



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA

MENESES SOSA HÉCTOR

TESIS DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA  
(Mecánica de Suelos)

CONFIABILIDAD EN CIMENTACIONES  
DE TANQUES

ASESOR: DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

NOVIEMBRE 2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A KARLA IVONNE, MI AYUDA IDÓNEA Y COMPAÑERA

A HÉCTOR EMILIO Y MIGUEL ALFONSO, MIS AMADOS HIJOS SABRIENDO QUE EL  
FUNDAMENTO Y ROCA ES JESUCRISTO

Los dos cimientos

*“Todo aquel que viene a mí, y oye mis palabras y las hace, os indicaré a quién es semejante. semejante es al hombre que al edificar una casa, cavó y ahondó y puso el fundamento sobre la roca; y cuando vino una inundación, el río dio con ímpetu contra aquella casa, pero no la pudo mover, porque estaba fundada sobre la roca. Más el que oyó y no hizo, semejante es al hombre que edificó su casa sobre tierra, sin fundamento; contra la cual el río dio con ímpetu, y luego cayó, y fue grande la ruina de aquella casa”*

Jesucristo, Lucas 6: 46 al 49

A MI SEÑOR JESUCRISTO, POR HABERME PERMITIDO LLEVAR A CABO ESTOS ESTUDIOS DE MAESTRÍA. GRACIAS SEÑOR.

A MI AMADA ESPOSA, KARLA IVONNE, POR SU AMOR Y APOYO TOTAL DURANTE TODO ESTE TIEMPO.

A MIS HIJOS, HÉCTOR EMILIO Y MIGUEL ALFONSO, POR SU PACIENCIA Y AMOR SIN LIMITES.

A MI MADRE, ANGÉLICA SOSA, POR SUS CONSEJOS Y AMOR.

A MI PADRE, JAIME MENESES, POR SU APOYO Y ALIENTO

MIS TIOS, ROGELIO ZAVALA Y FRANCIS SOSA, POR SU AYUDA PARA LOGRAR TERMINAR ESTE TRABAJO

A MI TUTOR DE TESIS DE LA UNAM, DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD, POR SU TIEMPO, PACIENCIA Y GUIA PARA LA REALIZACIÓN Y TERMINACIÓN DE ESTA META.

A LOS MIEMBROS DEL JURADO, DR. EFRAIN OVANDO SHELLEY, DR. RIGOBERTO RIVERA CONSTANTINO, DR. VICTOR MANUEL TABOADA URTUZUASTEGUI Y M EN I. ROBERTO MAGAÑA DEL TORO, POR SUS COMENTARIOS, CONSEJOS E INFLUENCIA PARA MI DESARROLLO PROFESIONAL.

A MI TUTOR INTERNO DEL IMP, DR. OSCAR ANTONIO FLORES MACIAS, POR SU TIEMPO, APOYO Y AMISTAD QUE DAN HOY ESTE RESULTADO.

A MIS AMIGOS Y COMPAÑEROS DE CLASES, ING. HUMBERTO DOMÍNGUEZ DÁVILA Y ING. RICARDO ORTIZ HERMOSILLO, POR SU AMISTAD Y COMPAÑERISMO.

A LA LIC. SELVA GÓMEZ NIETO, POR SU CARIÑO PARA MI FAMILIA Y SU PACIENCIA PARA CONMIGO.

AL INSTITUTO MEXICANO DEL PETRÓLEO, POR EL FOMENTO AL DESARROLLO PROFESIONAL DE SU PERSONAL Y POR DARMÉ LA OPORTUNIDAD DE CAPACITARME Y DEPOSITAR EN MÍ LA CONFIANZA DE LOGAR ESTE OBJETIVO.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, POR ABRIRME SUS PUERTAS PARA ADQUIRIR UN NUEVO CONOCIMIENTO.

Y AL SEÑOR JESUCRISTO, POR SU LUZ, AMOR Y FORTALEZA EN MÍ VIDA.

# Índice

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2. CIMENTACIÓN DE TANQUES	3
2.1. Introducción	3
2.2. Tipos de tanques	4
2.3. Tipos de cimentaciones	9
2.4. Métodos tradicionales de revisión de seguridad	14
CAPÍTULO 3. SEGURIDAD Y CONFIABILIDAD	34
3.1. Introducción	34
3.2. Conceptos generales de confiabilidad	34
3.3. Análisis de confiabilidad	38
3.3.1. Problema básico	38
3.3.2. Confiabilidad en el caso de variables aleatorias con distribuciones comunes	42
3.3.2.1. Distribución normal estándar	43
3.3.2.2. Distribución lognormal	44
3.3.3. Confiabilidad asociada a un estado límite	46
3.3.4. Confiabilidad de sistemas	50
3.3.4.1. Modos de falla múltiple	50
3.3.4.2. Fronteras de probabilidad	52
3.3.4.3. Fronteras bimodales	55
3.3.5. Sistemas en serie	61
3.3.6. Sistemas en paralelo	62
3.4. Métodos de cálculo	62
3.4.1. Introducción	62
3.4.2. Métodos de segundos momentos de primer orden	63
3.4.2.1. Propiedades del criterio de segundos momentos	66
3.4.2.2. Método estándar	67
3.4.2.3. Métodos avanzados	69
3.4.2.4. Método de los multiplicadores de Lagrange	72
3.4.2.5. Algoritmo numérico de Rackwitz	75
3.4.2.6. Distribuciones normales equivalentes	75
3.4.2.7. Exactitud de la aproximación lineal	77

3.4.3	Aplicación de la técnica del cociente polinomial al análisis de confiabilidad de segundos momentos	79
3.4.4	Método de simulación de Monte Carlo	83
3.4.4.1	Generación de números aleatorios	83
3.4.4.2	Números aleatorios con distribución uniforme estándar	85
3.4.4.3	VARIABLES aleatorias continuas	86
3.4.4.4	Generación de números aleatorios conjuntamente distribuidos	88
3.4.4.5	Generación de variables aleatorias normales correlacionadas	90
3.4.4.6	Cálculo de la confiabilidad	92
3.4.4.7	Tamaño de la muestra y error en la simulación	92
3.4.5	Estimación puntual de Rosenblueth	93
3.4.5.1	Estimación bipuntual	94
3.4.5.2	Función de varias variables	96
 <b>CAPÍTULO 4. APLICACIÓN A CIMENTACIONES DE TANQUES</b>		 97
4.1	<u>O</u> bjetivos del análisis de confiabilidad	97
4.2	<u>P</u> roblema estudiado	97
4.3	<u>E</u> stados límite del modelo	104
4.4	<u>V</u> ariables aleatorias y de control	106
4.5	<u>C</u> aracterísticas de las variables del problema	106
4.6	<u>C</u> orrelación entre las variables	107
4.7	<u>S</u> elección del tamaño de la muestra	107
4.8	<u>P</u> lanteamiento del análisis de confiabilidad	109
4.9	<u>R</u> esultados del análisis de confiabilidad	112
4.10	<u>A</u> nálisis complementarios de confiabilidad	113
4.11	<u>R</u> esultados de los análisis complementarios	114
4.12	<u>M</u> odificación de las variables de control	118
 <b><u>C</u>ONCLUSIONES</b>		 123
 <b>APÉNDICE A. MODELO DE SIMULACIÓN</b>		 125
<b>APÉNDICE B. MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKY</b>		130
 <b><u>R</u>EFERENCIAS</b>		 133

## Capítulo

## 1

## Introducción

La tendencia de la ingeniería civil, hoy más que nunca, está orientada hacia la obtención de diseños económicos con niveles altos de seguridad. Sin embargo, en el campo de la geotecnia, las decisiones de diseño suelen tomarse bajo un alto grado de incertidumbre, tal como ha sido señalado por Peck (1962) y Casagrande (1965).

En los problemas geotécnicos, las principales incertidumbres provienen de: 1) la falta de precisión en la determinación de las propiedades ingenieriles de los suelos, presiones de poro y esfuerzos *in situ* a partir de un número limitado de pruebas de campo y/o laboratorio, 2) la variabilidad espacial de las propiedades del suelo 3) el conocimiento solamente aproximado de las condiciones de frontera del problema, 4) la falta de información suficientemente precisa acerca de la magnitud y distribución de las acciones impuestas, y 4) las aproximaciones e insuficiencias del modelo matemático utilizado en los análisis ingenieriles. Si la incertidumbre en el modelo matemático empleado es importante, ningún refinamiento en la determinación de las propiedades del suelo mejora la calidad del análisis efectuado. Sin embargo, en muchos problemas geotécnicos, la principal duda recae en la determinación de la relación esfuerzo-deformación del suelo y de su resistencia ante diferentes sollicitaciones y en la evaluación de la variación espacial de estos parámetros.

El empleo de análisis deterministas y factores de seguridad convencionales, que en muchos casos reflejan la propia experiencia del ingeniero ante problemas similares, resulta ser engañosa y puede conducir a un concepto falso de seguridad. El diseño de las obras geotécnicas y la evaluación de su seguridad se pueden mejorar adoptando métodos probabilistas que tomen en cuenta el carácter incierto de la información, asignando un carácter aleatorio a los parámetros que intervienen en el diseño geotécnico y a su evolución en el espacio y tiempo. Estos métodos permiten estimar la probabilidad de falla de la obra y su complemento a la unidad: la *confiabilidad*. Ellos proporcionan una medida homogénea de la seguridad de la obra.

En teoría, el estudio de la confiabilidad de una obra se puede desarrollar de la siguiente manera:

- Identificando todos los mecanismos posibles de falla del sistema.
- Estableciendo, para cada mecanismo, las ecuaciones de falla en función de la resistencia de los elementos que en él intervienen y de las cargas que los solicitan.
- Seleccionando los parámetros del sistema que deben considerarse como aleatorios y definiendo sus parámetros estadísticos
- Obteniendo, finalmente, la confiabilidad asociada a cada función de estado límite del sistema y la confiabilidad global del mismo.

Es conveniente señalar que el análisis de confiabilidad no permite eliminar las deficiencias propias del mecanismo de falla elegido; es por ello que debe realizarse a partir de un modelo mecánico satisfactorio.

Muchos ingenieros geotecnistas parecen titubear ante la posibilidad de sacar ventaja de los procedimientos probabilistas. Es por eso que uno de los objetivos de este trabajo consiste en promover y difundir esta técnica que puede ser aplicada al gran número de teorías que conforman la mecánica de suelos moderna. El Instituto Mexicano del Petróleo, como una entidad encargada de la asimilación y desarrollo de tecnología para en aplicación a la Industria Petrolera Nacional, ha creado recientemente una oficina cuyo propósito es la aplicación de estos conceptos y el presente trabajo tiene la intención de contribuir al fortalecimiento de esta área y a las demás donde la confiabilidad sea aplicable.

En el capítulo dos del presente trabajo se hace una breve reseña del uso de los tanques, se describen los tipos que existen, sus cimentaciones y los que comúnmente son usados por PEMEX. Asimismo, se hace una recopilación de las normas que rigen el diseño de las cimentaciones de estas estructuras.

En el capítulo tres establecen los conceptos fundamentales relacionados con seguridad, se revisan los principales métodos de cálculo disponibles para cuantificar la confiabilidad o la probabilidad de falla de una obra determinada.

Finalmente, en el capítulo cuatro se ilustra el uso de estas técnicas revisando la confiabilidad de las cimentaciones de tanques en condiciones típicas de la Zona Sur de Pemex Exploración - Producción. Se aplican los métodos de cálculo expuestos en el capítulo tres a un tanque de 10,000 barriles de capacidad, de 14 m de diámetro y de 12 m de altura ubicado en la zona lacustre de Nacajuca Tabasco con una cimentación a base de pilotes de fricción. En las conclusiones se analizan los principales factores que intervienen en la confiabilidad de estas obras y se evalúa la utilidad de las técnicas probabilistas en su diseño.

## Cimentación de tanques

### 2.1 INTRODUCCIÓN

La necesidad de almacenamiento de materiales granulares como: granos, arenas, cementos, etc., de líquidos como el agua y productos derivados del petróleo han hecho que el hombre realice obras que satisfagan este requerimiento.

El almacenamiento ha sido también relacionado con la prosperidad y riqueza de una comunidad, así como de seguridad, por que con un almacenamiento estratégico se puede satisfacer una necesidad o manipular la economía, como es el caso de la industria petrolera mundial.

Para el presente trabajo el almacenamiento de los hidrocarburos, en el caso particular del petróleo crudo, es de principal importancia. En los inicios de la industria petrolera hasta el comienzo del siglo XXI, el almacenamiento del crudo, ha representado una dificultad que se resolvió desde el uso de barriles, que al aumentar la producción y demanda del petróleo, generó el problema de colocar estos en un lugar amplio sin medidas de seguridad apropiadas, ya que cada barril representaba un peligro potencial para el hombre y las instalaciones de la época, provocando accidentes que en muchas veces fueron fatales; hasta el uso, irónico, del almacenamiento subterráneo en cavidades artificiales como el la región de Tuzandepetl, Veracruz, donde se aprovecha el estrato de sal para generar cavernas salinas.

Una de las soluciones que se desarrollaron en los inicios de la industria, fue el almacenamiento en depósitos un poco mayores que los barriles, pero que permitían un mayor contenido de crudo y que evolucionaron en lo que hoy conocemos como tanques de almacenamiento, siendo una de sus principales características, el de estar colocados "superficialmente", es decir, se construyen sobre el suelo. Los tanques modernos han llegado a tener capacidades muy superiores a los cientos de barriles, como lo es el caso de los tanques de 500,000 barriles que se ubican en la terminal marítima de Dos Bocas de Paraíso, Tabasco México.

El diseño de estas estructuras es muy importante, ya que al contener una cantidad tan grande del crudo representan un riesgo para el hombre así como para su entorno.

La cimentación de estos tanques, deben garantizar que no sufrirán asentamientos que pongan en peligro su integridad estructural así como la de las conexiones a las tuberías. La capacidad de carga del suelo donde se coloque estas instalaciones, también debe garantizar que no provoque fallas en fondo como en el apoyo de la cimentación del tanque.

En los siguientes puntos de este capítulo, se hará una descripción de los tipos de tanques, sus cimentaciones y los métodos de seguridad que se usan en la industria petrolera nacional.

## 2.2 TIPOS DE TANQUES

### 2.2.1 GENERALIDADES

Aun cuando nos refiramos a todos los sistemas de tanques que están “encima de la superficie del suelo”, técnicamente hay dos clasificaciones: elevados y superficiales. Los tanques elevados se definen como instalaciones cuya área total de la superficie exterior, incluyendo el fondo, es fácilmente visible. Este tanque puede estar localizado dentro una bóveda siempre y cuando la bóveda no sea rellena y no se pueda realizar una inspección visual del tanque. Figuras 2.2.1 a y b.

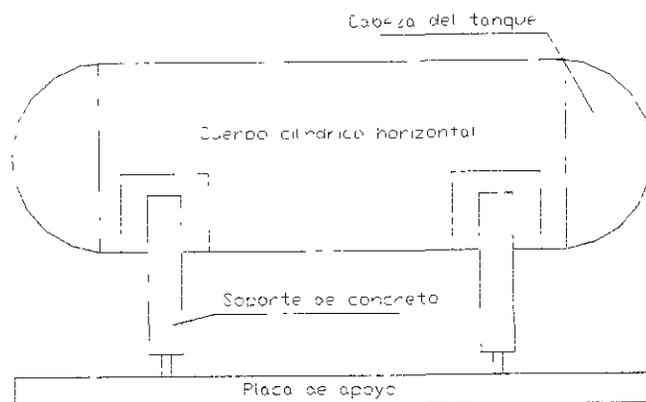


Figura 2.2.1 a Tanque elevado horizontal

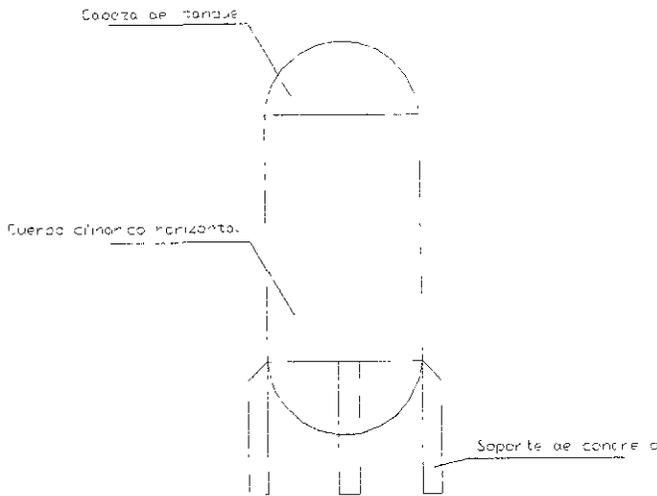


Figura 2.2.1 b Tanque elevado vertical.

Un sistema de tanque superficial, se define cuando la base exterior del mismo no es fácilmente visible debido a que se encuentra cubierta por el piso de operación o enterrada por material circundante al tanque. Al igual que la descripción anterior, este tanque puede estar dentro de una bóveda, siempre y cuando no sea rellena, lo que lo convertiría en un tanque subterráneo. Figuras 2.2.1 c y c'

Los tanques superficiales incluyen:

- a) Tanques cilíndricos de pequeño volumen apoyados sobre una placa base.
- b) Tanques de gran volumen soldados a la placa base
- c) Tanques atmosféricos o de baja presión, los cuales pueden ser prefabricados o construidos en el sitio

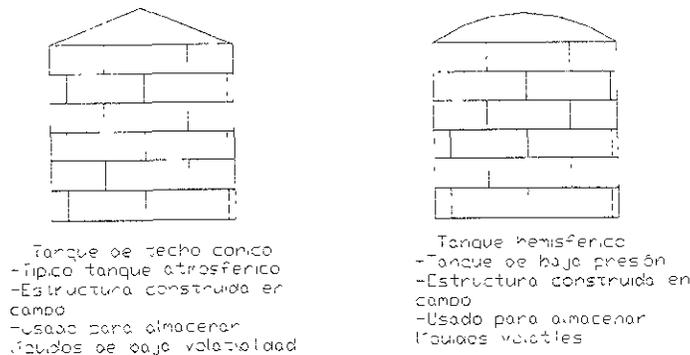
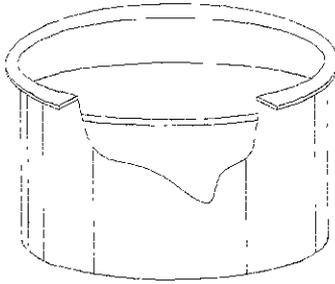
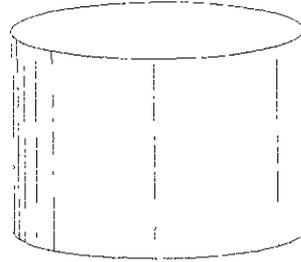


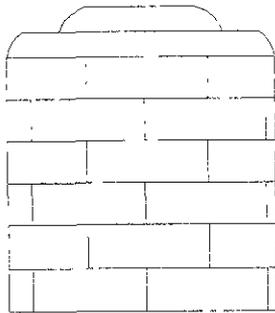
Figura 2.2.1 c Tanques.



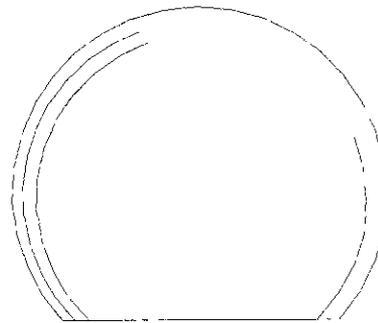
- Tanque de techo flotante
- Tanque atmosférico
- Estructura construida en campo
- Diseñado para la reducción de las pérdidas por evaporación incrementando el riesgo por fuego



- Tanque cilíndrico vertical
- Tanque de baja presión
- Estructura construida en campo



- Tanque con protuberancia hemisférica
- Tanque de baja presión
- Estructura construida en campo
- Usado para almacenar líquidos volátiles



- Tanque esférico
- Tanque de baja presión
- Estructura construida en campo
- Usado para almacenar líquidos volátiles bajo presión

Figura 2.2.1 c' Tanques.

Los tanques de gran volumen pueden tener techos de diseño cónico, esférico y hemisférico. La clasificación del tanque en elevado o superficial depende del material líquido que se va almacenar, equipo requerido para transferencia de calor, insolación, refrigeración, presurización, subpresión de vapor, etc. Las necesidades de diseño son de altas especificaciones en el caso particular de aplicación en tanques.

### 2.2.2 CONFIGURACIONES DE TANQUES

Los tanques de almacenamiento son usados para contener una gran variedad de químicos y de productos petroleros. Los tipos de tanques de almacenamiento comúnmente usados se pueden dividir en tres categorías:

- Tanques atmosféricos
- Tanques de baja presión
- Tanques a presión

Los tanques atmosféricos han sido diseñados para operación de presiones internas de gases y vapores muy cercanos a la presión atmosférica. La agencia estadounidense OSHA (Administración federal seguridad y salud) define a estos tanques como:

*“Los tanques atmosféricos son aquellos tanques de almacenamiento que han sido diseñados para operar a presiones de 0.5 psig (3.5 Pa)”*

En muchos casos, los tanques atmosféricos son protegidos con venteos o desfuegos de presión excesiva para controlar la diferencia de presiones dentro y fuera del tanque.

Los materiales que los tanques atmosféricos pueden almacenar son, por ejemplo: productos del petróleo como benceno, tolueno, xileno, formaldehído, cloroformo, alcohol; cáusticos y ácidos como: hidróxido de sodio, ácido sulfúrico, ácido hidrociorídrico; desperdicios acuosos y orgánicos así como agua tratada, como la usada en sistemas contraincendios.

Los tanques atmosféricos son construidos comúnmente por placas de acero al carbón o aleación de acero. El uso de otras combinaciones de metales en su construcción permite su empleo bajo condiciones especiales y los hace resistentes a materiales corrosivos. Algunos son construidos con fibra de vidrio reforzado con plásticos (FRP) o plásticos sin refuerzos como polivinilo clorhídrico (PVC) y polipropileno.

### 2.2.3 CONFIGURACIONES DE TANQUES COMUNES EN MÉXICO

En la industria petrolera nacional, existen numerosos tipos de recipientes que se utilizan en las plantas industriales o de proceso. Algunos de estos tienen la finalidad de almacenar diferentes sustancias que se dirigen o convergen de algún proceso, este tipo de recipientes son llamados, en general tanques. Como ejemplo se pueden mencionar los de almacenamiento, reposo, mezcladores, balance, etc.

En las figuras 2.2.3 a y 2.2.3. b, se muestran, esquemáticamente, los tanques de almacenamiento "abierto", es decir sin techo y el "cerrado" con domo cónico, respectivamente.

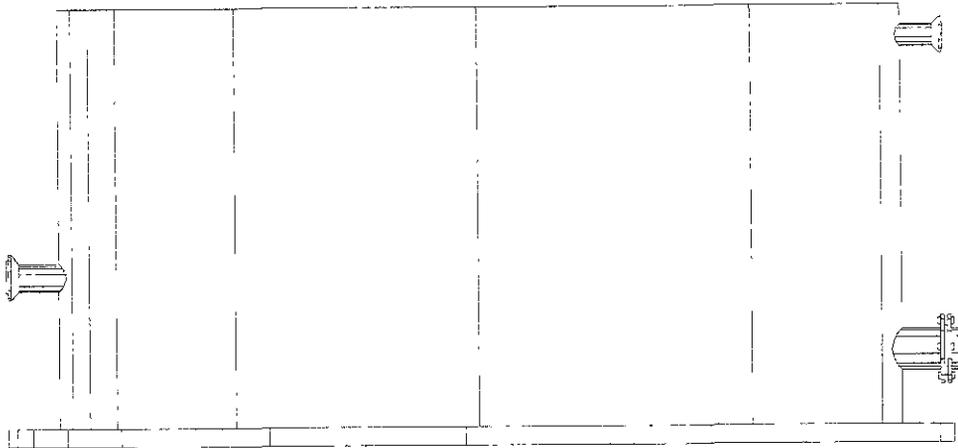


Figura 2.2.3 a Tanques atmosférico abierto

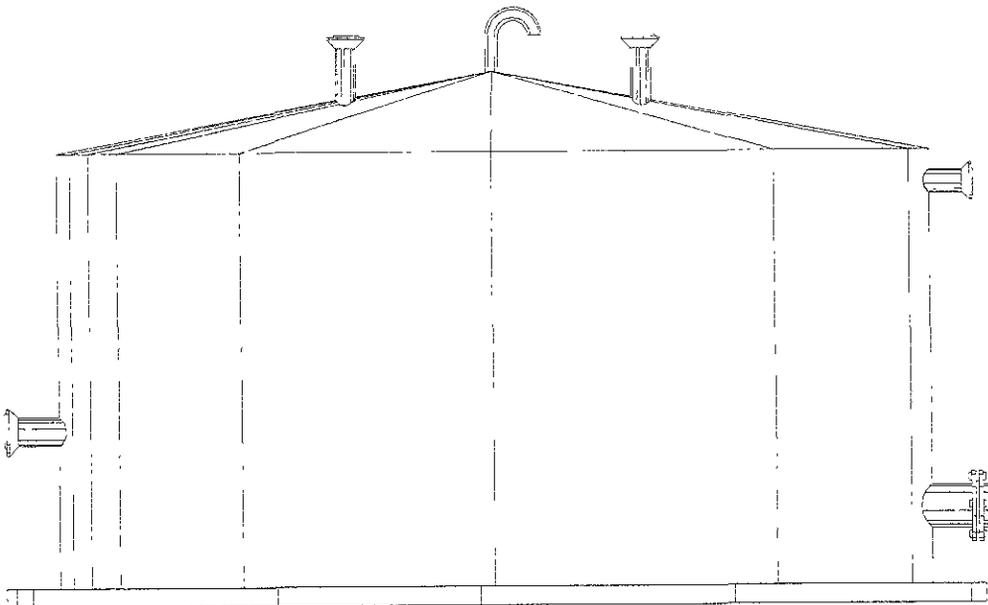


Figura 2.2.3 b Tanques atmosférico cerrado

Comúnmente el tanque de almacenamiento abierto se utiliza para almacenar agua o alguna otra sustancia no tóxica, al contrario del tanque de

almacenamiento cerrado que puede manejar sustancias tóxicas o reactivas y puede ser de techo fijo o flotante.

Además de los anteriores, existen los tanques esféricos que son utilizados normalmente para el almacenamiento de grandes volúmenes de fluidos o gases a presiones moderadas y a bajo costo, figura 2.2.3 c.

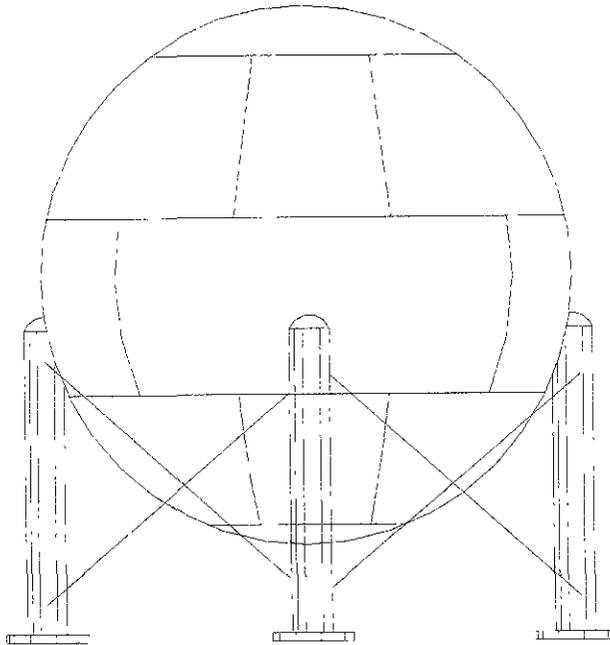


Figura 2.2.3 c Tanques esférico.

## 2.3 TIPOS DE CIMENTACIONES

### 2.3.1 GENERALIDADES

Las cimentaciones de los tanques atmosféricos son fundamentales, ya que una cimentación apropiada, garantizará una vida útil cercana a la proyectada para la estructura; dará seguridad para el tanque, así como para el contenido del mismo. Aquí debe resaltarse que, una buena cimentación debe estar soportada por un buen diseño basado en una buena exploración y muestreo del suelo donde este se va a colocar, junto con una determinación de propiedades mecánicas que caractericen lo más completo posible al suelo.

Las cimentaciones de los tanques pueden ser de lo más variado, como lo es el criterio del especialista de suelos que ejecute el diseño. Es por esta diversidad que se enuncian a continuación, los tipos de cimentación que PEMEX usa comúnmente y que el Instituto Mexicano del Petróleo diseña.

### 2.3.2 CIMENTACIONES SUPERFICIALES

Al considerarse adecuado un desplante superficial para un tanque se utilizará una de las soluciones enunciadas a continuación:

#### 2.3.2.1 CIMENTACIÓN SOBRE MURO ANULAR DE CONCRETO REFORZADO

Este tipo de cimentación es recomendable para cualquier tipo de tanque, pero en particular para tanques de techo flotante y para tanques de más de 30 metros de diámetro o de 12 metros de altura.

Las principales características de este tipo de cimentación se encuentran resumidas en la figura 2.3.2 a. El fondo del tanque descansará sobre un terraplén cuya altura se fijará en función de la magnitud de los asentamientos totales esperados y de la posibilidad de inundación de la zona; en ningún caso esta altura será inferior a 30 cm sobre el nivel circundante. El terraplén se construirá después de sustituir el material superficial indeseable por material libre de materias orgánicas y productos corrosivos, cuyas condiciones de compactación cumplirán con las especificaciones de la tabla 1. Los diez centímetros superiores del terraplén serán constituidos por arena limpia gruesa, grava o piedra molida, con tamaño de partícula de 1 a 2.5 cm. Este estrato se estabilizará con un producto asfáltico para poder dar a la superficie de apoyo la forma adecuada. El producto empleado deberá presentar toda garantía contra corrosión galvánica e incendio durante las operaciones de soldadura. Se dará una ligera pendiente a la superficie de apoyo del centro hacia la periferia con objeto de compensar los asentamientos diferenciales y facilitar el lavado y la remoción de sedimentos del tanque. La pendiente se fijará en función de la magnitud de los asentamientos diferenciales esperados pero no deberá ser inferior al 1%.

El muro anular de concreto se construirá con el propósito de repartir la carga concentrada de la pared cilíndrica, facilitar la construcción del tanque, proteger el terraplén durante y después de la construcción y aislar el fondo de la humedad. El muro deberá descansar sobre suelo inalterado o compactado y ser dimensionado de tal forma que la presión de contacto en su parte inferior sea aproximadamente igual a la presión actuante en el relleno confinado a la misma profundidad. Usando este criterio, el ancho se calculará a partir de la siguiente ecuación:

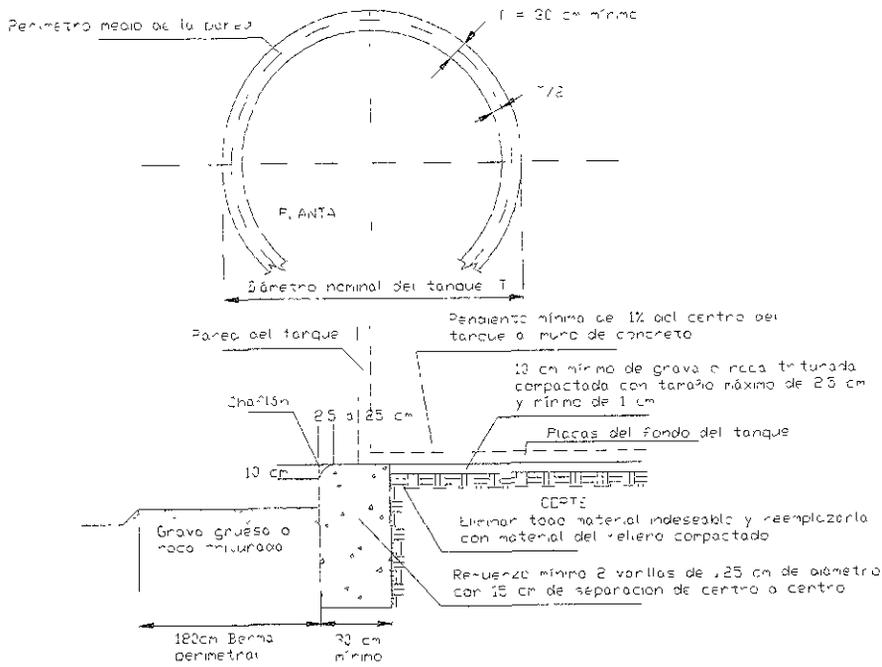


Figura 2.3.2 a Cimentación sobre muro anular de concreto

$$b = \frac{100W}{\frac{\gamma_f H}{3} + h(\gamma_m - \gamma_c)} \quad (2.1)$$

Donde:

$b$  = ancho del muro, cm

$H$  = altura del tanque, m

$h$  = altura del muro, m

$W$  = peso de la pared lateral de acero y de la fracción de techo soportada por metro lineal, t/m

$\gamma_f$  = peso volumétrico del fluido, t/m<sup>3</sup>

$\gamma_m$  = peso volumétrico del relleno confinado, t/m<sup>3</sup>

$\gamma_c$  = peso volumétrico del concreto reforzado, t/m<sup>3</sup>

En ningún caso el ancho del muro podrá ser inferior a 30 cm.

El muro será reforzado en forma continua a lo largo de toda la circunferencia para resistir la presión horizontal atribuible al material confinado y a la sobrecarga del fluido. La tensión en el muro se calculará con la expresión:

$$T = \frac{p_o D}{2} \tag{2.2}$$

Donde:

$T$  = fuerza de tensión en la sección del muro, t

$D$  = diámetro, m

$p_o$  = presión horizontal atribuible al efecto combinado del relleno y de sobrecarga del fluido, t/m<sup>3</sup>, la cual se calculará en la forma con:  $p_o = K_a(\gamma_m h + \gamma_f H)$  donde

$\gamma_m$ ,  $h$ ,  $\gamma_f$  y  $H$  ya fueron definidos y  $K_a$  es igual a  $\tan^2\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right)$ , siendo  $\phi$  el ángulo de fricción interna del material de relleno. En ausencia de información confiable sobre el valor de este ángulo,  $K_a$ , podrá considerarse igual a 0.7.

### 2.3.2.2 CIMENTACIÓN SOBRE ZAPATA ANULAR DE GRAVA O ROCA TRITURADA

Este tipo de cimentación, figura 2.3.2 b, se considerará adecuado en caso de que no se justifique el empleo de un muro de concreto, en particular, si el suelo presenta una resistencia apreciable aun en los estratos superficiales.

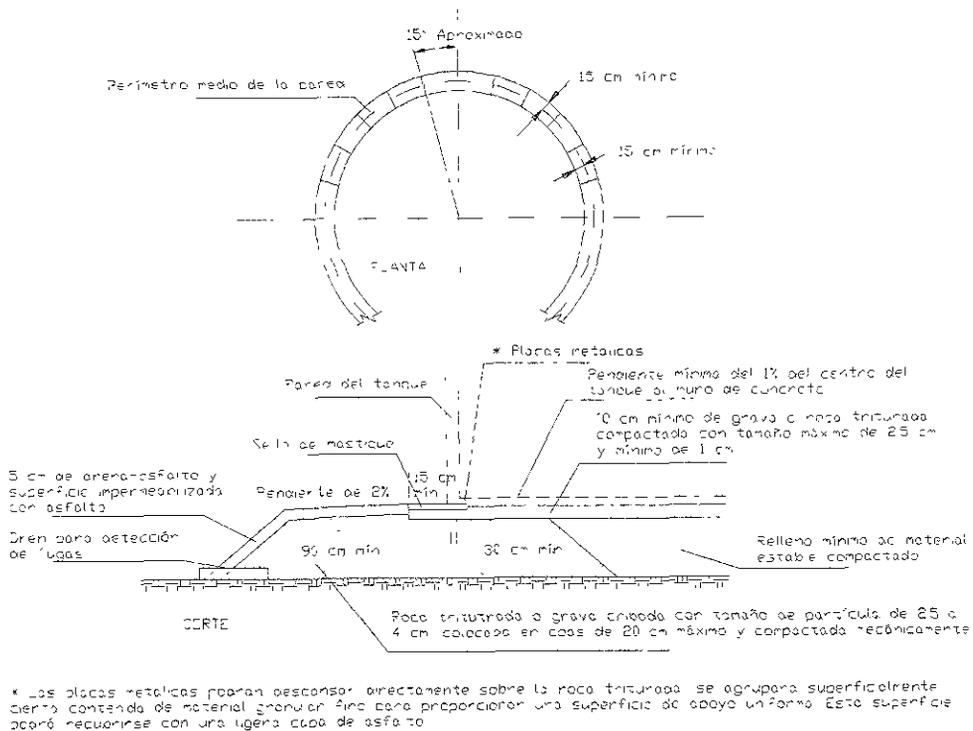


Figura 2.3.2 b Cimentación sobre zapata de grava o roca triturada

La base del tanque descansará sobre un terraplén cuyas características serán idénticas a las definidas anteriormente. La pared vertical se apoyará sobre la zapata anular de grava o roca triturada, a través de placas metálicas.

Estas placas deberán ser planas, de 1.25 cm mínimo de espesor y extenderse a ambos lados de la pared cilíndrica hasta una distancia mínima de 15 cm. Las tolerancias para la nivelación de estas placas serán las mismas que para los muros anulares de concreto. Para tanques de hasta 12 m de altura y diámetro menor a 30 m, las placas podrán omitirse.

Condición I		Condición II	
Terraplenes hasta 3 m de altura no sometido a inundaciones de larga duración		Terraplenes de más 3 m de altura o de menor altura sujetos periodos largos de inundación	
Peso volumétrico seco máximo de laboratorio, kg/m <sup>3</sup>	Exigencias mínimas de compactación en el terraplén (porcentaje de peso vol. Seco de lab.)	Peso volumétrico seco máximo de laboratorio, kg/m <sup>3</sup>	Exigencias mínimas de compactación en el terraplén (porcentaje de peso vol. Seco de lab.)
1439 o menos	*	1519 o menos	**
1440 - 1649	100	1520 - 1649	102
1650 - 1759	98	1650 - 1759	100
1760 - 1919	95	1760 - 1919	98
1920 y más	90	1920 y más	95

\* Los suelos con peso volumétrico seco máximo menor de 1440 kg/m<sup>3</sup> se considerarán inadecuados y no se utilizarán en terraplenes

\*\* Los suelos con peso volumétrico seco máximo menor de 1520 kg/m<sup>3</sup> se considerarán inadecuados y no se utilizarán en terraplenes bajo condición II

Además de la s condiciones indicadas anteriormente, los suelos tendrán un límite líquido menor de 65. El índice de plasticidad de los suelos con límite líquido comprendido entre 35 y 65 no será menor del valor que resulta de aplicar la fórmula  $I_p = 0.5 W_L - 9$ , siendo  $W_L$  el contenido de agua en el límite líquido. El máximo peso volumétrico se determinará por el ensaye Proctor estándar.

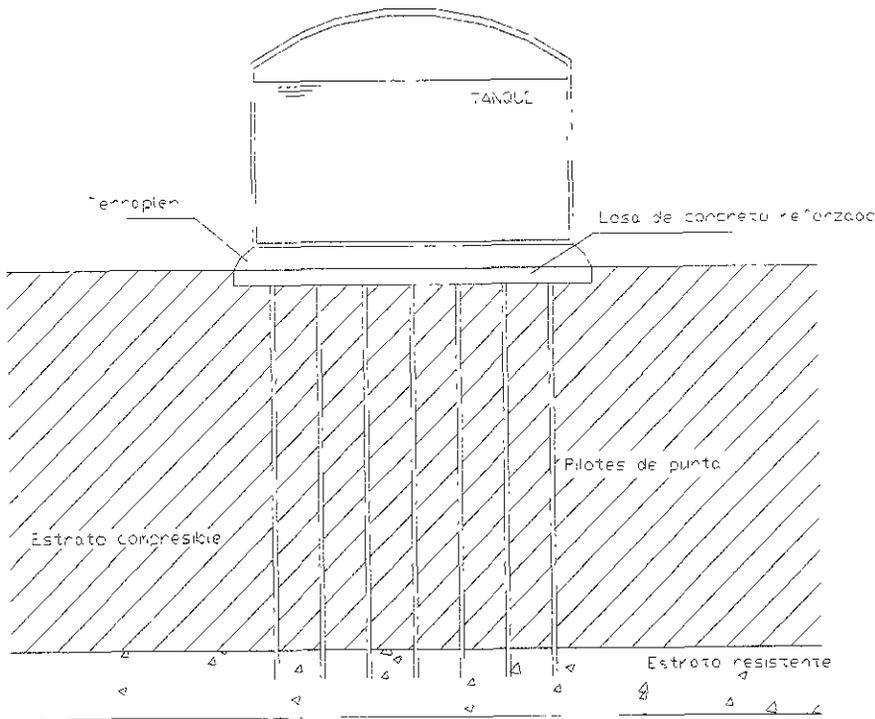
Tabla 1 Condiciones de compactación de suelos para terraplenes

### 2.3.3 CIMENTACIONES PROFUNDAS

Si considera apropiada una cimentación profunda para el tanque, se deberá optar por una de las siguientes soluciones descritas a continuación:

#### 2.3.3.1 CIMENTACIÓN RIGÍDA

Este tipo de cimentación, figura 2.3.3 a, sólo se empleará si así lo requieren las características particulares del tanque y del producto almacenado. Los pilotes empleados serán de punta, cuyas cabezas estarán unidas por una losa de concreto reforzado, diseñada despreciando el soporte proporcionado por el suelo en su parte inferior. El tanque descansará sobre la losa a través de un terraplén similar al descrito en punto 2.3.2.1



**Figura 2.3.3 a Cimentación rígida sobre pilotes de punta**

### 2.3.3.2 CIMENTACIÓN FLEXIBLE

En este tipo, figura 2.3.3 b, las cabezas de los pilotes serán rodeadas y cubiertas por una capa de grava o roca triturada compactada, que asegurará la transmisión de las cargas a los pilotes por arqueado y permitirá la absorción de pequeños movimientos diferenciales entre pilotes sin causar daños a la estructura. Este material y el relleno subyacente serán confinados por medio de un muro anular en el que descansará el tanque. Los detalles del desplante superficial son idénticos a los descritos en el punto 2.3.2.1

## 2.4 MÉTODOS TRADICIONALES DE REVISIÓN DE SEGURIDAD

### 2.4.1 GENERALIDADES

El Instituto Mexicano del Petróleo como principal firma de ingeniería de Petróleos Mexicanos, utiliza normas nacionales como internacionales para llevar a cabo todo proyecto que la paraestatal le encomienda. En el caso del diseño de cimentaciones no es la excepción, por lo que se utiliza para este fin principalmente la Norma 2.115.01 "Cimentación de Tanques" de PEMEX, estándares de ingeniería del IMP y el API 650 apéndice B.

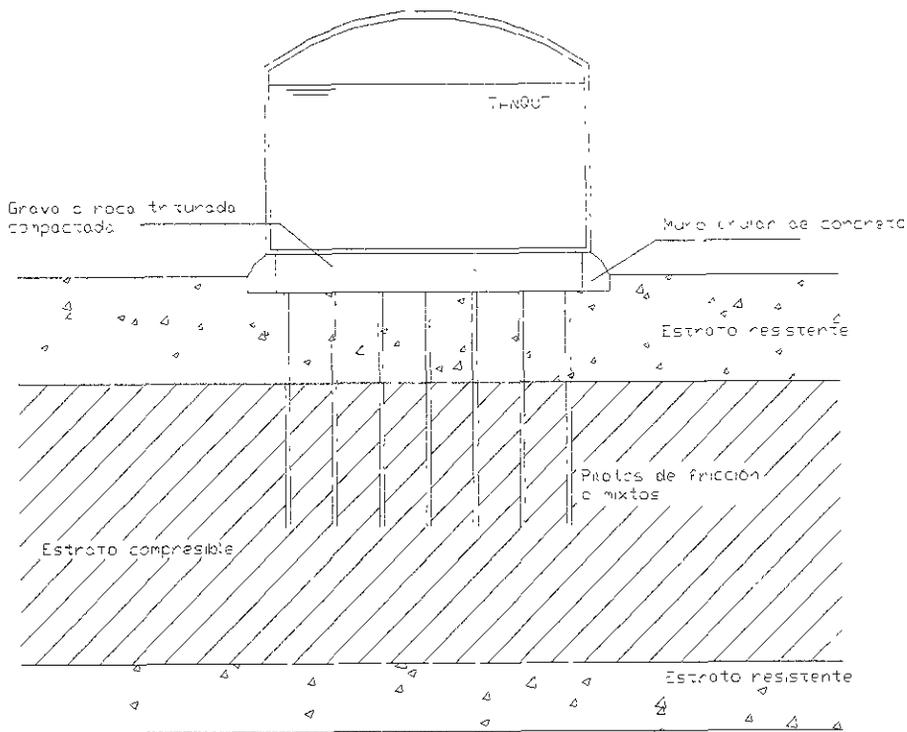


Figura 2.3.3 b Cimentación flexible sobre pilotes de fricción o mixtos

De los documentos mencionados en el párrafo anterior se analizarán los criterios de seguridad que la Norma 2.115.01 y el API 650 presentan para tal fin. Es importante destacar que la Norma Pemex es la más antigua, 1974, pero ofrece una clara y extensa información acerca de este punto.

#### 2.4.2 NORMA 2.115.01

La Norma es una aplicación de los criterios tradicionales de cálculo de cimentaciones, que va desde la determinación de las características del suelo hasta pruebas de carga. En cuanto a los métodos de revisión de seguridad, se usa la fórmula de Terzaghi para cimentaciones circulares para determinar la capacidad de carga así como la correspondiente a asentamientos

Para la revisión de la capacidad de carga se supondrá una carga igual a la suma del peso de la estructura más la presión aplicada por el fluido al encontrarse lleno el tanque, afectado por un factor de 1.4 más una presión hidrodinámica atribuible a sismo aplicada en el fondo del mismo afectado por un factor de 1.1. La carga total se comparará con la resistencia estimada del suelo afectada por un factor de reducción, que dependerá del tipo de cimentación.

Los asentamientos respecto a los bancos de nivel cercanos al tanque no deberán alcanzar una magnitud que ocasione dificultades en la operación del tanque. El asentamiento máximo se fijará dependiendo de las características propias del tanque y los sistemas de tuberías que lleguen a él. Establece una tabla para asentamientos máximos permisibles (tabla 2) para tanques construidos con aceros ASTM A-36, ASTM 283-C y 283-D

Para tanques de acero de mayor resistencia conteniendo fluidos a temperaturas inferiores a la ambiente, se considera la posibilidad de falla frágil.

Se menciona que los movimientos diferenciales en el perímetro del tanque deberán ser pequeños, para evitar deformaciones en la pared cilíndrica garantizando así un buen funcionamiento de los techos flotantes, cuando sea el caso.

Tipo de asentamiento	Máximo asentamiento
Máximo asentamiento total en el perímetro	30 cm
Máximo asentamiento diferencial en el fondo	5 cm en 10 m

Tabla 2 Máximos asentamientos permisibles.

2.4.2.1 CARACTERÍSTICAS DE SUELO

Reconocimiento

La Norma enuncia una secuencia de estudios que deberán llevarse para la determinación de las características del suelo donde se colocará el tanque:

- a) Recopilación de antecedentes y reconocimiento superficial
- b) Reconocimiento por métodos geofísicos. Los cuales se justificarán en caso de permitir un ahorro en el costo de las exploraciones. Estos mismos estudios no se llevarán acabo en donde la superficie de construcción sea reducida o exista información geológica precisa.
- c) Reconocimiento por medio de sondeos.
  - 1. Pruebas de penetración con o sin recuperación de muestras alteradas. Estas se realizarán siguiendo el procedimiento estándar. Los resultados se emplearán para planear programas de sondeos inalterados, verificar la homogeneidad, estimar la compacidad y las propiedades mecánicas del subsuelo.
  - 2. Sondeos inalterados. Los sondeos de este tipo en trincheras, pozo a cielo abierto o perforaciones de gran diámetro servirán para determinar

características del subsuelo. Se realizará por lo menos un sondeo inalterado y tres alterados por cada tanque, distribuyéndolos en el centro y la periferia del mismo. En caso de superficies, serán un mínimo de 4 sondeos, alterados o inalterados, por cada 1,000 m<sup>2</sup> construidos; este número se incrementara hasta 10 si el subsuelo resulta ser heterogéneo. La profundidad de estos sondeos será hasta alcanzar un estrato resistente o donde los esfuerzos inducidos sean inferiores al 10%, de los provocados en la superficie.

### Pruebas de laboratorio

En este apartado, la Norma menciona que se usarán las pruebas de laboratorio requeridas para determinar las propiedades suficientes para los análisis de estabilidad y de asentamientos. También se obtendrán las propiedades índice, la clasificación del suelo de acuerdo al SUCS (sistema unificado de clasificación de suelos).

De acuerdo a la profundidad se definirá:

- a) Contenido de agua y grado de saturación
- b) Densidad de sólidos
- c) Límites de consistencia de los materiales cohesivos
- d) Curva granulométrica de los materiales no cohesivos

### 2.4.2.2 CIMENTACIONES SUPERFICIALES

Cuando el subsuelo natural o estabilizado asegure el cumplimiento de los requisitos de la Norma, se utilizaran cimentaciones superficiales, para lo cual se deberán analizar por capacidad de carga, asentamientos elásticos, asentamientos por consolidación, susceptibilidad del suelo a licuación y susceptibilidad al colapso.

#### Capacidad de carga

Cuando el suelo sea lo bastante homogéneo, la capacidad de carga se evaluará de acuerdo a la expresión de Terzaghi:

$$q_d = (0.8cN'_c + 0.6\gamma_m r N'_y) F_R \quad (2.3)$$

Donde:

$q_d$  = presión máxima admisible, t/m<sup>2</sup>

$c$  = cohesión del material, t/m<sup>2</sup>

$\gamma_m$  = peso volumétrico medio de los estratos afectados por la cimentación, t/m<sup>3</sup>

$r$  = radio del área circular de desplante, m

$N'_c$  y  $N'_\gamma$  = factores de capacidad de carga, para falla por corte local determinados a partir del ángulo  $\phi$  de fricción interna del material, Figura 2.4.2 a

$F_R$  = factor de reducción igual a 0.6

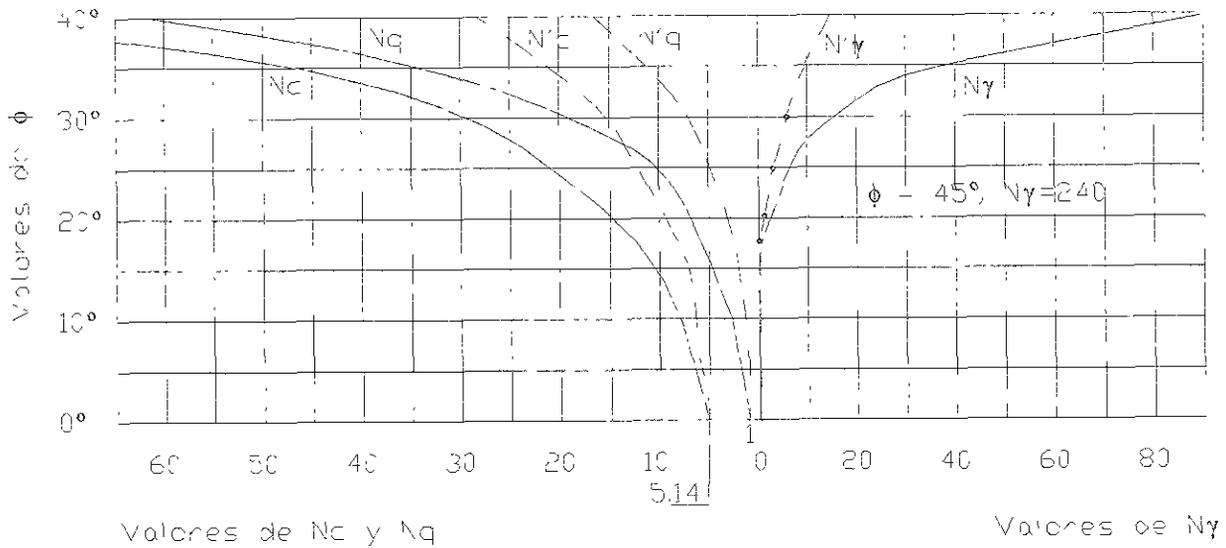


Figura 2.4.2 a Factores de capacidad de carga

La Norma considera falla por corte local, ya que la flexibilidad del fondo del tanque impide el desarrollo completo del mecanismo de falla.

Los parámetros de resistencia del suelo " $c$ " y " $\phi$ " se determinarán por pruebas de laboratorio, que sean representativas del estado de consolidación del suelo, considerando la carga que corresponda al tanque lleno en condiciones de primer llenado.

La prueba de resistencia al esfuerzo cortante para materiales cohesivos recomendada por la Norma será la no consolidada - no drenada o la de compresión simple. De estar el suelo preconsolidado se usará una prueba consolidada no drenada. Para materiales no cohesivos, la prueba consolidada es la que mejor representa las condiciones de drenaje de este tipo de materiales. En la Tabla 3, se muestra una correlación entre el número de golpes  $N$  en la prueba penetración estándar y el ángulo de fricción interna.

Compacidad relativa de las arenas en función de los resultados de la prueba de penetración estándar		Valores representativos de $\phi$ para arenas y limos		
No. de golpes	Compacidad relativa	Material	Estado	
			Suelto	Denso
0 a 4	Muy suelta	Arena uniforme granos redondeados	27.5	34
4 a 10	suelta	Arena bien graduada con granos angulosos	33	45
10 a 30	media	Grava arenosa	35	50
30 a 50	compacta	Arena limosa	27 - 33	30 - 34
Más de 50	Muy compacta	Limo orgánico	27 - 30	30 - 35

Tabla 3 ángulo de fricción interna de materiales no cohesivos.

En el caso de suelos estratificados, la Norma indica que se verificará la estabilidad de la cimentación suponiendo que la falla pueda ocurrir a lo largo de superficies circulares, figura 2.4.2 b, auxiliándose por métodos de análisis límite como el Sueco, Bishop o similares. Además de la falla general, se deberán estudiar posibles fallas locales. Para evaluar el momento motor, en estos análisis, las cargas a considerar serán el peso propio del tanque más el peso total del fluido dentro de él afectado por un factor de 1.4 y una presión hidrodinámica atribuible a sismo multiplicada por un factor de 1.1. El momento resistente, se afectará por un factor de reducción de 0.6, debiendo ser éste mayor o igual al momento motor calculado.

$$\text{Momento resistente} = \sum (S_i \Delta L_i) R \tag{2.4}$$

$$\text{Momento motor} = \sum T_i R \tag{2.5}$$

Donde:

$T_i$  = componente tangencial del peso de la dovela  $i$

$S_i$  = resistencia al corte en la base de la dovela  $i$

Cuando el tanque se desplante en un estrato de material blando confinado, figura 2.4.2 c, se verificará que no se presente flujo plástico radial. Para ello, se calculará la presión  $p$ , aplicada al nivel de desplante y se verificará que ésta sea menor a la presión calculada con la expresión:

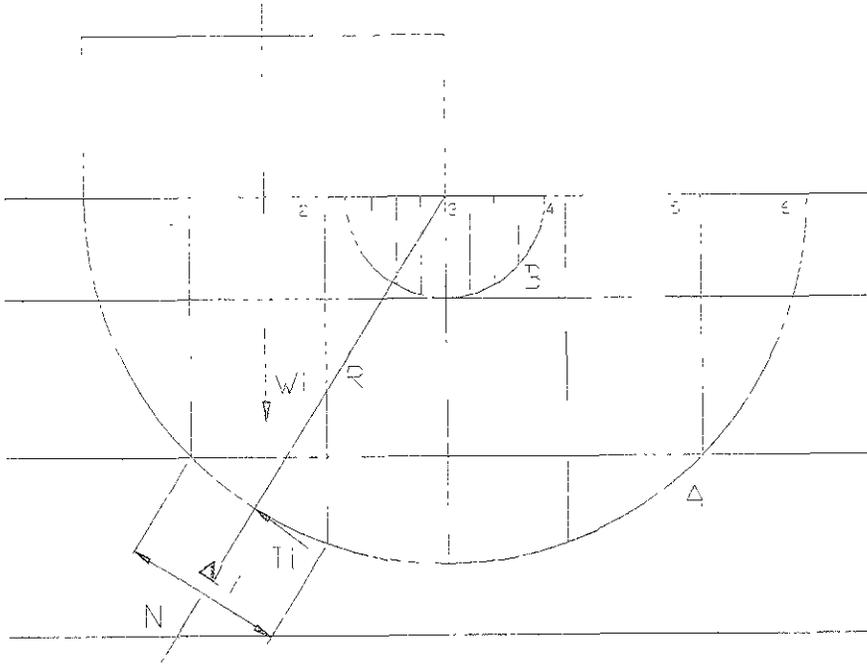


Figura 2.4.2 b Análisis de estabilidad de un tanque por el método sueco

$$P = 4c \left( \frac{D'}{D} \right)^2 F_R \quad (2.6)$$

Debida a Kalinovski, donde  $c$  es la cohesión del material blando,  $F_R$  es un factor de reducción igual a 0.6 y la otras literales de muestran en la figura 2.4.2 c

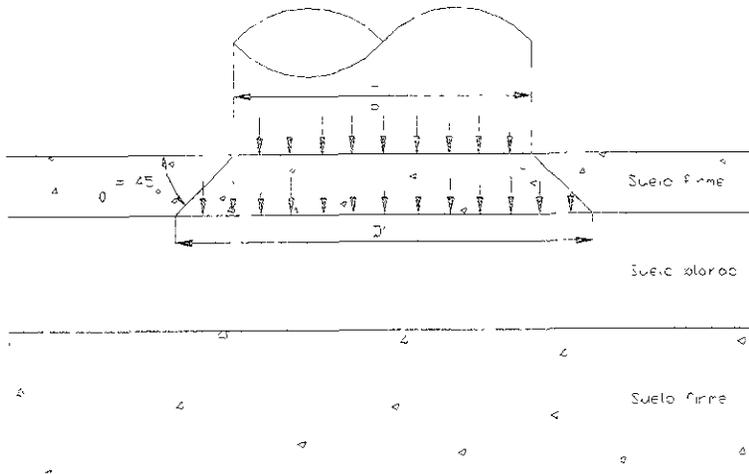


Figura 2.4.2 c Tanque desplantado sobre un estrato de material blando confinado

**Asentamientos elásticos**

Los asentamientos inmediatos inducidos al llenar el tanque, se estimarán recurriendo a la teoría de la elasticidad, considerando al suelo homogéneo e isótropo y usando las siguientes formulas que la Norma propone:

a) Asentamientos en el centro del tanque

$$\delta = (1 - \nu^2) \frac{P}{E} D \tag{2.7}$$

b) Asentamientos en la periferia

$$\delta = \frac{2}{\pi} (1 - \nu^2) \frac{P}{E} D \tag{2.8}$$

Donde:

$P$  = presión transmitida a la cimentación al encontrarse lleno el tanque.

$D$  = diámetro del tanque

$E$  y  $\nu$  = módulo de elasticidad y relación de Poisson del suelo determinados a partir de resultados de ensayos geofísicos o pruebas de placa o a falta de información, mediante correlaciones empíricas.

La Norma recomienda que si el suelo esta estratificado horizontalmente, con características elásticas diferentes, se debe usar el método de Steinbrenner, es decir, que se podrán desprejar la influencia de las distintas rigideces de los estratos.

**Asentamientos por consolidación**

La Norma establece que los análisis de los asentamientos finales por deformación volumétrica en función del tiempo, en suelos cohesivos, se lleve a cabo a partir de pruebas de laboratorio de consolidación unidimensional.

a) Magnitud de los asentamientos

Para suelos cohesivos los asentamientos se calcularan con la siguiente expresión:

$$\Delta H = \int_0^H \frac{\Delta e}{1 + e_0} dz \tag{2.9}$$

Donde:

$\Delta H$  = asentamiento de un estrato de espesor  $H$

$\Delta e$  = variación de la relación de vacíos bajo el incremento de esfuerzo  $\Delta p$  inducido a la profundidad  $z$  por la carga superficial, calculada a partir de las curvas de compresibilidad

$e_0$  = relación de vacíos inicial a la profundidad  $z$

La interpretación gráfica de la ecuación se presenta en la figura 2.4.2 d. Para el cálculo de los incrementos de presión  $\Delta p$  inducidos por la carga superficial, la Norma recomienda utilizar la carta de Newmark y también se podrán calcular por expresiones elásticas como la de Boussinesq.

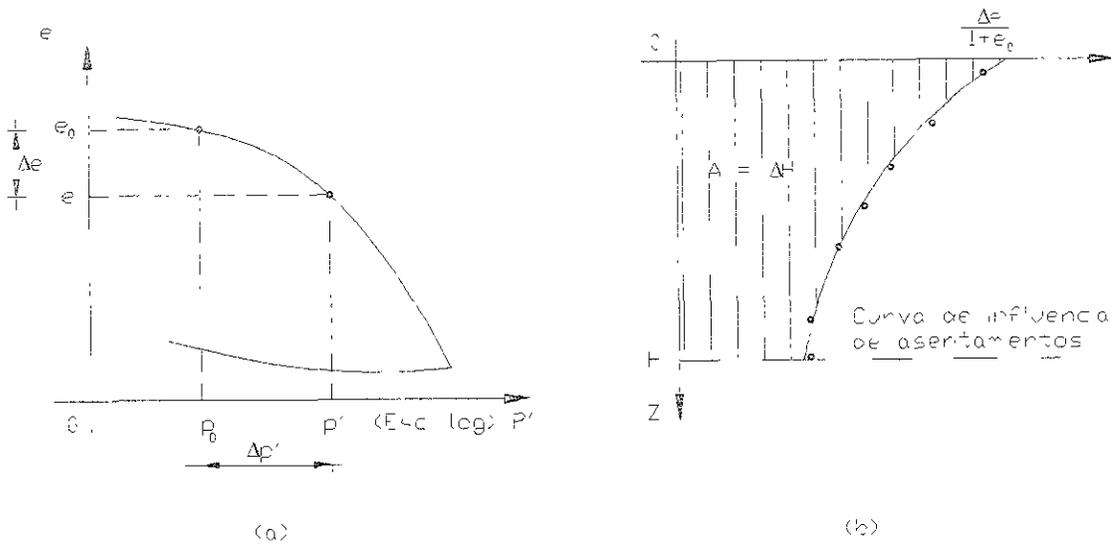


Figura 2.4.2 d Cálculo de asentamientos por consolidación

Para suelos no cohesivos, el asentamiento se calculará con la siguiente expresión:

$$\Delta H = \int_0^H \frac{1}{C} \log_e \frac{P}{P_0} dz \quad (2.10)$$

Donde:

$P_0$  = presión efectiva inicial al nivel considerado

$P$  = presión efectiva final al mismo nivel

$C$  = índice de compresibilidad determinado a partir de la relación empírica

$C = \frac{15N}{P}$ , siendo  $N$  el número golpes para penetrar 30 cm en la prueba de penetración estándar.

### b) Evolución de los asentamientos

Como es sabido, los asentamientos en diferentes lapsos de tiempo son incrementales, por lo que la Norma considera que se calculen recurriendo a la teoría de la consolidación unidimensional de Terzaghi, es decir, por consolidación primaria, utilizando la expresión:

$$(\Delta H)_t = (\Delta H)_\infty U(T) \tag{2.11}$$

Donde:

$(\Delta H)_t$  = asentamiento en el instante  $t$

$(\Delta H)_\infty$  = asentamiento final calculado por la ecuación 1

$U(T)$  = grado de consolidación obtenido en la forma indicado figura 2.4.2 e apartir del factor tiempo  $T$

$$T = \text{factor tiempo} = \frac{Cv t}{H^2} \tag{2.12}$$

$Cv$  = coeficiente de consolidación determinado en la prueba estándar de consolidación unidimensional.

Considerar la consolidación secundaria permitirá una estimación más precisa del asentamiento, por lo que la Norma recomienda tomarla en cuenta en la periferia del tanque y suponiendo drenaje radial. Para suelos no cohesivos se considerará que los asentamientos son inmediatos.

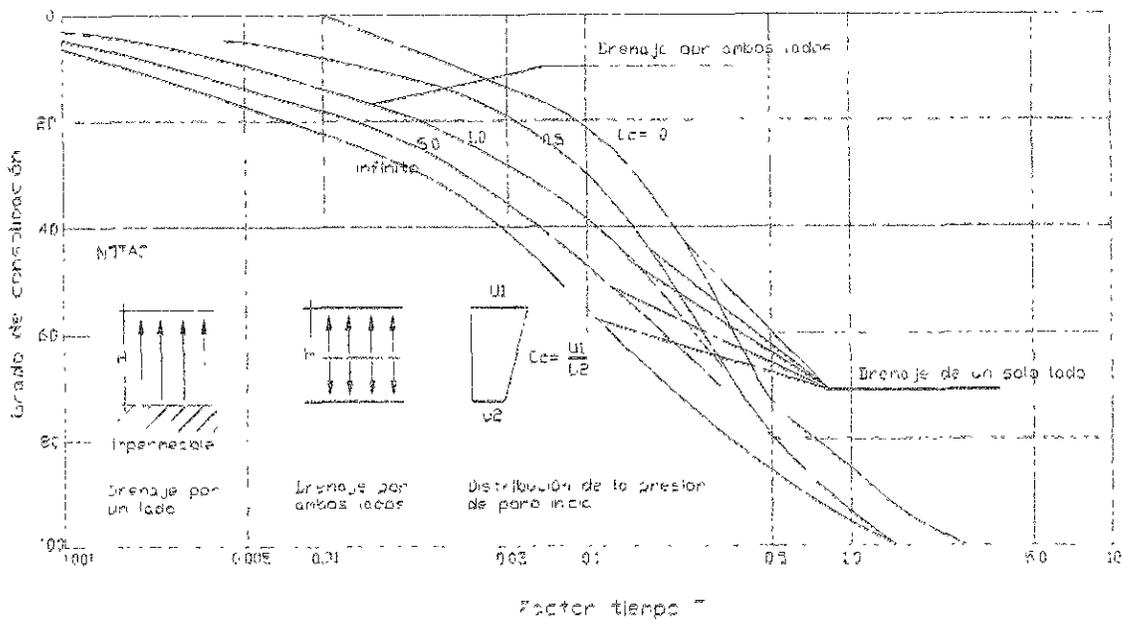


Figura 2.4.2 e Grado de consolidación primaria en función del factor tiempo, para drenaje vertical

### Susceptibilidad del suelo a licuación

La Norma establece que el suelo debajo de tanque es inadecuado y susceptible a licuación si se trata de un estrato de arena fina uniforme o de limo poco plástico (con Índice de plasticidad,  $I_p < 6$ ), en estado saturado, que presente una resistencia menor de 10 en 30 cm de la perforación estándar.

### Susceptibilidad del suelo al colapso

El colapso se considerará posible si el estrato de desplante del tanque es limo no saturado que pueda llegar a saturarse durante la vida útil de la estructura, cuando el coeficiente  $K_d$  sea menor de 0.5.

$$K_d = \frac{W_L - W_0}{I_p} \quad (2.13)$$

Donde:

$W_L$  = contenido de agua en el límite líquido

$W_0$  = contenido de agua natural

$I_p$  = Índice de plasticidad

#### 2.4.2.2 CIMENTACIONES PROFUNDAS

La Norma recurre a cimentaciones profundas únicamente cuando el suelo no permite el cumplimiento de los requisitos que se mencionan el punto 2.4.2 del presente trabajo, además de no ser posible o económico resolver la cimentación con una mejoramiento del suelo. La Norma establece, al igual que en cimentaciones superficiales, los criterios de cálculo para la capacidad de carga de un pilote individual, de un grupo de pilotes y los movimientos verticales

##### Capacidad de carga

En este punto, la Norma dice que se tomará el menor valor de la capacidad de carga, de entre la suma de las capacidades de carga individuales de los pilotes o la capacidad de carga del bloque o zapata de geometría igual a la envolvente del grupo de pilotes.

##### Capacidad de carga de un pilote individual

Se define en la Norma como capacidad de carga de un pilote,  $Q_c$ , a la suma de la capacidad de carga por punta y la capacidad por fricción, consideradas de forma independiente y afectadas respectivamente por un factor de reducción igual a 0.3 y 0.6

$$Q_c = 0.3C_p + 0.6C_f \quad (2.14)$$

Para pilotes cuya punta esté localizada en material cohesivo blando, pilotes de fricción, se despreciará la capacidad de punta,  $C_p$ . Por el contrario, si la punta está apoyada en material granular el término  $C_p$  se calculará con la formula de Meyerhof:

$$C_p = (\gamma_m L N'_q) A_p \tag{2.15}$$

Donde:

$C_p$  = capacidad de punta, t

$\gamma_m$  = peso volumétrico medio del suelo localizado arriba del nivel de la punta, t/m<sup>3</sup>

L = longitud del pilote, m

$N'_q$  = factor de capacidad de carga de Meyerhof, figura 2.4.2 f

$A_p$  = área de la base del pilote, m<sup>2</sup>

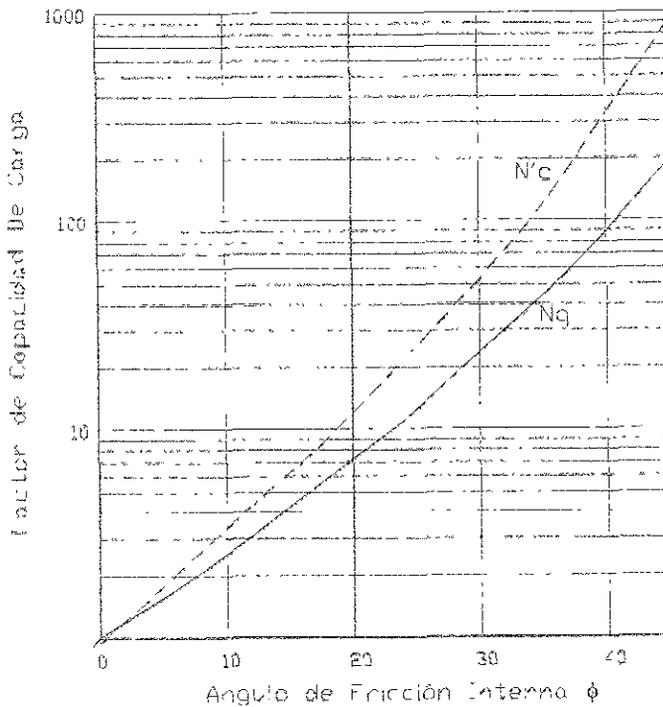


Figura 2.4.2 f Factor de capacidad de carga de Meyerhof

Si sólo se cuenta con información de pruebas de penetración estándar, la Norma muestra las siguientes correlaciones empíricas:

- a)  $C_P = 40 NA_P$  para pilotes hincados
- b)  $C_P = 15 NA_P$  para pilotes colados in situ

Donde:

$C_P$  = capacidad por punta, t

$N$  = número de golpes para los 30 cm intermedios del penetrómetro en la prueba de penetración estándar al nivel de la punta del pilote

$A_P$  = área de la base del pilote,  $m^2$

La capacidad por fricción,  $C_f$ , se determinará, para pilotes colocados en material cohesivo, multiplicando el área lateral del pilote por la adherencia disponible, la cual podrá estimarse en forma aproximada a partir de la cohesión en la forma indicada en la tabla 5. Entonces la cohesión se calculará a partir de la resistencia  $q_u$  del material en una prueba de compresión simple o no consolidada no drenada, conforme a la expresión:

$$C = \frac{q_u}{2} \tag{2.16}$$

Para pilotes en suelos no cohesivos, el termino  $C_f$  se estimará considerando que la adherencia desarrollada tiene una variación lineal, desde cero en la superficie hasta una profundidad  $z$  igual a 20 veces el diámetro del pilote, profundidad en la cual alcanza un máximo igual a:

$$f_z = K_0 \gamma_m z \tan \delta \tag{2.17}$$

Donde:

$f_z$  = adherencia disponible a la profundidad  $z$

$\gamma_m$  = peso volumétrico medio del suelo localizado arriba del nivel  $z$

$K_0$  = coeficiente de presión de reposo cuyo valor podrá considerarse igual a 0.7

$\delta$  = ángulo de fricción pilote-suelo cuyo valor podrá considerarse igual a  $2/3 \phi$ , siendo  $\phi$  el ángulo de fricción interna del material.

La Norma contempla correlaciones para calcular la adherencia si sólo se cuenta con datos de la penetración estándar, dicha adherencia podrá considerarse constante a lo largo del pilote, las cuales son:

$$f = 0.2 N \text{ (con máximo de } 10 \text{ t/m}^2\text{) para pilotes hincados} \tag{2.18}$$

$$f = 0.6 N \text{ (con máximo de } 4 \text{ t/m}^2\text{) para pilotes colados in situ} \tag{2.19}$$

Donde:

$f$  = adherencia,  $t/m^2$

$N$  = número de golpes cada 30 cm de la prueba de penetración estándar a lo largo del fuste

Tipo de pilote	Consistencia del suelo	Cohesión, $c$ $10^{-2}, \text{kg/cm}^2$	Adherencia, $f$ $10^{-2}, \text{kg/cm}^2$
Madera y concreto	Muy blanda	0-12	0-12
	Blanda	12-25	12-23
	Poco dura	25-50	23-37
	Dura	51-100	37-47
	Muy dura	100-200	47-64
Acero	Muy blanda	0-12	0-12
	Blanda	12-25	12-22
	Poco dura	25-50	22-34
	Dura	50-100	34-35
	Muy dura	100-200	35-37

Tabla 5 Estimación de la adherencia pilote-suelo disponible a partir de la cohesión.

Los valores calculados deberán de verificarse mediante pruebas de carga in situ, que la Norma prevé, para los siguientes casos

1. Cuando no exista experiencia relativa a la capacidad de carga de pilotes de fricción en la zona bajo estudio, en particular tratándose de arenas, arcillas preconsolidadas o materiales estratificados.
2. Cuando la experiencia existente sobre el valor de la capacidad de carga de pilotes por fricción en la zona bajo estudio se refiera a un procedimiento de colocación diferente al que se piensa utilizar (hincado, con perforación previa, métodos vibratorios, colada in situ, etc.) o a un tipo de pilotes de fricción diferente del proyectado (cilindros de concreto, tubos de acero, vigas H de acero estructural, etc).
3. Cuando se tenga indicios de que la capa dura sobre la cual descansarán los pilotes de punta es heterogénea.
4. Cuando se desee diseñar la cimentación con un factor de seguridad inferior al especificado para estimaciones puramente analíticas.

Para una prueba de carga, la falla se considerará alcanzada para un desplazamiento del pilote igual a un décimo de su diámetro; la carga correspondiente, se afectará por factor de reducción de 0.6, se considerará igual a la capacidad de carga  $Q_c$  del pilote. Para pilotes que trabajan de forma combinada, se deberá intentar separar la capacidad de carga por punta  $C_p$  de la capacidad de carga por fricción  $C_f$  procediendo a una doble prueba: la primera con un pilote apoyado en estrato resistente y la segunda con un pilote desplantado arriba de dicho estrato

Capacidad de carga de un grupo de pilotes

En este caso, la capacidad de carga última de un grupo de pilotes comportándose como bloque monolítico se estimará por medio de la relación:

$$Q_g = [(q_d - p_v)A_g + D_f P_g f] F_R + p_v A_g \quad (2.20)$$

Donde:

$Q_g$  = capacidad de carga del grupo de pilotes, t

$q_d$  = presión admisible al nivel de la punta de los pilotes, t/m<sup>2</sup>

$p_v$  = presión vertical total actuante, antes de la construcción, al nivel de la punta de los pilotes, t/m<sup>2</sup>

$A_g$  = área piloteada, m<sup>2</sup>

$P_g$  = perímetro del área piloteada, m

$f$  = adherencia lateral estimada en la forma indicada en el inciso anterior, t/m<sup>2</sup>

$D_f$  = profundidad de desplante, m

$F_R$  = factor de reducción igual 0.6

En pilotes de punta en material cohesivo, la presión admisible  $q_d$  al nivel de la punta podrá calcularse con la relación de Skempton:

$$q_d = c N_c \quad (2.21)$$

Donde:

$q_d$  = presión admisible, t/m<sup>2</sup>

$c$  = cohesión del material, t/m<sup>2</sup>

$N_c$  = coeficiente de Skempton cuyo valor puede obtenerse de la figura 2.4.2 g

En pilotes en material friccionante se recurrirá a la fórmula de Terzaghi, para el caso de un área piloteada circular:

$$q_d = 1.2 c N_c + \gamma_m D_f N_q + 0.6 \gamma_m r N_\gamma \quad (2.22)$$

Donde:

$q_d$  = presión admisible, t/m<sup>2</sup>

$c$  = cohesión del material, t/m<sup>2</sup>

$r$  = radio del área circular

$D_f$  = profundidad de desplante, m

$N_q, N_c, N_\gamma$  = factores de capacidad de carga, figura 2.4.2 a

$\gamma_m$  = peso volumétrico medio del suelo

Para verificar la estabilidad de la cimentación, la Norma establece que para toda cimentación sobre pilotes se debe cumplir que:

$$W < Q_p \quad (2.23)$$

Donde:

$W$  = peso del tanque de almacenamiento lleno, más la presión hidrodinámica sobre el fondo, afectados de sus respectivos factores de carga, t

$Q_p$  = capacidad de carga de los pilotes, considerada igual al menor de los valores  $Q_s$  y  $nQ_c$ , siendo  $n$  el número de pilotes, t

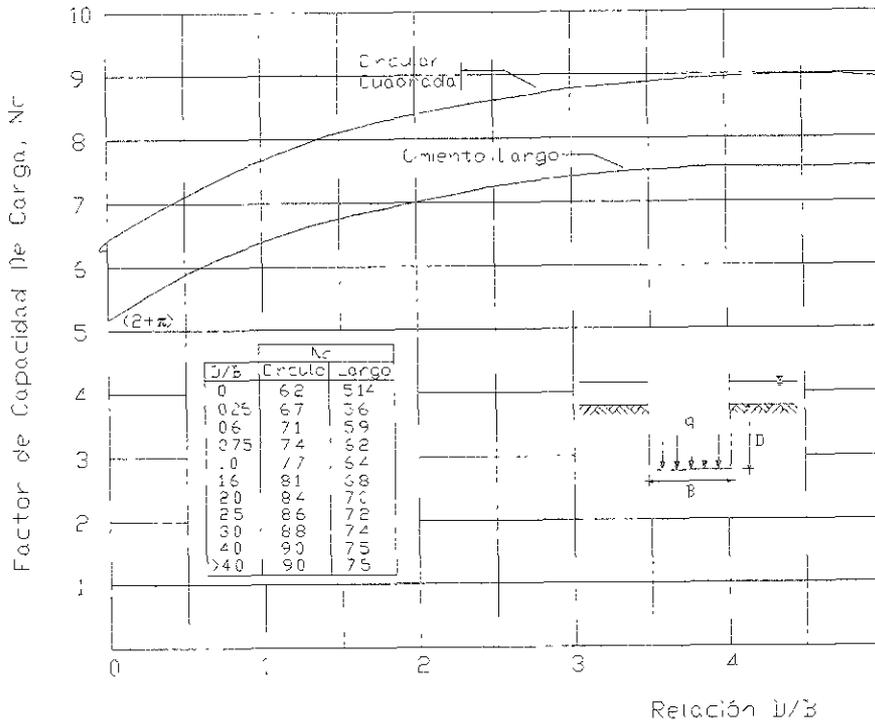


Figura 2.4.2 g Factor de capacidad de carga de Skempton

En el caso de cimentaciones rígidas sobre pilotes de punta que atraviese estratos de material compresible en proceso de consolidación, se sumaran a las cargas ya mencionadas, la fricción negativa desarrollada a lo largo de los fustes, debiéndose verificar que:

$$0.3C_p > W + C_f \tag{2.24}$$

Donde:

$C_p$  = capacidad de los pilotes por punta, t

$C_f$  = capacidad de los pilotes por fricción, t

Si las capacidades de carga por punta y por fricción se determinaron por medio de un prueba de carga, el factor de reducción aplicado a la capacidad por punta podrá ser aumentado, con lo cual la desigualdad (2.24) queda como:

$$0.6C'_p > W + C_f \quad (2.25)$$

### 2.4.3 ESTÁNDAR 650 DEL AMERICAN INSTITUT PETROLUEM

Es interesante notar, que el estándar sólo hace mención a la cimentación de tanques en un apéndice, el B, y no dentro del cuerpo del documento.

#### Alcance

El alcance del estándar es el indicar consideraciones importantes para el diseño y la construcción de tanques superficiales de acero para almacenamiento de petróleo. Las recomendaciones para diseño y construcción de las cimentaciones de tanques de almacenamiento deben ser tomadas en cuenta, teniendo sus debidas precauciones,.

#### Investigación y construcción subterráneas

El estándar hace mención de que las condiciones del subsuelo deben ser lo mejor conocidas para estimar la capacidad de carga y la posible magnitud de los asentamientos del sitio donde se ubicará el tanque. Esta información debe ser obtenida de sondeos exploratorios, pruebas de carga, muestreo, pruebas de laboratorio y el análisis de un ingeniero geotécnico con experiencia en obras similares. La capacidad de carga debe ser la adecuada para soportar a la estructura y los asentamientos totales no deben provocar esfuerzos adicionales a las conexiones de tubería del tanque y tampoco provocar movimientos diferenciales. Los asentamientos también estarán dentro de las tolerancias para las paredes y fondo del tanque.

Los siguientes factores de seguridad se proponen para ser considerados en el criterio del diseño de la cimentación, en la estimación de la capacidad de carga admisible del suelo:

- a) 2.0 a 3.0 ; a aplicarse a la carga ultima de falla para condiciones de operación normal.
- b) 1.5 a 2.25; a aplicarse a la carga ultima de falla para condiciones de prueba hidrostática.
- c) 1.5 a 2.25; a aplicaerse a la carga ultima de falla para condiciones operación más el máximo efecto del viento o sismo.

Algunos condiciones que requieren una especial consideración son:

1. Sitios sobre laderas, donde parte del tanque pueda estar sobre suelo inexplorado o roca y una parte sobre relleno u otra construcción, o donde el espesor del relleno sea variable.
2. Sitios sobre pantanos o suelos de relleno donde las capas de lodo o suelo vegetal compresible esté cerca o por debajo de la base del tanque o donde se encuentren depósitos de materiales corrosivos.

3. Sitios de suelo subyacente, con capas de arcilla plástica o arcilla orgánica, que puedan soportar cargas pesadas temporales pero presentan asentamientos excesivos en periodos largos de tiempo.
4. Sitios próximos a caudales de agua o excavaciones profundas donde la estabilidad lateral del suelo sea dudosa.
5. Sitios muy próximos a estructuras pesadas que transmitan cargas al subsuelo por debajo del tanque, reduciendo la capacidad de carga del suelo con cargas adicionales, generando asentamientos excesivos.
6. Sitios donde el tanque esté expuesto a inundaciones donde posiblemente se presenten sobrepresiones, desplazamientos o socavaciones.
7. Sitios de alta sismicidad donde el suelo sea susceptible a licuación.
8. Sitios con delgadas capas de arcilla suave que estén por debajo del fondo del tanque y que puedan causar problemas de estabilidad lateral.

Si la rasante es insuficiente para transmitir la carga del relleno del tanque sin provocar asentamientos excesivos, la construcción a poca profundidad la superficial bajo el tanque puede no soportar estas condiciones. Por esto debe utilizarse uno más de lo siguientes métodos para mejorar las condiciones:

- I. Remover el material malo y remplazarlo con un material mejor y compactado.
- II. Compactación del material suave con pilotes cortos.
- III. Compactación del material suave con precargas en el área de contacto, con capas de suelo. El desmontado o el drenado de arena puede ser usado en conjunto.
- IV. Estabilización del material suave por métodos químicos o con inyecciones de lechada de cemento.
- V. Transmitir la carga a un material más resistente por debajo de la rasante por medio de pilotes o con pilas. Esto involucra la construcción de losas de concreto reforzado sobre los pilotes que distribuyan la carga de la base del tanque.
- VI. La construcción de la losa de cimentación debe ser tal que distribuya la carga en un área suficientemente amplia del material suave para que la intensidad de carga esté dentro los límites admisibles y que los asentamientos excesivos no ocurran.
- VII. Mejorar las propiedades del suelo por medio de vibrocompactación o con compactación dinámica profunda.
- VIII. Llenado del tanque para la prueba hidrostática lenta y controlada. Cuando se utiliza este método, la integridad del tanque puede verse sometida a asentamientos excesivos en la pared o en la base del mismo. Por esta razón los asentamientos del tanque deben ser monitoreados constantemente. En el caso que los asentamientos estén más allá de los límites establecidos, la prueba debe ser detenida y el tanque renivelado.

Este apéndice también hace la recomendación de que el material de relleno, debidamente compactado, que se utilice para sustituir el lodo o el material malo debe ser adecuado para soportar el peso del tanque y su contenido. Este debe estar libre de materia vegetal, orgánica y cualquier material que represente un problema de corrosión en la base del tanque.

#### Plataforma del tanque

La plataforma o la superficie en la que el tanque estará apoyado deberá tener una altura mínima de 0.3 m desde el nivel del terreno natural. Si se presentan asentamientos esta altura podrá ser de 0.15m. Ya que hay una gran variedad de materiales que se pueden usar para construir esta plataforma, debe tenerse cuidado de que no represente un problema de corrosión para el fondo del tanque. De ser así, deben usarse sistemas preventivos como la protección catódica. Las gravas y partículas grandes son materiales que no deben ser considerados para la plataforma. La formación de la plataforma será principalmente de material fino y uniforme. La arena limpia tendrá un espesor de 75 a 100 mm en la capa final para garantizar el contacto en la mayor área posible del fondo del tanque, libre de partículas grandes que dañen el fondo.

#### Tipos típicos de cimentaciones

El apéndice sólo menciona cuatro tipos de cimentaciones y que son descritos con mayor detalle en la norma mexicana, por lo que sólo se comentan algunas consideraciones que el estándar presenta.

#### Cimentaciones de tierra sin anillo

Este tipo de cimentación puede usarse cuando la evaluación de las condiciones de la superficie, resultado de la experiencia del geotecnista y/o trabajo de exploración, muestre que el suelo tiene la suficiente capacidad de carga y que los asentamientos estarán dentro los rangos aceptables. La cimentación con materiales térreos deben de cumplir con lo siguiente:

- a. Garantizar una superficie estable para el tanque.
- b. Los asentamientos de la rasante del tanque deben tener valores compatibles con los permisibles usados con el diseño de conexiones de tubería.
- c. Garantizar un adecuado drenaje.
- d. No presentar asentamientos excesivos en el perímetro por el peso de la pared del tanque.

#### Cimentaciones de tierra con anillo de concreto reforzado

Este tipo de cimentación se utiliza en tanque de tamaño grande, tanques con paredes pesadas o altas o con techos autosoportados que transmitan la carga a la cimentación. También es importante que se prevenga la deformación de las

paredes cuando el techo del tanque sea flotante. La cimentación con anillo de concreto reforzado tiene las siguientes ventajas:

- a. Provee una mejor distribución de la carga concentrada de la pared produciendo una distribución uniforme de la carga en el suelo debajo del tanque.
- b. Provee un nivel firme y plano donde inicie la construcción de la pared.
- c. Provee una mejor nivelación de la rasante del tanque, la cual es utilizable en la preservación de la nivelación durante la construcción
- d. Retiene el relleno del tanque y previene la pérdida de material por erosión.
- e. Minimiza la humedad de debajo del tanque.

Una desventaja del anillo de concreto es que no suaviza los asentamientos diferenciales, produciendo esfuerzos en la parte inferior del anillo.

#### Cimentaciones de tierra con anillo de roca triturada y grava

Este tipo de cimentación proporciona un adecuado soporte para cargas altas que impone la pared del tanque. Las ventajas de este tipo de cimentación son:

- a. Provee una mejor distribución de la carga concentrada de la pared del tanque, produciendo una distribución uniforme de la carga en el suelo debajo del tanque.
- b. Da una mejor nivelación de la rasante del tanque y que es utilizable en preservación el nivel durante la construcción.
- c. Retiene el relleno de debajo del tanque y previene pérdida de material por erosión.
- d. Puede suavizar los asentamientos diferenciales por la flexibilidad que la propia cimentación.

La desventaja es su mayor dificultad de construcción dentro de la tolerancias y lograr un plano de construcción.

#### Losas de cimentación

Cuando en el suelo las cargas pueden ser distribuidas en un área mayor que la del tanque o cuando lo especifique el dueño, se puede usar una losa de cimentación. Puede la losa combinarse con pilotes que darán un mejor soporte al tanque. El diseño de la estructura de la losa, con apoyo superficial o sobre pilotes, dependerá de las todas las cargas impuestas sobre la losa por el tanque.

## Seguridad y confiabilidad

## 3.1 INTRODUCCIÓN

Desde tiempos muy remotos, el concepto de seguridad ha sido fundamental en la práctica de la ingeniería civil. Los primeros códigos de construcción conocidos, que ponen énfasis en la seguridad, datan de 1750 años antes de Cristo (Código de Hammurabi).

En geotecnia el concepto de seguridad juega un papel muy importante dadas las numerosas incertidumbres que afectan a los diferentes aspectos del diseño geotécnico. Nunca es posible eliminar totalmente las dudas en cuanto a la representatividad de las muestras de suelo obtenidas durante la exploración o la precisión y validez de los ensayos de laboratorio. Además, las limitaciones de los modelos usados para evaluar la estabilidad de obras térreas son bien conocidas. Por otra parte, es común que las cargas consideradas en el momento del diseño geotécnico sean las de anteproyecto y presenten una incertidumbre considerable.

## 3.2 CONCEPTOS GENERALES DE CONFIABILIDAD

La *Confiabilidad* puede definirse como la probabilidad de que un sistema lleve a cabo sus funciones de manera adecuada, durante un periodo propuesto y bajo condiciones de operación establecidas (Pagès y Gondran, 1986). Desde el punto de vista probabilista, la confiabilidad es el complemento a la unidad de la probabilidad de falla.

Resulta interesante definir también el concepto de *riesgo*, entendido como el producto de la probabilidad de un evento indeseable por su costo. Históricamente no fue sino hasta el siglo XVIII cuando el enfoque empírico en la ingeniería fue reemplazado por el enfoque numérico, gracias a los trabajos de Hooke, Navier, Cauchy, Saint Venant, etc. Sin embargo, este nuevo enfoque se basó en el análisis de los esfuerzos y sus efectos, lo que redujo el concepto de seguridad a una noción determinista.

Frecuentemente el concepto de seguridad se establece realizando una comparación entre la sollicitación o demanda máxima  $S$  prevista para el sistema y su resistencia o capacidad  $R$ . Tradicionalmente se recurre al concepto de factor de seguridad  $\theta$

$$\theta = \frac{R}{S} \quad (3.1)$$

Este planteamiento obliga a establecer las siguientes condiciones:

- $S$  no se incrementa durante el periodo de vida de la obra y es igual o mayor a la máxima sollicitación prevista para la estructura,
- $R$  es siempre igual o inferior a la mínima resistencia o capacidad estimada.

En la práctica estas condiciones no son siempre absolutas y por tanto involucran un riesgo de falla.

La primera crítica relacionada con la utilización de factores de seguridad fue hecha por el profesor Streletsky en 1928 (Nechnech, 1994), durante el foro de un congreso internacional de seguridad, estableciendo que "*El coeficiente de seguridad adolece de sentido de la realidad*".

Es necesario reconocer que la seguridad absoluta no existe para ningún tipo de construcción. Lo anterior está ampliamente demostrado por la experiencia y debe atribuirse al carácter aleatorio de todos los parámetros que intervienen en el cálculo de una obra, frecuentemente evaluados a partir de muestras, a la limitada validez de los métodos de cálculo empleados y a las incertidumbres sobre las acciones a las que se somete la estructura. Los factores de seguridad, también llamados *factores de ignorancia*, cumplieron con una función útil durante mucho tiempo por el hecho de llevar a niveles de riesgo generalmente aceptables, pero ya no resultan adecuados para los niveles de calidad requeridos y las restricciones económicas actuales.

La evaluación de los niveles de seguridad se puede efectuar de diversas maneras, dependiendo de la precisión con que sean modeladas las sollicitaciones y las resistencias. Al respecto se pueden distinguir los siguientes niveles de análisis:

#### NIVEL 0

Es el correspondiente a la utilización de factores de seguridad tradicionales.  $R$  y  $S$  son considerados como parámetros deterministas. En este caso el establecimiento de factores de seguridad mínimos es producto del empirismo.

## NIVEL 1

En este nivel se reconoce el carácter aleatorio de la resistencia (esperanza  $\mu_R$  y coeficiente de variación  $V_R$ ) y de la solicitación (esperanza  $\mu_S$  y coeficiente de variación  $V_S$ ) y se verifica que la capacidad calculada a partir de valores mínimos de resistencia (*resistencia nominal*) sea superior a la demanda estimada a partir de valores máximos de solicitación (*solicitación nominal*), obteniendo un factor de seguridad (*factor de seguridad nominal*). Se puede hablar en este nivel de *métodos semi-probabilistas*.

Cornell (1969) ilustra el planteamiento matemático a este nivel como

$$R_n \geq \theta^* S_n \quad (3.2)$$

donde  $R_n = (1 - k_R V_R) \mu_R$  y  $S_n = (1 + k_S V_S) \mu_S$  son valores *nominales* o *característicos* de la resistencia y de la solicitación, respectivamente, y  $\theta^*$  es el coeficiente de seguridad *nominal* definido como :

$$\theta^* = \frac{1 - k_R V_R}{1 + k_S V_S} \theta \quad (3.3)$$

donde  $k_R$  y  $k_S$  son factores que garantizan que las resistencias y solicitaciones nominales tengan probabilidades pequeñas de no ser alcanzadas y de ser rebasadas, respectivamente.

Los nuevos reglamentos, denominados LRFD (Load and Resistance Factor Design), y que incluyen el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, pertenecen a este nivel.

## NIVEL 2

Los métodos de análisis de confiabilidad de nivel 2 tienen su origen en un trabajo presentado por Mayer (1926), pero no fue sino hasta los años 60 cuando tuvieron gran desarrollo gracias a los trabajos de Cornell (1969), Ravindra *et al* (1969) y Rosenblueth y Esteva (1971).

Debido a que los métodos de nivel 2 requieren únicamente el conocimiento de los dos primeros momentos de las variables aleatorias (medias y varianzas), así como de las covarianzas de las variables correlacionadas, éstos se conocen como *métodos de segundos momentos*.

En este nivel se supone implícitamente que las solicitaciones pueden ser superiores a las resistencias y que por ello la probabilidad de falla no es nula. Se dice que la confiabilidad de una estructura es aceptable si el índice de confiabilidad es superior a un umbral determinado a partir del dimensionamiento estructural, por medio de reglas deterministas habituales de diseño, o a partir de la experiencia de los diseñadores.

La medida de la confiabilidad asociada con un diseño particular es el *índice de confiabilidad*  $\beta$ , que representa el valor recíproco del coeficiente de variación del margen de seguridad R-S. La confiabilidad resulta ser, para cualquier distribución de R y S) (Cornell, 1969)

$$\begin{aligned} P[R > S] &= P[R - S > 0] \\ &= P\left[\frac{(R - S) - \mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}} > \frac{-\mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}}\right] \\ &= P\left[U > -\frac{1}{V_{R-S}}\right] = 1 - F_U(-\beta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde  $P[\ ]$  denota la probabilidad del evento,  $\mu_{R-S}$  representa la media del margen de seguridad,  $V_{R-S}$  es su coeficiente de variación y U es una variable aleatoria estandarizada con función de distribución acumulada  $F_U(\ )$  no especificada. Entre mayor sea  $\beta$ , mayor será la confiabilidad del diseño y menor la probabilidad de comportamiento insatisfactorio.

El objetivo principal de este nivel es proporcionar un método simple más racional para estimar la seguridad estructural por medio de la evaluación de la incertidumbre estadística de las variables de diseño, a fin de estimar la confiabilidad estructural.

Al respecto, Chowdhury y Xu (1993) distinguen tres tipos de métodos numéricos aproximados de nivel 2 para evaluar la confiabilidad de obras geotécnicas:

- Métodos de segundos momentos de primer orden (FOSM).
- Método de simulación de Monte Carlo.
- Método de estimación puntual de Rosenblueth (1975) (PEM).

### Nivel 3

En este nivel se efectúa el análisis de confiabilidad de un sistema estructural basado en el cálculo exacto de la probabilidad de falla, utilizando las distribuciones de las variables del problema.

Este análisis de confiabilidad constituye el método más complejo. Todas las variables aleatorias quedan descritas por su distribución de probabilidad y se requiere el conocimiento de la distribución de la función de estado límite; la probabilidad de falla se evalúa a partir del cálculo de las integrales de convolución apropiadas, lo que generalmente representa una tarea formidable.

A pesar de que los métodos de nivel 3 generalmente no son aplicables a casos reales debido a las dificultades teóricas y numéricas, son necesarios para verificar la validez y precisión de los métodos simplificados de nivel 1 y 2.

Se puede afirmar que el cálculo probabilista de la seguridad conduce a una mejor concordancia con los fenómenos físicos que la obtenida con un cálculo determinista. Sin embargo, a pesar del razonamiento expuesto se siguen usando enfoques deterministas o, en el mejor de los casos, semi-probabilistas, por las razones siguientes (Cornell, 1969):

- La mayoría de los ingenieros considera todavía que la aplicación de los factores de seguridad deterministas toma en cuenta la mayor parte de las incertidumbres.
- La carencia de datos suficientes y adecuados no permite la formación de bases de datos confiables que faciliten el conocimiento de las distribuciones de probabilidad de las variables de diseño.
- Por diversas razones los reglamentos en ingeniería deben ser presentados en la forma más simple posible. Al respecto, el análisis probabilista involucra en muchas ocasiones modelos complejos (no lineales) de comportamiento.
- La prudencia excesiva de los legisladores para aceptar innovaciones constituye un obstáculo para la aplicación de criterios probabilistas.

### 3.3 ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD

#### 3.3.1 PROBLEMA BÁSICO

El problema de la confiabilidad de sistemas ingenieriles puede ser básicamente tratado como un problema de *oferta vs demanda*. En otras palabras, este problema consiste en la determinación del grado en que la capacidad de oferta satisface los requerimientos de demanda, es decir, preocupa la certeza de que la resistencia

formularse como sigue (Kapur y Lamberson, 1977), recordando que  $F'_R(r) = f_R(r)$  (Rétháti, 1988)

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) \left[ \int_{-\infty}^r f_S(s) ds \right] dr = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) \left[ \int_s^{\infty} f_R(r) dr \right] ds \quad (3.6)$$

La probabilidad de falla  $P[R < S]$  o no confiabilidad, bajo las mismas consideraciones impuestas anteriormente a las variables aleatorias es

$$F = P[R < S] = 1 - C = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_S(r)] f_R(r) dr \quad (3.7)$$

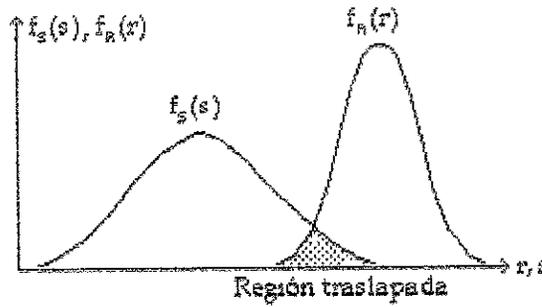


Fig 3.1 Funciones de densidad de probabilidad de R y S.

Como se aprecia en la fig 3.1, la región traslapada de las funciones de densidad de probabilidad representa una medida cuantitativa de la probabilidad de falla. Al respecto se puede comentar lo siguiente:

- La región traslapada depende de la posición relativa de  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$ ; esto significa que si las dos curvas se separan la probabilidad de falla disminuye, mientras que si se acercan este valor aumenta. La posición relativa entre  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$  puede ser medida por medio de la relación  $\frac{\mu_R}{\mu_S}$ , denominada *factor de seguridad central* o mediante la diferencia  $\mu_R - \mu_S$ , llamada *margen de seguridad*.
- La región traslapada también depende del grado de dispersión de  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$ , ya que a menor dispersión (curvas sólidas) corresponde una región traslapada y una probabilidad de falla menor, mientras que si la dispersión es mayor (curvas dispersas) ambos parámetros se incrementan. Estas dispersiones pueden ser expresadas en términos de los coeficientes de variación  $V_R$  y  $V_S$ ; por tanto se puede establecer que  $F = f\left(\frac{\mu_R}{\mu_S}, V_R, V_S\right)$ .

De lo expuesto anteriormente se puede concluir que la confiabilidad y la probabilidad de falla dependen de la forma de  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$ ; sin embargo, esta información es difícil de conseguir en la realidad, pudiendo sólo establecerse, generalmente, los primeros momentos de las variables aleatorias.

Las ecs 3.6 y 3.7 suponen independencia de las variables. En general éstas pueden estar correlacionadas, obteniéndose las siguientes ecuaciones para determinar la confiabilidad y la probabilidad de falla en los términos de la función de densidad de probabilidad conjunta

$$C = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^r f_{R,S}(r,s) ds \right] dr \tag{3.8}$$

$$F = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^s f_{R,S}(r,s) dr \right] ds \tag{3.9}$$

Si ahora se define a  $M=R-S$ , donde  $M$  es la llamada *variable aleatoria de interferencia* o *margen de seguridad*, entonces es posible definir a los parámetros anteriores como

$$C = P[M > 0] = \int_0^{\infty} f_M(m) dm \tag{3.10}$$

$$F = P[M \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm \tag{3.11}$$

Se observa (Kapur y Lamberson, 1977) que si  $R$  y  $S$  son variables aleatorias independientes mayores o iguales a cero, la confiabilidad  $C$  resulta ser

$$C = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_R(m+s) f_S(s) ds dm \tag{3.12}$$

y la probabilidad de falla o no confiabilidad

$$F = \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} f_R(m+s) f_S(s) ds dm \tag{3.13}$$

En la figura 3.2 la confiabilidad  $C$  se puede expresar en términos de  $M$  como  $C = P[M > 0]$ . En este caso, el índice de confiabilidad  $\beta$  se interpreta como el número de desviaciones estándar  $\sigma_M$  que separa a la media  $\mu_M$  del origen.

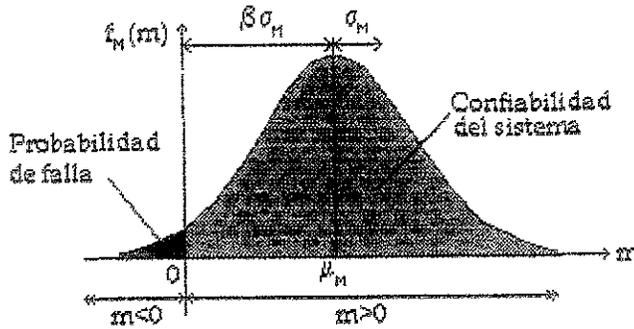


Fig 3.2 Confiabilidad del sistema.

### 3.3.2 CONFIABILIDAD EN EL CASO DE VARIABLES ALEATORIAS CON DISTRIBUCIONES COMUNES

Si  $R$  y  $S$  son variables aleatorias de oferta y demanda, la forma en que varían puede ser evaluada a partir de observaciones y recurriendo a la estadística. Se obtienen tablas de distribución de frecuencias, histogramas y polígonos de frecuencia. Esta información relativa a la variación de las variables aleatorias solamente es de utilidad si es suficientemente representativa para permitir la estimación de las funciones de densidad de probabilidad o funciones de distribución teóricas (para variables discretas o continuas). Sin embargo, el establecimiento de dichas funciones requiere un gran número de observaciones.

La selección de la función de densidad adecuada a partir de una tabla de distribución de frecuencias se realiza comúnmente por simple ajuste (fig 3.3); a menos que la función de distribución describa correctamente el modelo general de variación, una extrapolación hacia los extremos origina una estimación errónea de la confiabilidad en dichas zonas

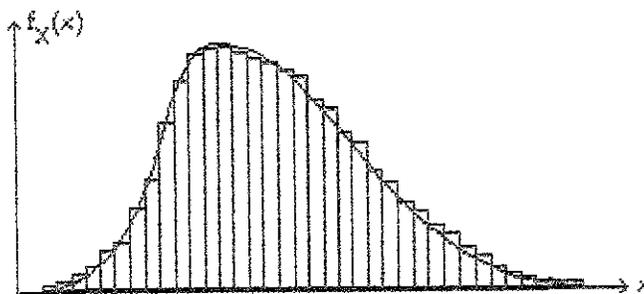


Fig 3.3 Ajuste de la función de densidad  $f_X(x)$ .

Las únicas funciones que evitan este problema son aquellas que representan un modelo definitivo de variación como resultado de ciertas suposiciones básicas relativas a su origen y que son comentadas en los siguientes puntos (Freudenthal, 1956).

### 3.3.2.1 DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Esta distribución es simétrica y se presenta comúnmente cuando la variable aleatoria  $M$  es la suma de un gran número de variables aleatorias de peso similar, independientes y con distribución arbitraria.

Sea la variable aleatoria de interferencia  $M$  con distribución de probabilidad normal estándar (fig 3.4a), entonces

$$f_M(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)m^2}, -\infty < m < \infty \tag{3.14}$$

Una notación corta para esta distribución es  $N(0,1)$ , es decir,  $\mu=0$  y  $\sigma=1$ . La confiabilidad y probabilidad de falla están dadas respectivamente por las siguientes expresiones (Rao, 1992)

$$\begin{aligned} C = P[M > 0] &= \int_0^{\infty} f_M(m) dm = 1 - \Phi \left[ -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \right] \\ &= 1 - \Phi \left[ -\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] = \Phi \left[ \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} F = P[M \leq 0] &= \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = \Phi \left[ -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \right] \\ &= \Phi \left[ -\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] = 1 - \Phi \left[ \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución normal estándar de la variable aleatoria de interferencia normalizada.

A la expresión  $\left[ \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right]$  se le denota por  $\beta$  y se le conoce como *índice de confiabilidad* o *índice de seguridad*.

3.3.2.2 DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

Esta distribución es sesgada y puede interpretarse como: a) el producto de un gran número de variables independientes, o que b) depende de la acumulación de operaciones aleatorias independientes realizadas en forma consecutiva sobre una variable con acumulación de los efectos previos (por ejemplo la erosión progresiva del diámetro de las partículas en materiales granulares aluviales).

La forma estándar de la función de densidad lognormal (fig 3.4b) es :

$$f_{\theta}(\theta) = \frac{1}{\theta \sigma_{\theta} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{\theta}^2} (\ln \theta - \mu_{\theta})^2\right], \quad \theta > 0 \tag{3.17}$$

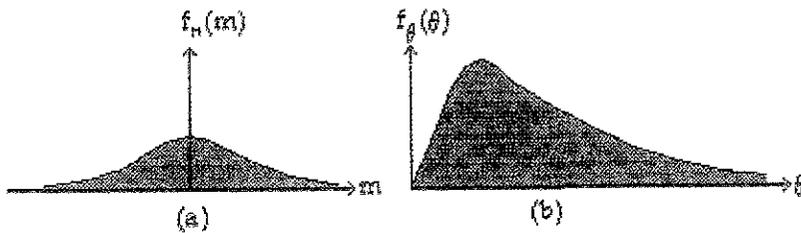


Fig 3.4 Distribuciones de probabilidad (a) normal estándar, (b) lognormal

En el caso de variables aleatorias mayores o iguales a cero, la confiabilidad y falla pueden asociarse a los eventos  $[\theta > 1]$  y  $[\theta < 1]$ , respectivamente, donde  $\theta = \frac{R}{S}$ .

Cuando las variables aleatorias R y S son independientes y con distribución lognormal, es posible evaluar la confiabilidad calculando  $P\left[\frac{R}{S} > 1\right]$ , ya que la variable aleatoria  $\theta = \frac{R}{S}$ , conocida como *factor de seguridad* presenta también distribución lognormal. Por tanto

$$C = P[\theta \geq 1] = \int_1^{\infty} f_{\theta}(\theta) d\theta \tag{3.18}$$

$$F = P[\theta < 1] = \int_0^1 f_{\theta}(\theta) d\theta = F_{\theta}(1) \tag{3.19}$$

Para este caso se demuestra (Ang y Cornell, 1974) que

$$F = 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right) \sqrt{\frac{1 + V_S^2}{1 + V_R^2}}}{\sqrt{\text{Ln}(1 + V_R^2) + (1 + V_S^2)}} \right] \tag{3.20}$$

$$C = \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right) \sqrt{\frac{1 + V_S^2}{1 + V_R^2}}}{\sqrt{\text{Ln}(1 + V_R^2) + (1 + V_S^2)}} \right] \tag{3.21}$$

Si  $V_R, V_S \leq 0.30$ , entonces

$$F \approx 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right)}{\sqrt{V_R^2 - V_S^2}} \right] \tag{3.22}$$

$$C \approx \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right)}{\sqrt{V_R^2 - V_S^2}} \right] \tag{3.23}$$

donde

$V_R$  = coeficiente de variación de R.

$V_S$  = coeficiente de variación de S.

De la misma manera es posible demostrar (Ang y Tang, 1984) que

$$F = \Phi \left[ -\frac{\lambda_\theta}{\sigma_\theta} \right] = 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \frac{R_M}{S_M}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \tag{3.24}$$

$$C = \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{R_M}{S_M} \right)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \tag{3.25}$$

donde

- $\lambda_\theta = E(\text{Ln } \theta)$ .
- $\sigma_\theta^2 = \text{Var}(\text{Ln } \theta)$ .
- $R_M = \text{Mediana de R.}$
- $S_M = \text{Mediana de S.}$

En este caso la confiabilidad es función de  $\theta_M = \frac{R_M}{S_M}$ , llamado *factor mediano de seguridad*, la desviación estándar es  $\sigma_\theta = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$  y la razón  $\frac{\lambda_\theta}{\sigma_\theta} = \beta$  es también conocida como índice de confiabilidad.

### 3.3.3 CONFIABILIDAD ASOCIADA A UN ESTADO LÍMITE

Como se mencionó anteriormente, el cálculo de la confiabilidad y de la probabilidad de falla de un sistema ingenieril requiere del conocimiento de las distribuciones  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$  o de la distribución conjunta  $f_{R,S}(r,s)$ . En la práctica esta información no está disponible o es difícil de obtener debido a la insuficiencia de datos. Además, aún cuando las distribuciones requeridas puedan ser especificadas, la exacta evaluación de las probabilidades generalmente requiere la integración de las ecs 3.6 a 3.13, lo cual puede resultar impráctico; como una alternativa práctica se puede recurrir a la utilización de distribuciones normales equivalentes como una aproximación, tal como se verá más adelante. A lo anterior tiene que sumarse el hecho de que las variables R y S son a su vez funciones de otras variables básicas.

Frecuentemente la información estadística disponible puede ser suficiente sólo para evaluar el primer y segundo momentos de las variables aleatorias. Por

tanto, las medidas prácticas de seguridad o confiabilidad deben estar limitadas a funciones de estos dos momentos.

Teniendo en cuenta la variable aleatoria margen de seguridad,  $M=R-S$ , el *estado de seguridad* del sistema puede ser definido como  $[M > 0]$ , mientras que el *estado de falla* es el evento  $[M < 0]$ . La frontera que separa al estado de seguridad del de falla es el *estado límite*, definido por la ecuación  $M=0$ .

En el espacio de las variables normalizadas  $R'$  y  $S'$  la ecuación del estado límite,  $M=0$ , resulta ser

$$M = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S = 0 \tag{3.26}$$

que representa una línea recta como se muestra en la figura 3.5. La distancia desde esta línea de falla al origen es en sí misma una medida de la confiabilidad; es posible demostrar (Ang y Tang, 1984) que

$$d = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \tag{3.27}$$

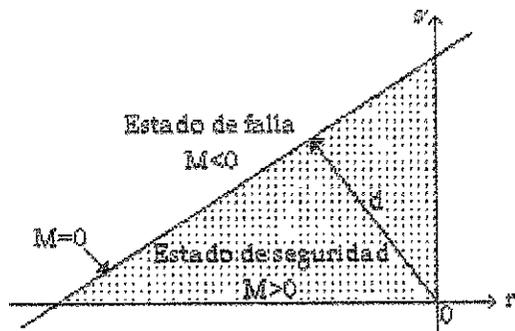


Fig 3.5 Espacio de las variables normalizadas  $R'$  y  $S'$ .

De acuerdo con la ec 3.15 se puede observar que para  $R$  y  $S$ , con distribución normal estándar la distancia  $d$  es también el índice de confiabilidad  $\beta$ . Entonces  $d=\beta$  y la confiabilidad es  $C=\Phi(d)$ .

En general, el análisis de confiabilidad de un sistema ingenieril real implica múltiples variables aleatorias básicas de diseño de todos tipos y relaciones generalmente no lineales entre ellas, siendo la oferta y la demanda funciones de varias variables. En un amplio sentido, la confiabilidad de un sistema ingenieril puede ser definida como la probabilidad de ejecutar su función o misión objetivo. En este contexto y para el propósito de una formulación general se define una *función de comportamiento* o *función de estado* bajo solicitaciones de operación, accidentales o ambientales (Shinozuka, 1983) como

$$M = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.28)$$

donde  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  es un vector de variables básicas (de sollicitación y resistencia) de estado o diseño del sistema y la función  $g(\mathbf{X})$  determina el comportamiento o estado del mismo.

Al respecto conviene observar que en la evaluación de la confiabilidad de una obra de ingeniería debe distinguirse entre variables aleatorias y de control. Las primeras se refieren a aquellos parámetros sobre los cuales el diseñador o el constructor no puede o no desea, por motivos económicos o de otra índole, ejercer un adecuado dominio, y que están asociados a fenómenos físicos que son aleatorios por naturaleza o sobre los cuales no se cuenta con información adecuada o completa para efectuar predicciones y estimaciones. Las variables de control tienen por lo contrario un carácter determinista. Su selección, que es parte fundamental del diseño, puede incidir fuertemente sobre la confiabilidad del sistema. En el vector de variables de la ec. 3.28, intervienen ambos tipos de variables.

En estos términos, el requerimiento límite de comportamiento puede ser definido como  $g(\mathbf{X})=0$ , que representa el estado límite del sistema. Se establece por tanto que

$$[g(\mathbf{X}) > 0] = \text{Estado de seguridad} \quad (3.29)$$

$$[g(\mathbf{X}) < 0] = \text{Estado de falla} \quad (3.30)$$

Geoméricamente la ecuación del estado límite  $g(\mathbf{X})=0$  es una superficie  $n$ -dimensional que es llamada *superficie de falla*. En este caso un lado de la superficie de falla es el estado seguro  $g(\mathbf{X})>0$ , mientras que el otro es el estado de falla  $g(\mathbf{X})<0$ .

Por tanto, si la distribución de probabilidad conjunta de las variables de diseño  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es  $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ , la probabilidad del estado seguro o confiabilidad es

$$C = P_s = \int_{\{g(\mathbf{X}) > 0\}} \dots \int f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.31)$$

que puede ser escrita de forma breve como

$$C = P_s = \int_{\{g(x)>0\}} f_x(x) dx \tag{3.32}$$

La ec 3.32 es simplemente la integral de volumen de la función  $f_x(x)$  sobre la región de seguridad  $g(X)>0$ . De igual forma la probabilidad de falla es la integral de volumen sobre la región de falla es

$$F = P_f = \int_{\{g(x)<0\}} \dots \int f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \tag{3.33}$$

brevemente

$$P_f = F = \int_{g(x)<0} f_x(x) dx \tag{3.34}$$

En general, las variables básicas  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de las ecuaciones anteriores pueden estar correlacionadas. Sin embargo, se trata primero el caso de variables no correlacionadas, introduciendo un conjunto de variables normalizadas o reducidas no correlacionadas (Freudenthal, 1956)

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}; \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.35}$$

Evidentemente los estados de seguridad y falla pueden también ser expresados en el espacio de las variables reducidas anteriores, separados por la ecuación de estado límite apropiada. En el caso de dos variables esta situación puede ser representada como en la figura 3.6.

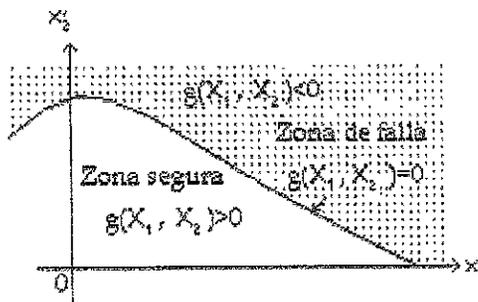


Fig 3.6 Estados de falla y seguridad en el espacio de las variables reducidas.

En términos de las variables reducidas,  $X'_i$ , la ecuación de estado límite es

$$g(\sigma_{x_1} X'_1 + \mu_{X_1}, \dots, \sigma_{x_n} X'_n + \mu_{X_n}) = 0 \tag{3.36}$$

Se observa en la fig 3.6 que conforme la superficie de estado límite (o superficie de falla)  $g(X)=0$  se aleja o acerca al origen, la región de seguridad  $g(X)>0$  crece o decrece respectivamente. Por tanto, la posición de la superficie de falla relativa al origen de las variables reducidas determina la seguridad o confiabilidad del sistema. La posición de la superficie de falla puede ser representada por la mínima distancia desde la superficie  $g(X)=0$  al origen de las variables reducidas (Hasofer y Lind, 1974). Shinozuka (1983) ha mostrado que el punto sobre la superficie de falla con la mínima distancia al origen es el punto de falla de máxima verosimilitud. Entonces, en un sentido aproximado, esta distancia mínima puede ser usada como una medida de confiabilidad.

### 3.3.4 CONFIABILIDAD DE SISTEMAS

El problema considerado anteriormente involucra estrictamente un sólo modo de falla, definido por un sólo estado límite. Sin embargo, los problemas de ingeniería frecuentemente involucran múltiples modos de falla; esto es, pueden existir varios modos potenciales de falla y la ocurrencia de cualquiera de ellos produce la falla del sistema o de sus componentes. En general, los diferentes modos de falla pueden estar correlacionados (cuando menos de manera parcial).

En realidad, en un sistema ingenieril complejo multicomponente, las posibilidades de ocurrencia de falla de un sistema pueden estar tan involucradas, por lo que es necesario el establecimiento de un modelo para identificar todos los mecanismos potenciales y sus respectivas consecuencias. En estos casos los modelos de *árboles de falla y de eventos* son muy útiles. El diagrama de árbol de falla descompone al evento principal de falla (evento tope) en uniones e intersecciones de subeventos o combinaciones de los mismos; el proceso de descomposición se lleva a cabo hasta que las probabilidades de los subeventos pueden ser evaluadas como probabilidades de falla de modo simple.

Los cálculos de estas últimas probabilidades requieren la aplicación de las ecuaciones descritas anteriormente. La consecuencia de un evento de falla particular (evento tope) puede depender de la secuencia de eventos posteriores al mismo. La identificación sistemática de la secuencia posible de eventos se realiza a través de un árbol de eventos.

#### 3.3.4.1 MODOS DE FALLA MÚLTIPLE

La confiabilidad de un sistema multicomponente es esencialmente un problema de modos de falla múltiples; esto es, la falla de los diferentes componentes o grupos de componentes constituyen los diferentes modos de falla del sistema. La consideración de múltiples modos de falla es, por tanto, fundamental para resolver el problema de confiabilidad de un sistema. La identificación de los

modos individuales de falla y la evaluación de sus respectivas probabilidades constituyen en sí un problema complejo.

Considerando un sistema con  $k$  modos potenciales de falla resulta evidente que cada modo presenta a su vez diferentes funciones de comportamiento.

Suponiendo que estas funciones se pueden expresar como

$$g_j(X) = g_j(X_1, X_2, \dots, X_n); \quad j = 1, 2, \dots, k \tag{3.37}$$

de tal suerte que los eventos individuales de falla son

$$E_j = [g_j(X) < 0] \tag{3.38}$$

entonces los complementos de  $E_j$  son los eventos de seguridad, esto es

$$\bar{E}_j = [g_j(X) > 0] \tag{3.39}$$

En el caso de dos variables los eventos anteriores pueden ser representados gráficamente como en la figura 3.7, en la cual se observan tres modos de falla expresados por las ecuaciones de estado límite  $g_j(X) = 0, j = 1, 2, \dots, n$ .

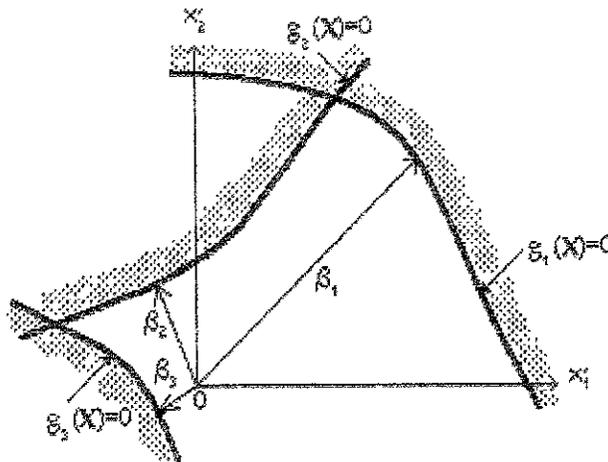


Fig 3.7 Múltiples modos de falla.

La confiabilidad de un sistema corresponde a la probabilidad del evento  $\bar{E}$  tal que ninguno de los  $k$  modos de falla ocurre; es decir :

$$\bar{E} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \dots \cap \bar{E}_k \tag{3.40}$$

Contrariamente, el evento de falla es

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k \tag{3.41}$$

La ec 3.41 literalmente significa que puede ocurrir uno o más de los eventos potenciales de falla. Teóricamente, por tanto, la confiabilidad o probabilidad de seguridad del sistema puede expresarse como la integral multidimensional :

$$C = P_s = \int_{(\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_k)} \dots \int f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \tag{3.42}$$

mientras que la probabilidad de falla del sistema es

$$F = P_f = \int_{(E_1 \cup \dots \cup E_k)} \dots \int f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \tag{3.43}$$

### 3.3.4.2 FRONTERAS DE PROBABILIDAD

El cálculo de la confiabilidad o de la probabilidad de falla de un sistema por medio de las ecs 3.42 o 3.43 es generalmente una tarea muy difícil que se resuelve por medio de aproximaciones. En este caso obtener fronteras superior e inferior de la correspondiente probabilidad resulta muy útil.

#### FRONTERAS UNIMODALES

Considerando modos de falla positivamente correlacionados ( $\rho_{ij} > 0$ ) se tiene (Ang y Tang, 1984) que para dos eventos  $E_i$  y  $E_j$  :

$$P(E_j | E_i) \geq P(E_j) \tag{3.44}$$

lo que significa que

$$P(\bar{E}_j | \bar{E}_i) \geq P(\bar{E}_j) \tag{3.45}$$

Por tanto,

$$P(\bar{E}_i, \bar{E}_j) \geq P(\bar{E}_i)P(\bar{E}_j) \tag{3.46}$$

Para  $k$  eventos, estos conceptos pueden generalizarse, lo que conduce a

$$P(\bar{E}) = P(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k) \geq \prod_{i=1}^k P(\bar{E}_i) \quad (3.47)$$

Contrariamente, se observa que

$$(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k) \subset \bar{E}_j; \text{ para todo } j \quad (3.48)$$

y en particular

$$(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k) \subset \text{mín } \bar{E}_j; \text{ } j = 1, 2, \dots, k \quad (3.49)$$

donde  $\text{mín } \bar{E}_j$  es el conjunto de mínima probabilidad

Por tanto

$$P(\bar{E}) \leq \text{mín}_j P(\bar{E}_j) \quad (3.50)$$

Si se denota la confiabilidad contra el *iésimo* modo de falla como

$$P_{s_i} = P(\bar{E}_i) \quad (3.51)$$

y la confiabilidad contra todos los modos potenciales de falla como

$$P_s = P(\bar{E}) \quad (3.52)$$

entonces las fronteras de  $P_s$  se establecen de acuerdo con las ecs 3.47 y 3.50 de la siguiente forma (Ang y Amin, 1968)

$$\prod_{i=1}^k P_{s_i} \leq P_s \leq \text{mín}_i P_{s_i} \quad (3.53)$$

Contrariamente, las correspondientes fronteras para la probabilidad de falla  $P_F = P(E)$  son

$$\text{máx}_i P_{F_i} \leq P_F \leq 1 - \prod_{i=1}^k (1 - P_{F_i}) \quad (3.54)$$

donde  $P_{F_i} = P(E_i)$  es la probabilidad de falla del *iésimo* modo. Se observa que para un valor pequeño de  $P_{F_i}$  el miembro derecho de la ec 3.54 es

$$1 - \prod_{i=1}^k (1 - P_{F_i}) \approx \sum_{i=1}^k P_{F_i} \quad (3.55)$$

Para modos de falla negativamente correlacionados o eventos que son negativamente dependientes, esto es,  $\rho_{ij} < 0$ , se tiene que para dos eventos  $E_i$  y  $E_j$ ,

$$P(E_j | E_i) \leq P(E_j) \quad (3.56)$$

y

$$P(\bar{E}_j | \bar{E}_i) \leq P(\bar{E}_j) \quad (3.57)$$

En particular, si  $E_i$  y  $E_j$  están perfectamente correlacionados negativamente, es decir,  $\rho_{ij} = -1$ , se observa que :

$$P(\bar{E}_j | \bar{E}_i) = P(E_j | E_i) = 0 \quad (3.58)$$

Por tanto

$$P(\bar{E}_i \bar{E}_j) \leq P(\bar{E}_i) P(\bar{E}_j) \quad (3.59)$$

y

$$P(\bar{E}) = P(\bar{E}_1 \bar{E}_2 \dots \bar{E}_k) \leq \prod_{i=1}^k P(\bar{E}_i) \quad (3.60)$$

Trivialmente, por supuesto,  $P(\bar{E}) \geq 0$ . Por tanto

$$P_S \leq \prod_{i=1}^k P_{S_i} \quad (3.61)$$

Contrariamente

$$P_F \geq 1 - \prod_{i=1}^k P(\bar{E}_i) \quad (3.62)$$

La separación entre las fronteras inferior y superior de las ecs 3.53 y 3.54 depende del número de modos potenciales de falla y de las magnitudes relativas de los modos individuales. Por ejemplo, si existe un modo dominante, la confiabilidad y la probabilidad de falla están determinadas por este modo y, por tanto, se pueden representar por la probabilidad del mismo; en tales casos las fronteras serán estrechas. En general, sin embargo, las fronteras pueden estar

separadas ampliamente, principalmente si el número de modos potenciales de falla es grande. Las fronteras anteriores, ecs 3.53 a 3.61 se denominan *fronteras de primer orden o unimodales*, siempre y cuando los límites inferior y superior de probabilidad involucren probabilidades de modo simple de falla o seguridad.

### 3.3.4.3 FRONTERAS BIMODALES

Las fronteras descritas anteriormente se pueden mejorar tomando en cuenta la correlación entre pares de modos potenciales de falla; las fronteras mejoradas resultantes necesariamente requieren del conocimiento de las probabilidades de eventos tales como  $(E_i, E_j)$  o  $(\bar{E}_i, \bar{E}_j)$  y son llamadas *fronteras bimodales o de segundo orden*.

El evento de falla  $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$  se puede descomponer de la siguiente forma (fig 3.8), asumiendo que  $\bar{E}_1$  representa el conjunto más grande

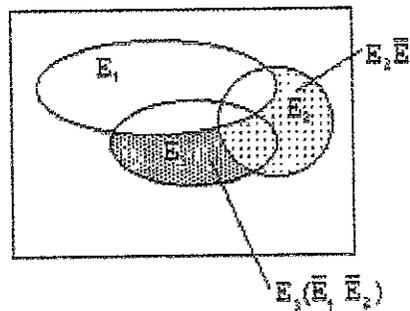


Fig 3.8 Descomposición de E.

$$E = E_1 \cup E_2 \bar{E}_1 \cup E_3 (\bar{E}_1, \bar{E}_2) \cup \dots \cup E_k (\bar{E}_1, \bar{E}_2 \dots \bar{E}_{k-1}) \quad (3.63)$$

Además, por la ley de de Morgan

$$(\bar{E}_1, \bar{E}_2 \dots \bar{E}_{i-1}) = \overline{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{i-1}} \quad (3.64)$$

y para  $i=2, 3, \dots, k$ ,

$$E_i \cap (\bar{E}_1, \bar{E}_2 \dots \bar{E}_{i-1}) = E_i \cap (\overline{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{i-1}}) \quad (3.65)$$

Es posible observar que

$$E_i \cap (\overline{E_1 \cup \dots \cup E_{i-1}}) \cup E_i \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{i-1}) = E_i \quad (3.66)$$

Por tanto

$$P[E_i \cap (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1})] = P(E_i) - P[(E_i, E_1) \cup (E_i, E_2) \cup \dots \cup (E_i, E_{i-1})] \quad (3.67)$$

Pero

$$P[(E_i, E_1) \cup (E_i, E_2) \cup \dots \cup (E_i, E_{i-1})] \leq P(E_i, E_1) + P(E_i, E_2) + \dots + P(E_i, E_{i-1}) \quad (3.68)$$

Por ello

$$P[E_i \cap (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1})] \geq P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i, E_j) \quad (3.69)$$

Por tanto, a partir de la ec 3.63 se tiene

$$P(E) \geq P(E_1) + \max \left\{ \sum_{i=2}^k \left[ P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i, E_j) \right]; 0 \right\} \quad (3.70)$$

Por otro lado

$$\bar{E}_1 \cap (\bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1}) \subset \bar{E}_j; \text{ para cualquier } j \quad (3.71)$$

En particular :

$$\bar{E}_1 \cap (\bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1}) \subset \min_{j < i} \bar{E}_j \quad (3.72)$$

Por tanto

$$(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1}) E_i \subset \left( \min_{j < i} \bar{E}_j \right) E_i \quad (3.73)$$

Se observa que

$$\left( \min_{j < i} \bar{E}_j \right) E_i \cup \left( \max_{j < i} E_j \right) E_i = E_i \left( \min_{j < i} \bar{E}_j \cup \max_{j < i} E_j \right) = E_i \quad (3.74)$$

Así

$$P(\bar{E}_1, \bar{E}_2 \dots \bar{E}_{i-1}, E_i) \leq P(E_i) - \max_{j < i} P(E_i, E_j) \tag{3.75}$$

Por tanto, la ec 3.63 conduce a

$$P(E) \leq P(E_1) + \sum_{i=2}^k \left[ P(E_i) - \max_{j < i} P(E_i, E_j) \right] \tag{3.76}$$

o bien

$$P(E) \leq \sum_{i=1}^k P(E_i) - \sum_{i=2}^k \max_{j < i} P(E_i, E_j) \tag{3.77}$$

Las ecs 3.70 y 3.77 representan, respectivamente, las fronteras inferior y superior de probabilidad de falla cuando existen  $k$  modos potenciales (Kounias, 1968; Hunter, 1976); esto es

$$P_{F_1} + \max \left\{ \sum_{i=2}^k \left[ P_{F_i} - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i, E_j) \right]; 0 \right\} \leq P_F \leq \sum_{i=1}^k P_{F_i} - \sum_{i=2}^k \max_{j < i} P(E_i, E_j) \tag{3.78}$$

donde  $P_{F_1}$  es la probabilidad de falla del conjunto más grande ( $E_1$ ).

En general, algunos de los modos de falla pueden estar correlacionados, por lo que los cálculos de las probabilidades conjuntas  $P(E_i, E_j)$  en las ecs 3.70, 3.77 y 3.78 son complicados.

Una versión simple de las fronteras bimodales anteriores fue propuesto por Ditlevsen (1979) para variables Gaussianas, suponiendo que las variables básicas de diseño  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  son de este tipo y considerando dos modos potenciales de falla  $E_i$  y  $E_j$ , definidos por las ecuaciones de estado límite  $g_i(X) = 0$  y  $g_j(X) = 0$ , respectivamente, con una correlación mutua positiva  $\rho_{ij} \geq 0$ .

En el espacio de las variables reducidas  $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$  estas ecuaciones de estado límite representan dos hipersuperficies que se intersecan, las cuales son aproximadas por medio de sus respectivos planos tangentes, con distancias  $\beta_1$  y  $\beta_2$  desde el origen de las variables reducidas. La representación geométrica para el caso de dos variables se ilustra en la fig 3.9.

En la misma figura el coseno del ángulo  $\theta$  entre  $g_i(X)=0$  y  $g_j(X)=0$  es el coeficiente de correlación  $\rho_{ij}$ ; esto es,  $\cos \theta = \rho_{ij}$ . Esto se puede demostrar de la siguiente forma:

Estableciendo que

$$\begin{aligned} g_i(X) &= a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 \\ g_j(X) &= b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 \end{aligned} \tag{3.79}$$

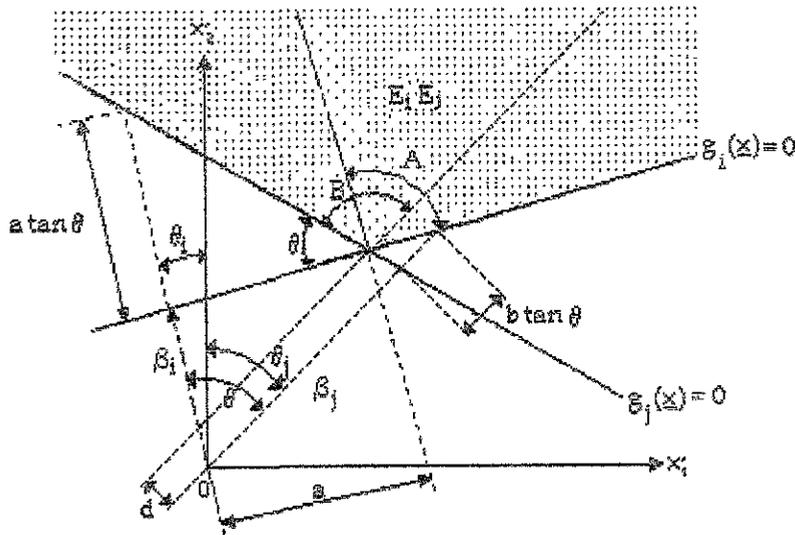


Fig 3.9 Intersección de dos planos tangentes (eventos de falla correlacionados positivamente).

donde  $X_1$  y  $X_2$  no están correlacionadas; esto es,  $Cov(X_1, X_2) = 0$ . Por tanto

$$\begin{aligned} Cov(g_i, g_j) &= E[(a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2)(b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2)] \\ &= -(a_0 + a_1 \mu_{X_1} + a_2 \mu_{X_2}) - (b_0 + b_1 \mu_{X_1} + b_2 \mu_{X_2}) \\ &= a_1 b_1 \sigma_{X_1}^2 + a_2 b_2 \sigma_{X_2}^2 \end{aligned} \tag{3.80}$$

y

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(g_i, g_j)}{\sigma_{g_i} \sigma_{g_j}} = \frac{a_1 b_1 \sigma_{X_1}^2 + a_2 b_2 \sigma_{X_2}^2}{\sqrt{(a_1^2 \sigma_{X_1}^2 + a_2^2 \sigma_{X_2}^2)(b_1^2 \sigma_{X_1}^2 + b_2^2 \sigma_{X_2}^2)}} \tag{3.81}$$

De los cosenos directores asociados con  $g_i(X)=0$  y  $g_j(X)=0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{a_2 \sigma_{x_2}}{\sqrt{a_1^2 \sigma_{x_1}^2 + a_2^2 \sigma_{x_2}^2}} \\ \cos \theta_2 &= \frac{b_2 \sigma_{x_2}}{\sqrt{b_1^2 \sigma_{x_1}^2 + b_2^2 \sigma_{x_2}^2}} \end{aligned} \tag{3.82}$$

Además, de la figura anterior

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= \frac{a_1 b_1 \sigma_{x_1}^2 + a_2 b_2 \sigma_{x_2}^2}{\sqrt{(a_1^2 \sigma_{x_1}^2 + a_2^2 \sigma_{x_2}^2)(b_1^2 \sigma_{x_1}^2 + b_2^2 \sigma_{x_2}^2)}} \end{aligned} \tag{3.83}$$

Por tanto,  $\rho_{ij} = \cos \theta$ .

El evento conjunto de falla,  $(E_i, E_j)$ , es la región sombreada de la figura anterior. Se observa claramente que

$$(E_i, E_j) \supset A \tag{3.84}$$

Además

$$(E_i, E_j) \supset B \tag{3.85}$$

donde A y B están definidos en la fig 3.9.

Por tanto, observando nuevamente la citada figura se tiene que

$$\max[P(A), P(B)] \leq P(E_i, E_j) \leq P(A) + P(B) \tag{3.86}$$

donde, por razones de ortogonalidad (fig 3.9)

$$P(A) = \Phi(-\beta_i) \Phi(-a) = \Phi(-\beta_i) \Phi\left(-\frac{\beta_j - \rho \beta_i}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \tag{3.87}$$

$$P(B) = \Phi(-\beta_j) \Phi(-b) = \Phi(-\beta_j) \Phi\left(-\frac{\beta_i - \rho\beta_j}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (3.88)$$

La probabilidad de los eventos conjuntos,  $P(E_i, E_j)$  en la ec 3.78 puede entonces aproximarse utilizando las fronteras adecuadas de la ec 3.86; esto es, para la frontera inferior, ec 3.70, se debe utilizar

$$P(E_i, E_j) = P(A) + P(B) \quad (3.89)$$

mientras que para la frontera superior se debe emplear

$$P(E_i, E_j) = \max[P(A), P(B)] \quad (3.90)$$

La ec 3.86 se aplica a eventos de falla que involucran  $n$  variables. En particular la geometría de la fig 3.9 es válida para cualquier par de funciones de comportamiento correlacionadas positivamente,  $M_i = g_i(\mathbf{X})$  y  $M_j = g_j(\mathbf{X})$ , donde  $\mathbf{X}$  es un vector  $n$ -dimensional de variables normales (Ditlevsen, 1979). Para esta representación generalizada, las coordenadas  $X'_1$  y  $X'_2$  de la fig 3.9 deben ser reemplazadas por las variables normales estándar no correlacionadas correspondientes,  $M'_i$  y  $M'_j$ , por medio de una *rotación de coordenadas u ortogonalización de variables básicas*, tal como se verá más adelante.

En general, el rango de las fronteras bimodales de la ec 3.78, con las aproximaciones de la ec 3.86, decrece a medida que las probabilidades de falla de modo simple lo hace; por ejemplo, para probabilidades de falla de modo simple del orden de  $10^{-4}$ , las fronteras bimodales pueden ser muy estrechas (Ditlevsen, 1979). Sin embargo, si las probabilidades de falla de modo simple son grandes, por ejemplo  $10^{-2}$ , las fronteras de la ec 3.78 pueden ser amplias (Ma y Ang, 1981).

Las fronteras bimodales, ec 3.78, dependen del orden de los modos de falla individuales; esto es, diferentes órdenes de los modos de falla individuales pueden producir diferentes valores de las ecs 3.70 y 3.77 y por ello las fronteras correspondientes a diferentes órdenes deben evaluarse para obtener mayor precisión en las mismas. Si el número de modos es cuantioso, las fronteras correspondientes a varios órdenes aleatorios deben ser ponderadas.

Si  $E_i$  y  $E_j$  son negativamente dependientes, es decir,  $\rho_{ij} < 0$ , las ecuaciones de estado límite se representan como en la fig 3.10, donde el evento de falla conjunto  $((E_i, E_j))$  corresponde a la zona sombreada.

En tales casos se puede demostrar (Ang y Tang, 1987) que

$$P(E_i, E_j) \leq \min[P(A), P(B)] \tag{3.91}$$

donde  $P(A)$  y  $P(B)$  están definidas por las ecs 3.87 y 3.88, respectivamente; la frontera inferior es (trivialmente) cero.

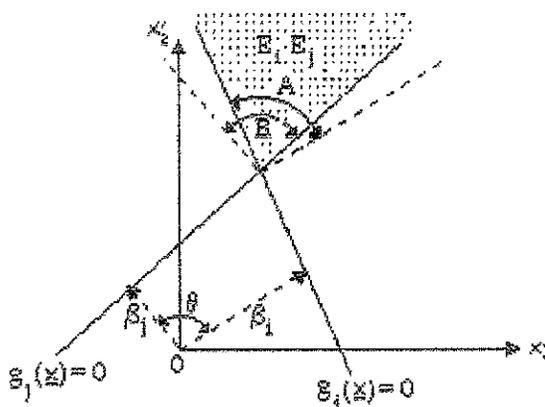


Fig 3.10 Dos planos tangentes para eventos de falla negativamente dependientes.

### 3.3.5 SISTEMAS EN SERIE

Muchos sistemas físicos compuestos por múltiples elementos pueden ser clasificados como sistemas en serie o en paralelo, o combinaciones de los mismos. En general, los eventos de falla (p.e. el caso de múltiples modos de falla) pueden también ser representados por eventos en serie (unión) o en paralelo (intersección).

Aquellos sistemas que están compuestos por elementos conectados en serie son aquellos en los que la falla de uno o más componentes provoca la falla del sistema. En otras palabras, la confiabilidad del sistema requiere que ninguno de sus componentes falle.

Si  $E_i$  denota la falla de la componente  $i$ , entonces la falla de un sistema en serie es el evento

$$E_s = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m \tag{3.92}$$

y la seguridad del sistema es el evento

$$\bar{E}_s = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \dots \cap \bar{E}_m \quad (3.93)$$

### 3.3.6 SISTEMAS EN PARALELO

Los sistemas compuestos por elementos en paralelo son aquellos en que la falla total del sistema requiere la falla de todos sus componentes; en otras palabras, si uno de sus componentes sobrevive, el sistema permanece seguro.

La falla de un sistema con  $m$  componentes en paralelo es, por tanto,

$$E_s = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_m \quad (3.94)$$

mientras que la seguridad del sistema es el evento

$$\bar{E}_s = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \cup \dots \cup \bar{E}_m \quad (3.95)$$

## 3.4 MÉTODOS DE CÁLCULO

### 3.4.1 INTRODUCCIÓN

Resulta importante establecer que las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias que intervienen en el cálculo de la confiabilidad no son conocidas en la práctica. Se cuenta solamente con estimaciones de algunos parámetros, generalmente los primeros momentos estadísticos, a partir de un número limitado de observaciones económicamente factibles.

Como se estableció anteriormente, la probabilidad del estado seguro o confiabilidad de un sistema ingenieril se puede expresar como

$$C = P_s = \int_{g(X)>0} f_X(x) dx \quad (3.96)$$

donde  $f_X(x)$  representa la función de densidad conjunta de  $X$ . Como se ha citado, la dificultad para la aplicación de la ec 3.96 radica en dos puntos:

- Resulta impráctico el establecimiento de la función de densidad conjunta con base en un grupo de datos estadísticos insuficiente, particularmente para el rango crítico de variables aleatorias con gran desviación estándar.
- Prácticamente para todos los casos de interés ingenieril, la integración analítica multidimensional sobre el dominio irregular  $g(X)>0$  es una tarea muy compleja.

Es por ello que los métodos numéricos para la estimación de la confiabilidad han tenido un gran desarrollo en las últimas décadas, tal como lo demuestran los trabajos de los multicitados autores Hasofer, Lind, Veneziano y Ditlevsen, entre otros. Con el propósito de tener un panorama más amplio se presenta el siguiente cuadro sinóptico con los principales métodos numéricos utilizados para el cálculo de la confiabilidad.

- |         |   |   |   |                 |
|---------|---|---|---|-----------------|
| Métodos | { | - Métodos de segundos momentos de primer orden (FOSM) | } | Método estándar |
|         |   |   |   | Método avanzado |
|         |   | - Método del polinomio racional                       |   |                 |
|         |   | - Método de simulación de Monte Carlo (MCSM)          |   |                 |
|         |   | - Método de estimación puntual de Rosenblueth (PEM)   |   |                 |

### 3.4.2 MÉTODOS DE PRIMER ORDEN Y SEGUNDOS MOMENTOS

Con el objeto de exponer el significado de confiabilidad en términos de segundos momentos, es preferible iniciar el análisis con un problema que involucra una sola variable aleatoria. Suponiendo que un sistema que tiene una resistencia determinista  $R$  es solicitado por una carga aleatoria  $S$ , la falla ocurre si  $S > R$ . Bajo estas circunstancias el análisis probabilista consiste en evaluar la probabilidad del evento de falla  $P(S > R)$ . Si esta probabilidad es menor que un valor pequeño  $\epsilon$  *socialmente aceptado* (Hasofer y Lind, 1974) el diseño es válido.

Debido a que generalmente no se cuenta con información suficiente relacionada con la distribución de  $S$ , se reemplaza el criterio  $P(S > R) < \epsilon$  por un criterio que involucra únicamente a la media y a la desviación estándar de  $S$ .

Este criterio es

$$R > \mu_s + \beta \sigma_s \tag{3.97}$$

y se muestra en la fig 3.11

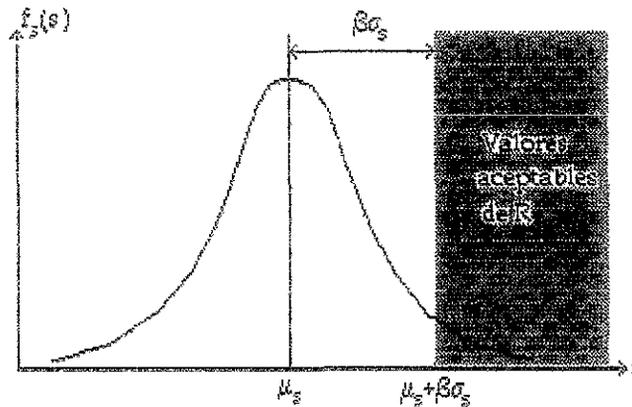


Fig 3.11 Índice de confiabilidad para una variable.

El máximo valor de  $\beta$  que satisface la ecuación anterior se denomina *índice de confiabilidad de diseño*.

El significado de la ec 3.97 establece que se espera que la mayoría de la probabilidad de la variable aleatoria  $S$  quede concentrada entre la media y algunas desviaciones estándar. Es por ello que este criterio asegura esencialmente que la máxima probabilidad de  $S$  está asociada con aquellos valores ubicados en la región segura  $S < R$ .

Generalizando, para cualquier carga  $S$  se puede definir una *región segura*  $G(S)$ , consistente en el grupo de valores de  $S$  para los cuales el sistema no falla.

El criterio de confiabilidad en términos de segundos momentos consiste en que el intervalo  $[\mu_s - \beta\sigma_s, \mu_s + \beta\sigma_s]$  se encuentre contenido completamente en la región  $G(S)$ .

Considerando los conceptos anteriores se puede definir una *carga normalizada*  $S' = \frac{S - \mu_s}{\sigma_s}$ . En el espacio de esta nueva variable se ubica una nueva región de seguridad  $G(S')$ , y el criterio de confiabilidad en términos de segundos momentos estipula que el intervalo  $[-\beta, +\beta]$  debe estar completamente contenido en  $G(S')$ . En otras palabras, si se denota a la zona de falla por  $G^*(S')$ , se requiere que la distancia desde el origen hasta ésta sea mayor que  $\beta$ .

De manera más concreta se puede establecer que la distancia desde el punto  $\mu_s$  hasta la región de falla  $G^*(S)$ , cuando  $S$  se mide en unidades de desviación estándar, debe ser mayor que  $\beta$ .

LIBERTAD PARA ELEGIR VARIABLES BÁSICAS

El grupo de variables básicas no necesita tener algún significado físico siempre y cuando su distribución de probabilidad conjunta determine la distribución de las variables físicas relativas al problema.

CONSISTENCIA

Supóngase que las variables relevantes en un análisis de confiabilidad son  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , y que un nuevo análisis involucra cierta variable  $X_n$  que presenta una variabilidad despreciable. En este caso es necesario únicamente que su desviación estándar tienda a cero en el análisis original, con el objeto de obtener la solución al nuevo problema que involucra las  $n-1$  variables.

3.4.2.2 MÉTODO ESTÁNDAR

Este método considera el caso especial de las *funciones de comportamiento lineal*. A parte de su propia utilidad, ciertos aspectos del caso lineal constituyen la base para una aproximación a las funciones de comportamiento no lineal que son analizadas por el método avanzado.

Las funciones de comportamiento lineal presentan la siguiente forma

$$g(X) = a_0 + \sum_i a_i X_i \tag{3.99}$$

donde  $a_0$  y  $a_i$  son constantes. La ecuación correspondiente de estado límite es

$$a_0 + \sum_i a_i X_i = 0 \tag{3.100}$$

En términos de las variables normales estandarizadas la ecuación de estado límite adopta la siguiente forma

$$a_0 + \sum_i a_i (\sigma_{X_i} X'_i + \mu_{X_i}) = 0 \tag{3.101}$$

En el espacio tridimensional, la ecuación anterior se transforma en

$$a_0 + a_1 (\sigma_{X_1} X'_1 + \mu_{X_1}) + a_2 (\sigma_{X_2} X'_2 + \mu_{X_2}) + a_3 (\sigma_{X_3} X'_3 + \mu_{X_3}) = 0 \tag{3.102}$$

que representa la superficie plana en el espacio tridimensional  $x'_1, x'_2, x'_3$  mostrada en la figura 3.13.

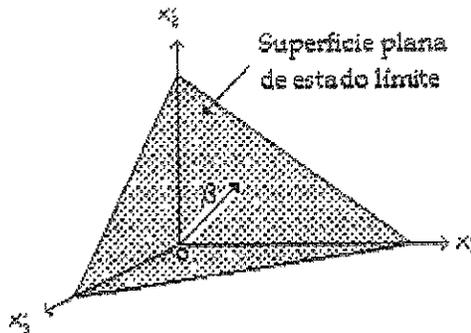


Fig 3.13 Superficie de estado límite lineal en el espacio de  $X'$ .

La distancia del plano de falla al origen del espacio de las variables reducidas  $X'$  es (Ang y Tang, 1987)

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_i a_i \mu_{x_i}}{\sqrt{\sum_i (a_i \sigma_{x_i})^2}} \tag{3.103}$$

Anteriormente se especificó que para dos variables normales estandarizadas no correlacionadas,  $R'$  y  $S'$ , la confiabilidad es directamente una función de la distancia entre la línea de falla y el origen del espacio de las variables estandarizadas, esto es, la distancia  $\beta$ . Este resultado puede ser generalizado, es decir, si las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables normales estandarizadas no correlacionadas, la confiabilidad es

$$\begin{aligned} C = P_s &= P\left(a_0 + \sum_i a_i X_i > 0\right) \\ &= 1 - \Phi\left[\frac{-(a_0 + \sum_i a_i \mu_{x_i})}{\sqrt{\sum_i (a_i \sigma_{x_i})^2}}\right] \\ &= \Phi\left[\frac{a_0 + \sum_i a_i \mu_{x_i}}{\sqrt{\sum_i (a_i \sigma_{x_i})^2}}\right] \end{aligned} \tag{3.104}$$

Comparando las ecs 3.103 y 3.104 se observa que el argumento dentro del corchete de la ecuación 3.104 es la distancia  $\beta$ . Por tal motivo la confiabilidad es

nuevamente función de la distancia entre el plano de falla  $g(X)$  y el origen del espacio de las variables normales estandarizadas. Así, en el caso general de  $n$  variables normales estandarizadas no correlacionadas, la confiabilidad es

$$C = \Phi(\beta) \tag{3.105}$$

### 3.4.2.3 MÉTODOS AVANZADOS

En la evaluación de la confiabilidad generalmente están involucradas funciones no lineales de comportamiento  $g(X)$ , las cuales son analizadas por el método avanzado. En estos casos la ecuación de estado límite  $g(X)=0$  tampoco es lineal, por lo que no existe una distancia única desde la superficie de falla hasta el origen de las variables reducidas como en el caso anterior.

Para propósitos prácticos, el índice de confiabilidad puede evaluarse de manera aproximada. De acuerdo con Shinozuka (1983) el punto  $(x_1^{*'}, x_2^{*'}, \dots, x_n^{*'})$  sobre la superficie de falla con mínima distancia al origen de las variables normales estandarizadas representa el punto de falla más probable. En este caso el plano tangente a la superficie de falla en  $(x_1^{*'}, x_2^{*'}, \dots, x_n^{*'})$  puede ser utilizado para aproximar la superficie de falla no lineal actual, lo que permite evaluar el índice de confiabilidad como en el caso anterior. Según la superficie de falla sea convexa o cóncava hacia el origen, esta aproximación esta del lado de la seguridad o inseguridad, respectivamente, tal como se ilustra en la fig 3.14 para el caso de dos variables normales estandarizadas no correlacionadas.

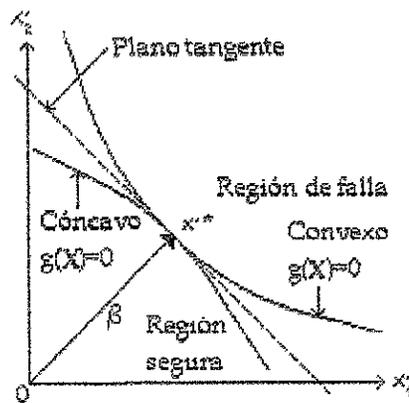


Fig 3.14 Plano tangente a  $g(X)$  en  $x^{*}$ .

El plano tangente en  $x^{*'} = (x_1^{*'}, x_2^{*'}, \dots, x_n^{*'})$  se obtiene por medio de la expansión de la superficie de estado límite en serie de Taylor (Shinozuka, 1983) en el punto  $x^*$  sobre la superficie de falla  $g(x^*) = 0$ ; esto es

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{**} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) (X_j - x_j^*) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right) + \dots \tag{3.106}$$

donde las derivadas son evaluadas en  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ . Pero  $g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$  sobre la superficie de falla; por tanto :

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{**} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) (X_j - x_j^*) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right) + \dots \tag{3.107}$$

Recordando que

$$X_i - x_i^* = (\sigma_{X_i} X'_i + \mu_{X_i}) - (\sigma_{X_i} x'_{i^*} + \mu_{X_i}) = \sigma_{X_i} (X'_i - x'_{i^*}) \tag{3.108}$$

e introduciendo el vector gradiente

$$G = \left( \frac{\partial g}{\partial X'_1}, \frac{\partial g}{\partial X'_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial X'_n} \right) \tag{3.109}$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial X'_i} \left( \frac{dX'_i}{dX_i} \right) = \frac{1}{\sigma_{X_i}} \left( \frac{\partial g}{\partial X'_i} \right) \tag{3.110}$$

Entonces

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X'_i - x'_{i^*}) \left( \frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)_{**} + \dots \tag{3.111}$$

En la aproximación de primer orden, es decir, truncando la serie anterior hasta el término de primer orden, la ec 3.111 es

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X'_i - x'_{i^*}) \left( \frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)_{**} = 0 \tag{3.112}$$

donde las derivadas parciales  $\left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_*$  son evaluadas en  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ .

Con base en la aproximación anterior, la varianza aproximada de primer orden es

$$\sigma_g^2 \cong \sum_{i=1}^n \sigma_{X'_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_*^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_*^2 \quad (3.113)$$

mientras que el valor medio de la función  $g(X)$  es

$$\mu_g \cong - \sum_{i=1}^n x'_i \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_* \quad (3.114)$$

En base a la aproximación anterior, la distancia desde el *plano tangente mínimo* al origen de las variables estandarizadas es el índice de confiabilidad apropiado, el cual puede utilizarse para representar la medida de la confiabilidad.

A partir de las ecs 3.113 y 3.114 el índice de confiabilidad se define como

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{- \sum_{i=1}^n x'_i \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i}\right)_*^2}} \quad (3.115)$$

Se debe enfatizar que las aproximaciones de primer orden de  $\mu_g$  y  $\sigma_g$  derivadas anteriormente deben ser evaluadas en el punto sobre la superficie de falla donde  $g(X)=0$ . En algunos trabajos anteriores (p.e. Cornell, 1969; Ang y Cornell, 1974) las aproximaciones de primer orden se evaluaron a partir de las medias  $(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$ , lo que indujo errores significativos para funciones  $g(X)$  no

lineales, ya que la correspondiente relación  $\frac{\mu_g}{\sigma_g}$  evaluada de esa forma puede no ser la distancia desde el origen del espacio de las variables reducidas hasta la superficie de falla no lineal.

Más aún, las aproximaciones de primer orden evaluadas a partir de las medias de las variables básicas originan el problema de invarianza para estados límite equivalentes (Hasofer y Lind, 1974); esto es, el resultado depende de la manera en que un determinado evento de estado límite se defina. Por ejemplo, para los eventos de estado límite equivalente  $[R - S < 0]$  y  $\left[\frac{R}{S} < 1\right]$ , la aproximación de primer orden evaluada a partir de las medias proporciona valores diferentes del índice de confiabilidad. Tal problema de invarianza puede evitarse si las aproximaciones de primer orden se evalúan en un punto sobre la superficie de falla.

En el presente caso, el punto apropiado de tangencia sobre la superficie de falla no se conoce *a priori*. En consecuencia, la determinación del índice de confiabilidad requerido no es tan simple como en el caso lineal, a pesar de que se involucra una aproximación de este tipo. El *mínimo punto de tangencia* sobre la superficie de falla se puede determinar a través del *método de los multiplicadores de Lagrange*.

### 3.4.2.4 MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

De acuerdo con Shinozuka (1983), la distancia mínima requerida se puede determinar de la siguiente forma: la distancia desde un punto  $X' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$  sobre la superficie de falla  $g(X)=0$  al origen de  $X'$  es

$$D = \sqrt{X'^2_1 + \dots + X'^2_n} = (X'^T X')^{1/2} \tag{3.116}$$

donde el superíndice T indica transpuesta. El punto sobre la superficie de falla  $(x'^*_1, x'^*_2, \dots, x'^*_n)$  que tiene la mínima distancia al origen puede determinarse minimizando la función D, sujeta a la restricción  $g(X)=0$ ; esto es

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } D \\ &\text{sujeto a } g(X)=0 \end{aligned}$$

Para este propósito es posible utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange. Introduciendo un multiplicador de Lagrange  $\lambda$  se establece que

$$L = D + \lambda g(X) \tag{3.117}$$

o bien

$$L = (X'^T X')^{1/2} + \lambda g(X) \tag{3.118}$$

En notación escalar

$$L = \sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2} + \lambda g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.119)$$

donde  $X_i = \sigma_{x_i} X_i' + \mu_{x_i}$ .

Minimizando L se obtiene el siguiente conjunto de  $n+1$  ecuaciones con  $n+1$  incógnitas

$$\frac{\partial L}{\partial X_i'} = \frac{X_i'}{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial X_i'} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.120)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (3.121)$$

La solución del conjunto anterior de ecuaciones conduce a la obtención del punto de falla más probable  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

Introduciendo nuevamente el vector gradiente, el conjunto anterior de ecuaciones puede escribirse en notación matricial como

$$\frac{X'}{(X'^T X')^{1/2}} + \lambda G = 0 \quad (3.122)$$

donde

$$X' = -\lambda DG \quad (3.123)$$

Por tanto

$$D = [(\lambda DG^T)(\lambda DG)]^{1/2} = \lambda D(G^T G)^{1/2} \quad (3.124)$$

y

$$\lambda = (G^T G)^{-1/2} \quad (3.125)$$

utilizando este último resultado en la ec 3.123 se obtiene

$$X' = \frac{-GD}{(G^T G)^{1/2}} \tag{3.126}$$

Premultiplicando la ec 3.126 por  $G^T$  resulta

$$D = \frac{-G^T X'}{(G^T G)^{1/2}} \tag{3.127}$$

Sustituyendo la ec 3.126 en la 3.121 es posible obtener una ecuación con D como incógnita; la solución de ésta lleva a la obtención de la distancia mínima  $d_{\min} = \beta$ . Por tanto

$$\beta = \frac{-G^{*T} X'^*}{(G^{*T} G^*)^{1/2}} \tag{3.128}$$

donde  $G^*$  es el vector gradiente en el punto de falla más probable  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ . En forma escalar la ec 3.128 se escribe como

$$\beta = \frac{-\sum_i x'_i \left( \frac{\partial g}{\partial x'_i} \right)}{\sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial g}{\partial x'_i} \right)^2}} \tag{3.129}$$

donde las derivadas  $\left( \frac{\partial g}{\partial x'_i} \right)$  son evaluadas en  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ . Comparando la ec 3.129 con la 3.115 se observa que la primera también es la distancia desde el plano tangente de la superficie de falla en  $x^*$  hasta el origen de las variables normales estandarizadas. Utilizando el valor de  $\beta$  en la ec 3.126, el punto más probable en la superficie de falla es

$$X'^* = \frac{-G^* \beta}{(G^{*T} G^*)^{1/2}} \tag{3.130}$$

En forma escalar las componentes de  $X'^*$  de la ecuación anterior son

$$x'_i = -\alpha_i \beta; \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.131}$$

donde los cosenos directores a lo largo de los ejes  $x'_i$  son

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_n}{\sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_n^2}} \tag{3.132}$$

donde las derivadas son evaluadas en  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ . Por tanto

$$x_i^* = \sigma_{X_i} x_i^{*'} + \mu_{X_i} = \mu_{X_i} - \alpha_i^* \sigma_{X_i} \beta \tag{3.133}$$

La solución de la ecuación de estado límite  $g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$  permite la obtención de  $\beta$ .

### 3.4.2.5 ALGORITMO NUMÉRICO DE RACKWITZ

Los resultados resumidos anteriormente sugieren el siguiente algoritmo (Rackwitz, 1976):

1. Se suponen valores iniciales de  $x_i^*$ ;  $i=1, 2, \dots, n$  y se obtiene

$$x_i^{*'} = \frac{x_i^* - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \tag{3.134}$$

2. Se evalúa  $\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_n$  y  $\alpha_i^*$  en  $x_i^*$ .  
(3.135)

3. Se establece  $x_i^* = \mu_{X_i} - \alpha_i^* \sigma_{X_i} \beta$ . (3.136)

4. Se sustituye el valor anterior de  $x_i^*$  en

$$g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \tag{3.137}$$

y se resuelve para  $\beta$ .

5. Se utiliza el valor anterior de  $\beta$  y se recalcula  $x_i^* = -\alpha_i \beta$ . (3.138)

6. Se repiten los pasos 2 a 5 hasta obtener la convergencia.

### 3.4.2.6 DISTRIBUCIONES NORMALES EQUIVALENTES

Si las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  no son normales, la confiabilidad puede ser evaluada a través de la ec 3.32 (invariablemente es necesario realizar la integración numérica). Sin embargo, la confiabilidad  $C$  también puede ser evaluada utilizando distribuciones normales equivalentes (Paloheimo, 1974; Rackwitz, 1976). Teóricamente éstas pueden obtenerse a través de las transformaciones de Rosenblatt (Apéndice A). Con estas distribuciones normales equivalentes, el cálculo de la confiabilidad  $C$  sigue el mismo procedimiento que para variables normales descrito anteriormente.

La distribución normal equivalente para una variable no normal individual puede ser obtenida de tal suerte que la probabilidad acumulada así como la ordenada de densidad de probabilidad de la distribución normal equivalente sean iguales a aquellas de la distribución no normal correspondiente en el punto apropiado  $x_i^*$  sobre la superficie de falla.

Igualando las probabilidades acumuladas como se especificó anteriormente en el punto de falla  $x_i^*$  se obtiene

$$\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = F_{X_i}(x_i^*) \tag{3.139}$$

donde

$\mu_{X_i}^N, \sigma_{X_i}^N$  = Media y desviación estándar respectivamente, de la distribución normal equivalente para  $X_i$ .

$F_{X_i}(x_i^*)$  = Función de distribución acumulada de  $X_i$  evaluada en  $x_i^*$ .

$\Phi(-)$  = Función de distribución acumulada de la distribución normal estándar.

La igualdad anterior conduce a

$$\mu_{X_i}^N = x_i^* - \sigma_{X_i}^N \Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i^*)\right] \tag{3.140}$$

Igualando las correspondientes ordenadas de la densidad de probabilidad en  $x_i^*$  se llega a

$$\frac{1}{\sigma_{X_i}^N} \phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = f_{X_i}(x_i^*) \quad (3.141)$$

donde  $\phi(-)$  es la función de densidad de probabilidad de la distribución normal estándar; de ésta se obtiene la siguiente relación

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{\phi\left\{\Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i^*)\right]\right\}}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (3.142)$$

En el caso de una función de comportamiento lineal, el punto apropiado sobre la superficie de falla se establece a partir de las ecs 3.131 y 3.132, donde los cosenos directores  $\alpha_i$ , ec 3.132, son

$$\alpha_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_i a_i^2}} \quad (3.143)$$

de acuerdo con la ec 3.103 el índice de confiabilidad es

$$\beta = \frac{a_0 + \sum a_i \mu_{X_i}^N}{\sqrt{\sum_i (a_i \sigma_{X_i}^N)^2}} \quad (3.144)$$

donde en superíndice N denota el carácter estadístico para la distribución normal equivalente. Por lo tanto, el punto de falla se puede expresar como

$$x_i^* = \sigma_{X_i}^N x_i'^* + \mu_{X_i}^N = -\alpha_i \beta \sigma_{X_i}^N + \mu_{X_i}^N \quad (3.145)$$

Debe ser enfatizado que el reemplazamiento de la distribución actual por una distribución normal equivalente requiere la sustitución de la media y desviación estándar por aquellas de la distribución normal equivalente; esto es, las ecs 3.140 y 3.142. Utilizando éstas en la ec 3.144 se obtiene el índice de confiabilidad  $\beta$  y su correspondiente probabilidad de seguridad,  $P_s$ , a partir de la ec 3.105.

### 3.4.2.7 EXACTITUD DE LA APROXIMACIÓN LINEAL

Como se citó anteriormente, la aproximación *lineal* de las funciones de comportamiento no lineal equivale a reemplazar una superficie de falla *n-dimensional* (hipersuperficie) por un hiperplano tangente a la superficie de falla en el *punto más probable de falla*. En efecto, este hecho modifica la frontera entre la

región segura  $g(X) > 0$  y el estado de falla  $g(X) < 0$ , transformando la superficie general curvilínea en una plana; entonces la probabilidad de falla es la integral de volumen generalizada de la función de densidad de probabilidad conjunta sobre la región de falla  $g(X) < 0$ .

Como se ilustró en la fig 3.40, la confiabilidad estimada con base en esta superficie plana de falla está del lado conservador o de la inseguridad dependiendo de si la superficie de falla actual es convexa o cóncava hacia el origen de las variables normales estandarizadas. La exactitud puede ser mejorada por medio de aproximaciones cuadráticas o polinomiales (Fiessler et al, 1979), con el consiguiente costo matemático y computacional.

Para una superficie de falla cóncava, la frontera del estado seguro  $g(X) > 0$  está ubicada realmente entre el plano tangente (de distancia  $\beta$ ) y la hipersfera de radio  $\beta$ , tal como se ilustra en la fig 3.15 para dos variables normales estandarizadas. La ecuación de falla correspondiente a la hipersfera es (Hasofer, 1974)

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 - \beta^2 = 0 \tag{3.146}$$

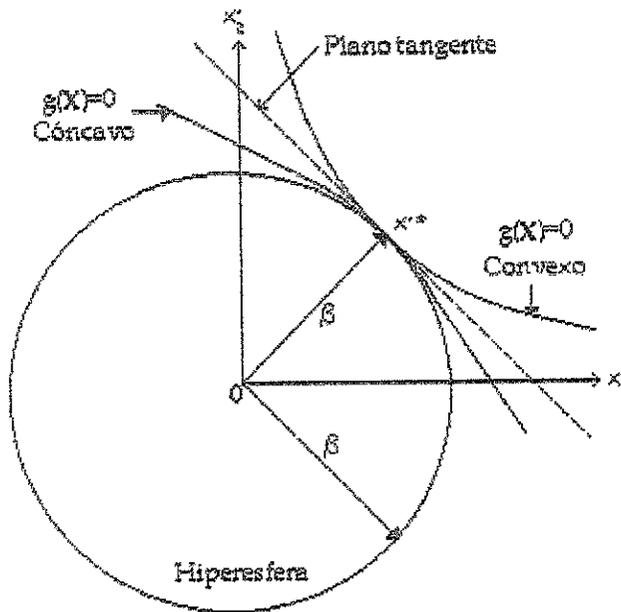


Fig 3.15 Implicación de varias superficies de falla.

Si las variables básicas  $X_i$  son normales estandarizadas no correlacionadas, la suma de los cuadrados  $\sum_{i=1}^n X_i^2$  tiene distribución chi cuadrada con  $n$  grados de

libertad (Ang y Tang, 1975). Por tanto, la probabilidad de falla se puede expresar como

$$F = 1 - \chi_n^2(\beta^2) \tag{3.147}$$

donde  $\chi_n^2(-)$  es la función de distribución acumulada de la distribución chi cuadrada con  $n$  grados de libertad.

De acuerdo con lo anterior, para superficies de falla cóncavas, las fronteras de probabilidad de falla se definen como

$$\Phi(-\beta) < F < 1 - \chi_n^2(\beta^2) \tag{3.148}$$

En general, la exactitud de la aproximación lineal de segundos momentos es difícil de asegurar; ésta depende del grado de *no linealidad* de la función de comportamiento o estado  $g(X)$ . Obviamente el método es matemáticamente exacto si  $g(X)$  es lineal. Para funciones generales de comportamiento no lineal, la confiabilidad y probabilidad de falla *correctas* pueden ser evaluadas a través de simulaciones con el método de Monte Carlo para grandes muestras.

### 3.4.3 APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DEL COCIENTE POLINOMIAL AL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE PRIMER ORDEN Y SEGUNDOS MOMENTOS

Debido a que el análisis de confiabilidad de segundos momentos implica una aproximación lineal de la superficie de estado límite por medio de su expansión en serie de Taylor en el punto de falla más probable, se requiere conocer el vector de derivadas parciales de la función de comportamiento. Este vector puede evaluarse calculando las derivadas parciales de manera analítica. Sin embargo, en ocasiones este trabajo es formidable, por lo que se prefiere la aplicación de métodos numéricos; en estas circunstancias la técnica polinomial racional (Chowdhury y Xu, 1993) constituye una herramienta muy útil.

La media y la varianza de la función de estado  $g(X)$ , donde  $X$  es un vector de variables aleatorias del suelo, pueden ser escritas de la forma siguiente

$$\begin{aligned} E[g(X)] &\approx g(\mu_x) \\ \sigma^2[g(X)] &\approx \nabla G^T \text{Cov}(X) \nabla G \end{aligned} \tag{3.149}$$

donde

$\mu_x$  = Vector de propiedades medias del suelo.

$\nabla G$  = Vector de derivadas parciales de la función de comportamiento calculado en los valores medios de las variables aleatorias  $\sigma_{X_i}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

$Cov(X)$  = Matriz de covarianza de las variables aleatorias.

El cálculo del vector de derivadas parciales es esencial para la evaluación de la ec 3.149, lo que requiere la aplicación de un método numérico adecuado. La derivada de la función de estado  $g(X)$  en el punto  $(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$  puede obtenerse por medio de la técnica polinomial racional. En primer lugar se deben mantener los valores de  $X_2$  a  $X_n$  iguales a  $\mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}$  respectivamente y se deben considerar  $m$  grupos de valores de  $X_1^{(i)}$  tal como fueron establecidos ( $i=1,2,\dots,m$ ). En otras palabras, se asignan  $m$  valores discretos a la variable  $X_1$ , los cuales deben caer entre los límites inferior y superior de esta variable (si solamente se conocen  $\mu_{X_1}$  y  $\sigma_{X_1}$ , los  $m$  valores nodales pueden ser seleccionados al considerar las fronteras inferior y superior de  $X_1$  como las  $k$  desviaciones estándar arriba y abajo del valor medio respectivo, donde un valor de  $k=3$  se considera razonable).

En el intervalo de las fronteras especificadas o supuestas, los valores discretos deben seleccionarse bastante cerca de la media, ya que el cálculo numérico de la derivada en la media se requiere frecuentemente. Por tal motivo existen  $m$  grupos de valores de la función parcial respecto a  $X_1$  que se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
 g_{11}(X) &= g[X_1^{(1)}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}] \\
 g_{12}(X) &= g[X_1^{(2)}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}] \\
 &\vdots \\
 g_{1m}(X) &= g[X_1^{(m)}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}]
 \end{aligned}
 \tag{3.150}$$

El número de grupos  $m$  no necesita ser muy grande; de hecho un valor de  $m=3$  ó  $m=5$  es generalmente suficiente.

La función parcial en el argumento de  $X_1$  puede ser aproximada por medio de un polinomio racional expresado en la forma de la fracción continua

$$g_1(X_1, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \approx a_1 - \frac{X_1 - X_1^{(2)}}{a_2 + \frac{X_1 - X_1^{(2)}}{a_3 + \dots + \frac{X_1 - X_1^{(m-1)}}{a_m}}} \tag{3.151}$$

El miembro derecho de la ecuación anterior consta simplemente de un número de fracciones y coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

La ec 4.59 se puede escribir en forma breve como

$$g_1(X_1, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \approx \phi_1(X_1) \tag{3.152}$$

La relación entre  $\phi_i(X_1)$  y  $\phi_{i+1}(X_1)$  puede ser escrita como

$$\phi_i(X_1) = a_i + \frac{X_1 - X_1^{(i)}}{\phi_{i+1}(X_1)} \tag{3.153}$$

El último valor de  $\phi(X_1)$ , es decir,  $\phi_m(X_1)$  esta dado por

$$\phi_m(X_1) = a_m \tag{3.154}$$

Los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_m$  de la ec 3.151 pueden calcularse utilizando el proceso esbozado en la tabla 3.1. En ella se observa que la adición de un nuevo término  $X_1^{(m+1)}$  a la fracción continua no altera al coeficiente  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  para los primeros  $m$  términos. Únicamente el coeficiente  $a_{m+1}$  debe calcularse. Por tal motivo, la adición de puntos nodales extras no requiere ningún reordenamiento o recálculo de las ecuaciones.

La derivada parcial de  $g(X)$  respecto al argumento  $X_1$  puede así ser evaluada con el método del polinomio racional. Aplicando las ecs 3.151, 3.152 y 3.153, la derivada parcial de  $g(X)$  puede aproximarse de la siguiente forma

$$\frac{\partial g(X)}{\partial X_1} \approx \phi_1'(X_1) \tag{3.155}$$

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...
$a_1 = g_{11}(X)$	—	—	—	
$a_{21} = g_{12}(X)$	$a_2 = \frac{X_1^{(2)} - X_1^{(1)}}{a_{21} - a_1}$	—	—	
$a_{31} = g_{13}(X)$	$a_{32} = \frac{X_1^{(3)} - X_1^{(1)}}{a_{31} - a_1}$	$a_3 = \frac{X_1^{(3)} - X_1^{(2)}}{a_{32} - a_2}$	—	
$a_{41} = g_{14}(X)$	$a_{42} = \frac{X_1^{(4)} - X_1^{(1)}}{a_{41} - a_1}$	$a_{43} = \frac{X_1^{(4)} - X_1^{(2)}}{a_{42} - a_2}$	$a_4 = \frac{X_1^{(4)} - X_1^{(3)}}{a_{43} - a_3}$	
...	...	...	...	

Tabla 3.1 Coeficientes del polinomio racional para la variable  $X_1$ .

Aplicando la regla de cocientes de la diferenciación repetidamente a la ec 3.153 con  $i=1$ , la ec 3.155 se puede escribir como

$$\frac{\partial g(X)}{\partial X_1} \approx \phi'_1(X_1) = \frac{\phi_2(X_1) - [X_1 - X_1^{(1)}]\phi'_2(X_1)}{[\phi_2(X_1)]^2} \tag{3.156}$$

En general, la diferencial de la ec 3.153 proporciona

$$\phi'_i(X_1) = \frac{\phi_{i+1}(X_1) - [X_1 - X_1^{(i)}]\phi'_{i+1}(X_1)}{[\phi_{i+1}(X_1)]^2} \tag{3.157}$$

Cuando  $i=m$ , la diferencial de la ec 3.154 es

$$\phi'_m(X_1) = 0 \tag{3.158}$$

Sustituyendo  $X_1$  por  $\mu_{X_1}$  en las ecs 3.156 a 3.158 se puede calcular la derivada de  $g(X)$  respecto a  $X_1$  en el punto  $\mu_X = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$  como

$$\frac{\partial g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})}{\partial X_1} \approx \phi'_1(\mu_{X_1}) \tag{3.159}$$

Con este procedimiento se pueden obtener las derivadas parciales de  $g(X)$  respecto a otro argumento (variables aleatorias) en el punto  $\mu_X = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$ .

### 3.4.4 MÉTODO DE SIMULACIÓN DE MONTE CARLO

*Simulación* es el proceso por medio del cual se reemplaza el mundo real con base en un conjunto de hipótesis y modelos concebidos en la realidad.

La simulación de Monte Carlo es una herramienta poderosa que puede ser aplicada para el análisis estadístico de la incertidumbre en problemas de ingeniería. Es particularmente útil en problemas complejos en los cuales una gran cantidad de variables aleatorias están relacionadas a través de ecuaciones no lineales.

En el campo de la ingeniería civil, la simulación puede aplicarse para predecir o estudiar el comportamiento y/o respuesta de un sistema; a través de repartidas simulaciones se puede evaluar su sensibilidad ante variaciones de sus parámetros constitutivos, pudiéndose aplicar este método para evaluar diseños alternativos o para determinar diseños óptimos. El método de Monte Carlo resulta especialmente útil para problemas que implican variables aleatorias con distribución de probabilidad conocida o supuesta; involucra una serie de repeticiones del proceso de simulación, empleando en cada una un conjunto particular de valores de la variable aleatoria generada de acuerdo con sus distribuciones de probabilidad correspondientes.

Repitiendo el proceso se puede obtener una muestra de soluciones, cada una correspondiente a un conjunto diferente de valores de la variable aleatoria. Los resultados de un proceso de simulación de Monte Carlo pueden presentarse en forma de histogramas y ser tratados aplicando métodos de estimación estadística. Por ello el método de simulación de Monte Carlo constituye también una técnica de muestreo y como tal comparte los mismos problemas de la teoría correspondiente.

#### 3.4.4.1 GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

Una de las principales tareas en la aplicación del método de simulación de Monte Carlo consiste en la sustitución de cada variable aleatoria por su correspondiente conjunto de números con las mismas propiedades estadísticas, denominados *números aleatorios*.

Para simulaciones de Monte Carlo empleando computadoras digitales es necesaria la generación de números aleatorios con distribuciones de probabilidad específica. Esto se lleva a cabo sistemáticamente para cada variable generando en primer lugar un número aleatorio uniformemente distribuido

entre 0 y 1 y posteriormente, por medio de una transformación adecuada, obteniendo el número aleatorio correspondiente con la distribución de probabilidad especificada.

Las bases para este procedimiento son las siguientes (Ang y Tang, 1984):

Sea X la variable aleatoria que se pretende muestrear. Si se considera una variable U con densidad de probabilidad uniforme:

$$f_U(u) = \begin{cases} 0; & u < 0 \\ 1; & 0 \leq u \leq 1 \\ 0; & u > 1 \end{cases} \quad (3.160)$$

y con función de distribución:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0; & u < 0 \\ u; & 0 \leq u \leq 1 \\ 1; & u > 1 \end{cases} \quad (3.161)$$

es posible muestrear la variable U mediante números aleatorios comprendidos entre 0 y 1 y asociar a cada valor de U el valor de X definido como sigue:

$$x = F_X^{-1}(u) \quad (3.162)$$

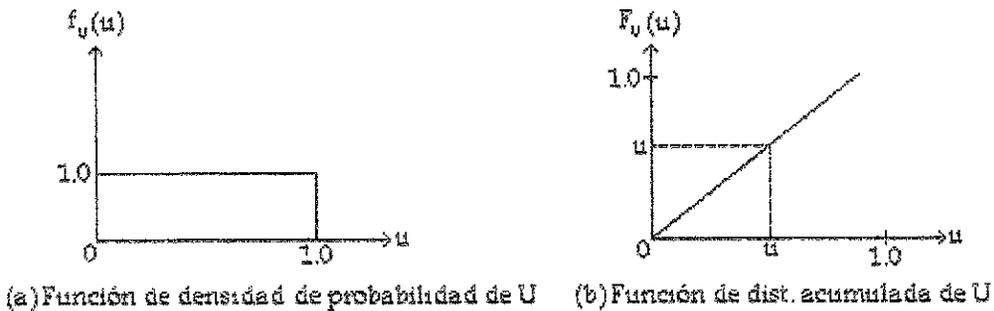


Fig 3.16 Funciones de densidad de probabilidad y de distribución acumulada de la variable uniforme estándar U.

donde  $F_X^{-1}$  denota la inversa de la función  $F_X$ .

El valor así obtenido de la variable X tiene una probabilidad acumulada

$$\begin{aligned}
 P(X \leq x) &= P[F_X^{-1}(U) \leq x] \\
 &= P[U \leq F_X(x)] \\
 &= F_U[F_X(x)] = F_X(x)
 \end{aligned}
 \tag{3.163}$$

lo que significa que si  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  es un grupo de valores de  $U$ , el correspondiente conjunto de valores obtenidos

$$x_i = F_X^{-1}(u_i); \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.165}$$

es efectivamente una muestra de valores de la variable aleatoria  $X$  con función de distribución acumulada  $F_X(x)$ .

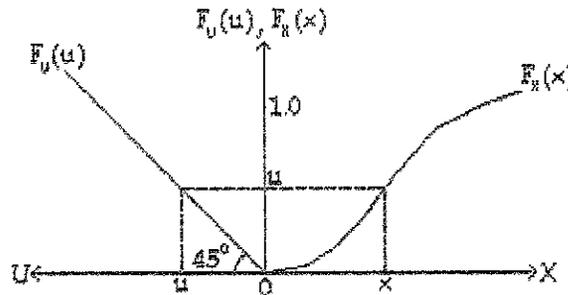


Fig 3.17 Relación entre u y x.

#### 3.4.4.2 NÚMEROS ALEATORIOS CON DISTRIBUCIÓN UNIFORME ESTÁNDAR

A través de las ecs 3.160 a 3.165 se observa que la generación de números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1, es decir, valores de la *variable uniforme estándar*, es básica para la generación de números aleatorios con una distribución general de probabilidad.

Los métodos para la generación de números aleatorios uniformemente distribuidos se basan generalmente en cálculos recursivos de los residuos del módulo  $m$  de una transformación lineal. Un ejemplo de relación recursiva para este propósito es

$$x_{i-1} = (ax_i + c)(\text{mod } m) \tag{3.166}$$

donde  $a$ ,  $c$  y  $m$  son números enteros no negativos. Si  $k_i$  es la parte entera de la relación  $\frac{ax_i + c}{m}$ , es decir

$$k_1 = \text{Int}\left(\frac{ax_1 + c}{m}\right) \quad (3.167)$$

entonces el correspondiente residuo del módulo  $m$  es

$$x_{i-1} = ax_i + c - mk_i \quad (3.168)$$

Normalizando los valores obtenidos a partir de la ecuación anterior por el módulo  $m$  se obtiene

$$u_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{m} \quad (3.169)$$

que constituye un grupo de números aleatorios entre 0 y 1 con distribución de probabilidad uniforme estándar.

En realidad los números generados por medio de un proceso sistemático tal como el descrito anteriormente pueden ser duplicados exactamente y por ello constituyen un conjunto determinista. Estrictamente hablando, por tanto, tales números aleatorios generados no son realmente aleatorios, por lo que pueden ser denominados *números pseudoaleatorios*.

Los números pseudoaleatorios generados así son cíclicos, es decir, se repiten con un periodo dado menor que  $m$  (Knuth, 1969); por ello, para asegurar la aleatoriedad, el periodo debe ser lo más largo posible, lo que garantiza que los números generados son uniformemente distribuidos y estadísticamente independientes.

Otra relación recursiva común para la generación de números aleatorios es la *generación congruente multiplicativa*

$$x_{i-1} = ax_i \pmod{m} \quad (3.170)$$

y

$$u_i = \frac{x_i}{m} \quad (3.171)$$

#### 3.4.4.3 VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Como se indicó anteriormente, los números aleatorios con distribución preestablecida se pueden generar a través de la ec 3.165 una vez que los números

aleatorios uniformemente distribuidos han sido obtenidos. Esta generación de números aleatorios se conoce como *método de transformación inversa*. La aplicación de este método es más efectiva si la inversa de la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X se puede expresar de manera analítica, es decir, si la función inversa  $F_X^{-1}(u)$  es conocida.

La tabla 3.2 proporciona en forma resumida las ecuaciones que permiten el cálculo de los números aleatorios  $x_i$  para variables aleatorias X que siguen funciones de distribución acumulada conocidas, a través del método de la transformación inversa (Ang y Tang, 1984; Rao, 1992).

DISTRIBUCIÓN	$F_X(x)$	$x_i$
Uniformemente distribuida en el rango a, b	$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 0; & \text{cualquier otro} \end{cases}$	$x_i = a + (b-a)u_i$
Exponencial	$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)}$	$x_i = -\alpha \ln(1 - u_i)$
Weibull	$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\beta)^\alpha}; & 0 \leq x < \infty \\ 0; & \text{cualquier otro} \end{cases}$	$x_i = \beta(-\ln u_i)^{1/\alpha}$
Tipo I asintótica	$F_X(x) = \exp[-e^{-\alpha(x-\beta)}]$	$x_i = \beta - \frac{1}{\alpha} \ln\left(\ln \frac{1}{u_i}\right)$

Tabla 3.2 Generación de números aleatorios con el método de la transformación inversa.

Si la función de distribución de probabilidad no puede ser invertida analíticamente, es decir, si el método de la transformación inversa no puede ser aplicado (como en el caso de las distribuciones normal y lognormal), existen métodos alternativos para la generación de números aleatorios, tales como el *método de la composición* y el *de las funciones de variables aleatorias* (Ang y Tang, 1984). Los resultados obtenidos con la aplicación de estos dos métodos se resumen en la tabla 3.3.

DISTRIBUCIÓN	$f_X(x)$	$x_i$
Normal	$f_{U,V}(u,v) = e^{-u}$ $U = -\ln U_1$ $V = U_2$ donde $U_1$ y $U_2$ = Variables uniformes estándar independientes	$x_1 = \mu + \sigma\sqrt{-2 \ln u_1} \cos 2\pi u_2$ $x_2 = \mu + \sigma\sqrt{-2 \ln u_1} \sin 2\pi u_2$

DISTRIBUCIÓN	$f_X(x)$	$x_i$
Lognormal	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi x}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right)^2\right]$ $0 \leq x < \infty$	$x_i = e^{x'_i}$ $x'_i =$ valor de la distribución normal $N(\lambda, \xi)$
Beta	$f_X(x) = \frac{1}{B(q,r)} x^{q-1}(1-x)^{r-1}; \quad 0 \leq x \leq 1$	$x = \frac{u_1^{1/q}}{u_1^{1/q} + u_2^{1/r}}$
Gamma	$f_X(x) = \frac{v(vx)^{k-1} e^{-vx}}{\Gamma(k)}$ $x \geq 0$	$x = \frac{1}{v}(-\ln u_3) \frac{u_1^{1/k}}{u_1^{1/k} + u_2^{1/(1-k)}}$

Tabla 3.3 Generación de números aleatorios con los métodos de la composición y de las funciones de variables aleatorias.

### 3.4.4.4 GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS CONJUNTAMENTE DISTRIBUIDOS

#### VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un conjunto de  $n$  variables aleatorias. Si estas variables son estadísticamente independientes, entonces sus funciones conjuntas de densidad y distribución de probabilidad pueden expresarse como

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \tag{3.172}$$

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) \tag{3.173}$$

donde  $f_{X_i}(x_i)$  y  $F_{X_i}(x_i)$  denotan las funciones marginales (individuales) de densidad y distribución de probabilidad de  $X_i$ . En este caso los números aleatorios para cada variable pueden generarse separada e independientemente una a una por medio de los procesos descritos anteriormente.

#### VARIABLES ALEATORIAS DEPENDIENTES

Para un grupo de variables aleatorias dependientes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , las funciones conjuntas de densidad y distribución de probabilidad pueden expresarse como

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2|x_1) \cdots f_{X_n}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) \tag{3.174}$$

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2|x_1) \cdots F_{X_n}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (3.175)$$

donde  $f_{X_i}(x_i)$  y  $F_{X_i}(x_i)$  son las funciones marginales de densidad y distribución de probabilidad y  $f_{X_i}(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})$  y  $F_{X_i}(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})$  representan las funciones condicionales de densidad y distribución de probabilidad de  $X_i$  dados  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}$ . Debido a que los números aleatorios son dependientes, el conjunto de números aleatorios uniformemente distribuidos no puede ser empleado directamente para generar números aleatorios correspondientes a  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Sin embargo, el siguiente procedimiento puede ser empleado para la generación de los citados números aleatorios.

Sea  $(u_1, \dots, u_n)$  un conjunto de números aleatorios uniformemente distribuidos. Entonces el número aleatorio  $x_1$  correspondiente a  $X_1$  puede ser determinado a partir de  $u_1$  como

$$x_1 = F_{X_1}^{-1}(u_1) \quad (3.176)$$

Con el valor de  $x_1$  conocido, la función de distribución condicional  $F_{X_2}(x_2|x_1)$  se convierte en una función de  $x_2$  únicamente y por eso puede ser invertida para encontrar  $x_2$  como

$$x_2 = F_{X_2}^{-1}(u_2|x_1) \quad (3.177)$$

En general se puede generar  $x_i$  con los valores conocidos de  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$  como

$$x_i = F_{X_i}^{-1}(u_i|x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) \quad (3.178)$$

Este procedimiento recursivo puede continuarse hasta que el último número  $x_n$  es generado como

$$x_n = F_{X_n}^{-1}(u_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (3.179)$$

Se puede apreciar que este método requiere la inversión de las funciones marginales y condicionales de distribución como se indica en las ecs 3.176 a 3.179.

3.4.4.5 GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS NORMALES CORRELACIONADAS

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un conjunto de variables aleatorias correlacionadas que tienen una distribución normal. Su función de densidad de probabilidad conjunta está definida a través de la media, varianza y covarianza de las variables aleatorias. Asíumase que las medias  $\mu_{X_i}$ , varianzas  $\sigma_i^2 = \sigma_{X_i}^2$  y covarianzas  $\sigma_{ij} = \sigma_{X_i X_j}$  de las variables  $X_i$  son conocidas; esto es, el vector de valores medios

$$\mu_X = \begin{Bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \\ \vdots \\ \mu_{X_n} \end{Bmatrix} \tag{3.180}$$

y la matriz de covarianza

$$[V_X] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{3.181}$$

son conocidas. Para generar el conjunto requerido de números aleatorios correlacionados normalmente distribuidos  $X_i, i=1,2,\dots,n$ , primero se debe generar un conjunto de  $n$  números aleatorios independientes normalmente distribuidos  $W_i, i=1,2,\dots,n$ , cuyos valores medios y varianzas,  $\mu_{W_i}$  y  $\sigma_{W_i}^2$ , respectivamente, son desconocidas por el momento. Las variables aleatorias correlacionadas deseadas  $X_i$  pueden ser expresadas como una función lineal de las variables aleatorias independientes (Hart, 1982), es decir

$$\begin{aligned} X_i &= a_{i1}W_1 + a_{i2}W_2 + \dots + a_{in}W_n \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}W_j; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{3.182}$$

en forma matricial

$$X = [a]W \tag{3.183}$$

$\begin{matrix} n \times 1 & & n \times n & n \times n \end{matrix}$

donde los elementos de la matriz  $[a]$  tampoco son conocidos por el momento. Dado que la variable aleatoria  $X_i$  está expresada como una función lineal de  $W_j$ , entonces las medias y desviaciones estándar de  $X_i$  pueden ser expresadas como

$$\mu_x = [a]\mu_w \tag{3.184}$$

y

$$[V_x] = [a][V_w][a]^T \tag{3.185}$$

donde  $\mu_x$  y  $\mu_w$  son los vectores de valores medios de  $X_i$  y  $W_j$ , y  $[V_x]$  y  $[V_w]$  son las matrices de covarianza de  $X_i$  y  $W_j$ , respectivamente. En las ecs 3.184 y 3.185 el vector  $\mu_x$  y la matriz  $[V_x]$  se conocen a partir de las características de las variables aleatorias por generar, y el vector  $\mu_w$  y las matrices  $[a]$  y  $[V_w]$  deben ser determinadas. El método de descomposición de Choleski (Rao, 1989) puede ser empleado para este propósito.

Este método implica la descomposición de una matriz simétrica  $[S]$  de orden  $n \times n$  en el siguiente producto de matrices

$$[S] = [L][D][L]^T \tag{3.186}$$

donde  $[L]$  es una matriz triangular inferior de orden  $n \times n$  que contiene unos en la diagonal principal y  $[D]$  es una matriz diagonal de orden  $n \times n$ . Los elementos de  $[L]$  y  $[D]$  (Rao, 1989) están dados por

$$\begin{aligned} D_{11} &= S_{11} \\ L_{ii} &= 1; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ L_{ji} &= \frac{S_{ij}}{D_{ii}}; \quad j \geq 2 \\ D_{ii} &= S_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2 D_{jj}; \quad i \geq 2 \\ L_{ji} &= \frac{1}{D_{ii}} \left[ S_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk} D_{kk} \right]; \quad i \geq 2; \quad j \geq i+1 \end{aligned} \tag{3.187}$$

Comparando las ecs 3.185 y 3.186 es posible establecer que

$$[S] = [V_x] \tag{3.188}$$

$$[a] = [L] \tag{3.189}$$

y

$$[V_w] = [D] \quad (3.190)$$

A partir de las ecs 3.187 y 3.189 es posible conocer los elementos  $a_{ij}$  y por lo tanto la relación lineal entre  $X_i$  y  $W_j$  es completamente conocida. De forma similar las ecs 3.187 y 3.190 definen las varianzas de  $W_j$ . Más aún, debido a que la matriz de covarianza  $[V_w] = [D]$  es diagonal, se asegura que las variables aleatorias  $W_j$  no están correlacionadas. Finalmente, los valores medios de  $W_j$  pueden determinarse a partir de la ec 3.184 como

$$\mu_w = [a]^{-1} \mu_x \quad (3.191)$$

Se puede observar que las variables aleatorias  $X_i$  son normalmente distribuidas dado que se obtienen a partir de una combinación lineal de las variables aleatorias normales  $W_j$ .

#### 3.4.4.6 CÁLCULO DE LA CONFIABILIDAD

Debido a la naturaleza aleatoria de los parámetros que influyen en el comportamiento de un sistema ingenieril, existe una posibilidad de que éste no desempeñe su tarea satisfactoriamente. El método de Monte Carlo puede ser aplicado para estimar la confiabilidad o la probabilidad de falla del sistema. En este método se utiliza un número aleatorio uniformemente distribuido para generar un valor de muestra para cada una de los parámetros aleatorios del sistema. Estos parámetros son entonces utilizados para predecir su comportamiento. El desempeño de las muestras del sistema es comparado con un patrón de comportamiento requerido. Se considera que la muestra es exitosa si el comportamiento requerido es satisfecho; si esto no sucede se considera que la muestra ha fallado. Después de la generación del número predeterminado de muestras, la confiabilidad global del sistema se calcula como

$$\left( \begin{array}{c} \text{Confiabilidad} \\ \text{del sistema} \end{array} \right) = \left( \frac{\text{Número de muestras exitosas del sistema}}{\text{Número total de muestras generadas en el sistema}} \right) \quad (3.192)$$

#### 3.4.4.7 TAMAÑO DE LA MUESTRA Y ERROR EN LA SIMULACIÓN

Es importante evaluar el error involucrado en la estimación de la confiabilidad o probabilidad de falla al aplicar el método de Monte Carlo. Resulta igualmente importante conocer el número de simulaciones requeridas para lograr una precisión específica. Al respecto, es relevante la teoría de la distribución muestral (Cochran, 1980) relativa a muestras de tamaño  $n$  extraídas de una población en

Sean  $M$  y  $X$  variables aleatorias con  $M=g(X)$ . Cuando la distribución de  $M$  no interesa, sino únicamente una aproximación a sus primeros momentos, se puede ignorar la función de densidad de probabilidad de  $X$  y utilizar solamente sus correspondientes primeros momentos, obteniendo una solución independiente de la distribución que se le asigne. De hecho, cualquier distribución que tenga los primeros momentos de la distribución dada conduce a la solución exacta si  $M$  es una función lineal de  $X$ , es decir, se puede seleccionar cualquier distribución para  $X$  y se tiene una solución bastante aproximada si  $g(X)$  es suficientemente lineal en la vecindad del valor esperado de  $X$ , siempre que la dispersión de esta variable no sea muy grande. De esta forma se puede seleccionar la distribución ficticia de  $X$  siguiendo este criterio.

3.4.5.1 ESTIMACIÓN BIPUNTUAL

Dadas la esperanza  $\mu_x$ , la desviación estándar  $\sigma_x$  y el coeficiente de sesgo  $v_x$ , se pueden deducir expresiones aproximadas para los momentos de la distribución de  $M$ . Seleccionando las funciones de densidad de probabilidad

$$\begin{aligned} &P_+ \delta(\mu_x - x_-) \\ &P_- \delta(\mu_x - x_+) \end{aligned} \tag{3.195}$$

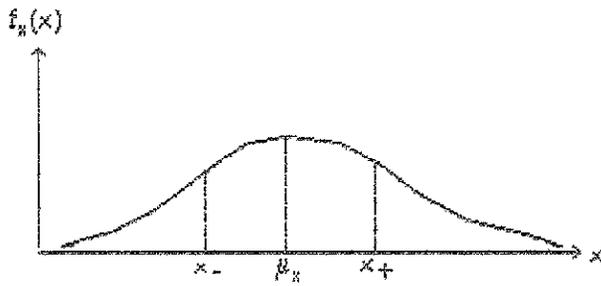


Fig 3.18 Discretización de la función de densidad de  $X$  en dos puntos.

donde  $P_+$  y  $P_-$  son coeficientes,  $\delta$  es la delta de Dirac y  $x_-$  y  $x_+$  son valores específicos de  $X$ , la función de densidad consiste en concentraciones  $P_+$  y  $P_-$  en  $x_+$  y  $x_-$ , respectivamente. Por tanto, cuando  $M$  admite expansión en serie de Taylor en  $\mu_x$

$$E(M^n) = P_+ m_+^n + P_- m_-^n \tag{3.196}$$

donde  $=$  significa igual a, excepto para términos de orden superior,  $m_\pm = g(x_\pm)$ , donde  $n$  es un número real.

Cuando  $M$  no admite tal expansión, el signo  $=$  debe ser reemplazado por  $\cong$ . De la ec 3.196 se pueden calcular los parámetros de la distribución de  $M$ .

$P_+$  y  $x_+$  deben satisfacer el siguiente grupo de ecuaciones simultáneas

$$P_+ + P_- = 1 \tag{3.197}$$

$$P_+ x_+ + P_- x_- = \mu_x \tag{3.198}$$

$$P_+ (x_+ - \mu_x)^2 + P_- (x_- - \mu_x)^2 = \sigma_x^2 \tag{3.199}$$

$$P_+ (x_+ - \mu_x)^3 + P_- (x_- - \mu_x)^3 = v_x^3 \sigma_x^3 \tag{3.200}$$

cuya solución es

$$P_+ = \frac{1}{2} \left[ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{v_x}{2}\right)^2}} \right] \tag{3.201}$$

$$P_- = 1 - P_+ \tag{3.202}$$

$$x = \mu_x \mp \sigma_x \sqrt{\frac{P_+}{P_-}} \tag{3.203}$$

En la ec 3.201 el signo que precede al radical es aquel de  $-v_x$ . Para  $v_x \ll 1$ ,  $P_+ = \frac{1}{2} - \frac{v_x}{4}$ .

Cuando  $v_x$  es desconocida se puede asumir que es nula. Entonces,  $P_+ = \frac{1}{2}$  y  $x_+ = \mu_x \pm \sigma_x$ . De la ec 3.201

$$\mu_M = \frac{m_+ + m_-}{2} \tag{3.204}$$

$$\sigma_M = \left| \frac{m_+ - m_-}{2} \right| \tag{3.205}$$

$$V_M = \frac{|m_+ - m_-|}{|m_+ + m_-|} \tag{3.206}$$

donde  $V$  = coeficiente de variación. Cuando las dos primeras derivadas de  $g(X)$  existen y son continuas en la vecindad de  $\mu_X$ , la ec 3.204 constituye una aproximación de segundo orden (en la inteligencia de que los primeros dos términos diferentes de cero de la expansión en serie de Taylor de  $M$  en  $\mu_X$  son retenidos), mientras que las ecs 3.205 y 3.206 son de primer orden. A través de la expansión en serie de Taylor de  $M$  las expresiones comunes de  $\mu_M$  y  $\sigma_M$  se obtienen en función de las dos primeras derivadas de  $M$  en  $\mu_X$ . Ambos grupos de aproximaciones conducen a idénticos resultados excepto para términos de orden superior, pero las ecs 3.196 y 3.204 a 3.206 no requieren el cálculo de las derivadas. Sin embargo, los resultados son pobres para funciones  $g(X)$  discontinuas y para funciones que presentan sus primeras derivadas discontinuas.

### 3.4.5.2 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El procedimiento descrito por las ecs 3.204 a 3.206 puede ser generalizado para funciones de varias variables estadísticamente independientes.

Sea  $Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Rosenblueth generaliza las ecs 3.204 a 3.206, obteniendo

$$\frac{\mu_M}{m} = \frac{\mu_{M_1}}{m} \frac{\mu_{M_2}}{m} \dots \frac{\mu_{M_n}}{m} \tag{3.207}$$

$$1 + V_M^2 = (1 + V_{M_1}^2)(1 + V_{M_2}^2) \dots (1 + V_{M_n}^2) \tag{3.208}$$

donde  $m = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$ , y  $\mu_{M_i}$  y  $\mu_{V_{M_i}}$  son el valor esperado y el coeficiente de variación de  $M$  calculado como si  $X_i$  fuera la única variable aleatoria y las otras fueran iguales a sus valores esperados. Si  $M$  es el producto de funciones de  $X_1$  únicamente,  $X_2$  únicamente, etc., las ecs 3.207 y 3.208 son exactas. Ellas requieren sólo  $2n+1$  ó  $2n$  estimaciones puntuales.

## Aplicación a cimentaciones de tanques

### 4.1 OBJETIVOS DEL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD

Como se estableció en el capítulo 3, el concepto de seguridad tiene una gran importancia en la práctica de la ingeniería civil. En geotecnia, el concepto de seguridad juega un papel fundamental dadas las numerosas incertidumbres que afectan a los diferentes aspectos del diseño geotécnico. Resulta importante recalcar que no es posible eliminar totalmente las dudas en cuanto a la representatividad de las muestras de suelo obtenidas durante la exploración o la precisión y validez de los ensayos de laboratorio y de las correlaciones empleadas, especialmente en el contexto de urgencia y de limitaciones económicas en el que se realizan muchos estudios.

El objetivo principal de este capítulo es ilustrar como es posible estimar la seguridad de las cimentaciones de tanques de almacenamiento, a partir de la evaluación de la incertidumbre que afecta las variables de estado, efectuando un análisis de confiabilidad. Este análisis se aplica al diseño estático de las cimentaciones de tanques que comúnmente usa PEMEX y que diseña el IMP.

### 4.2 PROBLEMA ESTUDIADO

#### 4.2.1 Datos disponibles

Se utilizará como ejemplo de aplicación la cimentación de un tanque común de 10,000 barriles de 14 m de diámetro y 12 m de altura soportado por 50 pilotes de fricción, como los que se encuentran en las baterías de separación de la Zona Sur de Pemex Exploración - Producción (Fig. 4.1)

Para lo anterior, se presentan los resultados del estudio de mecánica de suelos realizado por la compañía DEF en el 1995, que muestra las características típicas de los suelos de la región, lo que no significa que no existan configuraciones diferentes. La figura 4.2 muestra perfiles de contenido de agua y de resultados de la prueba de penetración estándar. La figura 4.3 muestra la única curva de compresibilidad disponible y la figura 4.4 los resultados de pruebas UU.

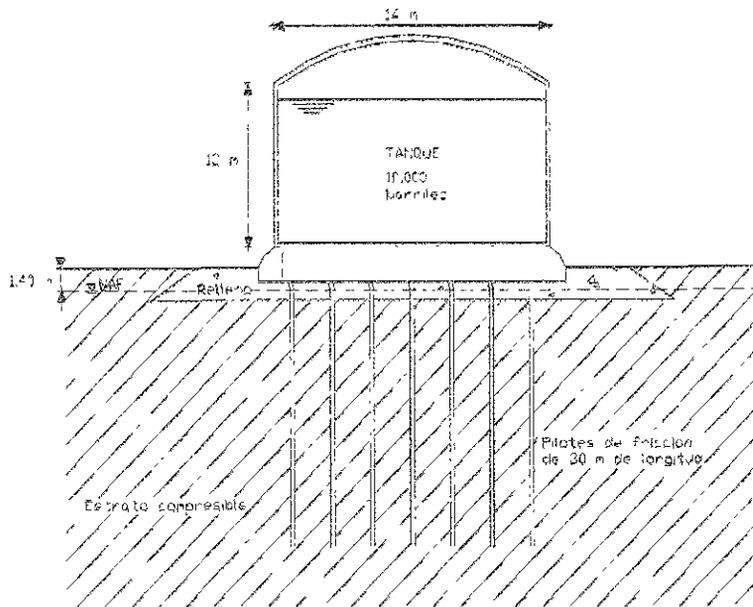


Fig. 4.1 Geometría y propiedades de la cimentación

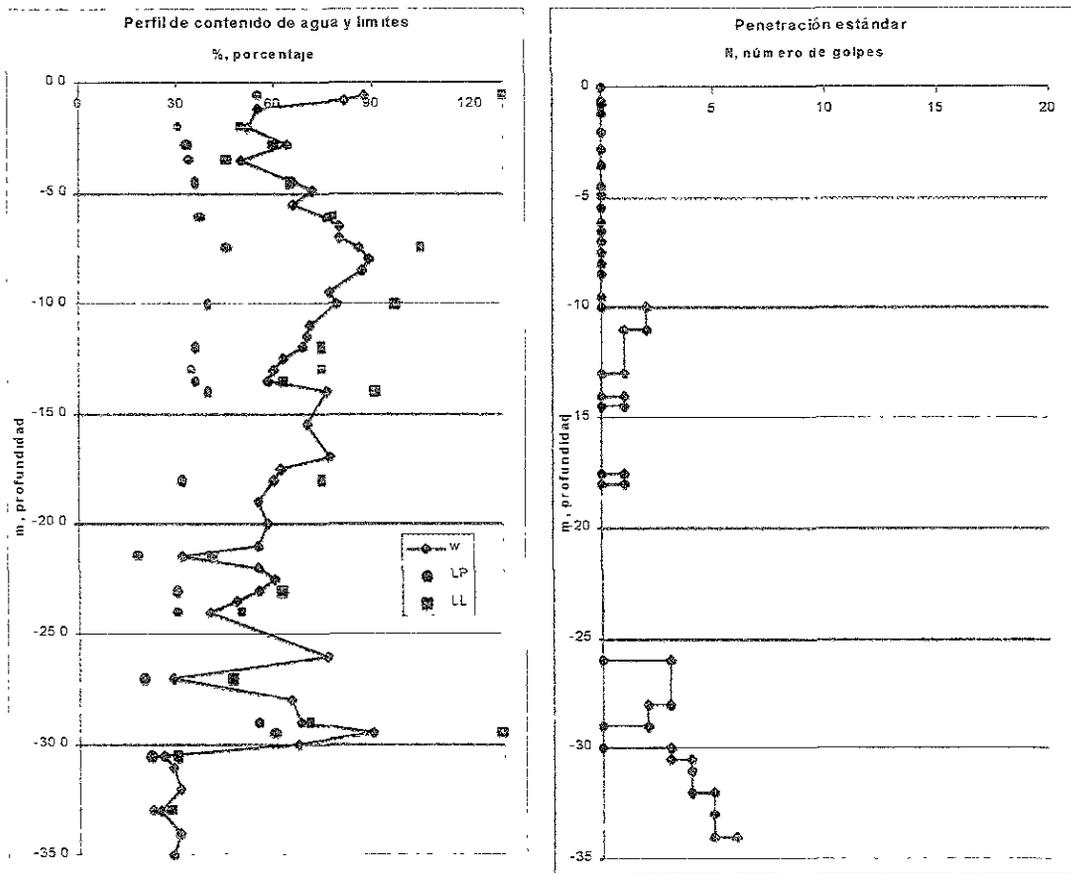


Fig. 4.2 Perfil del SM-1 en Batería Sen, Tabasco. DEF (1995).

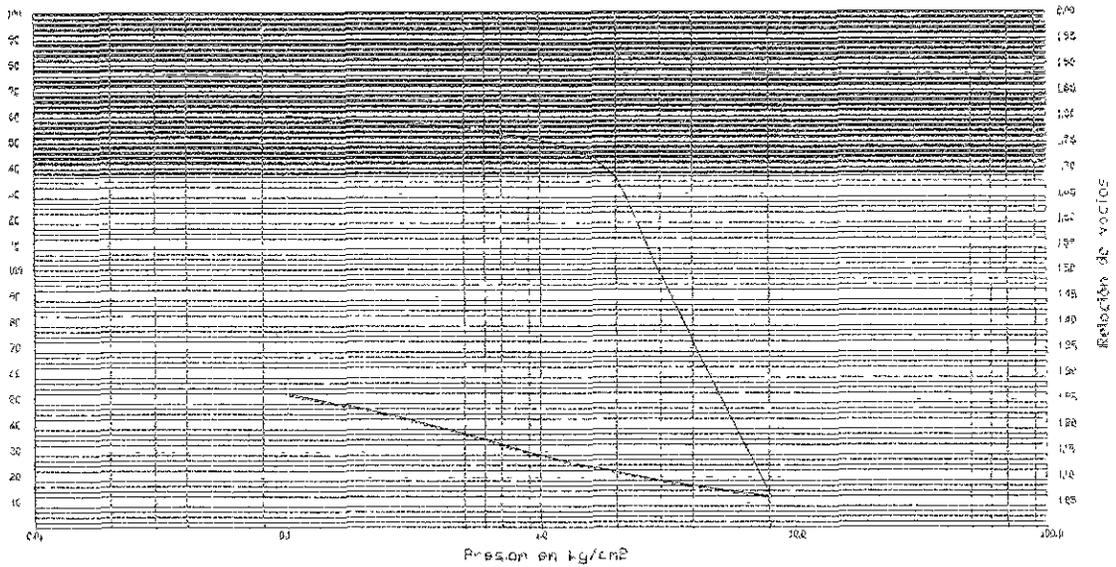


Fig. 4.3 Curva de compresibilidad, Batería Sen, Tabasco. Prof. 29.0-29.5m. DEF (1995).

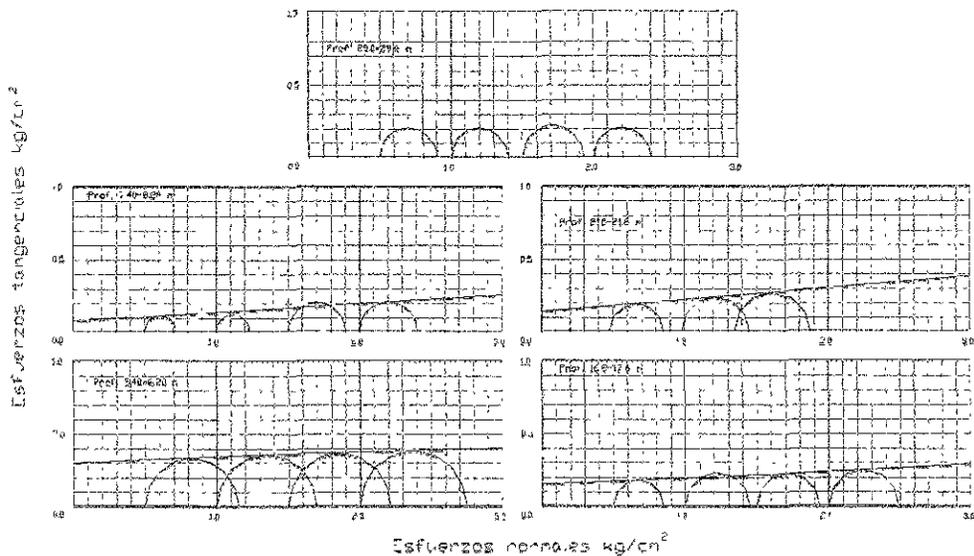


Fig. 4.4 Resultados de pruebas UU, Batería Sen, Tabasco. DEF (1995).

#### 4.2.2 Análisis determinista

Para realizar este análisis se consideró lo siguiente: El peso "W" es la suma del peso de la estructura del tanque más el peso del fluido a almacenar, que para diseño será el del agua, multiplicado por el factor de carga especificado por la norma. Se consideran 50 pilotes de acero al carbón con diámetro de 0.35 m (14") y de 30 m de longitud trabajando a fricción; esto obedece a que las condiciones del suelo son las que se indican a continuación:

- 1) Se encuentra un estrato firme a una profundidad de 35 m,

- 2) Los estratos superficiales son principalmente de arcilla de alta plasticidad con presencia de orgánicos (CH o OH),
- 3) La cohesión media que se presenta a lo largo del fuste, presenta un valor de  $1.76 \text{ t/m}^2$

Se espera que cada pilote soporte:  $\frac{W}{n_{pil}} = 35.12t$

### Revisión de capacidad de carga de un pilote individual

$$\frac{W}{n_{pil}} \leq F_R A_l f \tag{4.1}$$

donde:

$W$  = peso del tanque lleno de agua,  $1,756 \text{ t}$

$n_{pil}$  = número de pilotes, 50 pzas.

$F_R$  = factor de reducción,  $0.6$

$A_l$  = área lateral del pilote,  $33.55 \text{ m}^2$

$f$  = adherencia lateral estimada en la forma indicada en la tabla 5 del cap. 2,  $1.76 \text{ t/m}^2$

Efectuando el cálculo:

$$35.12t \leq 35.34t. \text{ El resultado cumple con la norma.}$$

### Revisión de capacidad de carga de un grupo de pilotes

$$W \leq [(cN_c - p_v)A_g + D_f P_g f] F_R + p_v A_g \tag{4.2}$$

Donde:

$W$  = peso del tanque lleno de agua,  $1,756 \text{ t}$

$c$  = cohesión del material,  $1.76 \text{ t/m}^2$

$N_c$  = coeficiente de Skempton cuyo valor puede obtenerse de la figura 2.4.2 g, 8.5

$p_v$  = presión vertical total actuante, antes de la construcción, al nivel de la punta de los pilotes,  $0.76 \text{ t/m}^2$

$A_g$  = área piloteada,  $154 \text{ m}^2$

$P_g$  = perímetro del área piloteada,  $44 \text{ m}$

$f$  = adherencia lateral estimada en la forma indicada en el inciso anterior,  $1.76 \text{ t/m}^2$

$D_f$  = profundidad de desplante,  $30 \text{ m}$

$F_R$  = factor de reducción,  $0.6$

Resolviendo la ecuación 4.2:

$$1,756t \leq 2,817t. \text{ Está dentro de la norma.}$$

### Revisión de asentamientos por consolidación

La norma requiere que se cumpla la desigualdad:

$$0.3 \geq \int_0^L \frac{\Delta e}{1 + e_0} dz \tag{4.3}$$

Para fines de cálculo del segundo miembro, se utiliza la ecuación

$$\delta = \frac{C_c}{1 + e_0} * H * \log_{10} \left( \frac{P_0 + \Delta P}{P_0} \right) \tag{4.4}$$

Donde:

0.3 = asentamiento máximo aceptable, *m*

*C<sub>c</sub>* = índice de compresibilidad

*H* = espesor del estrato, *m*

$\Delta p$  = incremento de presiones, *t/m<sup>2</sup>*

*P<sub>0</sub>* = carga de inicial, *t/m<sup>2</sup>*

*e<sub>0</sub>* = relación de vacíos inicial

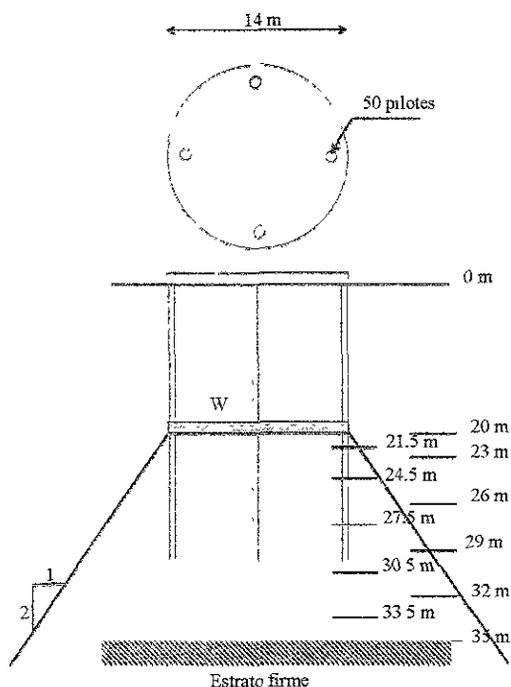


Fig. 4.5 Asentamiento con *W* a 2/3 de *D<sub>f</sub>*.

Para el cálculo del asentamiento se utiliza el criterio de trasladar la carga *W* a 2/3 de la longitud de los pilotes, figura 4.4.

El asentamiento se calcula en los puntos medios de los estratos definidos a cada 3 m de profundidad a partir de la cota 20 m o 2/3 de la longitud de los pilotes como se muestra la figura 4.5.

La presión *p<sub>0</sub>* se calcula con los pesos volumétricos de la tabla 4.1. Para calcular  $\Delta p$  se determina el área de distribución de carga de acuerdo a la pendiente 2:1, tabla 4.2. Se considera que el coeficiente *C<sub>c</sub>* de la fig. 4.3 es aplicable a todo el estrato cargado.

Estrato, <i>m</i>	$\gamma_m^*$ , <i>t/m<sup>3</sup></i>		Estrato, <i>m</i>	<i>p<sub>0</sub></i> , <i>t/m<sup>2</sup></i>
0.0-1.8	1.90	NAF a 1.0 m	0.0-1.0	1.90
1.8-3.0	1.75		1.0-1.8	0.72
3.0-3.8	1.45		1.8-3.0	0.90

3.8-5.4	1.70	3.0-3.8	0.36
5.4-6.6	1.60	3.8-5.4	1.12
6.6-7.4	1.32	5.4-6.6	0.72
7.4-8.0	1.60	6.6-7.4	0.26
8.0-9.2	1.75	7.4-8.0	0.36
9.2-21.0	1.57	8.0-9.2	0.90
21.0-26.0	1.60	9.2-21.0	6.75
26.0-33.4	1.50	21.0-21.5	0.30
33.4-35	1.45	A 21.5	14.29
		21.5-24.5	1.80
		A 24.5	16.09
		24.5-26.0	0.90
		26.0-27.5	0.75
		A 27.5	17.74
		27.5-30.5	1.50
		A 30.5	19.24
		30.5-33.4	1.50
		A 33.5	20.74

\* Datos de ABC (1995)

Tabla. 4.1 Cálculo de  $p_0$

Área equivalente	Cálculo de $\Delta p$
A <sub>21.5</sub> [(1.5(0.5) <sup>2</sup> +14)0.5] <sup>2</sup> $\pi$ =189m <sup>2</sup>	$\Delta p_{21.5}=W/A_g(A_{20}/A_{21.5})= 9.3 \text{ t/m}^2$
A <sub>24.5</sub> [(4.5(0.5) <sup>2</sup> +14)0.5] <sup>2</sup> $\pi$ =269m <sup>2</sup>	$\Delta p_{24.5}=W/A_g(A_{20}/A_{24.5})= 6.5 \text{ t/m}^2$
A <sub>27.5</sub> [(7.5(0.5) <sup>2</sup> +14)0.5] <sup>2</sup> $\pi$ =363m <sup>2</sup>	$\Delta p_{27.5}=W/A_g(A_{20}/A_{27.5})= 4.8 \text{ t/m}^2$
A <sub>30.5</sub> [(10.5(0.5) <sup>2</sup> +14)0.5] <sup>2</sup> $\pi$ =471m <sup>2</sup>	$\Delta p_{30.5}=W/A_g(A_{20}/A_{30.5})= 3.7 \text{ t/m}^2$
A <sub>33.5</sub> [(13.5(0.5) <sup>2</sup> +14)0.5] <sup>2</sup> $\pi$ =594m <sup>2</sup>	$\Delta p_{33.5}=W/A_g(A_{20}/A_{33.5})= 2.9 \text{ t/m}^2$

Tabla. 4.2 Cálculo de  $\Delta p$

Al sustituir valores en la ecuación 4.4, se obtiene:

$\delta = 0.45m$ . Este asentamiento rebasa el límite de 0.3 m

Este resultado nos motiva a realizar una evaluación de las diferentes fuentes de incertidumbre que afectan los cálculos anteriores con objeto de evaluar la validez de los mismos y la confiabilidad de la cimentación.

#### 4.2.3 FUENTES DE INCERTIDUMBRE

En este caso y para fines de este estudio simplificado, se consideran las siguientes fuentes de incertidumbre:

a) Para la capacidad de carga por pilote individual y capacidad de carga por grupo de pilotes, la cohesión es la principal fuente incertidumbre ya que su estimación se realiza a partir de pruebas de laboratorio que pueden ser afectadas por diferentes factores incluyendo el remoldeo y variantes en las técnicas usadas por diferentes laboratorios. Por otra parte se sabe que esta resistencia es sensible al dispositivo usado para determinarla y que, por ejemplo, la prueba de veleta da

resultados mayores que las pruebas de laboratorio. Estos factores conducen a considerar una incertidumbre significativa en la cohesión.

b) Asentamientos: La incertidumbre principal que se presenta concierne el índice de compresibilidad  $C_c$  del cuál se cuenta con una sola determinación. Para tener una estimación más real del asentamiento se tendría que contar con otras curvas de compresibilidad a diferentes profundidades. Desconfiando en cierta medida del resultado único del que se dispone y previendo que este índice puede variar sensiblemente con las propiedades índice del material, es posible realizar un cálculo alternativo recurriendo a las correlaciones aceptadas entre parámetros como el contenido de agua, la relación de vacíos, el límite líquido y la compresibilidad. Las correlaciones mas conocidas (NAVFAC, 1982) se presentan en la tabla 4.3.

$C_c = 0.009(LL-10\%)$	Arcillas inorgánicas, $LL =$ Límite líquido
$C_c = 0.0115w$	Arcillas orgánicas, $w =$ contenido natural de agua
$C_c = 1.15 (e_0-0.35)$	Todas las arcillas, $e_0 =$ relación vacíos inicial
$C_c = (1+e_0)[0.1+[w-25]0.006]$	Arcillas "varved",

Tabla. 4.3 Correlaciones

Como sólo se tiene una sola curva de compresibilidad y es poco representativa del estrato, se considera como opción la utilización de las correlaciones anteriores. Para determinar el asentamiento se asigna a cada subestrato de la figura 4.5, los índices calculados a partir de las expresiones de la tabla 4.3, de acuerdo con sus propiedades índice. Se obtienen los siguientes asentamientos, tabla 4.4:

Correlación	Asentamiento
$C_c = 0.009(LL-10\%)$	0.35 m
$C_c = 0.0115w$	0.41 m
$C_c = 1.15 (e_0-0.35)$	0.81 m
$C_c = (1+e_0)[0.1+[w-25]0.006]$	0.49 m

Tabla. 4.4 Asentamientos calculados

Se observa que los distintos valores del índice  $C_c$  obtenidos por correlación conducen a valores del asentamientos dispersos. La incertidumbre resultante se modelará con variables aleatorias en la forma indicada más adelante.

Conviene subrayar que en el análisis presentado a continuación no se toma en cuenta la incertidumbre existente respecto a las cargas aplicadas a la cimentación debido a que se consideran ampliamente cubierta por el generoso factor de carga previsto en la norma.

#### 4.3 ESTADOS LÍMITE DEL MODELO

Como se citó anteriormente, la confiabilidad de un sistema multicomponente es esencialmente un problema de múltiples modos de falla, donde cada modo está

asociado a un estado límite, representado a su vez por una ecuación de estado límite  $g(X)=0$ . Geométricamente la ecuación del estado límite  $g(X)=0$  es una superficie  $n$ -dimensional (línea oscura) llamada *superficie de falla*. En este caso un lado de la superficie de falla es el estado seguro  $g(X)>0$ , mientras que el otro lado es el estado de falla  $g(X)<0$ , tal como se ilustra en la fig 4.6 extraída del capítulo 3, para tres variables aleatorias normalizadas.

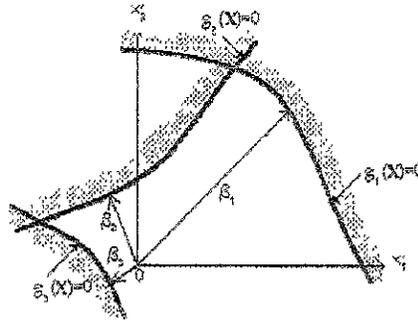


Fig. 4.6 Múltiples modos de falla.

Para efectuar el presente cálculo de confiabilidad se consideran los estados límite de capacidad de carga individual, por grupo de pilotes y asentamientos totales, analizados en el capítulo 2 y según los conceptos establecidos en el capítulo 3 para un sistema en serie, donde cualquiera de los estados límite citados provoca el mal funcionamiento de operación y seguridad de la instalación petrolera. Las ecuaciones de estado límite se presentan a continuación:

**Modelo de capacidad de carga de un pilote individual**

La función de comportamiento es:

$$g(X)_{carg\ individual} = \frac{W}{n_{pil}} - F_R A_i f \tag{4.5}$$

Donde:

$W$  = peso del tanque lleno de agua,  $t$

$n_{pil}$  = número de pilotes, pza.

$F_R$  = factor de reducción igual 0.6

$A_i$  = área lateral del pilote,  $m^2$

$f$  = adherencia lateral estimada en la forma indicada en la tabla 5 del cap. 2,  $1.76 t/m^2$

**Modelo de capacidad de carga del grupo de pilotes**

La función de comportamiento se escribe en este caso como:

$$g(X)_{carg\ agrupo} = W - [(cN_c - p_v)A_g + D_f P_g f] F_R + p_v A_g \tag{4.6}$$

Donde:

$W$  = peso del tanque lleno de agua,  $t$

$c$  = cohesión del material,  $t/m^2$

$N_c$  = coeficiente de Skempton cuyo valor puede obtenerse de la figura 2.4.2 g

$p_v$  = presión vertical total actuante, antes de la construcción, al nivel de la punta de los pilotes,  $t/m^2$

$A_g$  = área piloteada,  $m^2$

$P_g$  = perímetro del área piloteada,  $m$

$f$  = adherencia lateral estimada en la forma indicada en el inciso anterior,  $t/m^2$

$D_f$  = profundidad de desplante,  $m$

$F_R$  = factor de reducción igual 0.6

**Modelo de asentamientos por consolidación**

La función de comportamiento se escribe:

$$g(X)_{asenta} = \delta_{amp} - \int_0^L \frac{\Delta e}{1 + e_0} dz \tag{4.7}$$

o, en forma equivalente:

$$g(X)_{asenta} = \delta_{amp} - \frac{C_c}{1 + e_0} * H * \log_{10} \left( \frac{P_0 + \Delta P}{P_0} \right) \tag{4.8}$$

Donde:

$\delta_{amp}$  = asentamiento máximo permitido, (0.3m de acuerdo con la norma)  $m$

$C_c$  = índice de compresión, definido a través de alguna de las correlaciones siguientes:

$$C_c = 0.0115w \tag{4.9}$$

$$C_c = 0.009(LL - 10) \tag{4.10}$$

$$C_c = 1.15(e_0 + 0.35) \tag{4.11}$$

$$C_c = (1 + e_0)[0.1 + [w - 25]0.006] \tag{4.12}$$

$LL$  = límite líquido.

$H$  = espesor del estrato.

$\Delta p$  = incremento de presiones verticales.

$p_0$  = carga de inicial.

$e_0$  = relación de vacíos inicial.

$w$  = contenido natural de agua.

#### 4.4 VARIABLES ALEATORIAS Y DE CONTROL

Como se comentó en 3.3.3, la confiabilidad de una obra depende de variables aleatorias y de control. Las primeras se refieren a aquellos parámetros sobre los cuales el geotecnista no puede ejercer un adecuado dominio, debido a que están asociados a fenómenos físicos que son aleatorios por naturaleza o porque no se cuenta con información adecuada o completa para efectuar predicciones y estimaciones. Por su parte, las segundas están relacionadas con los parámetros sobre los cuales el ingeniero puede ejercer suficiente dominio, ya que cuenta con el equipo adecuado, con datos suficientes y con experiencia en eventos similares.

En la aplicación para es estudio, se considera que las variables de control como son el peso del tanque y la geometría del mismo, permanecen constantes.

Las variables aleatorias de este estudio son la cohesión y el índice de compresibilidad producto de las correlaciones señaladas en la sección anterior y cuyas características se enuncian a continuación.

#### 4.5 CARACTERÍSTICAS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS DEL PROBLEMA

Para la selección de los primeros momentos de las variables aleatorias del sistema se efectúan las siguientes consideraciones:

- Para la cohesión del suelo " $c$ " se considera un valor medio  $\mu = 1.76 \text{ t/m}^2$ , y se propone representar la incertidumbre discutida más arriba mediante una desviación estándar  $\sigma = 0.5 \text{ t/m}^2$  y un coeficiente de variación  $V = 0.28$ .
- El índice de compresión " $C_c$ ", se determina en este trabajo por medio de las ecuaciones 4.10 a 4.13. Considerando que, a priori, las correlaciones pueden ser igualmente válidas se considera una probabilidad igual a 0.25 para las cuatro correlaciones.

La tabla 4.5 resume los parámetros estadísticos propuestos para las variables aleatorias del sistema sobre la base de las consideraciones anteriores y muestra los valores adoptados para las variables de control en función de las dimensiones de diseño de la cimentación del tanque utilizado como ejemplo.

Variables					
Aleatorias				Control	
	$\mu$	$\sigma$	V		
C	1.76 t/m <sup>2</sup>	0.5 t/m <sup>2</sup>	0.28	W	1756 t
				$n_{pnl}$	50 pza
				$A_g$	154 m <sup>2</sup>
				$P_2$	44 m
				$D_f$	30 m
				$A_L$	33.55 m <sup>2</sup>
				$P_V$	0.76 t/m <sup>2</sup>
				L	30 m

	F(x)
$C_{corg}$	0.25
$C_{c\text{ marg}}$	0.25
$C_{c\text{ adns}}$	0.25
$C_{c\text{ barb}}$	0.25

Tabla 4.5 Variables del sistema.

### 4.6 CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES

Para la construcción de la matriz de correlación de las variables aleatorias del sistema se hacen las siguientes consideraciones:

- Aceptando que si una correlación resulta más adecuada para un estrato, también lo será para los otros estratos, se considera una correlación altamente positiva entre los índices de compresibilidad de los diferentes estratos. Esta correlación es  $\rho = 0.90$ .
- La cohesión se considera una variable estadísticamente independiente de los índices de compresibilidad.

Lo anterior permite establecer la siguiente matriz de correlación:

$$\rho = \begin{matrix} & C_{c21.5} & C_{c24.5} & C_{c27.5} & C_{c30.5} & C_{c33.5} & c \\ \begin{matrix} C_{c21.5} \\ C_{c24.5} \\ C_{c27.5} \\ C_{c30.5} \\ C_{c33.5} \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 0.9 & 1 & 0.9 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

### 4.7 SELECCIÓN DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA

Para el análisis de confiabilidad, tomando en cuenta al sencillez del problema, se recurrirá al método de Monte Carlo.

Como se mencionó anteriormente, al aplicar el método de Monte Carlo para el análisis de confiabilidad, resulta importante la determinación *a priori* del tamaño de la muestra, es decir del número de simulaciones que se realizarán.

En la fig 4.7 se muestra como, en un análisis típico, la confiabilidad calculada del sistema tiende a un comportamiento cada vez más estable y tiende hacia el valor que se pretende estimar conforme crece el número de simulaciones.

Al respecto, la teoría de distribución muestral de proporciones revisada en el punto 3.4.4.7 establece que la desviación estándar de la estimación es:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{CF}{n}} = \sqrt{\frac{C(1-C)}{n}} \tag{4.13}$$

donde n = número de elementos de la muestra.

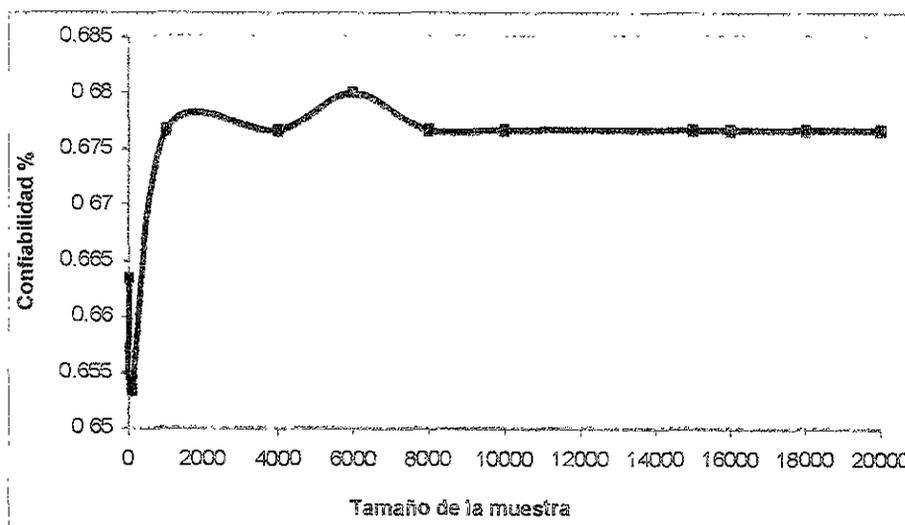


Fig. 4.7 Variación de la confiabilidad de la cimentación en función del tamaño de la muestra.

Para una muestra de 1,000 elementos, la desviación estándar máxima de la confiabilidad así calculada resulta de 0.015424, para el caso más desfavorable en que C=F=0.5000 y toma un valor de 0.001 para condiciones más típicas correspondientes a C=0.99 y F=0.01.

Aceptando cierto compromiso entre la precisión obtenida definida por los valores anteriores y el tiempo de cálculo, se realizaron los análisis de confiabilidad que se presentan a continuación con muestras de 1,000 elementos para el caso de las capacidades de carga y para el asentamiento total.

4.8 PLANTEAMIENTO DEL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD

El análisis de confiabilidad presentado se aplica al tanque de almacenamiento típico de las instalaciones petroleras terrestres de la Zona Sur de Pemex Exploración - Producción, para las funciones de comportamiento de la sección 4.7:

a) En primer lugar se analiza la capacidad de carga de los pilotes individuales, considerando que se presenta la falla cuando la capacidad de carga del pilote por fricción es inferior a la presión transmitida por el peso propio del tanque más el peso del agua en su total capacidad de almacenamiento. Las características de las variables aleatorias y de control se presentan en la tabla 4.10.

Una vez planteado el caso se procede a efectuar los análisis de confiabilidad de la cimentación para diferentes valores de la variable aleatoria.

Variables					
Aleatorias				Control	
	$\mu$	$\sigma$	V	$A_1$	33.55 m <sup>2</sup>
c	1.76 t/m <sup>2</sup>	0.5 t/m <sup>2</sup>	0.28	W	1756 t
				$A_L$	33.55 m <sup>2</sup>

Tabla 4.10 Variables aleatorias y de control, pilote individual.

Para realizar los análisis de confiabilidad, se obtiene por muestreo el valor de la variable aleatoria (Apéndice A) y se calcula el valor de la función de comportamiento; si es negativo, se toma como "éxito" representado por el número 1 y si es positivo es la "falla" representado por el 0. Este procedimiento se ilustra en la tabla 4.11

No.	$u_1$	$u_2$	f	$W/n_{pil}$	$F_R * A_1 * f$	$0=W/A_{tan}-F_R A_1 f$	
1	0.28	0.60	1.12	35.12	22.64	12.48	0
2	0.72	0.62	1.46	35.12	29.33	5.79	0
3	0.06	0.21	2.07	35.12	41.76	-6.64	1
4	0.67	0.72	1.66	35.12	33.38	1.74	0
5	0.81	0.11	2.01	35.12	40.48	-5.36	1

Tabla 4.11 Simulaciones de la capacidad de carga de un pilote individual.

La confiabilidad se estima a partir del cociente de casos de comportamiento aceptable al número total de simulaciones realizadas.

b) En segundo lugar se analiza la capacidad de carga global del grupo de pilotes, considerando que se presenta la falla cuando la capacidad de carga del grupo de pilotes de fricción es inferior al peso propio del tanque más el peso del agua correspondiente a su total capacidad de almacenamiento. Nuevamente la cohesión (y por tanto la adherencia) son las variables aleatorias como se indica en la tabla 4.12, donde se indican asimismo las variables de control.

Variables				Control	
Aleatorias			V	P <sub>v</sub>	0.76 t/m <sup>2</sup>
c	μ	σ	0.28	W	1756 t
	1.76 t/m <sup>2</sup>	0.5 t/m <sup>2</sup>		L	30 m
				P <sub>g</sub>	44 m
				A <sub>t</sub>	33.55 m <sup>2</sup>
				A <sub>s</sub>	154 m <sup>2</sup>

Tabla 4.12. Variables aleatorias y de control, grupo de pilotes.

Una vez planteado lo anterior se procede a efectuar los análisis de confiabilidad de la cimentación.

Como en el inciso anterior, en la tabla 4.13 se muestran algunos ejemplos de simulaciones. Cuando la función de comportamiento es negativa se anota un "éxito" representado por un 1 y en caso contrario una "falla" ó 0.

No.	u1	u2	c	f	S=W	$R= (cNc-Pv)Ag+DfPg FR+PvAg$	0=S-R	
1	0.26	0.80	2.19	2.36	1756.00	3636.88	-1880.88	1
2	0.67	0.15	2.23	0.20	1756.00	1962.03	-206.03	1
3	0.62	0.07	2.55	0.30	1756.00	2283.92	-527.92	1
4	0.91	0.91	2.08	1.56	1756.00	2912.83	-1156.83	1
5	0.51	0.69	1.34	1.73	1756.00	2469.97	-713.97	1

Tabla 4.13 Simulaciones de la capacidad de carga del grupo de pilotes

Nuevamente, la confiabilidad se estima a partir del cociente de casos de comportamiento aceptable al número total de simulaciones realizadas.

c) Finalmente se analiza el asentamiento de la estructura. El asentamiento máximo marcado por la norma es de 0.30 m. Las variables aleatorias son los índices de compresibilidad de los distintos substratos. Estos a su vez dependen de la correlación adoptada. Las probabilidades asociadas a cada correlación y las distintas variables de control se presentan en la tabla 4.14.

Variables			
Aleatorias		Control	
	F(x)	H <sub>1</sub> , H <sub>2</sub> , H <sub>3</sub> , H <sub>4</sub> , H <sub>5</sub>	1.5, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0 m
C <sub>c org</sub>	0.25	p <sub>01</sub> , p <sub>02</sub> , p <sub>05</sub>	14.3, 16.09, 17.7 t/m <sup>2</sup>
C <sub>c org</sub>	0.25	P <sub>04</sub> , p <sub>05</sub>	19.24, 20.74 t/m <sup>2</sup>
C <sub>c todas</sub>	0.25	Δp <sub>1</sub> , Δp <sub>2</sub> , Δp <sub>3</sub>	9.3, 6.5, 4.8 t/m <sup>2</sup>
C <sub>c acb</sub>	0.25	Δp <sub>4</sub> , Δp <sub>5</sub>	3.7, 2.9 t/m <sup>2</sup>

Tabla 4.14. Variables aleatorias y de control, para asentamiento.

La tabla 4.16 presenta los resultados de una simulación típica realizada en relación con el asentamiento total en la forma descrita en el Apéndice A. Como en los incisos anteriores, el "éxito" ó 1 se obtiene cuando el asentamiento calculado es inferior a 0.30 m y la "falla" ó 0 en el caso contrario.

	$W^*$	$\sigma_i$	$\mu_i$	$W^*_{\sigma_i + \mu_i}$
$\mu_1$	-0.63	0.09	0.37	0.31
0.693972092	-0.63	0.06	-0.03	-0.07
	0.63	0.02	0.12	0.14
	0.63	0.02	-0.01	0.01
	-1.26	0.02	-0.01	-0.04

	$a_{12}W_1$	$a_{12}W_2$	$a_{13}W_3$	$a_{14}W_4$	$a_{15}W_5$
$X_1=C_{21.5}$	0.315	0.315			
$X_2=C_{24.5}$	0.373	0.444	-0.071		
$X_3=C_{27.5}$	0.316	0.193	-0.015	0.138	
$X_4=C_{30.5}$	0.249	0.208	-0.016	0.048	0.009
$X_5=C_{33.5}$	0.234	0.201	-0.015	0.046	0.002

$S=\delta_{tot} =$	0.25	$R=0.5$	$0.5-\delta_{tot}=0$	0.25	1.00
--------------------	------	---------	----------------------	------	------

Tabla 4.15 Simulación del asentamiento total

Nuevamente, la confiabilidad se estima a partir del cociente de casos de comportamiento aceptable al número total de simulaciones realizadas.

d) Por último, se determina la probabilidad de falla del sistema, utilizando la formula de Poincaré y el complemento de está ecuación es la confiabilidad:

$$P[A^* \cup B^* \cup C^*] = P[A^*] + P[B^*] + P[C^*] - P[A^* \cap B^*] - P[B^* \cap C^*] - P[A^* \cap C^*] + P[A^* \cap B^* \cap C^*] \quad (4.14)$$

donde:

$A^*$  = evento falla por rebase del asentamiento máximo

$B^*$  = evento falla por capacidad de carga insuficiente de un pilote individual (conviene subrayar que en el presente planteamiento si falla un pilote todos fallan puesto que la ecuación de verificación es idéntica para todos los pilotes)

$C^*$  = evento falla del grupo de pilotes a lo largo del perímetro del mismo.

En efecto el sistema funciona en serie, ya que al no cumplir alguna de sus funciones de comportamiento con las condiciones propuestas, se considera que el sistema falla.

La confiabilidad del sistema se obtiene como complemento a la unidad de la probabilidad de falla.

#### 4.9 RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD

Con base en un total de 1000 simulaciones generadas por la hoja de cálculo de Excel Cc'samp.xls se evaluó la confiabilidad del sistema con sus ecuaciones de comportamiento para capacidad de carga por pilote individual, capacidad de carga por el grupo de pilotes y el asentamiento. Se obtuvieron los siguientes resultados al analizar los casos planteados anteriormente. En el apéndice A, se muestra el funcionamiento de la hoja de cálculo Cc'samp.xls.

##### ANÁLISIS 1. CONFIABILIDAD PARA LA CAPACIDAD DE CARGA DE UN PILOTE INDIVIDUAL.

El resultado del análisis de la confiabilidad para la capacidad de carga de un pilote individual, arroja una confiabilidad 51.4% para las condiciones establecidas. Esta confiabilidad refleja la baja probabilidad que existe de cumplir con la Norma, aún cuando el análisis determinista arroja un resultado favorable.

##### ANÁLISIS 2. CONFIABILIDAD PARA LA CAPACIDAD DE CARGA DE UN GRUPO DE PILOTES

El resultado del análisis de confiabilidad para la capacidad de un grupo de pilotes, es del 100%. Este posible mecanismo de falla parece por tanto poco crítico.

##### ANÁLISIS 3. CONFIABILIDAD PARA EL ASENTAMIENTO.

La confiabilidad para el asentamiento máximo de 0.3 m establecido por la Norma es extremadamente baja y resulta del orden de 12%.

##### ANÁLISIS 4. CONFIABILIDAD DEL SISTEMA.

Al analizar la confiabilidad del sistema, como era de esperarse, esta resulta aún más baja que la del asentamiento y el valor obtenido es de 6.3%.

Se puede concluir que para las condiciones establecidas anteriormente, el sistema es muy poco confiable o posee una altísima probabilidad de "falla" en el sentido amplio, dominando la posibilidad de que se rebase el asentamiento máximo.

Los resultados anteriores sugieren los análisis complementarios que se presentan a continuación.

4.10 ANÁLISIS COMPLEMENTARIOS DE CONFIABILIDAD

Para una mejor evaluación de la seguridad de la cimentación se propone repetir el análisis anterior bajo las siguientes consideraciones:

- a) La "falla" del pilote individual considerada en el análisis anterior se refiere al incumplimiento de la norma que contiene un factor de reducción que introduce un cierto margen de seguridad. Para evaluar la confiabilidad "real" respecto a la falla, conviene repetir el análisis sustituyendo el factor de reducción  $F_R$  por la unidad en la función de comportamiento de la capacidad de carga de un pilote individual.
- b) Es conveniente evaluar la influencia sobre la confiabilidad de la hipótesis hecha sobre la desviación estándar de la cohesión. Se hará variar este parámetro en un rango de valores de 0.1 a 0.9 t/m<sup>2</sup>.
- c) Se realizará el mismo tipo de análisis que en los incisos a) y b) anteriores para la función de comportamiento de la capacidad de carga del grupo de pilotes.
- d) Se considera conveniente repetir también el análisis relativo a los asentamientos introduciendo una mayor flexibilidad en cuanto al asentamiento máximo considerado ya que se sabe que el cálculo tradicional resulta generalmente conservador. Por lo anterior, se hace variar el asentamiento máximo permitido (amp) en un rango de 0.3 a 0.8 m, con el objetivo de estudiar la variabilidad de la confiabilidad del asentamiento con este límite.
- e) Asimismo, se considera necesario examinar con más detalle la incertidumbre asociada a la correlación que define los índices de compresibilidad. Dado que el material es orgánico parece lógico darle más peso a la correlación propuesta específicamente para materiales de este tipo. Se determina por tanto la confiabilidad del asentamiento haciendo variar las distribuciones de probabilidad de acuerdo a la tabla 4.16, dándole cada vez más peso a la segunda correlación.

Correlación	1	2	3	4	5
Inorgánica	0.25	0.25	0.20	0.15	0.10
Orgánica	0.25	0.40	0.50	0.60	0.70
Todas	0.25	0.25	0.20	0.15	0.10
"varved"	0.25	0.10	0.10	0.10	0.10

Tabla 4.16 Alternativas de la distribución de probabilidad

f) Finalmente, se sugiere hacer una distinción entre los primeros tres sustratos, que presentan mayor contenido de agua, y los dos sustratos subyacentes. Para ello se elimina la correlación supuesta entre dichos pares de

subestratos y la matriz de correlación se modifica en la forma indicada en la tabla 4.17.

$$\rho = \begin{matrix} & C_{c21.5} & C_{c24.5} & C_{c27.5} & C_{c30.5} & C_{c33.5} & c \\ \begin{matrix} C_{c21.5} \\ C_{c24.5} \\ C_{c27.5} \\ C_{c30.5} \\ C_{c33.5} \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tabla 4.17 Matriz de correlación modificada

g) Por último, se determina la confiabilidad global “real” del sistema para dos condiciones: para un asentamiento máximo permitido de 0.50m con la matriz de correlación original. Un segundo análisis se realiza haciendo variar la distribución de probabilidad de acuerdo a la tabla 4.16, conservando el 0.50m como asentamiento máximo y usando la matriz de correlación modificada de la tabla 4.17.

#### 4.11 RESULTADOS DE LOS ANÁLISIS COMPLEMENTARIOS

##### ANÁLISIS 1. CONFIABILIDAD PARA LA CAPACIDAD DE CARGA DE UN PILOTE INDIVIDUAL, CON $F_R = 1$ .

La confiabilidad de la capacidad de carga de un pilote individual, igualando el  $F_R$  a 1, se incrementa considerablemente, ya que de un valor de 50% para la condición inicial, se eleva a un 91.9%. Este valor debe considerarse sin embargo todavía bajo ya que, para las condiciones consideradas, el  $F_R$  de la Norma no cubriría la incertidumbre sobre la cohesión.

##### ANÁLISIS 2. CONFIABILIDAD PARA LA CAPACIDAD DE CARGA DE UN PILOTE INDIVIDUAL, CON $\sigma$ VARIABLE.

Se puede estudiar la influencia de la hipótesis aceptada en cuanto a la magnitud de la desviación estándar de la cohesión. En la figura 4.8, se aprecia que para valores de entre 0.1 t/m<sup>2</sup> y 0.3 t/m<sup>2</sup> de  $\sigma$ , la confiabilidad se mantiene en 100%. A partir de 0.3 t/m<sup>2</sup> y hasta 0.7 t/m<sup>2</sup>, la confiabilidad disminuye rápidamente y en forma lineal, siendo el valor de la confiabilidad en el último punto de 85%. Nuevamente se presenta una disminución de la confiabilidad en esta función de comportamiento en el rango de 0.8 a 0.9 t/m<sup>2</sup> llegando a un valor mínimo de 79%.

Se concluye que el factor de reducción considerado por la Norma para la capacidad de carga de un pilote individual resulta escaso para valores de  $\sigma$  que representen alta dispersión de datos.

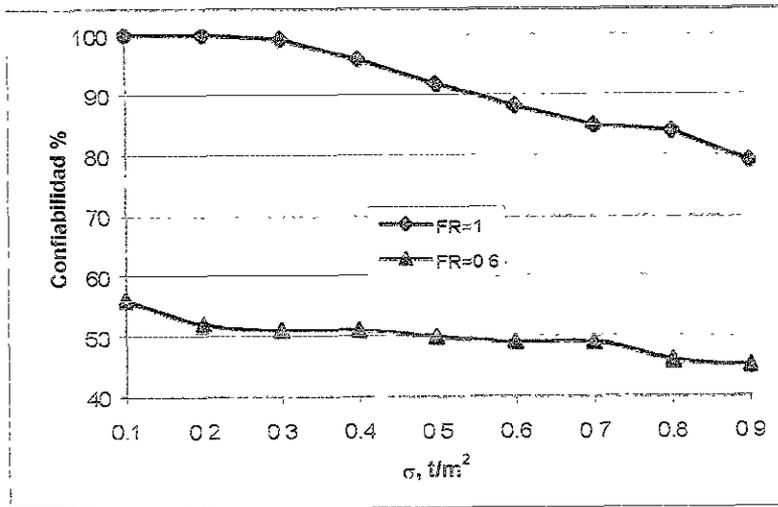


Fig. 4.8 Confiabilidad respecto a la capacidad de carga de un pilote individual, con  $\sigma$  variable

**ANÁLISIS 3. CONFIABILIDAD PARA LA CAPACIDAD DE CARGA DEL GRUPO DE PILOTES, CON  $F_R = 1$ .**

La confiabilidad de la capacidad de carga de un grupo de pilotes, igualando el  $F_R$  a 1, se mantiene igual al anterior análisis donde el  $F_R$  tiene un valor 0.6, es decir en un 100%. El  $F_R$  no influye de forma importante en esta función de comportamiento.

**ANÁLISIS 4. CONFIABILIDAD PARA LA CAPACIDAD DE CARGA DEL GRUPO DE PILOTES, CON  $\sigma$  VARIABLE.**

Modificando la desviación estándar supuesta para la adherencia, se aprecia que esta no influye de forma importante, puesto que la confiabilidad se mantiene en un 100%, en un amplio rango de valores de  $\sigma$ . Esto se ilustra en la figura 4.9.

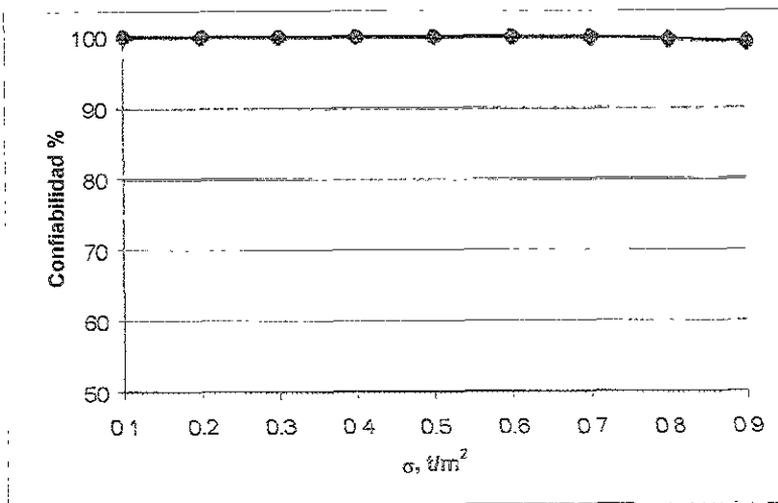


Fig 4.9 Confiabilidad respecto a la capacidad de carga del grupo de pilotes, con  $\sigma$  variable.

**ANÁLISIS 5. CONFIABILIDAD PARA EL ASENTAMIENTO, CON ASENTAMIENTO MÁXIMO PERMITIDO VARIABLE.**

La confiabilidad calculada haciendo variar el asentamiento máximo permitido, es creciente ya que de un 13% en 0.3 m, sube hasta un valor del 98.6% en 0.8 m. Se observa que para el valor propuesto de 0.50 m como máximo para los siguientes análisis su confiabilidad es del 53%, que es baja. Esto se muestra en la figura 4.10.

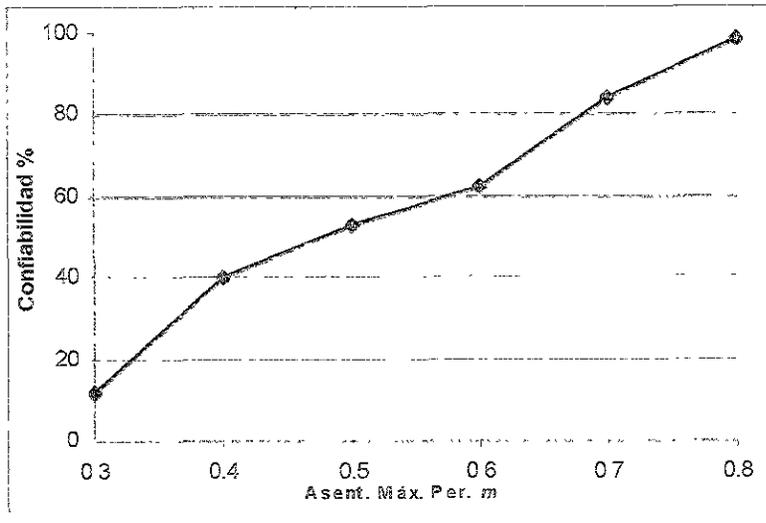


Fig. 4.10 Confiabilidad respecto al estado límite de asentamiento, con asentamiento máximo variable.

**ANÁLISIS 6. CONFIABILIDAD PARA EL ASENTAMIENTO; CON DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD VARIABLE.**

La confiabilidad calculada modificando la distribución de probabilidad de las diferentes correlaciones de acuerdo con la tabla 4.16, no presenta un cambio importante, ya que su valor más bajo es de 53% y se eleva sólo a un valor de 62% para la distribución de probabilidades donde se asigna una probabilidad de 0.7 a la correlación a las arcillas orgánicas y las otras correlaciones tienen una probabilidad igual de 0.1. Figura 4.11.

**ANÁLISIS 7. CONFIABILIDAD PARA EL ASENTAMIENTO; CON UNA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD VARIABLE Y CONSIDERANDO LA MATRIZ DE CORRELACIÓN MODIFICADA.**

La confiabilidad aumenta por efecto de promedio más marcado en ausencia de correlación entre los estratos superiores y los estratos inferiores. La confiabilidad varía en un rango más amplio que en el caso anterior, ya que inicia en un valor de 51% para una probabilidad de 0.25 en las 4 correlaciones, y alcanza un valor de confiabilidad de 67% para alternativa donde la probabilidad de las arcillas orgánicas es de 0.7, que sigue siendo una confiabilidad baja. Figura 4.12

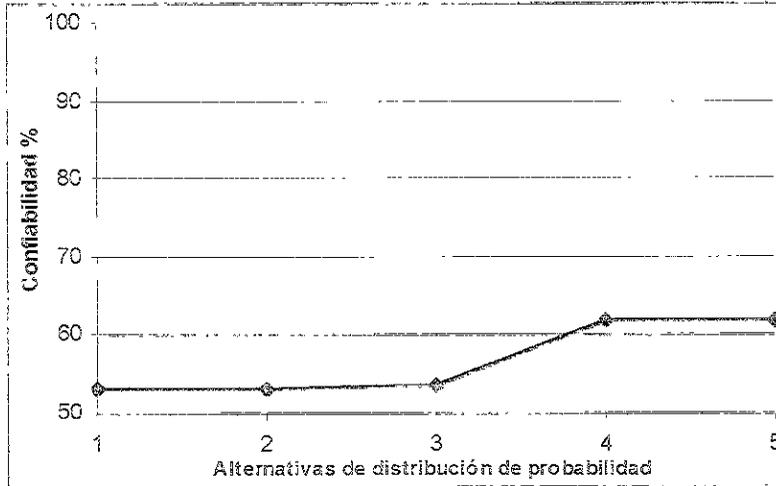


Fig 4.11 Confiabilidad del asentamiento con distribución de probabilidades de correlaciones variable.

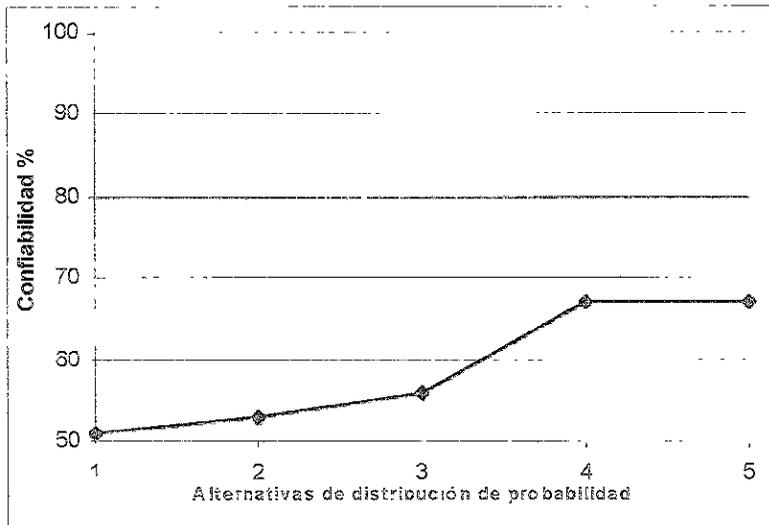


Fig 4.12 Confiabilidad del asentamiento con distribución de probabilidades variable y matriz de correlación modificada.

**ANÁLISIS 8. CONFIABILIDAD DEL SISTEMA PARA UN ASENTAMIENTO MÁXIMO PERMITIDO DE 0.50 m.**

Al analizar la confiabilidad del sistema con un *amp* de 0.50m, se obtiene una confiabilidad de 53%, por lo que el sistema es poco confiable en esta condición, ya que puede tener éxito o fallar con una misma probabilidad.

**ANÁLISIS 9. CONFIABILIDAD DEL SISTEMA PARA UNA ASENTAMIENTO MÁXIMO PERMITIDO DE 0.50 M, DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD VARIABLE Y MATRIZ DE CORRELACIÓN MODIFICADA**

Al evaluar la confiabilidad del sistema con una distribución de probabilidad variable, un *amp* 0.50m y la matriz de correlación modificada, la confiabilidad del sistema presenta un comportamiento igual al obtenido en el análisis 7, pero con un valor inferior, ya que la confiabilidad sólo es de 62% en esta condición. El sistema aumenta su confiabilidad respecto al análisis 4 de la sección 4.9, pero no llega a ser confiable. Figura 4.13

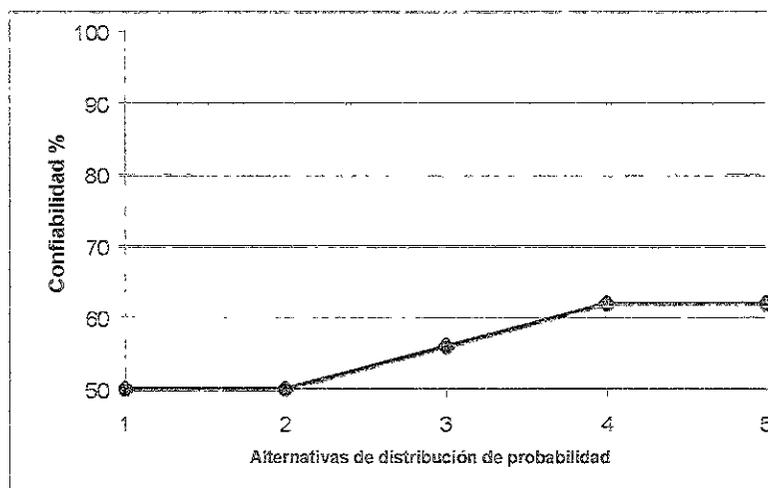


Fig. 4.13 Confiabilidad del sistema.

#### 4.12 MODIFICACIÓN DE LAS VARIABLES DE CONTROL

Por los resultados obtenidos, y buscando aumentar la confiabilidad con modificaciones de las variables de control, es decir modificando el diseño de la cimentación, se realizan tres análisis más, con las siguientes consideraciones:

- a) En el caso de la función de comportamiento de capacidad de carga del pilote individual, que resulta ser un componente crítico para el sistema estudiado junto con el asentamiento, se hace variar el diámetro del pilote para evaluar la confiabilidad del sistema con diferentes diámetros de tubería recuperada que PEMEX posee y utiliza para este tipo de obras. Por otra parte, se analiza la influencia sobre la confiabilidad del sistema de un incremento en el número de pilotes.
- b) Asimismo, se analiza la confiabilidad del sistema dando diferentes diámetros a la losa de cimentación.
- c) Finalmente, se analiza la confiabilidad del sistema, incrementando la profundidad de hincado de pilotes de 30m a 32.5m, juntamente con los incrementos del diámetro de la losa de cimentación.

Para los tres casos planteados se acepta que: el asentamiento máximo permitido es de 0.50m ya que el cálculo es conservador tomado las medidas adecuadas, la

distribución de probabilidades es la alternativa cinco de la tabla 4.16 y la matriz de correlación es la de la tabla 4.17 y se comparan los resultados con  $F_R$  de 0.6 y de 1.

**ANÁLISIS 1. CONFIABILIDAD DEL SISTEMA RESPECTO A CAPACIDAD DE CARGA DE UN PILOTE INDIVIDUAL, CON DIÁMETRO O NÚMERO DE PILOTES VARIABLE.**

La confiabilidad parcial de la capacidad de carga de un pilote individual aumenta del 50% al 92% con  $F_R = 0.6$  y del 92% al 99% para  $F_R = 1$ , con diámetro variable. Figura 4.14

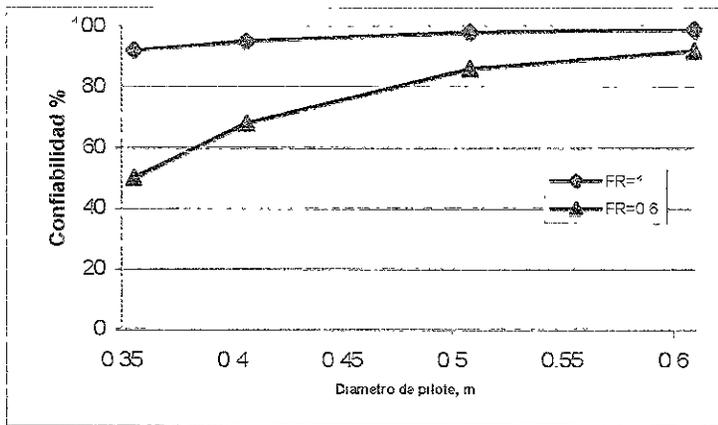


Fig. 4.14 Confiabilidad respecto a la capacidad de carga de un pilote individual, con diámetro variable.

Al variar el número de pilotes, la confiabilidad parcial de capacidad de un pilote individual con  $F_R = 0.6$  se incrementa del 38% al 80% y para  $F_R = 1$  del 89% al 97%. Figura 4.15

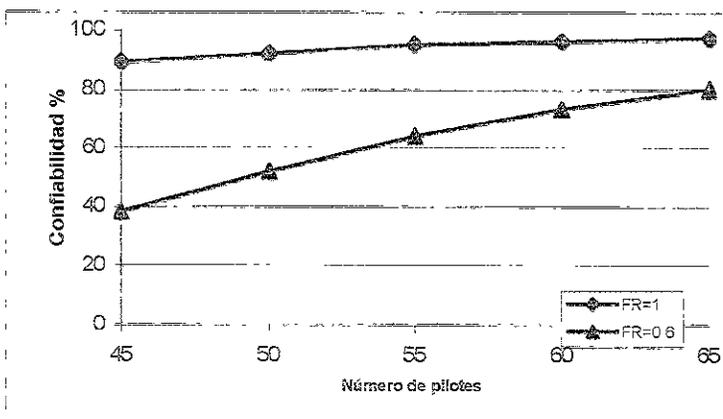


Fig. 4.15 Confiabilidad respecto a la capacidad de carga de un pilote individual, con número pilotes variable.

Al evaluar la confiabilidad del sistema, esta mejora notablemente para el caso en el que  $F_R$  es 0.6, ya que aumenta del 40% con diámetro de 14" (35cm) a 73% para un diámetro de 24" (60cm). En el caso de un  $F_R$  de 1, la confiabilidad "real" se mantiene arriba del 72% pero crece poco con el diámetro. En la figura 4.16 se aprecia lo anterior.

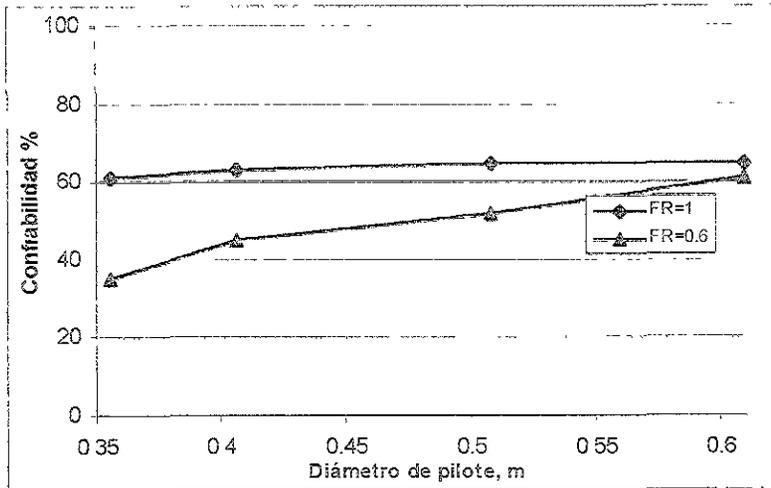


Fig. 4.16 Confiabilidad del sistema respecto a la capacidad de carga de un pilote individual, con diámetro variable.

Con un número creciente de pilotes, con el  $F_R$  de 0.6 la confiabilidad "mejora" pero no supera el 50%. Para el  $F_R$  de 1, la confiabilidad es casi estable pero no es mayor al 61%. Figura 4.17.

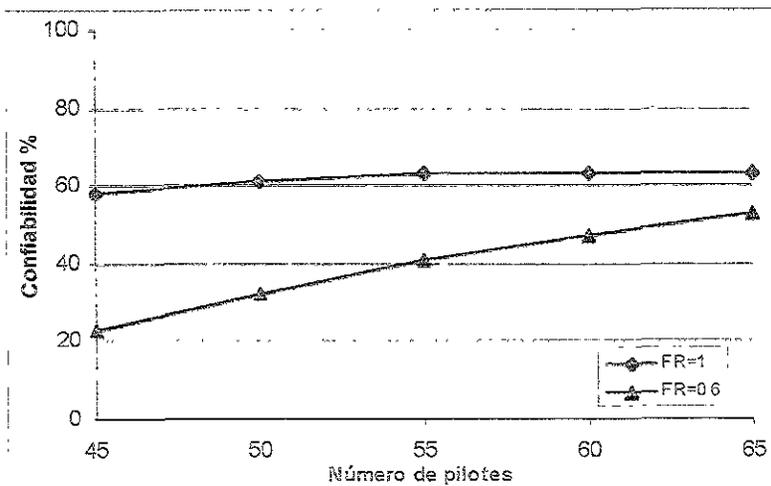


Fig. 4.17 Confiabilidad del sistema respecto a la capacidad de carga de un pilote individual, con número pilotes variable.

Se concluye por tanto que si bien el aumento del diámetro o del número de pilotes aumenta la confiabilidad respecto a falla individual de los pilotes no llega a darle al sistema una confiabilidad aceptable. En efecto la confiabilidad del sistema resulta controlada por los asentamientos.

**ANÁLISIS 2. CONFIABILIDAD DEL SISTEMA, CON DIÁMETRO DE LOSA DE CIMENTACIÓN VARIABLE.**

Se evalúa la confiabilidad del sistema incrementando únicamente el diámetro de la losa de cimentación, con la finalidad de mejorar el comportamiento del asentamiento y por consecuencia la del conjunto. Con  $F_R = 1$  y con este criterio, la confiabilidad si mejora, llegando a 93% con un diámetro de losa de 20m. Pero si se conserva el  $F_R = 0.6$ , solo llega al 50% con el mismo diámetro de 20m. Figura 4.18.

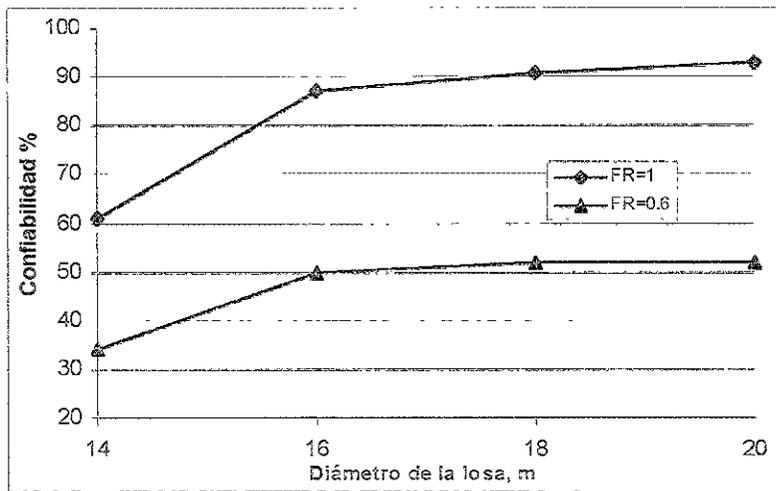


Fig. 4.18 Confiabilidad del sistema, con diámetro de losa variable.

**ANÁLISIS 3. CONFIABILIDAD DEL SISTEMA, CON DIÁMETRO DE LOSA DE CIMENTACIÓN VARIABLE Y PROFUNDIDAD DE HINCADO DE 32.5m.**

Se evalúa la confiabilidad del sistema incrementando el diámetro de la losa de cimentación y aumentando el hincado de los pilotes hasta 32.5m, con el mismo objetivo del análisis anterior. Con  $F_R = 1$ , la confiabilidad es de 95%, mientras que para  $F_R = 0.6$  es de 61%. Figura 4.19.

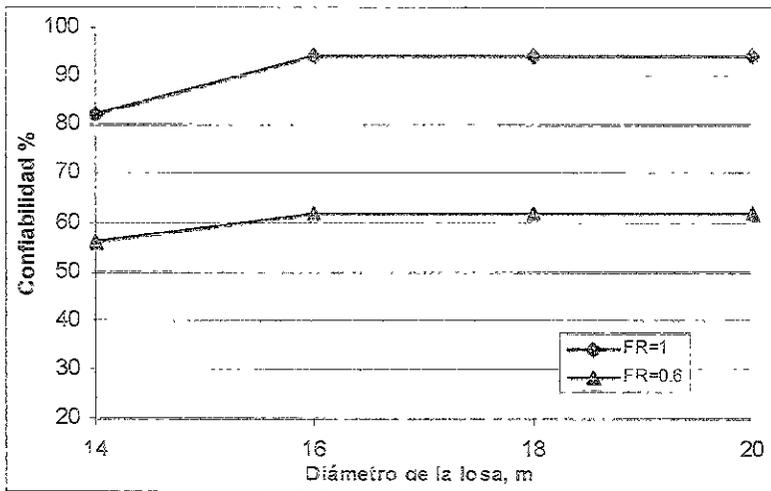


Fig. 4.19 Confiabilidad del sistema, con diámetro de losa variable y con 32.5m de prof. de hincado.

Una vez estudiada y evaluada la confiabilidad del sistema de la cimentación del tanque de almacenamiento, con las diferentes variables aleatorias y de control, puede concluirse que es conveniente lo siguiente:

1. Incrementar la sección del pilote de 14" (35 cm) a 24" (60 cm)
2. Conservar el número de pilotes en 50 piezas
3. Aumentar el diámetro de la losa de cimentación a 16m
4. Aumentar la profundidad de hincado a 32.5m

Con estas modificaciones y cumpliendo el  $F_R$  de la Norma de 0.6, se tiene una confiabilidad del 95.3% y para el  $F_R$  de 1, ésta alcanza 99.3% para el sistema que integran las funciones de comportamiento de la cimentación del tanque. Estas confiabilidades son probablemente ampliamente suficientes si se toma en cuenta que las cargas han sido afectadas por un factor de carga importante.

Se observa en esta forma como el análisis de confiabilidad va guiando al diseñador hacia un diseño más seguro.

# Conclusiones

En esta tesis se presentó una revisión de los diferentes tipos de tanques de almacenamiento que se utilizan comúnmente en México y de los tipos de cimentaciones empleados para estas estructuras. Se revisó asimismo la Norma PEMEX 2.115.01 que sirve como base para la revisión de cimentaciones de tanques en caso de la industria petrolera mexicana. A continuación se examinaron los conceptos de confiabilidad aplicables a la ingeniería civil y los métodos existentes para su evaluación, como el método de Monte Carlo. Finalmente, mediante un ejemplo típico, se ilustró la forma en la que la teoría de la confiabilidad puede usarse para el diseño de cimentaciones de tanques más seguras. De este trabajo, se concluye lo siguiente:

- El diseño geotécnico de cimentaciones de tanques se realiza en un contexto de gran incertidumbre, debido principalmente a las incógnitas que afectan los valores de las propiedades del suelo a considerar en los modelos de comportamiento y en las ecuaciones de verificación propuestas por la Norma.
- La teoría de la confiabilidad, basada en conceptos probabilistas, ofrece un marco racional para tomar en cuenta esta incertidumbre.
- La aplicación de métodos probabilistas de análisis de confiabilidad permite introducir un grado mayor de realismo en la evaluación de la seguridad de estas obras.
- El desconocimiento de la teoría de la confiabilidad y la renuencia común entre los ingenieros para reconocer explícitamente las incertidumbres existentes, ha limitado hasta ahora su aceptación por lo que es necesario darle más difusión, mediante trabajos como el presentado en esta tesis.
- El método de simulación de Monte Carlo es una herramienta de convergencia lenta pero poderosa que puede aplicarse para el análisis estadístico de la incertidumbre en geotecnia. Es particularmente útil en problemas como el aquí analizado.

En el ejemplo de aplicación específico analizado en esta tesis se mostró que:

- Las variables de diseño en problemas de este tipo pueden dividirse en variables fácilmente controladas por el diseñador (variables de control) y en las que presentan un marcado carácter aleatorio (variables aleatorias).
- El diseño de una cimentación de tanque es un problema típico de concepción de sistema "en serie" con componentes aleatorios, en este caso: la capacidad de carga individual y de grupo de los pilotes y los asentamientos.
- La teoría de la confiabilidad permite evaluar la seguridad asociada a cada mecanismo de falla en forma separada y al sistema en su conjunto. Aplicando los conceptos de confiabilidad al sistema de la cimentación del tanque, se manifiesta que no solamente el asentamiento es un componente crítico sino que la capacidad de carga de un pilote individual también lo es, lo que la revisión determinista no permite percibir fácilmente.
- El modificar en forma sistemática las variables de control en un modelo de confiabilidad, permite al analista examinar diferentes condiciones que le dan una mejor idea de cual afecta más la confiabilidad. Se define en esta forma una metodología de diseño orientada a maximizar la confiabilidad de la obra.
- Al realizar este tipo de análisis se detectan las limitaciones existentes en las Normas en las que se pretende cubrir la incertidumbre a través de simples factores de reducción.

Capacidad de carga

Cohesión	$\mu =$	1.76
	$\sigma =$	0.5

$P_v =$	0.76 t/m <sup>2</sup>
$W =$	1756 t
$A_{tan} =$	154 m <sup>2</sup>
$A_f =$	33.55 m <sup>2</sup>
$N_c =$	8.5
$A_g =$	154 m <sup>2</sup>
$D_f =$	30 m
$n_{pil} =$	50
$P_g =$	44 m
$F_R =$	1

B.3 BLOQUE DE CÁLCULO

Asentamientos

En este bloque se calcula los asentamientos con la ecuación:

$$\delta_{tot} = \frac{C_c}{1+e_0} * H * \log_{10} \left( \frac{p_0 + \Delta p}{p_0} \right) \tag{B.2}$$

Los valores  $C_c$  se determinan para cada correlación en cada estrato definido para el modelo, utilizando las siguientes correlaciones:

$$C_c = 0.0115w \tag{B.3}$$

$$C_c = 0.009(LL - 10) \tag{B.4}$$

$$C_c = 1.15(e_0 + 0.35) \tag{B.5}$$

$$C_c = (1+e_0)[0.1+[w-25]0.006] \tag{B.6}$$

Los valores de  $e_0$  son los que se calcularon en bloque anterior y los valores de  $p_0$  y  $\Delta p$  son datos previamente estimados y se consideran constantes para cada estrato.

Formulas de $C_c$	P(x)	Profundidad					$\delta_{tot}$
		21.5 m	24.5 m	27.5 m	30.5 m	33.5 m	
0.009(LL-10%)	0.2	0.77	0.65	0.63	0.74	0.23	0.350
0.0115 w	0.5	0.92	0.71	0.75	0.77	0.37	0.408
1.15(e <sub>0</sub> -0.35)	0.2	1.94	1.42	1.52	1.56	0.54	0.811
(1+e <sub>0</sub> )[0.1+[w-25]0.006]	0.1	1.31	0.83	0.92	0.95	0.26	0.494

La distribución de probabilidades permite su modificación para estimar así el comportamiento del medio en diferentes escenarios.

Capacidades de carga

La capacidad de carga de un pilote individual se calcula con las ecuaciones:

$$q_{cmd} = F_R A_i f \tag{B.7}$$

$$\frac{W}{n_{pil}} \leq F_R A_i f \tag{B.8}$$

$W/A_d$	$F_R \cdot A_i \cdot f$	$0 = W/A_{tan} - 0.6 A_i f$	
35.120	57.542	-22.422	1
35.120	53.999	-18.879	1
35.120	67.532	-32.412	1
35.120	69.094	-33.974	1

Al mismo tiempo se estima la capacidad de carga por el grupo de pilotes con las expresiones:

$$Q_{gru} = [(cN_c - p_v)A_g + D_f P_g f] F_R + p_v A_g \tag{B.9}$$

$$W \leq [(cN_c - p_v)A_g + D_f P_g f] F_R + p_v A_g \tag{B.10}$$

W	$[(cN_c - p_v)A_g + D_f P_g f] F_R + p_v A_g$	$0 = W - captot$	
1756	4629.107	-2873.107	1
1756	5759.564	-4003.564	1
1756	6869.238	-5113.238	1
1756	4753.006	-2997.006	1

B.4 BLOQUE DE CÁLCULO DE PROPIEDADES PROBABILÍSTICAS

En este bloque, la hoja de cálculo Cramp.xls determina el valor esperado de los  $C_i$  en cada estrato y el valor esperado del asentamiento. De igual manera la varianza  $\sigma^2$ , la desviación estándar  $\sigma$  y las covarianzas  $\sigma_{ij}$ .

$E(C_c) =$	1.13	0.85	0.90	0.94	0.36	0.49
$\sigma^2 =$	0.184186	0.081568	0.101824	0.099989	0.010904	
$\sigma =$	0.429168	0.285600	0.319099	0.316210	0.104424	
$\sigma_{aa} =$	0.184186					
$\sigma_{bb} =$		0.081568				
$\sigma_{cc} =$			0.101824			
$\sigma_{dd} =$				0.099989		
$\sigma_{ee} =$					0.010904	

En la matriz de coeficientes de correlaciones se introducen los valores que estos coeficientes tendrán para evaluar el modelo y posteriormente en la matriz de covarianzas se calculan sus valores que a su vez, utilizando el método de Cholesky, se determine la matriz normalizada de desviación estándar y el vector normalizado de valores esperados de  $C_c$ .

Matriz de coeficientes de correlación

	$C_{c21.5}$	$C_{c24.5}$	$C_{c27.5}$	$C_{c30.5}$	$C_{c33.5}$
$C_{c21.5}$	1	0.90	0.90	0.90	0.90
$C_{c24.5}$	0.90	1	0.90	0.90	0.90
$C_{c27.5}$	0.90	0.90	1	0.90	0.90
$C_{c30.5}$	0.90	0.90	0.90	1	0.90
$C_{c33.5}$	0.90	0.90	0.90	0.90	1

Matriz de covarianzas

	$C_{c21.5}$	$C_{c24.5}$	$C_{c27.5}$	$C_{c30.5}$	$C_{c33.5}$
$C_{c21.5}$	0.184186	0.110314	0.123253	0.122137	0.040334
$C_{c24.5}$	0.110314	0.081568	0.082021	0.081279	0.026841
$C_{c27.5}$	0.123253	0.082021	0.101824	0.090812	0.029989
$C_{c30.5}$	0.122137	0.081279	0.090812	0.099989	0.029718
$C_{c33.5}$	0.040334	0.026841	0.029989	0.029718	0.010904

Vector normal de  $E(C_c)$

Matriz normal de  $\sigma$

	1.1324	0.42917	0	0	0	0
	0.1741	0	0.12449	0	0	0
$UW =$	0.0479	0	0	0.12250	0	0
	0.0831	0	0	0	0.11495	0
	0.0721	0	0	0	0	0.03682

### B.3 BLOQUE DE CONFIABILIDAD

En este último bloque, se calculan los valores del  $W$  que son obtenidos por muestreo de números aleatorios entre 0 y 1 para posteriormente determinar el  $C_c$ .



# B

## Método de descomposición de Cholesky para generación de variables aleatorias normales correlacionadas

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un conjunto de variables aleatorias correlacionadas que tienen una distribución normal. Su función de densidad de probabilidad conjunta está definida a través de la media, varianza y covarianza de las variables aleatorias. Asígnese que la medias  $\mu_{x_i}$ , varianzas  $\sigma^2_{x_i} = \sigma^2_{x_i}$  y covarianzas  $\sigma_{ij} = \sigma_{x_i x_j}$  de las variables  $X_i$  son conocidas; esto es, el vector de los valores medios

$$\mu_x = \begin{bmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \vdots \\ \mu_{x_n} \end{bmatrix} \tag{C.1}$$

Y la matriz de covarianza

$$[V] = \begin{bmatrix} \sigma^2_1 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma^2_2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma^2_n \end{bmatrix} \tag{C.2}$$

son conocidas. Para generar el conjunto requerido de números aleatorios correlacionados normalmente distribuidos  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ , primero se debe generar un conjunto de  $n$  números aleatorios independientes normalmente distribuidos  $W_i, i = 1, 2, \dots, n$ , cuyos valores medios y varianzas,  $\mu_{w_i}$  y  $\sigma^2_{w_i}$  respectivamente, son desconocidas por el momento. Las variables aleatorias correlacionadas deseadas  $X_i$  pueden ser expresadas como una función lineal de las variables aleatorias independientes (Arias, 1997), es decir

$$\begin{aligned} X_i &= a_{i1}W_1 + a_{i2}W_2 + \dots + a_{in}W_n \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}W_j; i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{C.3}$$

en la forma matricial

$$X_{i,j} = [a]_{i,j} [W]_{i,j} \tag{C.2}$$

donde los elementos de la matriz  $[a]$  tampoco son conocidos por el momento. Dado que la variable aleatoria  $X_i$  está expresada como una función lineal de  $W_i$ , entonces las medias y desviaciones estándar de  $X_i$  pueden ser expresadas como

$$\mu_x = [a] \mu_w \tag{C.3}$$

y

$$[V_x] = [a] [V_w] [a]^T \tag{C.6}$$

Donde  $\mu_x$  y  $\mu_w$  son los vectores de valores medios de  $X_i$  y  $W_i$ , y  $[V_x]$  y  $[V_w]$  son las matrices de covarianza de  $X_i$  y  $W_i$ , respectivamente. En las ecuaciones C.3 y C.6 el vector  $\mu_x$  y la matriz  $[V_x]$  se conocen a partir de las características de las variables aleatorias por generar, y el vector  $\mu_w$  y las matrices  $[a]$  y  $[V_w]$  deben ser determinadas. El método de descomposición de Cholesky (Arias, 1997) puede ser empleado para este propósito.

Este método implica la descomposición de una matriz simétrica  $[S]$  de orden  $n \times n$  en el siguiente producto de matrices

$$[S] = [L][D][L]^T \tag{C.7}$$

donde  $[L]$  es una matriz triangular inferior de orden  $n \times n$  que contiene unos en la diagonal principal y  $[D]$  es una matriz diagonal de orden  $n \times n$ . Los elementos de  $[L]$  y  $[D]$  (Arias, 1997) están dados por

$$D_{ii} = S_{ii}$$

$$L_{ij} = 1; i = j, 2, \dots, n$$

$$L_{ij} = S_{ij} / D_{jj}; j \geq 2 \tag{C.8}$$

$$D_{ii} = S_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2 D_{jj}; i \geq 2$$

$$L_{ij} = 1/D_{jj} [S_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} D_{kk}]; i \geq 2; j \geq i+1$$

Comparando las ecuaciones C.6 y C.7 es posible establecer que

$$[b] = [V]x \quad (C.9)$$

$$[a] = [c] \quad (C.10)$$

$$[V]^{-1} = [D] \quad (C.11)$$

A partir de las ecuaciones C.8 y C.10 es posible conocer los elementos  $a_i$  y, por lo tanto, la relación lineal entre  $X_i$  y  $W_i$ , es completamente conocida. De forma similar las ecuaciones C.8 y C.11 definen las varianzas de  $W_i$ . Más aún, debido a que la matriz de covarianza  $[V]^{-1} = [D]$  es diagonal, se asegura que las variables aleatorias  $W_i$  no estén correlacionadas. Finalmente, los valores medios de  $W_i$  pueden determinarse a partir de la ecuación C.5 como

$$\mu_{w_i} = [a] + \mu_x \quad (C.12)$$

Se puede observar que las variables aleatorias  $X_i$  son normalmente distribuidas dado que se obtienen a partir de una combinación lineal de variables aleatorias normales  $W_i$ .

# Referencias

- ABC (1995), "Estudio del subsuelo para el diseño de la cimentación de la Batería Sur provisional y la obra de toma de agua, que se construirán en el L/c. Gloriatlan, Ayotlán, De Nacajaco, Tab.", Marzo.
- API Standard 650 (1998), "Appendix B, recommendations for design and construction of foundation for aboveground oil storage tanks", tenth edition, November.
- Ang, A. y Linn, M. (1968), "Reliability of structures and structural systems", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM", April, pp. 671-691, Estados Unidos.
- Ang, A. y Cornell, C. (1974), "Reliability bases of structural safety and design", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST9, septiembre, pp. 1755-1769, Estados Unidos.
- Ang, A. y Tang, W. (1975), "Probability concepts in engineering planning and design", Vol. 1-Basic principles, John Wiley & Sons, New York, Estados Unidos.
- Ang, A. y Tang, W. (1984), "Probability concepts in engineering planning and design", Vol. 2-Decision, risk and reliability, John Wiley & Sons, New York, Estados Unidos.
- Arias, Francisco (1997), "Confiabilidad en trincheras estabilizadas con lodo", DEPE UNAM, México.
- Auvinet, G. y Rossa, O. (1991), "Reliability of foundations on soft soils", Proc. CERRA-ICASP6, Vol. 2, Mexico City, pp. 768-775, México.
- Juárez Badillo y Rico Rodríguez (1986), Mecánica de Suelos, Tomo II, Limusa pp 25-54, México
- Fessler, B., Neumann, H-J. y Rackwitz, R. (1979), "Quadratic limit states in structural reliability", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 105, No. EM4, August, pp. 661-676, Estados Unidos.
- Freudenthal, A. (1956), "Safety and the probability of structural failure", ASCE transactions, Vol. 121, pp. 1387-1397, Estados Unidos.

- Hart, G. C. (1982), *"Uncertainty analysis, loads and safety in structural engineering"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, Estados Unidos.
- Hasofer, A. M. (1974), *"Reliability index and failure probability"*, Journal of Structural Mechanics, Vol. 3, No. 1, pp. 25-27, Estados Unidos.
- Hasofer, A. M. y Lind, N. C. (1971), *"Exact and invariant second-moment code format"*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 100, No. EM1, febrero, pp. 11-121, Estados Unidos.
- IMF (1998), *"Estudio de mecánica de suelos en la Bateria de Separación San. ubicada en Oxiacaque, municipio Nacajuca, Tabasco"*, Abril, México
- IMF (1988), *"Diseño y análisis de recipientes a presión"*, México
- Jaeger, J. (1956), *"Elasticity, fracture and flow with engineering and geological application"*, John Wiley and Sons, Inc., Estados Unidos.
- Kapur, K. C. y Lamberson, L. R. (1977), *"Reliability in engineering design"*, John Wiley & Sons, New York, Estados Unidos.
- NAVFAC DM 7.1-7.2, May 1982, *"Soil Mechanics, Design Manual 7.1-7.2"*, Department of the Navy, Naval Facilities Engineering Command, Alexandria, Va
- Normas para proyectos de obras (1974), *"Cimentación de tarcaes"* norma 2.115.01, México
- Rao, S. (1992), *"Reliability-based design"*, McGraw-Hill Inc., Estados Unidos.
- Rosenblueth, E. y Esteve, L. (1971), *"Reliability basis for some mexican codes"*, American Concrete Institute Publications SP-31, 1971, Estados Unidos.
- Rosenblueth, E. (1975), *"Point estimates for probability moments"*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 72(10), pp. 1511-1524, Estados Unidos.
- Rubinstein, R. Y. (1981), *"Simulation and the Monte Carlo Method"*, John Wiley and Sons, New York, Estados Unidos.
- Rubinstein, R. (1981), *"Simulation and the Monte Carlo method"*, John Wiley and Sons, New York, Estados Unidos.
- Shinozuka, M. (1983), *"Basic analysis of structural safety"*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 3, No. 109, Estados Unidos.

Shooman, M. L. (1968), "Probabilistic reliability: an engineering approach", McGraw-Hill, New York, Estados Unidos.

Singer, P. y Kyle, A. (1980), "Strength of materials", Harper and Row Publishers Inc., Estados Unidos.

Winterkorn, Hans F. y Fang, Hsai-Yang (1975), "Foundation Engineering Handbook", Van Nostrand Reinhold Company, Estados Unidos