento escolar en Bolivia. Universidad de Chile. http://www.itam.mx/lames/papers/contrses/romaguer (2001)

National Council of Teachers of Mathematics (1989) Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NovaK, J. D. y Gowin, D.B. (1988). Aprendiendo a aprender. Barcelona: Martínez Roca.

Nuñez, J. C. y González-Pineda, J. A. (1994). Los determinantes del rendimiento académico. España: Universidad de Oviedo.

Omar, A. y cols. (s/f) Atribución Transcultural del Rendimiento Académico: Un Estudio entre Argentina, Brasil y México. Revista Mexicana de Psicología. http://www.psicologia.org.mx/publicaciones/resumen_actual.htm (2001)

Pérez, A. M. y cols. (s/f) Contribución a la predicción del rendimiento académico de diversos factores Psicosociales según el estatus sociométrico de los alumnos. Universidad de Alicante http://copsa.cop.es/congresoiberoa/base/educati/t14.htm (2001).

Pozo, J. J. (1989) Teorias cognitivas del aprendizaje. Madrid: Morata.

Resnick, L. (1990) La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. México: Paidós.

Repetto, T. (1984) Inteligencia, personalidad y rendimiento académico: un análisis de correlación canónica. Tercer Seminario Iberoamericano de Orientación Escolar y Profesional, Morelia, Mich., México.

Rivera, A., Bahena, J. y Garnica, I. (1998) Matemáticas II. Guia para el maestro. México: Universidad Nacional Autónoma de Puebla.

Roche, P. (2000). Comunicado de Prensa. Ciudad Victoria, Tamaulipas, México.

Sánchez, J. L. (1985) Importancia del estilo cognoscitivo en el aprendizaje de las matemáticas y la interacción con el tipo de instrucción. Tesis de Licenciatura, Facultad de Psicología, UNAM.

Santos, L.M. (1992) Resolución de problemas: el trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. Educación matemática, Vol. 4, 2.

Schoenfeld, A. (1996), Looking toward the 21st. century: Challenges of educational theory and practice. Educational Researcher, Vol. 28, No. 7.

Tall, D. (1989) Concept image, computers, and curriculum change. Invited address presented at the research pre session of the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics.

Trigo, L. M. (1997) Principios y Métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

VanLehn, K. (1996) Cognitive skill acquisition. Annual Review of Psychology, 47.

Weinstein, C.E. (1989) Medición y entrenamiento del aprendizaje en alumnos. En S. Castañeda y M. López (Eds.) Antología: La psicología cognoscitiva del aprendizaje. Aprendiendo a aprender. México: UNAM.

White, P. y Mitchelmore, M. (1996). Conceptual Knowledge in Introductory Calculos. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 27, No. 1.

ANEXOS

ANEXO 1

PRETEST

PROBLEMA 1

Dos hermanos están disgustados, por lo que deciden ir a la escuela por separado. El más lento hace 30 minutos y el mas rápido 20 minutos. El más lento sale 8 minutos antes ¿En cuanto tiempo alcanzará el más rápido al más lento y a qué distancia de la casa?

REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

DATOS DESCONOCIDOS	DATOS CONOCIDOS
X= REPRESENTA LOS MINUTOS	EL MÁS RÁPIDO HACE: 20X
	EL MÁS LENTO SALE 8 MINUTOS ANTES: (X-8) POR EL TIEMPO QUE TARDA: 30(X-8)

ECUACIÓN LINEAL:
30(X-8)=20X

CÁLCULO

30(X-8)=20X
30X-240=20X
30X-20X=240
10X=240
10X/10=240/10
X=24

COMPROBACIÓN

30(X-8)=20X
30(24-8)=20(24)
30(16)=480
480=480

RESPUESTA
EL HERMANO MÁS RÁPIDO ALCANZARÁ AL HERMANO LENTO A LOS 24 MINUTOS. CUANDO EL MÁS RÁPIDO ALCANCE AL HERMANO LENTO, LAS DISTANCIAS SERÁN IGUALES.

PROBLEMA 2

El fin de semana Pedro y María visitaron una granja que produce gallinas y cerdos. Pedro contó un total de 19 cabezas, mientras que María dijo que había 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos había en esa granja que visitaron?

REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

DATOS DESCONOCIDOS	DATOS CONOCIDOS
X= NÚMERO DE CERDOS Y= NÚMERO DE GALLINAS	19 CABEZAS 60 PATAS
EL NÚMERO DE CERDOS EL NÚMERO DE GALLINAS	

1. *PARA OBTENER EL NÚMERO DE PATAS (ECUACIÓN 1)*

UN CERDO TIENE 4 PATAS, ENTONCES: 4X
UNA GALLINA TIENE DOS PATAS, ENTONCES: 2X
EL NÚMERO DE PATAS ES: 60

POR LO TANTO:
4X+2Y= 60

2. *PARA OBTENER EL NÚMERO DE CABEZAS (ECUACIÓN 2)*

CADA CERDO Y CADA GALLINA TIENEN UNA CABEZA
EL NÚMERO TOTAL DE CABEZAS ES: 19

POR LO TANTO:
X+Y= 19

SISTEMA DE ECUACIÓN LINEAL

A)4X +2Y= 60...ECUACIÓN (1)
X + Y=19...ECUACIÓN (2)

CÁLCULO

A) POR EL MÉTODO DE SUMA Y RESTA SE MULTIPLICA LA ECUACIÓN (2) POR –2.

4X+2Y=60
2X-2Y=-38

2X = 22

X=22/2
X=11
11 CERDOS

B) SUSTITUIMOS EL VALOR DE X=11 EN LA ECUACIÓN (2)

X + Y=19
11+Y=19
Y= 19-11
Y= 8
8 GALLINAS

COMPROBACIÓN

4X+2Y=60...ECUACIÓN (1)
2X-2Y=-38...ECUACIÓN (2)

ECUACIÓN (1)	ECUACIÓN (2)
4(11)+2(8)= 60	2(11)+2(8)=38
44+16= 60	22+16*38
60=60	38=38

RESPUESTA

POR LO TANTO SE TIENEN 11 CERDOS Y 8 GALLINAS

POSTEST

PROBLEMA 1

Una familia de 3 personas pintó una de las habitaciones de su casa. Ellos habían calculado que, trabajando el mismo tiempo los tres, les tomaría el trabajo 40 horas. Una vez iniciada la operación, el hijo abandonó la labor después de tres horas, y la mujer hace lo doble de lo que el hijo había hecho antes de irse. ¿Cuántas horas más de trabajo tuvo que hacer sólo el padre para terminar?

REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

DATOS DESCONOCIDOS	DATOS CONOCIDOS
X= REPRESENTA A LAS TRES PERSONAS: X+X+X=40 HRS.	EL NÚMERO TOTAL DE HORAS POR EL TRABAJO REALIZADO ENTRE LOS TRES: 40
EL NÚMERO DE HORAS DE MÁS QUE TUVO QUE TRABAJAR SOLO EL PAPÁ: *X*	EL HIJO TRABAJÓ 3 HRS.: X=3
	LA MUJER HACE EL DOBLE DE LO QUE EL HIJO HABÍA HECHO: X+2(3)

ECUACIÓN LINEAL (PARA LOS DATOS DESCONOCIDOS)
3X=40

CÁLCULO

3X=40
X=40/3
X= 13.3

RESPUESTA 1
POR LO TANTO, LOS TRES TENÍAN QUE TRABAJAR 13.3 HRS.

CÁLCULO DE OPERACIONES PARA DAR RESPUESTA AL PROBLEMA

A) EL HIJO SOLO TRABAJÓ 3 HRS.
X=3

B) LA MUJER HACE EL DOBLE DE LO QUE EL HIJO HABÍA HECHO:
X=13.3+2(3)
X=13.3+6
X=19.3

POR LO TANTO, LA MUJER TRABAJA: *X=19.3 HRS.*
C) EL PAPÁ TRABAJÓ:

EL TRABAJO DE LA MUJER:		X= 19.3
EL TRABAJO DEL HIJO:	+	X= 3
EL TRABAJO DEL PAPÁ:		X= 13.3
		35.6

ENTONCES:

$$\begin{array}{r} 40 \\ -\ 35.6 \\ \hline 4.4 \end{array}$$

<u>*RESPUESTA 2*</u>

EL PAPÁ TUVO QUE TRABAJAR 4.4 HORAS DE MÁS PARA CONCLUIR EL TRABAJO.

PROBLEMA 2

En una familia, el papá (Edmundo) tiene tres veces la edad del hijo (Omar), cuando éste tenga la edad de la madre (Matilde), que ha cumplido 30 años, el padre tendrá dos veces la edad del hijo.
¿Qué edad tiene el padre actualmente?

REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

DATOS DESCONOCIDOS	DATOS CONOCIDOS
X= LA EDAD DEL PADRE	EL PAPÁ TIENE TRES VECES LA EDAD QUE EL HIJO: 3X
	EL PAPÁ TENDRÁ DOS VECES LA EDAD DEL HIJO: ½ (3X)
	LA MAMÁ TIENE 30 AÑOS

PRIMER MIEMBRO DE LA ECUACIÓN

LA EDAD DE LA MADRE: 30
LA EDAD DEL PADRE: X

ENTONCES, 30+X

SEGUNDO MIEMBRO DE LA ECUACIÓN

DOS VECES LA EDAD DEL HIJO
½
TRES VECES LA EDAD DEL HIJO
3X

ENTONCES, 1/2 (3X)

ECUACIÓN LINEAL
30+X=1/2 (3X)

CÁLCULO

30+X=1/2 (3X)
30+X=3X/2
2(30+X)=3X
60+X=3X
60=3X-2X
60=X

COMPROBACIÓN

30+X=1/2 (3X)
30+60=1/2 {3(60)}
90=90

RESPUESTA
EL PAPÁ TENDRÁ 60 AÑOS.

ANEXO 2

LISTA COTEJABLE " SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS"

Nombre del equipo__________________________Grupo____________Turno____________
Integrantes____
Profesor________________ Fecha ________Condición ____________Número de problema________

Criterios a Evaluar REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA	Puntaje Esperado	Puntaje Grupo	Argumentación del Grupo
Lectura de comprensión			
Lee cada una de las oraciones del texto	5		
Pregunta por el significado de palabras desconocidas	5		
Escribe o dice qué entiende en cada oración	10		
Escribe un frase de todas las oraciones o ideas que entendió a) Identifica el agente del problema b) b) Identifica la interrogante	10		
SUBTOTAL	**30**		
Diagrama del problema			
Escribe los datos que conoce del problema	5		
Escribe los datos que desconoce del problema	5		
Realiza un diagrama con los datos y las condiciones del problema	20		
Escribe una ecuación lineal en relación con el diagrama	20		
SUBTOTAL	**50**		

Criterios a Evaluar **CÁLCULO**	Puntaje Esperado	Puntaje Grupo	Argumentación del Grupo
Cálculo de la ecuación	20		
Selecciona la operación o método adecuado (suma, resta o sustitución)	4		
Resuelve la ecuación	4		
Comprueba la ecuación	3		
Corrige errores	3		
Verifica que el resultado corresponda con la pregunta	3		
Escribe el resultado completo en relación con la pregunta	3		
SUBTOTAL	20		
TOTAL	100		

Observaciones generales y sugerencias con respecto a:

Solución del problema

____

____

Trabajo en equipo

____

____

Actividad (aburrida o divertida)

____

____

ANEXO 3

FORMATO DE EVALUACIÓN DE UN MAPA CONCEPTUAL

Equipo:____
Integrantes:_____________________________________
Fecha:____
Grupo: ____

Criterios de evaluación	**Mapa conceptual Pretest**	**Mapa conceptual Postest**	**Mapa conceptual Fase de práctica**	
			1°.	**2°.**
Conceptos utilizados				
Relación de conceptos				
Estructura o jerarquía				

Clave:
E=10-9
B=8-7
R=6
D=5-4

ANEXO 4

PROBLEMAS PARA LA FASE DE PRÁCTICA EN EQUIPO

PROBLEMA 1

Anita, tu compañera del salón, tiene el siguiente problema:
Ella siempre ha preparado un pastel muy sabroso que es suficiente para 6 personas cada vez que desea vender a sus compañeros de clase. La cantidad de mantequilla que necesita para éste es de 470 gramos (50 de los cuales son para cubrir el molde), sin embargo, ahora desea hacer un pastel para 8 personas (utiliza los mismos gramos para cubrir el molde), pero ella no sabe qué cantidad de mantequilla necesita para preparar el pastel
¿Tú como la ayudarías?

REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

DATOS DESCONOCIDOS	DATOS DESCONOCIDOS
X= GRS DE MANTEQUILLA PARA UN PASTEL QUE SERÁ DIVIDIDO EN 8 PERSONAS	SI EL PASTEL ALCANZA PARA 6 PERSONAS, ENTONCES: 6X
	470 GRS. DE MANTEQUILLA PERMITEN ELABORAR UN PASTEL PARA 6 PERSONAS: 470

ENTONCES, 6X=470

ECUACIÓN LINEAL
6x= 470

CÁLCULO

A) 6x= 470
X= 470/6
X= 78.33

COMPROBACIÓN

6x= 470
6(78.33)=470
470=470

RESPUESTA

ASI, SE TIENE QUE AÑADIR 78.33 GRS. PARA ELABORAR UN PASTEL PARA 6 PERSONAS. PERO COMO SE QUIERE UN PASTEL PARA 8 PERSONAS, ENTONCES:
X= 8(78.33)
X= 626.6 GRS DE MANTEQUILLA

PROBLEMA 2

Una maestra reparte las ganancias del dinero de la cooperativa a sus alumnos de clase. Ese día se presentaron 30 de los 35 que están matriculados, por lo que se dio un peso de más de lo previsto a cada alumno.
¿Cuánto dinero más se reparte y cuánto recibe cada niño?

REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

DATOS DESCONOCIDOS	DATOS CONOCIDOS
X=EL DINERO QUE RECIBE CADA NIÑO.	SE PRESENTARON 30 ALUMNOS DE LOS 35 INSCRITOS. **30=35**
X=EL DINERO DE MÁS QUE SE REPARTE. COMO FALTARON 5 NIÑOS: 5(**X**)0	SE DA UN PESO DE MÁS: **(X+1)**

ECUACIÓN LINEAL

30(X+1)=35X

CÁLCULO

A) 30X+30=35X
30=35X-30X
5X=30
X=30/5
X=6

B) MÁS UN PESO QUE SE DIO A CADA NIÑO: 6+1= 7

RESPUESTA 1
CADA NIÑO RECIBIRÁ $7.00

RESPUESTA 2
POR LO TANTO, EL DINERO QUE SE REPARTIRÁ DE MÁS COMO FALTARON CINCO NIÑOS ES: $30.00
5(X)
5(6)= 30

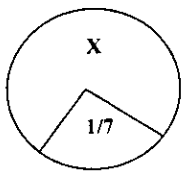
PROBLEMA 3

En el famoso papiro Rhind, encontrado en Egipto hace aproximadamente 1700 años antes de nuestra era, y que se considera como un tratado de las cosas oscuras y misteriosas, aparece la exclamación: ¡ah, el total y su séptima parte es 19!
¿Cuál es el total?

REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

DATOS DESCONOCIDOS	DATOS CONOCIDOS
X=TOTAL	1/7 ES IGUAL A 19

DIAGRAMA



= **19**

X= TOTAL

ECUACIÓN LINEAL
X(1/7)=19

CÁLCULO
X/7=19
X=7(19)
X=133

COMPROBACIÓN

133(1/7)=19
133/7=19
19=19

RESPUESTA

EL TOTAL DE LA EXCLAMACIÓN QUE APARECE EN EL PAPIRO RHIND ES 133

PROBLEMA 4

Un grupo de amigos del 2do. "C" en la Feria de Chapultepec

Regocijándose los amigos,
dividido en dos grupos
su cuarta parte menos cuatro
en la Montaña Rusa se divierten;
con alegres giros, veintidós
empapándose están en los troncos,
¿Sabes cuántos amigos hay
en total en la Feria?

REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

DATOS DESCONOCIDOS	DATOS CONOCIDOS
X= GRUPO TOTAL DE AMIGOS	X/2 DIVIDO EN DOS. ¼ -4 SU CUARTA PARTE MENOS CUATRO. 22 ESTÁN EN LOS TRONCOS.

ECUACIÓN LINEAL

$$\frac{\frac{X}{2}}{\frac{1}{4}} \quad -4$$

$$\frac{\mathbf{4\,X - 4 = 22}}{\mathbf{2}}$$

CÁLCULO

a

$$\frac{4\,X - 4}{2} = 22$$

2X-4=22
2X=22+4
X=26/2
X=13

COMPROBACIÓN

$$\frac{4(13)-4}{2}=22$$

$$\frac{52-4}{2}=22$$

22=22

RESPUESTA
COMO 13 ESTÁN EN LA MONTAÑA RUSA Y 22 ESTÁN EMPAPÁNDOSE EN LOS TRONCOS, ENTONCES HAY 35 AMIGOS EN TOTAL EN LA FERIA.

PROBLEMA 5

Tres hermanos compran un estéreo con un descuento de 30% y pagan de contado un televisor. El importe total es de N$ 5 650 00
¿Cuánto pago cada persona por el televisor?

REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

DATOS DESCONOCIDOS	DATOS CONOCIDOS
X= LA TELEVISIÓN	IMPORTE TOTAL: $5, 650.00
Y= EL ESTÉREO	30% DE DESCUENTO AL PAGAR DE CONTADO POR EL ESTÉREO.
Z= EL PAGO DE CADA PERSONA	

EL IMPORTE TOTAL POR LA COMPRA DE LA TELEVISION Y EL ESTÉREO:
X+Y=5650 ...ECUACIÓN (1)

EL COSTO DEL ESTÉREO MÁS EL 30% DE DESCUENTO:
X-30Y=100...ECUACIÓN (2)

SISTEMA DE ECUACIÓN LINEAL

X+Y=5650 ...ECUACIÓN (1)
X-30Y=100...ECUACIÓN (2)

CÁLCULO

X+Y=5650 ...ECUACIÓN (1)
X-30Y=100...ECUACIÓN (2)

A) POR EL MÉTODO DE SUMA Y RESTA SE MULTIPLICA LA ECUACIÓN (2) POR MENOS

$$\begin{array}{r} X \ + Y = 5650 \\ \underline{-X-(-30Y) = -100} \\ 31Y = 5550 \end{array}$$

Y=5550/31
Y=179.03

B) SUSTITUIMOS EL VALOR DE "Y" EN LA ECUACIÓN (1)

X+Y=5650 ...ECUACIÓN (1)
X+179.03=5650
X=6650-179.03
X=5470.97

COMPROBACIÓN

X+Y=5650 ...ECUACIÓN (1)
X-30Y=100...ECUACIÓN (2)

PARA ECUACIÓN (1)
5470.97+179.03=5650
5650=5650

PARA ECUACIÓN (2)
5470.97-30(179.03)=100
5650=5650

RESPUESTA

COMO SE QUIERE SABER CUÁNTO PAGO CADA HERMANO POR LA TELEVISIÓN, ENTONCES:

X= 5470.97/3
X=1823.65

$1, 823.65 PAGÓ CADA UNO.