01168
20

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS DE LOS METODOS:
PROCESO DE ANALISIS JERARQUICO Y REMBRANDT
EN LA TOMA DE DECISIONES.

T E S I S

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

(INVESTIGACION DE OPERACIONES)

P R E S E N T A :

EDUARDO VALLIN MANRIQUE

299374

DIRECTOR DE TESIS:
M.I RUBEN TELLEZ SANCHEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA NOVIEMBRE 2001

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo estudiar y analizar los métodos: Proceso Análisis Jerárquico o simplemente PAJ y el método REMBRANDT. Así como también hacer una recomendación de hasta dónde pueden llegar sus límites de confiabilidad al momento de usarlos y lo que se puede esperar de manera conceptual. Se hace una revisión de los conceptos teóricos en análisis de decisiones que sirven como apoyo para analizar de manera profunda algunos de los métodos existentes hasta hoy en el proceso de toma de decisiones multicriterio como área de especialidad dentro de la Investigación de Operaciones.

El método PAJ es, y ha sido, criticado fuertemente por diferentes investigadores ya que no satisface el axioma de independencia ante alternativas irrelevantes, y es básicamente ordinal la ordenación de criterios. Otra de las ventajas es que detecta y acepta hasta ciertos límites la incoherencia de los decisores humanos y además permite emplear de forma natural una jerarquización de los criterios, aspecto que no pueden hacer los métodos que exigen comparaciones globales de las alternativas (V. El investigador Lootsma y Leo Rog de la Universidad de tecnología de Delft (Holanda) en 1990 proponen el método REMBRANDT donde se efectúan las comparaciones entre las alternativas para cada criterio, y así proponen una mejora al método PAJ.

Palabras Clave: Toma de decisiones, Decisiones Multicriterio, PAJ, REMBRANDT

" LA MENOR DE LAS COSAS CON SIGNIFICADO VALE MÁS QUE LA MAYOR DE ELLAS SIN SIGNIFICADO"

JUNG

Con profundo amor a mis queridos padres, y a mis hermanos por su consejo a tiempo, apoyo incondicional, y comprensión infinita. Una vez más puedo dedicarles mi trabajo para honrarlos y hacerles llegar una alegría adicional a sus corazones.

A mi esposa Gabriela Cano, que en ella encontré un camino en la vida, lo cual le agradezco, esperando llegar muy lejos a su lado.

A todos mis compañeros, amigos y maestros, con profundo respeto.

A mi familia política por su aliento y comprensión, en todo momento

A todos aquellos que encuentran en el conocimiento el camino a seguir y lo hacen parte de sus vidas.

A la vida y a Dios una vez más,

Gracias...

Eduardo Vallín Manrique.

RECONOCIMIENTO Y AGRADECIMIENTO A:

Al **M.I. Rubén Téllez Sánchez**

Por la dirección de la tesis, su amistad y comprensión.

A los comentarios y sugerencias de los profesores:

- **Dr. Servio Tulio Guillén Burguete**
- **Dr. Sergio Fuentes Maya**
- **Dr. José J. Acosta Flores**

por sus valiosas observaciones y sugerencias que enriquecieron este trabajo.

El apoyo del **Instituto de Ingeniería de la UNAM** cuando fui becario en el departamento de Sistemas, y a la **DEPFI** por apoyarme para poder llevar a cabo este trabajo.

A la **Dra. Idália Flores Mota**, coordinadora de la sección de Investigación de Operaciones del Departamento de Sistemas de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Índice

INTRODUCCIÓN

En los ultimas cinco décadas, los problemas en las toma de decisión, se han llevado en casi todos los casos al enfoque llamado Toma de Decisiones Multi-Criterio. Su enfoque se basa en tres supuestos: A) Se cuenta con un grupo bien definido de alternativas factible, B) Es posible encontrar un modelo de preferencias lo suficientemente claras para el decisor y C) la optima decisión es aquel que se encuentra resolviendo un problema matemático bien definido. Sin embargo, esta área de la Investigación de operaciones, tiene algunas limitaciones en objetividad, como el hecho de suponer al decisor como un experto y hábil para tomar decisiones, las preferencias del decisor estén bien definidas, y en general, sea imposible decir que la decisión que se tomo fue buena o no, solo por estar basada en un modelo matemático, ya que en realidad son varios los aspectos que influyen cuando se toma una decisión. El tener una ayuda real para poder decidir en un problema multicriterio, nos lleva a crear métodos que apoyen a las personas involucradas en estos procesos a modelar, argumentar o transformar sus preferencias, y a tomar una decisión de acuerdo con sus objetivos y metas. Además, su preocupación radica en que los esfuerzos de los investigadores estén orientados hacia conceptos, propiedades y procedimientos que se pueden utilizar en la obtención de información significativa de los problemas. Para poder lograr todo esto, empezaremos por analizar la definición de Decisión, la cuál es la siguiente:
El Decidir es un proceso por el que una o más personas seleccionan una alternativa de entre un conjunto para, de acuerdo a ciertos criterios, alcanzar una serie de objetivos y metas preestablecidas; todo lo anterior, dentro del entorno de los posibles estados que pueda guardar la naturaleza. El proceso de decisión puede realizarse haciendo uso de los principios de la metodología científica. Debido a la importancia que tiene el proceso de toma de decisiones en problemas donde están involucrados altos costos y complejidad, se han desarrollado diversos métodos que tratan de dar solución a los problemas de elección, y saber tomar todas las consideraciones y alternativas es de vital importancia. Uno de estos métodos es el PAJ propuesto en 1979 por el investigador PhD. Thomas Lorie Saaty. [1]

Este método logró en poco tiempo una gran aceptación por su fácil uso y entendimiento para el decisor. Este algoritmo llamado PAJ (Proceso de Análisis Jerárquico), y en Inglés AHP (Analytic Hierarchy Process) brinda una forma efectiva de la toma de decisiones en grupo, mediante la imposición de una disciplina en el proceso de pensamiento grupal.

[1] T.L. Saaty The Analytic Hierarchy Process *(New York: McGraw Hill, 1988)*

Sus aplicaciones más importantes del método PAJ se relacionan con:

Planeación estratégica	Medicina
Asignación de recursos	Ecología
Toma de decisiones: Beneficio / Costo	Educación
Física	Portafolios de Inversión
Industria	Pronósticos
Diseño	Leyes
Química	Ingeniería de transporte
Comportamiento en competencias	Mercadotecnia
Selección de Proyectos	Finanzas

Sin embargo, especialistas en la materia en todo el mundo han hecho duras críticas en lo referente a la escala que emplea, y el incumplimiento del axioma de la alternativa irrelevante, entre otros cosas. En ocasiones los problemas de decisión pueden ser tan complejos que pueden abrumar el proceso de decisión, ya que nos demanda una manera complicada y compleja de pensar. Cuando se abordan problemas complicados que implican gran cantidad de factores, las cosas cambian. Por tanto se necesita ver a los problemas de manera estructurada, a través de una configuración que refleje la interacción e interdependencia de los factores y que nos permita pensar de manera simple. Esto debe ser accesible y confiable. Cuando se piense utilizar el método PAJ se recomienda tener especial cuidado en la estructuración del problema de manera jerárquica y la asignación de prioridades. La motivación del presente trabajo es realizar un análisis del método PAJ y el método Rembrandt, siendo este último una versión mejorada, según el investigador Lootsma. El desarrollo de este trabajo no intenta desvirtuar al método PAJ, así como tampoco pretende convencer a los usuarios que utilicen otro método, aquellos que por la difusión comercial que tiene lo utilizan; Si no orientarlos de manera que se sepa cuándo y como usar y bajo qué condiciones. El método Rembrandt es hasta ahora poco difundido en los libros de texto, sin embargo, investigadores como Sergio Barba-Romero[2] dedica en su libro las referencias de este método, y también la prestigiosa revista Europea de Investigación de Operaciones en su Volumen 82, Numero 3, Mayo 4 de 1995 dedica un articulo muy completo sobre este método para la toma de decisiones

[2] Sergio Barba-Romero Decisiones Multicriterio. *Colección de Economía de Alcalá 1997. servicios UAH*

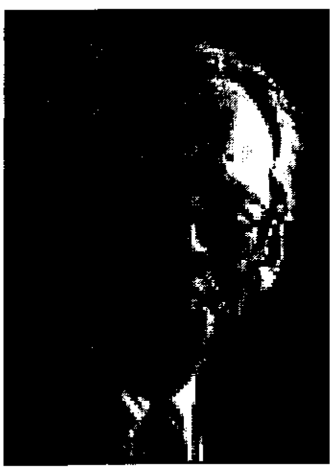
Estado del arte del Proceso de Análisis Jerárquico (PAJ).

El método PAJ fue desarrollado por el PhD. Thomas L. Saaty en 1979, y su principio es resolver problemas de carácter complejo que involucran multicriterios que comparten en la toma de decisiones. El proceso requiere que el decisor emita juicios respecto de la importancia relativa de cada criterio para cada alternativa de decisión. El proceso analítico de jerarquización tiene su fundamento teórico en la teoría de gráfos (en [3] puede verse una síntesis actualizada). Sin embargo, el método de Saaty no satisface ciertas condiciones teóricas, como el axioma de independencia de alternativas irrelevantes, ya que el ordenamiento final puede ser perturbado por la introducción de nuevas alternativas, aún cuando sean peores que las perturbadas

En Belton (1986)[4] se encontrará un eco de las polémicas suscitadas por la omisión de dicho axioma. El método de Saaty, por otra parte, comparte este defecto con casi todos los métodos ordinales, ya que en es básicamente ordinal la ordenación de los criterios.

El método PAJ según su autor tiene dos grandes méritos. El primero, que el método detecta y acepta, dentro de ciertos límites, la incoherencia de los decisores humanos. Y el segundo que permite emplear de forma natural, una jerarquización de los criterios, aspecto que no pueden hacer los métodos que exigen comparaciones globales de las alternativas.

Estado del arte del método REMBRANDT



El método Rembrandt implementado por Leo Rog y F.A.Lootsma[5],(1990)[6] en la Universidad Tecnológica de Delft (Holanda), fue desarrollado para recomendar la misma decisión que recomendaría el sistema PAJ cuando se usan recursos geométricos en la agrupación, y una alternativa diferente cuando se usan recursos aritméticos en la agrupación.

El sistema Rembrandt ha sido diseñado para mejorar tres características criticadas del sistema PAJ. El primer aspecto localizado por Lootsma es el referente a la escala numérica empleada para hacer un juicio comparativo verbal.

---

[3] (Harker y Vargas, 1987)
[4] European Journal of Operational Research 26, *(1986) 7-21 North -Holland*
[5] F.A.Lootsma@its.tudelft.nl
[6] Freek A Lootsma Multi- Criteria Decision Analysis Via Ratio and Difference Judgment
Kluwer Academic Publishers, June 1999

Lootsma considera que la ventaja relativa es más naturalmente cóncava y presenta un número de casos donde una escala logarítmica es más apropiada como en el caso de horizontes de planeación, la fuerza del sonido o la luminosidad de la luz.

Hipótesis del presente trabajo:

El método Rembrandt puede aportar mejoras en la toma de decisión con respecto el método PAJ, tanto en el ámbito conceptual, en sus procedimientos, y en los resultados.
Se estudian ambos métodos desde un punto teórico y matemático, en donde se observan sus contribuciones para mejorar al método PAJ y se resuelven dos problemas tipo, los cuales son comparados e interpretados con el objeto de obtener conclusiones y recomendaciones sobre los alcances de los métodos.

Objetivos de la tesis:

1. Presentar los conceptos teóricos fundamentales de la teoría de decisiones, analizar los diferentes algoritmos de evaluación en el proceso de toma de decisiones.

2. Comparar y analizar los métodos: Proceso de Análisis Jerárquico y Rembrandt, dentro de un marco cualitativo y cuantitativo.

3. Comparar las bondades de los métodos PAJ y REMBRANDT, y reconocer sus fortalezas y debilidades cuando se utilicen.

4. Poner a prueba estos métodos con problemas tipo y hacer un análisis de resultados realizando el algoritmo de cada uno e inferir sus resultados.

5. Realizar las conclusiones y recomendaciones que se infieren de este estudio. (Aportación del trabajo).

Presentación de los capítulos de la tesis

Este trabajo consta de cuatro capítulos. El primero trata del Análisis de Decisiones, su clasificación, Conceptos, definiciones, se explican las etapas de un proceso de decisión, y se mencionan los modelos matemáticos que hay en esta área de investigación, así como sus ventajas y limitaciones, las relaciones binarias y las escalas de medición.

El segundo capítulo habla sobre decisiones multicriterio y contiene conceptos teóricos y matemáticos que son la base de la TDMC(Toma de Decisiones Multi-Criterio) y ayudan a entender conceptos importantes.

En el tercer capítulo se comparan los métodos mencionados, haciendo el análisis entre sus axiomas, escalas y diferencias y por último se explican a profundidad los algoritmos.

El capítulo cuarto aborda dos problemas tipo, se analizan por ambos métodos y se estudia la información obtenida para poder *inferir* las observaciones de los métodos, en el que se resaltan sus alcances.

Finalmente, se incluyen las conclusiones y recomendaciones del trabajo, que incluyen los aspectos más relevantes de los métodos, así como las experiencias recibidas, como una aportación a este trabajo.

CAPÍTULO UNO: ANÁLISIS DE DECISIONES

En este capítulo se estudiarán los conceptos básicos, el uso del método científico aplicado a la toma de decisiones, el proceso de un problema de decisión, la clasificación de la Toma de decisiones, Árboles de decisión, y los Modelos matemáticos que ayudan a tomar decisiones, así como sus ventajas y desventajas de estos, las relaciones binarias y órdenes, escalas de medición y tipos de escalas. Todo esto como un antecedente para poder entender la Toma de decisiones como una disciplina científica dentro de la Investigación de Operaciones.

1.1 Conceptos básicos

La metodología científica es la aplicación secuencial de los siguientes pasos:

a) ***Observar*** *el sistema donde incide la decisión.*
b) ***Identificar y formular*** *el o los problemas sobre los cuales se requiere decidir.*
c) ***Establecer una serie de hipótesis,*** *que pueden ser aceptadas o refutadas mediante el uso de modelos que se han diseñado explícitamente para tal fin.*
d) ***Experimentar*** *, es decir, resolver los modelos.*
e) ***Verificar*** *que los resultados de los modelos sean universalmente aplicables al problema en cuestión, cuando este último se encuentre bajo las mismas circunstancias, en periodos de tiempos distintos.*

En cualquier acto de decisión se distinguen los siguientes elementos:

1. Uno o más ***decisores*** que tienen una serie de objetivos y metas (cuantificados en el tiempo y espacio) supuestamente bien definidos.
2. Un conjunto de posibles ***acciones*** o alternativas disponibles a los decisores.
3. Un conjunto de posibles ***resultados*** generados por la instrumentación de las acciones
4. Un ***entorno*** dado por los posibles estados que guarda la naturaleza con relación a los objetivos de los decisores, sobre los cuáles éstos no ejercen ningún control.
5. Una ***función*** que liga acciones y resultados con el entorno
6. Un ***proceso*** de decisión que selecciona una o varias acciones, dado un cierto entorno y metas implícitas del grupo de decisores
7. Un ***criterio*** que enmarca el proceso de decisión

El proceso de decisión consiste en seleccionar una o varias alternativas o cursos de acción, bajo el criterio de minimizar los riesgos de pérdidas financieras

1.2 Proceso de un problema de decisión:

El esquema anterior representa las fases de un proceso de toma de decisiones. Como se puede ver, en primer lugar se debe tener claro en qué consiste el **problema** y qué es lo que se pretende solucionar. Como segundo paso en el proceso de decisión es el ***conjunto de alternativas o cursos de acción*** el se define como el conjunto de todas las posibles opciones que el decisor puede elegir, para evitar redundancias se supone que las alternativas son diferentes, excluyentes y exhaustivas. Para cada alternativa hay un estimado de consecuencias que proporciona la información relevante para la elección y describe lo que se esperaría sobre el logro de los objetivos si ésta se llevara acabo.

Para llevar acabo la elección en el estimado de consecuencias se supone que el decisor posee varios **(al menos uno) ejes de evaluación**. Así sería, por ejemplo, el precio, la calidad, la estética, la solidez, etc., se consideran criterios si la decisión se refiere a la elección entre las diversas marcas de producto. Estos ejes de evaluación son las características de las alternativas, por lo que se llaman ***atributos***. Cuando se añade a estos atributos un mínimo de información relativa a las preferencias del decisor, los atributos se convierten en ***criterios***. Es decir, un criterio expresa, con mayor o menor precisión, las preferencias del decisor respecto a un cierto **atributo.** Estos ejes de evaluación son las características de las alternativas, por lo que se considerarán como atributos. Al incorporar estos atributos un mínimo de información relativa a las preferencias del decisor, los atributos se convierten en criterios. Por ***criterio*** debe entenderse la acción significativa de comparar dos alternativas a y b de acuerdo con cada punto de vista particular.

Ejemplo:

La familia *González* desea comprar una casa. De acuerdo con sus necesidades, requieren una casa de dos plantas, con tres recámaras, estancia mediana, cocina, uno y medio baños, cuarto de servicio, cochera y jardín pequeño.

Para esto, el Sr. *González* (siendo la persona a tomar la decisión) tiene tres puntos de vista: Costo de la casa, ubicación, disponibilidad de servicios públicos e infraestructura. Cada uno de estos puntos de vista tiene asociado un atributo o descriptor, por ejemplo, por ejemplo en el costo será el intervalo de [250,300], en miles de pesos. La ubicación se describe, operacionalmente, por medio de la distancia, en kilómetros, que hay entre la casa y a cuatro centros de interés para la familia: 1. - escuela: 2. - trabajo, 2. - centro comercial, 4. - centro deportivo y cultural

Cada uno de estos aspectos tendrá asociado un intervalo de medición, por ejemplo, la distancia a la escuela oscilará entre 2 y 5 Km. Buscando información sobre las casa, el Sr. *González* ha encontrado cuatro casas que cumplen con los requisitos admisibles (alternativas) y lo que se tiene como importancia es comprar aquella que minimice el costo, las distancias a los lugares de trabajo y escuela y que tenga el mayor espacio posible (objetivos)

$$
\begin{array}{cc|cccc c}
 & & & \text{Puntos de vista} & & & \\
 & & \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_4 & \\
\hline
 & a_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & \\
\text{acciones} & a_2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \text{Consecuencias} \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & a_m & x_{m1} & x_{m2} & \cdot & x_{mn} &
\end{array}
$$

Se distinguen dos tipos de criterios: los criterios cuantitativos y los criterios cualitativos. Los primeros se identifican cuando ciertos atributos corresponden a evaluaciones numéricas, como los precios, las velocidades, los costos, diversos porcentajes, etc. Los segundos corresponden a características para las cuales no existe una unidad conocida de medida, como la imagen de una marca, el riesgo social, la calidad, etc. Por último, el resultado es el paso final en el proceso de decisión, en él se pueden escoger una o varias alternativas que proporcionen una solución al problema.

Los procesos de decisión pueden realizarse bajo:

a) *Completa certeza o determinísticos*
b) *Riesgo o estocástico*
c) *Conflicto*
d) *Completa Incertidumbre*

Para el caso ***Determinísticos*** el grupo decisor conoce perfectamente cual va a ser el estado de la naturaleza relativo a sus objetivos, por lo que selecciona aquella acción que, de acuerdo al criterio imperante logrará llevarlos más rápido a la meta preestablecida.

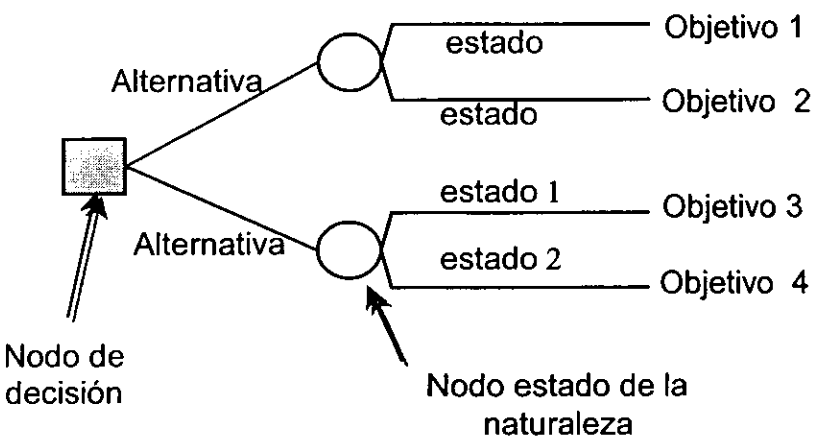
Para el tipo ***Riesgo***, no se conoce perfectamente el estado que adoptará la naturaleza, pero se asocia a éste una distribución de probabilidad (continua o discreta), basado en esto, el grupo decisor selecciona aquella acción que maximiza la esperanza de acercalos a la meta propuesta.

Algunos problemas bajo ***riesgo*** se pueden resolver mediante **árboles de decisión**, éstos son una forma gráfica de representar el problema considerando varios factores y probabilidades asociadas a eventos que ahí se involucran.

Características de los árboles de decisión

- Visualización gráfica del proceso de decisión.
- Utilizada para resolver problemas.
- Con un conjunto de alternativas y estados de la naturaleza.
- También se pueden usar tablas.
- Con varios conjuntos de alternativas y estados de naturaleza (decisiones secuenciales.)
- Tablas de decisión no pueden ser utilizadas.

Árbol de decisión

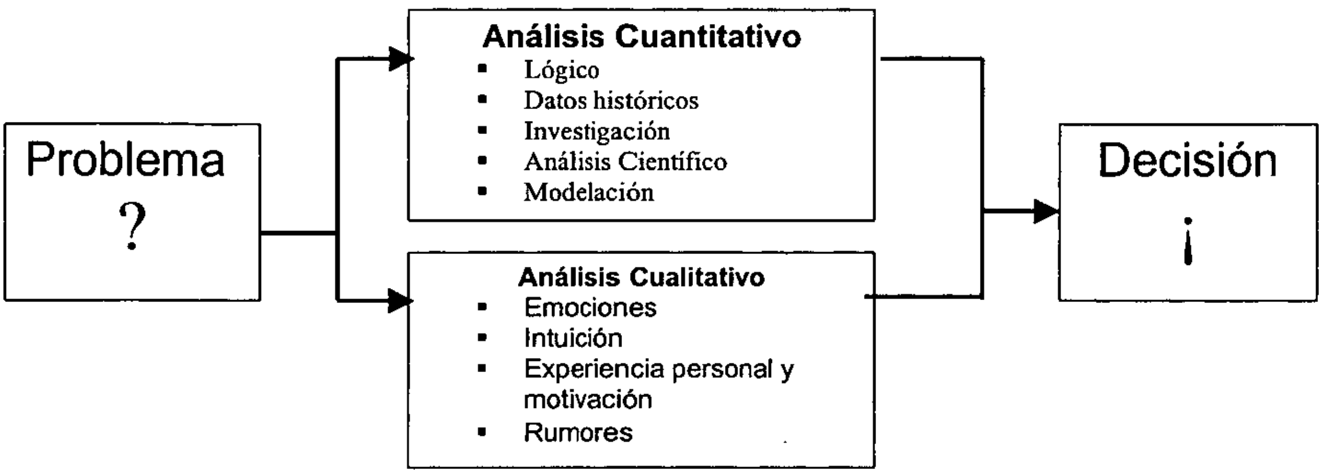


En el caso de ***Conflicto*** los estados de la naturaleza obligan a que el logro de las metas de un grupo de decisores reduzca, simultáneamente, las posibilidades de que otro grupo alcance las suyas. Para el último caso de ***Completa incertidumbre*** se desconoce la verosimilitud asociada a la ocurrencia de los posibles estados de la naturaleza, es decir, no se tiene idea de la distribución de probabilidad asociada a los diferentes entornos. La teoría de decisiones es en ciertos aspectos, una teoría que se puede considerar intermedia entre la teoría de modelos formales y la correspondiente de modelos informales que estructuran y dan solución a un problema sin recurrir a su representación matemática. En los modelos de decisiones se trata de encontrar las ecuaciones que determinan al sistema en estudio, y se formaliza por medio de un modelo matemático, con el cual una **mente racional** elige, dentro de un conjunto de alternativas que pretenden alcanzar uno o varios objetivos, la mejor o más adecuada con base en la información disponible. En este contexto se puede decir que ***tomar una decisión*** para lograr un ***objetivo*** entre alternativas de un conjunto de elección es un proceso por el que el decisor posee varios (al menos uno) ejes de evaluación. Así serían, por ejemplo, el precio, la calidad, la estética, si la decisión se refiere a la elección entre las diversas marcas de un producto.

1.3 Pasos a seguir para tomar una buena decisión:

1. Definir el problema y factores de influencia
2. Establecer un criterio de decisión
3. Seleccionar un modelo como herramienta en la toma de decisiones
4. Identificar y evaluar alternativas usando un modelo para la toma de decisiones
5. Seleccionar la mejor alternativa
6. Implementar la decisión

Proceso en la toma de Decisiones



1.4 Algunos de los modelos matemáticos para la Toma de Decisiones

Criterios Toma de Decisiones con Riesgo
- Criterio del valor esperado
- Criterio de Racionalidad
- Criterio de máxima verosimilitud

Criterios Toma de Decisiones con Incertidumbre
- Criterio Máximax
- Criterio Maximin
- Criterio de Savage
- Criterio de Hurwicz
- Criterio de Laplace

Ventajas de manejar modelos matemáticos como herramientas de decisión:

1. Son menos caros y disruptivos que experimentar con sistema del mundo real.
2. Los métodos permiten a los decisores preguntar ¿Qué pasa sí? Diferentes escenarios.
3. Son diseñados para manejar problemas y administrar nuevas condiciones.
4. Los modelos propician un aprovechamiento sistemático al análisis de problemas.
5. Requieren administradores para ser específicos acerca del manejo de restricciones y metas relacionadas a un problema.
6. Pueden ayudar a reducir el tiempo para tomar una decisión.

Limitaciones de los modelos matemáticos:

1. Pueden llegar a ser más lentos para desarrollar una prueba.
2. Son algunas veces mal usados o malinterpretados y temidos por su complejidad matemática.
3. Sirven para valorizar la información que no es cuantificable.
4. Siempre asumen simplificar las variables del mundo real.

1.5 Preferencias del decisor

Siendo el decisor la persona que elige, cuando considera que dos alternativas a y b de su conjunto de elección, se puede dar el caso de que prefiera a a que a b o inversamente. Sin embargo, puede suceder que el decisor sea indiferente entre las dos alternativas en cuestión, es decir, que las considere como equivalentes. Por lo que se tiene:

1. El decisor prefiere estrictamente a que a b cuando su elección se efectúa sin ninguna duda sobre a, lo cual se denota $a\,P\,b$ o $a \succ b$
2. El decisor es indiferente entre a o b cuando acepta indistintamente una alternativa frente a la otra, y se representa por $a\,I\,b$ o $a \sim b$
3. Cuando el decisor no sabe si prefiere a o b o si es indiferente entre las dos se tiene una preferencia débil de a respecto de b y se denota a Q b o $a \succ b$
4. Puede ocurrir que el decisor sea incapaz o rechace escoger entre dos alternativas para el analista, esto significa que las alternativas no son comparables y se denota por a NC b

En general, es difícil afirmar que una decisión es buena o mala refiriéndose únicamente a un modelo matemático: aspectos organizacionales, pedagógicos y culturales del proceso de decisión contribuyen a la calidad y éxito de esta decisión. Por tanto se recomienda apoyarse en la ayuda a la decisión cuyo interés es proporcionar a una persona o a un grupo de ellas involucradas en un proceso de decisión, una propuesta concerniente al proceso de decisión, mediante un modelo matemático que permita argumentar y transformar sus preferencias[1]

La estructuración y evaluación son fases esenciales en la ayuda a la decisión. La estructuración proporciona a las personas involucradas en una situación problemática, un lenguaje común de aprender y discernir, con una información clara, acerca de los posibles impactos de las acciones potenciales respecto a cada punto de vista. Esta fase de la ayuda a la decisión ofrece una base para la identificación de oportunidades de decisión, para la construcción de nuevas alternativas y para la evaluación de acciones potenciales.

En la fase de evaluación, el analista o decisor se encamina hacia un desarrollo formal de un modelo de evaluación global, que puede ser dividido en:

- La construcción de un criterio para cada punto de vista, es decir, un modelo de evaluación que represente de una manera formal la preferencia local de acciones parciales.
- La aplicación de agregación multicriterio que tome en cuenta alguna información que se da entre los puntos de vista y agrupa a los criterios en un modelo de evaluación global.

1.6 Relaciones binarias y órdenes

Cuando un decisor dice que prefiere *a* a *b*, entonces establece una relación entre *a* y *b*, La noción matemática de relación es entonces apropiada para modelar las preferencias.

Una ***relación binaria*** en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano $A\times A$. Sea R una relación binaria en A. Para expresar que $(a, b)\in R$ se escribe aRb, y sí $(a, b)\notin R$ entonces $\neg aRb$, (esto significa que a no está relacionado con b.

Se dice que:

1. R es **transitiva** si $\quad \forall a,b,c \in R,\ \ aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$
2. R es **asimétrica** si $\quad \forall a,b \in R,\ \ aRb \Rightarrow \neg bRa$
3. R es **simétrica** si $\quad \forall a,b \in R,\ \ aRb \Rightarrow bRa$
4. R es **reflexiva** si $\quad \forall a \in R,\ \ aRa$
5. R es **completa** si $\quad \forall a,b \in R,\ \ aRb \vee bRa$ o se tienen ambos
6. R es **transitiva negativamente** sí $\quad \forall a,b,c \in R,\ \ \neg aRb \wedge \neg bRc \Rightarrow \neg aRc$
7. R es **antisimétrica** sí $\quad \forall a,b \in R,\ \ aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

Cualquier relación que es transitiva se conoce como un *orden*. Una relación transitiva y asimétrica es un *orden estricto*. Una relación completa y transitiva es un *orden débil*. Un orden débil antisimétrico se conoce como *orden simple o lineal.*

[1] (Roy, B., 1989)

Una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva se llama *relación de equivalencia.*

En otras palabras, se dice que un conjunto de objetos posee un orden parcial si no es posible comparar todos ellos por medio de una relación matemática, tal es el caso del conjunto {A, B, 1, 2, 3}. Sin ninguna convención a priori, respecto a la asociación de un valor numérico con las letras, no es posible comparar los números con las letras y expresar por ejemplo que 1 va antes que la A o viceversa, es decir, solamente se puede efectuar un ordenamiento de los números entre sí y lo mismo de las letras, pero no todo el conjunto por lo que el ordenamiento es parcial.

El orden débil se caracteriza porque a pesar de que todos los elementos del conjunto se pueden comparar entre sí, existen elementos repetidos los cuales recibirían la misma etiqueta por estar en la misma posición dentro de la escala.

En el ordenamiento completo es posible comparar todos los elementos entre sí, además de que cada uno de ellos recibe una etiqueta diferente que lo distingue.

Escalas de medición

Actualmente, uno de los conceptos más comunes que se utilizan de manera cotidiana es la medida o medición, como el acto de realizar una medida. Sin embargo, no es muy común que la gente se dedique a tratar de conceptualizar el significado de esta palabra, y se utiliza en muchos sentidos y diversas áreas desde el artesano hasta el matemático.

Aún cuando la esencia del concepto parece ser comprendida por todos, es necesario tratar de formalizar este juicio. Así, un objeto puede tener como parte de los elementos que lo caracterizan un conjunto de cualidades que pueden ser susceptibles de medirse con mayor o menor precisión, y una vez establecidas las unidades de medidas de longitud son relativamente fácil conocer las dimensiones físicas de los objetos, aun cuando estas no sean exactas.

En teoría de decisiones se ha generado el concepto de utilidad como una medida personal o de grupo que expresa el valor que tienen diversas alternativas al que realiza o toma las decisiones. Debido a la diversidad de características que en particular posee el ser humano se han generado diversas técnicas para medirlas, algunas de las cuales se describen mas adelante, por lo pronto se comienza por definir los conceptos de medida y escalas de medición.

Una primera definición de medición o medida es el acto de asignar números a las cosas, objetos, acontecimientos o variables, de acuerdo con una serie de normas.

Una segunda definición se entiende como la asociación de símbolos a las propiedades de interés de un objeto de tal manera que dichos símbolos guardan las mismas relaciones que las que poseen los atributos del objeto de estudio.

Es importante no confundir las propiedades del sistema numérico con el que se mide la característica de interés, con los atributos del objeto de estudio. Esto es, las reglas que se usan para asignar números a los objetos dependen de las propiedades del atributo que se está midiendo y no de las propiedades de la escala numérica usada. La relación entre las propiedades del objeto a medir y las características de la medición se establecen por medio de las escalas.

Una escala puede definirse como una representación alfanumérica ordenada a lo largo de un eje, junto con las reglas que permiten manejar los símbolos o medidas representados en ella.

El tipo de escala se caracteriza con facilidad por el género de transformación que puede ser operado sobre ella para obtener una nueva escala que mantenga las mismas propiedades que la original, es decir, que guardan las mismas relaciones que tienen las características del objeto a medir, por ejemplo la longitud de un objeto es la misma si se mide en yardas o en metros.

1.7 Tipos de escala

1. Escala nominal
2. Escala ordinal
3. Escala de intervalo o graduadas
4. Escala de razón o de proporcionalidad

Escala nominal

La escala nominal se utiliza para identificar y clasificar un conjunto de objetos o las propiedades de un objeto, por ejemplo la asignación de números a un equipo de jugadores. Esta escala es de las más simples y su intensidad de medición es débil así como el tipo de inferencias que pueden obtenerse del análisis de sus datos.
Los números asociados a objetos en una escala nominal, cumplen solamente los axiomas 1,2, y 3

Las escalas nominales son esencialmente cualitativas y no se pueden emplear mas que para efectuar ciertas operaciones estadísticas elementales, como efectuar frecuencia de ocurrencia.

Escala ordinal

Cuando se desea establecer el ordenamiento de un grupo de objetos respecto a uno o varios atributos de éstos se emplea la *escala ordinal.* Con estas se conoce cual objeto va en primer lugar, cual en segundo, y así sucesivamente. En esta medida, en general no se posee un origen único, y no existe una unidad de medida a través de la cual se puedan establecer distancias entre las posiciones correspondientes a dos objetos. Esta escala se caracteriza por transformaciones monótonas crecientes (o sea que el valor de la función aumenta cuando el argumento aumenta.)

Escala de intervalo o graduadas

En la *escala de intervalo*, además de preservar el orden, se posee un origen, aunque este no es único. El aspecto más relevante que caracteriza a esta escala es el de poseer una unidad de medida, razón por la cual se asemeja más a lo que la gente concibe como medida. En la escala de intervalo la diferencia entre dos puntos de ella representa diferencias entre los atributos del objeto en estudio. Dicha distancia se mide en la escala en cuestión ya que, aunque se posee una unidad de medida esta es arbitraria. La escala de intervalo se caracteriza por transformaciones lineales de la forma $y=ax+b$, con $a \neq 0$. Esto significa que si la característica de un objeto se mide en la escala x, entonces las mismas propiedades del objeto se pueden medir usando una nueva escala (y) generada de la original.

Escala de razón o de proporcionalidad

En este tipo de escala, la intensidad de la medición es mayor que en cualquiera de las anteriores, ya que en ella el orden, las diferencias y las razones (cocientes) entre medidas de un atributo corresponden al orden, diferencias y razones entre las propiedades del objeto. Existe un origen único (el cero es el mismo en cualquier escala equivalente) y una cantidad de medida (arbitraria.) El tipo de transformación que caracteriza estas escalas es la forma $y=ax$ con $a \neq 0$. Una característica importante de este tipo de escala es que la suma de dos cualesquiera de sus elementos, también pertenece a dicha escala. Estas escalas, los números que representan el atributo que se están midiendo cumplen con los axiomas 1 al 9. Con estas escalas pueden efectuarse todas las operaciones aritméticas, ya que dichas escalas cumplen con los axiomas de aditividad, a saber, los 6, 7, 8 y 9.

TIPO ESCALA	AXIOMA QUE CUMPLE	VENTAJAS	DESVENTAJAS
Nominal	1,2,3	Cualitativa. Se pueden efectuar operaciones estadísticas elementales	No se pueden efectuar operaciones
Ordinal	1,2,3,4,5	Se pueden establecer órdenes. Más operaciones estadísticas	No se pueden efectuar operaciones Difícil de obtener en juicios subjetivos
Intervalo	1,2,3,4,5	Casi todas las operaciones estadísticas	No se pueden efectuar operaciones y establecer relaciones ya que el cero no es absoluto
Razón	1,2,3,4,5,6,7,8,9	Todas las operaciones matemáticas, y estadísticas	Difícil de obtener en campos sociales

Características para la construcción de escalas

A lo largo de su desarrollo las técnicas para desarrollar escalas no han seguido un patrón completamente uniforme; existen técnicas muy especificas que sólo funcionan para el ejemplo que fue objeto de estudio, por esta razón no existe un patrón general en su construcción. Sin embargo, en general pueden distinguirse dos clases de métodos: Los basados en observaciones manifiestas, o sea las técnicas en que los propios datos reflejan un contenido aparente, y las técnicas de datos latentes cuyo contenido informativo no es obvio o inmediato, si no que se encuentra intrínseco en la información obtenida y es necesario un análisis para captar la característica deseada.

Antes de iniciar el diseño de escalas es recomendable adoptar un punto de vista amplio respecto al problema, y analizar algunas características esenciales, como las que se menciona a continuación:

1. ¿Existe un cero absoluto para el atributo a medir?

2. ¿Existen hipótesis basadas en experimentos u observaciones previas que indiquen el tipo de características que posee el atributo a medir, existe un orden, hay la propiedad de diferencias? Si la respuesta es afirmativa, entonces se diseñara una escala de intervalo. Si hay evidencia que demuestre la existencia de un cero absoluto entonces se deberá diseñar una escala de razón.

3. ¿La escala se basa en propiedades manifiestas o latentes?

4. ¿Existe consistencia en los datos?

5. ¿Que numerales se usarán para designar los atributos que posee un cierto objeto?

6. ¿Que tipo de propiedades a priori se ha considerado que poseen las respuestas, tanto las supuestas por el investigador como las propiedades de la escala obtenida al final del trabajo?. Esto es, posiblemente la persona que evalúa proporcione valores ordinales, sin embargo, el investigador planeara inferir, considerando otras hipótesis, una escala de razón latente, pero finalmente solo es posible modelar las propiedades usando una escala de razón. Precisamente cuando se tiene que las cualidades de las respuestas son congruentes, entonces se tiene una escala basada en propiedades manifiestas de los datos.

7. Quizá sea necesario considerar otros aspectos particulares, como facilitar el procesamiento electrónico, los cuales deberá considerar el investigador

CAPÍTULO DOS: DECISIONES MULTICRITERIO

En este capítulo se hace el enfoque de la toma de decisiones multicriterio, se analizan las fases de un problema de decisión, los objetivos de la TDMC, así como la clasificación de los principales y más representativos modelos matemáticos que solucionan problemas de decisión multicriterio, se exponen la Teoría de Utilidad, las Relaciones binarias de sobreclasificación, y los métodos derivados de relaciones de sobreclasificación: ELECTRE y el PROMETHEE

2.1 Enfoques en la toma de decisiones multicriterio

Si bien es cierto que dentro de las ciencias básicas, en ingeniería o la administración no existe un modelo para la toma de decisiones que contemple todas las áreas de la empresa y la idiosincrasia y personalidad de los empleados o de los propios competidores, (por lo que el director debe tomar las decisiones más relevantes), si existen técnicas para la resolución de problemas específicos, como modelos matemáticos que son capaces de aprovechar la experiencia de los empleados para generar la información que requiere y seleccionar la alternativa que mejor convenga al problema.

Así, una estructura participativa delegará responsabilidades con eficiencia en todas las direcciones, y cada empleado podrá hacer uso de su experiencia para proporcionar la información que un modelo específico necesita para obtener la mejor estrategia. De esta manera, la decisión más importante no recaerá totalmente sobre los hombros y experiencia de un solo hombre: el director.

Cuando el sistema del cual se va a tomar una decisión involucra variables aleatorias, entonces a la mente humana le representa mayor dificultad en el acto de decidir. La mente como amalgamador de toda clase de sentimientos, intuición, raciocinio, usualmente viola el principio de decisiones racionales cuando el sistema acerca del cual efectúa una decisión involucra incertidumbre.

Se puede decir entonces que no sólo la complejidad en los elementos que componen el sistema, sino también la aleatoriedad del mismo son factores que dificultan las decisiones. Estos factores también son la causa de que, al iniciar un análisis y configurar la estructura del conjunto de alternativas se observen tantas variables, distribuciones de probabilidad y funciones de utilidad para determinar que se decida no usar técnica alguna del análisis de decisiones, o comenzar a agregar variables con objeto de reducir la complejidad del mismo y hacerlo más tratable matemáticamente.

Los defensores de la teoría de decisiones han hecho críticas a esta teoría argumentando que se han obtenido relaciones tan sutiles como el dolor o incapacidad, pero cuando el sistema involucra muchas variables, el proceso de agregación tiende a desaparecer no sólo la influencia de estas variables sutiles sino también de las muchas otras que no podrían considerarse en forma aislada. En esta situación el analista enfrenta una situación de problemática que será objeto de su estudio y decisión, a saber: tener el conjunto de alternativas y/o consecuencias reducido a un número tal que el problema sea manejable, sencillo y claro para el decisor, o aumentar su grado de complejidad con objeto de no perder variables sutiles que puedan ser importantes para que el problema no pierda sus características globales.

Desde la década de los setentas ha habido un incremento consciente de la necesidad de identificar y considerar simultáneamente varios objetivos en el análisis y solución de algunos problemas. Los problemas que, por su naturaleza o diseño, pueden admitir un número finito de alternativas de solución se estructuran, en teoría de decisiones mediante las siguientes categorías de conceptos.

- Un espacio o conjunto de alternativas, generalmente finito, invariante y desordenado; en donde se definen los objetivos y/o metas.

- Una familia de criterios, o atributos, o puntos de vista de evaluación. Representan los enfoques bajo los cuales se juzgan las alternativas.

- Escalas de ordenación parcial de alternativas, representadas por la matriz de pagos o de impactos, las cuales resumen las distintas evaluaciones de las alternativas por cada criterio. Esta matriz es un tablero de doble entrada: alternativas y criterios, y en su interior, se encuentran las evaluaciones.

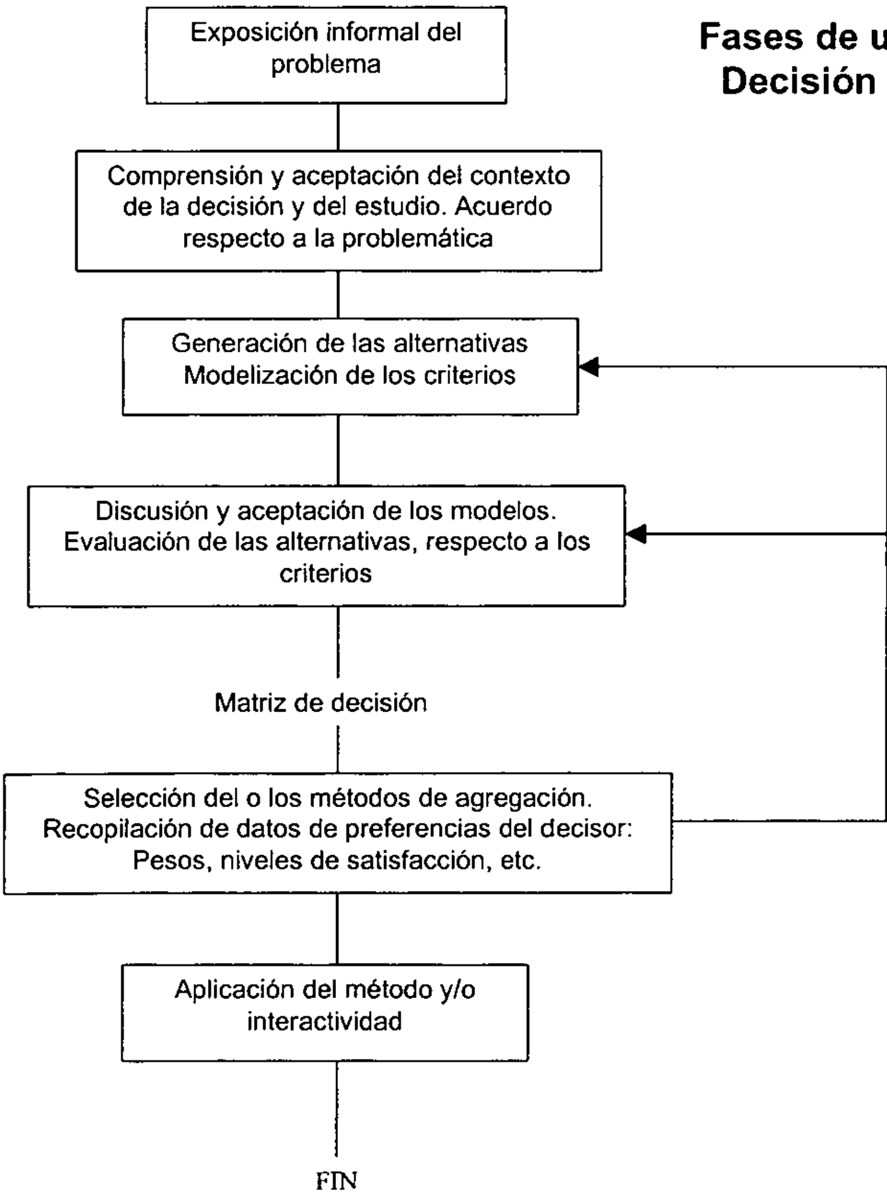
- Una metodología de preferencias en una síntesis global, o clasificación, o jerarquía, que constituye el resultado final del análisis.

- Un proceso de decisión en el cual se desarrolla la competencia de los grupos de interés (actores) que participan en el mismo. Entre estos grupos, tres actores tienen un papel fundamental: El analista como persona diferente del decisor, lo cual significa, en este caso que el decisor desempeña ambas funciones.

Diferentes escuelas intentan resolver el problema de la síntesis y la jerarquización a la luz de todos los atributos. A pesar de esta diversidad, se distinguen los siguientes enfoques de aplicación de la ayuda decisional multicriterio

La figura A recoge las principales fases de un proceso de Toma de decisión multicriterio. El analista se halla presente en todas ellas. El decisor (o actores en conflicto) también intervienen prácticamente en todo momento, sea para permitir la recopilación de la información, sea para validar el trabajo analista. En cuanto al mandante, si es otro decisor, está implicado sobre todo en las dos primeras fases y en el resultado final(recomendaciones y estudio de viabilidad)

Fases de un proceso de Decisión Multicriterio



2.2 Objetivos de la TDMC

Los métodos en TDMC han sido diseñados para designar una alternativa preferente, clasificar las alternativas en un pequeño número de categorías, y/o categorizar las alternativas en un orden subjetivo de preferencias. Con el fin de mejorar la satisfacción en el proceso de decisión, la TDMC lleva a enmarcar los problemas decisión y a formular el contexto explicito. Después, la TDMC estructura el problema ya que los decisores solicitan enlistar las alternativas y el criterio y también a grabar el desempeño de las alternativas debajo de cada uno de los criterios, ya sea de manera física, en términos monetarios o verbales. Este paso en si, es en donde se visualizan de manera completa las trampas en las decisiones. Es frecuente sentir la contribución más importante de la TDMC cuando sé inventariza de manera sistemática una reseña global de las posibles opciones y sus consecuencias. Mas aún, la TDMC ayuda a los decisores en la formulación de los criterios porque este muestra las prioridades y valores los cuales pueden estar profundamente enterrados en su mente. De hecho, esto hace que el criterio operacional además apoye a los decisores en la evaluación de las alternativas porque esto muestra los valores subjetivos del desempeño de las alternativas con el contexto del problema de decisión. Finalmente, la TDMC elimina o revela los objetivos ocultos de los miembros de un grupo y esto reduce los efectos de ciertas técnicas de discusión. Reduce el rol dominante de los miembros con fuertes habilidades verbales, por ejemplo, la mayoría silenciosa tiene una oportunidad de proponer y sopesar los pros y contras de las alternativas e integrar juicios en el proceso de decisión. En breve la TDMC enriquece la comunicación en el grupo decisor.

El mejoramiento de la calidad de la decisión en sí. La TDMC permite a los decisores él fragmentar un problema de decisión en porciones manejables y expresar detalladamente juicio. Los decisores no están fácilmente analizando la realización de algunas alternativas en uno o dos criterios solamente, además ellos mantienen vigilando el desempeño de todas las alternativas debajo de todos los criterios simultáneamente. Por otra parte, la TDMC, puede sugerir una solución comprometida en un grupo de decisores. Posiblemente después de varios encuentros de discusión convendría considerar las relativas jerarquías de decisión de los miembros del grupo. Normalmente los decisores necesitan varios eventos de discusión para aceptar la alternativa propuesta.

Incrementar la productividad de los decisores: Mas decisiones por unidad de tiempo, ambos en la administración industrial y la administración publica. Este objetivo es bastante importante en la agenda de los decisores quienes están repetidamente involucrados en procedimientos para evaluar el desempeño del personal. , Desarrollando proyectos, y propuestas de investigación. El criterio y las alternativas son bastante similares, desde una sección, hasta la otra, la TDMC puede ser vista para ahorrar tiempo y energía. La TDMC tiene algunas desventajas, ya que introduce un estilo formal de trabajar, posiblemente en cooperación con un analista y un facilitador usando una computadora, o red de computadoras. Esto constituye una carga extra para un decisor, y particularmente para el líder de un grupo de decisores.

2.3 Clasificación de modelos multicriterios analíticos

- Modelos de programación matemática multiobjetivo
  - Programación por metas
  - Programación entera de metas
- Métodos de compasión por pares (Técnicas SMART: **S**imple **M**ulti-**A**tribute **R**ating **T**echnique
  - Proceso de Análisis Jerárquico (PAJ)
  - Método Rembrandt
  - Modelo de Leontief
- Técnicas de Simulación
- Modelos multicriterios basados en funciones de utilidad
  - Método UTA
- Modelos basados en relaciones de sobreclasificación:
  - Método ELECTRE
  - Método PROMETHEE (varias versiones)
- Modelos basados en la preferencia de un decisor sobre un conjunto de alternativas, en relación de una sobre otra, y se crea una escala cardinal
  - Método MACHBETH

Principales paquetes informáticos para la decisión multicriterio discreta

- DECISION PAD
- PROMCALC
- EXPERT CHOICE
- MICROQUALIFEX
- DEFINITE

2.4 Teoría de Utilidad

La función de utilidad es una función general que involucra aspectos personales del decisor, características propias que podrán tomar en cuenta aspectos que el decisor capta en el medio ambiente, su experiencia propia, su cultura, su estilo de vida. Todo esto influye en el decisor al responder a las preguntas necesarias para diseñar su función de utilidad. De esto se sabe si el decisor tiene aversión al riesgo, propensión o indiferencia a éste.

En esta técnica la labor fuerte recae en el decisor, el cual debe de dar una gran cantidad de evaluaciones personales para determinar las funciones necesarias. Además, debe comprender con claridad el concepto de probabilidad de ocurrencia de un evento el cual le explicará el analista que conduce el proceso. Una vez obtenida esta información el trabajo para obtener la mejor estrategia, ya que asociada a cada una de las *n* alternativas.

Se define como *lotería* al proceso en el cual se presenta la consecuencia x_1 con probabilidad de ocurrencia p y el evento x_2 con probabilidad $(1-p)$ y se denota por

$<x_1, p, x_2>$ ó $L(x_1, x_2; p, 1-p)$. En general, si se tienen n eventos x_i con probabilidad de ocurrencia p_i, se le denota por $<x_i, p_i>$.

La función de utilidad se normaliza en la forma $u(x^*)=1$, $u(x^0)=0$, por ejemplo, en el que x^* denota la mejor consecuencia y x^0 la peor. Se procede después a encontrar otro punto x^1 tal que la utilidad que produzca sea igual al valor esperado de la mencionada lotería.

Escrito en esta forma de ecuación, el punto x^1, adicional a los puntos x^* y x^0 en la curva de utilidad debe satisfacer la ecuación de consistencia:

$$u(x^1) = pu(x^*) + (1-p)u(x^0) \qquad (2.1)$$

A medida que se avanza obteniendo a más puntos de la curva de utilidad, se va efectuando comprobaciones de consistencia como lo que se tiene en la ecuación A. Por ejemplo, si se tienen los puntos x_1, x_2, y x_3 en orden ascendente de preferencia y x_2 es indiferente a la lotería $< x_3, p, x_1>$, entonces por consistencia p debe ser un valor tal que:

$$u(x_2) = pu(x_3) + (1-p)u(x_1) \qquad (2.2)$$

o sea,

$$p = \frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_1)} \qquad (2.3)$$

Otro concepto importante en el análisis de decisiones es el de la actitud de las personas hacia el riesgo. Para la persona que tiene aversión al riesgo tiene más utilidad el valor que proporciona la media de la lotería obtenido en forma segura, que la utilidad esperada, es decir

$$u[E(\tilde{x})] > E[u(\tilde{x})] \qquad (2.4)$$

Cuando el problema probabilístico, entonces la utilidad esperada $E[u(\tilde{x})]$ constituye la función adecuada a maximizar. Si el sentido de la desigualdad para una persona se invierte en la ecuación 2.4, entonces se dice que ésta es propensa al riesgo y cuando se convierte en igualdad entonces es neutral al riesgo.

Caso multidimensional

La situación más real es aquella en la que no se persigue un solo objetivo sino varios. Esto implica desde el aspecto teórico de la función de utilidad que su argumento ya no será únicamente x, sino tantas variaciones como objetivos tenga el problema.

Por lo tanto la función de utilidad tomará la forma $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Desde el punto de vista práctico significa una cantidad enorme de datos que tendrá que proporcionar el decisor para poder determinar su forma. En realidad no se sabe cuál es la forma de su ecuación y lo único que se sabe, cual es la forma de su ecuación y ciertos valores puntuales que da el decisor.

De tal manera, el caso general en el cual existe interdependencia entre los objetivos es prácticamente imposible de manejar. Sin embargo, cuando se presume que existe una independencia mutua entre cada uno de los atributos, y el valor de cualquier de ellos no influye en los demás, entonces es posible crear una función de utilidad global $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en términos de funciones de utilidad marginales $u_i(x_i)$ i= 1, 2, ..., n.

En tal caso la función de utilidad global u podría expresarse en la forma:

$$u(x_1, x_2, \ldots x_n) = k_1 u_1(x_1) + k_2 u_2(x_2) + \cdots k_n u_n(x_n)$$

U otra manera simple que puede darse en términos de las $u_i(x_i)$.

Esta situación implica la determinación experimental de sólo n funciones de utilidad de una sola variable $u_i(x_i)$. Para alcanzar la solución de un problema de utilidad n dimensional será necesario generar la función de distribución del impacto que una alternativa produce en las n objetivos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, para evaluar así la utilidad promedio. Recuerde que el valor promedio se obtiene

$$\begin{aligned} u(x_1 x_2, \ldots, x_n) &= E[u(x_1, x_2, \ldots x_n)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, \ldots x_n) f(x_1, x_2, \ldots x_n) dx_1 \ldots dx_n \end{aligned}$$

La complejidad para obtener f es de la misma magnitud o aún mayor que la correspondiente a la f^n de utilidad. Sin embargo, si los atributos u objetivos x_i son independientes probabilísticamente, entonces se obtiene

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$$

En donde $f_i(x_i)$ es una función de distribución marginal que sólo depende de una variable (x_i.)

2.5 Relaciones binarias de sobreclasificación

Las relaciones binarias de sobreclasificación se basan en construir una relación binaria a partir de la comparación de pares de alternativas conforme a las relaciones binarias *(P, Q, R, o I)* y a la explotación de éstas para construir un ordenamiento, en este enfoque las escalas de cada criterio se respetan, pudiendo no ser del mismo tipo, por ejemplo unas pueden ser ordinales y otras cardinales.

Sea *A* un conjunto de alternativas y *F* un conjunto de *n* criterios. A cada criterio g_j se le asocia una *relación de sobreclasificación parcial* S_j. Ésta es una relación binaria tal que aS_jb se verifica sí y sólo sí "respecto al *j*-ésimo criterio, a es al menos tan buena como b".

La relación de sobreclasificación S_j se escribe en términos de un umbral de indiferencia q_j asociado con g_j, es decir

$$aS_jb \Leftrightarrow g_j(a) \geq g_j(b) - q_j$$

Una *relación de sobreclasificación S* es una relación binaria, tal que aSb se verifica si lo valores $g(a)$ y $g(b)$ proporcionan argumentos suficientes para admitir la afirmación: "a es al menos tan bueno como b con respecto a los n criterios", y no existen razones importantes para refutar esta afirmación. (Roy, B., 1989).

Propiedades de las relaciones de sobreclasificación

Considérese las n relaciones de sobreclasificación parciales S_j asociadas a los n criterios del conjunto F y una relación binaria S que agregue a estos criterios. Se supone que S verifica las siguientes propiedades:

a) S es reflexiva. Observe que
- aSb y $\neg bSa$ no se puede interpretar como "a se prefiere estrictamente a b".
- S no es necesariamente una relación transitiva.

b) Para cualesquiera alternativas a, b y c, S verifica que

$$aSb \wedge bD_Fc \Rightarrow aSc$$
$$aD_Fb \wedge bSc \Rightarrow aSc$$

Donde D_F es la relación de dominancia definida por

$$aD_Fb \Leftrightarrow g_j(a) \geq g_j(b) \quad \forall j \in F$$

Por lo tanto se tiene $aD_F b \Rightarrow aSb$

c) Finalmente, si $g_j(a) = g_j(b) \quad \forall j \neq k$ entonces $aSb \Leftrightarrow aS_k b$
Esta condición puede ser planteada como sigue

si $aI_j b \quad \forall j \neq k$, entonces $aSb \Leftrightarrow aS_k b$

$$aS_j b \quad \forall j \in F \Rightarrow aSb$$

La expresión formal y la naturaleza de las condiciones que deben ser satisfechas para validar la afirmación aSb son influenciadas por muchos factores, tales como:

- El grado de significación de los criterios considerados en F.

- La naturaleza de conceptos básicos usados: concordancia, discordancia, tasa de sustitución, intensidad de preferencia, etc.

- La naturaleza de la información requerida entre criterios.

- La fuerza de los argumentos requeridos, por ejemplo: hablar de la alternativa más fuerte, digamos "a", se puede imaginar que "a domina a b", sin embargo, el concepto de sobreclasificación es más interesante porque argumentos débiles pueden ser suficientes para considerar la relación dada, esto es porque la relación binaria S es más rica que D.

Dependiendo del grado de fuerza de los argumentos que justifican la relación de sobreclasificación S, se tienen dos tipos de modelado: con relaciones de ordenamiento robustas y con relaciones de ordenamiento borrosas

2.6 Métodos de relaciones de sobreclasificación

Los métodos de sobreclasificación giran alrededor del concepto teórico de relaciones de sobreclasificación dado a la luz por un grupo de investigadores franceses a mediados de los años 60. Entre tales investigadores destaca Bernard Roy, uno de los cuatores del ya mítico método ELECTRE, maestro de toda una generación de estudiosos de la decisión multicriterio y autoridad mundialmente reconocida en este campo.

Desde entonces han aparecido un gran número de variantes y de métodos conexos, propuestos y aplicados principalmente por estudiosos y profesionales europeos. Por tanto, es frecuente encontrarse con la denominación de " escuela europea de la decisión multicriterio", en contraposición a la llamada escuela americana, más orientada hacia los métodos de utilidad multiatributo. ,

Conceptos intuitivos

Los métodos de sobreclasificación utilizan como mecanismo básico el de las comparaciones binarias de alternativas. Es decir, sistémicas comparaciones dos a dos de las alternativas, criterio por criterio.

De esta manera, se puede construir un coeficiente de concordancia C_{IK} asociado a cada par de alternativas (a_i, a_k). Hay muchas formas de hacerlo, pero para ilustrar la idea se describe una muy sencilla aunque bastante utilizada. Así C_{IK} puede definirse como la suma de los pesos de los criterios en los que la alternativa a_i es mejor o igual que la a_K. De esta forma al calcular C_{IK} para todos los pares de alternativas de A se obtiene una matriz de concordancia $C = \{C_{IK}\}$ de dimensión mxm, la cual puede utilizarse de diferentes maneras según las diversas variantes de los métodos.

Los métodos de sobreclasificación utilizan el concepto de concordancia recién expuesto, pero complementándolo con el muy análogo de discordancia, dotando así de estructura cuantitativa a la siguiente frase:<< Cuando una alternativa a es al menos tan buena como otra b en una "mayoría" de los criterios, y no hay ningún criterio en el que a sea "notoriamente" inferior a b, se puede afirmar sin riesgo que a sobreclasifica a b >> Lo cual se denota por aSb.

El precio a pagar por construir esta relación es el de una cierta subjetividad inherente a las diferentes posibilidades de cuantificar las partes entre comilladas de la frase anterior. De ahí, las diversas variantes y las acusaciones de recetas que estos métodos a veces han tenido. Las ideas anteriores pueden ilustrarse con un ejemplo:

Considere un problema con 4 alternativas y 3 criterios a maximizar.

Criterios

Alternativas	1	2	3
a	90	10	100
b	100	0	100
c	90	100	90
d	50	50	100

Suponga que los criterios son igualmente importantes por lo que todos los pesos w_j son iguales a 1. Las evaluaciones están ya normalizadas en una misma escala para todos los criterios [0,100], por conveniencia.

Puede almacenarse, comparando las alternativas a y b, que a sobreclasifica a b (aSb). Es fácil comprobar que (bSa). Como asimismo que (cSa). Sin embargo, es muy posible que ya no se acepte (cSa). Aunque evidentemente esta apreciación podrá alternarse si el supuesto de pesos iguales cambiase.

Observe también que se puede rechazar que bSd, por lo que no pueden comparar las dos alternativas b y d.

Así mismo, se puede observar que aun cuando, se cumplen cSa y aSb, no ocurre sin embargo que cSb. Por lo que la intransitividad puede ser que se tenga en las relaciones binarias de sobreclasificación. En el ejemplo anterior se muestra que una relación de superación depende en gran medida de los valores de los pesos w_j y de los umbrales de indiferencia q_j de los criterios.

2.7 Elementos para una formalización

Se utilizará el concepto de pseudocriterio a fin de situarse en un marco muy general en el que el decisor muestra sus preferencias entre las alternativas. Para cada criterio j, donde j=1,2,. . ., n se define el umbral de *indiferencia* q_j el umbral de preferencia p_j y se supondrá que $p_j > q_j$.

Estos umbrales servirán para comprar las evaluaciones $g_i(a)$ y $g_j(b)$ de las alternativas a y b, según el criterio j.

De esta forma, y siempre respecto al criterio j, se define la relación de preferencia $\succ_j$ de la manera siguiente:

$$a \succ_j \Leftrightarrow g_j(a) > g_j(b) + p_j$$

La relación de indiferencia $\approx_j$ se define:

$$a \approx_j b \Leftrightarrow g_j(b) - q_j < g_j(a) < g_j(b) + q_j$$

$$|g_j(a) - g_j(b)| < q_j$$

Se puede definir la relación de sobreclasificación S_j asociado al criterio j, como lo que recoge todas las posibilidades de que a *no sea estrictamente peor que* b
(a es tan buena como b) $a\,S_j b \Leftrightarrow g_j(a) > g_j(b) - q_j$

Por cada par de alternativas (a, b), se define el conjunto de criterios $C(a, b)$ tales que a sea al menos tan buena como b, o que "a no sea estrictamente peor que b"

2.8 Método ELECTRE

Comprende la parte más actualizada para tomar decisiones utilizando las relaciones binarias de sobreclasificación. Este método en Francés (**EL**imination **Et** **Ch**oix **T**raduisant la **RE**alité), cuya traducción puede ser "ayuda a la decisión multicriterio" es bien conocido en toda Europa. En este estudio los problemas no se resuelven cambiando al decisor por un modelo sino ayudándolo a formar su solución describiendo sus posibilidades.

Desde su primera versión ELECTRE I (Roy, 1968) se suceden las siguientes versiones:

VERSIÓN ELECTRE	REFERENCIA BÁSICA	TIPO DE PROBLEMA
I	Roy 1968	selección
II	Roy y Bertier 1973	selección
III	Roy 1978	selección
IV	Roy y Hugonnard 1982	selección
IS	Roy y Skalka 1985	selección

El concepto de *pesos* en el método ELECTRE debe entenderse como una medida de la importancia que para el decisor tiene este criterio, pero en absoluto como una tasa de sustitución, ya que las evaluaciones de cada alternativa en los diferentes criterios no se componen en una evaluación global.

Los métodos ELECTRE, por tanto, no son compensatorios en el sentido de los métodos de ponderación lineal. Pero como si utilizan la información de los pesos a fin de construir los coeficientes de concordancia y discordancia, se catalogan como métodos parcialmente compensatorios.

El proceso se desarrolla en dos partes con respecto al problema en cuestión, donde la primera se construye una relación de sobreclasificación sobre el conjunto de decisiones, la cual modela sólo la parte segura de las preferencias del decisor según cada criterio y la información disponible y en la segunda toma dicha relación para resolver el problema de toma de decisiones.

2.9 Método PROMETHEE

Los métodos PROMETHEE (**P**reference **R**anking **O**rganization **M**ethod for **E**nrichment **E**valuations) forman parte de los llamados métodos de sobreclasificación, que constan principalmente de dos fases:

a) La construcción de una relación de sobreclasificación
b) La explotación de esta relación para asistir al decisor (Brans y Vincke 1985)

Este método se basa principalmente en extensiones de la noción de criterio, que el decisor puede construir fácilmente. Se utilizan generalmente para resolver problemas de ordenamiento. Los métodos PROMETHEE incluyen los siguientes pasos:

1. Enriquecimiento de la estructura de preferencia. Este es el paso más importante, ya que se introduce la noción de criterio generalizado para tomar en cuenta las amplitudes de las desviaciones entre las evaluaciones.

2. Enriquecimiento de la relación de dominancia. Se construye una relación valuada de sobreclasificación, que toma en cuneta todos los criterios. Para cada par de alternativas, se obtiene el grado de preferencia de una alternativa sobre otra.

3. Explotación para la ayuda a la decisión. El enfoque PROMETHEE ofrece principalmente cuatro posibilidades para resolver un problema de decisión. PROMETHEE I da un orden parcial que considera todas las posibles incomparabilidades entre las alternativas; PROMETHEE II da un orden complejo; las versiones II y IV de los métodos PROMETHEE son extensiones de los anteriores (I y II respectivamente); PROMETHEE V es útil para resolver restricciones y da un ordenamiento como el de PROMETHEE II; Por otro lado, PROMETHEE VI da al decisor alguna información adicional acerca del problema multicriterio al que se enfrenta (Brans y Mareschal 1994a, 1994b, 1997).

Los métodos PROMETHEE requieren que se asocie un criterio generalizado a cada criterio f_j, $(j=1, \ldots, k)$. Se proponen 6 tipos de criterios generalizados que cubren la mayoría de los casos que ocurren en las aplicaciones prácticas. Para cada criterio, sólo se tienen que identificar pocos parámetros (máximo 2). (ver tabla 1).

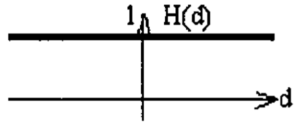
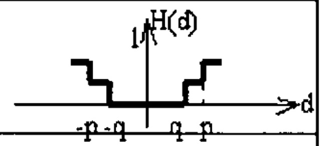
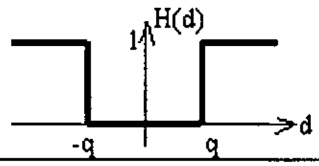
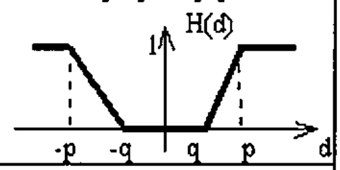
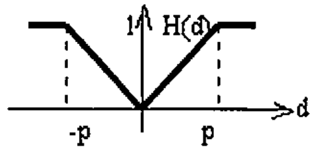
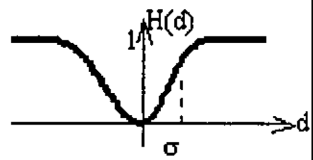
TIPO	PREFERENCIA	TIPO	PREFERENCIA
I criterio usual		IV criterio de nivel	
II cuasi-criterio		V criterio con preferencia lineal y área de indiferencia	
III criterio con preferencia lineal		VI criterio Gaussiano	

Tabla 1. Los seis tipos de criterios

La función *H* se define de la siguiente manera:

$$H(a,b)=\begin{cases}P(a,b) & si\ f(a)\geq f(b)\\ P(b,a) & si\ f(a)<f(b)\end{cases}$$

Para algún criterio dado. Dado P_j y w_j para cada criterio f_j, el índice de preferencia $\pi : A\times A \rightarrow [0,1]$ se define como:

$$\pi(a,b)=\frac{\sum_{j=1}^{k} w_j P_j(a,b)}{\sum_{j=1}^{k} w_j}$$

$\pi(a, b)$ representa la intensidad de preferencia del decisor de la alternativa a sobre la alternativa b, al considerar simultáneamente todos los criterios. Este índice define una relación valuada de sobreclasificación sobre A. Entonces se define para cada $a \in A$: *El flujo saliente* (o flujo positivo de sobreclasificación) como:

$$\Phi^{+}(a)=\frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\pi(a,b)$$

Expresa qué tanto sobreclasifica una alternativa a las otras. *El flujo entrante* (o flujo negativo de sobreclasificación) como:

$$\Phi^{-}(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(b,a)$$

Expresa qué tanto está sobreclasificada una alternativa por las demás. *El flujo neto* de sobreclasificación, definido como:

$$\Phi(a) = \Phi^{+}(a) - \Phi^{-}(a)$$

Que es el balance entre los flujos positivo y negativo.

PROMETHEE I considera la intersección de los flujos negativo y positivo para obtener un orden parcial de las alternativas. La mejor alternativa será la que tiene el valor más grande de ϕ^{+} y el valor más pequeño de ϕ^{-}. Bajo este enfoque se permiten posibles incomparabilidades entre las alternativas.

Por otro lado, PROMETHEE II da un orden completo de las alternativas, la mejor alternativa será la que tenga el flujo neto mayor. Aquí todas las alternativas son comparables, se ha perdido parte importante de la información al considerar la diferencia entre los flujos positivo y negativo. Ambos enfoques se pueden complementar para ayudar al decisor a tomar su decisión final.

Los métodos PROMETHEE se apoyan en una herramienta interactiva de modelación visual denominada plano GAIA (**G**eometrical **A**nalysis for **I**nteractive **A**id), que complementa a los métodos de una manera gráfica y más bien descriptiva, por lo que es posible hacer un análisis de sensibilidad visual, que se basa en la modificación de los pesos y se recomienda hacerlo antes de finalizar el proceso de decisión.

Por otro lado, la introducción de relaciones de preferencia basadas en los conjuntos borrosos, que consideran el grado de preferencia y las intensidades de preferencia de una alternativa sobre otra, enriquecen la información que se obtiene a lo largo del proceso de decisión y amplían la estructura de preferencias, admitiendo la posibilidad de que existan incomparabilidades entre las alternativas.

CAPITULO TRES: COMPARACIÓN Y ESTUDIO DE LOS MÉTODOS PAJ Y REMBRANDT

En la primera parte de este capítulo se comparan los métodos PAJ y Rembrandt, destacándose las ventajas y desventajas de cada uno, el manejo de las escalas y los alcances de cada uno, después se describen en detalle al método Análisis Jerárquico el cual permite realizar decisiones considerando los sentimientos y prejuicios que se tiene sobre las variables que se consideran en la toma de decisión. Cuando se realiza una jerarquía de la problemática, deben incluirse detalles relevantes y dejen ver al problema como un todo, considerando las condiciones del problema, identificar sus atributos que nos puedan llevar a la solución.

Este proceso de reordenamiento de metas, atributos, supuestos e implicaciones de la jerarquía, da una visión general del problema con sus relaciones complejas inherentes y permite a los decisores valorar si las personas comparan supuestos del mismo orden de magnitud. Se estudia también el PAJ original y las dos clases que se derivan, el aditivo y el multiplicativo; también se explica el vector característico de Perron-Frobenius y por último se expone además el método Rembrandt, indicando las propuestas y mejoras que hace sobre el PAJ y el perfil del método..

3.1 Proceso de Análisis Jerárquico *versus* REMBRANDT

El proceso de análisis jerárquico PAJ ha probado ser una técnica popular para ayudar en problemas de selección de criterios múltiples.

De cualquier manera ha habido un número de críticos de la técnica y una cantidad de problemas bien identificados en los que se invierte la jerarquía, se desvirtúa la agregación y se altera la escala.

Un grupo de investigadores de los países bajos, dirigido por el PhD. Freerk A. Lootsma, ha desarrollado un sistema que estima las razones en magnitudes o decibeles con el propósito de valorar alternativas que no son dominadas llamado método Rembrandt

Este sistema se creó para mejorar 3 defectos contenidos en el sistema PAJ.

1. La estimación directa es sobre una escala logarítmica la cual reemplaza la escala fundamental del 1 al 9 presentada por Saaty.

ESCALA PAJ Y SU CORRESPONDIENTE ESCALA REMBRANDT

Descripción Verbal	Radio de Saaty	Rembrandt δ(jk)
Muy fuerte preferencia por el objeto "k".	1/9	-8
Fuerte preferencia por el objeto "k".	1/7	-6
Preferencia por el objeto "k".	1/5	-4
Débil preferencia por el objeto "k".	1/3	-2
Indiferencia	1	0
Débil preferencia por el objeto "j".	3	+2
Preferencia por el objeto "j".	5	+4
Fuerte preferencia por el objeto "j".	7	+6
Muy fuerte preferencia por el objeto "j".	9	+8

2. El método Perron-Frobenius para el cálculo de pesos, es reemplazado por una método geométrico que evita que se originen potenciales desordenes en la clasificación.

3. La agrupación de resultados por medios aritméticos es remplazada por resultados alternativos que son valuados por la influencia de pesos obtenidos por el análisis de elementos jerárquicos.

El propósito de este estudio es examinar comparativamente el sistema REMBRANDT con el sistema PAJ sobre un grupo de problemas de decisión multicriterio. La entrada de datos para ambos sistemas es idéntica con la excepción de que la escala verbal dada en el apéndice tiene diferentes valores numéricos asignados. Se puede notar que ambos sistemas están bien acoplados para decisiones de grupo.

Hay un número de cuestionamientos acerca de las preferencias de grupo agregadas cuando se usa PAJ, pero un número de aproximaciones se han publicado y aparentan tener desarrollado el uso de la forma geométrica para agrupar estimaciones individuales.

Las diferencias entre los sistemas son más bien relativas y sus procesos de operación y de cálculo.

Primero, REMBRANDT reemplaza la escala de razón sugerida por Saaty con 2 escalas más amplias. Para este estudio, esta diferencia conduce a estimaciones individuales más divergentes entre el profesor 3 y 4 quienes permanecen en posiciones extremas. No hubo prácticamente diferencias entre el profesor 1 y 2. Los resultados de grupo también fueron más divergentes para REMBRANDT.

Comparando las escalas tenemos

Descripción	Radio de Saaty	Rembrandt
❑ Igual importancia. Indiferencia ❑ Mismo grado de preferencia	1	0
❑ Ligera importancia de una sobre de otra. ❑ Grado moderado de preferencia	3	2
❑ Esencial o fuerte importancia ❑ Un fuerte grado de preferencia	5	4
❑ Importancia demostrada ❑ Un grado muy fuerte de preferencia	7	6
❑ Importancia absoluta ❑ Un grado extremadamente fuerte de preferencia	9	8

Segundo, Hay una diferencia en los cálculos de los impactos. El uso de la forma geométrica en el análisis PAJ permitió una solución diferente que con el uso del medio aritmético. La clasificación de las 2 primeras alternativas fue invertida. Como es de esperarse en casos en los que la clasificación se invierte, las alternativas invertidas son muy cercanas a los resultados de ambos métodos. El sistema REMBRANDT permite el mismo orden de clasificación que PAJ cuando este ultimo utiliza un método geométrico en sus cálculos. Se da una ligera divergencia que puede ser explicada debido al uso de escala más amplias.

Tercero, Hay una diferencia en la agregación de resultados alternativos sobre el criterio. Mientras esto parece haber tenido una divergencia mayor en la medida del impacto total, el impacto relativo parece haber sido menor. La regla de agregación usada por REMBRANDT es apropiada porque tiene un sentido teórico. Considero que ambos, el PAJ y el REMBRANDT son herramientas efectivas para el auxilio en problemas de tomas de decisiones multicriterio de grupo.

REMBRANDT fue diseñado con decisiones de grupo en mente, los grupos pueden ser de hasta 250 miembros (un grupo de 1 también es permitido).

Los métodos tales como PAJ y REMBRANDT proporcionan un marco donde los individuos pueden expresar sus opiniones en elementos detallados de la decisión.

Estas opiniones individuales pueden ser fácilmente divididas para identificar las diferencias de opinión.

Si se usa la misma entrada de datos, la perspectiva de los usuarios muestra que no hay diferencias entre ambos métodos, sin embargo, desde la óptica del análisis matemático hay importantes diferencias técnicas entre REMBRANDT y PAJ las cuales se muestran a continuación.

1. **Diferentes escalas de razón**
2. **Cálculos alternativos para la medición de los impactos**
3. **Un procedimiento de agrupación distinto**

REMBRANDT fue diseñado para recomendar la misma decisión que recomendaría el sistema PAJ cuando se usan recursos geométricos en la agrupación, y una alternativa diferente cuando se usan recursos aritméticos en la agrupación.

3.2 ¿Qué es el Proceso de Análisis Jerárquico?

Descripción teórica del algoritmo

Es una teoría de medición que conviene en cuantificar o no, criterios intangibles que han encontrado ricas aplicaciones en la teoría de decisiones resolución de conflictos y en modelos del cerebro. Se basa en el principio de que, para realizar decisiones, la experiencia y el conocimiento de la gente es tomado en cuenta en los datos que usen. Las decisiones para PAJ se realizan en dos etapas:

El diseño de Jerarquías requiere de experiencia y conocimiento en el área. Dos decisores normalmente otorgarían diferentes jerarquías al mismo problema, de este modo la jerarquía no es la misma. Por otro lado aún cuando dos gentes diseñen la misma jerarquía, sus preferencias serán diferentes cursos de acción. Sin embargo, un grupo de personas pueden trabajar juntas y alcanzar un consenso en el diseño de la jerarquía y en los juicios y su evaluación. La fase de evaluación se basa en el concepto de comparación por pares. Los elementos en un nivel de la jerarquía son comparados en términos relativos a la importancia o contribución para un criterio de evaluación, que ocupa el nivel superior inmediato donde los elementos están siendo comparados. Este proceso de comparación produce una escala de medición de las prioridades o pesos de los elementos. Esto es, la escala mide el valor relativo de los elementos con respecto a un criterio independientemente de otro criterio o elemento que pueda ser usado en la comparación. Estos pesos relativos suman la unidad. Las comparaciones son realizadas por los elementos en un nivel con respecto a todos los elementos en el nivel superior. Los pesos finales de los elementos en el último nivel de la jerarquía son obtenidos sumando todas las contribuciones de los elementos en un nivel con respecto a todos los elementos en el nivel superior. Esto se conoce como el *Principio de la composición de la jerarquía*. Mientras que hay un número infinito de caminos para sintetizar los pesos de las alternativas y los pesos de los criterios, la regla de agregación aditiva de PAJ tiene la ventaja de ser entendida de manera intuitiva en el prorrateo de un todo en sus partes. Una característica útil del PAJ, es que puede ser usado para evaluar criterios intangibles junto con tangibles en radios de escalas. Además divide un problema en sus partes que lo forman y los relaciona de manera lógica, desde una forma entera, descendiendo en pasos graduales cada vez más pequeños y son entonces aptos para tener juicios y ser comparados por pares.

El PAJ es una herramienta poderosa que ha encontrado extensas e interesantes áreas de aplicación, que va desde lo simple, hasta complejas decisiones de inversiones. El éxito de este método es que es simple y robusto al mismo tiempo. Se basa en cuatro axiomas, los cuales son enunciados a continuación.

3.3 Axiomas que conforman al método PAJ

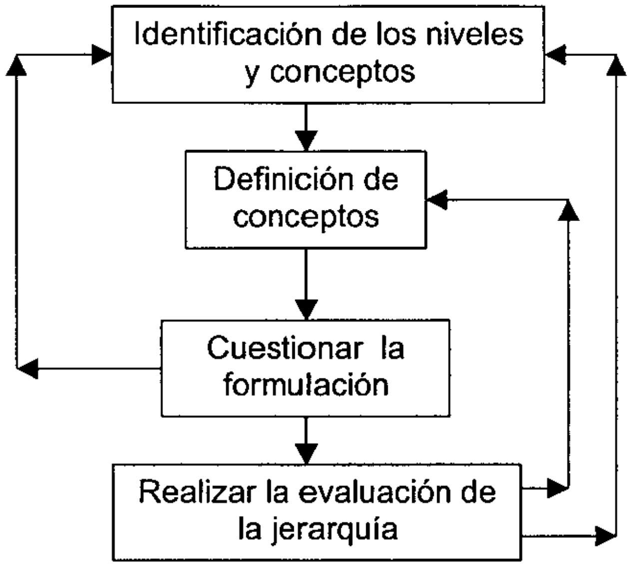
1. **Comparación recíproca**: El decisor deberá estar dispuesto a realizar las comparaciones y afirmar sus preferencias. Las intensidades de estas preferencias deben satisfacer la condición recíproca: Si A es x veces mas preferida que B, entonces B es $1/x$ veces más preferida que A.
2. **Homogeneidad:** Las preferencias son representadas en términos de escalas semejantes.
3. **Independencia:** Cuando se expresan preferencias, los criterios se asumen independientes de las propiedades de las alternativas.
4. **Expectativas:** Para el propósito de tomar decisiones, la estructura jerárquica se supone completa

Explicación de los axiomas:

El Axioma uno indica que la pregunta usada para obtener los juicios de las comparaciones por pares, no es clara o no correctamente enunciada. Si el axioma dos no se satisface, entonces los elementos que están siendo comparados no son homogéneos y serán necesarios formas grupos El axioma tres implica que los pesos de un criterio deben ser independientes de las alternativas consideradas. Un camino para convenir con la violación de este axioma es usar una generalización del PAJ conocida como el aprovechamiento de la súper matriz. Finalmente, si el axioma cuatro no se satisface, entonces el decisor no esta usando todos los criterios y/o todas las alternativas disponibles o necesarias para encontrar sus expectativas razonables y por lo tanto la decisión esta incompleta.

Diseño de la Jerarquía

Esta fase de la implementación del PAJ, involucra tres procesos interrelacionados no secuenciales: Nivel e identificación de elemento, definición de concepto, y realizar la formulación. En la siguiente figura:

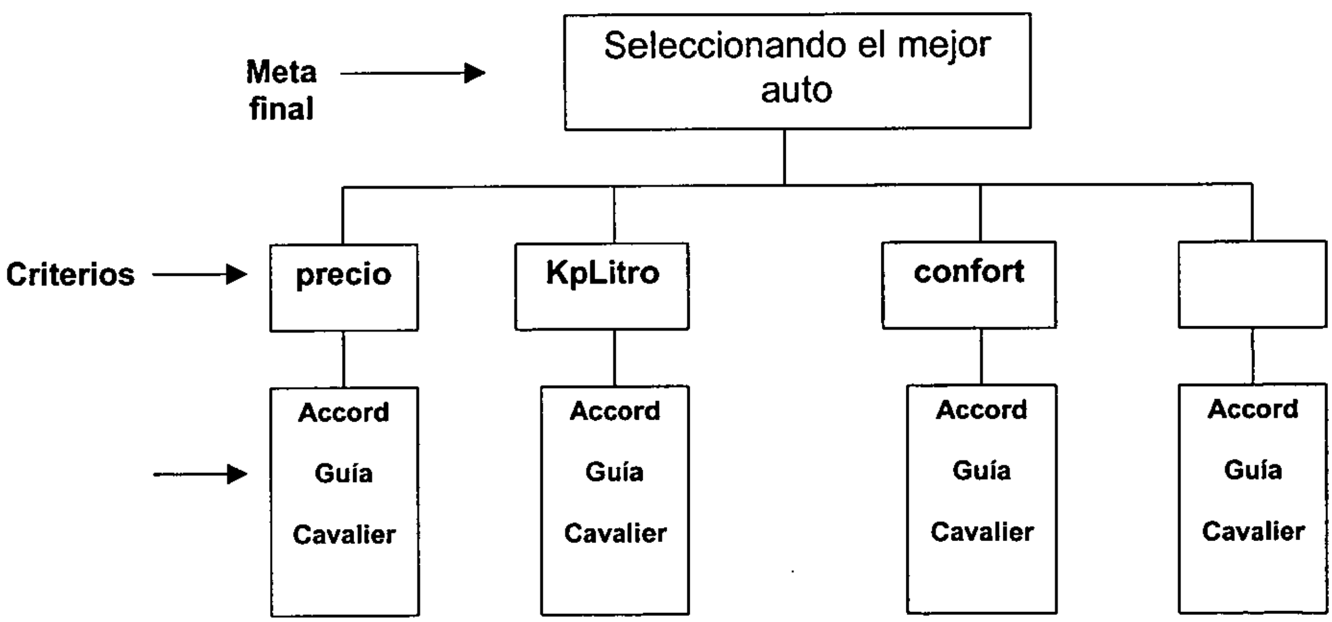


Se conjunta la relación entre estos tres componentes del diseño de jerarquías. En un primer paso los niveles y elementos (conceptos) dentro de los niveles son identificados. Estos son entonces identificados y usados en la fase de cuestionar la formulación, Si el decisor tiene problemas en contestar a las preguntas, entonces los niveles y elementos deberán ser revisados y modificados. El diseño de la jerarquía es un proceso iterativo donde los conceptos, las peguntas a ser contestadas y las respuestas asociadas con las preguntas, determinan los elementos y los niveles de la jerarquía. Las ambigüedades en el proceso de cuestionamiento pueden conducir al decisor a seleccionar el criterio equivocado o la alternativa incorrecta. Todas las preguntas deberán ser respondidas y consistentes con la información existente. Las jerarquías son una herramienta fundamental de la mente humana. Esto implica identificar los elementos que intervienen en un problema, formando grupos homogéneos con los elementos y rearreglando estos elementos en diferentes niveles. Las más simples son las lineales, que van de un nivel a otro, tal como pasa en la física, por ejemplo los átomos en moléculas, las moléculas en materia y así de forma sucesiva; los más complejos son las jerarquías de redes con elementos interactuantes tal como los sistemas que representas el proceso de aprendizaje en un niño.

3.4 Evaluación de la jerarquía; Juicios y síntesis

El próximo paso es la evaluación de jerarquías. Aquí el decisor lleva la información existente en la comparación por pares respondiendo a preguntas; Dando u criterio y dos alternativas ***A*** y ***B***, cual satisface más y ¿cuanto más?.Los resultados son una matriz de pares comparados. Este procedimiento es repetido para los elementos en un nivel con respecto a todos los elementos en el nivel superior. Las comparaciones por pares son utilizadas para estimar y la siguiente dimensión unidimensional en el cual los elementos en un nivel son medidos. Esto puede ser realizado usando el principal vector característico o eigenvector de la matriz de comparación por pares. Los axiomas teóricos son transparentes a este nivel. Si el decisor no puede proveer una respuesta, entonces la pregunta no es significativa de las alternativas y no puede darse la comparación. Comparabilidad significa que estos son homogéneos. Por ejemplo, no podríamos comparar a una ***roca con una estrella***, de acuerdo a los pesos,, porque el límite superior de la escala no es conocido por nosotros, y aún si tuviéramos una idea de la magnitud de la estrella, la comparación no podrá ser significativa. El I axioma dos limita el siguiente nivel de la escala. En la práctica, este nivel es solo un nivel de magnitud, por ejemplo 9. Si los elementos que están siendo comparados no pertenecen a un grupo homogéneo, pueden ser ordenados en diferentes grupos y comparados con elementos del mismo orden de magnitud. Las comparaciones entre grupos pueden ser realizadas compartiendo un elemento en común que le pertenece a su nivel. Finalmente, para medir las prioridades de elementos con varios niveles aparte, debemos propagar los pesos de los elementos de un nivel a todos los elementos en un nivel por debajo. Esto proceso realizado es parte del principio de composición jerárquica.

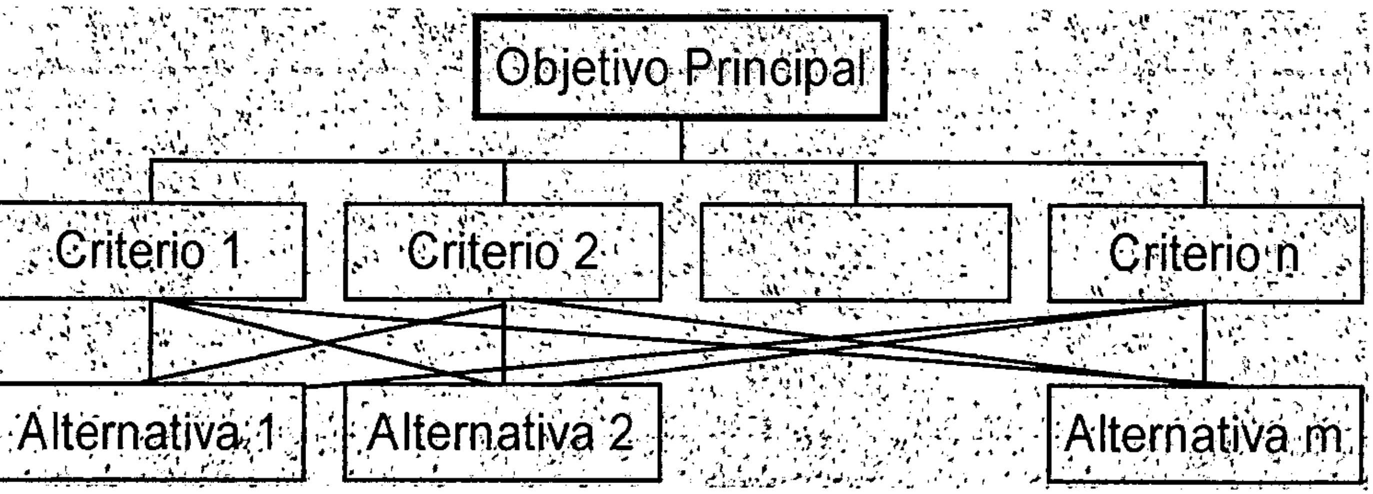
Veamos a continuación un ejemplo sobre el desarrollo de las jerarquías. Suponga que deseamos comprar un automóvil. En la siguiente figura:



Las **alternativas de decisión** formarán el nivel inferior de la jerarquía. Los **criterios** en términos de que las alternativas serán juzgadas generarán el segundo nivel que podría incluir: Precio, Kilómetros por litro, confort, y estilo. Las prioridades de estos criterios podrían juzgarse en términos de su contribución como **"satisfacción total"**. Una vez desarrollada la jerarquía no significa que esta sea la definitiva, pues puede variar con el propósito de incorporar nuevos criterios, que con anterioridad no habían sido considerados como importantes. Después de jerarquizar los criterios y se calculan las prioridades finales, podríamos aún tener cuestionamientos sobre la decisión final, en este caso puede acudirse de nuevo al PAJ para efectuar cambios en nuestros juicios acerca de la importancia relativa de los criterios. Con esto y si la alternativa que se tenía previamente aún no resulta ir bien, en las prioridades finales, podremos decir que esta sería la elección correcta. Regresando al problema; el decisor especifica los juicios acerca de la relativa importancia de cada uno en los cuatro criterios en términos de su contribución para la realización de la meta final. En el siguiente nivel, el decisor indica una preferencia para cada alternativa de decisión basada en cada uno de los criterios. Un proceso matemático es usado para sintetizar la información con la importancia relativa del criterio y las preferencias para las alternativas de decisión. En el problema de selección del automóvil, se usará las preferencias personales de Gabriela para proporcionar un rango de prioridades de los tres autos en términos de que también cada auto se acerca a la mejor selección del objetivo.

3.5 Estableciendo prioridades utilizando el PAJ

A continuación se usará la comparación por pares expresadas por el decisor, para establecer prioridades para los criterios y prioridades para las alternativas de decisión basadas en cada criterio. Observe el siguiente diagrama:



A continuación se observa como el PAJ determina prioridades para cada uno de las siguientes preguntas.

1. Como los cuatro criterios contribuyen en la selección final del mejor auto
2. Como los tres autos se comparan usando el criterio de Precio
3. Como los tres autos se comparan usando el criterio de KpLitro
4. Como los tres autos se comparan usando el criterio de confort
5. Como los tres autos se comparan usando el criterio de estilo

A continuación se verá como se establece prioridades para los cuatro criterios en términos de cómo cada uno contribuye a la meta final. La comparación por pares constituye los fundamentos del PAJ. En establecer las prioridades para los cuatro criterios, El PAJ requerirá que Gabriela establezca que tan importante es cada criterio con respecto a los demás criterios: (Precio, KpLitro, confort y estilo. Gabriela tendrá que establecer las siguientes comparaciones por pares:

- Precio comparado con KpLitro
- Precio comparado con confort
- Precio comparado con estilo
- KpLitro comparado con confort
- KpLitro comparado con estilo
- Confort comparado con estilo

De esta manera quedan todos comparados con todos.. En cada una, Gabriela debe seleccionar él más importante criterio y después expresar un juicio de que tanto es más importante que el criterio KpLitro. Para medir que tanto es más importante el precio comparado con el KpLitro, el PAJ utiliza una escala con valores desde el uno hasta el nueve. La siguiente tabla nos muestra la escala empleada:

El juicio verbal comparativo se representa en la siguiente escala numérica

Radio de Saaty A_{ij}	**Definición**	**Explicación**
1	Igual importancia. Indiferencia Mismo grado de preferencia	Dos actividades contribuyen igualmente a un objetivo
3	Moderada o ligera importancia de una sobre de otra.	Hay evidencia que favorece una actividad sobre la otra, pero no es concluyente.
5	Esencial o fuerte importancia Un fuerte grado de preferencia	Existe buena evidencia y un criterio lógico para mostrar que una es más importante
7	Importancia demostrada Un grado muy fuerte de preferencia	Existe evidencia concluyente para mostrar la importancia de una actividad sobre la otra
9	Importancia absoluta Un grado extremadamente fuerte de preferencia	La evidencia es a favor de una actividad sobre la otra es del orden de afirmación más alto posible
2, 4, 6, 8	Valores intermedios entre dos calificaciones adyacentes	Existe compromiso entre dos valores
Recíprocos de los anteriores diferentes de cero	Si la actividad i tiene alguno de los valores no nulos asignado a ella cuando es comparada con la actividad j, entonces j tiene el valor recíproco cuando es comparada con i.	

Para el ejemplo del automóvil, en la comparación de precio y KpLitro Gabriela establece que el precio es **moderadamente más importante** que KpLitro, con un radio numérico de 3.De manera sucesiva, se contestaron todas las comparaciones, quedando de la siguiente manera:

- Precio es **moderadamente más importante** que KpLitro
- Precio es **igual a moderadamente** más importante que Confort
- Precio es **igual a moderadamente** más importante que estilo
- Confort es **moderadamente fuerte** más importante que KpLitro
- Estilo es **moderadamente fuerte** más importante que KpLitro
- Estilo es **igual a moderadamente** más importante que confort

En resumen las comparaciones por pares de Gabriela quedaron de la siguiente forma:

Tabla resumen

Comparación por pares	**Criterio más importe**	**Que tanto más importante**	**Radio numérico**
Precio _KpLitro	PRECIO	Moderadamente	3
Precio _Confort	PRECIO	Igual a moderadamente	2
Precio _Estilo	PRECIO	Igual a moderadamente	2
KpLitro _Confort	CONFORT	Moderadamente fuerte	4
KpLitro _Estilo	ESTILO	Moderadamente fuerte	4
Confort _Estilo	ESTTILO	Igual a moderadamente	2

Tal vez se desea añadir seguridad, valor de rescate del auto, y/o otros criterios. Si se estuviera en la selección de un auto. El PAJ puede acomodar cualquier grupo de criterios que especificados por el decisor. Entre más criterios sean dados, más comparaciones por pares deberán ser realizadas

3.6 La matriz de comparación por pares

Para determinar las prioridades de los cuatro criterios, se necesita construir una matriz de comparación por pares, derivados de la tabla anterior. Usando los cuatro criterios, la matriz de comparación será de cuatro renglones y cuatro columnas tal como se muestra:

	Precio	KpLitro	Confort	estilo
Precio				
KpLitro				
Confort				
Estilo				

Cada uno de los valores numéricos obtenidos deberán ser proporcionados a la matriz de comparación. En la **tabla resumen**, se consideró un 3 en la comparación de precio _KpLitro, entonces se debe escribir un 3 en el renglón llamado precio y la columna etiquetada como KpLitro. De manera general, los datos de la columna ***criterio más importante*** indican que renglón de la comparación matricial los valores numéricos deben ser puestos. También de la **tabla resumen**, se considera el KpLitro_ confort, donde el confort es el criterio más importante para esta comparación por pares, y su valor numérico es 4 en el renglón llamado confort y la columna Kp_Litro. Siguiendo este procedimiento para las demás comparaciones, la tabla queda de la siguiente manera:

	Precio	KpLitro	Confort	estilo
Precio		3	2	2
KpLitro				
Confort		4		
Estilo		4	2	

De la matriz, la diagonal principal se observa que cada criterio es comparado con el mismo, por lo que tienen el valor 1 de igual importancia. De este modo, la matriz ahora queda

	Precio	KpLitro	Confort	Estilo
Precio	1	3	2	2
KpLitro		1		
Confort		4	1	
Estilo		4	2	1

Ahora, todo lo que queda es completar la matriz llenando los valores pendientes. Tomando en cuenta la comparación recíproca vista anteriormente, consideramos los inversos, de tal manera que finalmente queda así:

	Precio	KpLitro	Confort	Estilo
Precio	1	3	2	2
KpLitro	1/3	1	1/4	1/4
Confort	1/2	4	1	1/2
Estilo	1/2	4	2	1

Descripción matemática del PAJ

Éste método pertenece a la familia de técnicas conocidas generalmente como Programación Multiobjetivo o Programación Multicriterio. Pertenece al grupo de los llamados métodos de eigenpesos o asignación de pesos basados en el cálculo del autovector dominante de una matriz de comparaciones binarias de los criterios.

El algoritmo de Saaty ha generado grandes polémicas, mejoras y variantes, pero también casos de éxitos en gran manera[1] .

El método PAJ propone asignar un vector de pesos $w=[w_1, w_2, w_3, \ldots w_n]$ a los criterios de un cierto problema de decisión multicriterio. Para esto compara, en la forma concreta cada criterio i con cada criterio j, obteniendo unos valores a_{ij} que se pueden agrupar en una matriz cuadrada de orden n: llamada matriz de comparaciones binarias $A=(a_{ij})$. La principal razón de comparar por pares los criterios es la de que al decisor le es más fácil (divide y vencerás) que compara todos al mismo tiempo. (Ver tabla de escalas)

Pueden usarse asimismo las cifras intermedias 2, 4, 6, 8 para valores de compromiso. Si no fuese el criterio i igual o más importante que el j, si no al revés, debe hacerse $a_{j\,i}$ de acuerdo con lo anterior y hacer $a_{i\,j} = 1/\,a_{j\,i}$. Las opciones que facilitan el uso para el decisor de esta escala de medida son:

- Amplio campo de posibilidades
- Incrementos unitarios de una valoración a otra, enteras
- El valor 1 es de equivalencia

Cualquier criterio i es igualmente importante a si mismo, los coeficientes a_{ii} de la matriz A (diagonal principal)tendrán siempre valor 1, y como mencione antes $a_{ji}=1/a_{ij}$, sólo será necesario que el decisor evalúe la parte supratriangular de A (es decir, aquellos $\frac{1}{2}n(n-1)$ elementos a_{ij} $(j>i)$ que están por encima de la diagonal

[1] Consultar la dirección: http://www.expertchoice.com/css1.htm

principal). Las matrices A de comparaciones binarias son del tipo de las llamadas matrices recíprocas, las cuales tienen propiedades especiales en las que se basa el método PAJ. Tales propiedades son:

Una matriz de comparaciones binarias es consistente cuando $a_{ij} = w_i/w_j$ para todo i,j. o sea que a_{ij} es el cociente w_i/w_j de sus pesos. Esta propiedad de consistencia es deseable que la tenga el decisor al efectuar sus comparaciones, sin embargo, no lo asume el PAJ. De hecho asume la contraria, ya que así se adecua mejor a la realidad, ya que el decisor humano es inconsistente en cierto grado.

Suponga que se tienen n puntos de vista a medir $A_1, A_2, \dots, A_n$ cuyos pesos son $w_1, w_2, \dots, w_n$ respectivamente y hay consistencia por parte del decisor. Se forma la matriz de razones cuyas filas son las razones de los pesos de cada aspecto respecto a los otros. En este caso, el más pequeño de cada par de puntos de vista se usa como unidad, esto es con la finalidad de poder realizar una comparación inversa.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots\cdots & \end{array} \\ Ww = & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & & \frac{w_1}{\ } \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = nw \end{array}$$

Si n es un valor propio de A entonces w es el vector propio asociado con él. Como A tiene rango uno (pues toda fila es un múltiplo constante de la primera fila) entonces todos sus valores propios son cero excepto uno. Además, se sabe que la suma de los valores propios de la matriz es igual a su traza, y en este caso la traza de A es igual a n. Por tanto, n es el mayor o principal valor propio de A.

La solución de $Aw = nw$, llamado el vector propio principal de A consiste de entradas positivas y es única salvo por una constante. La matriz tiene entradas positivas y satisface la propiedad recíproca. Cualquier matriz con esta propiedad se llama ***matriz recíproca***.

En resumen, A es consistente porque satisface la condición:

$$a_{jk} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}}, \; i, j, k = 1,2,...,n$$

Se puede probar que una matriz consistente debe ser una matriz de razones:

$$A = \left\{\frac{w_i}{w_j}\right\} \; i, j = 1,2,3...,n$$

Además, una condición necesaria para la consistencia es que A debe ser recíproca.

En un ambiente general de toma de decisiones no siempre se pueden dar valores precisos de las razones de pesos, sólo se pueden dar estimaciones de ellos. Lo cual implica que los valores propios de A se verán afectados.

Se sabe que pequeñas perturbaciones de un valor propio conduce a un problema del valor propio de la forma:

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

Donde:

$\lambda_{\text{máx.}}$ es el valor propio principal de A aunque ésta podría no ser la más consistente pero si recíproca.

De aquí que si A es $\lambda_{\max} - n$ inconsistente entonces mide la desviación de los juicios de la aproximación consistente, es decir, sí A es inconsistente entonces

$$\lambda_{\max} \geq n$$

Para medir la inconsistencia se considera un *Coeficiente de inconsistencia CI:*

$$\boxed{CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}}$$

Que calibrando con el *C.I.A.* (Coeficiente de Inconsistencia Aleatorio) del mismo orden obtenido por simulación con matrices recíprocas aleatorias:

n	*C.I.A.*
2	.00
3	.58
4	.90
5	1.12
6	1.24
7	1.32
8	1.41
9	1.45

Hace que se pueda determinar el llamado **Radio de Inconsistencia**:

$$R.I. = \frac{C.I.}{C.I.A}$$

El **radio de consistencia** será:

$$\boxed{CR = \frac{CI}{RI}}$$

Si la razón de *C.I.* es menor que la razón de las matrices aleatorias de manera significativa (a lo más el 10%) entonces se acepta la estimación de w. Si no es así entonces se mejora la consistencia. Dicho de otro modo si *R.I.* < 10 % significa que la consistencia es aceptable.

En resumen, el método PAJ completo consistirá en los siguientes tres pasos:

1. **Se obtiene del decisor la matriz A de comparaciones binarias.**
2. **Se calculan su autovector dominante w y su radio de inconsistencia *R.I.***
3. **Si *R.I.*< 10 % se acepta w. Si no, se le pide al decisor que re-estime algunos o todos los a_{ij}**

3.7 El PAJ original

Las comparaciones por pares han sido conocidas desde varias décadas, la idea original fue de hecho desarrollado por vez primera por Thurstone (1927). El método de Bradley y Terry en (1952). El PAJ original de Saaty (1977,1980) ha sido muy popular desde el principio, pero también ha sido muy criticado por varias razones:

1. La escala fundamental que usa para cuantificar juicios comparativos produce inconsistencias que no están necesariamente presentes en la mente del decisor.
2. Este estima los escores de impactos de las alternativas por el vector característico de Perron- Frobenius de la matriz de comparación por pares pero no especifica si el vector izquierdo o derecho debe ser utilizado
3. Este calcula los escores finales de las alternativas por la regla de agregación de promedio geométrico, por lo que los resultaos dependen del orden de los cálculos. El PAJ original se basa en la tasa de información lo que provoca operaciones logarítmicas que son inapropiadas.

La escala fundamental

Para el decisor, no hay diferencia entre el PAJ original y el Aditivo o el Multiplicativo, mientras que los datos de entrada de los juicios sean acordes.

En la siguiente tabla, se muestra como la graduación mayor de los juicios comparativos del decisor son clasificados:

Escalas numéricas para cuantificar juicios comparativos preferenciales en el PAJ original y las dos variantes: El PAJ aditivo y multiplicativo

Comparación de los juicios preferenciales de A_j con respecto a A_k	PAJ original, tasa estimada de valores subjetivos	PAJ Aditivo, diferencia de grados	PAJ multiplicativo tasa estimada de valores subjetivos
Muy fuerte preferencia por el objeto “k”.	1/9	-8	1/256
Fuerte preferencia por el objeto “k”.	1/7	-6	1/64
Preferencia por el objeto “k”.	1/5	-4	1/16
Débil preferencia por el objeto “k”.	1/3	-2	1/4
Indiferencia entre “j” y “k”	1	0	1
Débil preferencia por el objeto “j”.	3	2	4
Preferencia por el objeto “j”.	5	4	16
Fuerte preferencia por el objeto “j”.	7	6	64
Muy fuerte preferencia por el objeto “j”.	9	8	256

La escala del PAJ multiplicativo, se basa en argumentos psico-físicos, y es claramente más larga la escala fundamental que en el PAJ original. Varios estudios numéricos, sin embargo muestras que los valores finales son casi insignificantes en la longitud de la escala[2] . Ni la escala fundamental y la aritmética no geométrica interfieren cuando no están necesariamente presentes en la mente del decisor. Considerando tres alternativas, A_j, A_k, y A_l, por ejemplo, y suponga que el decisor tenga una preferencia débil por A_j con respecto a A_k, (valor de la escala fundamental 3) El o ella puede tener lógicamente una preferencia estricta por A_j con respecto a A_l, (transitividad de preferencia, débil X débil≈estricto), ciertamente no la muy fuerte o absoluta preferencia la cual es sugerida por el producto de los valores de la escala para una preferencia débil (3X3=9). Este tipo de interferencias no ocurre en el PAJ aditivo.

3.8 El vector característico de Perron-Frobenius

Este es considerado como cuando Saaty en (1977-1980) consideró el positivo y recíproca matriz R con todas las comparaciones por pares debajo de un criterio (para un solo decisor) propuesto para estimar los valores de impacto de las alternativas por los componentes del correspondiente vector característico al valor característico más largo. (Real y positivo por el teorema de Perron-Frobenius. En una primera etapa, este propuesto ha sido criticado por ciertos investigadores, La llave así, es la muy llamada asimetría derecha-izquierda: ¿Cuál vector característico deberá ser utilizado para producir los escores de impacto de las alternativas debajo de un criterio dado, el izquierdo o derecho?. Jonson en 1979[3] considero la matriz de comparación por pares:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector característico de Perron-Frobenius, positivo y normalizado en el sentido de que la suma de los componentes de uno. Es dado por (0.184, 0.152, 0.436, 0.227), así que esto provee el orden de la fila $A_3 > A_4 > A_1 > A_2$. El elemento r_{jk} en R *nos* dice que tan fuerte el decisor prefiere la alternativa A_j sobre la alternativa A_k y los componentes del vector característico derecho componen el "grado de satisfacción" con las alternativas. Si se vuelve a rehacer la pregunta al decisor de que tan fuerte a el o ella le desagrada A_j con respecto a A_k

[2] F.A. Lootsma "Scale sensitive in the multiplicative AHP and SMART " *Journal of multicriterial decision analysis " 2, 87-110, 1993*

[3] Jonson,C.R. Beine,W.B. and Wang,T.J. "Right –Left Asymmetry in an Eigenvector Ranking procedure" *Journal of mathematical Psychology 19, 61-64, 1979*

Deberíamos obtener lógicamente la traspuesta de R (sí A_j es 3 veces mejor que A_k por ejemplo es 1/3 veces peor, et c.) El vector característico derecho de la traspuesta de R es el vector característico izquierdo de R de si mismo, y esto parece ser dado por (0.248, 0.338, 0.105, 0.259). Los componentes representan el "grado de insatisfacción" con las alternativas. Esto lleva a que el orden de la fila sea $A_3 > A_1 > A_4 > A_1$ y por consiguiente a un intercambio de las posiciones A_1 y A_4.

Saaty y Vargas[4] trataron de resolver la manera de mostrar que el vector característico derecho debe ser siempre utilizado porque obtiene correctamente el dominio relativo. La evidencia es no convincente, sin embargo. El paso básico en la argumentación es que él (j,k) avo elemento, en el m avo conjunto en la matriz comparación por pares representa la intensidad total de todos los líneas de longitud m desde un nodo j a un nodo k..La intensidad de una línea de m que va desde j hasta k es el producto de las intensidades de los arcos en la línea. En términos del PAJ, la intensidad total sería la suma de productos de las tasas de preferencia. Esto es una cantidad peculiar, sin embargo, sin una interpretación física o psicológica propia

3.9 El método REMBRANDT

El método REMBRANDT (**R**adio **E**stimation in **M**agnitudes or deci**B**ells to **R**ate **A**lternatives wich are **N**on Domina**T**ed) o en español: *Tasas estimadas en magnitudes o decibeles para medir alternativas no controladas* ha sido diseñado para mejorar 3 características criticadas del sistema PAJ:

El ***primer aspecto*** localizado por Lootsma es él referente a la escala numérica empleada para hacer un juicio comparativo verbal.

Saaty presentó una escala verbal para juzgar los valores relativos entre dos objetos donde:

1 Igualdad torpemente definida
3 Ventaja moderada
5 Refleja una ventaja esencial
7 Ventaja relativa muy fuerte
9 Ventaja relativa arrolladora

Lootsma piensa que la ventaja relativa es más naturalmente cóncava y presenta un número de casos donde una escala logarítmica es más apropiada como en el caso de horizontes de planeación, la fuerza del sonido o la luminosidad de la luz.

Por lo tanto, **Lootsma** presenta una escala geométrica donde los grados de juicio del tomador de decisiones son reflejados por la escala que se muestra a continuación:

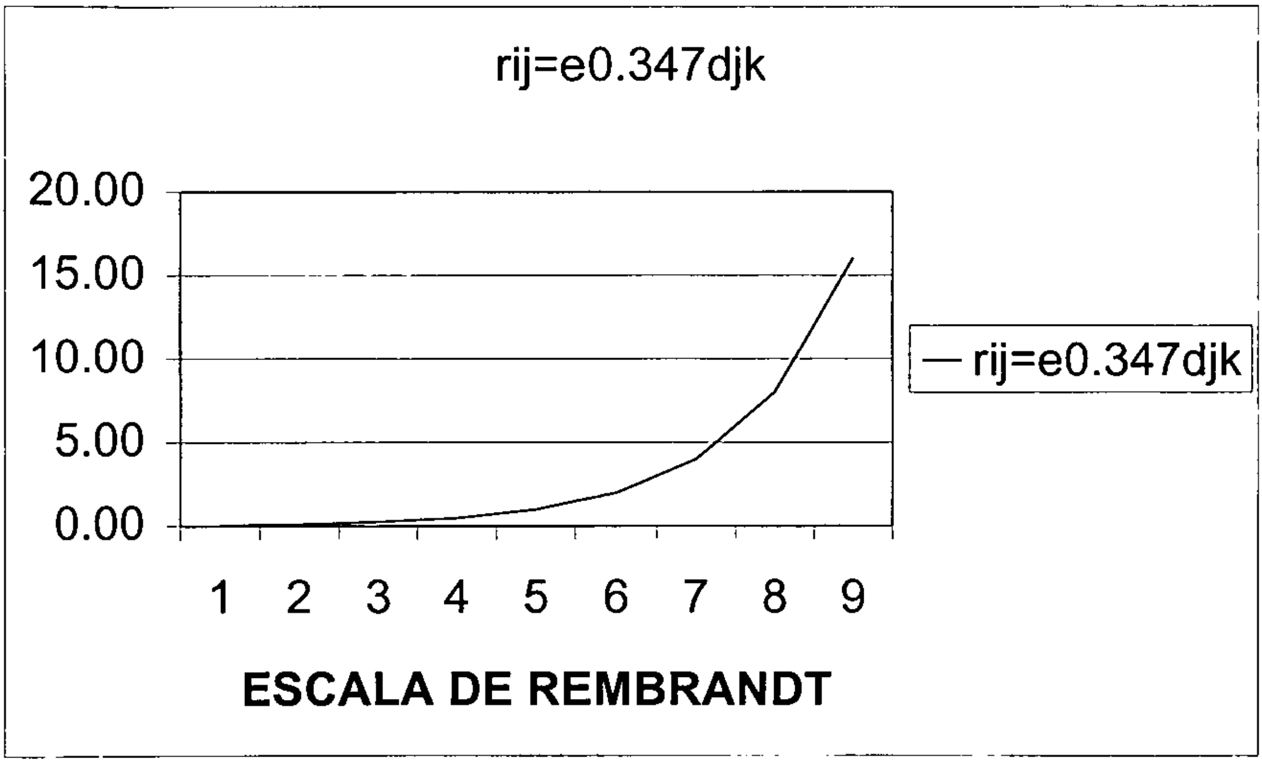
---

[4] Saaty, T.L. and Vargas L:G. Inconsistency and Rank preservation *Journal of Mathematical Psychology 28, 205-214, 1984*

1/16 preferencia estricta del segundo objeto sobre el objeto base
¼ preferencia débil del segundo objeto sobre el objeto base
1 indiferencia
4 Preferencia débil del objeto base sobre el segundo objeto
16 Preferencia estricta del objeto base sobre el segundo objeto

La razón de valor r_{ij} en la escala geométrica es muy bien expresada tanto por la función exponencial de la diferencia entre los valores en la escala geométrica d_{jk} como por el parámetro de escala Y. Lootsma considera dos escalas alternativas Y para poder expresar las preferencias.

Para el cálculo del peso de un criterio se usó $Y = Ln(\sqrt{2}) \approx 0.347$. En el método REMBRANDT sólo un nivel jerárquico, superior al nivel de alternativas, fue utilizado (no importando el número de criterios).



Para el cálculo del peso de las alternativas en cada criterio se usó $Y = Ln(2) \approx 0.693$. La diferencia en valores d_{jk} se gradúo como se muestra en la tabla 2, la cual compara las escala de razón de Saaty con las escalas del método REMBRANDT.

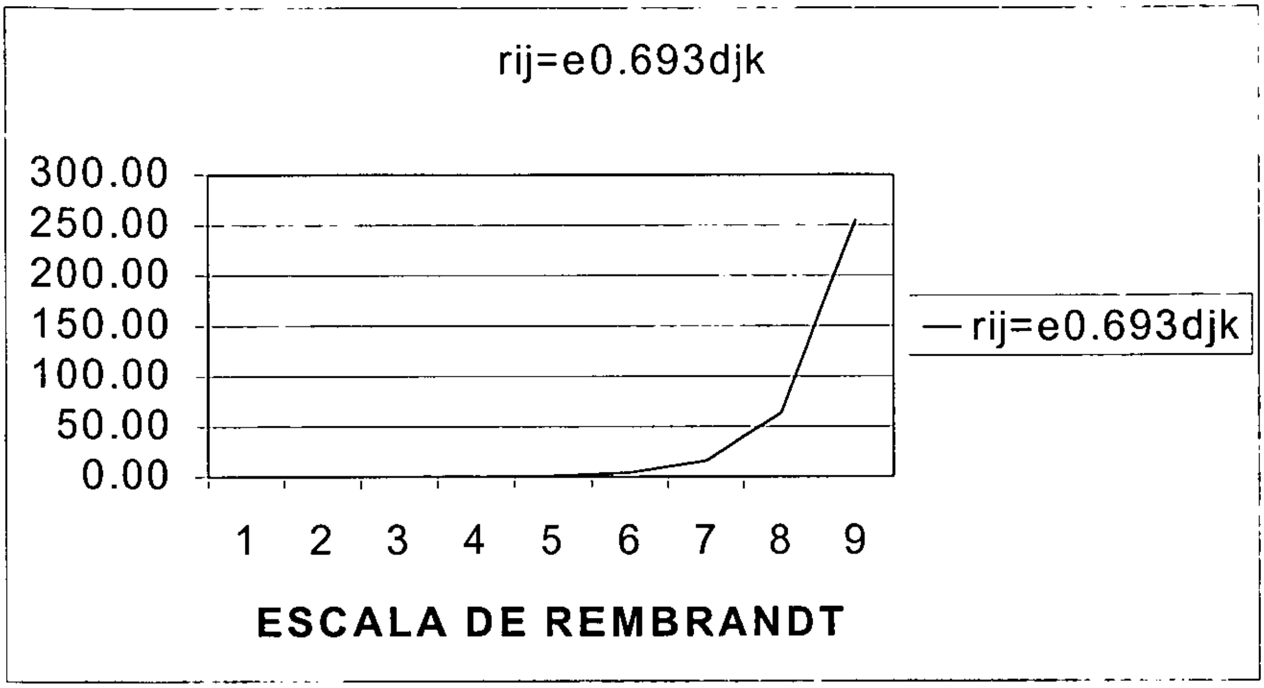


Tabla 2

ESCALA REMBRANDT

Descripción Verbal	Rembrandt $\delta(jk)$
Muy fuerte preferencia por el objeto "k".	-8
Fuerte preferencia por el objeto "k".	-6
Preferencia por el objeto "k".	-4
Débil preferencia por el objeto "k".	-2
Indiferencia	0
Débil preferencia por el objeto "j".	+2
Preferencia por el objeto "j".	+4
Fuerte preferencia por el objeto "j".	+6
Muy fuerte preferencia por el objeto "j".	+8

Lootsma propone una regresión logarítmica minimizando:

$$\sum_{j<k}(Ln\, r_{ij} - Ln\, V_j + Ln\, V_k)^2$$

donde:

- r_{ij} son las razones de comparación hechas por el tomador de decisiones para el objeto base j y el objeto comparado k
- El logaritmo $Ln(\ V_j)$ es el peso para $j(w)$
- r_{ij} es la razón de w_j / w_k

El análisis es para calcular estos pesos y el error esta dado por $r_{ij} - w_j / w_k$ debido a que $r_{ij} = w_j / w_k$

Las comparaciones de razón hechas por el decisor son sólo observaciones mientras que la regresión (minimizando el error cuadrado), produce el conjunto de pesos w_i que son la mejor forma de que el tomador de decisiones exprese sus preferencias.

Resolver esto es complicado debido a que el conjunto de resultados forma una matriz singular. De cualquier forma, una serie de ecuaciones normales puede ser resulta para obtener los pesos deseados.

Para demostrarlo, suponga que se tiene una razón de comparación para 3 distintos factores {A, B y C} donde A es definitivamente preferido sobre B, A es fuertemente preferido sobre C, mientras B es débilmente preferido sobre C. Esto permite que la matriz de preferencias d_{jk} se transforme en $r_{ij} = e^{0.347djk}$
Y se desea que los pesos minimicen la función

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(Ln\, r_{ij} - w_j + w_k)^2$$

La matriz de razones en el método REMBRANDT se transforma a través del operador $e^{0.347djk}$ para generar la serie de valores transformados a la escala logarítmica.

Krovac (1987) puntualizó que la forma geométrica de los elementos de los renglones de tal matriz, permite una solución que minimiza la suma de los errores cuadrados. Esto permite:

$$\begin{array}{ccc} d_{jk} & e^{0.347djk} & \text{forma geométrica} \\ \begin{bmatrix} 0 & +4 & +6 \\ -4 & 0 & +2 \\ -6 & -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0.25 & 1 & 2 \\ 0.125 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3.175 \\ 0.794 \\ 0.397 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta solución se normalizó en forma de producto. Una manera más simple de normalizar es por medio de la suma, lo cual se logra dividiendo cada elemento entre la suma total de los mismos.

El sistema REMBRANDT incluye un chequeo de la consistencia de las preferencias, lo cual implica que si la alternativa j es preferida a la alternativa *k*, entonces el resultado w_j debe ser más grande que el resultado w_k. Si lo anterior no ocurre, se deberá alertar e informar al usuario.

La *tercera mejora propuesta* por Lootsma es la agrupación o agregación de resultados.

El sistema REMBRANDT utiliza un nivel de jerarquización (permitiendo 25 criterios), con un nivel alternativo subordinado a este (permitiendo 25 alternativas). Este nivel (que es el más bajo) es normalizado multiplicativamente, de tal forma que el producto de los componentes es igual a 1, para cada uno de los k factores sobre los cuales las alternativas son comparadas.

Por lo tanto cada alternativa tiene un desarrollo relativo estimado w_k para cada uno de los *k* factores.

Los componentes de el nivel jerárquico inmediatamente superior a este nivel mas bajo, son normalizados adicionalmente, de tal forma que ellos sumen 1 y permitiendo los pesos *O(j)*.

La regla de agregación o también llamada de utilidad para cada alternativa *j* es:

$$W_j = \prod_{i=1}^{k} wi^{o(i)}$$

Perfil del Algoritmo Rembrandt

Las características del método Rembrandt son

- Trabaja con tres métodos TDMC solamente: El PAJ multiplicativo con comparaciones por pares así como también con SMART con una tasación directa la cuál es conocida como la asignación de grados, y el PAJ aditivo adicionalmente. Existe una relación logarítmica entre los métodos: Las diferencias de grados en SMART representan radios de preferencia logarítmicos en el PAJ multiplicativo. Esto representa al **acrónimo Rembrandt** (**R**adio **E**stimation in **M**agnitudes or deci**B**ells to **Ra**te **A**lternatives wich are **N**on DominaTed): *Tasas estimadas en magnitudes o decibeles para medir alternativas no controladas.* El concepto de relativa importancia del criterio se basa sobre la escala la cual es usada en un tasamiento directo y en el método de comparación por pares, y no en las alternativas que suceden para representar el problema actual de decisión. Por lo tanto Rembrandt podrá ser usado en toma de decisiones distribuidas, donde existe una diferencia organizacional entre la evaluación de los criterios y la valoración de las alternativas. El criterio de los pesos puede ser aún transferido desde un previo, hasta problemas de decisión similares, o inclusive hasta uno actual, así que hay una consistencia mayor en series coherentes o decisiones relacionadas mutuamente

- En Rembrandt la valoración de las alternativas debajo de un criterio dado es en principio llevado con un contexto predeterminado, el cual puede o no ser explícitamente formulado por el decisor. En un tasamiento directo, se recomienda que el decisor que esboce explícitamente las alternativas reales e imaginarias correspondientes a la escala (Tanto las alternativas excelentes, y aquellas con un desarrollo pobre pero compensable).En la aplicación de métodos de comparación por pares se recomienda que el decisor sea lo más explicito

- Las decisiones de grupo son extensamente soportadas por Rembrandt. El sistema acepta los diferentes juicios de cada miembro de manera individual, y muestra los valores finales de las alternativas. La distribución es modelada por la asignación de pesos asignados por los decisores. La búsqueda de una solución real es soportada por los cálculos de los valores de pesos finales de las alternativas, debajo de la suposición que el grupo califica por primera vez como un solo decisor.(compromisos a través del análisis)

- La jerarquía de un criterio, y subcritero, etc., no puede ser analizada en Rembrandt. Una estructura jerárquica con mas de dos niveles evaluaciones deberá ser estudiada profundamente antes de ser lanzada a un ambiente práctico.. En una jerarquía con mas de dos niveles de evaluación, uno va en contra de la importancia relativa del subcriterio, el sub-subcriterio, etc., conceptos que están todavía indefinidos. Más aun, la estructura de la jerarquía, no es siempre únicamente determinada por la formulación del problema. Un fenómeno el cuál afecta fuertemente los pesos en el análisis. El PAJ original desatiende estas preguntas y construye jerarquías multi-nivel audazmente y lleva el análisis posteriormente.

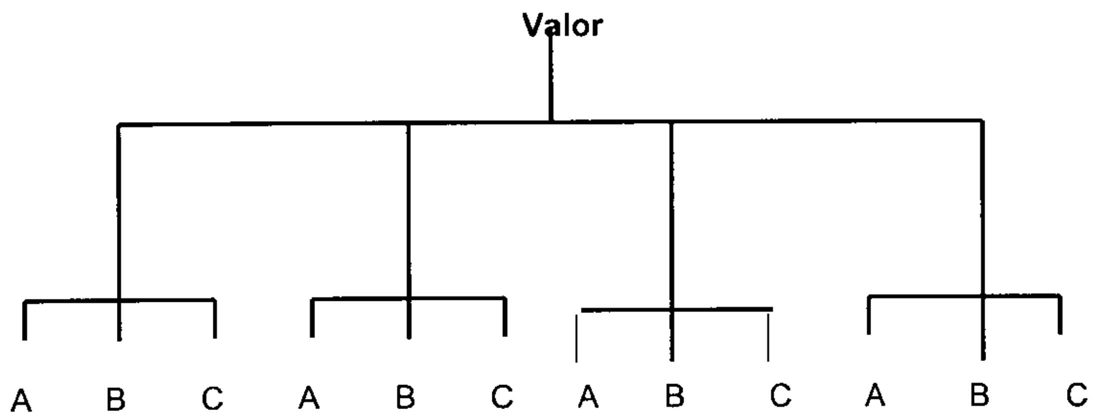
Para demostrar como trabajan ambos métodos, se analizarán dos ejemplos en el capítulo cuatro.

CAPÍTULO CUATRO: APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS PAJ Y REMBRANDT

En esta estudio se realiza la aplicación de los métodos PAJ y Rembrandt en dos problemas de decisión multicriterio. El propósito primario de este estudio es el aplicar a Rembrandt en los mismos problemas que se analizaron usando el PAJ. Realmente no hay diferencias entre las técnicas desde la perspectiva de los usuarios, y los mismos datos son utilizados. Las diferencias técnicas entre PAJ y Rembrandt se demuestran en: (1) usando diferentes radios de escalas, (2) Cálculos alternativos en los valores de impactos y (3) uso de un procedimiento diferente de agregación. Rembrandt fue encontrado para encontrar la misma decisión que el PAJ, cuando el promedio geométrico fue usado por agregación

4.1 Problema tipo analizado mediante los métodos PAJ y REMBRANDT

Considérese el análisis comparativo de tres alternativas para seleccionar una secretaria (A, B, C) sobre cuatro criterios Eficiencia (W), Preparación (X), Experiencia (Y), Manejo de Idiomas (Z. Este problema se puede representar como:



Donde :

A es la señorita Gabriela Cano
B es la señorita Hilda Hernández
C es la señorita Marisela Rodríguez

La secretaria **A** es muy eficiente, tiene una excelente preparación además de que constantemente se actualiza con cursos relativos a su profesión. Sin embargo, tiene poca experiencia, en cuanto al manejo de idiomas sólo tiene el dominio de inglés en un 75%.

La secretaria **B**, es medianamente eficiente, tiene una buena preparación y 10 años de experiencia en el ramo en el que se le solicita, sin embargo, no tiene un buen manejo de idiomas.

La secretaria **C** es medianamente eficiente, carece de buena preparación, es recién egresada de la academia, por lo que no tiene experiencia en el ramo. Sin embargo, domina muy bien el idioma inglés.

Cálculos del método PAJ.

Primero se resolverá el problema utilizando el método PAJ de Saaty.

Asumiendo que la razón de comparación de W, X, Y, y Z es como a continuación se muestra, se obtiene el vector característico y el índice de inconsistencia (cuatro factores están por debajo del limite de 0.09 lo cual indica una consistencia aceptable):

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} W & X & Y & Z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} W \\ X \\ Y \\ z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 \\ & 1 & 1 & 3 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{Vector característico} \begin{bmatrix} 0.54922 \\ 0.32860 \\ 0.07259 \\ 0.04959 \end{bmatrix} \quad \text{Índice de inconsistencia } [0.0222]$$

Este es seguido por la comparación de alternativas A, B y C en cada uno de los 4 factores W, X, Y, y Z (los índices de inconsistencia están por debajo del límite de 0.06 para tres de los factores, lo cual indica una consistencia aceptable)

Vector característico Índice de inconsistencia

$$W: \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ & 1 & 5 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0.73064 \\ 0.18839 \\ 0.08096 \end{pmatrix} \quad 0.0324$$

$$X: \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 7 \\ & 1 & 5 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0.22965 \\ 0.64833 \\ 0.12202 \end{pmatrix} \quad 0.0018$$

$$Y: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/5 \\ & 1 & 1/4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0.14884 \\ 0.16033 \\ 0.69084 \end{pmatrix} \qquad 0.0028$$

$$Z: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ & 1 & 1/4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0.29696 \\ 0.16342 \\ 0.54961 \end{pmatrix} \qquad 0.0046$$

Los vectores característicos resultantes son entonces agrupados o agregados para obtener los pesos resultantes para cada una de las alternativas *A, B* y *C*

Valor (A)

=0.54922*0.73064+0.32860*0.22965+0.07259*0.14884+0.04959*0.29696=0.502

Valor (B)

=0.54922*0.18839+0.32860*0.64833+.07259*0.16033+0.04959*0.16342=0.336

Valor (C)

=0.54922+0.08096+0.32860*0.12202+0.07259*0.690084+0.04959*0.53961=0.161

Estos resultados pueden ser interpretados como indicando sobre todo que la alternativa *A* tiene 1.49 veces el valor de la alternativa *B* y 3.12 veces el valor de la alternativa *C*.

Cálculos del método REMBRANDT

La misma información puede ser utilizada para resolver el problema, pero utilizando un método geométrico y el método de agrupación o agregación de Barzilai, Cook y Golany.

A continuación se muestran las matrices equivalentes a las matrices que Saaty utilizó, así como las matrices transformadas, los resultados de los renglones con el cálculo geométrico y los resultados normalizados auditivamente.

δjk $\qquad$ $e^{0.347\delta jk}$ $\qquad$ multiplicativo $\qquad$ aditivo

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} W & X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} W \\ X \\ Y \\ Z \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} W & X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} W \\ X \\ Y \\ Z \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0.25 & 1 & 1 & 2 \\ 0.125 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \sqrt[4]{1}*\sqrt[4]{1}*\sqrt[4]{4}*\sqrt[4]{8} = 2.3784 & 0.493 \\ = 1.1892 & 0.246 \\ = 0.8409 & 0.174 \\ = 0.4204 & 0.087 \end{array}$$

Los pesos normalizados por medio de la suma son calculados por el peso que se ejerce sobre el valor de cada alternativa. Las comparaciones de las alternativas *A*, *B*, y *C* sobre cada uno de los 4 factores *W*, *X*, *Y*, y *Z* usa un multiplicador exponencial igual a Ln 2 . Esto produce:

δjk $\qquad$ $e^{0.347\delta jk}$ $\qquad$ multiplicativo $\qquad$ aditivo

W:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 16 & 64 \\ 0.0625 & 1 & 16 \\ 0.015625 & 0.0625 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{16}*\sqrt[3]{64} = 10.0794 & 0.902 \\ = 1 & 0.089 \\ = 00992 & 0.009 \end{array}$$

X:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 2 \\ 4 & 1 & 16 \\ 0.5 & 0.0625 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{0.25}*\sqrt[3]{2} = 0.7937 & 0.155 \\ = 4.0 & 0.783 \\ = 0.3150 & 0.062 \end{array}$$

Y:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.0625 \\ 1 & 1 & 0.125 \\ 16 & 8 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{0.0625} = 0.3969 & 0.067 \\ = 0.5 & 0.084 \\ = 5.0397 & 0.849 \end{array}$$

Z:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.25 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{2}*\sqrt[3]{0.5} = 1 & 0.286 \\ = 0.5 & 0.143 \\ = 2 & 0.571 \end{array}$$

El proceso de agrupación se cumple de la siguiente manera:

A: $10.0794^{0.493}$ $*0.7937^{0.246}$ $*0.3969^{0.174}$ $*1^{0.087}$ $= 2.513$ 0.624
B: $1^{0.493}$ $*4^{0.246}$ $*0.5^{0.174}$ $*0.5^{0.087}$ $= 1.174$ 0.292
C: $0.0992^{0.493}$ $*0.3150^{0.246}$ $*5.0397^{0.174}$ $*2^{0.087}$ $= 0.339$ 0.084

Los resultados reflejan valores relativos. De cualquier forma REMBRANDT utiliza una escala más extensa que PAJ que deriva en una distancia de intervalo más grande. Usando este método, la alternativa A es 2.14 veces tan valuable como lo es la alternativa B y cerca de 7.43 veces tan valuable como lo es la alternativa C.

4.2 Problema 2: La mejor casa para comprar

El problema estriba en que una familia desea comprar una casa y ha identificado ocho criterios de evaluación para tal propósito. Estos criterios están divididos en categorías económicas físicas y geográficas. Además, tienen que decidir entre tres opciones. *El primer paso es la estructuración del problema como una jerarquía.*
El primer nivel es la meta global de ***"Satisfacción con la casa***". En el segundo nivel van los ocho criterios los cuales contribuyen a la meta y el tercer nivel lo forman las tres casas las cuales serán evaluadas en función de los criterios en el segundo nivel.

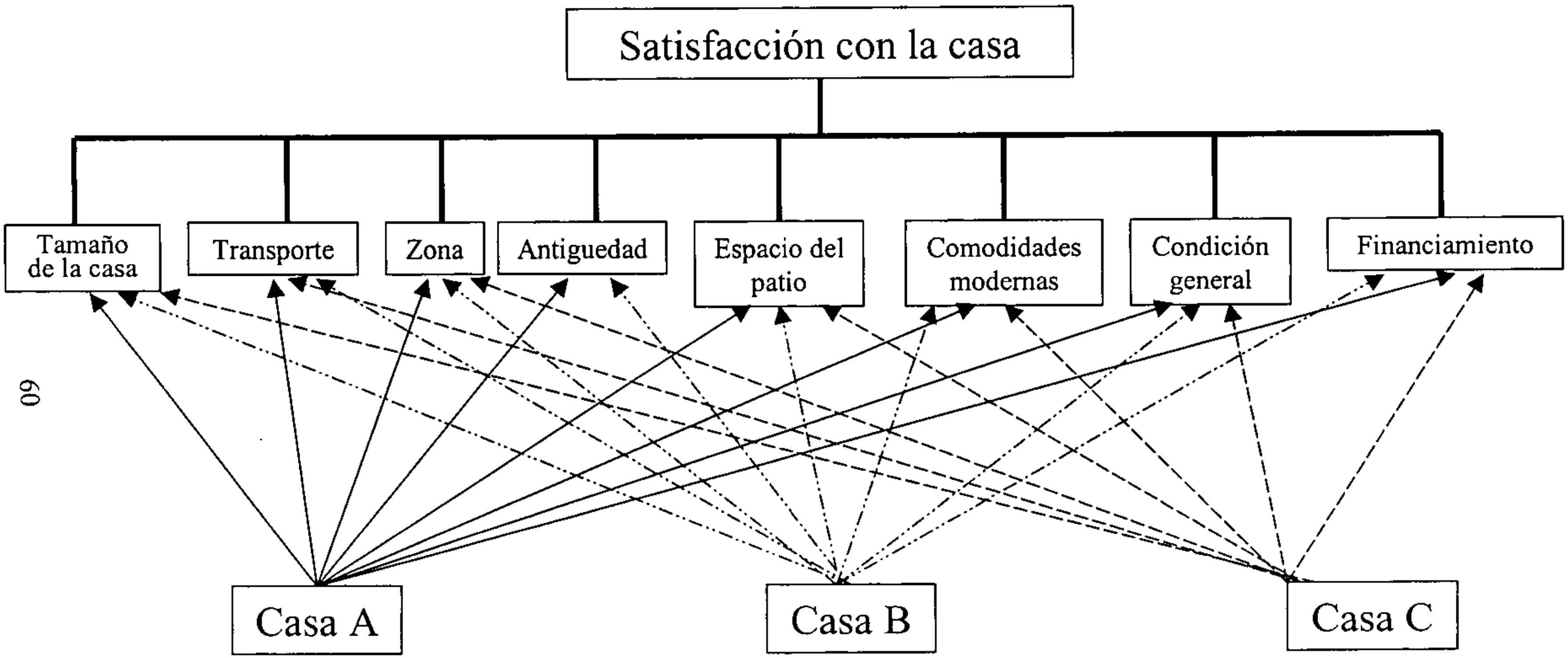
Los criterios más importantes para la familia son:

- Tamaño de la casa.
- Localización de medios de transporte
- Zona
- Antigüedad de la casa
- Espacio del patio
- Comodidades modernas
- Condición General
- Financiamiento

Jerarquización del problema

En la siguiente hoja se encuentra el diagrama vertical con la jerarquización del problema

Jerarquización del problema



A cada comparación se le asignará una calificación, Saaty propone la siguiente escala de importancia relativa de la cual se obtienen las calificaciones para las diferentes comparaciones.

Intensidad de la importancia	Definición
1	Igual importancia
3	Importancia moderada
5	Importancia fuerte
7	Importancia muy fuerte
9	Importancia extrema
2,4,6,8	Valores intermedios
Recíprocos	Recíprocos de los valores anteriores

Matriz de comparación para el nivel 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	Vector Principal
1	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4	0.173
2	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7	0.054
3	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5	0.188
4	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8	0.018
5	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6	0.031
6	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6	0.036
7	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2	0.167
8	4	7	5	8	6	6	2	1	0.333

Ahora se hacen las comparaciones con los elementos del nivel más bajo, que en este caso son las casas. La comparación se realiza respecto a cada uno de los criterios. Por tanto, se generan ocho matrices de 3x3.

Las características de las casas son:

- ***Casa A***. Es la mayor de todas. Está localizada en una zona con poco tráfico. El patio es grande con respecto a las otras casas. Sin embargo, la condición general no es muy buena, necesita limpieza y mantenimiento. También el financiamiento no es bueno porque la venta es por medio del banco con altos intereses.

- ***Casa B.*** Es menor que la casa A y no tiene cerca la parada del autobús. La zona es un poco insegura porque hay mucho tráfico. El patio es pequeño y la casa carece de las comodidades modernas. La condición general es buena. La venta es por medio de una casa de bienes y raíces con intereses bajos.

- ***Casa C.*** Esta casa es muy pequeña y tiene pocas comodidades modernas. Por otro lado, la zona es cara, sin embargo, es buena y parece segura. Tiene un patio mayor que la casa B, pero no mayor que el de la casa A. La condición general es buena y tiene una bonita fachada.

Las matrices de comparación de las casas con respecto a los criterios son las siguientes:

Tamaño de la casa

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 1/6 & 1 & 4 \\ 1/8 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Vector principal} \\ 0.754 \\ 0.181 \\ 0.065 \end{array}$$

$$\lambda_{\max} = 3.136 \quad CI = 0.068 \quad CR = 0.117$$

Medios de transporte

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1/5 \\ 1/7 & 1 & 1/8 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Vector principal} \\ 0.233 \\ 0.005 \\ 0.713 \end{array}$$

$$\lambda_{max} = 3.247 \quad CI = 0.124 \quad CR = 0.213$$

Zona

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 1/8 & 1 & 1/4 \\ 1/6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Vector principal} \\ 0.745 \\ 0.065 \\ 0.181 \end{array}$$

$$\lambda_{\max} = 3.130 \quad CI = 0.068 \quad CR = 0.117$$

Antigüedad de la casa

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}
\quad
\begin{array}{c} \text{Vector} \\ \text{principal} \\ 0.333 \\ 0.333 \\ 0.333 \end{array}
$$

$$\lambda_{max} = 3.0 \quad CI = 0 \quad CR = 0$$

Espacio del patio

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 4 \\ 1/5 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 3 & 1 \end{array} \right)
\end{array}
\quad
\begin{array}{c} \text{Vector} \\ \text{principal} \\ 0.674 \\ 0.101 \\ 0.226 \end{array}
$$

$$\lambda_{max} = 3.086 \quad CI = 0.043 \quad CR = 0.074$$

Comodidades modernas

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 8 & 6 \\ 1/8 & 1 & 1/5 \\ 1/6 & 5 & 1 \end{array} \right)
\end{array}
\quad
\begin{array}{c} \text{Vector} \\ \text{principal} \\ 0.747 \\ 0.060 \\ 0.193 \end{array}
$$

$$\lambda_{max} = 3.197 \quad CI = 0.099 \quad CR = 0.170$$

Condición General

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & ½ & 1/2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Vector principal} \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{array}$$

$$\lambda_{max} = 3.0 \quad CI = 0 \quad CR = 0$$

Financiamiento

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/5 \\ 7 & 1 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Vector principal} \\ 0.072 \\ 0.650 \\ 0.278 \end{array}$$

$$\lambda_{max} = 3.065 \quad CI = 0.032 \quad CR = 0.056$$

Evaluación Global

	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0.173	0.054	0.188	0.018	0.031	0.036	0.167	0.333	
A	0.754	0.233	0.754	0.333	0.674	0.747	0.2	0.072	0.396
B	0.181	0.055	0.065	0.333	0.101	0.60	0.4	0.650	0.341
C	0.065	0.713	0.181	0.333	0.226	0.193	0.4	0.278	0.263

¡La elección sugerida es comprar la casa A!

Enseguida se resolverá el problema anterior utilizando el método de REMBRANDT. Para ello, se usarán las matrices que se generaron en el método AHP.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 4 & 2 & 6 & 5 & 5 & -2 & -3 \\
-4 & 0 & -2 & 4 & 2 & 2 & -4 & -6 \\
-2 & 2 & 0 & 5 & 2 & 3 & 5 & -4 \\
-6 & -4 & -5 & 0 & -2 & -3 & -6 & -7 \\
-5 & -2 & -2 & 2 & 0 & -1 & -4 & -5 \\
-5 & -2 & -3 & 3 & 1 & 0 & -4 & -5 \\
2 & 4 & -5 & 6 & 4 & 4 & 0 & -1 \\
3 & 6 & 4 & 7 & 5 & 5 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$e^{0347\delta_{jk}}$$

$$
\begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{llllllll} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} & \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 4 & 2 & 8 & 5.7 & 5.7 & 0.5 & 0.35 \\
0.25 & 1 & 0.5 & 4 & 2 & 2 & 0.25 & 0.125 \\
0.5 & 2 & 1 & 5.7 & 2 & 2.83 & 5.7 & 0.25 \\
0.125 & 0.25 & 0.18 & 1 & 0.5 & 0.35 & 0.125 & 0.09 \\
0.18 & 0.5 & 0.5 & 2 & 1 & 0.71 & 0.25 & 0.18 \\
0.18 & 0.5 & 0.35 & 2.83 & 1.41 & 1 & 0.25 & 0.18 \\
2 & 4 & 0.18 & 8 & 4 & 4 & 1 & 0.71 \\
2.83 & 8 & 4 & 11.35 & 5.7 & 5.7 & 1.41 & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l} 2.0890 \\ 0.7071 \\ 1.6136 \\ 0.2202 \\ 0.4812 \\ 0.5236 \\ 1.8391 \\ 3.8380 \end{array}
\end{array}
$$

El multiplicativo se resuelve sacando el producto de las raíces octavas de cada elemento, por ejemplo para el primer renglón quedaría:

Multiplicativos:	el aditivo
$\sqrt[8]{1}*\sqrt[8]{4}*\sqrt[8]{2}*\sqrt[8]{8}*\sqrt[8]{5.7}*\sqrt[8]{5.7}*\sqrt[8]{0.5}*\sqrt[8]{0.35}=2.089$	0.1847
$=0.7071$	0.0625
$=1.6136$	0.1426
$=0.2202$	0.0195
$=0.4812$	0.0425
$=0.5236$	0.0463
$=1.8391$	0.1626
$=3.8380$	0.3393

δjk	$e^{0.693\delta jk}$	multiplicativo	aditivo

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 32 & 127.86 \\ 0.031 & 1 & 8 \\ 0.01 & 0.13 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

multiplicativo	aditivo
$\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{32}*\sqrt[3]{127.86}=15.9498$	0.9598
$=0.6285$	0.0377
$=0.1094$	0.0066

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -6 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 64 & 0.062 \\ 0.02 & 1 & 0.01 \\ 16 & 127.86 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

multiplicativo	aditivo
$\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{64}*\sqrt[3]{.062}=1.58247$	.1106
$=0.0586$	.0041
$=12.6623$	.8853

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ -7 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 127.86 & 32 \\ .01 & 1 & .13 \\ .031 & 8 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

multiplicativo	aditivo
$\sqrt[3]{1}*\sqrt[3]{127.86}*\sqrt[3]{32}=15.94$	.9598
$=0.1094$	.0066
$=0.6286$	.0377

δjk	$e^{0.693\delta jk}$	multiplicativo	aditivo

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{1} = 1 \\ = 1 \\ = 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.333 \\ 0.333 \\ 0.333 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 16 & 8 \\ .062 & 1 & .25 \\ .13 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{16} * \sqrt[3]{8} = 5.0315 \\ = 0.2497 \\ = 0.8043 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.8268 \\ 0.0410 \\ 0.1322 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ -7 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 127.5 & 32 \\ 0.01 & 1 & 0.062 \\ 0.031 & 16 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{127.5} * \sqrt[3]{32} = 15.9350 \\ = 0.0.0855 \\ = 0.7917 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.9478 \\ 0.0051 \\ 0.0471 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{r} \sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{0.5} * \sqrt[3]{0.5} = 0.6302 \\ = 1.2596 \\ = 1.2596 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.2001 \\ 0.3999 \\ 0.3999 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0.02 & 0.062 \\ 64 & 1 & 4 \\ 16 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{r} \sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{0.02} * \sqrt[3]{0.062} = 0.1077 \\ = 6.3379 \\ = 1.5866 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.0134 \\ 0.7891 \\ 0.1975 \end{array}$$

Por último, se calcula la agrupación por lo que se tiene:

A: $15.9498^{0.1847} * 1.5824^{0.0625} * 15.9498^{0.1496} * 1^{0.0195} * 5.0315^{0.0425} * 15.9350^{0.0463} * 0.6302^{0.1626} * 0.1077^{0.3393} = 1.35094$

B: $0.6285^{0.1847} * 0.0586^{0.0625} * 0.1094^{0.1426} * 1^{0.0195} * 0.2497^{0.0425} * 0.0855^{0.0463} * 1.2596^{0.1626} * 6.3379^{0.3393} = 0.91631$

C: $0.1094^{0.1847} * 12.6623^{0.0625} * 0.6285^{0.1496} * 1^{0.0195} * 0.8043^{0.0425} * 0.7917^{0.0463} * 1.2596^{0.1626} * 1.5866^{0.3393} = 0.867465$

Normalizando los valores anteriores de cada opción queda:

A) 0.43096
B) 0.29231
C) 0.27673

Por lo que la mejor opción es también comprar la casa A, la cual tiene una preferencia de 1.4743 veces sobre la opción B y de 1.5573 veces sobre la casa C. Asimismo la opción B tiene una preferencia de 1.0563 veces sobre la casa C

4.4 Consideraciones de grupo

Tanto el sistema PAJ como el sistema REMBRANDT son capaces de resolver problemas de toma de decisiones de grupo. El método PAJ es frecuentemente utilizado en ambientes de grupo.

En la mayoría de las aplicaciones, el consenso de grupo parece ser usado como base para una serie de comparaciones, por lo que los cálculos son sencillos. Mitchel y Bingham en 1986, realizaron aplicaciones en las que involucraron a un gran número de personas. Se utilizó el consenso de directivos como base para los niveles altos de jerarquización mientras el consenso de técnicos expertos se utilizó para la evaluación del desarrollo relativo de las alternativas disponibles en cada componente jerarquizado.

En la presentación de un sistema para auxilio en la toma de decisiones de grupo, el investigador Iz (1991,1992) propuso una aproximación diferente, donde un método geométrico de valuación individual fue usado como la base para la entrada de datos de las comparaciones que posteriormente se calcularon en forma tradicional de un vector característico. En la toma de decisiones de grupo, el apoyo a una iteración de grupo es más importante que una solución particular resultante. El grupo debe alcanzar consenso (al menos hasta cierto grado) sobre la mejor solución porque así lo acordaron y no porque PAJ o REMBRANDT o cualquier otro método sugiera una alternativa en particular.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A lo largo de la presente tesis, se han analizado desde los conceptos básicos en la toma de decisiones, y su clasificación. Se expusieron los métodos en cuestión, siendo su naturaleza semejante; aunque con ciertas diferencias principalmente matemáticas que así enmarcan las mejoras como también el manejo de una escala un poco diferente, que trae como consecuencia diferentes aptitudes psicológicas para el decisor ante un problema de decisión. A manera de resumen, las características principales del método PAJ son

- El método PAJ es utilizado para determinar valores proporcionales de comparación por pares, las cuales pueden ser tomadas de las mediciones actuales o de escalas fundamentales que reflejan la intensidad de las preferencias y sentimientos del decisor.

- El método ayuda a la toma de decisiones en problemas complejos, simplificando el proceso por medio de tres principios que se aplican en la solución de problemas:

    1. **Principio de descomposición:** Conduce a la estructuración de una jerarquía que contiene los elementos básicos del problema.

    2. **Principio de opiniones comparadas:** Se manejan matrices de evaluaciones por pares de cada uno de los atributos en cuestión.

    3. **Principio de síntesis de prioridades:** Usado para generar la prioridad compuesta de los elementos.

Las ventajas principales del PAJ son:

1. Su concepción es simple
2. Descompone el problema en subproblemas, tomando lo más importante
3. Al hacer comparaciones, las alternativas se comparan por pares
4. Usa una escala que permite medir la intensidad de preferencias
5. Flexible para ser revisado y cuestionado
6. Conduce a un estimado global del desempeño de las alternativas

Las desventajas principales del PAJ son:

1. Requiere de que se haga una nueva revisión cada vez que se elimine o incluya una nueva alternativa
2. Es una escala prefijada y sus valores no tienen fundamento alguno.
3. La escala numérica es empleada para derivar escalas de proporción
4. Debería incluir el punto cero para satisfacer las propiedades de una escala de proporción

Actualmente este método es una técnica en la toma de decisiones, sin embargo es cuestionado por los investigadores en el ámbito mundial.

Existe *software* que ha sido desarrollado por terceros donde se emplea este algoritmo, y se le compara con otras técnicas. En cuanto a las aportaciones del método Rembrandt tenemos que se efectúan las comparaciones entre las alternativas, para cada criterio, según la escala. La matriz de los valores es similar a la del PAJ, obtenida a partir de comparaciones binarias, se transforma a una utilidad por su regresión logarítmica.

En el capítulo tres se mencionó tres mejoras del método de Rembrandt sobre el AHP y podemos apreciar que la mejora de la escala verbal al construir las matrices se manifestó. La segunda mejora que mide el cálculo del impacto con la introducción de la regresión logarítmica ayuda a que el decisor exprese mejor las preferencias y por último en lo que corresponde a la agregación de resultados ayuda perfectamente al permitir 25 criterios y un subordinado más también de 25 alternativas, lo cual ayuda ampliamente al planteamiento de problemas de decisión.

Los dos problemas planteados en el capítulo cuatro fueron resueltos por ambos métodos y aunque concluyen en la misma decisión, se puede observar que el desempeño matemático del método Rembrandt es más confiable y hace que el decisor, tomando en cuenta las aportaciones, sienta que su resultado obtenido sea más coherente y confiable.

En cuanto a mantener una postura imparcial ante los alcances de estos métodos, es importante considerar lo siguiente:

1. El tipo de problema de decisión.
2. El manejo y obtención de las jerarquías
3. El nivel de criterios y sub.-criterios.
4. El grupo de tomadores de decisiones

Para poder recomendar un método sobre otro, se tendría que analizar problema tras problema, según las consideraciones especiales del caso, y ver si el método Rembrandt resuelve mejor o aporta una mejor decisión que sea significativa. Mientras no se tenga el universo de problemas resueltos por ambos métodos, no se puede emitir un juicio preciso. Queda a consideración del decisor, el conocer los métodos expuestos y utilizar el que más le convenga.

BIBLIOGRAFÍA

1. Anderson, Sweeney Williams. *An introduction to management science.* South Western College Publishing. Novena edición. Estados Unidos de Norteamérica.

2. Ahti A Salo and Raimo P. Hamalainen. *On the measurement of preferences in the analytic hierarchy process.* Helsinki University of technology. Finlandia.

3. Antonie Stam, A. Pedro Duarte Silva 1991 *A Multiplicative method for synthesizing preference ratings.* Terry College of Business, Atenas, Georgia.

4. AntúnJ.P: *1994 Toma de decisiones multicriterio: El enfoque ELECTRE.* Series de publicaciones del Instituto de Ingeniería UNAM. México.

5. Bana e Costa Aid. Springer Verlang 1990 *Readings in Multicriterial Decisions* ---, Alemania.

6. Bana e Costa y Vansnick 1994 *The MACHBETH approach: General overview and applications* Chania. Grecia

7. Barba-Romero S. 1997 *Decisiones Multicriterio.* Universidad de Alcalá

8. Bouyssou, D. 1990 *Building criteria: a prerequisite for MCDA. Readings in Multiple criteria decision aid* Springer verlag Francia.

9. Brans, J. P, B Mareschal 1997. *Multicriterial Decision Aid The PROMETHEE. GAIA Solution.* Documento de Trabajo del Centro Voor Statistiek en Operationell Onderzoek.

10. Brans, J. P, P Vincke 1985. *A Preference Ranking Organization Method (the PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision Making.* Management Science 31.

11. Cano González Maria Gabriela *Modelado de preferencias multicriterio mediante una función de valor cardinal* Tesis DEPFI T. UNAM 1997

12. European Journal of Operational Research 26, *(1986) 7-21 North –Holland*

13. European Journal of Operational Research, *Vol. 82, Num 3, Mayo 4 de 1995*

14. European Journal of Operational Research Special Issue: *Decision Making by the Analytic Hierarchy Process: Theory and Applications Volume 48, Number 1, September 5, 1990*

15. F.A. Lootsma *Scale sensitive in the multiplicative AHP and SMART* Journal of multicriterial decision analysis " 2, 87-110, 1993

16. F.A. Lootsma. *Multi-Criteria Decision Analysis via Radio and Difference judgment.* Kluwer Academic Publishers, 1999

17. Fishburn P: C *1989 Utility theory for decision making* Estados Unidos de Norteamérica

18. García Olivares Conrado *Bases conceptuales y metodologías para la toma de decisiones en presencia de objetivos y criterios múltiples* Tesis *DEPFI UNAM 1990 GAR*

19. Harman, H 1967 *Modern Factor Analysis USA* Chicago Press University

20. Jonson, C.R. Beine, W.B. and Wang,T.J. "Right *–Left Asymmetry in an Eigenvector Ranking procedure* Journal of mathematical Psychology 19, 61-64, 1979

21. *Journal of Multi-criteria Decision Analysis Scale Horizons in Analytic Hierarchies*

22. Juan Prawda *Métodos y modelos de investigación de operaciones* Vol.2 Editorial Limusa-Omega, México.

23. Keeny. R.S., Rafia 1976 *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs* New York John Willey & Sons

24. Luce T. 1987 *The analytic Hierarchy Process — A survey of the method and its applications* Holland

25. Mercado E 1996 *Técnicas para la toma de decisiones Editorial Limusa, México*

26. Plazola Laura *Toma de decisiones con preferencias borrosas* Tesis *DEPFI UNAM 1999*

27. Roy, B. 1989 *Decision Aid and decision making,* Document Du Lamsade No. 51

28. Sergio Barba-*Romero Decisiones Multicriterio.* Colección de Economía de Alcalá 1997. servicios UAH

29. Solís Mexicano Anastasio. *El proceso de análisis jerárquico y la toma de decisiones.* Tesis DEPFI, UNAM 1992 SOL

30. Steuer,R. 1985 *Multiple criteria Optimization theory, Computation and application* New York John Willey & Sons

31. Simon F. 1988 *Decision theory* USA John Willey & Sons.

32. Stevens, S. 1959 *La medición y el hombre Suplementos del seminario de problemas científicos y filosóficos México* UNAM

33. T.L. Saaty *The Analytic Hierarchy Process (New York: McGraw Hill, 1988)*

34. Wayne L. Winston 1997 *Practical Management Science USA*, ITP