UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESPACIOS DE BERGMAN DE FUNCIONES DE TEMPERATURA EN UN CILINDRO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

FRANCISCO MARCOS LOPEZ GARCIA

DIRECTOR DE TESIS: DR. SALVADOR PEREZ ESTEVA

MEXICO, D. F. 2001

Dedico el presente trabajo

A mi madre Angelina García Carreón.

A mis hermanos Sagrario.
Alejandra.
Hortencia.
Luis

A mi novia Claudia Campos S.

Gracias por su apoyo.

Agradecimientos

Con este trabajo quiero reiterar mi amor y admiración a mi madre, una persona sencilla y trabajadora. En toda su vida no ha cesado un instante en su labor de sacarnos adelante, a pesar de las adversidades.

A mis hermanos Sagrario, Alejandra, Hortencia y Luis, les agradezco la comprensión, el cariño y el apoyo incondicional a mis proyectos Son unas personas conscientes, honradas y trabajadoras. Los quiero mucho y serán siempre parte importante de mi existencia.

Lo que he alcanzado no debe verse como un logro personal, soy el reflejo de la actitud ante la vida de mi madre y mis hermanos

A mi novia Claudia que me ha dado su cariño, amor y comprensión Solo puedo decir que la quiero mucho . .

A Ana Irene Ramírez Galarza, quien fue fundamental para que haya estudiado el posgrado en la Universidad. Siempre me ha apoyado decididamente, le tengo un especial cariño y una gran estima. Ojalá hubiera mas personas como ella

A Salvador Pérez Esteva que es un excelente asesor y tutor. Es una persona afable y muy accesible

A los sinodales que leyeron la tesis y que hicieron importantes observaciones, en especial le agradezco a Salvador Pérez Esteva, Lucero de Teresa, Magali Folch y Guillermo Grabinsky

A la Universidad Nacional Autónoma de México que me acogió en su seno y me transmitió sus conocimientos sin limitación alguna. Mi compromiso será ahora realzar el nombre de la Universidad, tomar la estafeta y formar a generaciones venideras

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) que me apoyó con una beca económica completa durante cinco años para estudiar la maestría y el doctorado. A la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP) que me apoyó con una beca complementaria durante tres años y una beca completa de seis meses para mi trabajo de investigación en el doctorado.

A la vida, que a pesar de todos sus intrincados vericuetos (en los cuales mas de una ocasión me pude haber extraviado) siempre me dio opciones y oportunidades.

Abstract

In this work I defined Bergman p-Spaces of temperature functions on a finite cylinder Q consisting of functions in weighted Lp spaces on Q, that satisfy the heat equation there.

For weight functions w consisting of a powers (greater than −1) of the distance to the base of the cylinder, I proved that these spaces are Banach spaces for every p greater than one.

When w is the constant 1, I calculated the reproducing kernel N for the Bergman 2-space. The function N is the kernel function of the Bergman Projection P, which by definition is the orthogonal projection of L2 onto the corresponding Bergman 2-Space.

I constructed a family of integral operators P_alpha with kernels N_alpha, which are well defined for every bounded measurable function and leave fixed all the bounded temperature functions. Given a weight function w in the cylinder as above, it is proved that there exists a range of values of alpha and p for which these operators can be extended as continuous projections of the weighted Lp spaces onto the corresponding Bergman spaces. When alpha is zero, P_alpha coincides with Bergman Projection P. I calculated the transpose operator of P_alpha.

For p greater than one, it is proved that the dual space of each of these Bergman p-Spaces can be represented as a Bergman q-Space (with possibly a different weight), and where q is the conjugate exponent of p.

The main result is the construction of an atomic decomposition of the Bergman p-Space, which describes each one of its elements as a infinite linear combination of "atoms" which are basic functions in the space defined in terms of the reproducing kernel N.

Índice General

Introducción

Los **Espacios de Bergman** fueron definidos originalmente como espacios de funciones holomorfas $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $f \in L^p(\Omega)$, siendo Ω abierto.

Estos espacios han sido ampliamente estudiados durante muchos años, incluyendo su generalización a varias variables complejas, así como los correspondientes espacios de funciones armónicas. La literatura sobre el tema es extensa y se puede revisar en [3], [5], [9], [10], [17], [21] y [22].

En el presente trabajo se define el **Espacio de Bergman** $b^p_W(\Omega)$ de funciones de temperatura en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2_+$, con $1 \leq p < \infty$. Es decir, trabajamos en el espacio de funciones $u : \Omega \to \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación del calor en Ω y tales que $u \in L^p(W dx dt)$, donde $W : \Omega \to \mathbb{R}_+$ es un peso.

En el Capítulo 2 se prueba que el Espacio de Bergman $b^p_W(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p < \infty$. La prueba de lo anterior se basa fuertemente en el siguiente Lema probado por Martha Guzmán-Partida, (Ver [14])

Lema *Sea $R = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2_+$ un rectángulo tal que $d - c = (b - a)^2$. Sea u una función de temperatura en R y continua en $\overline{R}$. Si (x_0, t_0) es el punto medio de la frontera superior de R, entonces*

$$|u(x_0, t_0)|^p \leq C_p \frac{1}{|R|} \iint_R |u(x, t)|^p \, dx dt,$$

donde $|R|$ es el área de R, $0 < p < \infty$ y C_p es una constante que sólo depende de p.

Usando el mismo Lema se prueba que el funcional lineal $\mathcal{F}_z : b^p_W(\Omega) \to \mathbb{C}$ definido por $\mathcal{F}_z(u) = u(z)$ es acotado para todo $z \in \Omega$.

Del hecho de que $b^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{F}_z$ es un funcional lineal acotado en $b^2(\Omega)$ se sigue la existencia de **un núcleo reproductor** de $b^2(\Omega)$. Esto es, existe una función $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ que satisface la ecuación del calor en cada variable y tal que si $u \in L^2(\Omega)$ entonces

$$u(z) = \int_{\Omega} N(z,w)\,u(w)\,dw \quad \text{si y sólo si} \quad u \in b^2(\Omega)$$

Además, si (u_n) es una base ortonormal de $b^2(\Omega)$ entonces

$$N(z,w) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\,\overline{u_n(w)} \quad \text{para todo } z, w \in \Omega.$$

En adelante hacemos $z = (x,t)$, $w = (y,\tau)$, $dz = dxdt$ y $dw = dyd\tau$.

El objeto central de nuestro estudio es el **Espacio de Bergman**

$$b_W^p(S_T) = \left\{ u \in H(S_T) : \int_{\Omega_T} |u(z)|^p\, W(z)\,dz < \infty \right\} \text{ donde } 1 \leq p < \infty.$$

y $H(S_T)$ es el espacio de las funciones de temperatura en el cilindro $S_T = S^1 \times (0,T)$; además $\Omega_T = [0,2] \times (0,T)$

En $b_W^p(S_T)$ definimos la siguiente norma

$$\|u\|_{b_W^p(S_T)} = \left(\int_{\Omega_T} |u(z)|^p\, W(z)\,dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

Como antes, el Espacio de Bergman $b_W^p(S_T)$ resulta ser un espacio de Banach para todo $1 \leq p < \infty$.

En la Sección (2.2) se prueba que la sucesión $\left(e^{-\pi^2 n^2 t + \pi n i x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortogonal de $b^2(S_T)$. Por lo tanto, la función $N : \Omega_T \times \Omega_T \to \mathbb{R}$ dada por

$$N(z,w) = \frac{1}{2T} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{\pi^2 n^2}{\gamma(1, 2\pi^2 n^2 T)} e^{-\pi^2 n^2 (t+\tau) + \pi n i (x-y)}$$

es un núcleo reproductor de $b^2(S_T)$, donde

$$\gamma(\alpha, z) = \int_0^z t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt \quad \text{si } \alpha, z > 0.$$

Debido a que $b^2(S_T)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega_T)$ existe una única proyección ortogonal $P : L^2(\Omega_T) \to b^2(S_T)$ llamada la **Proyección de Bergman,** que satisface

$$Pu(z) = \int_{\Omega_T} N(z,w)\,u(w)\,dw$$

para todo $z \in \Omega_T$ y para todo $u \in L^2(\Omega_T)$

Sea $L^p_\beta(\Omega_T) = L^p\left(t^\beta dxdt\right)$. En este trabajo extendemos la definición del operador P al espacio $L^p_\beta(\Omega_T)$ para todo $p > 1$ y $\beta > -1$ Estudiamos bajo que condiciones la proyección

$$P : L^p_\beta(\Omega_T) \to b^p_\beta(S_T)$$

es continua.

De hecho, obtenemos un resultado más general En la sección (2 3) construimos una familia de operadores $P_\alpha : L^p_\beta(\Omega_T) \to b^p_\beta(S_T)$ que son proyecciones sobre $b^p_\beta(S_T)$ y se definen como

$$P_\alpha u(z) = \int\limits_{\Omega_T} N_\alpha(z, w)\, u(w)\, \tau^\alpha dw,$$

donde

$$N_\alpha(z, w) = \frac{1+\alpha}{2T^{1+\alpha}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{2^\alpha \pi^{2(1-\alpha)} n^{2(1+\alpha)}}{\gamma(1+\alpha, 2\pi^2 n^2 T)} e^{-\pi^2 n^2 (t-\tau) + \pi n i (x-y)}.$$

Cuando $\alpha = 0$, P_α coincide con la Proyección de Bergman.

El resultado principal de esta sección es el siguiente

Teorema *Sean $\alpha, \beta > -1$ Si $p > \max\left(1, \frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)$ el operador $P_\alpha : L^p_\beta(\Omega_T) \to b^p_\beta(S_T)$ dado por*

$$P_\alpha u(z) = \int\limits_{\Omega_T} N_\alpha(z, w)\, u(w)\, \tau^\alpha dw \quad z \in \Omega_T$$

es acotado

Haciendo $\alpha = \beta = 0$ en el Teorema anterior tenemos el siguiente

Corolario *La Proyección de Bergman $P : L^p(\Omega_T) \to b^p(S_T)$ es un operador acotado para todo $p > 1$.*

En el Capítulo 3 se prueba que $\left(b^p_\beta(S_T)\right)^* = b^q_{(\alpha - \frac{\beta}{p})q}(S_T)$ bajo la dualidad

$$\langle u, v\rangle_\alpha = \int\limits_{\Omega_T} u\, \overline{v}\, t^\alpha dx dt$$

donde $u \in b^p_\beta(S_T)$, $v \in b^q_{(\alpha - \frac{\beta}{p})q}(S_T)$ y q es el exponente conjugado de p.

Usando la continuidad de los operadores transpuestos P_α^* probamos que existen constantes $C_{p,n}, C_{p,d} > 0$ tal que

$$\left\| t^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|_{L^p(\Omega_T)} \leq C_{p,n} \|u\|_{b^p(S_T)},$$

y

$$\left\| t^{d} \frac{\partial^d u}{\partial t^d} \right\|_{L^p(\Omega_T)} \leq C_{p,d} \|u\|_{b^p(S_T)},$$

para todo $u \in b^p(S_T)$, con $p > 1$.

En el Capítulo 4 construimos una **descomposición atómica de** $b^p(S_T)$ para todo $p > 1$. Esto puede ser considerado como una extensión a los Espacios de Bergman de la teoría atómica de los espacios de Hardy.

La construcción de nuestra descomposición está basada en las ideas de Coifman y Rochberg sobre la descomposición atómica del Espacio de Bergman de funciones holomorfas definidas en regiones simétricas (Ver [9]). Una exposición sencilla de la descomposición atómica para el espacio de funciones holomorfas definidas en el disco se puede encontrar en el libro de Kehe Zhu (Ver [17])

El resultado es como sigue.

Teorema *Sea $p > 1$ y q su correspondiente exponente conjugado. Existen una sucesión $\{w_m = (x_m, t_m)\} \subset \Omega_T$ y una constante $C_p > 0$ con las siguientes propiedades:*

(1) *Para cualquier $\{a_m\} \in \ell^p$, la función*

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t_m^{\frac{3}{2q}} N(z, w_m)$$

está en $b^p(S_T)$ con

$$\|u\|_{b^p(S_T)} \leq C_p \|\{a_m\}\|_{\ell^p};$$

(2) *Si $u \in b^p(S_T)$, entonces existe una sucesión $\{a_m\} \in \ell^p$ tal que*

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t_m^{\frac{3}{2q}} N(z, w_m)$$

y

$$\|\{a_m\}\|_{\ell^p} \leq C_p \|u\|_{b^p(S_T)}.$$

Capítulo 1

Notación y resultados preliminares.

En este trabajo se usará la siguiente notación

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t) : x,t \in \mathbb{R} \text{ y } t > 0\}.$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2_+$ es un conjunto abierto definimos

$$H(\Omega) = \left\{ u \in C^2(\Omega) : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ en } \Omega \right\}.$$

si $u \in H(\Omega)$ entonces decimos que u es una función de temperatura en Ω. Claramente $H(\Omega)$ es un espacio vectorial de funciones sobre $\mathbb{C}$.

En adelante, si $1 < p < \infty$ entonces q denotará su correspondiente exponente conjugado, es decir se cumple $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

La letra C denotará una constante genérica que puede ser distinta en cada aparición; en caso de que dependa de algunos parámetros estos se escribirán como subíndices.

Para reducir la notación en ocasiones haremos $z = (x,t)$, $w = (y,\tau)$, $dz = dxdt$ y $dw = dyd\tau$. Consideremos además los conjuntos $S^1 = \left\{ e^{\pi i \theta} : \theta \in [0,2] \right\}$ y $\mathbb{Z}^* = \{ n \in \mathbb{Z} : n \neq 0 \}$.

Si $u \in L^1(\mathbb{R})$ definimos su transformada de Fourier como

$$(\mathcal{F} u)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

1.1 Las funciones K, θ y φ.

A lo largo de este trabajo la función

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+$$

denotará la solución fundamental de la ecuación del calor; a esta función se le conoce también como el núcleo de Gauss y tiene la siguiente propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dx = 1 \quad \text{para todo } t > 0. \tag{1.1}$$

Definimos la función teta como sigue (Ver [7])

$$\theta(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} K(x+2n,t) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2 t + \pi n i x}, \quad t > 0, \ -\infty < x < \infty. \tag{1.2}$$

Tenemos

$$\int_0^2 \theta(x,t)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^2 K(x+2n,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dx = 1, \text{ para todo } t > 0. \tag{1.3}$$

Usando la desigualdad

$$e^{-x} \leq C_\beta x^{-\beta}$$

si $\beta, x > 0$, se sigue que la serie en (1.2) converge uniformemente en $\mathbb{R}\times A$ con $A \subset \mathbb{R}_+$ compacto (de hecho cualquier derivada de la serie tiene la misma propiedad). Se tiene entonces que la función $\theta(x,t)$ es una función de temperatura en $\mathbb{R}^2_+$, 2-periódica en la variable x y positiva. Análogamente se ve que la función

$$\begin{aligned} \varphi(x,t) &= -2\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t) \qquad (1.4) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{x+2n}{t} K(x+2n,t) \end{aligned}$$

tiene las mismas propiedades de convergencia que la función $\theta(x,t)$.

En [8] Cannon y Pérez-Esteva prueban la siguiente desigualdad:

$$\theta(x,t) \leq C\{1+t\} K(x,t), \quad \text{si } -1 < x < 1.$$

con $C > 0$ una constante. En particular si $0 < t \leq T < \infty$, entonces existe una constante $C_T > 0$ tal que

$$\theta(x,t) \leq C_T K(x,t), \quad \text{si } -1 < x < 1. \tag{1.5}$$

Esto último implica el siguiente resultado

Lema 1.1 *Si $p > 0$ entonces*

$$\int_0^2 |\theta(x-y,t)|^p\, dy \le C_{T,p}\, t^{\frac{1-p}{2}},$$

para todo $(x,t) \in (0,2) \times (0,T)$.

Prueba. Por (1.5) y el hecho de que la función $\theta(x,t)$ es 2-periódica en la variable x, tenemos que si $1 < x-y < 2$, entonces

$$\theta(x-y,t) = \theta(x-y-2,t) \le C_T\, K(x-y-2,t).$$

De manera análoga tenemos que si $-2 < x-y < -1$ entonces

$$\theta(x-y,t) = \theta(x-y+2,t) \le C_T\, K(x-y+2,t).$$

De lo anterior tenemos

$$\theta(x-y,t) \le \begin{cases} C_T\, K(x-y+2,t) & \text{si } -2 < x-y < -1, \\ C_T\, K(x-y,t) & \text{si } -1 < x-y < 1, \\ C_T\, K(x-y-2,t) & \text{si } 1 < x-y < 2. \end{cases} \tag{1.6}$$

Usando (1.1), la siguiente propiedad de la función $K(x,t)$

$$K(x,t)^p = \frac{1}{\sqrt{p}\,(4\pi t)^{\frac{p-1}{2}}} K(x,\frac{t}{p})$$

y la desigualdad (1.6) tenemos

$$\int_0^2 |\theta(x-y,t)|^p\, dy \le \frac{C_{T,p}}{(4\pi t)^{\frac{p-1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ K(x-y+2,\frac{t}{p}) + K(x-y,\frac{t}{p}) + K(x-y-2,\frac{t}{p}) \right\} dy$$

$$\le \frac{C_{T,p}}{t^{\frac{p-1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} K(y,\frac{t}{p})\, dy \le C_{T,p}\, t^{\frac{1-p}{2}}$$

■

Ahora extendemos las funciones K, θ y φ como cero cuando $t \le 0$.

Sea

[illegible]

el cuadrado abierto unitario y

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

la frontera parabólica de Q, donde

$$\Gamma_1 = \{0\} \times [0,1)\,,\ \Gamma_2 = \{1\} \times [0,1)\,,\ \Gamma_3 = (0,1) \times \{0\}\,.$$

Sea λ la medida de Lebesgue unidimensional en Γ.

Consideremos los núcleos K_i en Γ_i, $i = 1, 2, 3$, dados como sigue

$$\begin{aligned}
&K_1\left(x, t; 0, \tau\right) = \varphi\left(x, t-\tau\right), && 0 \leq \tau < 1, \\
&K_2\left(x, t; 1, \tau\right) = \varphi\left(1-x, t-\tau\right), && 0 \leq \tau < 1, \\
&K_3\left(x, t; \xi, 0\right) = \theta\left(x-\xi, t\right) - \theta\left(x+\xi, t\right), && 0 < \xi < 1,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

y el núcleo del calor $\widetilde{K}\left(x, t; \xi, \tau\right)$ definido sobre $Q \times \Gamma$ como sigue

$$\widetilde{K}\left(x, t; \xi, \tau\right) = \begin{cases} K_1\left(x, t; 0, \tau\right) & \xi = 0,\ 0 \leq \tau < 1, \\ K_2\left(x, t; 1, \tau\right) & \xi = 1,\ 0 \leq \tau < 1, \\ K_3\left(x, t; \xi, 0\right) & \tau = 0,\ 0 < \xi < 1, \end{cases} \tag{1.8}$$

Toda función de temperatura en Q que es continua en $\overline{Q}$ puede ser escrita como sigue (ver [7])

$$u(x,t) = \int_\Gamma \widetilde{K}\left(x, t; \xi, \tau\right) u\left(\xi, \tau\right)\, d\lambda\left(\xi, \tau\right), \text{ para todo } (x,t) \in Q. \tag{1.9}$$

Recíprocamente, si v es una función continua en la frontera parabólica Γ entonces

$$u(x,t) = \int_\Gamma \widetilde{K}\left(x, t; \xi, \tau\right) v\left(\xi, \tau\right)\, d\lambda\left(\xi, \tau\right) \tag{1.10}$$

es una función de temperatura en Q.

Comentario 1.2 *Si $\widetilde{K}$ es la función definida en (1.8), entonces $\widetilde{K}\left(x, t; \cdot\right) \in L^1\left(\Gamma, d\lambda\right)$ para todo $(x,t) \in Q$. Esto se sigue de hacer $v \equiv 1$ en (1.10).*

Consideremos un rectángulo

$$R = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2_+$$

tal que $d - c = (b - a)^2$ Sea $u \in H(R) \bigcap C\left(\overline{R}\right)$, entonces $u \circ \Psi \in H(Q) \bigcap C\left(\overline{Q}\right)$, donde el mapeo Ψ $Q \to R$ está definido como

$$\Psi(\xi, \tau) = ((b - a)\xi + a, (d - c)\tau + c)$$

Usando la representación en (1.9) tenemos que

$$u(x, t) = \int_{\Gamma_R} \widetilde{K}\left(\Psi^{-1}(x, t); \Psi^{-1}(\xi, \tau)\right) u(\xi, \tau)\, d\lambda_R(\xi, \tau), \text{ para todo } (x, t) \in R. \qquad (1.11)$$

donde $\Gamma_R = \Psi(\Gamma) = \Psi(\Gamma_1) \bigcup \Psi(\Gamma_2) \bigcup \Psi(\Gamma_3)$ y λ_R es la medida de Lebesgue unidimensional normalizada sobre cada segmento de Γ_R. (ver [7]).

Otro resultado básico para nuestro trabajo es el siguiente: (Ver [27])

Teorema 1.3 *Sea $f(x) \in C(\mathbb{R})$, $f(x) = f(x + 2)$ Entonces*

1 $u(x, t) \in H\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ *y* $u(x, t) = u(x + 2, t)$, $t > 0$.

2 $\lim_{t \to 0} u(x, t) = f(x)$ *uniformemente en* $0 \leq x \leq 2$

si y sólo si

$$u(x, t) = \int_0^2 \theta(x - y, t) f(y)\, dy$$

Lema 1.4 *De la condición 2 y del hecho de que la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ se sigue la continuidad de u en $t = 0$.*

Prueba. Sea $x_0 \in [0, 2]$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &< \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } |x - x_0| < \delta, \\ |u(x, t) - f(x)| &< \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } 0 < t < \delta \text{ para todo } x \in [0, 2]. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$|u(x, t) - f(x_0)| \leq |u(x, t) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

si $(x-x_0)^2+t^2<\delta$. ■

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^2 \theta(x-y,t)f(y)\,dy \qquad (1.12) \\ &= \int_0^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} K(x-y+2n,t)f(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)f(y)\,dy = (K(\cdot,t)*f)(x) \end{aligned}$$

Por la desigualdad integral de Minkowski se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^2 |u(x,t)|^p\,dx &= \int_0^2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} K(y,t)f(x-y)\,dy\right|^p dx \\ &\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^2 |f(x-y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} K(y,t)dy\right)^p \\ &= \|f\|^p_{L^p(S^1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(S^1)} \le \|f\|_{L^p(S^1)} \quad \text{para todo } t>0. \qquad (1.13)$$

Corolario 1.5 *Si $u\in H(\mathbb{R}\times[0,T])$ y $u(x,t)=u(x+2,t)$ para todo $t\ge 0$, entonces*

$$u(x,t)=\int_0^2 \theta(x-y,t)u(y,0)dy.$$

El siguiente resultado probado por Martha Guzmán-Partida en [14], será útil en nuestro trabajo,

Lema 1.6 *Sea $R=(a,b)\times(c,d)\subset\mathbb{R}^2_+$ un rectángulo tal que $d-c=(b-a)^2$. Sea u una función de temperatura en R y continua en $\overline{R}$. Si (x_0,t_0) es el punto medio de la frontera superior de R, entonces*

$$|u(x_0,t_0)|^p \le \frac{C_p}{|R|}\iint_R |u(x,t)|^p\,dxdt,$$

donde $|R|$ es el área de R, $0<p<\infty$ y C_p es una constante que sólo depende de p.

1.2 El Lema de Schur.

A continuación probamos una variante del Lema de Schur (ver [28]). Este resultado nos proporciona una condición suficiente para el acotamiento de un operador integral T definido en $L^p(\Omega, d\mu)$, $1 < p < \infty$.

Lema 1.7 *Sea $1 < p < \infty$. Sea (Ω, μ) un espacio de medida, $N : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ medible y G una función medible positiva sobre Ω. Definimos*

$$Tf(w_1) = \int_\Omega N(w_1, w_2) f(w_2) d\mu(w_2).$$

Supongamos que existen h, g funciones medibles positivas sobre Ω y constantes $a, b \geq 0$ tales que

$$\int_\Omega |N(w_1, w_2)| h(w_2)^q d\mu(w_2) \leq (ag(w_1))^q, \qquad (\text{N}^{\underline{o}}\ 1)$$

casi donde quiera respecto a la medida μ, y además

$$\int_\Omega |N(w_1, w_2)| g(w_1)^p G(w_1) d\mu(w_1) \leq (bh(w_2))^p G(w_2), \qquad (\text{N}^{\underline{o}}\ 2)$$

casi donde quiera respecto a la medida μ. Entonces $T : L^p(\Omega, Gd\mu) \to L^p(\Omega, Gd\mu)$ es acotado y $\|T\| \leq ab$.

Prueba. Por la desigualdad de Holder y (Nº 1), tenemos que

$$|Tf(w_1)| \leq \int_\Omega |N(w_1, w_2)|^{\frac{1}{p}} |N(w_1, w_2)|^{\frac{1}{q}} \left|\frac{h(w_2)}{h(w_2)}\right| |f(w_2)| d\mu(w_2)$$

$$\leq \left(\int_\Omega |N(w_1, w_2)| h(w_2)^q d\mu(w_2)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |N(w_1, w_2)| \left|\frac{f(w_2)}{h(w_2)}\right|^p d\mu(w_2)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq ag(w_1) \left(\int_\Omega |N(w_1, w_2)| \left|\frac{f(w_2)}{h(w_2)}\right|^p d\mu(w_2)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Usando el Teorema de Tonelli y (Nº 2) se tiene que

$$\int_\Omega |Tf(w_1)|^p G(w_1)\, d\mu(w_1) \leq a^p \int_\Omega \int_\Omega |N(w_1, w_2)| g(w_1)^p G(w_1)\, d\mu(u_1) \left|\frac{f(w_2)}{h(w_2)}\right|^p d\mu(w_2)$$

$$\leq (ab)^p \int_\Omega |f(w_2)|^p G(w_2)\, d\mu(w_2),$$

es decir. $\|Tf\|_{L^p(\Omega,Gd\mu)} \leq ab\,\|f\|_{L^p(\Omega,Gd\mu)}$. ∎

Proposición 1.8 *Sean* $\alpha, \beta > -1$ *y* $p > \max(1, \frac{1-\beta}{1-\alpha})$ *entonces* $\frac{\beta-\alpha}{p} < \min\left(\frac{1+\alpha}{q}, \frac{1-\beta}{p}\right)$.

Prueba. Como $p > \frac{1+\beta}{1+\alpha}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. entonces $\frac{\beta-\alpha}{p} < \frac{1+\alpha}{q}$. Por otro lado $\frac{\beta-\alpha}{p} < \frac{1+\beta}{p}$ si y sólo si $\alpha > -1$. ∎

Lema 1.9 *Sean* $\alpha, \beta > -1$ *y* $p > \max(1, \frac{1+\beta}{1+\alpha})$. *Para todo* $\delta > 0$ *tal que*

$$\frac{\beta-\alpha}{p} < \delta < \min\left(\frac{1+\alpha}{q}, \frac{1+\beta}{p}\right) \tag{1.14}$$

la función $h(t) = t^{-\delta}$ *satisface las siguientes desigualdades*

$$\int_0^T \frac{\tau^\alpha}{(t+\tau)^{1+\alpha}} h(\tau)^q\, d\tau \leq C_{\alpha,\beta} h(t)^q, \ \textit{para todo } t \in (0, T). \qquad (\text{Nº } 1)$$

$$\int_0^T \frac{\tau^\alpha}{(t+\tau)^{1+\alpha}} h(t)^p t^\beta dt \leq C_{\alpha,\beta} h(\tau)^p \tau^\beta, \ \textit{para todo } \tau \in (0, T). \qquad (\text{Nº } 2)$$

Prueba. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Haciendo el cambio de variable $t = \tau s$, tenemos

$$\int_0^T \frac{t^{-\gamma}}{(t+\tau)^{1+\alpha}} dt = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\tau^{1+\alpha}} \int_0^{T/\tau} \frac{s^{-\gamma}}{(s+1)^{1+\alpha}} ds \tag{1.15}$$

$$\leq \tau^{-\gamma-\alpha} \int_0^\infty \frac{s^{-\gamma}}{(s+1)^{1+\alpha}} ds = C_{\alpha,\gamma} \tau^{-\gamma-\alpha}.$$

donde $C_{\alpha,\gamma} = \int_0^\infty \frac{s^{-\gamma}}{(s+1)^{1+\alpha}} ds < \infty$, siempre que $-\alpha < \gamma < 1$.

Como δ satisface
$$0 < \delta < \frac{1+\alpha}{q},$$
$\gamma = \delta q - \alpha$ satisface $-\alpha < \gamma < 1$ (Nº 1) se obtiene haciendo $\gamma = \delta q - \alpha$ en (1.15).
Por otro lado, δ satisface
$$\frac{\beta - \alpha}{p} < \delta < \frac{1+\beta}{p},$$
$\gamma = \delta p - \beta$ satisface $-\alpha < \gamma < 1$. (Nº 2) se obtiene haciendo $\gamma = \delta p - \beta$ en (1.15) ■

Ejemplo 1.10 *Sean $\alpha, \beta > -1$ y $p > \max(1, \frac{1+\beta}{1+\alpha})$. Definimos el operador S como*
$$Sf(t) = \int_0^T \frac{1}{(t+\tau)^{1+\alpha}} f(\tau)\tau^\alpha d\tau$$
donde $f \in C_c^\infty((0,T))$. Entonces el operador S se puede extender como un operador acotado de $L^p((0,T), t^\beta dt)$ en sí mismo. Esto se sigue del Lema 1.7 y del resultado anterior.

Capítulo 2

El Espacio de Bergman $b^p_W(\Omega)$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2_+$ un conjunto abierto. Consideremos una función medible $W : \Omega \to \mathbb{R}^+$ que satisface que para todo $K \subset \Omega$ compacto, existe C_K constante que sólo depende de K tal que

$$W(x,t)^{-1} \leq C_K \text{ para todo } (x,t) \in K \tag{2.1}$$

Definición 2.1 *Sea*

$$L^p_W(\Omega) = L^p(\Omega, W dxdt), \text{ para } 1 \leq p < \infty$$

Definimos el Espacio de Bergman $b^p_W(\Omega)$ como el conjunto de las funciones de temperatura en Ω que están en $L^p_W(\Omega)$, es decir

$$b^p_W(\Omega) = H(\Omega) \bigcap L^p_W(\Omega)$$

Claramente $b^p_W(\Omega)$ es un subespacio de $L^p_W(\Omega)$. De hecho, mostraremos que es un subespacio cerrado de $L^p_W(\Omega)$ y por tanto un espacio de Banach.

Proposición 2.2 *Sea $1 \leq p < \infty$ y $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Entonces existe una constante $C = C(K, W, p)$ tal que*

$$|u(x,t)| \leq C \|u\|_{L^p_W(\Omega)}$$

para todo $(x,t) \in K$ y para todo $u \in b^p_W(\Omega)$

Prueba. Dado que $K \subset \Omega$ es un conjunto compacto entonces $\delta = \delta_K = d(K, \Omega^c) > 0$. Sea $K_0 = \{z \in \Omega : d(z, K) < \frac{\delta}{2}\}$

Para cada $z \in K$ tenemos que $B(z, \frac{\delta}{2}) \subset K_0$. Consideremos ahora un rectángulo R_z tal que z es el punto medio de la frontera superior de R_z con $altura(R_z) = \{base(R_z)\}^2$ y $R_z \subset B(z, \frac{\delta}{2})$

Entonces el Lema 1.6 implica que existe una constante C_p (que sólo depende de p) tal que

$$|u(z)|^p \leq \frac{C_p}{|R_z|} \iint\limits_{R_z} |u(x,t)|^p \, dxdt \qquad (\text{N}^{\underline{o}}\ 1)$$

para todo $u \in b^p_W(\Omega)$.

Usando la condición (2.1) y que por construcción $R_z \subset \mathcal{K}_0$, tenemos que

$$\iint\limits_{R_z} |u(x,t)|^p \, W^{-1} W \, dxdt \leq C_{\mathcal{K}_0} \iint\limits_{\mathcal{K}_0} |u(x,t)|^p \, W dxdt \qquad (\text{N}^{\underline{o}}\ 2)$$

$$\leq C_{\mathcal{K}_0} \, \|u\|^p_{L^p_W(\Omega)} \, .$$

para todo $u \in b^p_W(\Omega)$.

Por ($\text{N}^{\underline{o}}$ 1) y ($\text{N}^{\underline{o}}$ 2) tenemos que

$$|u(z)|^p \leq \frac{C_p C_{\mathcal{K}_0}}{|R_z|} \, \|u\|^p_{L^p_W(\Omega)}$$

para todo $u \in b^p_W(\Omega)$.

El resultado se obtiene eligiendo los rectángulos R_z de tal forma que sean congruentes para todo $z \in \mathcal{K}$. De esta manera, $|R_z|$ sólo depende de $\delta = \delta_{\mathcal{K}}$. ∎

Comentario 2.3 *De la proposición anterior se sigue que si $u_j \to u$ en $b^p_W(\Omega)$, entonces la sucesión (u_j) converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω a la función u*

Teorema 2.4 *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $b^p_W(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^p_W(\Omega)$.*

Prueba. Sea $u \in L^p_W(\Omega)$ y (u_j) una sucesión en $b^p_W(\Omega)$ tal que

$$\|u - u_j\|_{L^p_W(\Omega)} \to 0.$$

Mostraremos que, después de modificaciones apropiadas sobre un conjunto de medida cero, u es una función de temperatura en Ω.

Tomemos $(x_0, t_0) \in \Omega$ arbitrario. Dado que $\Omega \subset \mathbb{R}^2_+$ es abierto, podemos encontrar un rectángulo suficientemente pequeño $R = (a,b) \times (c,d)$, con $d - c = (b-a)^2$, tal que $(x_0, t_0) \in R$ y $\overline{R} \subset \Omega$.

Usando la proposición anterior se sigue que existe una constante $C = C_{\overline{R}W_p}$ tal que

$$|u_j(x,t) - u_k(x,t)| \leq C \|u_j - u_k\|_{L_W^p(\Omega)}, \quad (x,t) \in \overline{R} \text{ y } j,k \in \mathbb{N}$$

Puesto que (u_j) es una sucesión de Cauchy en $L_W^p(\Omega)$, la desigualdad anterior implica que (u_j) converge uniformemente en $\overline{R}$ a una función continua v.

Como $u_j \in H(R) \bigcap C(\overline{R})$, por (1.11) podemos escribir

$$u_j(x,t) = \int_{\Gamma_R} \widetilde{K}\left(\Psi^{-1}(x,t); \Psi^{-1}(\xi,\tau)\right) u_j(\xi,\tau)\, d\lambda_R(\xi,\tau), \qquad (x,t) \in R,$$

donde Γ_R es la frontera parábolica del rectángulo R.

Usando el Comentario (1.2) y el Teorema de la Convergencia Dominada, se obtiene que

$$\begin{aligned} v(x,t) = \lim_{j\to\infty} u_j(x,t) &= \int_{\Gamma_R} \widetilde{K}(\Psi^{-1}(x,t); \Psi^{-1}(\xi,\tau)) \lim_{j\to\infty} u_j(\xi,\tau) d\lambda_R(\xi,\tau) \\ &= \int_{\Gamma_R} \widetilde{K}(\Psi^{-1}(x,t); \Psi^{-1}(\xi,\tau))\, v(\xi,\tau)\, d\lambda_R(\xi,\tau). \end{aligned}$$

Dado que la función v es continua en Γ_R, entonces v es una función de temperatura en R. Debido a que $u_j \to u$ en $L_W^p(\Omega)$, alguna subsucesión de (u_j) converge a u casi dondequiera en Ω. Por tanto $u = v$ casi dondequiera en R y $u \in H(R)$. Como $(x_0, t_0) \in \Omega$ fue arbitrario se concluye que $u \in H(\Omega)$. Por tanto $u \in b_W^p(\Omega)$. ■

Definición 2.5 $\mathcal{D}'(\Omega) = \{u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \mid u$ *es un funcional lineal continuo en* $\mathcal{D}(\Omega)\}$

A continuación probamos un resultado análogo al Lema de Weyl para funciones armónicas (ver [26]), para ello necesitamos el siguiente resultado

Teorema 2.6 *Sea $P(D)$ un operador diferencial hipoelíptico y $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $P(D)u = f \in C^\infty(\Omega)$, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ (ver[15]).*

Lema 2.7 *Sea $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}_+^2$ un conjunto abierto. Sea $L^*\phi = \phi_t + \phi_{xx}$. Si $u \in L_W^p(\Omega)$ es tal que*

$$\int_\Omega u L^* \phi dz = 0$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ entonces $u \in H(\Omega)$

Prueba. Primero notamos que u es una distribución en Ω, es decir $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Consideremos $\mathcal{K} \subset \Omega$ un conjunto compacto entonces

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq \int_{\mathcal{K}} |u(z)| |\phi(z)| \, dz$$

$$\leq \|\phi\|_\infty |\mathcal{K}|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathcal{K}} |u(z)|^p \, dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|\phi\|_\infty |\mathcal{K}|^{\frac{1}{q}} C_{\mathcal{K}} \left(\int_{\mathcal{K}} |u(z)|^p W(z) \, dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_{\mathcal{K}} \|u\|_{L^p_W(\Omega)} \|\phi\|_\infty$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{K})$.

Como el operador del calor es hipoelíptico y $0 = Lu \in C^\infty(\Omega)$ entonces $u \in C^\infty(\Omega)$. Así, u es una función de temperatura en Ω. ■

2.1 El núcleo reproductor de $b^2(\Omega)$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2_+$ un conjunto abierto. De la Proposición 2.2 se sigue que el funcional lineal $\mathcal{F}_z : b^p_W(\Omega) \to \mathbb{C}$ definido por $\mathcal{F}_z(u) = u(z)$ es acotado para todo $z \in \Omega$, con $1 \leq p < \infty$. Cuando $W \equiv 1$, escribimos $b^p(\Omega) = b^p_W(\Omega)$

Del Teorema 2.4 se sigue que $b^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u\overline{v} \, dz$$

Como $\mathcal{F}_z$ es un funcional lineal acotado en $b^2(\Omega)$, por el Teorema de Representación de Riesz existe una única función $N(z, \cdot) \in b^2(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{F}_z(u) = \langle u, N(z, \cdot)\rangle$$

para todo $u \in b^2(\Omega)$, $z \in \Omega$. Es decir.

$$u(z) = \int_\Omega u(w)\overline{N(z,w)}\,dw \tag{2.2}$$

para todo $u \in b^2(\Omega)$, $z \in \Omega$. La función $N : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ se llama **núcleo reproductor** de $b^2(\Omega)$

En seguida se muestran algunas propiedades comunes de los núcleos reproductores (ver [2], [3], [5], [22]). Supongamos que $u \in b^2(\Omega)$ toma valores reales. Entonces

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{Im} u(z) &= \operatorname{Im} \int_\Omega u(w)\overline{N(z,w)}\,dw \\ &= -\int_\Omega u(w)\operatorname{Im} N(z,w)\,dw. \end{aligned}$$

Tomando $u = \operatorname{Im} N(z,\cdot)$, se sigue que

$$\int_\Omega (\operatorname{Im} N(z,w))^2\,dw = 0$$

por tanto $\operatorname{Im} N = 0$. Es decir, la función N sólo toma valores reales.

Sea (u_n) una base ortonormal de $b^2(\Omega)$. Entonces,

$$N(z,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle N(z,\cdot), u_n\rangle\, u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u_n(z)}u_n(\cdot).$$

donde la serie converge en $b^2(\Omega)$ para cada $z \in \Omega$. Usando nuevamente el hecho de que el funcional $\mathcal{F}_w$ es continuo en $b^2(\Omega)$, tenemos que

$$N(z,w) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u_n(z)}u_n(w) \tag{2.3}$$

para todo $z, w \in \Omega$.

Además

$$N(z,w) = \overline{N(z,w)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\overline{u_n(w)} = N(w,z)$$

También,

$$\|N(z,\cdot)\|_2^2 = \langle N(z,\cdot), N(z,\cdot)\rangle = N(z,z)$$

para todo $z \in \Omega$.

Debido a que $b^2(\Omega)$ es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, existe una única proyección ortogonal $P : L^2(\Omega) \to b^2(\Omega)$ que llamaremos la **Proyección de Bergman**. El siguiente resultado muestra que P es un operador integral.

Proposición 2.8 *Dada $u \in L^2(\Omega)$, la proyección de Bergman $Pu \in b^2(\Omega)$ es el operador integral*

$$Pu(z) = \int_\Omega N(z,w)u(w)\,dw$$

para todo $z \in \Omega$.

Prueba. Por la propiedad del núcleo reproductor $N(z,w)$ en $b^2(\Omega)$, tenemos

$$\begin{aligned} Pu(z) = \langle Pu, N(z,\cdot)\rangle &= \langle u, P[N(z,\cdot)]\rangle = \langle u, N(z,\cdot)\rangle \\ &= \int_\Omega u(w)N(z,w)\,dw. \end{aligned}$$

■

Comentario 2.9 *La proposición anterior y la fórmula de reproducción (2.2) implican que si $u \in L^2(\Omega)$ entonces*

$$u(z) = \int_\Omega N(z,w)u(w)\,dw \quad \textit{si y sólo si } u \in b^2(\Omega).$$

Usando el operador proyección obtenemos una descomposición del espacio $L^2(\Omega)$ como sigue:

Proposición 2.10 $L^2(\Omega) = b^2(\Omega) \oplus \overline{\{L^*\phi : \phi \in C_c^\infty(\Omega)\}}$, *donde $L^*\phi = \phi_t + \phi_{xx}$.*

Prueba. Sabemos que $L^2(\Omega) = b^2(\Omega) \ominus NucP$. Entonces basta mostrar que

$$NucP = \overline{\{L^*\phi : \phi \in C_c^\infty(\Omega)\}}.$$

Claramente

$$P(L^*\phi)(z) = \int_\Omega N(z,w)(L^*\phi)(w)\,dw$$

$$= \int_\Omega (L_w N)(z,w)\,\phi(w)\,dw = 0,$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, donde L es el operador diferencial correspondiente a la ecuación del calor. Por lo tanto, $\overline{\{L^*\phi : \phi \in C_c^\infty(\Omega)\}} \subset NucP$

Supongamos que existe $u \in NucP - \overline{\{L^*\phi : \phi \in C_c^\infty(\Omega)\}}$ Entonces por el Teorema de Hahn-Banach existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \overline{v(z)}\,(L^*\phi)(z)\,dz = 0 \text{ para todo } \phi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ y } \int_\Omega u(z)\overline{v(z)}\,dz = 1$$

Por el Lema 2.7 se sigue que $v \in b^2(\Omega)$ Así,

$$\int_\Omega u(z)\overline{v(z)}\,dz = \langle u, v\rangle = \langle u, Pv\rangle = \langle Pu, v\rangle = 0$$

lo cual es una contradicción. ∎

2.2 Cálculo del núcleo reproductor de $b^2(S_T)$.

Sea $T > 0$, consideremos el cilindro

$$S_T = S^1 \times (0, T)$$

y el rectángulo

$$\Omega_T = [0,2] \times (0,T)$$

Sean

$$C\left(\overline{S_T}\right) = \{u \in C(\mathbb{R} \times [0,T]) : u(x,t) = u(x+2,t)\} \text{ y}$$

$$H(S_T) = \{u \in H(\mathbb{R} \times (0,T)) : u(x,t) = u(x+2,t)\}$$

Podemos pensar a $H(S_T)$ como el espacio de las funciones de temperatura definidas en el cilindro S_T

Definición 2.11 *Si $1 \le p < \infty$, definimos el **Espacio de Bergman** de funciones de temperatura en el cilindro S_T como sigue*

$$b^p_W(S_T) = \left\{ u \in H(S_T) : \int\limits_{\Omega_T} |u|^p \, W dz < \infty \right\}$$

En $b^p_W(S_T)$ definimos la siguiente norma

$$\|u\|_{b^p_W(S_T)} = \left(\int\limits_{\Omega_T} |u|^p \, W dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $u \in b^p_W(S_T)$ entonces $u|_{\Omega_T} \in L^p_W(\Omega_T)$ abusando del lenguaje diremos que

$$b^p_W(S_T) \subset L^p_W(\Omega_T)$$

El siguiente resultado nos dice que $b^p_W(S_T)$ es un espacio de Banach.

Teorema 2.12 *$b^p_W(S_T)$ es un subespacio cerrado de $L^p_W(\Omega_T)$.*

Prueba. Este resultado se probó en el Teorema 2.4 en el caso en que la región era un conjunto abierto Ω.

Sea $u \in L^p_W(\Omega_T)$ y (u_j) una sucesión en $b^p_W(S_T)$ tal que $\|u - u_j\|_{L^p_W(\Omega_T)} \to 0$.

Consideremos el conjunto $\Omega = (-1, 3) \times (0, T)$ y la sucesión $(u_j|_\Omega)$. Extendemos la definición de la función $W : \Omega_T \to \mathbb{R}_+$ de tal manera que sea 2-periódica en la variable x. Entonces

$$\|u_i - u_j\|^p_{L^p_W(\Omega)} = 2\,\|u_i - u_j\|^p_{L^p_W(\Omega_T)}$$

Se sigue entonces que la sucesión $(u_j|_\Omega)$ es de Cauchy en $b^p_W(\Omega)$. Del Teorema 2.4 se tiene que $b^p_W(\Omega)$ es un espacio de Banach y por tanto existe $v \in b^p_W(\Omega)$ tal que

$$\|v - u_j\|^p_{L^p_W(\Omega)} \to 0.$$

Además, sabemos que la sucesión $(u_j|_\Omega)$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω. Así,

$$v(0,t) = \lim_{j\to\infty} u_j(0,t) = \lim_{j\to\infty} u_j(2,t) = v(2,t)$$

para todo $0 < t < T$. Extendemos la función v de tal manera que sea 2-periódica en la variable espacial x. Esta extensión, que seguiremos denotando por v, pertenece a $b^p_W(S_T)$ y $\|v - u_j\|^p_{L^p_W(\Omega_T)} \to 0$. Se sigue que $u = v$ casi dondequiera. ∎

De la Proposición 2.2 se sigue que el funcional lineal $\mathcal{F}_z : b^p_W(S_T) \to \mathbb{C}$, definido por $\mathcal{F}_z(u) = u(z)$, es acotado para todo $z \in S_T$.

Cuando $W \equiv 1$, escribimos $b^p(S_T) = b^p_W(S_T)$ Del teorema anterior tenemos que $b^2(S_T)$ es un espacio de Hilbert respecto al producto interior

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega_T} u(z)\overline{v(z)}dz.$$

Procediendo igual que en la Sección 2.1, podemos encontrar un **núcleo reproductor** del espacio $b^2(S_T)$, es decir, una función $N : \Omega_T \times \Omega_T \to \mathbb{R}$ que cumple

$$u(z) = \int_{\Omega_T} N(z, w)\, u(w)\, dw, \quad z \in \Omega_T$$

para todo $u \in b^2(S_T)$.

Además, si (u_n) es una base ortonormal de $b^2(S_T)$ entonces

$$N(z, w) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\overline{u_n(w)} \tag{2.4}$$

Debido a que $b^2(S_T)$ es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $L^2(\Omega_T)$, existe una única proyección ortogonal $P : L^2(\Omega_T) \to b^2(S_T)$, llamada la **Proyección de Bergman** Se puede ver que P es un operador integral dado por

$$Pu(z) = \int_{\Omega_T} N(z, w)u(w)\, dw \quad \text{para todo } z \in \Omega_T$$

En esta sección calcularemos el núcleo reproductor $N(z, w)$ del espacio $b^2(S_T)$ De (2.4) se sigue que basta encontrar una base ortonormal $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $b^2(S_T)$

En adelante trabajaremos con pesos $W_\beta : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ de la forma

$$W_\beta(x, t) = t^\beta.$$

Claramente la función W_β satisface la condición (2.1)

Sean $L^p_\beta(\Omega_T) = L^p_{W_\beta}(\Omega_T)$ y $b^p_\beta(S_T) = b^p_{W_\beta}(S_T)$. Si $\beta > -1$ entonces $W_\beta dxdt$ es una medida finita en Ω_T y por lo tanto

$$L^p_\beta(\Omega_T) \subset L^1_\beta(\Omega_T)$$

y

$$b^p_\beta(S_T) \subset b^1_\beta(S_T).$$

para todo $1 \leq p < \infty$.

Sea $u \in b^p_\beta(S_T)$ y $0 < r < T$ Definimos la función u_r como sigue

$$u_r(x,t) = \int_0^2 \theta(x-y,t)u(y,r)dy$$

Del Teorema 1.3 se sigue que $u_r(x,t) \in H\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ y $u_r(x,t) = u_r(x+2,t)$ para todo $t > 0$. De Lema 1.4 se tiene que u_r es continua en $t = 0$ y $u_r(x,0) = u(x,r)$. En particular $u_r \in H(S_T) \bigcap C\left(\overline{S_T}\right)$.

Por la unicidad de la solución de la ecuación del calor en el cilindro se tiene

$$u_r(x,t) = u(x,t+r) \text{ si } 0 \leq t < T-r.$$

Del Lema 1.1. se sigue que la función u_r está acotada en $\mathbb{R}^2_+$:

$$|u_r(x,t)| \leq \|u(\cdot,r)\|_\infty \int_0^2 \theta(x-y,t)dy = \|u(\cdot,r)\|_\infty .$$

Lema 2.13 *Si $u \in H(S_T)$ entonces*

$$\int_0^2 |u(x,t+r)|^p \, dx \leq \int_0^2 |u(x,t)|^p \, dx \text{ para } t > 0.$$

Prueba. Sea $t > 0$ Por la unicidad de la solución de la ecuación del calor en el cilindro se tiene que

$$\begin{aligned} u(x,t+r) &= \int_0^2 \theta(x-y,r)u(y,t)dy \\ &= \left(K(\cdot,r) * u(\cdot,t)\right)(x) \quad \text{para } r > 0. \end{aligned}$$

Por la desigualdad integral de Minkowski se obtiene el resultado,

$$\begin{aligned} \int_0^2 |u(x,t+r)|^p \, dx &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^2 |u(x-y,t)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} K(y,r)\, dy \right)^p \\ &= \int_0^2 |u(x,t)|^p \, dx. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.14 *Sea $\beta > -1$, $1 \leq p < \infty$ y $u \in b_\beta^p(S_T)$. Entonces $\lim\limits_{r \to 0} u_r = u$ en $b_\beta^p(S_T)$*

Prueba. Existe $v : \Omega_T \to \mathbb{C}$ continua con sop $v \subset \Omega_T$ y tal que $\|u - v\|_{L_\beta^p(\Omega_T)} < \epsilon$. Definimos $v_r : \Omega_T \to \mathbb{C}$ como sigue

$$v_r(x,t) = \begin{cases} v(x, t+r) & 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq t \leq T - r \\ 0 & 0 \leq x \leq 2,\ T - r \leq t \leq T \end{cases}$$

Claramente $v_r \in C(\overline{\Omega_T})$. Tenemos que

$$\|u - u_r\|_{b_\beta^p(S_T)} \leq \|u - v\|_{L_\beta^p(\Omega_T)} + \|v - v_r\|_{L_\beta^p(\Omega_T)} + \|v_r - u_r\|_{L_\beta^p(\Omega_T)}.$$

Como v es uniformemente continua en $\overline{\Omega_T}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|v(x,t) - v(x, t+r)| < \epsilon \text{ si } 0 < r < \delta.$$

Por tanto,

$$\|v - v_r\|_{L_\beta^p(\Omega_T)}^p = \int_0^{T-r}\int_0^2 |v(x,t) - v(x,t+r)|^p\, t^\beta dx dt + \int_{T-r}^{T}\int_0^2 |v(x,t)|^p\, t^\beta dx dt$$

$$\leq 2T^{\beta+1}\epsilon^p + 2\,\|v\|_\infty^p \int_{T-r}^{T} t^\beta dx dt$$

Se tiene que $\lim\limits_{r \to 0} \|v - v_r\|_{L_\beta^p(\Omega_T)} = 0$.
Por otro lado, usando la unicidad de la ecuación del calor en el cilindro, escribimos

$$u_r(x,t) = \int_0^2 \theta(x - y, t - \frac{T}{2} + r) u(y, \frac{T}{2}) dy, \quad \text{para } \frac{T}{2} - r < t < \infty$$

Entonces

$$\|v_r - u_r\|_{L_\beta^p(\Omega_T)}^p \leq \int_0^r\int_0^2 |v(x,t+r) - u(x,t+r)|^p\, t^\beta dz$$
$$+ \int_r^{T-r}\int_0^2 |v(x,t+r) - u(x,t+r)|^p\, t^\beta dz$$
$$+ \left\|u(\cdot, \frac{T}{2})\right\|_\infty^p \int_{T-r}^{T}\int_0^2 \left|\int_0^2 \theta(x - y, t - \frac{T}{2} + r) dy\right|^p t^\beta dz$$

Por (1.3) tenemos

$$\int_{T-r}^{T}\int_{0}^{2}\left|\int_{0}^{2}\theta(x-y,t-\frac{T}{2}+r)dy\right|^{p}t^{\beta}dz=2\int_{T-r}^{T}t^{\beta}dt$$

Por otro lado, tenemos que

$$\int_{0}^{2}|u(x,t+r)|^{p}\,dx\leq\int_{0}^{2}|u(x,t)|^{p}\,dx$$

Por lo tanto

$$\int_{0}^{r}\int_{0}^{2}|v(x,t+r)-u(x,t+r)|^{p}\,t^{\beta}dz\leq C_{p}\left\{\int_{0}^{r}\int_{0}^{2}|v(x,t+r)|^{p}\,t^{\beta}dz+\int_{0}^{r}\int_{0}^{2}|u(x,t+r)|^{p}\,t^{\beta}dz\right\}$$

$$\leq C_{p}\left\{\|v\|_{\infty}^{p}\int_{0}^{r}t^{\beta}dt+\int_{0}^{r}\int_{0}^{2}|u(x,t)|^{p}\,t^{\beta}dz\right\}$$

Si $t\geq r$ entonces

$$t^{\beta}\leq\begin{cases}(t+r)^{\beta} & \text{si } \beta\geq 0\\ 2^{-\beta}(t+r)^{\beta} & \text{si } \beta<0\end{cases}$$

Así,

$$\int_{r}^{T-r}\int_{0}^{2}|v(x,t+r)-u(x,t+r)|^{p}\,t^{\beta}dz\leq C_{\beta}\int_{r}^{T-r}\int_{0}^{2}|v(x,t+r)-u(x,t+r)|^{p}\,(t+r)^{\beta}\,dz$$

$$\leq C_{\beta}\,\|v-u\|_{L_{\beta}^{p}(\Omega_{T})}^{p}<C_{\beta}\epsilon^{p}$$

De las desigualdades anteriores se sigue que $\lim_{r\to 0}\|v_{r}-u_{r}\|_{L_{\beta}^{p}(\Omega_{T})}^{p}=0$ ∎

Corolario 2.15 *Sea $\beta>-1$. Las funciones de temperatura en $C\left(\overline{S_T}\right)$ son densas en $b_{\beta}^{p}(S_T)$.*

Definimos

$$u_{n}(x,t)=e^{-\pi^{2}n^{2}t-\pi nix},\tag{2.5}$$

entonces $u_n\in b_{\beta}^{p}(S_T)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ y $\beta>-1$.

Lema 2.16 *Sea $\beta > -1$ y $1 \leq p < \infty$ El espacio vectorial generado por la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es denso en $b_\beta^p(S_T)$*

Prueba. Sea $u \in b_\beta^p(S_T)$, del Teorema anterior se sigue que existe $v \in C\left(\overline{S_T}\right) \bigcap H(S_T)$ tal que

$$\|u - v\|_{b_\beta^p(S_T)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dado que $v(\cdot,0) \in C(S^1)$ y usando el hecho de que los polinomios trigonométricos son densos en $L^p(S^1)$. tenemos que

$$v(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{\pi n i x},$$

donde la serie converge en $L^p(S^1)$. Por otro lado, por el Teorema 1 3 y (1 12), eligiendo $f(x) = e^{\pi n i x}$ tenemos lo siguiente:

$$u_n(x,t) = e^{-\pi^2 n^2 t - \pi n i x}$$

$$= \int_0^2 \theta(x-y,t)\, e^{\pi n i y} dy = \left(K(\cdot,t) * e^{\pi n i \cdot}\right)(x)$$

Además, aplicando nuevamente el Teorema 1.3 tenemos que

$$v(x,t) = \int_0^2 \theta(x-y,t)\, v(y,0)\, dy = \left(K(\cdot,t) * v(\cdot,0)\right)(x)$$

Por lo tanto, por (1 13) se tiene que

$$\left\| v(\cdot,t) - \sum_{|n|\leq N} a_n u_n(\cdot,t) \right\|_{L^p(S^1)}^p \leq \left\| v(\cdot,0) - \sum_{|n|\leq N} a_n e^{\pi n i} \right\|_{L^p(S^1)}^p$$

Multiplicando la igualdad anterior por t^β e integrando en $(0,T)$ se sigue que

$$\left\| v - \sum_{|n|\leq N} a_n u_n \right\|_{b_\beta^p(S_T)}^p \leq \left\| v(\cdot,0) - \sum_{|n|\leq N} a_n e^{\pi n i} \right\|_{L^p(S^1)}^p \int_0^T t^\beta dt$$

$$\leq C_{T,\beta} \left\| v(\cdot,0) - \sum_{|n|\leq N} a_n e^{\pi n i} \right\|_{L^p(S^1)}^p$$

Si N es suficientemente grande, entonces

$$\left\| u - \sum_{|n|\le N} a_n u_n \right\|_{b^2_\beta(S_T)} < \epsilon.$$

■

Claramente la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida en (2.5) es un conjunto ortogonal en $b^2(S_T)$. Del resultado anterior se sigue que la sucesión $\left(\frac{1}{\|u_n\|_{b^2(S_T)}} u_n\right)$ es una base ortonormal de $b^2(S_T)$ Calculamos

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2_{b^2(S_T)} &= 2\int_0^T e^{-2\pi^2 n^2 t}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi^2 n^2} \int_0^{2\pi^2 n^2 T} e^{-t}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi^2 n^2}\gamma\left(1, 2\pi^2 n^2 T\right)
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^*$. donde γ es la función

$$\gamma(\alpha, z) = \int_0^z t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad \text{si } \alpha, z > 0.$$

Además $\|u_0\|^2_{b^2(S_T)} = 2T$. Así, usando (2.4) se tiene

$$\begin{aligned}
N(z, w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\|u_n\|^2} u_n(z)\overline{u_n(w)} \\
&= \frac{1}{2T} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{\pi^2 n^2}{\gamma(1, 2\pi^2 n^2 T)} e^{-\pi^2 n^2 (t+\tau) + \pi n i (x-y)}.
\end{aligned}$$

Una manera alterna de escribir lo anterior es

$$N(z, w) = \frac{1}{2T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^2 n^2}{\gamma(1, 2\pi^2 n^2 T)} e^{-\pi^2 n^2 (t+\tau)} \cos n\pi(x-y).$$

Ahora bien nos gustaría poder escribir el núcleo $N(z,w)$ en términos de funciones conocidas. Veremos que esto se puede hacer módulo una composición con un isomorfismo de $b^2(S_T)$

Sea $\beta_n = \frac{1}{2}\gamma\left(1, 2\pi^2 n^2 T\right)$, $n \in \mathbb{Z}^*$ y $\beta_0 = 2T$. De la definición de la función γ tenemos

$$c = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi^2 T} e^{-t}dt \leq \beta_n \leq \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t}dt = \frac{1}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^*$. Por lo tanto, existen constantes C_1, $C_2 > 0$ que sólo dependen de T, tal que

$$C_1 \leq \beta_n \leq C_2 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \tag{2.6}$$

Lema 2.17 *Sea $\mathcal{M}$ el operador multiplicador de Fourier definido por la sucesión (β_n). Esto es,*

$$\mathcal{M}\left(\sum a_n e^{i\pi n\theta}\right) = \sum \beta_n a_n e^{i\pi n\theta}$$

para cualquier polinomio trigonométrico $\sum a_n e^{i\pi n\theta}$. Entonces $\mathcal{M}$ induce un isomorfismo de $b^2(S_T)$ sobre si mismo. Además el núcleo de la composición $\mathcal{M} \circ P$ es la función $1 - \frac{\partial}{\partial t}\theta\left(x - y, t + \tau\right)$

Prueba. Sabemos que el conjunto $\left\{e^{-\pi^2 n^2 t + \pi n i x}\right\}$ es una base ortogonal de $b^2(S_T)$. Basta entonces definir la acción de $\mathcal{M}$ en los elementos de la base

$$\mathcal{M}\left(e^{-\pi^2 n^2 t + \pi n i x}\right) = \beta_n e^{-\pi^2 n^2 t + \pi n i x}$$

Si $u = \sum\limits_{|n|\leq N} a_n e^{-\pi^2 n^2 t + \pi n i x}$, usando (2.6) y la igualdad de Plancherel obtenemos

$$C_1^2 \sum |a_n|^2 e^{-2\pi^2 n^2 t} \leq \|\mathcal{M}u\|^2_{L^2(S^1)} \leq C_2^2 \sum |a_n|^2 e^{-2\pi^2 n^2 t}$$

Integrando la desigualdad anterior respecto a la variable t, tenemos que

$$C_1^2 \|u\|^2_{b^2(S_T)} \leq \|\mathcal{M}u\|^2_{b^2(S_T)} \leq C_2^2 \|u\|^2_{b^2(S_T)}$$

Por un argumento de densidad definimos la acción de $\mathcal{M}$ en todo $b^2(S_T)$. Entonces es claro que el operador $\mathcal{M}$ induce un isomorfismo de $b^2(S_T)$ sobre si mismo

En particular, tenemos

$$\mathcal{M}N(z,w) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \pi^2 n^2 e^{-\pi^2 n^2 (t+\tau) + \pi n i (x-y)} = 1 - \frac{\partial}{\partial t}\theta\left(x - y, t + \tau\right)$$

donde $\mathcal{M}$ actua en la variable z.

Sea $\widetilde{P}$ el operador integral con núcleo $1 - \frac{\partial}{\partial t}\theta\left(x - y, t + \tau\right)$, definido como sigue

$$\widetilde{P}u\left(x, t\right) = \int\limits_{\Omega_T} \left\{1 - \frac{\partial}{\partial t}\theta\left(x - y, t + \tau\right)\right\} u(y, \tau)\, dyd\tau$$

Por otro lado tenemos que

$$Pu\left(z\right) = \frac{1}{2T}\int\limits_{\Omega_T} u\left(y, \tau\right) dyd\tau + \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \frac{\pi^2 m^2}{\gamma\left(1, 2\pi^2 m^2 T\right)} e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x} \int\limits_{\Omega_T} e^{-\pi^2 m^2 \tau - \pi m i y} u\left(y, \tau\right) dyd\tau$$

para todo $u \in C_c^\infty\left(\Omega_T\right)$. Por lo tanto,

$$\left(\mathcal{M}\circ P\right) u\left(x, t\right) = \int\limits_{\Omega_T} u\left(y, \tau\right) dyd\tau + \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \pi^2 m^2 e^{-\pi^2 m^2 t - \pi m i x} \int\limits_{\Omega_T} e^{-\pi^2 m^2 \tau - \pi m i y} u\left(y, \tau\right) dyd\tau$$

$$= \int\limits_{\Omega_T} \left\{1 - \frac{\partial}{\partial t}\theta\left(x - y, t + \tau\right)\right\} u(y, \tau)\, dyd\tau = \widetilde{P}u\left(x, t\right)$$

para todo $u \in C_c^\infty\left(\Omega_T\right)$.
Extendemos la definición del operador $\widetilde{P}$ a todo el espacio $L^2\left(\Omega_T\right)$. Así, tenemos que

$$\widetilde{P}\left(u\right) = \left(\mathcal{M}\circ P\right)\left(u\right)$$

para todo $u \in L^2(\Omega_T)$. De aqui se tiene que el operador $\widetilde{P}$ es continuo en $L^2(\Omega_T)$. ∎

Nuestro siguiente objetivo es mostrar que la Proyección de Bergman P definida como

$$Pu\left(z\right) = \int\limits_{\Omega_T} N(z, w) u(w)\, dw$$

es continua en $L^p(\Omega_T)$ y que $Pu \in b^p(S_T)$ para todo $u \in L^p(\Omega_T)$.

2.3 Las proyecciones P_α.

Antes de probar la continuidad de la Proyección de Bergman, estudiaremos ciertos operadores integrales P_α con núcleo N_α que a continuación definimos. Los operadores integrales P_α resultarán ser proyecciones continuas.

Definición 2.18 *Sea* $\alpha > -1$ *y* $N_\alpha : \Omega_T \times \Omega_T \to \mathbb{C}$ *la función definida como sigue*

$$N_\alpha(z, w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{m,\alpha} e^{-\pi^2 m^2 (t+\tau) + \pi m i (x-y)}, \tag{2.7}$$

donde $c_{m,\alpha} = \frac{2^\alpha \pi^{2(1+\alpha)} m^{2(1+\alpha)}}{\gamma(1-\alpha, 2\pi^2 m^2 T)}$ *para* $m \in \mathbb{Z}^*$ *y* $c_{0,\alpha} = \frac{1+\alpha}{2T^{1+\alpha}}$

Como

$$\begin{aligned}\gamma\left(1+\alpha, 2\pi^2 m^2 T\right) &= \int_0^{2\pi^2 m^2 T} t^\alpha e^{-t} dt \\ &\geq \int_0^{2\pi^2 T} t^\alpha e^{-t} dt = C_\alpha > 0\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^*$, se sigue que $c_{m,\alpha} \leq C_\alpha m^{2\alpha+2}$ para todo $m \in \mathbb{Z}^*$

Usando el hecho de que $e^{-x} \leq C'_\beta x^{-\beta}$ si $x > 0$, $\beta \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m\in\mathbb{Z}^*} m^k e^{-\pi^2 m^2 (t+\tau) + \pi m i (x-y)}\right| &\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} |m|^k e^{-\pi^2 m^2 t} \\ &\leq \frac{C_k}{t^{\frac{k}{2}+1}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \frac{|m|^k}{(m^2)^{\frac{k}{2}+1}} \leq \frac{C_k}{t_0^{\frac{k}{2}-1}}\end{aligned}$$

si $t \geq t_0$ y para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto la serie que define a N_α converge absoluta y uniformemente en $\Omega' \times \Omega_T$ cuando $\Omega' \subset \Omega_T$ es compacto, además la función N_α está uniformemente acotada en $\Omega' \times \Omega_T$. El argumento anterior sirve para ver que $N_\alpha \in C^\infty(\Omega_T \times \Omega_T)$ y que $N_\alpha(\cdot, w) \in H(S_T)$ para todo $w \in \Omega_T$

Claramente N_α es una función simétrica y con valores reales ya que $c_{m,\alpha} = c_{-m,\alpha}$.

Comentario 2.19 *Cuando* $\alpha = 0$, *la función* N_α *coincide con el núcleo reproductor en* $b^2(S_T)$.

Definición 2.20 *Definimos* P_α *como el operador integral*

$$P_\alpha u(z) = \int_\Omega N_\alpha(z, w)\, u(w)\, \tau^\alpha dw \qquad z \in \Omega_T$$

Por lo mencionado arriba se sigue que la integral está bien definida para $u \in C_c^\infty(\Omega_T)$. Cuando $\alpha = 0$, P_α es la Proyección de Bergman.

El núcleo $N_\alpha(z, w)$ se construyó de tal manera que se cumpliera que

$$P_\alpha\left(e^{-\pi^2 m^2 t - \pi m i x}\right) = e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x} \tag{2.8}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$

Lo anterior implica que el operador P_α es una proyección en el espacio vectorial generado por el conjunto $\left\{e^{-\pi^2 n^2 t + \pi n i x}\right\}$.

Queremos estudiar la continuidad de P_α en $L^p_\beta(\Omega_T)$. Para hacer esto, analizaremos el operador T_α definido como sigue

$$T_\alpha u(z) = \int_{\Omega_T} \Theta_\alpha(z, w)\, u(w)\, \tau^\alpha dw, \quad z \in \Omega_T$$

donde

$$\begin{aligned}
\Theta_\alpha(z, w) &= \theta_\alpha(x - y, t + \tau) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m \in \mathbb{Z}} \pi^{2\alpha-2} m^{2\alpha-2} e^{-\pi^2 m^2 (t+\tau) - \pi m i (x-y)}.
\end{aligned}$$

Como en el caso de N_α, la serie que define a Θ_α converge absoluta y uniformemente en $\Omega' \times \Omega_T$, cuando $\Omega' \subset \Omega_T$ es compacto. Además está uniformemente acotada en $\Omega' \times \Omega_T$. También la serie que define a $\theta_\alpha(x, t)$ converge uniformemente en Ω'.

Comentario 2.21 *Notamos que si $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces $\theta_\alpha(x, t) = (-1)^{1+\alpha} \frac{\partial^{1-\alpha}}{\partial t^{1-\alpha}} \theta(x, t)$.*

Definimos una función $K_\alpha(x, t)$ que se puede pensar como una generalización del núcleo del calor, de hecho $K_{-1}(x, t) = K(x, t)$

$$\begin{aligned}
K_\alpha(x, t) &= \tfrac{1}{2} F^{-1}\left(\pi^{2(1+\alpha)} \varsigma^{2(1-\alpha)} e^{-\pi^2 \varsigma^2 t}\right)\left(\tfrac{x}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t^{1-\alpha}}} K(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma + i\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^{2(1-\alpha)} e^{-\sigma^2} d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

donde F^{-1} es la transformada de Fourier inversa respecto a la variable ς y $K(x, t)$ es la solución fundamental de la ecuación del calor.

Tenemos la siguiente estimación,

$$\begin{aligned}
|K_\alpha(x,t)| &\leq \frac{C}{t^{1+\alpha}}K(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sigma+i\frac{x}{2\sqrt{t}}\right|^{2(1-\alpha)}e^{-\sigma^2}d\sigma\\
&\leq \frac{C_\alpha}{t^{1+\alpha}}K(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma^{2(1-\alpha)}+\frac{x^{2(1+\alpha)}}{t^{1+\alpha}}\right)e^{-\sigma^2}d\sigma\\
&\leq \frac{C_\alpha}{t^{1+\alpha}}K(x,t)\left[1+\frac{x^{2(1+\alpha)}}{t^{1+\alpha}}\right].
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que $x^\beta e^{-x} \leq C_\beta e^{-\frac{x}{2}}$, si $x>0$ y $\beta \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x^{2(1+\alpha)}}{(4t)^{1+\alpha}}K(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(\frac{x^{2(1+\alpha)}}{(4t)^{1+\alpha}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\\
&\leq \frac{C_\alpha}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{8t}} = C_\alpha K(x,2t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|K_\alpha(x,t)| \leq \frac{C_\alpha}{t^{1+\alpha}}\left(K(x,t)+K(x,2t)\right), \tag{2.10}$$

donde C_α es una constante que sólo depende de α

Lema 2.22 $K_\alpha(x,t) \in C\left(\mathbb{R}_+^2\right)$.

Prueba. Sea

$$\psi_\alpha(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma+i\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^{2(1+\alpha)}e^{-\sigma^2}d\sigma$$

Dado que la función $f(z)=z^{2(1+\alpha)}$ es analítica en los puntos tales que $\operatorname{Im} z>0$ y además

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\sigma+i\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^{2(1+\alpha)}\right|e^{-\sigma^2}d\sigma \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(|\sigma|+\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^{2(1+\alpha)}e^{-\sigma^2}d\sigma < \infty,$$

para todo $(x,t)\in\mathbb{R}_+^2$, entonces usando el Teorema de la Convergencia Dominada se sigue que $\psi_\alpha(x,t)\in C\left(\mathbb{R}_+^2\right)$

Como $K_\alpha(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}t^{1+\alpha}}K(x,t)\psi_\alpha(x,t)$ se obtiene el resultado ∎

Comentario 2.23 *Notamos que si $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces $K_\alpha(x,t) = (-1)^{1+\alpha}\frac{\partial^{1+\alpha}}{\partial t^{1+\alpha}}K(x,t)$*

A continuación se obtiene una expresión alterna para la función θ_α en términos de la función K_α.

Proposición 2.24 $\theta_\alpha(x,t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} K_\alpha(x+2m,t)$.

Prueba. Usando la desigualdad (2.10) tenemos que

$$\left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} K_\alpha(x+2m,t)\right| \leq \frac{C_\alpha}{t^{1-\alpha}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \{K(x+2m,t)+K(x+2m,2t)\}$$

$$= \frac{C_\alpha}{t^{1-\alpha}} \{\theta(x,t)+\theta(x,2t)\}$$

Dado que la función θ es uniformemente acotada sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^2_+$, se sigue que la serie converge uniformemente sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^2_+$ y por lo tanto es continua.

La serie es 2-periódica en la variable espacial x, entonces admite una representación como serie de Fourier.

Así,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} K_\alpha(x+2m,t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m(t)e^{-m\pi ix}.$$

donde la convergencia es en $L^2(S^1)$.

De la desigualdad (2.10) se sigue que

$$\int_0^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |K_\alpha(x+2n,t)|\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^2 |K_\alpha(x+2n,t)|\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |K_\alpha(x,t)|\,dx$$

$$\leq \frac{C_\alpha}{t^{1+\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} (K(x,t)+K(x,2t))\,dx \leq \frac{C_\alpha}{t^{1+\alpha}}.$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada tenemos que

$$a_m(t) = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} K_\alpha(x+2n,t)\right] e^{-\pi m i x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2n}^{2n+2} K_\alpha(x,t)e^{-\pi m i x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(x,t)e^{-\pi m i x}dx$$

$$= \mathcal{F}\left(K_\alpha(2\cdot,t)\right)(m) = \frac{1}{2}\pi^{2(1-\alpha)}m^{2(1-\alpha)}e^{-\pi^2 m^2 t}$$

■

Teorema 2.25 *Sean $\alpha,\beta>-1$. Si $p>\max\left(1,\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)$, el operador $T_\alpha : L^p_\beta(\Omega_T)\to b^p_\beta(S_T)$ dado por*

$$T_\alpha u(z) = \int_{\Omega_T}\Theta_\alpha(z,w)\,u(w)\,\tau^\alpha dw\,,\quad z\in\Omega_T$$

es acotado

Prueba. Dado que $\Theta_\alpha(\cdot,w)\in H(S_T)$ se sigue que $T_\alpha u\in H(S_T)$ para $u\in C_c^\infty(\Omega_T)$. Por el Lema 1.7, basta probar que para cada p existe una función positiva y medible $h(x,t)$ tal que

$$\int_{\Omega_T}|\theta_\alpha(x-y,t+\tau)|\,h(y,\tau)^q\,\tau^\alpha dyd\tau \le C_q h(x,t)^q \quad (x,t)\in\Omega_T \quad \text{y}$$

$$\int_{\Omega_T}|\theta_\alpha(x-y,t+\tau)|\,h(x,t)^p\,\tau^\alpha t^\beta dxdt \le C_p h(y,\tau)^p\tau^\beta \quad (y,\tau)\in\Omega_T.$$

donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Para mostrar lo anterior necesitamos estimaciones del núcleo del operador T_α.

De la Proposición 2.24 y de la desigualdad (2.10) tenemos

$$|\theta_\alpha(x,t)| \leq \frac{C_\alpha}{t^{1+\alpha}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [K(x+2n,t) + K(x+2n,2t)]$$

$$= \frac{C_\alpha}{t^{1+\alpha}} (\theta(x,t) + \theta(x,2t)).$$

Usando la desigualdad (1.6) tenemos

$$\begin{aligned} |\theta_\alpha(x-y,t+\tau)| &\leq \tfrac{C_\alpha}{(t+\tau)^{1+\alpha}}\{K(x-y+2,t+\tau) + K(x-y,t+\tau) \\ &+ K(x-y-2,t+\tau) + K(x-y+2,2(t+\tau)) \\ &+ K(x-y,2(t+\tau)) + K(x-y-2,2(t+\tau))\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para aplicar el Lema de Schur al operador T_α hacemos $h(x,t) \equiv h(t) = t^{-\delta}$. Donde $\delta > 0$ es tal que $\frac{\beta-\alpha}{p} < \delta < \min\left(\frac{1+\alpha}{q}, \frac{1+\beta}{p}\right)$.

Dado que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dx = 1$ para todo $t > 0$ y por las desigualdades del Lema 1.9 tenemos

$$\int_0^T \frac{\tau^{-\delta q+\alpha}}{(t+\tau)^{1+\alpha}} \int_0^2 K(x-y\pm 2,\lambda(t+\tau))dyd\tau \leq \int_0^T \frac{\tau^{-\delta q+\alpha}}{(t+\tau)^{1+\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y,\lambda(t+\tau))dyd\tau$$

$$= \int_0^T \frac{\tau^{-\delta q+\alpha}}{(t+\tau)^{1+\alpha}} d\tau \leq C_\alpha t^{-\delta q}.$$

De la estimación en (2.11), junto con los cálculos anteriores y haciendo $\lambda = 1,2$ concluimos que

$$\int\limits_{\Omega_T} |\theta_\alpha(x-y,t+\tau)|\, \tau^{-\delta q}\tau^{\alpha} dyd\tau \leq C_\alpha t^{-\delta q}.$$

La prueba de la otra desigualdad es completamente análoga a la anterior:

$$\int_0^T \frac{\tau^\alpha t^{-\delta p+\beta}}{(t+\tau)^{1+\alpha}} \int_0^2 K(x-y\pm 2,\lambda(t+\tau))dxdt \leq \int_0^T \frac{\tau^\alpha t^{-\delta p+\beta}}{(t+\tau)^{1+\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x,\lambda(t+\tau))dxdt$$

$$\leq \int_0^T \frac{\tau^\alpha t^{-\delta p+\beta}}{(t+\tau)^{1+\alpha}} dt \leq C_\alpha \tau^{-\delta p+\beta}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Omega_I} \tau^{\alpha} \left|\theta_{\alpha}\left(x-y, t+\tau\right)\right| t^{-\delta p+\beta} dx dt \leq C_{\alpha} t^{-\delta p+\beta}.$$

■

Lema 2.26 *Sean $\alpha, \beta > -1$. Si $p > \max\left(1, \frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)$, el operador $\mathbf{1}_{\alpha}$ dado por*

$$\mathbf{1}_{\alpha} u(z) = \int_{\Omega_T} u(w)\, \tau^{\alpha} dw\ , \quad z \in \Omega_T$$

es acotado en $L^p_{\beta}(\Omega_T)$.

Prueba. El resultado se obtiene de la siguiente desigualdad

$$\left|\mathbf{1}_{\alpha} u(z)\right| \leq \int_{\Omega_T} \left|u(w)\right| \tau^{\alpha} dw$$

$$= \int_{\Omega_T} \left|u(w)\right| \tau^{\frac{\beta}{p}} \tau^{\alpha - \frac{\beta}{p}} dw$$

$$\leq \|u\|_{b^p_{\beta}(S_T)} \left(\int_{\Omega_T} \tau^{\left(\alpha - \frac{\beta}{p}\right) q} dw \right)^{\frac{1}{q}} = C \|u\|_{b^p_{\beta}(S_T)}$$

donde la condición $p > \frac{1+\beta}{1+\alpha}$ implica que $1 + \left(\alpha - \frac{\beta}{p}\right) q > 0$ y por lo tanto $C < \infty$. ■

Definición 2.27 *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Una sucesión acotada (β_n) es un* ***multiplicador*** *en $L^p(S^1)$ si existe $c > 0$ tal que*

$$\left\| \sum \beta_n \widehat{f}(n)\, e^{inx} \right\|_{L^p(S^1)} \leq c \|f\|_{L^p(S^1)}$$

para todo polinomio trigonométrico f

El siguiente resultado acerca de multiplicadores se debe a Hirschman (ver [25])

Teorema 2.28 *Sea (β_n) una sucesión acotada tal que*

$$\left|\beta_n\right| = O\left(|n|^{-\epsilon}\right)$$

con $0 < \epsilon < 1$. Entonces (β_n) es un ***multiplicador*** *en $L^p(S^1)$ para todo p que cumple $\frac{1-\epsilon}{2} < \frac{1}{p} < \frac{1+\epsilon}{2}$*

Teorema 2.29 *Sean $\alpha, \beta > -1$. Si $p > \max\left(1, \frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)$, el operador $P_\alpha : L^p_\beta(\Omega_T) \to b^p_\beta(S_T)$ dado por*

$$P_\alpha u(z) = \int\limits_{\Omega_T} N_\alpha(z, w)\, u(w)\, \tau^\alpha dw\ , \quad z \in \Omega_T$$

es acotado.

Prueba. Dado que $N_\alpha(\cdot, w) \in H(S_T)$ se sigue que $P_\alpha u \in H(S_T)$ para $u \in C_c^\infty(\Omega_T)$. Sea $\beta_{n,\alpha} = 2^{-\alpha-1}\gamma(1+\alpha, 2\pi^2 n^2 T)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^*$ y $\beta_{0,\alpha} = \frac{2T^{1+\alpha}}{1+\alpha}$. Entonces

$$0 < c_\alpha = 2^{-\alpha-1} \int\limits_0^{2\pi^2 T} t^\alpha e^{-t} dt \leq \beta_{n,\alpha} \leq 2^{-\alpha-1} \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt = C_\alpha.$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^*$. Así tenemos que

$$c_\alpha \leq \beta_{n,\alpha} \leq C_\alpha,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Usando la desigualdad $e^{-t} \leq C'_\gamma t^{-\gamma}$ si $t, \gamma > 0$, se sigue que

$$\int\limits_{2\pi^2 n^2 T}^\infty t^\alpha e^{-t} dt \leq C'_\gamma \int\limits_{2\pi^2 n^2 T}^\infty t^{\alpha-\gamma} dt = \frac{C_{\gamma,T}}{\gamma - \alpha - 1} n^{2(\alpha-\gamma+1)}$$

si $\alpha - \gamma < -1$. Haciendo $\gamma = \alpha + 1 + \frac{\epsilon}{2}$ tenemos que

$$\beta_{n,\alpha} = C_\alpha + O\left(|n|^{-\epsilon}\right). \tag{2.12}$$

Por otro lado, como $c_\alpha \leq \beta_{n,\alpha}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\beta^{-1}_{n,\alpha} = C^{-1}_\alpha + O\left(|n|^{-\epsilon}\right). \tag{2.13}$$

Para $0 < \epsilon < 1$, sea $\mathcal{M}_\alpha$ el operador multiplicador de Fourier definido por la sucesión $(\beta_{n,\alpha})$. Esto es,

$$\mathcal{M}_\alpha\left(\sum a_n e^{i\pi n\theta}\right) = \sum \beta_{n,\alpha} a_n e^{i\pi n\theta}.$$

para cualquier polinomio trigonométrico $\sum a_n e^{i\pi n\theta}$.

De (2.12), (2.13) y el Teorema 2.28 se sigue que los operadores multiplicadores de Fourier $\mathcal{M}_\alpha$ y $\mathcal{M}^{-1}_\alpha$ son continuos en $L^p(S^1)$ para todo $1 < p < \infty$.

Definiremos ahora $\mathcal{M}_\alpha$ en $b^p_\beta(S_T)$ Sabemos que el espacio vectorial generado por el conjunto $\left\{e^{-\pi^2n^2t+\pi nix}\right\}$ es denso en $b^p_\beta(S_T)$, $1 \leq p < \infty$ Basta entonces definir la acción de $\mathcal{M}_\alpha$ en los elementos del conjunto $\left\{e^{-\pi^2n^2t-\pi nix}\right\}$.

$$\mathcal{M}_\alpha\left(e^{-\pi^2n^2t+\pi nix}\right) = \beta_{n,\alpha}e^{-\pi^2n^2t+\pi nix}$$

De la continuidad de $\mathcal{M}_\alpha$ y $\mathcal{M}_\alpha^{-1}$ se sigue que existen constantes $c, C > 0$, tales que

$$c\left\|\sum_{|n|\leq N} a_ne^{-\pi^2n^2t+\pi nix}\right\|^p_{L^p(S^1)} \leq \left\|\sum_{|n|\leq N} \beta_{n,\alpha}a_ne^{-\pi^2n^2t+\pi nix}\right\|^p_{L^p(S^1)}$$

$$\leq C\left\|\sum_{|n|\leq N} a_ne^{-\pi^2n^2t-\pi nix}\right\|^p_{L^p(S^1)}$$

Usando el Teorema de Tonelli, tenemos

$$c\left\|\sum_{|n|\leq N} a_ne^{-\pi^2n^2t+\pi nix}\right\|_{b^p_\beta(S_T)} \leq \left\|\sum_{|n|\leq N} \beta_{n,\alpha}a_ne^{-\pi^2n^2t+\pi nix}\right\|_{b^p_\beta(S_T)}$$

$$\leq C\left\|\sum_{|n|\leq N} a_ne^{-\pi^2n^2t-\pi nix}\right\|_{b^p_\beta(S_T)}$$

Por un argumento de densidad definimos la acción de $\mathcal{M}_\alpha$ en todo $b^p_\beta(S_T)$ Entonces es claro que el operador $\mathcal{M}_\alpha$ induce un isomorfismo de $b^p_\beta(S_T)$ sobre sí mismo

En particular, tenemos

$$\mathcal{M}_\alpha N_\alpha(z, w) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \pi^{2(1+\alpha)}n^{2(1+\alpha)}e^{-\pi^2n^2(t-\tau)+\pi ni(x-y)}$$

$$= 1 + \theta_\alpha(x-y, t-\tau)$$

donde $\mathcal{M}_\alpha$ actua en la variable z

Sea $u \in C^\infty_c(\Omega_T)$, dado que las series que definen a los núcleos $N_\alpha(z, w)$ y $\Theta_\alpha(z, w)$ convergen uniformemente en el conjunto $\{\ldots\} \times \Omega_T$ por el Teorema de la Convergencia

Dominada tenemos

$$P_\alpha u(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{m,\alpha} e^{-\pi^2 m^2 t - \pi m i x} \int_{\Omega_T} e^{-\pi^2 m^2 \tau - \pi m i y} u(y,\tau)\, \tau^\alpha \, dy d\tau.$$

Por lo tanto.

$$(\mathcal{M}_\alpha \circ P_\alpha)\, u(z) = \int_{\Omega_T} u(y,\tau)\, \tau^\alpha dy d\tau + \frac{1}{2} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \pi^{2(1-\alpha)} m^{2(1-\alpha)} \int_{\Omega_T} e^{-\pi^2 m^2 \tau - \pi m i y} u(y,\tau)\, \tau^\alpha dy d\tau$$

$$= \mathbf{1}_\alpha u(z) + T_\alpha u(z) = (\mathbf{1}_\alpha + T_\alpha)\, u(z)$$

Así, del Teorema anterior y usando el hecho de que $\mathcal{M}_\alpha$ es un isomorfismo se sigue que el operador P_α es continuo en $L^p_\beta(\Omega_T)$. Además el núcleo de la composición $\mathcal{M}_\alpha \circ P_\alpha$ es la función $1 + \theta_\alpha(x - y, t + \tau)$. ∎

Corolario 2.30 *Sean $\alpha, \beta > -1$. Si $p > \max(1, \frac{1+\beta}{1+\alpha})$, entonces P_α es una proyección continua sobre $b^p_\beta(S_T)$.*

Prueba. El resultado se sigue de (2.8), el Lema 2.16 y el Teorema anterior. ∎

Haciendo $\alpha = \beta = 0$ en el Corolario anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.31 *La Proyección de Bergman $P : L^p(\Omega_T) \to b^p(S_T)$ es un operador continuo para todo $p > 1$.*

Capítulo 3

Dualidad.

En este capítulo caracterizamos el dual del Espacio de Bergman $b^p_\beta(S_T)$. También se obtiene una representación integral del operador transpuesto P^*_α En la última sección se da una aplicación del hecho de que el operador P^*_α es acotado.

3.1 El dual del espacio $b^p_\beta(S_T)$.

En esta sección calculamos el dual del Espacio de Bergman $b^p_\beta(S_T)$ para $\beta > -1$

Sean $\beta > -1$ y $p > 1$, por el Teorema de Representación de Riesz sabemos que el dual de $L^p_\beta(\Omega_T)$ está representado por $L^q_\beta(\Omega_T)$, por medio de la dualidad

$$\langle u, v\rangle_\beta = \int\limits_{\Omega_T} u(z)\, v(z)\, t^\beta dx dt$$

donde p y q son exponentes conjugados.

Teorema 3.1 *Sean $\alpha, \beta > -1$. Si $p > \max\left(1, \frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)$, entonces $\left(b^p_\beta(S_T)\right)^* = b^q_{\left(\alpha - \frac{\beta}{p}\right)q}(S_T)$ bajo la dualidad*

$$\langle u, v\rangle_\alpha = \int\limits_{\Omega_T} u(z)\, v(z)\, t^\alpha dx dt$$

donde $u \in b^p_\beta(S_T)$, $v \in b^q_{\left(\alpha - \frac{\beta}{p}\right)q}(S_T)$.

Prueba. Sea $v \in b^q_{\left(\alpha - \frac{\beta}{p}\right)q}(S_T)$. Definimos

$$\Phi(u) = \int\limits_{\Omega_T} u(z)\, v(z)\, t^\alpha dx dt$$

Es claro que Φ es un funcional lineal en $b^p_\beta(S_T)$. Veamos que es acotado. En efecto, usando la desigualdad de Hölder se obtiene

$$|\Phi(u)| \leq \int_{\Omega_T} |u(z)| \, |v(z)| \, t^{\frac{\beta}{p}} t^{\alpha-\frac{\beta}{p}} dxdt$$

$$\leq \|v\|_{b^q_{\left(\alpha-\frac{\beta}{p}\right)q}(S_T)} \|u\|_{b^p_\beta(S_T)}.$$

Por lo tanto $\|\Phi\| \leq \|v\|_{b^q_{\left(\alpha-\frac{\beta}{p}\right)q}(S_T)}$

Inversamente, sea $\Phi \in \left(b^p_\beta(S_T)\right)^*$. El Teorema 2.29 implica que $\Phi_\alpha = \Phi \circ P_\alpha \in \left(L^p_\beta(\Omega_T)\right)^*$ Por lo tanto existe $v_1 \in L^q_\beta(\Omega_T)$ tal que

$$\Phi_\alpha(u) = \langle u, v\rangle_\beta = \int_{\Omega_T} u(z)\, v_1(z)\, t^\beta dxdt$$

para todo $u \in L^p_\beta(\Omega_T)$.

Como el operador P_α es una proyección sobre $b^p_\beta(S_T)$ entonces $\Phi(u) = \Phi_\alpha(u)$ para todo $u \in b^p_\beta(\Omega_T)$. Además, como $P^2_\alpha = P_\alpha$ tenemos que

$$\Phi_\alpha(u) = \Phi_\alpha(P_\alpha u)$$

$$= \int_{\Omega_T} \left(\int_{\Omega_T} N_\alpha(z, w) u(w) \tau^\alpha dy d\tau \right) v_1(z)\, t^\beta dxdt$$

para todo $u \in L^p_\beta(\Omega_T)$.

Consideremos $u \in C^\infty_c(\Omega_T)$, entonces

$$\Phi_\alpha(u) = \int_{\Omega_T} \left(\int_{\Omega_T} N_\alpha(z, w) v_1(z)\, t^\beta dxdt \right) u(w) \tau^\alpha dy d\tau$$

$$= \int_{\Omega_T} v(w) u(w) \tau^\alpha dy d\tau = \int_{\Omega_T} v(w) \tau^{\alpha-\beta} u(w) \tau^\beta dy d\tau,$$

donde

$$v(w) = \int_{\Omega_T} N_\alpha(z, w) v_1(z)\, t^\beta dxdt.$$

En la Sección 2.3 se probó que la función $N_\alpha(z,w)$ y todas sus derivadas parciales están uniformemente acotadas en $\Omega_T \times \Omega'$ con $\Omega' \subset \Omega_T$ compacto, ademas $N_\alpha(z,\cdot) \in H(S_T)$ Dado que $v_1 \in L^q_\beta(\Omega_T) \subset L^1_\beta(\Omega_T)$ se tiene que v es una función bien definida que satisface la ecuación del calor.

Como el espacio $C_c^\infty(\Omega_T)$ es denso en $L^p_\beta(\Omega_T)$ y $\Phi_\alpha \in \left(L^p_\beta(\Omega_T)\right)^*$ entonces

$$v(w)\tau^{\alpha-\beta} \in L^q_\beta(\Omega_T),$$

lo cual implica que $v \in L^q_{\left(\alpha-\frac{\beta}{p}\right)q}(\Omega_T)$. Por lo tanto $v \in b^q_{\left(\alpha-\frac{\beta}{p}\right)q}(S_T)$ y representa a Φ
Por último, necesitamos probar que la correspondencia $v \longmapsto \Phi$ es inyectiva

Observamos primero que por el Corolario 2.30 el operador P_α es una proyección continua de $L^q_{\left(\alpha-\frac{\beta}{p}\right)q}(\Omega_T)$ sobre $b^q_{\left(\alpha-\frac{\beta}{p}\right)q}(S_T)$ ya que

$$q > \frac{1}{1+\alpha}\left(1+\left(\alpha-\frac{\beta}{p}\right)q\right) \text{ si y sólo si } \beta > -1.$$

Supongamos que $\Phi = 0$ está representado por $v \in b^q_{\left(\alpha-\frac{\beta}{p}\right)q}(S_T)$ Sea $u \in C_c^\infty(\Omega_T)$, aplicando el Teorema de Fubini tenemos

$$\int_{\Omega_T} u(z)\, v(z)\, t^\alpha dxdt = \int_{\Omega_T} u(z)\,(P_\alpha v)(z)\, t^\alpha dxdt$$

$$= \int_{\Omega_T} u(z)\left(\int_{\Omega_T} N_\alpha(z,w) v(w)\, \tau^\alpha dyd\tau\right) t^\alpha dxdt$$

$$= \int_{\Omega_T} v(w)\left(\int_{\Omega_T} N_\alpha(z,w) u(z)\, t^\alpha dxdt\right) \tau^\alpha dyd\tau$$

$$= \int_{\Omega_T} v(w)\,(P_\alpha u)(w)\, \tau^\alpha dyd\tau = \Phi(P_\alpha u) = 0$$

De la densidad del espacio $C_c^\infty(\Omega_T)$ se sigue que $v = 0$.
Por el Teorema del mapeo abierto se sigue que las normas de $\|\Phi_\alpha\|$ y $\|v\|_{b^q_{\left(\alpha-\frac{\beta}{p}\right)q}(S_T)}$ son equivalentes. ■

Haciendo $\alpha = \beta = 0$ en el resultado anterior tenemos el siguiente

Corolario 3.2 *$b^p(S_T)^* = b^q(S_T)$ para todo $p > 1$*

3.2 El operador transpuesto P_α^*.

Sea $\alpha > -1$. Como el operador $P_\alpha : L^p(\Omega_T) \to b^p(S_T)$ es continuo para $p > \max\left(1, \frac{1}{1-\alpha}\right)$ (Teorema 2.29), entonces el operador transpuesto $P_\alpha^* : b^p(S_T)^* \to L^p(\Omega_T)^*$ es continuo para todo $p > \max\left(1, \frac{1}{1+\alpha}\right)$.

Del Teorema 3.1 se tiene que $b^p(S_T)^* = b^q(S_T)$ y $L^p(\Omega_T)^* = L^q(\Omega_T)$ bajo la dualidad

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega_T} u(z)\overline{v(z)}dz.$$

Sean $u \in C_c^\infty(\Omega_T)$ y $v \in C\left(\overline{S_T}\right) \cap H(S_T)$, usando el Teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned}\langle P_\alpha u, v\rangle &= \int_{\Omega_T}\int_{\Omega_T} N_\alpha(z, w)\, u(w)\, \tau^\alpha dw\overline{v(z)}dz \\ &= \int_{\Omega_T}\left\{\tau^\alpha \int_{\Omega_T} N_\alpha(z, w)\overline{v(z)}dz\right\} u(w)\, dw \\ &= \left\langle u, \tau^\alpha \int_{\Omega_T} N_\alpha(z, \cdot)\, v(z)\, dz\right\rangle.\end{aligned}$$

Se sigue que

$$P_\alpha^* v(z) = t^\alpha \int_{\Omega_T} N_\alpha(z, w)\, v(w)\, dw, \tag{3.1}$$

para todo $v \in b^q(S_T)$.

Teorema 3.3 *Sean $n, d \geq 1$ y $p > 1$. Si $u \in b^p(S_T)$, entonces $t^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $t^d\frac{\partial^d u}{\partial t^d} \in L^p(\Omega_T)$ Además existen constantes $C_{p,n}, C_{p,d} > 0$ tal que*

$$\left\|t^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\|_{L^p(\Omega_T)} \leq C_{p,n}\|u\|_{b^p(S_T)}$$

y

$$\left\|t^d\frac{\partial^d u}{\partial t^d}\right\|_{L^p(\Omega_T)} \leq C_{p,d}\|u\|_{b^p(S_T)}$$

para todo $u \in b^p(S_T)$.

Prueba. Si $u \in b^p(S_T)$, entonces

$$u(z) = \int\limits_{\Omega_T} N(z,w)\,u(w)\,dw. \tag{3.2}$$

Derivando bajo el signo de integral tenemos

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(z) = \int\limits_{\Omega_T} \frac{\partial^n N}{\partial x^n}(z,w)\,u(w)\,dw$$

Tenemos

$$\frac{\partial^n N}{\partial x^n}(z,w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \frac{i^n \pi^{2+n} m^{2+n}}{\gamma(1.\,2\pi^2 m^2 T)} e^{-\pi^2 m^2 (t+\tau)+\pi m i(x-y)}.$$

Sea D_n el operador definido como sigue

$$D_n u(z) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(z) = \int\limits_{\Omega_T} \frac{\partial^n N}{\partial x^n}(z,w)\,u(w)\,dw. \tag{3.3}$$

Por otro lado, haciendo $\alpha = \frac{n}{2}$ en (2 7) tenemos

$$N_{\frac{n}{2}}(z,w) = \frac{1+\frac{n}{2}}{2T^{1+\frac{n}{2}}} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \frac{2^{\frac{n}{2}} \pi^{2+n} m^{2+n}}{\gamma\left(1+\frac{n}{2},\,2\pi^2 m^2 T\right)} e^{-\pi^2 m^2 (t+\tau)+\pi m i(x-y)}$$

Consideremos el operador T_n definido como sigue

$$T_n u(z) = \int\limits_{\Omega_T} \left(-\frac{1+\frac{n}{2}}{2T^{1+\frac{n}{2}}} + N_{\frac{n}{2}}(z,w)\right) u(w)\,dw.$$

Sea $\beta_{m,n} = \frac{2^{\frac{n}{2}}\gamma(1,\,2\pi^2 m^2 T)}{i^n \gamma\left(1+\frac{n}{2},\,2\pi^2 m^2 T\right)}$ para todo $m \in \mathbb{Z}^*$ y $\beta_{0,n} = \frac{1+\frac{n}{2}}{2T^{1+\frac{n}{2}}}$. Sea $\mathcal{M}_n$ el operador multiplicador de Fourier definido por la sucesión $\left(\beta_{m,n}\right)$. Esto es,

$$\mathcal{M}_n\left(\sum a_m e^{i\pi m\theta}\right) = \sum \beta_{m,n} a_m e^{i\pi m\theta}$$

para todo polinomio trigonométrico $\sum a_m e^{i\pi m\theta}$.

De (2 6), (2 12) y (2.13) se sigue que

$$\beta_{m,n} = C_n + O\left(|m|^{-1}\right)$$

$$\beta_{m,n}^{-1} = C_n + O\left(|m|^{-\epsilon}\right)$$

para todo $0 < \epsilon < 1$. por lo tanto los operadores multiplicadores de Fourier $\mathcal{M}_n$ y $\mathcal{M}_n^{-1}$ son continuos en $L^p(S^1)$ para todo $1 < p < \infty$.

Definimos ahora $\mathcal{M}_n$ en $b^p(S_T)$. Sabemos que el espacio vectorial generado por el conjunto $\left\{e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}\right\}$ es denso en $b^p(S_T)$. $1 \leq p < \infty$. Basta entonces definir la acción de $\mathcal{M}_n$ en los elementos del conjunto $\left\{e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}\right\}$:

$$\mathcal{M}_n\left(e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}\right) = \beta_{m,n} e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}$$

Como en la demostración del Teorema 2.29 se puede ver que el multiplicador $\mathcal{M}_n$ induce un isomorfismo de $b^p(S_T)$ sobre si mismo.

De (3.3) se tiene que

$$D_n\left(e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}\right) = (\pi m i)^n e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$. Por otro lado es fácil ver que

$$T_n\left(e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}\right) = \left(\sqrt{2}\pi m\right)^n \frac{\gamma\left(1, 2\pi^2 m^2 T\right)}{\gamma\left(1 + \frac{n}{2}, 2\pi^2 m^2 T\right)} e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$ Lo anterior implica que

$$\left(\mathcal{M}_n \circ D_n\right)\left(e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}\right) = T_n\left(e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}\right)$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$.

De la continuidad de $\mathcal{M}_n^{-1}$ en $L^p(S^1)$ se sigue que existe una constante $C_n > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \|D_n u\|_{L^p(S^1)}^p &= \left\|\mathcal{M}_n^{-1}\left(T_n u\right)\right\|_{L^p(S^1)}^p \\ &\leq C_n \|T_n u\|_{L^p(S^1)}^p, \end{aligned}$$

donde u es una combinación lineal finita de elementos del conjunto $\left\{e^{-\pi^2 m^2 t + \pi m i x}\right\}$.

Multiplicamos la desigualdad anterior por $t^{\frac{np}{2}}$ e integramos en $(0, T)$. Por el Teorema de Tonelli tenemos

$$\left\|t^{\frac{n}{2}} D_n u\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p \leq C_n \left\|t^{\frac{n}{2}} T_n u\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p.$$

De (3.1) se sigue que

$$P_{\frac{n}{2}}^{*} u(z) = t^{\frac{n}{2}} \left(T_n u\right)(z) + \frac{1+\frac{n}{2}}{2T^{1+\frac{n}{2}}} t^{\frac{n}{2}} \int\limits_{\Omega_T} u(w)\, dw$$

Usando el hecho de que el operador $P_{\frac{n}{2}}^{*}$ es acotado en $b^p(S_T)$ para todo $p>1$ tenemos

$$\left\|t^{\frac{n}{2}} D_n u\right\|_{L^p(\Omega_T)} \leq C_{n,p} \left(\left\|P_{\frac{n}{2}}^{*} u\right\|_{L^p(\Omega_T)} + \|u\|_{b^p(S_T)} \left\|t^{\frac{n}{2}}\right\|_{L^p(\Omega_T)} \right)$$

$$\leq C_{n,p} \|u\|_{b^p(S_T)}$$

Análogamente, derivando bajo el signo de integral en (3.2) tenemos

$$\frac{\partial^d u}{\partial t^d}(z) = \int\limits_{\Omega_T} \frac{\partial^d N}{\partial t^d}(z,w)\, u(w)\, dw$$

Tenemos

$$\frac{\partial^d N}{\partial t^d}(z,w) = (-1)^d \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{\pi^{2+2d} m^{2+2d}}{\gamma\left(1, 2\pi^2 m^2 T\right)} e^{\pi^2 m^2 (t+r) + \pi m i (x-y)}$$

Sea $\tilde{D}_d$ el operador definido como sigue

$$\tilde{D}_d u(z) = \frac{\partial^d u}{\partial t^d}(z) = \int\limits_{\Omega_T} \frac{\partial^d N}{\partial t^d}(z,w)\, u(w)\, dw$$

Como antes se prueba que

$$\left\|t^d \tilde{D}_d u\right\|_{L^p(\Omega_T)} \leq C_d \left\|t^d T_{2d} u\right\|_{L^p(\Omega_T)}$$

$$= C_{d,p} \left(\left\|P_d^{*} u\right\|_{L^p(\Omega_T)} + \|u\|_{b^p(S_T)} \left\|t^d\right\|_{L^p(\Omega_T)} \right)$$

$$\leq C_{d,p} \|u\|_{b^p(S_T)}$$

■

Capítulo 4

Una descomposición atómica de $b^p\left(S_T\right)$.

En este capítulo obtenemos una descomposición atómica del espacio $b^p\left(S_T\right)$ para todo $p > 1$ El resultado principal de la tesis es que las funciones que están en el Espacio de Bergman $b^p\left(S_T\right)$, se pueden escribir como una suma de términos que dependen del núcleo reproductor N. Esto puede ser considerado como una extensión a los espacios de Bergman de la teoría atómica de los espacios de Hardy Coifman y Rochberg en [9] hicieron la descomposición atómica para los Espacios de Bergman de funciones holomorfas y armónicas definidas en regiones simétricas.

El resultado principal es el siguiente.

Teorema 4.1 *Sea $p > 1$. Existe una sucesión $\{w_m = (x_m, t_m)\} \subset \Omega_T$ y una constante $C_p > 0$ con las siguientes propiedades:*

(1) *Para cualquier $\{a_m\} \in \ell^p$, la función*

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t_m^{\frac{1}{2q}} N(z, w_m)$$

está en $b^p\left(S_T\right)$ y

$$\|u\|_{b^p(S_T)} \leq C_p \|\{a_m\}\|_{\ell^p};$$

(2) *Si $u \in b^p\left(S_T\right)$ entonces existe una sucesión $\{a_m\} \in \ell^p$ tal que*

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t_m^{\frac{1}{2q}} N(z, w_m)$$

y

$$\|\{a_m\}\|_{\ell^p} \leq C_p \|u\|_{b^p(S_T)}.$$

Primero vamos a construir unas familias de rectángulos $\{D_m\}$, $\left\{\widehat{D}_m\right\}$ y $\left\{\widetilde{D}_m\right\}$ con las siguientes propiedades:

1. Los rectángulos de la colección $\{D_m\}$ son "casi ajenos", es decir, la intersección de cualquier par de rectángulos de la colección tendrá medida cero. Además se cumple que

$$\bigcup D_m = [0,2] \times (0,T].$$

2. Los rectángulos de la colección $\left\{\widehat{D}_m\right\}$ satisfacen la condición geométrica del Lema 1.6, es decir

$$altura\left(\widehat{D}_m\right) = \left\{base\left(\widehat{D}_m\right)\right\}^2.$$

Además $D_m \subset \widehat{D}_m$ y los rectángulos de la colección $\left\{\widehat{D}_m\right\}$ "no se traslapan mucho" en el cilindro S_T, esto quiere decir que se puede encontrar $M \in \mathbb{N}$ tal que cualquier punto en S_T está a lo más en M rectángulos de la colección $\left\{\widehat{D}_m\right\} \subset S_T$ El punto w_m será el punto medio de la "tapa superior" de los rectángulos D_m, $\widehat{D}_m$ y $\widetilde{D}_m$.

3. Los rectángulos de la colección $\left\{\widetilde{D}_m\right\}$ no se traslapan mucho en el cilindro S_T.

Para simplificar la notación supondremos que las funciones en $b^p(S_T)$ son 1-periódicas.

Fijamos $0 < \delta < 1$. Sean $b_n = T^{\frac{1}{2}}(1-\delta)^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{n}{2}}$ y k_n el mayor entero que es menor o igual que b_n^{-1}, es decir $k_n = [b_n^{-1}]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$w_{n,i} = (x_{n,i}, t_n) = \left(\left(i+\tfrac{1}{2}\right)b_n, T\delta^n\right), \qquad i = 0, \dots, k_n - 1,$$

$$w_{n,k_n} = (x_{n,k_n}, t_n) = \left(\tfrac{k_n b_n + 1}{2}, T\delta^n\right),$$

$$D_{n,i} = [ib_n, (i+1)b_n] \times \left[T\delta^{n+1}, T\delta^n\right], \qquad i = 0, \dots, k_n - 1,$$

$$D_{n,k_n} = [k_n b_n, 1] \times \left[T\delta^{n+1}, T\delta^n\right],$$

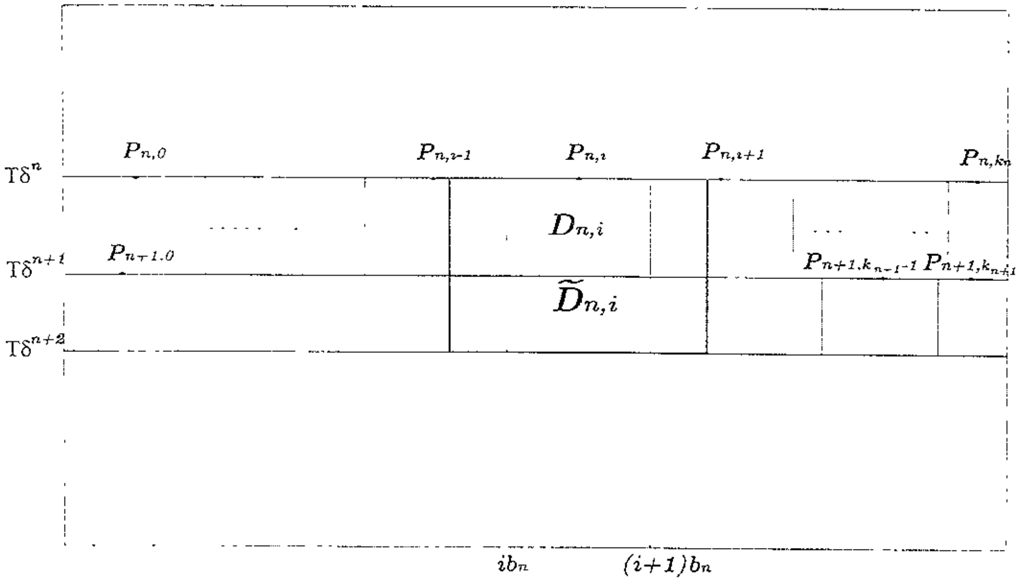
$$\widehat{D}_{n,i} = D_{n,i}, \qquad i = 0, \dots, k_n - 1,$$

$$\widehat{D}_{n,k_n} = \left[\tfrac{(k_n-1)b_n+1}{2}, \tfrac{(k_n+1)b_n+1}{2}\right] \times \left[T\delta^{n-1}, T\delta^n\right],$$

$$\widetilde{D}_{n,i} = \left[ib_n - \tfrac{1}{2}b_{n+1}, (i+1)b_n + \tfrac{1}{2}b_{n+1}\right] \times \left[T\delta^{n-2}, T\delta^n\right], \qquad i = 0, \dots, k_n - 1,$$

$$\widetilde{D}_{n,k_n} = \left[k_n b_n - \tfrac{1}{2}b_{n+1}, 1 + \tfrac{1}{2}b_{n+1}\right] \times \left[T\delta^{n-2}, T\delta^n\right]$$

La construcción anterior se comprenderá mejor con el siguiente dibujo:



Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos lo siguiente.

1. $w_{n,i}$ es el punto medio de la frontera superior de los rectángulos $D_{n,i}$, $\widehat{D}_{n,i}$ y $\widetilde{D}_{n,i}$ para todo $i = 0, \ldots, k_n$.

2. Los rectángulos $D_{n,i}$ son "casi ajenos", sólo se pueden intersectar en segmentos verticales. Por construcción tenemos

$$\bigcup_{i=0}^{k_n} D_{n,i} = [0,1] \times \left[T\delta^{n+1}, T\delta^{n}\right]. \tag{4.1}$$

   Por lo tanto

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{k_n} D_{n,i} = [0,1] \times (0,T].$$

3. El rectángulo $\widehat{D}_{n,i}$ se definió de tal manera que cumpliera

$$altura\left(\widehat{D}_{n,i}\right) = \left[base\left(\widehat{D}_{n,i}\right)\right]^2$$

   para poder aplicar el Lema 1.6

4. De la definición de k_n se sigue que $D_{n,k_n} \subset \widehat{D}_{n,k_n}$ Por tanto se cumple

$$D_{n,i} \subset \widehat{D}_{n,i}$$

para todo $i = 0, \ldots, k_n$. Además

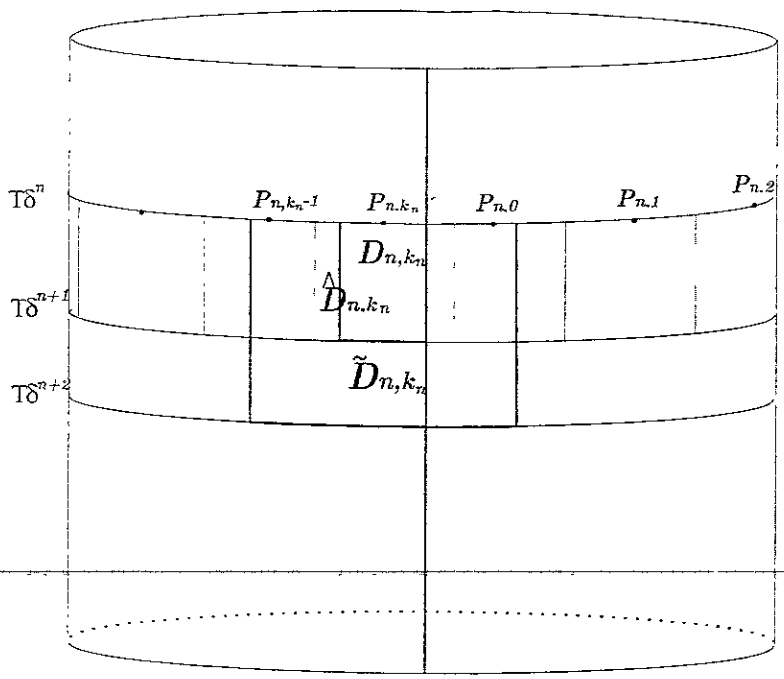
$$\left|\widehat{D}_{n,i}\right| = b_n \left(T\delta^n - T\delta^{n+1}\right) = T^{\frac{3}{2}} (1-\delta)^{\frac{3}{2}} \delta^{\frac{3n}{2}} = (1-\delta)^{\frac{3}{2}} t_n^{\frac{3}{2}}, \tag{4.2}$$

para todo $i = 0, \ldots, k_n$.

5. Dado que $b_{n+1} < b_n$ se sigue que $b_n < base\left(\widetilde{D}_{n,i}\right) < 2b_n$ para $i = 0, \ldots, k_n - 1$. Además como $1 - k_n b_n < base\left(\widetilde{D}_{n,k_n}\right)$ se tiene que

$$[0,1] \times \left[T\delta^{n+2}, T\delta^n\right] \subset \bigcup_{i=0}^{k_n} \widetilde{D}_{n,i}. \tag{4.3}$$

En adelante, pensaremos que todos los rectángulos $D_{n,i}$, $\widehat{D}_{n,i}$ y $\widetilde{D}_{n,i}$ están contenidos en el cilindro $S^1 \times (0, T]$. Así, la construcción se vería como sigue,



De (4.1) se tiene que

$$\bigcup_{i=0}^{k_n} D_{n,i} = S^1 \times \left[T\delta^{n+1}, T\delta^n\right] \tag{4.4}$$

Como $D_{n,i} \subset \widehat{D}_{n,i}$ para todo $i = 0, \ldots, k_n$ entonces

$$\bigcup_{i=0}^{k_n} \widehat{D}_{n,i} = S^1 \times \left[T\delta^{n+1}, T\delta^n\right] = G_n. \tag{4.5}$$

Notamos que $int(G_i) \bigcap int(G_j) = \emptyset$ si $i \neq j$.

También de (4.3) se tiene que

$$\bigcup_{i=0}^{k_n} \widetilde{D}_{n,i} = S^1 \times \left[T\delta^{n+2}, T\delta^n\right] = F_n. \tag{4.6}$$

Notamos que $int(F_i) \bigcap int(F_j) = \emptyset$ si $|i - j| \geq 2$.

Dada esta construcción tenemos los siguientes resultados.

Lema 4.2 *Salvo por un conjunto de medida cero, cualquier punto del cilindro $S^1 \times (0, T)$ está a lo más en 2 rectángulos de la colección $\left\{\widehat{D}_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, k_n\right\}$*

Prueba. Dado que $\widehat{D}_{n,0} = D_{n,0} = [0, b_n] \times \left[T\delta^{n+1}, T\delta^n\right]$ y $\widehat{D}_{n,i} = (b_n, 0) + \widehat{D}_{n,i-1}$ se sigue que $\widehat{D}_{n,i-1}$ y $\widehat{D}_{n,i}$ se intersectan en segmentos verticales para $i = 1, \ldots, k_{n-1}$.
Por otro lado, como $base\left(\widehat{D}_{n,k_n}\right) = b_n$ y

$$d\left(w_{n,k_n}, w_{n,0}\right), d\left(w_{n,k_n}, w_{n,k_n-1}\right) < \frac{b_n}{2}$$

se sigue que $\widehat{D}_{n,k_n}$ intersecta a lo más a los rectángulos $\widehat{D}_{n,k_n-1}$ y $\widehat{D}_{n,0}$

Si $z \in int(G_n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces de (4.5) y de lo anterior se sigue que z pertenece a lo más a 2 rectángulos de la colección $\left\{\widehat{D}_{n,i} : i = 0, \ldots, k_n\right\}$ ■

Lema 4.3 *Salvo por un conjunto de medida cero, cualquier punto del cilindro $S^1 \times (0, T)$ está a lo más en 6 rectángulos de la colección $\left\{\widetilde{D}_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, k_n\right\}$*

Prueba. Como $base\left(\widetilde{D}_{n,i}\right) < 2b_n$, $w_{n,i} = (b_n, 0) + w_{n,i-1}$ y $w_{n,i}$ es el punto medio de la tapa superior de $\widetilde{D}_{n,i}$ para $i = 0, \ldots, k_n - 1$ entonces $\widetilde{D}_{n,i}$ intersecta a lo más la mitad del área de los rectángulos $\widetilde{D}_{n,i-1}$ y $\widetilde{D}_{n,i+1}$ para $i = 0, \ldots, k_n - 2$ (hacemos $\widetilde{D}_{n,-1} = \widetilde{D}_{n,k_n-1}$) Además $\widetilde{D}_{n,k_n-1}$ también intersecta a lo más la mitad del área de los rectángulos $\widetilde{D}_{n,k_n-2}$ y $\widetilde{D}_{n,0}$.

Por lo tanto si $z \in \bigcup_{i=0}^{k_n-1} \widetilde{D}_{n,i}$ entonces z pertenece a lo más a 2 rectángulos de la colección $\left\{\widetilde{D}_{n,i} : i = 0, \ldots, k_n - 1\right\}$. Finalmente, si $w \in F_n$ entonces de lo anterior y de (4.6) se sigue que w pertenece a lo más a 3 rectángulos de la colección $\left\{\widetilde{D}_{n,i} : i = 0, \ldots, k_n\right\}$

Si $z \in int(G_n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $z \in int(F_{n-1}) \bigcap int(F_n)$ por lo tanto z pertenece a lo más a 6 rectángulos de la colección $\left\{\widetilde{D}_{n,i} : n \in \mathbb{N},\ i = 0, \ldots, k_n\right\}$. ∎

Lema 4.4 *Sea $p \geq 1$. Existe una constante $C_p > 0$ tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k_n} \left|\widehat{D}_{n,i}\right| |u(w_{n,i})|^p \leq C_p \|u\|^p_{b^p(S_T)}$$

para todo $u \in b^p(S_T)$.

Prueba. Notamos que el punto $w_{n,i}$ y el rectángulo $\widehat{D}_{n,i}$ cumplen con la condición geométrica del Lema 1.6, es decir, $base\left(\widehat{D}_{n,i}\right) = \left\{altura\left(\widehat{D}_{n,i}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$ y $w_{n,i}$ es el punto medio de la tapa superior del rectángulo $\widehat{D}_{n,i}$. Así, existe una constante C_p tal que

$$|u(w_{n,i})|^p \leq \frac{C_p}{\left|\widehat{D}_{n,i}\right|} \int_{\widehat{D}_{n,i}} |u(z)|^p \, dz$$

para todo $u \in b^p(S_T)$ y $p \geq 1$.

Usando el Lema 4.2, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k_n} \left|\widehat{D}_{n,i}\right| |u(w_{n,i})|^p \leq C_p \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k_n} \int_{\widehat{D}_{n,i}} |u(z)|^p \, dz \leq 2C_p \|u\|^p_{b^p(S_T)}.$$

∎

Lema 4.5 *Sea $p \geq 1$ y $0 < \delta < 1$. entonces existe una constante $C_{p,\delta} > 0$ tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k_n}\int_{D_{n,i}} |u(z) - u(w_{n,i})|^p \, dz \leq C_{p,\delta} \|u\|_{b^p(S_T)}^p.$$

para todo $u \in b^p(S_T)$

Prueba. Si $z = (x,t) \in D_{n,i}$, por el Teorema del Valor Medio tenemos que

$$|u(z) - u(w_{n,i})| \leq b_n \left|\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_z)\right| + b_n^2 \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\xi_z)\right| \tag{4.7}$$

donde ξ_z es un punto en el segmento de recta que une a los puntos z y $w_{n,i}$. La desigualdad anterior también es válida si $i = k_n$ ya que por contrucción la base del rectángulo D_{n,k_n} es menor o igual que b_n

Consideremos el rectángulo

$$R_z = \left[x - \frac{1}{2}b_{n+1}, x + \frac{1}{2}b_{n+1}\right] \times \left[t - b_{n+1}^2, t\right].$$

Entonces

$$R_z \subset \left[ib_n - \frac{1}{2}b_{n+1}, (i+1)\,b_n + \frac{1}{2}b_{n+1}\right] \times \left[T\delta^{n+2}, T\delta^n\right] = \tilde{D}_{n,i}$$

para todo $i = 0, \ldots, k_n - 1$.

Si $z \in D_{n,k_n} = [k_nb_n, 1] \times \left[T\delta^{n+1}, T\delta^n\right]$ entonces

$$R_z \subset \left[k_nb_n - \frac{1}{2}b_{n+1}, 1 + \frac{1}{2}b_{n+1}\right] \times \left[T\delta^{n+2}, T\delta^n\right] = \tilde{D}_{n,k_n}$$

El punto z y el rectángulo R_z satisfacen la condición geométrica del Lema 1.6, se sigue que existe una constante $C_p > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(z)\right|^p \leq \frac{C_p}{|R_z|}\int_{R_z}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(w)\right|^p dw$$

$$\frac{C_p}{b_n^3}\int_{R_z}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(w)\right|^p dw.$$

para todo $u \in b^p(S_T)$, $p \geq 1$. Lo anterior implica que

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}(z)\right|^p : z \in D_{n,i}\right\} \leq \frac{C_p}{b_{n+1}^3} \int\limits_{\widetilde{D}_{n,i}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(w)\right|^p dw.$$

Análogamente tenemos

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t}(z)\right|^p : z \in D_{n,i}\right\} \leq \frac{C_p}{b_{n+1}^3} \int\limits_{\widetilde{D}_{n,i}} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(w)\right|^p dw.$$

Usando lo anterior y (4.7) se tiene que

$$|u(z) - u(w_{n,i})|^p \leq C_p \left\{ \frac{b_n^p}{b_{n+1}^3} \int\limits_{\widetilde{D}_{n,i}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(w)\right|^p dw + \frac{b_n^{2p}}{b_{n+1}^3} \int\limits_{\widetilde{D}_{n,i}} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(w)\right|^p dw \right\}.$$

Por otro lado, si $w = (y, \tau) \in \widetilde{D}_{n,i}$ entonces $\tau \geq T\delta^{n+2}$. Así,

$$\int\limits_{D_{n,i}} |u(z) - u(w_{n,i})|^p dz \leq C_{p,T} \left\{ \frac{b_n^p |D_{n,i}|}{\delta^{(n+2)\frac{p}{2}} b_{n+1}^3} \int\limits_{\widetilde{D}_{n,i}} \left|\tau^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}(w)\right|^p dw \right.$$

$$\left. + \frac{b_n^{2p} |D_{n,i}|}{\delta^{(n+2)p} b_{n+1}^3} \int\limits_{\widetilde{D}_{n,i}} \left|\tau \frac{\partial u}{\partial t}(w)\right|^p dw \right\}.$$

Sabemos que $|D_{n,i}| \leq b_n^3$. Por tanto,

$$\frac{b_n^p |D_{n,i}|}{\delta^{(n+2)\frac{p}{2}} b_{n-1}^3} \leq \left[\frac{T(1-\delta)\delta^n}{\delta^{(n+2)}}\right]^{\frac{p}{2}} \left[\frac{T(1-\delta)\delta^n}{T(1-\delta)\delta^{n+1}}\right]^{\frac{3}{2}} = T^{\frac{p}{2}} \frac{(1-\delta)^{\frac{p}{2}}}{\delta^{p+\frac{3}{2}}},$$

y

$$\frac{b_n^{2p} |D_{n,i}|}{\delta^{(n+2)p} b_{n-1}^3} \leq \left[\frac{T(1-\delta)\delta^n}{\delta^{(n+2)}}\right]^p \left[\frac{T(1-\delta)\delta^n}{T(1-\delta)\delta^{n+1}}\right]^{\frac{3}{2}} = T^p \frac{(1-\delta)^p}{\delta^{2p+\frac{3}{2}}}.$$

Sea $C_{p,\delta} = C_{p\,T} \max\left\{T^{\frac{p}{2}}\frac{(1-\delta)^{\frac{p}{2}}}{\delta^{p+\frac{3}{2}}}, T^p\frac{(1-\delta)^p}{\delta^{2p+\frac{3}{2}}}\right\}$.

Finalmente, usando el Lema 4.3 y el Teorema 3.3 obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k_n}\int_{D_{n,i}}|u(z)-u(w_{n,i})|^p\,dz &\leq C_{p,\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k_n}\int_{\tilde{D}_{n,i}}\left|\tau^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}(w)\right|^p dw \\ &+ C_{p,\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k_n}\int_{\tilde{D}_{n,i}}\left|\tau\frac{\partial u}{\partial t}(w)\right|^p \\ &\leq 6C_{p,\delta}\left\|t^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^p_{L^p(\Omega_T)} + 6C_{p,\delta}\left\|t\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^p_{L^p(\Omega_T)} \\ &\leq C_{p,\delta}\|u\|^p_{b^p(S_T)}.\end{aligned}$$

■

Comentario 4.6 *Notamos que $C_{p,\delta} \to 0$ cuando $\delta \to 1$, para todo $p \geq 1$*

Para simplificar la notación numeramos los puntos $\{w_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, k_n\}$ en una sucesión $\{w_m\}$, así como las correspondientes familias de rectángulos como sigue

$$\begin{aligned}\{D_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, k_n\} &= \{D_m\}, \\ \left\{\widehat{D}_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, k_n\right\} &= \left\{\widehat{D}_m\right\} \\ \left\{\widetilde{D}_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, k_n\right\} &= \left\{\widetilde{D}_m\right\}.\end{aligned}$$

donde $w_m = (x_m, t_m)$ es el punto medio de la frontera superior de los rectángulos D_m, $\widehat{D}_m$ y $\widetilde{D}_m$. De (4.2) se sigue que

$$\left|\widehat{D}_m\right| = (1-\delta)^{\frac{1}{2}}\, t_m^{\frac{3}{2}}$$

Definimos los operadores $R_\delta : b^p(S_T) \to b^p(S_T)$, $T_\delta : \ell^p \to b^p(S_T)$ como sigue

$$(R_\delta u)(z) = \sum_{m=0}^{\infty}|D_m|\, u(w_m)\, N(z, w_m),$$

$$T_\delta(\{a_m\})(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left|\widehat{D}_m\right|^{\frac{1}{q}} N(z, w_m)$$

Lema 4.7 *El operador R_δ es acotado en $b^p(S_T)$ y el operador T_δ es acotado en ℓ^p para todo $p > 1$.*

Prueba. Sea $u \in C\left(\overline{S_T}\right) \bigcap H(S_T)$ Si denotamos con $\langle . \rangle$ la dualidad usual tenemos

$$\langle T_\delta(\{a_m\}), u\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left|\widehat{D}_m\right|^{\frac{1}{q}} \int_{\Omega_T} N(z, w_m)\, \overline{u(z)} dz$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left|\widehat{D}_m\right|^{\frac{1}{q}} \overline{u(w_m)}.$$

Usando la desigualdad de Hölder y el Lema 4 4. se sigue que

$$|\langle T_\delta(\{a_m\}), u\rangle| \leq \|\{a_m\}\|_{\ell^p} \left\| \left\{ \left|\widehat{D}_m\right|^{\frac{1}{q}} \overline{u(w_m)} \right\} \right\|_{\ell^q}$$

$$\leq C_p \|\{a_m\}\|_{\ell^p} \|u\|_{b^q(S_T)}.$$

Dado que $(b^q(\Omega_T))^* = b^p(\Omega_T)$, de lo anterior se sigue que el operador $T_\delta : \ell^p \to b^p(S_T)$ es acotado.

Para probar que el operador R_δ es acotado consideremos $u \in b^p(S_T)$ y definimos

$$a_m = \frac{|D_m|\; u(w_m)}{\left|\widehat{D}_m\right|^{\frac{1}{q}}},\; m \in \mathbb{N}.$$

Dado que $D_m \subset \widehat{D}_m$, entonces $|a_m| \leq \left|\widehat{D}_m\right|^{\frac{1}{p}} |u(w_m)|$. Usando nuevamente el Lema 4.4 tenemos que $\{a_m\} \in \ell^p$, más aún, el mapeo $u \longmapsto \{a_m\}$ es lineal y continuo de $b^p(S_T)$ en ℓ^p.

Notamos que

$$(R_\delta u)(z) = T_\delta(\{a_m\})(z).$$

El acotamiento del operador R_δ se sigue del acotamiento del operador T_δ. ∎

El Lema que sigue es la clave para la prueba del resultado principal de este capítulo.

Lema 4.8 *Sea $p > 1$. Existe $\delta' < 1$ tal que si $\delta \in \left(\delta', 1\right)$, entonces el operador R_δ es invertible en $b^p(S_T)$.*

Prueba. Sea $A_\delta = I - R_\delta$ con I el operador identidad. Basta probar que $\|A_\delta\| < 1$. Denotamos por $\langle , \rangle$ la dualidad usual. Sean $u, v \in C\left(\overline{S_T}\right) \bigcap H\left(S_T\right)$. Tenemos,

$$\langle R_\delta u, v\rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} |D_m|\, u(w_m)\, N(\cdot, w_m), v \right\rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} |D_m|\, u(w_m) \left\langle N(\cdot, w_m), v \right\rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} |D_m|\, u(w_m) \int_{\Omega_I} N(z, w_m)\, \overline{v(z)}\, dz$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} |D_m|\, u(w_m)\, \overline{v(w_m)}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\langle A_\delta u, v\rangle = \int_{\Omega_I} u(z)\, \overline{v(z)}\, dz - \sum_{m=0}^{\infty} |D_m|\, u(w_m)\, \overline{v(w_m)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{D_m} \left(u(z)\, \overline{v(z)} - u(w_m)\, \overline{v(w_m)} \right) dz$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{D_m} u(z) \left(\overline{v(z)} - \overline{v(w_m)} \right) dz + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{D_m} \overline{v(w_m)} \left(u(z) - u(w_m) \right)$$

$$= I_1 + I_2$$

Usando la desigualdad de Hölder dos veces y aplicando el Lema 4.5, se obtiene

$$|I_1| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_{D_m} |u(z)|^p \, dz \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{D_m} |v(z) - v(w_m)|^q \, dz \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left[\sum_{m=0}^{\infty} \int_{D_m} |u(z)|^p \, dz \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \int_{D_m} |v(z) - v(w_m)|^q \, dz \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C_{q\,\delta}^{\frac{1}{q}} \|u\|_{b^p(S_T)} \|v\|_{b^q(S_T)} .$$

Procediendo como antes, tenemos

$$|I_2| \leq \left[\sum_{m=0}^{\infty} |v(w_m)|^q |D_m| \right]^{\frac{1}{q}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \int_{D_m} |u(z) - u(w_m)|^p \, dz \right]^{\frac{1}{p}} .$$

Dado que $D_m \subset \widehat{D}_m$, se sigue del Lema 4.4 que

$$\sum_{m=0}^{\infty} |v(w_m)|^q |D_m| \leq C_q \|v\|_{b^q(S_T)}^q .$$

Usando el Lema 4.5 se tiene

$$|I_2| \leq C_q C_{p,\delta}^{\frac{1}{p}} \|u\|_{b^p(S_T)} \|v\|_{b^q(S_T)} .$$

Suponiendo que $C_p \geq 1$ y combinando las desigualdades obtenidas se sigue que

$$|\langle A_\delta u, v\rangle| \leq C_p \left(C_{p,\delta}^{\frac{1}{p}} + C_{q,\delta}^{\frac{1}{q}} \right) \|u\|_{b^p(S_T)} \|v\|_{b^q(S_T)} .$$

De la desigualdad anterior se tiene que

$$\|A_\delta\| = \|I - R_\delta\| \leq C_p \left(C_{p,\delta}^{\frac{1}{p}} + C_{q,\delta}^{\frac{1}{q}} \right) .$$

Dado que $C_{p,\delta} \to 0$ cuando $\delta \to 1$ para todo $p \geq 1$, se sigue el resultado. ∎

Ahora probamos el resultado principal de este capítulo:

Prueba. Teorema 4.1

Sea $\{a_m\} \in \ell^p$, *definimos la función*

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t_m^{\frac{3}{2q}} N(z, w_m).$$

Dado que $\left|\widehat{D}_m\right| = (1-\delta)^{\frac{3}{2}} t_m^{\frac{3}{2}}$, tenemos

$$(1-\delta)^{\frac{3}{2q}} u(z) = T_\delta(\{a_m\})(z)$$

Entonces (1) se sigue del Lema 4.7:

$$\|u\|_{b^p(S_T)} = C_{p,\delta} \|T_\delta(\{a_m\})\|_{b^p(S_T)} \leq C_{p,\delta} \|\{a_m\}\|_{\ell^p}.$$

Sea $u \in b^p(S_T)$, para probar (2) elegimos $\delta \in \left(\delta', 1\right)$ dado en el lema anterior de manera que el operador $R_\delta : b^p(S_T) \longrightarrow b^p(S_T)$ es invertible, por lo tanto existe $v \in b^p(S_T)$ tal que

$$u(z) = R_\delta v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} |D_m| \, v(w_m) N(z, w_m).$$

Sea $\{a_m\} = \left\{ t_m^{-\frac{3}{2q}} |D_m| \, v(w_m) \right\}$ Dado que $D_m \subset \widehat{D}_m$ y

$$\left|\widehat{D}_m\right| = (1-\delta)^{\frac{3}{2}} t_m^{\frac{3}{2}}$$

se tiene que

$$|a_m| \leq (1-\delta)^{\frac{3}{2}} t_m^{\frac{3}{2p}} |v(w_m)|$$

$$= (1-\delta)^{\frac{3}{2q}} \left|\widehat{D}_m\right|^{\frac{1}{p}} |v(w_m)|.$$

Del Lema 4.4 se tiene que $\{a_m\} \in \ell^p$ y además

$$\|\{a_m\}\|_{\ell^p} \leq C_{p,\delta} \|v\|_{b^p(S_T)}$$

Por lo tanto,

$$\|\{a_m\}\|_{\ell^p} \leq C_{p,\delta} \left\|R_\delta^{-1}\right\| \|u\|_{b^p(S_T)}$$

■

Corolario 4.9 *Sea δ' dada en el Lema 4.8. Si $\delta \in \left(\delta', 1\right)$ el operador $T_\delta : \ell^p \to b^p(S_T)$ es sobreyectivo.*

Prueba. Sea $u \in b^p(S_T)$. del Lema 4.8 se sigue que existe $v \in b^p(S_T)$ tal que

$$u(z) = R_\delta v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} |D_m|\, v(w_m)\, N(z, w_m).$$

Como antes, se prueba que la sucesión

$$\{a_m\} = \left\{ t_m^{-\frac{3}{2q}}\, |D_m|\, v(w_m) \right\}$$

está en ℓ^p. Además

$$u(z) = (1-\delta)^{-\frac{3}{2q}}\, T_\delta(\{a_m\}).$$

■

Bibliografía

[1] S. Agmon. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. Van Nostrand Mathematical Studies. No. 2D. Van Nostrand Co., Inc. Princeton-Toronto-London, 1965.

[2] N. Aronszajn. *Theory of Reproducing Kernels. Trans. Amer. Math. So.* 68 (1950). 337-404. Attéle, K R M

[3] S. Axler, P. Bourdon. W. Ramey. *Harmonic Function Theory*. Springer Verlag. New York. 1992

[4] S. Axler, *Bergman Spaces and their operators*. Surveys of Some Recent Results in Operator Theory Vol. I. Pitman Research Notes in Math. 171. 1988. 1-50

[5] S. Bergman. *The Kernel Function and Conformal Mapping*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 5. American Mathematical Society, Providence, RI. 1970.

[6] O. Blasco and S. Pérez-Esteva. *L_p Continuity of Projectors of Weighted Harmonic Bergman Spaces*, Collect. Math. 51. No. 1 (2000). 49-58

[7] J R Cannon. *The One-Dimensional Heat Equation*. Addison-Wesley, New York. 1984.

[8] J R Cannon and S. Pérez-Esteva, *Partial Differential Equations and Applications*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 177.

[9] R. R. Coifman and R. Rochberg. *Representation Theorems for Holomorphic and Harmonic Functions in L^p*. Astérisque 77, Société Mathématique de France. 1980

[10] A. E. Djrbashian and F. A. Shamoian, *Topics in the Theory of A^p_α spaces*. Teubner-Texte zur Mathematik, 105. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1988.

[11] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators I,II,III*. Interscience, New York. 1972

[12] F. Forelli and W. Rudin, *Projections on Spaces of Holomorphic Functions on Balls*. Indiana Univ. Math. J. 24 (1974). 593-602

[13] J. B. Garnett. *Bounded* [illegible] *Functions*. [illegible]ademic Press. New York. 1981

[14] M. Guzmán-Partida. *Hardy Spaces of Conjugate Temperatures*, Studia Mathematica 122 (2). 1997.

[15] L. Hörmander. *Linear Partial Differential Operators*. Springer Verlag, Berlin. 1963.

[16] G. S. Innis. *Some Reproducing Kernels for the Unit Disk*, Pacific J. Math. 14 (1964). 177-186.

[17] K. Zhu. *Operator Theory in Functions Spaces*. M. Dekker. New York, 1990.

[18] E. Ligocka, *On the Forelli-Rudin Construction and Weighted Bergman Projections*, Studia Math. 94.3 (1989). 257-272.

[19] T. H. MacGregor and M. I. Stessin, *Weighted Reproducing Kernels in Bergman Spaces*, Michigan Math. J. 41 (1994), 523-533.

[20] S. Pérez-Esteva. *Duality on Vector-valued Weighted Harmonic Bergman Spaces*, Studia Mathematica 118 (1) (1996). 37-47.

[21] R. Rochberg. *Decomposition theorems for Bergman Spaces* , Operator and Function Theory, D. Reidel. 1985. 225-277.

[22] S. Saitoh. *Theory of Reproducing Kernels and Its Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics 189. 1988.

[23] A. Shields and D. Williams. *Bounded Projections, Duality, and Multipliers in Spaces of Analytic Functions*. Trans. Amer. Math. Soc. 162 (1971), 287-302.

[24] A. Shields and D. Williams. *Bounded Projections. Duality, and Multipliers in Spaces of Harmonic Functions*, J. Reine Angew. Math. 299/300 (1978), 256-279.

[25] A. Torchinsky. *Real-variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, Orlando, 1986.

[26] C. B. Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer, New York, 1966.

[27] D.V. Widder. *The Heat Equation*, Academic Press, New York, New York.

[28] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.