UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELACION MATEMATICA
(PROBLEMAS DE OPTIMIZACION)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

NORMA SUSANA LOPEZ RICARDI

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. MARIA ARACELI BERNABE ROCHA

2001

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: Modelación Matemática (Problemas de Optimización)

realizado por Norma Susana López Ricardi

con número de cuenta 8652232-2, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario M. en C. María Araceli Bernabé Rocha

Propietario M. en C. Elena De Oteyza De Oteyza

Propietario M. en C. Emma Lam Osnaya

Suplente Mat. Adrián Girard Islas

Suplente Act. Mauricio Aguilar González

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

ÍNDICE

Introducción
La Modelación Matemática 1
Técnica de los Modelos Matemáticos 2
Clasificación de los Modelos Matemáticos 4

Reflexión de la Luz: Tres Modelos Alternativos 5
Modelo Geométrico 9
Modelo Algebraico 12
Modelo através de Cálculo 23

¿Por qué algunas aerolíneas sobrevenden boletos? 26
Problemas con las aerolíneas 30
Notación 31
Desarrollo del Modelo 31
Un primer intento 32
Un mejor modelo 34
Un refinamiento más 39
Aplicación 47
Otro refinamiento más 50

Aplicación a la Industria Petrolera 62
Programación Lineal 63
Optimización de los recursos de una refinería 64
Planteamiento del problema 69
Restricciones 71
Objetivo 76
Solución 76

Hágase rico, invierta dinero 81
Cómo decidir en qué invertir 83
Construcción del modelo 88
Datos de inicio del modelo 90
Modelación 91
Condiciones sobre el número de activos 96
Criterio de decisión (Función Objetivo) 97
El modelo 98
Solución para el inversionista 99
Restricciones 101
Función Objetivo 106
Solución 106

Conclusiones 118

Bibliografía

INTRODUCCIÓN

Probablemente la mejor manera de introducirnos a los "modelos matemáticos" es dando un paso hacia atrás al concepto "modelo" y recordar que los modelos no necesariamente son matemáticos. Es importante recalcar que las dificultades para construir modelos matemáticos no son más o menos difíciles que las involucradas en construir modelos no matemáticos.

Pero, ¿qué significa exactamente la palabra "modelo"? Para dar respuesta a esta pregunta, supongamos que usted, el lector, y su pareja recibieron por correo un folleto que anuncia un nuevo desarrollo habitacional cerca de su ciudad que incluye casas, departamentos y centros comerciales. El folleto incluye un mapa que tiene dibujadas líneas, curvas y rectas que representan las carreteras, los rectángulos representan casas y otros diagramas representan diferentes aspectos del desarrollo.

Sabemos claramente que el mapa y lo que éste ilustra no es el desarrollo habitacional actual. Es un *modelo* del desarrollo.

El modelo es la representación de algo. Si el modelo da una imagen lo suficientemente exacta de la entidad real, depende completa y únicamente de qué características son importantes para usted.

¿De qué otra manera se usa la palabra "modelo"? Una persona podría pensar en una mujer atractiva modelando un traje de baño.

Aquí, el fabricante o la tienda departamental está tratando de vender trajes de baño y más que exhibirlos en un mostrador, ellos tienen un *modelo* para darle una idea de cómo se vería el traje de baño en algún familiar suyo si lo fuera a comprar.

En este caso, el modelo podría no darle una imagen muy exacta de cómo se vería en la persona para quien es comprado; sin embargo, a usted podría no importarle.

Ahora que se ha ejemplificado el significado de la palabra modelo, se puede intuir lo que son los modelos matemáticos. Como su nombre lo indica, los modelos matemáticos utilizan a las Matemáticas como herramienta principal para su construcción y una vez elaborados, permiten dar solución a una variedad de situaciones y problemas.

El proceso para construir estos modelos se inicia observando y formulando cuidadosamente el problema y a continuación se construye el modelo matemático que intenta abstraer la esencia del problema real.

Los modelos matemáticos permiten realizar experimentos que frecuentemente no serían posibles con la situación real.

La hipótesis de que el modelo es una representación lo suficientemente precisa de las características esenciales de la situación, permite que las soluciones que se obtengan a partir de él sean válidas para el problema real.

Se debe hacer notar que el problema de modelar una situación de la vida real de una forma matemática puede ser muy complicado y variado.

En este trabajo se presenta la forma en que se pueden construir y resolver algunos modelos matemáticos los cuales representan situaciones de la vida real. Para poder hacer esto, primero se analiza toda la información disponible del problema y a continuación se establecen las relaciones matemáticas presentes en él. Una vez hecho lo anterior, se procede a la construcción del modelo matemático y a la búsqueda de la solución.

Cada problema, distinto entre sí, ha permitido la aplicación de distintas áreas de la matemática como son: Cálculo, Algebra, Geometría, Programación Lineal, Probabilidad y Teoría de Portafolios, para encontrar la solución a cada uno de ellos. Además, se hizo necesario emplear el software conocido como LINDO (Linear, Interactive, and Discrete Optimizer) para la obtención de soluciones numéricas.

EL OBJETIVO DE ESTE TRABAJO

El objetivo de este trabajo es presentar una forma en que muchas áreas de las matemáticas pueden ser empleadas en la modelación para resolver algunas situaciones de la vida real.

Es muy importante hacer notar que la dificultad para determinar la solución depende en muchas ocasiones de la construcción adecuada del modelo; no hay que olvidar que gracias a las distintas áreas de las matemáticas (como son estadística, ecuaciones diferenciales, programación lineal, álgebra, geometría, cálculo, etc.) podemos generar varios modelos para una situación específica.

En este trabajo iniciamos con una introducción a los modelos matemáticos, las técnicas de modelación y sus posibles clasificaciones. Posteriormente se presentan cuatro modelos basados en varios artículos de modelación, con una aplicación a una situación real.

El primer modelo consiste en resolver un mismo problema a través de diferentes técnicas matemáticas. El problema es establecer matemáticamente el Principio de Fermat del menor tiempo, el cual establece que la luz viaja desde un punto a otro de tal forma que le toma el menor tiempo posible para hacerlo.

En la construcción de los modelos matemáticos para solucionar el problema se emplea geometría, álgebra y cálculo. Es decir, se construyen tres modelos diferentes los cuales generan la misma solución para el problema del Principio de Fermat. La intención del modelo es hacer notar que algunos problemas se pueden solucionar mediante diversas técnicas.

El segundo modelo presenta y analiza las razones por las cuales generalmente las aerolíneas venden más lugares de los que hay disponibles en los vuelos. Al inicio del modelo, las cantidades así como los precios se consideran como información fija y conocida, lo que permite un análisis sencillo y simple. Pero al ir desarrollando el modelo, se toman en consideración situaciones tales como que algunos pasajeros pueden no llegar al vuelo, las diferentes tarifas de boletos, el costo de bajar del avión a un pasajero registrado, etcétera.

De esta manera se van agregando cada vez más restricciones al modelo para las cuales es necesario estimar la información desconocida, convirtiéndolo en un modelo más complicado pero que a la vez permite llegar a uno sofisticado y completo. Para este modelo en particular se utiliza como herramienta fundamental la Teoría de la probabilidad.

El tercer modelo surge de una aplicación o de un caso práctico de la industria petrolera. El problema consiste en maximizar la utilidad total de los productos finales de una refinería. Los productos finales considerados son gasolinas y combustibles, obtenidos después de procesar dos tipos de aceite crudo. Los procesos empleados dentro de la refinería son: *destilación*, *reforming* (reformar), *cracking* (craqueo) y *blending* (mezclar). Por medio del proceso de destilación se obtienen diversos productos utilizados en otros procesos que a su vez generan otros productos y así de esta forma se obtienen los productos finales. La herramienta empleada para resolver este problema es la programación lineal. Como veremos, el modelo involucra restricciones lineales de igualdad y desigualdad.

El cuarto modelo, un problema típico de la teoría de portafolios, presenta la forma matemática mediante la cual un inversionista puede maximizar sus ganancias al invertir en unos cuantos instrumentos. Para tal efecto, la programación entera es empleada como herramienta para dar la solución.

Es importante observar que estos ejemplos son ilustrativos y que existen problemas más complejos en los cuales se hace necesario emplear varias técnicas matemáticas por lo cual no pueden ser encasillados solo dentro de un área.

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

Muchas veces nos enfrentamos a diversos problemas que no podemos resolver de manera fácil. Por ejemplo, qué hace un doctor si necesita conocer el volumen de sangre de un paciente sin que el paciente muera desangrado, cómo se estima el promedio de vida de un foco sin tener que encenderlos todos y esperar hasta que alguno se funda, o de qué manera conocer el efecto en la economía de un país al reducir el impuesto en un veinte por ciento sin reducirlo actualmente, etcétera.

Todos estos problemas y otros similares se pueden resolver y se han resuelto por medio de modelos matemáticos.

Los modelos matemáticos son una representación matemática de la situación o problema real. Un principio de gran importancia para la ciencia es el siguiente: cuando se quiera encontrar el valor de una entidad que no pueda ser medida directamente, se introducen símbolos $x, y, z, ...$ para representar la entidad y algunas otras que varían con ella; después se recurre a las leyes físicas, químicas, biológicas o económicas y se utiliza toda la información disponible para establecer relaciones entre estas variables. Algunas relaciones se pueden calcular o son conocidas y otras que no se pueden calcular directamente se tienen que encontrar.

Para resolver un problema real primero se desarrolla un modelo matemático para él, luego se resuelve el modelo y finalmente se interpreta la solución en términos del problema original.

Es más fácil resolver las ecuaciones matemáticas, si se sabe cómo fueron formuladas. Por otra parte, con mucha frecuencia los modelos matemáticos son el único camino para resolver problemas. Así, los métodos directos para medir el volumen de sangre de un ser humano o medir la vida de un foco son imposibles de usar, por lo que la modelación matemática es la única alternativa.

El empleo de modelos matemáticos resulta ser de gran utilidad así como más económico.

TÉCNICA DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

La modelación matemática consiste en traducir los problemas del mundo real en problemas matemáticos, resolverlos e interpretar estas soluciones en el lenguaje del mundo real.

En toda su generalidad un problema del mundo real rara vez se puede traducir en un problema matemático y aún si se pudiera, podría no ser posible resolverlo. Como esto es muy frecuente, es necesario "simplificar" el problema a otro problema muy parecido al original que pueda ser traducido y resuelto matemáticamente. En esta simplificación, se trata de conservar todas las características esenciales del problema sin considerar las características que no son muy relevantes a la situación que se estudia.

Algunas veces los supuestos de esta simplificación podrían parecer bastante drásticos. Por ejemplo, al considerar el movimiento de los planetas, se podrían considerar a los planetas y al Sol como puntos de masa e ignorar su tamaño y estructura. La justificación para tales consideraciones se encuentra en la cercanía o proximidad entre las observaciones y las predicciones de los modelos matemáticos.

Si la comparación no es satisfactoria entonces se pueden modificar los supuestos de la simplificación o buscar otro planteamiento para el modelo matemático.

Esto nos conduce al *procedimiento de los doce puntos* para resolver problemas a través de modelos matemáticos:

i) Tener clara la situación del mundo real por resolver. Encontrar todas las características esenciales de la situación y encontrar los aspectos irrelevantes o cuya relevancia es mínima. Es importante decidir qué aspectos deben ser considerados y cuáles ignorados.

ii) Pensar en todas las leyes físicas, químicas, biológicas, sociales, económicas que podrían ser relevantes a la situación. Es necesario reunir información y analizarla para obtener una idea inicial de la situación.

iii) Formular el problema.

iv) Pensar en todas las variables y parámetros involucrados. Clasificarlos en conocidos y desconocidos.

v) Pensar en el modelo matemático más apropiado y traducir el problema en un lenguaje matemático conveniente.

vi) Pensar en todas las formas posibles de resolver las ecuaciones del modelo. Los métodos podrían ser analíticos, numéricos o de simulación.

vii) Investigar la posibilidad de que al realizar un cambio razonable en las suposiciones esto pudiera producir una solución analítica. Tratar de desarrollar nuevos métodos para resolver las ecuaciones del modelo si éstos son necesarios.

viii) Hacer un análisis de error del método usado. Si el error no está dentro de límites aceptables, cambiar el método de solución.

ix) Traducir la solución final.

x) Comparar las predicciones con las observaciones disponibles. Aceptar el modelo si la comparación es admisible. Si no lo es, entonces examinar las suposiciones y cambiarlas en relación con las discrepancias observadas.

xi) Continuar con el procedimiento hasta obtener un modelo que exponga toda la información básica y las observaciones.

xii) Obtener conclusiones del modelo y examinar éstas con la información básica y adicional que se obtenga y ver si todavía esta comparación es congruente.

CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

Los modelos matemáticos se pueden clasificar teóricamente de acuerdo con la materia o disciplina que estudia los fenómenos que los origina. Así, se tienen modelos matemáticos en Física, Química, Economía, Psicología, Biología, Ingeniería, etc. También existen modelos matemáticos de transportación, de contaminación, de sistemas políticos, de distribución de tierras, etcétera.

Por otra parte, no existe una única clasificación de los modelos matemáticos; éstos también se pueden clasificar de acuerdo con las técnicas matemáticas empleadas para su solución, es decir que si, por ejemplo, para resolver un problema se emplea el álgebra, entonces el modelo será algebraico. Así existen modelos matemáticos a través de álgebra lineal y matrices, de gráficas, de programación matemática, de cálculo y de cualquier disciplina de la matemática.

Los modelos matemáticos también pueden ser clasificados respecto al propósito que tienen, de modo que hay modelos matemáticos para descripción, para optimización, para control, para predicción o para movimiento.

O bien, clasificarlos de acuerdo a la naturaleza de los mismos, es decir, en Lineales y No Lineales de acuerdo a las ecuaciones que los describen; en Estáticos y Dinámicos si son tomadas en consideración las variaciones con respecto al tiempo; en Determinísticos o Estocásticos si se toma en cuenta a la probabilidad y en Discretos o Continuos si las variables involucradas son discretas o continuas.

En la práctica, al construir modelos matemáticos que representan la esencia de un problema de la vida real intervienen muchos factores y condiciones de diversos tipos. En particular, en cuanto a su solución, se emplean varias herramientas ya sea de la matemática, la computación u otras disciplinas. Por lo tanto, un modelo matemático "real" es casi imposible clasificarlo dentro de una área en particular.

REFLEXIÓN DE LA LUZ: TRES MODELOS ALTERNATIVOS[1]

De todos nuestros sentidos, la vista es la que más colabora para conocer el mundo que nos rodea. Por esta razón probablemente sea la Óptica la parte de la Física que estudia los fenómenos luminosos, una ciencia muy antigua.

Al mirar a nuestro alrededor vemos muchos objetos, pero al cerrar los ojos y oscureciendo la sala, estos objetos ya no se percibirán. Además, no se podrán ver otros objetos que existen fuera de la sala, a pesar de que la sala estuviera iluminada y se tuvieran los ojos abiertos.

En la vida diaria nos encontramos en situaciones muy diversas relacionadas con la luz o con la vista. Por ejemplo, algunos objetos que vemos tienen colores, pero éstos serán muy diferentes según se vieran con la luz del Sol o con luz artificial. También, si un objeto está detrás de nosotros no lo vemos, pero se podrá hacer visible a través de un espejo retrovisor. La posición en que vemos un objeto al estar dentro del agua no es aquella que ocupa realmente y que percibimos por el tacto. Estas situaciones nos llevan a formular algunas preguntas: ¿Cómo vemos? ¿Cuándo no podemos ver un objeto? ¿Qué es la luz?

Antiguamente algunas explicaciones a estas situaciones iban desde ideas que de nuestros ojos emanaban pequeñas partículas que al alcanzar los objetos los hacían visibles hasta considerar a la luz como algo inmaterial que ocurría en el espacio entre el ojo y el objeto visto. Al tratar de responder a las preguntas anteriores se contribuyó a comprender algunos fenómenos y que otros fueran descubiertos.

[1] J.N Kapur "*Mathematical Modelling*", New York; John Wiley, 1988, p. 45-58.

Al observar los objetos a nuestro alrededor, podemos darnos cuenta de que existen dos tipos: unos que producen luz como el sol, una lámpara, etcétera; y otros que no producen luz, sino que la reciben de otros objetos y la reflejan en nuestra dirección, como un mueble, una persona, un libro, etcétera. Los objetos que están siempre enviando luz, independientemente de la presencia de otros cuerpos, se llaman *fuentes de luz* u *objetos luminosos*.

Por otro lado, aquellos objetos que envían la luz recibida de otros cuerpos, se llaman *objetos iluminados*.

Cuando la luz atraviesa ciertos cuerpos iluminados como el vidrio de una vitrina o una hoja de papel celofán, decimos que estos son *objetos transparentes*. Pero cuando los objetos no dejan pasar la luz a través de ellos, como un mueble, una persona, un objeto metálico, entonces se les conoce como *objetos opacos*. En general, se puede decir que todos los objetos al recibir luz, reflejan una parte en determinada dirección, difunden otra en todas las direcciones y transmiten o absorben otra.

Propagación rectilínea de la luz, rayos y haces de luz

Uno de los hechos sobre el comportamiento de la luz que se hace más evidente en nuestras observaciones diarias es su propagación rectilínea. ¿Quién no recuerda cuando el polvo que está en el aire difunde la luz y nos muestra su trayectoria, que es perfectamente rectilínea?. Este hecho muestra que la luz se propaga en forma recta y sin darnos cuenta aceptamos la imposibilidad de que la luz rodee un objeto o se curve.

Por ejemplo, para escuchar el ruido de la calle no tenemos la necesidad de estar en línea recta frente a la ventana pero no podremos ver lo que está pasando en la calle si la recta que une nuestros ojos con el objeto no pasa por la ventana.

Al colocar enfrente de un objeto opaco una fuente de luz se podrá ver su sombra bien definida detrás del objeto. El contorno de la sombra se obtiene trazando rectas que salen de la fuente y pasan por el contorno del objeto. Esas rectas se llaman *rayos de luz* y representan el camino que describe la luz o la dirección en que la perturbación luminosa se propaga. En realidad un punto luminoso envía luz en todas las direcciones alrededor de él. Un conjunto de rayos luminosos que salen de un punto luminoso conforman un *haz de luz*.

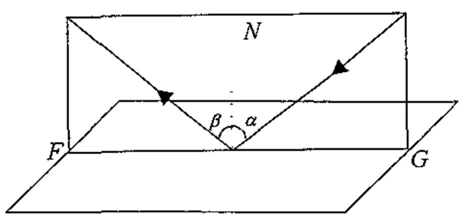
Cuando un haz de luz viaja en el aire y la dirección de sus rayos no pasan por nuestra vista no podremos percibirlo a menos que en el aire haya ciertas partículas capaces de difundir la luz (por ejemplo, el polvo). La luz del haz llegará a nuestros ojos a través de la difusión y podremos verla.

Reflexión de la luz

Si un haz de luz que se propaga en el aire incide sobre la superficie de cierta cantidad de agua o sobre la superficie de un pedazo de vidrio, entonces el haz experimentará reflexión, volviendo parte de la luz a propagarse en el aire. Es importante recordar que en los cuerpos opacos la luz se refleja casi totalmente y que gracias a ella se puede ver el cuerpo. Usted distingue esta hoja de papel porque la luz proveniente de un cuerpo luminoso (el sol o una lámpara) es reflejada por el papel y penetra en sus ojos.

Si la superficie reflectora no tiene irregularidades, como la superficie de un espejo o el agua de una lago tranquilo, entonces el haz reflejado tendrá una dirección bien determinada, es decir, la luz se reflejará en una sola dirección. En este caso se dice que la reflexión es *especular*. Por otro lado, cuando un haz de luz incide en una superficie irregular entonces la luz se reflejará en todas las direcciones y el haz reflejado no es muy definido. Se dice entonces que hubo *difusión de la luz* (*reflexión difusa*). La luz reflejada por esta hoja es difusa por hacerlo en todas direcciones y eso permite ver esta hoja en cualquier posición.

Para comprender el significado del fenómeno conocido como reflexión, vamos a utilizar la siguiente gráfica,



En la gráfica se representa solamente un rayo del haz incidente y un rayo del haz reflejado. Con ayuda del plano normal a la superficie reflectora pasando por el punto de incidencia podemos mostrar que para cualquier dirección del rayo incidente, siempre estarán en el mismo plano, el rayo, la normal N y el rayo reflejado. Lo anterior constituye la *1ª. Ley de la Reflexión*, es decir, que el rayo incidente y la normal N determinan un plano perpendicular a la superficie reflectora lo que hace que el rayo reflejado pertenezca necesariamente a este mismo plano.

También está representado en la gráfica tanto el ángulo de incidencia, α, como el ángulo de reflexión, β. Observemos que éstos son los ángulos que los rayos incidente y reflejado forman con la normal N. La relación entre estos ángulos muestra que siempre $\alpha = \beta$. Lo que equivale a establecer que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Esto a su vez constituye la *2ª. Ley de la Reflexión.*

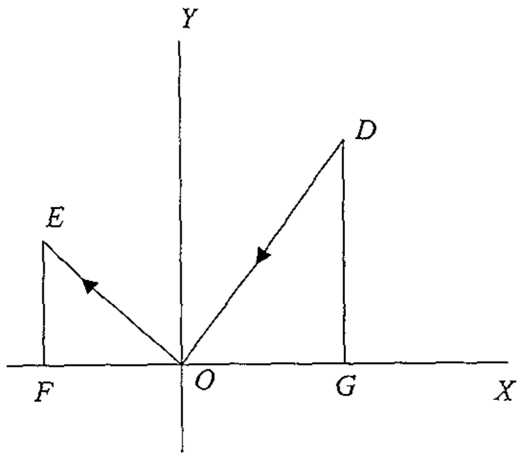
SEGUNDA LEY DE LA REFLEXIÓN

El objetivo del siguiente ejemplo es mostrar que un resultado de la Física como la 2ª. Ley de la Reflexión puede ser modelada matemáticamente y demostrada mediante diferentes técnicas. Para este caso en particular emplearemos geometría, álgebra y cálculo, dando así origen a los tres modelos alternativos.

Para establecer la 2ª. Ley de la Reflexión iniciaremos empleando la representación geométrica obtenida de la 1ª. Ley de la Reflexión. Es decir, consideraremos la reflexión de un rayo de luz en el plano normal.

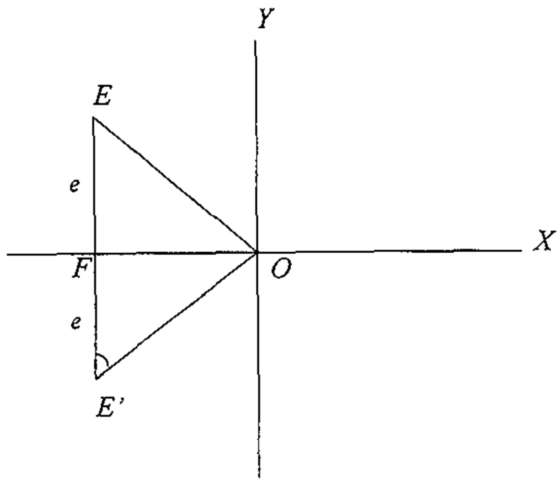
MODELO GEOMÉTRICO

Emplearemos la geometría como herramienta para demostrar que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Por lo tanto, al modelo construido lo denominaremos un modelo geométrico. Para tal efecto, si la siguiente gráfica representa el plano normal, se tiene

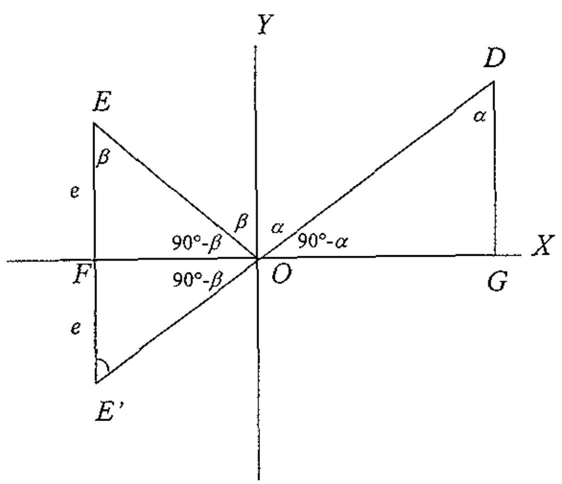


Donde la luz viaja de un punto D a un punto E después de ser reflejada desde un espejo FG; el rayo de luz será incidente en un punto O del espejo. El Principio de Fermat asegura que la luz viaja en el menor tiempo posible de tal forma que la distancia recorrida es la mínima. Desde el punto de vista gráfico tendremos que $\overline{DO}+\overline{OE}$ es mínimo o equivalentemente que $\overline{DO}+\overline{OE'}$ es mínimo, donde E' es el reflejo de E sobre $\overline{FG}$.

Esto se puede observar en la siguiente gráfica,



Obsérvese que los triángulos $\Delta EFO = \Delta FOE'$; en particular, el ángulo $\angle EOF$ es igual al ángulo $\angle FOE'$. Al reunir todos los elementos anteriores en una sola gráfica obtenemos lo siguiente,



Si β denota el ángulo de reflexión del rayo de luz, entonces el ángulo $\angle FOE' = 90°-\beta$. Si α denota el ángulo de incidencia del rayo de luz, entonces el ángulo $\angle DOG = 90°-\alpha$.

Recordemos que la distancia mínima entre dos puntos esta determinada por la línea recta que los une, por lo tanto $DO+OE'$ será mínimo cuando D,O,E' sean colineales. Lo anterior permite concluir que

$\angle FOE' = \angle DOG$ (ángulos opuestos por el vértice)

Como $\angle FOE' = 90° - \beta$ y

$\angle DOG = 90° - \alpha$

por lo tanto, $\alpha = \beta$

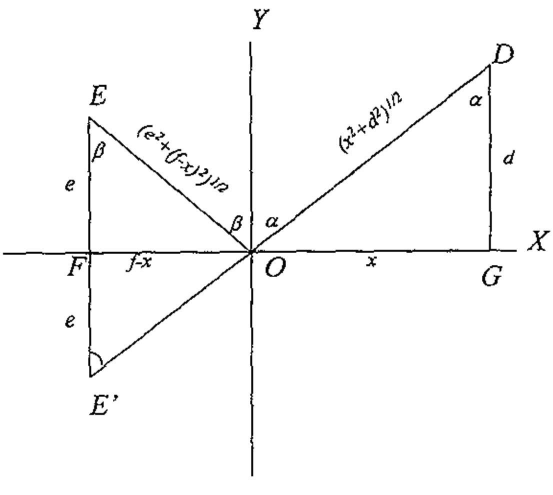
Lo que equivale a decir que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Esta misma ley se puede demostrar con un modelo algebraico, es decir que la herramienta utilizada para resolverlo es el álgebra.

MODELO ALGEBRAICO

Para mostrar que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, iniciemos con la siguiente notación.

$$f = FO + OG$$
$$x = OG$$



De la figura anterior sea

$m = DO+OE$; como $DO = (d^2+x^2)^{1/2}$ y $OE = (e^2+(f\text{-}x)^2)^{1/2}$ entonces

$$m = (d^2+x^2)^{1/2} + (e^2+(f\text{-}x)^2)^{1/2}$$

elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación:

$$m^2 = \left[(d^2+x^2)^{1/2}+(e^2+(f-x)^2)^{1/2}\right]^2$$

$$m^2 = d^2 + x^2 + 2\left[(d^2+x^2)(e^2+(f-x)^2)\right]^{1/2} + e^2 + (f-x)^2$$

desarrollando e igualando a cero la ecuación

$$d^2 + x^2 + 2\,(d^2e^2 + d^2(f-x)^2 + x^2e^2 + x^2(f-x)^2)^{1/2} + e^2 + (f-x)^2 - m^2 = 0$$

o, en forma equivalente

$$2\left[d^2e^2 + d^2(f-x)^2 + x^2e^2 + x^2(f-x)^2\right]^{1/2} = m^2 - (f-x)^2 - d^2 - x^2 - e^2$$

elevando nuevamente al cuadrado ambos lados

$$\begin{aligned} 4\left[d^2e^2 + x^2e^2 + d^2(f-x)^2 + x^2(f-x)^2\right] = {} & m^4 - 2m^2(f-x)^2 - 2d^2m^2 - \\ & - 2m^2x^2 - 2m^2e^2 + (f-x)^4 + \\ & + 2d^2(f-x)^2 + 2x^2(f-x)^2 + 2e^2(f-x)^2 + \\ & + d^4 + 2d^2x^2 + 2d^2e^2 + 2x^2e^2 + e^4 + x^4 \end{aligned}$$

igualando a cero:

$$\begin{aligned} & 2d^2e^2 + 2x^2e^2 + 2d^2(f-x)^2 + 2x^2(f-x)^2 - m^4 + 2m^2(f-x)^2 + 2d^2m^2 + \\ & + 2m^2x^2 + 2m^2e^2 - (f-x)^4 - 2e^2(f-x)^2 - d^4 - 2d^2x^2 - e^4 - x^4 = 0 \end{aligned}$$

desarrollando $(f\text{-}x)^4$ y $(f\text{-}x)^2$ y sustituyendo el resultado en la ecuación anterior tenemos

$$2d^2e^2 + 2x^2e^2 + 2d^2f^2 - 4fxd^2 + 2d^2x^2 + 2x^2f^2 - 4fx^3 + 2x^4 - m^4 +$$
$$+ 2m^2f^2 - 4m^2fx + 2m^2x^2 + 2d^2m^2 + 2m^2x^2 + 2m^2e^2 - f^4 + 4f^3x -$$
$$- 6f^2x^2 + 4fx^3 - x^4 - 2e^2f^2 + 4e^2fx - 2e^2x^2 - d^4 - 2d^2x^2 - e^4 - x^4 = 0$$

agrupando y eliminando términos iguales

$$4m^2x^2 - 4x^2f^2 - 4fxm^2 - 4fxd^2 + 4fxe^2 + 4f^3x + 4d^2m^2 - m^4 - 2d^2m^2 +$$
$$+ 2m^2e^2 + 2m^2f^2 - d^4 + 2d^2e^2 + 2d^2f^2 - 2f^2e^2 - e^4 - f^4 = 0$$

dividiendo entre m^2:

$$4x^2 - \frac{4x^2f^2}{m^2} - 4fx - \frac{4fxd^2}{m^2} + \frac{4fxe^2}{m^2} + \frac{4f^3x}{m^2} + 4d^2 - m^2 - 2d^2 + 2e^2 +$$

$$+ 2f^2 - \frac{d^4}{m^2} + \frac{2d^2e^2}{m^2} + \frac{2d^2f^2}{m^2} - \frac{2f^2e^2}{m^2} - \frac{e^4}{m^2} - \frac{f^4}{m^2} = 0$$

definimos

$$k^2 = d^2 - e^2 - f^2$$

$$k^4 = d^4 - 2d^2e^2 - 2d^2f^2 + 2f^2e^2 + e^4 + f^4$$

Lo que permite obtener la siguiente ecuación

$$4x^2\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right) - 4fx\left(1 + \frac{k^2}{m^2}\right) + 4d^2 - \left(m + \frac{k^2}{m}\right)^2 = 0 \qquad (1)$$

Al ser una ecuación de segundo grado (cuadrática), las soluciones están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Recordemos que el número de soluciones reales depende del signo del discriminante D, igual a b^2- $4ac$;

Si $D > 0$, se tienen dos soluciones (2 raíces reales)
Si $D = 0$, se tiene una solución (2 raíces iguales)
Si $D < 0$, se tienen cero soluciones (2 raíces imaginarias)

Al calcular el discriminante con los siguientes valores:

$$a = 4\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right), \quad b = -4f\left(1 + \frac{k^2}{m^2}\right), \quad c = 4d^2 - \left(m + \frac{k^2}{m}\right)^2$$

Se espera que b^2- $4ac \geq 0$, para garantizar la existencia de raíces reales.

Sustituyendo los valores de a, b y c en b^2- $4ac$, se tiene que

$$16f^2\left(1 + \frac{k^2}{m^2}\right)^2 - 4\left[4\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right)\left(4d^2 - \left(m + \frac{k^2}{m}\right)^2\right)\right] \geq 0$$

Para que esta cantidad sea positiva o igual a cero, el primer término tiene que ser mayor o igual que el segundo término; esto es

$$f^2\left(1+\frac{k^2}{m^2}\right)^2 \geq \left(1-\frac{f^2}{m^2}\right)\left(4d^2-\left(m+\frac{k^2}{m}\right)^2\right)$$

de donde

$$f^2\left(1+\frac{k^2}{m^2}\right)^2 \geq \left(1-\frac{f^2}{m^2}\right)\left(4d^2-m^2\left(1+\frac{k^2}{m^2}\right)^2\right) \qquad (2)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f^2}{m^4}(m^2+k^2)^2 \geq \left(\frac{m^2-f^2}{m^2}\right)\left(4d^2-\frac{(m^2+k^2)^2}{m^2}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f^2}{m^4}(m^2+k^2)^2 \geq \left(\frac{m^2-f^2}{m^2}\right)\left(\frac{4d^2m^2-(m^2+k^2)^2}{m^2}\right)$$

y finalmente

$$\frac{f^2}{m^4}(m^2+k^2)^2 \geq \left(\frac{m^2-f^2}{m^4}\right)\left(4d^2m^2-(m^2+k^2)^2\right)$$

como $m^4>0$ se puede eliminar de la desigualdad anterior

$$f^2\left(m^2+k^2\right)^2 \geq \left(m^2-f^2\right)\left(4d^2m^2-(m^2+k^2)^2\right)$$

si se desarrolla el lado derecho de la desigualdad

$$f^2\left(m^2+k^2\right)^2 \geq \left(m^2-f^2\right)\left(4d^2m^2\right)-m^2(m^2+k^2)^2+f^2(m^2+k^2)^2$$

se puede cancelar el término $f^2(m^2+k^2)^2$ de ambos lados obteniendo así

$$m^2\left(m^2+k^2\right)^2-\left(m^2-f^2\right)4d^2m^2 \geq 0$$

y al eliminar m^2, se tiene

$$\left(m^2+k^2\right)^2-\left(m^2-f^2\right)4d^2 \geq 0$$

recordando que $k^2 = d^2 - e^2 - f^2$ y sustituyendo en la desigualdad anterior

$$m^4+2m^2d^2-2m^2e^2-2m^2f^2+d^4-2d^2e^2-2d^2f^2+2e^2f^2+e^4+$$
$$+f^4-4d^2m^2+4d^2f^2 \geq 0$$

agrupando términos iguales

$$m^4-2d^2m^2-2e^2m^2-2f^2m^2+d^4-2d^2e^2+2d^2f^2+2e^2f^2+e^4+f^4 \geq 0$$

A la desigualdad anterior se le suma y resta el término $2m^2de + 2def^2$ y se obtiene

$$m^4 - 2d^2m^2 - 2e^2m^2 - 2f^2m^2 + d^4 - 2d^2e^2 + 2d^2f^2 + 2e^2f^2 + e^4 + f^4 +$$
$$+ 2m^2de - 2m^2de + 2def^2 - 2def^2 \geq 0$$

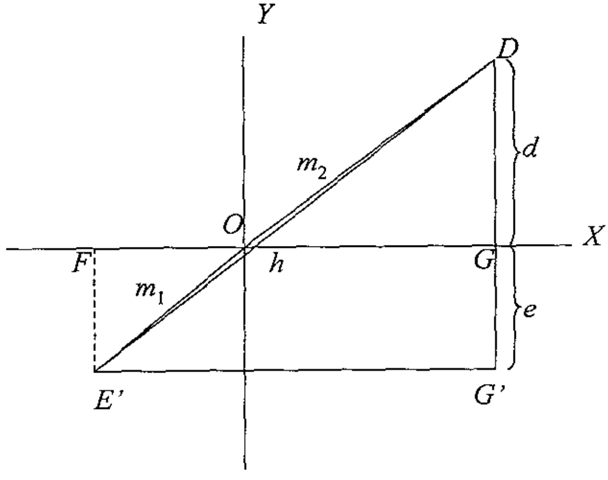
Por lo tanto, la ecuación (2) se puede factorizar de la siguiente forma

$$\left[m^2 - (d+e)^2 - f^2\right]\left[m^2 - (d-e)^2 - f^2\right] \geq 0 \qquad (3)$$

el segundo factor del miembro izquierdo de la desigualdad anterior es positivo; a saber

$$\left[m^2 - (d-e)^2 - f^2\right] \geq 0$$

la deducción se obtiene al observar la siguiente figura,



Sea $m_1 = OE'$, $m_2 = OD$ y $h =$ hipotenusa $\Delta DE'G'$, así que

$$m_1 + m_2 = m$$

$$\therefore\ m \geq h > 0$$

elevando al cuadrado, $m^2 \geq h^2 > 0$

como $h^2 = f^2 + (d+e)^2$; entonces dado que $f^2 > 0$ y $(d+e)^2 > (d-e)^2$ se tiene que

$$h^2 > f^2 + (d-e)^2$$

y por lo tanto $\quad m^2 > f^2 + (d-e)^2$

lo cual implica que $\quad m^2 - f^2 - (d-e)^2 > 0$

Como $[m^2 - (d\text{-}e)^2 - f^2] \geq 0$, entonces el primer factor de la ecuación (3) debe ser mayor o igual a cero; es decir,

$$m^2 \geq (d+e)^2 + f^2 \tag{4}$$

Así el valor mínimo que puede tomar m es

$$m = \left[(d+e)^2 + f^2\right]^{1/2}$$

Y cuando m toma este valor, la ecuación cuadrática tiene una solución (2 raíces iguales) porque el discriminante es igual a cero. La solución está dada por

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo los valores correspondientes

$$x_{1,2} = \frac{-\left[-4f\left(1+\frac{k^2}{m^2}\right)\right]}{2\left[4\left(1-\frac{f^2}{m^2}\right)\right]}$$

$$x = \frac{4f\left(1+\frac{k^2}{m^2}\right)}{2\left[4\left(1-\frac{f^2}{m^2}\right)\right]};\quad 2x = \frac{f\left(1+\frac{k^2}{m^2}\right)}{\left(1-\frac{f^2}{m^2}\right)} = \frac{\frac{f}{m^2}\left(m^2+k^2\right)}{\frac{1}{m^2}\left(m^2-f^2\right)} = \frac{f\left(m^2+k^2\right)}{m^2-f^2}$$

Sustituyendo los valores de m^2 y k^2 como función de d, e y f

$$2x = \frac{f\left((d+e)^2+f^2+d^2-e^2-f^2\right)}{(d+e)^2+f^2-f^2} = \frac{f\left(d^2+2de+e^2+d^2-e^2\right)}{(d+e)^2} =$$

$$= \frac{f\left(2d^2 + 2de\right)}{(d+e)^2} = \frac{2f\left(d^2 + de\right)}{(d+e)^2} = \frac{2df(d+e)}{(d+e)^2} = \frac{2df}{(d+e)}$$

Por tanto,

$$2x = \frac{4f\left(1 + \frac{k^2}{m^2}\right)}{4\left(1 - \frac{f}{m^2}\right)} = \frac{2df}{d+e} \qquad (5)$$

O bien,

$$(d+e)x = df$$

$$dx + ex = df$$

$$ex = df - dx$$

$$ex = d(f - x)$$

$$\therefore \quad \frac{x}{d} = \frac{f-x}{e}$$

Observando la figura de la página 12, se tiene que el ángulo α se encuentra entre 0 y $\pi/2$ al igual que el ángulo β. Asimismo la misma figura nos permite establecer una relación entre los ángulos α, β y la ecuación

$$\frac{x}{d} = \frac{f-x}{e}$$

Consideremos los triángulos ΔDOG y ΔEOF. Por ser ambos triángulos rectángulos podemos afirmar que las relaciones

$$\tan\alpha = \frac{x}{d} \quad \text{y} \quad \tan\beta = \frac{f-x}{e}$$

se cumplen, y como $0 < \alpha < \pi/2$ y $0 < \beta < \pi/2$ entonces $\alpha = \beta$.

Por último, mostraremos cómo la misma ley puede ser demostrada haciendo uso del cálculo diferencial.

MODELO ATRAVÉS DE CÁLCULO

La distancia recorrida por la luz de D a E es igual a

$$m=\sqrt{d^2+x^2}+\sqrt{e^2+(f-x)^2}=(d^2+x^2)^{1/2}+(e^2+(f-x)^2)^{1/2}$$

se calcula la primera derivada de m con respecto a x;

$$\frac{dm}{dx}=\frac{1}{2}(d^2+x^2)^{-1/2}2x+\frac{1}{2}(e^2+(f-x)^2)^{-1/2}(-2(f-x))$$

eliminando términos y reescribiendo se tiene que

$$\frac{dm}{dx}=\frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}-\frac{f-x}{\sqrt{e^2+(f-x)^2}}$$

A continuación se calcula la segunda derivada de m con respecto a x.

$$\frac{d^2m}{dx}=\frac{(d^2+x^2)^{1/2}-x\left(\frac{1}{2}(d^2+x^2)^{-1/2}\right)2x}{\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)^2}-$$

$$-\left[\frac{(e^2+(f-x)^2)^{1/2}(-1)-(f-x)\left(\frac{1}{2}(e^2+(f-x)^2)^{-1/2}2(f-x)(-1)\right)}{\left(\sqrt{e^2+(f-x)^2}\right)^2}\right]$$

$$\frac{d^2m}{dx} = \frac{(d^2+x^2)^{1/2} - \left(\frac{1}{2}(d^2+x^2)^{-1/2}\right)2x^2}{(d^2+x^2)} +$$

$$+ \frac{(e^2+(f-x)^2)^{1/2} - \dfrac{(f-x)^2}{(e^2+(f-x)^2)^{1/2}}}{(e^2+(f-x)^2)}$$

$$\frac{d^2m}{dx} = \frac{(d^2+x^2)^{1/2} - \dfrac{2x^2}{2(d^2+x^2)^{1/2}}}{(d^2+x^2)} + \frac{\dfrac{e^2+(f-x)^2-(f-x)^2}{(e^2+(f-x)^2)^{1/2}}}{(e^2+(f-x)^2)}$$

$$\frac{d^2m}{dx} = \frac{(d^2+x^2)^{1/2} - \dfrac{x^2}{(d^2+x^2)^{1/2}}}{d^2+x^2} + \frac{\dfrac{e^2}{(e^2+(f-x)^2)^{1/2}}}{e^2+(f-x)^2}$$

$$\frac{d^2m}{dx} = \frac{\dfrac{d^2+x^2-x^2}{(d^2+x^2)^{1/2}}}{d^2+x^2} + \frac{e^2}{(e^2+(f-x)^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d^2m}{dx} = \frac{d^2}{(d^2+x^2)^{3/2}} + \frac{e^2}{(e^2+(f-x)^2)^{3/2}}$$

Como $\frac{d^2m}{dx} > 0$ siempre, entonces de existir un punto crítico, éste sería mínimo.

Para encontrar el valor en el cual m tiene un punto crítico, se iguala a cero la primera derivada,

$$\frac{dm}{dx} = \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}} - \frac{f - x}{\sqrt{e^2 + (f - x)^2}} = 0$$

esto implica que m es mínimo cuando

$$\frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}} = \frac{f - x}{\sqrt{e^2 + (f - x)^2}}$$

Esta ecuación está relacionada con la función seno de un ángulo, es decir, x es el cateto opuesto y la raíz cuadrada de d^2+x^2 es el cateto adyacente del ángulo α. Asimismo, f-x es el cateto opuesto y la raíz cuadrada de $e^2+(f\text{-}x)^2$ es el cateto adyacente del ángulo β. Por lo tanto,

$$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta$$

Si recordamos, α y β son ángulos entre 0 y $\pi/2$, por lo tanto $\alpha = \beta$.

Hemos podido observar tres técnicas distintas para plantear el mismo problema. Unas más sencillas o menos laboriosas. ¿Cuál es la óptima? Afortunadamente en este caso, es decisión exclusiva de las preferencias del lector, ya que independientemente de la técnica, se logra obtener la solución.

Sin embargo, en muchos casos de modelación no existe una herramienta que nos proporcione una solución. En estos casos se recurre únicamente a aproximaciones mediante técnicas computacionales.

¿POR QUÉ ALGUNAS VECES LAS AEROLÍNEAS SOBREVENDEN BOLETOS?[2]

Para mucha gente, el término "*estadística*" significa descripciones numéricas. Esto se puede verificar al escuchar a un comentarista de televisión narrar un juego de fútbol. Sin embargo, en términos más precisos, la estadística es el estudio de los fenómenos aleatorios; en este sentido la estadística tiene un alcance ilimitado de aplicaciones. El aspecto más importante de la estadística es la obtención de conclusiones basadas en los datos experimentales.

Una de las herramientas fundamentales de la estadística es la teoría de la probabilidad, la cual tiene sus comienzos formales con el estudio de los juegos de azar en el siglo XVII. Los juegos de azar, como el nombre lo dice, incluyen acciones tales como girar una ruleta, aventar un dado, lanzar una moneda, sacar una carta, etcétera, actividades todas en las cuales el resultado del experimento es incierto. Sin embargo, se admite que aunque el resultado de algún experimento en particular puede ser incierto o aleatorio, existe un resultado *previsible* a largo plazo.

Cuando lanzamos una moneda, ésta no caerá necesariamente de cara o de cruz: puede rodar lejos o caer de canto. No obstante, consideraremos cruz o cara como los únicos resultados posibles del experimento. Al hacer esta consideración se simplifica la teoría sin afectar su aplicabilidad.

Es conocido, por ejemplo, que en muchos lanzamientos de una moneda ideal (balanceada y simétrica) cerca de la mitad de los lanzamientos resultarán caras, esto es a largo plazo; así la regularidad previsible permite a las casas de juego hacer negocios.

[2] I D. Huntley and D J. James "*Mathematical Modelling A Source of Case Studies*", Oxford University Press, 1990, p.323-340.

En la ciencia experimental con frecuencia ocurre un tipo similar de incertidumbre y de regularidad a largo plazo. Por ejemplo, en la ciencia de la genética es incierto si un bebé será mujer u hombre, pero a la larga es conocido aproximadamente qué porcentaje de los bebés serán mujeres y qué porcentaje de bebés serán hombres.

Una compañía de seguros no puede pronosticar qué personas en México morirán a la edad de 60 años, pero si puede predecir satisfactoriamente cuántas personas morirán a esa edad.

A continuación se examinarán las interpretaciones *clásica* y *de frecuencia relativa*, de la probabilidad. Las dos son muy similares debido a que se basan en la repetición de experimentos realizados bajo las mismas condiciones, como el lanzamiento de una moneda.

Por ejemplo, supongamos que se desea conocer la probabilidad de que caiga cara en el lanzamiento de una moneda ideal. Se razona de la siguiente manera: Ya que existen solamente dos resultados para este experimento, cara o cruz, y la moneda está bien balanceada, entonces uno esperaría que para la moneda es exactamente probable que caiga cara o cruz; por tanto, la probabilidad de que caiga cara estará dada por el valor de ½.

Definición .- Probabilidad Clásica (a priori)

Si un experimento que está sujeto al azar, resulta de n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes (i.e. que no puede aparecer más de un resultado en forma simultánea), y si n_A de estos resultados tienen un atributo A, entonces la probabilidad de A es la proporción de n_A con respecto a n.

Consideremos otro ejemplo. Supongamos que sacamos una carta al azar de un mazo común de 52 cartas. La probabilidad de obtener un trébol es 13/52 o lo que es lo mismo, ¼, la cual se calcula rápidamente. Y si también se desea conocer la probabilidad de sacar un número entre 5 y10 inclusive, entonces la probabilidad será 24/52, o lo que es igual a 6/13.

La aplicación de esta definición es sencillamente suficiente para estos casos simples, pero no siempre es tan obvia.

Se ha observado que, por la definición clásica, la probabilidad de que ocurra el atributo A es un número entre 0 y 1 inclusive. La proporción n_A/n debe ser menor o igual a 1 ya que el total de resultados posibles no puede ser menor que el número de resultados con el atributo específico. Si el atributo es seguro que suceda, su probabilidad es1; y si es seguro que no va a suceder, su probabilidad es 0. Así, la probabilidad de obtener un 8 en el lanzamiento de un dado es 0 y la probabilidad de que en el lanzamiento el número que caiga sea menor que 10 es igual a 1.

Existen limitaciones molestas en el planteamiento clásico. Es obvio, por ejemplo, que la definición de probabilidad clásica debe ser modificada de alguna manera cuando el número posible de resultados es infinito.

Otra dificultad con la que nos enfrentamos es cuando tratamos de contestar preguntas como las siguientes: ¿Cuál es la probabilidad de que un bebé nacido en Monterrey sea niña? o ¿Cuál es la probabilidad de que una galleta contenga menos de tres chispas de chocolate? Todas son preguntas legítimas que quisiéramos tratar en el terreno de la teoría de probabilidad. Sin embargo, nociones de "simetría", "igualmente probable", etcétera, no pueden utilizarse en estos casos, como sí se puede hacer en juegos de azar.

Definición.- Probabilidad de Frecuencia Relativa (a posteriori)

Si un experimento se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_B de los resultados son favorables a un atributo B, el límite de n_B/n conforme n se hace grande, se define como la probabilidad del atributo B.

La interpretación de una frecuencia relativa descansa en la idea de que un experimento se efectúa y se repite muchas veces, y prácticamente bajo las mismas condiciones.

Cada vez que se realiza un experimento, se observa un resultado. Éste es impredecible dada la naturaleza aleatoria del experimento, la probabilidad de la presencia de cierto atributo se aproxima por la frecuencia relativa de los resultados que posee dicho atributo. Conforme aumenta la repetición del experimento, la frecuencia relativa de los resultados favorables se aproxima al verdadero valor de la probabilidad para ese atributo.

Uno de los propósitos de la ciencia es el de predecir y describir sucesos en el mundo en que vivimos. Una manera de realizar esto es mediante la construcción de modelos matemáticos que describen adecuadamente el mundo real.

En términos de probabilidad, se debe de construir un modelo que pueda ser usado para describir acontecimientos aleatorios en el mundo real. Por ejemplo, es deseable encontrar una ecuación que pueda ser utilizada para poder pronosticar el sexo de cada nacimiento de cierta localidad. Tal ecuación sería muy compleja y nadie la ha encontrado.

Sin embargo, se puede construir un modelo de probabilidad que no será útil si se considera un nacimiento en particular, pero si será de gran ayuda si se trata de grupos de nacimientos. Así, se puede considerar un número p el cual representa la probabilidad de que el sexo de un nacimiento sea masculino. Desde este fundamento se puede contestar a preguntas como: ¿cuál es la probabilidad de que en 10 nacimientos por lo menos 3 sean de sexo masculino?, o ¿cuál es la probabilidad de que en los próximos 5 nacimientos, 3 nacimientos consecutivos sean de sexo masculino? Para contestar a estas preguntas y otras similares, se debe desarrollar un modelo de probabilidad idealizado.

Los dos tipos generales de probabilidad (a priori y a posteriori) definidos anteriormente tienen una cosa importante en común: ambos requieren un experimento conceptual en el que los diferentes resultados puedan ocurrir de alguna forma bajo condiciones uniformes.

Entonces, para poder empezar a construir el modelo lo que se necesita es que cada posible resultado del experimento que se estudia pueda ser enumerado. Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda hay dos posibles resultados: cara o cruz. Se debe asociar probabilidades solamente con estos resultados o con grupos de estos resultados. Añadimos, sin embargo, que aun si un resultado particular es imposible, éste puede ser incluido (su probabilidad es 0). Lo que es importante recordar es que cada resultado que puede ocurrir debe ser incluido. Cada resultado concebible o imaginable del experimento será definido como *punto muestral* y la totalidad de los resultados concebibles se definirán como *espacio muestral*.

El objetivo es estimar la probabilidad de algunos resultados o de grupos de resultados del experimento.

A continuación se presenta un ejemplo de la aplicación de la modelación matemática a través de probabilidad.

PROBLEMAS CON LAS AEROLÍNEAS

Algunas veces leemos en el periódico cartas de viajeros quienes pensaron habían reservado lugar en un vuelo determinado con una aerolínea en particular y que, al llegar al mostrador y registrarse, se escandaliza cuando les dicen "Lo siento, señor, el vuelo está lleno y tendremos que reacomodarlo en un vuelo más tarde". Probablemente algunos de nosotros conocemos amigos a quienes les ha sucedido esto.

Estos acontecimientos causan considerables problemas e inconvenientes a los pasajeros involucrados y es frecuente alegar que debe de ser posible, en estos tiempos de registros computarizados, desarrollar un sistema que no ocasione estos problemas.

El propósito de este trabajo es desarrollar un modelo observando las decisiones de una aerolínea y desde este punto de vista, obtener un conocimiento de porqué esto puede ser verdaderamente beneficioso para una aerolínea, es decir, el hecho de registrar más pasajeros, dentro de un vuelo determinado, que la capacidad que tiene el avión para realizar dicho vuelo. El modelo desarrollado nos permitirá explorar los efectos de las limitaciones que tiene una aerolínea en su comportamiento de toma de decisiones.

Por la ausencia de datos relevantes en cualquier servicio en particular, en este caso el servicio de un avión, no es posible obtener una solución específica, pero una investigación de los efectos de variación de los diversos parámetros involucrados en el modelo producirá ideas valiosas dentro de la toma de decisiones de las aerolíneas.

NOTACIÓN

Al estar desarrollando modelos matemáticos es necesario definir las variables y conservar un apunte de la notación que se está usando. No es posible anticipar todas las variables que se van a utilizar antes de empezar el modelo si se desarrolla cualquier ejercicio de modelación moderadamente complejo.

Como inicio para este modelo en particular se deberá conocer el costo para la aerolínea de realizar el vuelo, la capacidad del avión y el precio del boleto que cada pasajero tiene que pagar. A medida que se va desarrollando el modelo, se especificarán las variables que se vayan usando.

DESARROLLO DEL MODELO

Al estar desarrollando modelos matemáticos es útil y natural para el entendimiento del problema, ir desarrollando el modelo por etapas y comprobar en cada una que las propiedades del modelo son congruentes con la idea acerca del problema real que está siendo modelado.

En nuestro caso, se empieza modelando la utilidad que una aerolínea debe esperar de un vuelo a toda su capacidad; es decir, de un vuelo lleno.

UN PRIMER INTENTO

Los costos asociados por realizar un vuelo en particular son en gran parte independientes del número de pasajeros transportados en el vuelo. La aerolínea debe pagar a sus pilotos, ingenieros y personal de cabina sin tomar en cuenta si el avión está lleno o no.

La cantidad de combustible adicional consumido por un avión lleno en comparación con el combustible que consume un avión a la mitad de su capacidad, es muy pequeña como un porcentaje de la carga total de combustible.

Un porcentaje muy alto del peso que tiene el avión al despegar lo constituye el combustible que necesita para llegar a su destino, y mucho de ese combustible se requiere para hacer posible que el avión transporte el resto del combustible a su destino, donde el combustible será usado. El despegue, el aterrizaje y el manejo de honorarios cargados por medio de los aeropuertos son independientes del número de pasajeros transportados por un avión. Así, para un grado suficiente de exactitud, debemos ignorar los costos variables de un vuelo y se debe asumir que el costo para una aerolínea por realizar un vuelo es una suma fija f.

Cada pasajero transportado paga un costo g, y la diferencia entre los costos pagados y el costo del vuelo es el excedente, o en algún sentido, la utilidad o ganancia. Claro que existen otros costos (es decir, mantenimiento del avión, costo del personal de tierra, costo de publicidad) los cuales ya han sido asignados para determinar f, o los cuales aún pueden ser sustraídos de este excedente antes de llegar a la figura final de la ganancia.

Para nuestros propósitos, sin embargo, determinar el efecto de ciertas decisiones sobre la ganancia, ya sea total o neta de tales costos, será adecuada.

Existen también diferentes pasajeros que pagan costos de boletos diferentes, ya que existe Primera Clase, Clase Turista, Clase Económica y una multitud de otras opciones abiertas a los pasajeros.

Por el momento, supongamos que todos los pasajeros son transportados con un mismo costo. Se tratará de conservar un modelo tan simple como sea posible para empezar y regresaremos para incluir más características una vez que se haya formulado el modelo básico. Tal método es una buena disciplina para obligarnos a desarrollar modelos matemáticos básicos y así no confundirnos con los detalles. Una vez que se ha logrado un entendimiento básico del modelo se puede regresar e incluir más efectos detallados.

Si un vuelo transporta n pasajeros, el excedente generado es:

$$(ng\text{-}f)$$

donde g es el costo pagado por cada pasajero.

Obviamente, este modelo matemático simple tiene las propiedades que se esperarían de él. Así, si el número de pasajeros transportados se incrementa, la ganancia también se incrementa.

La máxima ganancia que se puede obtener está dada por:

$$(Ng\text{-}f)$$

donde N representa la capacidad total del avión.

Existe un punto en el cual ni se gana ni se pierde, i.e. en el cual el costo pagado por los pasajeros transportados sólo cubre el costo del vuelo, es decir,

$$n = \frac{f}{g}$$

y para una cantidad menor a n de pasajeros, el vuelo produce una pérdida.

Todas estas consideraciones son como se esperarían; a primera vista este modelo matemático simple sugiere que para obtener la mayor ganancia posible, la aerolínea debe proponerse llenar cada vuelo.

Una vez que se hayan recibido N reservaciones o registros el vuelo está lleno y no se deberán aceptar más reservaciones. El problema que surge es que algunos pasajeros pueden no llegar a su vuelo. Las condiciones normales de transporte para los pasajeros que pagaron la tarifa completa del boleto (es decir, pagaron la más alta) les permite no llegar a su vuelo sin multa alguna.

Ellos pueden llegar al aeropuerto más tarde y sus boletos serán válidos para otro vuelo más tarde. Este no es el caso para algunas de las demás tarifas de boletos y regresaremos a este punto más tarde. Cada pasajero que no llega al vuelo, representa una pérdida del ingreso potencial para la aerolínea. Tales pasajeros son conocidos como que "no llegaron".

UN MEJOR MODELO

Se desarrollará el primer modelo, anteriormente propuesto, de la siguiente manera. Supóngase que la probabilidad de k "no llegadas" es P_k.

Denotamos el número de pasajeros registrados en un vuelo por la cantidad m y se permite que m exceda a N. El excedente o superávit que la línea aérea obtendrá del vuelo cuando existan k no llegadas se denotará por S.

La notación usada hasta este momento es la siguiente:

f	Costo de realizar algún vuelo
n	Número de pasajeros transportados en el vuelo
g	Costo pagado por cada pasajero
N	Capacidad del avión que realiza el vuelo
k	Número de "no llegadas" para el vuelo
P_k	Probabilidad de k no llegadas
m	Número de pasajeros registrados en el vuelo
S	Excedente generado por el vuelo

El excedente que la línea aérea obtendrá del vuelo cuando existan k no llegadas es:

$$S = \begin{cases} (m\text{-}k)g\text{-}f & \text{si } m\text{-}k \leq N \\ \\ Ng\text{-}f & \text{si } m\text{-}k > N \end{cases} \qquad (1)$$

Como el número de pasajeros que no llegarán a su vuelo es un evento posible, esto es que no se conoce su valor, entonces el indicador apropiado para la ganancia de un vuelo es la utilidad esperada, la cual se denotará por $\overline{S}$, y se define como:

$$\overline{S} = \mathrm{E}_k = \sum_{k=0}^{m} P_k \left[\text{excedente de un vuelo con } (m-k) \text{ pasajeros}\right]$$

Como el excedente (ganancia) S obtenido en cualquier vuelo depende del número de no llegadas k, entonces

$$S = \begin{cases} (m\text{-}k)g\text{-}f & \text{si } m\text{-}k \leq N \;\Rightarrow\; m\text{-}N \leq k \\ \\ Ng\text{-}f & \text{si } m\text{-}k > N \;\Rightarrow\; m\text{-}N > k \end{cases} \qquad (2)$$

y la utilidad esperada puede escribirse como:

$$S = \mathrm{E}_k = \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (Ng - f) + \sum_{k=m-N}^{m} P_k \left[(m-k)g - f\right] \qquad (3)$$

Si $m \leq N$ entonces el primer sumando de la ecuación (3) se anula y la utilidad esperada $\bar{S}$ esta determinada sólo por el segundo sumando con el límite inferior empezando en cero, es decir:

$$S = \sum_{k=0}^{m} P_k \left[(m-k)g - f\right]$$

Obviamente el número de pasajeros registrados dentro de un vuelo tal vez es pequeño por la carencia de demanda. En estos casos, la aerolínea no tiene problema para determinar qué cantidad de pasajeros registrar de más.

Dado que el problema que se quiere explicar es el comportamiento de la aerolínea cuando existe exceso de demanda, asumiremos de ahora en adelante que éste es el caso y que cualquier nivel máximo de registro m está establecido por la aerolínea y siempre se logrará. Este podría ser el caso en los vuelos hoy en día, en las rutas más concurridas o solicitadas.

Sumando y restando en la ecuación (3) el término

$$\sum_{k=m-N}^{m} P_k (Ng - f),$$

se puede reescribir:

$$S=\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k(Ng-f)\ +\sum_{k=m-N}^{m}P_k(Ng-f)\ -\sum_{k=m-N}^{m}P_k(Ng-f)\ +$$
$$+\sum_{k=m-N}^{m}P_k\left[(m-k)g-f\right]$$

$$S=\sum_{k=0}^{m}P_k(Ng-f)\ +\sum_{k=m-N}^{m}P_k\left[(m-k)g-f-(Ng-f)\right]$$

el término $(Ng\text{-}f)$ es constante y como en la segunda suma el término $(m\text{-}k)g\text{-}f\text{-}(Ng\text{-}f)\ =\ (m\text{-}N\text{-}k)g$

$$\overline{S}=(Ng-f)\sum_{k=0}^{m}P_k+\sum_{k=m-N}^{m}P_k(m-N-k)g$$

Sabemos que $\sum_{k=0}^{m}P_k=1$, y que el valor de g es constante, por lo que

$$\overline{S}=Ng-f+g\sum_{k=m-N}^{m}P_k(m-N-k)$$

Haciendo un cambio de variable para simplificar el índice de la suma:

sea $j=k\text{-}m\text{+}N$

$$\text{si } k = m\text{-}N \Rightarrow j = m\text{-}N\text{-}m\text{+}N = 0$$
$$\text{si } k = m \quad \Rightarrow j = m\text{-}m\text{+}N = N$$

entonces:

$$\bar{S} = Ng - f - g\sum_{j=0}^{N} jP_{m-N+j}$$

Observamos que $\bar{S} \leq Ng\text{-}f$, (los términos de la suma son todos positivos). Por tanto, la única manera de obtener la ganancia esperada máxima es hacer todos los $P_{m\text{-}N+j}$, para $0 < j < N$, tan cercanos a cero como sea posible.

Esto se logra si el nivel de registro m excede a N considerablemente. Si la reserva de pasajeros registrados se incrementa entonces la probabilidad de cualquier número grande de "no llegadas" disminuye.

El segundo modelo pronostica que una aerolínea, en presencia de incertidumbre en cuanto al número de pasajeros registrados quienes llegarán a su vuelo, sobrevenderá lugares para lograr una utilidad esperada cercana al máximo teórico factible, si se tiene un avión a toda su capacidad.

No existe obstáculo en este modelo matemático para sobrevender inclusive varias veces la capacidad del avión.

De esta estrategia resulta un número de pasajeros que serán regresados de casi todos los vuelos y este número se incrementará de la misma manera en que se incrementa el nivel de sobreventa. Así, nosotros empezamos a entender porqué una aerolínea en un intento de operar tan rentablemente como sea posible, puede deliberadamente saturar los vuelos. El pronóstico de un nivel muy substancial de sobreventa parece de alguna manera poco realista, sin embargo, es necesario otro refinamiento de este modelo.

UN REFINAMIENTO MÁS

En casos donde una aerolínea ha sobrevendido los vuelos y se tienen más pasajeros en el aeropuerto que la capacidad del avión, el exceso de pasajeros debe ser regresado y se les deben ofrecer lugares en otros vuelos más tarde. La aerolínea debe ser responsable de pagar ciertos gastos a los pasajeros afectados como resultado de su demora, o el pasajero puede decidir si viaja con otra línea y el boleto debe transferirse a dicha línea aérea incurriendo en costos administrativos y en una pérdida del ingreso potencial. A esto también lo acompaña la publicidad negativa y una pérdida de imagen de la aerolínea. Vamos a asumir que para cada pasajero que no pueda ser transportado en el vuelo saturado y que sí estaba registrado (esto es que al pasajero se le ha "quitado su lugar") se incurre en un costo llamado b.

Ahora se puede construir un modelo más sofisticado el cual considera la multa por sobrevender el vuelo para alcanzar el promedio de ingreso que la aerolínea espera del vuelo.

La notación usada hasta este momento es la siguiente:

f	Costo de realizar algún vuelo
n	Número de pasajeros transportados en el vuelo
g	Costo pagado por cada pasajero
N	Capacidad del avión que realiza el vuelo
k	Número de "no llegadas" para el vuelo
P_k	Probabilidad de k no llegadas
m	Número de pasajeros registrados en el vuelo
S	Excedente generado por el vuelo
b	Costo de bajar del avión (i.e. quitar su lugar) a un pasajero registrado

Donde el número de pasajeros que llega al mostrador de la aerolínea esperando viajar es m-k.

Ahora la ganancia del vuelo es:

$$S = \begin{cases} (m\text{-}k)g\text{-}f & \text{si } m\text{-}k \leq N \Rightarrow m\text{-}N \leq k \\ \\ Ng\text{-}f\text{-}(m\text{-}k\text{-}N)b & \text{si } m\text{-}k > N \Rightarrow m\text{-}N > k \end{cases} \tag{4}$$

El promedio o ganancia esperada que obtiene la aerolínea en un vuelo, se determina sumando sobre todos los números posibles de "no llegadas", la cantidad obtenida de multiplicar la ganancia obtenida dado un número de "no llegadas" por la probabilidad de que ese número de "no llegadas" ocurra. Así, tenemos

$$\bar{S} = \sum_{k=0}^{m} P_k \left[\text{ganancia de } (m-k) \text{ pasajeros}\right] \tag{5}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k \left[(Ng-f)-(m-k-N)b\right] + \sum_{k=m-N}^{m} P_k \left[(m-k)g-f\right]$$

Si sumamos y restamos el término:

$$\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k \left[(m-k)g-f\right]$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$\bar{S}=\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k\left[(Ng-f)-(m-k-N)b\right]-\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k\left[(m-k)g-f)\right]+$$
$$+\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k\left[(m-k)g-f\right]+\sum_{k=m-N}^{m}P_k\left[(m-k)g-f\right]$$

$$\bar{S}=\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k\ \left[(Ng-f)-(m-k-N)b-(m-k)g+f\right]+$$
$$+\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k\left[(m-k)g-f\right]+\sum_{k=m-N}^{m}P_k\left[(m-k)g-f\right]$$

El término de la primera suma se puede escribir como:

$$\begin{aligned}&Ng-(m-k)g-(m-k)b+Nb\\&=(N-m+k)g+(N-m+k)b\\&=(N-m+k)(g+b)\end{aligned}$$

Y los dos sumandos restantes se pueden simplificar en:

$$\sum_{k=0}^{m}P_k\left[(m-k)g-f\right]$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores permiten reescribir a S como:

$$\bar{S}=\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k\left[(N-m+k)\,(g+b)\right]+\sum_{k=0}^{m}P_k\left[(m-k)g-f\right]$$

$$\bar{S} = \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k \left[(N-m+k)(g+b)\right] + \sum_{k=0}^{m} mgP_k - \sum_{k=0}^{m} kgP_k - \sum_{k=0}^{m} fP_k$$

$$\bar{S} = \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k \left[(N-m+k)(g+b)\right] + (mg-f)\sum_{k=0}^{m} P_k - g\sum_{k=0}^{m} kP_k$$

Una simplificación adicional se hace al observar que $\sum_{k=0}^{m} P_k = 1$ y $\bar{k}$ denota el número esperado de "no llegadas", por lo que $\bar{k} = \sum_{k=0}^{m} kP_k$ y,

$$\bar{S} = mg - f - \bar{k}g - (g+b)\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m-N-k)$$

$$\bar{S} = (m-\bar{k})g - f - (g+b)\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m-N-k) \qquad (6)$$

Hemos obtenido hasta este momento un resultado intermedio relativamente complicado el cual quisiéramos verificar de alguna manera. Para verificar la validez de estos resultados y detectar errores aritméticos, frecuentemente se ponen a prueba uno o dos casos especiales para comprobar si los resultados son como se esperan.

Para comprobar este resultado vamos a sustituir $P_0 = 1$ y $P_k = 0$ para $k \geq 1$ en la ecuación (6). Esto equivale a suponer que con probabilidad uno ningún pasajero va a fallar para tomar el vuelo, i.e. que todos los pasajeros registrados para el vuelo van a llegar. En este caso la ecuación (6) se reduce a:

$$
\begin{aligned}
\bar{S} &= (m-k)g - f - (g+b)(m-N) \\
&= mg - kg - f - g(m-N) - b(m-N) \\
&= mg - \bar{k}g - f - mg + Ng - b(m-N) \qquad \text{ya que } \bar{k}=0 \text{ entonces} \\
\bar{S} &= Ng - f - b(m-N)
\end{aligned}
$$

Esto demuestra, así como se esperaría, que si m pasajeros están registrados en un vuelo con capacidad de N pasajeros y todos llegan al vuelo, la ganancia será entonces la ganancia al volar el avión lleno, Ng-f, menos el costo de bajar del avión a los (m-N) pasajeros que no viajarán, (m-N)b.

En este caso el promedio máximo de ganancia se logra cuando m=N lo cual concuerda con el primer modelo simple. Hasta este punto no se han hecho suposiciones acerca de la forma de los P_k.

Para obtener más ideas de los modelos desarrollados será útil hacer algunas suposiciones convincentes acerca de estas probabilidades. Es posible que la suposición más simple sea denotar por p a la probabilidad de que cualquier pasajero llegue al vuelo y a q como la probabilidad de una "no llegada".

Haciendo otra suposición sobre las llegadas y las no llegadas de los pasajeros diremos que son independientes una de la otra, lo que nos lleva a que los P_k representen una Distribución Binomial,

$$
\begin{aligned}
P_k &= \binom{m}{k} q^k p^{m-k} \\
P_k &= \binom{m}{k} (1-p)^k p^{m-k} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Es un hecho que la suposición de independencia de las "no llegadas" no es enteramente válida ya que un porcentaje de pasajeros llega (o no llega) al vuelo en pares o grupos pequeños. Sin embargo, por el momento, vamos a poner ésta dificultad a un lado. Con la distribución binomial tenemos que:

$$\bar{k} = qm \text{ (esperanza de las "no llegadas")}$$

Donde q es la probabilidad de una "no llegada" y m es el número de pasajeros registrados para el vuelo, entonces:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{m} kP_k = qm$$

Y la ecuación (6) se puede reescribir como:

$$\bar{S} = (m - qm)g - f - (g+b)\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k(m - N - k)$$

$$\bar{S} = (m - (1-p)m)g - f - (g+b)\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k(m - N - k)$$

$$\bar{S} = pmg - f - (g+b)\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k(m - N - k) \qquad (8)$$

Lo que la aerolínea tratará de hacer ahora es maximizar la ganancia esperada del vuelo. La expresión para la ganancia esperada en la ecuación (8) es dependiente de g, b, f, q, m y N. Los costos y precios f, g y b están fuera del control de la aerolínea a corto plazo (las tarifas son establecidas por la IATA y no por las aerolíneas), q y N son limitaciones externas las cuales permiten a la aerolínea controlar el parámetro m.

Como resultado de la presencia de la suma parcial en la ecuación (8), el problema puede resolverse mejor variando el parámetro m.

Sin embargo, es evidente que el nivel óptimo de registro debe ser por lo menos N, la capacidad del avión. Por lo tanto, de la ecuación (5), la ganancia esperada para $m < N$ se reduce a:

$$\bar{S} = \sum_{k=0}^{m} P_k [(m-k)g - f]$$

$$\bar{S} = \sum_{k=0}^{m} P_k [(mg-f) - kg]$$

$$\bar{S} = (mg-f)\sum_{k=0}^{m} P_k - g\sum_{k=0}^{m} kP_k$$

De definiciones anteriores, $\sum_{k=0}^{m} P_k = 1$ y $\sum_{k=0}^{m} kP_k = \bar{k} = qm$, entonces:

$$\bar{S} = mg - f - qmg$$

$$\bar{S} = mg - f - (1-p)mg$$

$$\bar{S} = pmg - f$$

S es una función de m creciente. Esto es al ser p y g constantes positivas y conocidas.

La evaluación o cálculo de los P_k en la ecuación (7) involucra diferentes valores para cada P_k para cada nivel de registro de m. La evaluación de estos P_k será laboriosa si se desarrolla a mano.

El disponer de una computadora estimula el hecho de escribir un programa para obtener la ganancia esperada de cualquier combinación de g, b, f, q, m y N y usarla para determinar el nivel óptimo de registro para algunos valores de g, b, f, q y N. Si los cálculos tienen que hacerse a mano o usando una calculadora, primero se deben explorar todas las posibilidades para una simplificación posterior.

Si N es suficientemente grande ($N \approx 150$ para un Boeing 727) la diferencia de substituir los términos en la distribución Poisson en vez de hacerlo en la distribución Binomial no tendría importancia. De hecho, la distribución de Poisson es el principal modelo de probabilidad empleado para analizar problemas de líneas de espera. Además, ofrece una aproximación excelente a la función de probabilidad binomial cuando el parámetro p es pequeño y n es grande. Por otro lado, el número de términos en la suma parcial de la ecuación (8) es (m-N) y la suma parcial debe ser evaluada para un rango de m para encontrar el nivel óptimo de registro.

En el ejemplo que se presenta más adelante, el número de lugares es 132 y una sobreventa del 10% representan 13 términos en la suma parcial solamente.

La ganancia esperada puede ser vista como función de q, m, g, f, b y N.

Si consideramos que las aerolíneas operan con un factor de rendimiento alrededor del 60%, podemos suponer como buena aproximación que $0.6Ng = f$ y despejando el valor de g obtenemos:

$$g = \frac{f}{N(0.6)}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (8) se obtiene:

$$\overline{S} = pm\left[\frac{f}{N(0.6)}\right] - f - \left[\frac{f}{N(0.6)} + b\right]\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k(m-N-k)$$

$$S=\frac{f}{N(0.6)}\left[pm-N(0.6)-\left(1+\frac{N(0.6)}{f}b\right)^{m}\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k(m-N-k)\right]$$

Dividiendo entre f:

$$\frac{S}{f}=\frac{1}{N(0.6)}\left[pm-N(0.6)-\left(1+\frac{b}{g}\right)^{m}\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k(m-N-k)\right]$$

$$\frac{S}{f}=\frac{1}{N(0.6)}\left[pm-\left(1+\frac{b}{g}\right)^{m}\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k(m-N-k)\right]-1 \qquad (9)$$

APLICACIÓN

Los datos tomados en consideración para aplicar el modelo anterior a un caso práctico fueron proporcionados por un agente de la compañía Mexicana de Aviación. Se tomó un vuelo que se realiza entre México D.F. y Cancún en temporada alta. El avión utilizado es un Boeing 727, el cual tiene capacidad para 150 personas; para este caso tomaremos como capacidad del avión 138 lugares, porque 12 lugares pertenecen a Primera Clase la cual generalmente se satura y al estar ocupada en su totalidad ya no se reciben más reservaciones.

Existen diversas tarifas para los boletos, pero el precio del boleto varía entre 2,338 y 2,635 pesos.

Un programa computacional ha sido usado para calcular la ganancia esperada de un vuelo, contra el nivel de registro para un avión con una capacidad de 138 pasajeros; asumiendo que con probabilidad de 10% un pasajero "no va a llegar" al vuelo, i.e. que $q = 0.1$ y que a la compañía le cuesta el 20% del precio del boleto "bajar" a un pasajero del avión, que ya estaba registrado ($b/g = 0.2$).

Generalmente, en temporada de vacaciones se saturan los vuelos a su máximo nivel, por lo que las aerolíneas solicitan a los pasajeros ofrecerse como "voluntario" para ceder su lugar a otro pasajero. Claro que esta actitud del pasajero se remunera de alguna manera; ya sea que le paguen una noche extra de hotel o que le devuelvan cierto porcentaje del precio del boleto. Esto no es en general para todas las aerolíneas, ya que cada una tiene sus propias políticas.

Es evidente que el nivel de sobreventa requerido para maximizar la ganancia es considerable. Podemos computarizar la probabilidad de que j o más pasajeros sean bajados del avión como:

$$P\left[\, j \text{ o más pasajeros sean bajados}\right] = \sum_{k=0}^{m-N-j} P_k$$

En la siguiente tabla se incluyen las probabilidades de bajar por lo menos a un pasajero y de bajar a 5 pasajeros o más, además de la ganancia esperada.

q = 0.1

m	$\overline{S}/f$	$P\{\geq 1 \text{ bajada}\}$	$P\{\geq 5 \text{ bajadas}\}$
138	0.5	.0000	.0000
139	0.51086955	.0000	.0000
140	0.52173903	.0000	.0000
141	0.53260789	.0000	.0000
142	0.54347393	.0002	.0000
143	0.55432999	.0009	.0000
144	0.56515772	.0029	.0000
145	0.57591794	.0078	.0000
146	0.58653928	.0179	.0001
147	0.59690888	.0362	.0006
148	0.60687012	.0663	.0022
149	0.61623107	.1107	.0059
150	0.62478436	.1708	.0140
151	0.63233479	.2461	.0290
152	0.63872808	.3334	.0543
153	0.64387332	.4283	.0926
154	0.64477538	.5250	.1460
155	0.65042505	.6181	.2145
156	0.65200068	.7031	.2962
157	**0.65263294**	**.7766**	**.3872**
158	0.65249062	.8374	.4824
159	0.65174027	.8855	.5765
160	0.65053245	.9218	.6644

Para este caso se observa que la ganancia esperada máxima se obtiene cuando se sobrevenden 19 boletos. A continuación se tiene un análisis de sensibilidad sobre el efecto del costo de bajar a los pasajeros.

b/g	Nivel de registro para máxima ganancia	$\bar{S}/f$	$P\{\geq 5 \text{ bajadas}\}$
.2	157	0.6526329	0.3872
.3	156	0.6483631	0.2962
.4	156	0.6447254	0.2145
.5	155	0.6418356	0.1460

Se puede observar que al incrementar la multa asociada con cada bajada; es decir b/g, el nivel de sobreventa que maximiza la ganancia esperada disminuye. Para este caso en particular, la probabilidad asociada a bajar cierto número de pasajeros (la probabilidad de bajar 5 o más pasajeros aquí se toma como ejemplo) también se reduce.

OTRO REFINAMIENTO MÁS

Si solamente uno o dos pasajeros son bajados del avión es probable que el incidente pueda mantenerse en silencio, pero un grupo de pasajeros insatisfechos podría causar un escándalo en el mostrador de la aerolínea, y las aerolíneas desean minimizar este riesgo. Podría ser que para formular una política de registro la aerolínea adopte una política que sea menos óptima en términos de maximizar la ganancia esperada, pero la cual tiene el mérito de reducir la probabilidad de que un número grande de personas tenga que bajar del avión.

Una alternativa es tratar de encontrar formas de incrementar la probabilidad de que los pasajeros registrados dentro de un vuelo realmente lleguen a él. Esto se puede lograr por medio de las diferentes categorías de boletos de avión que existen. Con estas categorías al pasajero se le ofrece un boleto válido solamente para un vuelo específico pero a costo reducido. Si los pasajeros no llegan a ese vuelo, el boleto es anulado y los pasajeros pierden su dinero.

Obviamente algunos pasajeros (principalmente pasajeros de negocios requieren flexibilidad en su boleto) deberán estar preparados para pagar el boleto completo para conservar esta flexibilidad, mientras que otros (vacacionistas, principalmente) aceptarán la restricción a un costo reducido de su boleto. La segunda categoría de pasajeros no perderá su vuelo, por lo que podemos asumir que la probabilidad de su "no llegada" es virtualmente cero.

Estos pasajeros forman una base sólida de personas con quienes se puede contar que sí llegarán al vuelo.

Supongamos que j pasajeros están registrados dentro de un vuelo y que pagaron una fracción r del costo completo del boleto.

La notación usada hasta este momento es la siguiente:

f	Costo de realizar algún vuelo
n	Número de pasajeros transportados en el vuelo
g	Costo pagado por cada pasajero
N	Capacidad del avión que realiza el vuelo
k	Número de "no llegadas" para el vuelo
P_k	Probabilidad de k no llegadas
m	Número de pasajeros registrados en el vuelo
S	Excedente generado por el vuelo
b	Costo de bajar del avión (i.e. quitarle su lugar) a un pasajero registrado
p	La probabilidad de que un pasajero registrado llegue al vuelo
q	La probabilidad de que un pasajero "no llegue" al vuelo ($q = (1\text{-}p)$)
j	Número de boletos vendidos a costo reducido para el vuelo
r	Porcentaje pagado como fracción del costo completo del boleto

La ganancia al considerar j boletos a costo reducido y m-k-j pasajeros con boleto completo es:

$$S = \begin{cases} rjg + (m\text{-}j\text{-}k)g - f & \text{si } m\text{-}k \leq N \\ \\ rjg + (N\text{-}j)g - f - (m\text{-}k\text{-}N)b & \text{si } m\text{-}k > N \end{cases} \qquad (10)$$

La probabilidad de k no llegadas, sin embargo, es ahora la probabilidad de k no llegadas de los pasajeros con boleto completo sin tomar en cuenta a los (m-j) pasajeros que pagaron boleto a costo reducido y que no perderán su vuelo y queda representada por:

$$P_k = \binom{m-j}{k} q^k p^{m-j-k} \qquad (11)$$

La ganancia esperada del vuelo se traduce en:

$$\bar{S} = \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k \left[(N - j(1-r))g - f - (m-k-N)b \right] + \sum_{k=m-N}^{m} P_k \left[(m-k-j(1-r))g - f \right]$$

Ahora, si se resta y se suma el término

$$\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k \left[(m-k-j(1-r))g - f \right]$$

a la ecuación anterior, S se puede reescribir como:

$$S = \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k\left[(N-j(1-r))g - f - (m-k-N)b\right] - \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k\left[(m-k-j(1-r))g - f\right] +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k\left[(m-k-j(1-r))g - f\right] + \sum_{k=m-N}^{m} P_k\left[(m-k-j(1-r))g - f\right]$$

$$\bar{S} = \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k \left[\,(N-j(1-r))g - f - (m-k-N)b - \left[(m\text{-}k\text{-}j(1-r))g\text{-}f\right]\right] +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m} P_k\left[(m-k-j(1-r))g - f\right]$$

Consideremos el primer término de la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
&(N-j(1-r))g-(m-k-j(1-r))g-(m-k-N)b\\
&=(N-j(1-r)-m+k+j(1-r))g-(m-k-N)b\\
&=(N-m+k)g+(N-m+k)b\\
&=(N-m+k)(g+b)
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene:

$$\bar{S} = \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k\left[(N-m+k)(g+b)\right] + \sum_{k=0}^{m} P_k\left[(m-k-j(1-r))g - f\right]$$

$$\bar{S} = \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k\left[(N-m+k)(g+b)\right] + \left[(m-j(1-r))g - f\right]\sum_{k=0}^{m} P_k - g\sum_{k=0}^{m} kP_k$$

Recordando las definiciones de la página 45,

$$S = \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k \left[(N-m+k)(g+b)\right] + \left[(m-j(1-r))g - f\right] - gqm$$

$$S = \left[m - j(1-r)\right]g - f - qmg - (g+b)\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m-N-k)$$

$$S = \left[m - j(1-r)\right]g - f - (1-p)mg - (g+b)\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m-N-k)$$

$$S = \left[pm - (1-r)j - \frac{f}{g}\right]g - (g+b)\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m-N-k) \qquad (12)$$

Esta ecuación podría programarse tal cual y obtener una exploración de los efectos de los cambios en p, m, g, j, r, b y N. La complicación de esto se puede reducir si, como antes, se hace una suposición convincente acerca de la relación de g con f, el costo completo del boleto y el costo del vuelo, respectivamente.

En este caso debemos asumir que el punto donde ni se gana ni se pierde consiste en un vuelo con el 60% de los asientos ocupados con un número proporcionado de pasajeros con boleto completo y pasajeros con boletos de costo reducido. Como resultado de esto, al incrementar la proporción de pasajeros con boleto reducido, el costo completo básico también se incrementa ya que la proporción de pasajeros que lo pagan disminuye.

La condición donde ni se gana ni se pierde es la siguiente:

$$0.6(jrg + (N-j)g) = f$$

$$g = \frac{f}{0.6(jr + (N-j))}$$

es decir,

$$\frac{g}{f} = \frac{1}{0.6(N-(1-r)j)}$$

Así, se obtiene de la ecuación (12), una ecuación equivalente a la ecuación (9), ya obtenida.

De (12):

$$\bar{S} = g\left[pm-(1-r)j-\frac{f}{g}\right]-g\left(\frac{b}{g}+1\right)\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k(m-N-k)$$

$$\bar{S} = g\left[pm-(1-r)j-\frac{f}{g}-\left(\frac{b}{g}+1\right)\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k(m-N-k)\right]$$

Así,

$$\bar{S} = \frac{1}{0.6(jr+(N-j))}\left[pm-(1-r)j-[0.6(jr+(N-j))]-\left(1+\frac{b}{g}\right)\sum_{k=0}^{m-N-1}P_k(m-N-k)\right]$$

Dividiendo entre f:

$$\frac{S}{f} = \frac{1}{0.6(N - (1-r)j)}\left[pm - (1-r)j - \left(1+\frac{b}{g}\right)\sum_{k=0}^{m-N-1} P_k(m-N-k)\right] - 1 \qquad (13)$$

El programa empleado previamente fue modificado para calcular S/f bajo estas circunstancias. El modelo ha sido desarrollado hasta el punto donde existen suficientes variables y parámetros para hacer la presentación de los resultados en forma útil y clara de un problema mayor. Una de las técnicas necesarias para matemáticos en ámbitos comerciales e industriales es la habilidad para presentar y comunicar sus resultados a personas ajenas a las matemáticas de una manera clara y transparente. Este modelo ilustra bien uno de los problemas que se plantean para hacer esto.

A continuación se presentan las ganancias esperadas máximas y las diferentes probabilidades de bajar por los menos a una persona así como también de bajar a cinco personas o más para diferentes niveles de registro.

Estos cálculos se realizan para diferentes niveles de boletos a costo reducido. i.e. $j = 0, 15, 30, 50$ y 70; con $r = 0.8$.

(a) $j = 0$
$q = 0.1$
$b/g = 0.2$
$r = 0.8$

m	$\bar{S}/f$	$P\{\geq 1$ bajada$\}$	$P\{\geq 5$ bajadas$\}$
138	0.5	.0000	.0000
139	0.51086	.0000	.0000
140	0.52174	.0000	.0000
141	0.53261	.0000	.0000
142	0.54347	.0002	.0000
143	0.55433	.0009	.0000
144	0.56516	.0029	.0000
145	0.57592	.0078	.0000
146	0.58654	.0179	.0001
147	0.59690	.0362	.0006
148	0.60687	.0660	.0022
149	0.61623	.1107	.0059
150	0.62478	.1708	.0140
151	0.63234	.2461	.0290
152	0.63872	.3334	.0543
153	0.64387	.4283	.0926
154	0.64775	.5250	.1460
155	0.65042	.6181	.2145
156	0.65200	.7031	.2962
157	**0.65263**	**.7766**	**.3872**
158	0.65249	.8374	.4824
159	0.65174	.8855	.5765
160	0.65053	.9218	.6644

(b) $j = 15$
$q = 0.1$
$r = 0.8$
$b/g = 0.2$

m	$\overline{S}/f$	$P\{\geq 1$ bajada$\}$	$P\{\geq 5$ bajadas$\}$
138	0.49629	.0000	.0000
139	0.50740	.0000	.0000
140	0.51851	.0000	.0000
141	0.52962	.0001	.0000
142	0.54072	.0008	.0000
143	0.55179	.0030	.0000
144	0.56277	.0086	.0000
145	0.57359	.0207	.0001
146	0.58409	.0431	.0006
147	0.59409	.0797	.0022
148	0.60334	.1335	.0065
149	0.61161	.2050	.0160
150	0.61870	.2920	.0343
151	0.62446	.3900	.0651
152	0.62885	.4925	.1116
153	0.63191	.5928	.1753
154	0.63375	.6851	.2553
155	**0.63454**	**.7653**	**.3479**
156	0.63447	.8313	.4477

(c) $j = 30$
$q = 0.1$
$r = 0.8$
$b/g = 0.2$

m	$\bar{S}/f$	$P\{\geq 1 \text{ bajada}\}$	$P\{\geq 5 \text{ bajadas}\}$
138	0.49242	.0000	.0000
139	0.50378	.0000	.0000
140	0.51514	.0001	.0000
141	0.52650	.0007	.0000
142	0.53782	.0030	.0000
143	0.54904	.0094	.0000
144	0.56006	.0238	.0000
145	0.57068	.0513	.0005
146	0.58066	.0963	.0021
147	0.58972	.1617	.0070
148	0.59759	.2467	.0183
149	0.60407	.3470	.0405
150	0.60906	.4555	.0783
151	0.61257	.5640	.1351
152	0.61471	.6649	.2114
153	0.61567	.7529	.3044
154	**0.61568**	**.8251**	**.4085**
155	0.61494	.8810	.5160

(d) $j = 50$
$q = 0.1$
$r = 0.8$
$b/g = 0.2$

m	$\tilde{S}/f$	$P\{\geq 1$ bajada$\}$	$P\{\geq 5$ bajadas$\}$
138	0.48697	.0000	.0000
139	0.49869	.0000	.0000
140	0.51040	.0008	.0000
141	0.52205	.0042	.0000
142	0.53355	.0145	.0000
143	0.54470	.0381	.0000
144	0.55519	.0821	.0005
145	0.56468	.1510	.0029
146	0.57281	.2445	.0106
147	0.57934	.3568	.0291
148	0.58415	.4777	.0649
149	0.58729	.5963	.1233
150	0.58896	.7030	.2060
151	**0.58940**	**.7919**	**.3093**
152	0.58890	.8610	.4253

(e) $j = 70$
$q = 0.1$
$r = 0.8$
$b/g = 0.2$

m	$\overline{S}/f$	$P\{\geq 1$ bajada$\}$	$P\{\geq 5$ bajadas$\}$
138	0.48118	.0000	.0000
139	0.49326	.0006	.0000
140	0.50527	.0054	.0000
141	0.51702	.0223	.0000
142	0.52815	.0621	.0000
143	0.53819	.1337	.0004
144	0.54666	.2382	.0037
145	0.55322	.3672	.0161
146	0.55775	.5054	.0469
147	0.56039	.6367	.1055
148	**0.56144**	**.7490**	**.1958**
149	0.56125	.8366	.3131

Como se puede observar en las tablas anteriores, a medida que se aumenta el número de boletos vendidos a costo reducido, el nivel de registro para obtener la ganancia esperada máxima disminuye así como también la ganancia esperada. En relación con las probabilidades se puede decir que no presentan algún patrón de comportamiento específico.

Después de este análisis se puede entender que la razón por la cual las aerolíneas venden más lugares de los que hay disponibles en los vuelos es para obtener mejores ganancias.

APLICACIÓN A LA INDUSTRIA PETROLERA[3]

Se debe señalar que la programación matemática es muy diferente a la programación en computadora. La programación matemática es "programación" en el sentido de planeación.

Inevitablemente, la programación matemática, al igual que otras disciplinas, se llega a relacionar con la computación desde que los problemas prácticos involucran una gran cantidad de información la cual solamente se puede manejar por medio de una computadora. La relación entre las computadoras y la programación matemática debe ser bien entendida.

La característica común que los modelos de programación matemática tienen es que todos involucran optimización. Nosotros deseamos maximizar o minimizar algo. La cantidad que se desea maximizar o minimizar es llamada función objetivo.

Desafortunadamente la comprensión de que la programación matemática está relacionada con la optimización de un objetivo, con frecuencia lleva a la gente a descartar la programación matemática por ser inaplicable en situaciones prácticas donde no hay un objetivo claro o existen varios objetivos.

Tal actitud es injustificada ya que con frecuencia tiene valor el hecho de optimizar algunos aspectos del modelo cuando en la vida real no hay un objetivo sencillo y claro.

Los tipos de modelos de programación matemática se pueden clasificar más fácilmente como modelos de programación lineal, modelos de programación no lineal y modelos de programación entera.

[3] H.P. Williams "*Model Building in Mathematical Programming*", John Wiley and Sons,1990, p 250-252,282,322.

Para este trabajo nos limitaremos al estudio de los modelos de programación lineal.

PROGRAMACIÓN LINEAL

Mucha gente sitúa el desarrollo de la programación lineal entre los avances científicos más importantes de la mitad del siglo XX. En la actualidad es una herramienta estándar que ha permitido disminuir costos a compañías o negocios de los países industrializados del mundo a la vez que se ha extendido rápidamente su uso en otros sectores de la sociedad.

En un contexto general, la programación lineal trata con el problema de asignar *recursos limitados* entre *actividades competidoras* en la mejor forma posible (es decir, *óptima*).

La variedad de situaciones a las cuales se puede aplicar esta descripción es realmente amplia: variando desde la asignación de medios de producción a productos hasta la asignación de recursos nacionales a necesidades domésticas, o bien desde la selección de la cartera hasta la selección de los patrones de embarque. Sin embargo, el ingrediente común en cada una de estas situaciones es la necesidad de asignar recursos a las actividades.

La programación lineal usa un modelo matemático para describir el problema de interés. El adjetivo "lineal" significa que se requiere que todas las funciones matemáticas en este modelo sean funciones lineales y la palabra "programación" no se refiere aquí a la programación de computadoras como se ha explicado anteriormente, sino que es más bien un sinónimo de planeación.

Por tanto, la programación lineal comprende la planeación de actividades para obtener un resultado "óptimo", es decir, un resultado que alcance la meta especificada en la mejor forma (según el modelo matemático propuesto) entre todas las alternativas factibles.

Un caso práctico y al cual nos enfocaremos en lo subsecuente, es el funcionamiento de una refinería. Se ha escogido este problema para ejemplificar el empleo de la programación lineal como herramienta para modelar y dar solución al objetivo de cualquier empresa, que es maximizar sus utilidades.

OPTIMIZACIÓN DE LOS RECURSOS DE UNA REFINERÍA

Considérese una refinería que compra dos tipos de aceite crudo los cuales se procesan para producir gasolina y combustibles, mediante: destilación, reforming (reformar), cracking (craqueo) y blending (mezclar).

Así, el objetivo de este problema consiste en determinar las operaciones de la refinería de tal forma que maximicen la utilidad o ganancia total.

Con el objetivo de introducir al lector en el conocimiento de cada uno de estos procesos, iniciemos describiendo la

- Destilación

Este proceso se considera como el corazón de cualquier proceso de refinación. Para ilustrarlo vamos a suponer que se desea separar el agua y la sal del agua del mar. Como primer paso, se pone a calentar el agua salada hasta que hierva y se envía el vapor a un tubo donde se conserva a baja temperatura; así todo el vapor se vuelve a condensar en agua y la sal se separa.

Si el agua de mar contuviera otro líquido con un punto de ebullición menor al del agua, éste hubiera hervido y se hubiera condensado antes que el agua y también se hubiera separado. Esta es la manera más simple del proceso de destilación.

En una refinería se utiliza un tipo de destilación más sofisticada llamada *destilación fraccionada.* Mediante este proceso la mezcla de los líquidos llamados crudos se calienta a 800 grados Fahrenheit aproximadamente y después dicha mezcla se carga a una torre llamada "fraccionador" en donde la mezcla se separa en diferentes fracciones tales como gasolina, naftas, queroseno y otros, de acuerdo con sus puntos de ebullición.

La torre fraccionadora puede medir 30.5 m de altura aproximadamente y contiene bandejas de acero perforadas dentro de ella, las cuales están separadas en intervalos de 30.5 cm a 61 cm, aproximadamente.

Estas bandejas obligan a la mezcla de crudo a derramarse, incrementado su área superficial, la cual, junto con la alta temperatura, facilita la separación de la mezcla líquida en las partes que la componen.

Volviendo al ejemplo práctico, el proceso de destilación separa, de acuerdo con sus puntos de ebullición, el crudo 1 y el crudo 2 en fracciones conocidas como: nafta ligero, nafta mediano, nafta pesado, aceite ligero, aceite pesado y residuo.

Los naftas ligero, mediano y pesado tienen índice de octano de 90, 80 y 70, respectivamente. Este índice de octano mide el poder antidetonante de un carburante. Las fracciones anteriores en las que está dividido un barril de cada tipo de crudo están dadas en la siguiente tabla:

tipo de	nafta			aceite		
crudo	ligero	mediano	pesado	ligero	pesado	residuo
crudo 1	0.1	0.2	0.2	0.12	0.2	0.13
crudo 2	0.15	0.25	0.18	0.08	0.19	0.12

Nota: Existe una pequeña cantidad de desperdicio o pérdida en la destilación.

- Reforming (reformar)

La demanda actual de gasolina para automóviles con un índice de octano mayor ha estimulado el uso del proceso conocido como reformar.

Los naftas se pueden utilizar inmediatamente para mezclarse dentro de diferentes grados de gasolina o pueden ir a través del proceso conocido como reformar. En el ejemplo práctico, este proceso produce un producto conocido como gasolina reformada con un índice de octano de 115.

La producción de gasolina reformada que se obtiene de cada barril de los diferentes naftas está dada de la siguiente manera:

1 barril de nafta ligero produce 0.6 barriles de gasolina reformada
1 barril de nafta mediano produce 0.52 barriles de gasolina reformada
1 barril de nafta pesado produce 0.45 barriles de gasolina reformada

- Cracking (craqueo)

Por medio de este proceso se incrementa la producción de gasolina de los crudos 1 y 2, al convertir algunos de los componentes más pesados del proceso de destilación en gasolina y otros productos.

Originalmente el craqueo era realizado por medio del calentamiento de los aceites a altas temperaturas, proceso llamado *craqueo termal*, pero el *craqueo catalítico*, llamado así por utilizar un catalizador, ha reemplazado casi por completo al craqueo termal porque se produce más gasolina con un octanaje mayor, menos aceites pesados y gases ligeros.

El craqueo catalítico es el proceso más importante y usado en una refinería para convertir los aceites pesados en gasolina valiosa y productos ligeros.

En el ejemplo práctico, los aceites ligero y pesado pueden ser usados directamente para mezclarse en turbosina (*jet fuel*) o gasolina, o pueden utilizarse en el proceso de craqueo catalítico. Este proceso produce aceite craqueado y gasolina craqueada con un índice de octano de 105.

1 barril de aceite ligero produce 0.68 barriles de aceite craqueado y 0.28 barriles de gasolina craqueada.

1 barril de aceite pesado produce 0.75 barriles de aceite craqueado y 0.2 barriles de gasolina craqueada.

El aceite craqueado es usado para mezclarse con combustible y turbosina, mientras que la gasolina craqueada es usada para mezclarse con gasolina.

El residuo puede ser utilizado ya sea para producir lubricante o mezclarse con turbosina y combustible.

1 barril de residuo produce 0.5 barriles de lubricante.

- Blending (mezclar)

El objetivo del proceso llamado blending es obtener las gasolinas, la turbosina y el combustible que la refinería produce.

Este proceso consiste en mezclar o combinar de acuerdo con ciertas condiciones y proporciones los diversos productos básicos intermedios que resultaron de los procesos anteriores y así, al término del proceso, obtener los productos finales. Por ejemplo, los naftas pueden ser mezclados para obtener gasolina o turbosina, dependiendo de la demanda del producto.

Para el ejemplo práctico tenemos las siguientes consideraciones:

-Gasolinas (gasolina para motor)

Existen dos tipos de gasolina, regular y premium, obtenidas mezclando el nafta, gasolina reformada y gasolina craqueada.

Las únicas condiciones relacionadas con las gasolinas es que la gasolina regular debe tener un índice de octano por lo menos de 84 y la gasolina premium debe tener un índice de octano de 94, por lo menos. Se asume que los índices de octano se combinan linealmente con el volumen.

-Turbosina (Jet Fuel)

La condición relacionada con la turbosina es que la presión del vapor no debe exceder 1 kilogramo por centímetro cuadrado.

La presión del vapor para el aceite ligero, aceite pesado, aceite craqueado y residuo es de 1.0, 0.6, 1.5 y 0.05 kilogramos por centímetro cuadrado respectivamente. También se asume que la presión del vapor está relacionada linealmente con el volumen.

-Combustible (*Fuel Oil*)

Para producir combustible, se deben de mezclar aceite ligero, aceite craqueado, aceite pesado y residuo en la proporción de 10:4:3:1.

Existen limitaciones en la disponibilidad de las cantidades y en la capacidad de los procesos que se usan:

a) la disponibilidad diaria del crudo 1 es de 20,000 barriles
b) la disponibilidad diaria del crudo 2 es de 30,000 barriles
c) a lo más 45,000 barriles de crudo pueden ser destilados por día
d) a lo más 10,000 barriles de nafta pueden ser reformados por día
e) a lo más 8,000 barriles de aceite pueden ser craqueados por día
f) la producción diaria de lubricante debe estar entre 500 y 1000 barriles
g) la producción de gasolina premium debe ser por lo menos 40% de la producción de gasolina regular

La ganancia obtenida de la venta de los productos finales son (en centavos de dólar por barril) de:

Gasolina premium	700
Gasolina regular	600
Turbosina	400
Combustible	350
Lubricante	150

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La industria petrolera es el mayor usuario de los modelos de programación lineal.

VARIABLES

En vista de los diferentes tipos de variables implicados en un modelo de esta clase es conveniente utilizar nombres mnemotécnicos para la descripción de la formulación. Las siguientes variables son usadas para representar las cantidades de los materiales utilizados (medidos en barriles).

CRA	Crudo 1
CRB	Crudo 2
NL	Nafta ligero
NM	Nafta mediano
NP	Nafta pesado
AL	Aceite ligero
AP	Aceite pesado
R	Residuo
NLGRF	Nafta ligero usado para producir gasolina reformada
NMGRF	Nafta mediano usado para producir gasolina reformada
NPGRF	Nafta pesado usado para producir gasolina reformada
GRF	Gasolina reformada

ALACGC	Aceite ligero usado para producir aceite craqueado y gasolina craqueada
APACGC	Aceite pesado usado para producir aceite craqueado y gasolina craqueada
GC	Gasolina craqueada
AC	Aceite craqueado
NLGP	Nafta ligero usado para producir gasolina premium
NLGR	Nafta ligero usado para producir gasolina regular
NMGP	Nafta mediano usado para producir gasolina premium
NMGR	Nafta mediano usado para producir gasolina regular
NPGP	Nafta pesado usado para producir gasolina premium
NPGR	Nafta pesado usado para producir gasolina regular
GRGP	Gasolina reformada usada para producir gasolina premium
GRGR	Gasolina reformada usada para producir gasolina regular
GCGP	Gasolina craqueada usada para producir gasolina premium
GCGR	Gasolina craqueada usada para producir gasolina regular
ALT	Aceite ligero utilizado para producir turbosina
APT	Aceite pesado utilizado para producir turbosina
RT	Residuo utilizado para producir turbosina
ACT	Aceite craqueado utilizado para producir turbosina
RLB	Residuo usado para producir lubricante
GP	Gasolina premium
GR	Gasolina regular
T	Turbosina
CO	Combustible

LB Lubricante

Lo que representa 36 variables incluidas en este problema.

RESTRICCIONES

Disponibilidades

De la disponibilidad limitada de los aceites crudos se obtiene la restricción

$$CRA \leq 20\,000$$

$$CRB \leq 30\,000$$

Capacidades

La restricción de capacidad de destilación

$$CRA + CRB \leq 45\,000$$

La restricción de capacidad para reformar las distintas clases de nafta

$$NLGRF + NMGRF + NPGRF \leq 10\,000$$

La restricción de capacidad para el proceso de craqueo del aceite

$$ALACGC + APACGC \leq 8\,000$$

La condición relacionada con la producción de lubricante da las restricciones siguientes

$$LB \geq 500$$
$$LB \leq 1\,000$$

Continuidades

La cantidad producida de nafta ligero depende de las cantidades de aceite crudo que se compren y de la manera en la que cada barril de crudo se fracciona bajo el proceso de destilación.

Así, se obtendrá que

$$NL = 0.1\ CRA + 0.15CRB$$

Una relación similar se tiene para el nafta mediano, el nafta pesado, el aceite ligero, el aceite pesado y el residuo, y queda representada como sigue:

$$\begin{aligned} NM &= 0.2\ CRA + 0.25CRB \\ NP &= 0.2\ CRA + 0.18CRB \\ AL &= 0.12CRA + 0.08CRB \\ AP &= 0.2\ CRA + 0.19CRB \\ R &= 0.13CRA + 0.12CRB \end{aligned}$$

Debido a que la cantidad producida de gasolina reformada depende de las cantidades de los diversos naftas usados en el proceso de reformar, se tiene la igualdad

$$GRF = 0.6NLGRF + 0.52NMGRF + 0.45NPGRF$$

La cantidad producida de aceite craqueado y gasolina craqueada depende de las cantidades utilizadas de aceite ligero y de aceite pesado, de esto se obtiene la condición

$$AC = 0.68ALACGC + 0.75APACGC$$

$$GC = 0.28ALACGC + 0.20APACGC$$

La cantidad de lubricante producido y vendido es 0.5 veces la cantidad de residuo utilizado, lo que se expresa como:

$$LB = 0.5RLB$$

Las cantidades de nafta ligero utilizado para reformar y mezclar son iguales a las disponibilidades; de igual manera sucede con el nafta mediano y el nafta pesado.

$$NL = NLGRF + NLGP + NLGR$$

$$NM = NMGRF + NMGP + NMGR$$

$$NP = NPGRF + NPGP + NPGR$$

Las cantidades de aceite ligero, aceite pesado, aceite craqueado y residuo utilizadas en los procesos de craqueo y mezcla, en general, son iguales a las cantidades disponibles.

En particular, para la producción del combustible es necesario mezclar aceite ligero, aceite craqueado, aceite pesado y residuo en la proporción dada anteriormente. De esta manera se tiene que la cantidad de aceite ligero necesario para producir combustible es igual a 0.55; la cantidad de aceite pesado necesario es de 0.16; la cantidad de aceite craqueado necesario es igual a 0.22 y por último la cantidad de residuo necesario es de 0.05. Lo anterior se expresa de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
AL &= ALACGC + ALT + 0.55CO \\
AP &= APACGC + APT + 0.16CO \\
AC &= ACT + 0.22CO \\
R &= RLB + RT + 0.05CO
\end{aligned}$$

La cantidad producida de gasolina craqueada es igual a la cantidad total de gasolina craqueada necesaria para producir gasolina premium y gasolina regular. Asimismo, la cantidad producida de gasolina reformada es igual a la cantidad total de gasolina reformada necesaria para producir gasolina premium y gasolina regular.

$$\begin{aligned}
GC &= GCGP - GCGR \\
GRF &= GRGP - GRGR
\end{aligned}$$

La cantidad producida de gasolina premium es igual a la cantidad total de sus ingredientes. Esto mismo se da para la gasolina regular y la turbosina.

$$GP = NLGP + NMGP + NPGP + GRGP + GCGP$$

$$GR = NLGR + NMGR + NPGR + GRGR + GCGR$$

$$T = ALT + APT + RT + ACT$$

La producción de gasolina premium debe ser por lo menos el 40% de la producción de la gasolina regular

$$GP \geq 0.4GR$$

Calidades

Es necesario respetar las condiciones relacionadas con los índices de octano de los tipos de gasolinas; el de la gasolina premium debe ser por lo menos de 94 octanos y por lo menos de 84 octanos el de la gasolina regular, lo que queda representado por las desigualdades:

$$94GP \leq 90NLGP + 80NMGP + 70NPGP + 115GRGP + 105GCGP$$

$$84GR \leq 90NLGR + 80NMGR + 70NPGR + 115GRGR + 105GCGR$$

Y para la turbosina tenemos la restricción impuesta por la presión del vapor.

$$ALT + 0.6APT + 1.5ACT + 0.05RT \leq T$$

En total, el modelo involucra 33 restricciones que representan las condiciones o características del problema.

OBJETIVO

Las únicas variables que incluyen ganancia o utilidad son los productos finales. Esto da la siguiente función objetivo (en dólares) que se debe maximizar:

$$\text{Maximizar } 7GP + 6GR + 4T + 3.5FO + 1.5LB$$

SOLUCIÓN

La **solución óptima** da como resultado una ganancia de **$ 211 365** dólares. Para obtener la solución del problema, se utilizó el paquete de programación lineal LINDO (Linear, Interactive, and Discrete Optimizer). Ver Anexo "A".

Al ser este modelo matemático el ejemplo de un caso práctico, podemos entender la manera en que funciona la refinería de acuerdo con la información dada.

Como el planteamiento del problema se va desarrollando paso a paso, permite comprender e ir construyendo el modelo matemático para el problema real. También se observa que algunas restricciones no se ven a simple vista, es decir, dependen y se construyen a su vez con ayuda de la información dada en los diferentes procesos.

Una vez construido el modelo matemático que representa al problema real, se presenta el planteamiento del modelo en términos del software conocido como LINDO para así encontrar la solución óptima del modelo.

ANEXO "A"

Para poder utilizar el paquete es necesario escribir de diferente forma algunas restricciones. A continuación se presentan las restricciones que se modifican.

-0.1CRA-0.15CRB+NL=0
-0.2CRA-0.25CRB+NM=0
-0.2CRA-0.18CRB+NP=0
-0.12CRA-0.08CRB+AL=0
-0.2CRA-0.19CRB+AP=0
-0.13CRA-0.12CRB+R=0

-0.6NLGRF-0.52NMGRF-0.45NPGRF+GRF=0

-0.68ALACGC-0.75APACGC+AC=0
-0.28ALACGC-0.20APACGC+GC=0

-0.5RLB+LB=0

-NL+NLGRF+NLGP+NLGR=0
-NM+ NMGRF+NMGP+NMGR=0
-NP+ NPGRF+NPGP+NPGR=0

-AL+ALACGC+ALT+0.55CO=0
-AP+APACGC+APT+0.16CO=0
-AC+ +ACT+0.22CO=0
-R+RLB + RT+0.05CO=0

-GCGP-GCGR+GC=0
-GRGP-GRGR+GRF=0

-NLGP-NMGP-NPGP-GRGP-GCGP+GP=0
-NLGR-NMGR-NPGR-GRGR-GCGR+GR=0
-ALT-APT-RT-ACT+T=0

GP-0.4GR≥0

-90NLGP-80NMGP-70NPGP-115GRGP-105GCGP+94GP≤0
-90NLGR-80NMGR-70NPGR-115GRGR-105GCGR+84GR≤0

$$-ALT-0.06APT-1.5ACT-0.05RT+T\geq 0$$

A continuación se presenta la implementación del problema en el software.

```
MAX 7 GP + 6 GR + 4 T + 3.5 CO + 1.5 LB

ST

CRA < 20000
CRB < 30000
CRA + CRB < 45000
NLGRF +NMGRF+ NPGRF < 10000
ALACGC + APACGC < 8000
LB > 500
LB < 1000
0.1 CRA + 0.15CRB - NL = 0
0.2 CRA + 0.25CRB - NM = 0
0.2 CRA + 0.18CRB - NP = 0
0.12CRA + 0.08CRB - AL = 0
0.2 CRA + 0.19CRB - AP = 0
0.13CRA + 0.12CRB - R  = 0
0.6 NLGRF + 0.52 NMGRF + 0.45 NPGRF - GRF = 0
0.68 ALACGC + 0.75 APACGC - AC = 0
0.28 ALACGC + 0.2 APACGC - GC = 0
0&5 RLB - LB = 0
NL - NLGRF - NLGP - NLGR = 0
NM - NMGRF - NMGP - NMGR = 0
NP - NPGRF - NPGP - NPGR = 0
-AL + ALACGC + ALT + 0.55 CO = 0
-AP + APACGC + APT + 0.16 CO = 0
-AC + ACT + 0.22 CO = 0
-R + RLB + RT + 0.05 CO = 0
-GCGP - GCGR + GC = 0
-GRGP - GRGR + GRF = 0
-NLGP - NMGP - NPGP - GRGP - GCGP + GP = 0
-NLGR - NMGR - NPGR - GRGR - GCGR + GR = 0
```

-ALT - APT - RT - ACT + T = 0
GP - 0.4 GR > 0
-90 NLGP - 80 NMGP - 70 NPGP - 115 GRGP - 105 GCGP + 94 GP < 0
-90 NLGR - 80 NMGR - 70 NPGR - 115 GRGR - 105 GCGR + 84 GR < 0
- ALT - 0.6 APT - 1.5 ACT - 0.05 RT + T > 0

END

La solución es la siguiente:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 34

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 211 365

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
GP	6818	0
GR	17044	0
T	15156	0
CO	0	0.636056
LB	500	0
CRA	15000	0
CRB	30000	0
NLGRF	0	0.904911
NMGRF	0	0.500363
NPGRF	5407	0
ALACGC	4200	0
APACGC	3800	0
NL	6000	0
NM	10500	0
NP	8400	0
AL	4200	0
AP	8700	0
R	5550	0
GRF	2433	0
AC	5706	0
GC	1936	0
RLB	1000	0

NLGP	0	0
NLGR	6000	0
NMGP	3973	0
NMGR	6527	0
NPGP	0	0
NPGR	2993	0
ALT	0	0.392828
APT	4900	0
ACT	5706	0
RT	4550	0
GCGP	412	0
GCGR	1524	0
GRGP	2433	0
GRGR	0	0

HÁGASE RICO, INVIERTA DINERO[4]

¿Quién no ha utilizado la palabra "invertir"? Se pueden invertir recursos de muchos tipos en una enorme variedad de cosas o actividades. Se puede invertir *dinero* en una empresa, planta y equipo, acciones, CETES, joyas, o cuadros. Asimismo se puede invertir *tiempo* o *energía* en un deporte, un hijo o un curso de estudio.

En términos económicos se dice que cualquier persona que gane más de lo que gasta es un inversionista. Lo es porque esos fondos excedentes necesariamente están canalizados, consciente o inconscientemente, a algún fin (o fines) específico, a corto, mediano o largo plazo.

Se podría decir que invertir, en forma general, implica postergar satisfacer una necesidad presente por la posibilidad de adquirir un beneficio mayor en el futuro.

Por ejemplo, las personas ahorran parte de su ingreso para poder invertir el dinero en cuentas bancarias, en bienes raíces o en la compra de alguna acción de una compañía en particular, con el objeto de obtener, al cabo de un tiempo, algún rendimiento. A todos los instrumentos en los que se puede invertir se les conoce como *activos* y se pueden definir como cualquier objeto que tenga valor económico. En contraste, se llama *pasivo* a todo lo que se debe pagar, es decir, al endeudamiento contraído.

[4] Javier Márquez Diez-Canedo, "Carteras de Inversión, Fundamentos Teóricos y Modelos de Selección Óptima". México, Limusa, 1981, p.73-91.

Al proceso de determinar en qué instrumentos invertir el dinero de manera óptima se le denomina *selección de cartera* (o de portafolio). La cartera del patrimonio de una persona contiene todos sus activos (acciones, bonos, casa o departamento, beneficios de la pensión, pólizas de seguros, etcétera) y todo su pasivo (préstamo de estudiante, préstamos para automóvil, hipotecas, etcétera).

Entonces, se puede definir como "selección de cartera de inversión" al estudio de cómo la gente debería de invertir su patrimonio mediante un proceso donde se establece el riesgo y el rendimiento esperado para encontrar la cartera óptima de activos y pasivos. Una definición similar de este concepto abarca sólo las decisiones concernientes a cuánto invertir en acciones, bonos y otros valores.

En la selección de cartera, la estrategia óptima dependerá de las circunstancias personales de cada inversionista (edad, ocupación, estado civil, ingresos, riqueza, entre otras). En el caso de un matrimonio joven, que inicia una familia, posiblemente lo mejor sea invertir en comprar una casa. Por otro lado, para un matrimonio de mayor edad y a punto de jubilarse, quizá la mejor inversión sea vender su casa e invertir el dinero en algún activo que les proporcione un ingreso constante. Así, no existe una estrategia de selección de la cartera que sea la mejor para todo mundo sin importar las circunstancias.

Para la teoría de selección de cartera, construir modelos matemáticos significa obtener patrones generales de conducta de la forma en que una persona invierte entre distintos activos, de acuerdo con el ambiente o medio dentro del cual deba hacer dicha elección.

A fines de la década de los años cincuenta y principios de los sesenta se realizaron los primeros intentos de aplicar técnicas cuantitativas al problema de selección de cartera; paralelamente, la computadora hace su aparición siendo esto un avance tecnológico que ha sido definitivo a nivel mundial.

Las técnicas utilizadas abarcaban desde métodos heurísticos (procedimientos diseñados en forma intuitiva que no garantizan una solución óptima) hasta modelos matemáticos de optimización.

El primer trabajo formal, riguroso y apegado a los cánones de la teoría económica se planteó através de modelos de programación matemática. Este trabajo fue desarrollado por H. Markowitz y es completamente general ya que se refiere a la cartera de una empresa que puede incluir instrumentos del mercado de valores y que por fuerza tiene que considerar, en forma explícita, las características de riesgo de dichos valores.

Además, en la selección de carteras es imposible ignorar diversos factores. Por ejemplo, el futuro que es necesario al considerar oportunidades de inversión que se pudieran presentar o como restricciones que pudieran cambiar respecto al presente.

Con base en la teoría general de portafolios, determinaremos un modelo simple para la elección de una cartera de inversión. Es conveniente mencionar que este ejemplo es ilustrativo y que la elección de una cartera se vuelve un problema complejo a medida que se incorporan factores micro y macro económicos o medidas de riesgo, entre otros.

El modelo que se presenta es dinámico en el sentido de que no se limita a decidir acerca de la mejor inversión en el periodo considerado como presente, sino que además se plantean relaciones para varios periodos en el futuro, determinadas por las restricciones intraperiodo.[5]

CÓMO DECIDIR EN QUÉ INVERTIR

Iniciemos considerando a una persona, inversionista, que percibe excedentes temporales de dinero y que desea invertirlos de manera óptima

[5] Son restricciones que se deben respetar dentro de cada periodo en que se divide el horizonte de planeación, estas restricciones se plantean generalmente en términos de variables que funcionan dentro de un solo periodo

para satisfacer las necesidades de su familia. Se trata de un profesionista exitoso de mediana edad el cual está previendo la responsabilidad de pagar las colegiaturas de sus hijos que están próximos a entrar a la universidad, lo que generalmente representa un gasto fuerte en la economía familiar. Además de los gastos propios del hogar está pagando un préstamo que contrajo con anterioridad para comprar un departamento nuevo y está valorando la posibilidad de entrar a un autofinanciamiento.

Con esta información el inversionista decide asistir con un asesor financiero. La información que le proporcione al asesor permitirá a éste conocer su *requisito de liquidez*; es decir, la cantidad de dinero que necesita en cada periodo para cumplir con sus obligaciones. De acuerdo con lo estipulado por el inversionista su requisito de liquidez para los próximos tres meses, es:

Liquidez

Periodo (semanas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Monto (miles de pesos)	3	5	3	18	3	5	3	4.5	3	5	3	4.5	3
Concepto	GF	D	GF	CL	GF	D	GF	A	GF	D	GF	A	GF

A= autofinanciamiento

CL= colegiaturas

D= departamento

GF= gastos fijos

Otro factor importante para que el asesor determine una inversión óptima es conocer los excedentes en las percepciones del inversionista, es decir, los montos disponibles a invertir. En este concepto, el inversionista le indica que sus excedentes en las percepciones varían de acuerdo con la siguiente tabla.

Excedentes

Periodo (semanas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Monto (miles de pesos)	35	0	37	0	35	17	37	0	35	0	37	25	0

Después de platicar, inversionista y asesor, acerca de las necesidades del primero, el asesor le sugiere invertir en CETES 28, CETES 91, BONDES 28 y BONDES 91[6], instrumentos con riesgo nulo y de alta liquidez. También determinaron que el horizonte de planeación tenga una duración de tres meses, 91 días.

Como los CETES y BONDES tienen por característica una colocación semanal, el asesor le determina al inversionista como días de operación los miércoles de cada semana. En estos días se realizarán compras de instrumentos y pago de sus obligaciones con el dinero que se obtenga del vencimiento de instrumentos adquiridos con anterioridad[7]. Así, el inversionista podrá realizar sus inversiones a trece plazos.

Con la información obtenida del inversionista, el asesor procede a determinar la estrategia de inversión. Inicialmente se informa de los instrumentos en el mercado susceptibles a ser comprados bajo las condiciones del inversionista.

Como las emisiones de CETES se colocan semanalmente y el plazo más frecuente de estos es 91 días, encuentra en el mercado CETES con trece plazos diferentes, un BONDE 28 con vencimiento a ocho plazos y dos BONDES 91, con vencimiento a ocho y doce plazos. El BONDE 28 tiene dos cupones por cortar, uno en el periodo cinco y otro a su vencimiento

[6] Ver Anexo "B".
[7] Al suponer certidumbre total acerca del requisito de liquidez en cada periodo y los precios de cada instrumento, es imposible vender un activo antes de su vencimiento.

(periodo nueve) con un monto igual a \$ 0.5419 y \$ 0.5091, respectivamente. Por su parte, los BONDES 91 cortarán cupón únicamente a su vencimiento. La información anterior la encontramos resumida en la siguiente tabla.

Instrumentos

Instrumentos	Vencimiento (plazos)	Pago de Cupón	
		Periodo	Monto
CETES 28 CETES 91	1,...,13		
BONDES 28	8	5 9	\$ 0.5419 \$ 0.5091
BONDES 91	8	9	\$ 2.6321
BONDES 91	12	13	\$ 2.2653

Para llegar a determinar los montos a invertir en cada instrumento es necesario conocer el precio al cual pueden ser comprados los instrumentos en cada periodo. Así, los precios correspondientes son:

CETES

plazo(dias) \ penodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	9 9707	9 9707	9 9707	9 9707	9 9707	9.9707	9 9707	9 9707	9 9707	9 9708	9 9708	9 9708	9 9708
14	9 9415	9 9415	9 9416	9.9415	9.9415	9.9416	9.9415	9 9415	9 9416	9.9416	9 9417	9 9417	
21	9 9124	9 9123	9 9125	9.9125	9 9126	9 9125	9 9126	9 9125	9 9126	9.9126	9 9126		
28	9 8833	9 8834	9 8835	9.8835	9 8836	9 8836	9 8836	9 8837	9.8836	9 8837			
35	9 8542	9 8544	9 8545	9.8546	9 8547	9 8548	9.8548	9 8548	9.8548				
42	9 8251	9 8253	9 8254	9.8256	9 8258	9 8259	9.8260	9 8261					
49	9 7959	9 7964	9 7965	9.7967	9 7969	9 7970	9 7972						
56	9 7666	9 7672	9 7677	9.7678	9 7680	9 7683							
63	9 7374	9 7381	9 7386	9 7389	9 7392								
70	9 7082	9 7087	9 7093	9.7098									
77	9 6789	9 6795	9 6799										
84	9 6499	9 6503											
91	9 6209												

En la tabla anterior, no se hace diferencia entre CETES 28 y CETES 91, por que dos instrumentos con el mismo plazo y el mismo riesgo tienen el mismo valor en el mercado. Así el precio de dos CETES con el mismo plazo por vencer, independientemente del plazo a que fueron emitidos, tienen el mismo precio.

BONDES 28

periodo / plazo(días)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7								100 5086					
14							100 2406						
21						100 0696							
28					99 9536								
35				100 5046									
42			100 2937										
49		100 1636											
56	99.9136												
63													
70													
77													
84													
91													

BONDES 91

periodo / plazo(días)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7								102.6262				102 2532	
14							102 4122				102 1052		
21						102.2622				101 8045			
28					102 1792				101 7053				
35				101.9102				101 6206					
42			101.9044				101 3626						
49		101 5424				101 1496							
56	101 3624				101 1097								
63				100 8517									
70			100 7927										
77		100 5817											
84	100 3677												
91													

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

Antes de determinar la estrategia para nuestro inversionista, hagamos un paréntesis para construir un modelo general de selección de cartera. Este modelo permitirá determinar los montos e instrumentos de inversión en cada periodo.

La primera observación que se realiza es respecto al número de instrumentos en los que se puede invertir. En todos los casos prácticos el número de instrumentos I en los cuales se puede realizar una inversión es limitado, finito; asimismo los plazos en que vencen cada uno de los instrumentos. Como es de suponer el plazo máximo J de vencimiento de los instrumentos será menor o igual al total de periodos T que se considera para el horizonte de planeación, es decir, nunca se invertirá en instrumentos que tengan vencimiento fuera del horizonte de planeación, por lo que $J \leq T$.

Seleccionar una cartera no es más que un problema de decisión, decidir en qué instrumentos invertir, cuánto y cuándo. Así, se establece como variable de decisión a n_{ijt} que representa el número de instrumentos tipo i que vencen en j plazos y que fueron comprados en el periodo t, donde

$i = 1,2,...,4$ (Cetes 28, Cetes 91, Bondes 28, Bondes 91)

$j = 1,2,...,13$ (depende del instrumento)

$t = 1,2,...,13$ (Periodos en el horizonte de planeación)

Adicionalmente se emplean otras variables conocidas que representan algunas características de los instrumentos como son: el precio, el valor nominal y los cupones para el caso de BONDES.

El precio de un instrumento varía en el tiempo dependiendo de su vencimiento, así denotaremos por p_{ijt} el precio del instrumento tipo i que vence en j plazos y que fue comprado en el periodo t, donde

$i = 1,2,\ldots,4$

$j = 1,2,\ldots,13$

$t = 1,2,\ldots,13$

A diferencia del precio, el valor nominal de un instrumento no varía en el tiempo y representa el valor que el emisor pagará al poseedor al vencimiento del instrumento. El valor nominal de cada instrumento "i", N_i, se señala en la siguiente tabla.

Instrumentos	Valor Nominal (pesos)
CETES 28	10
CETES 91	10
BONDES 28	100
BONDES 91	100

Para los BONDES es importante conocer la fecha y el monto de un pago de cupón ya que representa un flujo de efectivo a favor del inversionista. Denotaremos por C^k_{ijt} el cupón que paga en el periodo k el instrumento i con vencimiento en j plazos y comprado en el periodo t

donde

$i = 1,2,\ldots,4$

$j = 1,2,\ldots,13$

$t = 1,2,\ldots,13$

$k = 1,2,\ldots,13$

Es importante observar que los CETES, también considerados como Bonos Cupón Cero, no pagan cupón. Sin embargo, para términos de la modelación pueden ser considerados con un cupón de valor cero.

Es momento de incluir las variables relacionadas con las necesidades y recursos del inversionista, que fueron proporcionadas al asesor, tales como el requisito de liquidez y el presupuesto inicial de inversión. El requisito bruto de liquidez para algún periodo t en particular, corresponde a la cantidad de dinero que el inversionista desea disponer en dicho periodo. Este requisito conocido, será denotado por L^0_t. A diferencia del requisito bruto de liquidez, el presupuesto de inversión para periodos mayores al primero no se conoce debido a que dependerá de las inversiones realizadas con anterioridad. Para este caso denotaremos al presupuesto de inversión para el periodo t por P_t donde

$t = 1,...,13$

DATOS DE INICIO DEL MODELO

Es muy posible que un inversionista antes de acudir con un asesor financiero haya realizado algunas inversiones, es decir, existe la posibilidad de una cartera vigente. En este caso, se debe conocer la composición de la misma, antes de realizar futuras inversiones, con el fin de determinar el presupuesto real en el periodo inicial, lo que equivale a conocer el número actual, n^0_{ijt}, de los diferentes instrumentos que fueron comprados con anterioridad y que vencen dentro del horizonte de planeación.

Para el caso particular de nuestro inversionista supondremos que no ha realizado inversiones anteriores, por lo que el presupuesto inicial es el indicado en la tabla de los excedentes en las percepciones para el periodo 1 (página 85).

Los excedentes en las percepciones en cada periodo representan recursos susceptibles de ser invertidos en ese periodo. Por lo que, E_t, será la cantidad de excedente en las percepciones que el inversionista tiene en el periodo t.

MODELACIÓN

Seguramente no has olvidado el problema que tratamos de resolver: deseamos determinar en cuáles instrumentos invertir en cada periodo y más específicamente, cuántos de cada uno de ellos debemos adquirir en forma tal que obtengamos la máxima ganancia al final del horizonte de planeación. Así, el problema se resuelve al especificar las cantidades n_{ijt}, siempre garantizando que los requisitos de liquidez se satisfagan.

La construcción del modelo requiere primeramente establecer algunas relaciones estructurales básicas.

En relación con el vencimiento, si un instrumento i es comprado en el periodo k con j periodos por vencer entonces vence en el periodo $t = k + j$. Así, para que un instrumento a plazo j tenga su vencimiento en el periodo t tiene que haber sido comprado en un periodo anterior $k = t - j$.

Liquidez Neta

Como recordamos, nuestro inversionista durante el horizonte de planeación va obteniendo recursos ya sea por sus percepciones salariales, por el pago de trabajos realizados o por el vencimiento de algunos instrumentos. Sea cual sea su origen, los recursos disponibles en cada periodo se deben calcular y considerar antes de armar el modelo. El monto de estos recursos para un periodo t dado, es igual a la suma de los instrumentos de la cartera vigente que vencen en el periodo t (si es que existen) multiplicados por su valor nominal, más los pagos de cupón, más los excedentes en las percepciones. El cálculo de estos recursos se obtiene mediante la ecuación:

$$R_t = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j \geq t}^{J} \mathrm{N}_i \, n^0_{ij(t-j)} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j \geq l}^{J} \sum_{l=t}^{J} C^t_{ij(t-l)} n^0_{ij(t-l)} + E_t \qquad (1)$$

Estos recursos se obtienen de todos los instrumentos existentes en la cartera vigente en el periodo $t = 0$.

El primer sumando de la ecuación R_t representa el flujo de efectivo obtenido por el vencimiento de instrumentos comprados con anterioridad a la nueva inversión (i.e. en periodos menores al uno), y el segundo, el efectivo obtenido del pago de cupón de instrumentos comprados antes del tiempo uno y que tienen su vencimiento en el periodo t o en algún periodo posterior. Finalmente, el tercer sumando es el efectivo que obtiene el inversionista en este periodo como excedente en las percepciones.

Como los recursos disponibles R_t son líquidos, el requisito de liquidez real del periodo t no es el requisito bruto de liquidez, sino la diferencia entre el requisito bruto de liquidez, $L^0{}_t$ y los recursos disponibles R_t. Por lo tanto, se define el *requisito neto de liquidez* como

$$L_t = L_t^0 - R_t \qquad (2)$$

Este valor se puede y se debe obtener antes de armar el modelo.

Restricciones entre Periodos

Emplear restricciones entre periodos que relacionan el presupuesto disponible para la inversión en cada periodo "*t*", permite plantear el modelo de tal forma que sólo el presupuesto P_t dependa de las decisiones en periodos anteriores.

De esta forma, el presupuesto para un periodo t dado se determina como el número de instrumentos que vencen durante el periodo multiplicados por su valor nominal, más el pago de cupón de los diferentes instrumentos, menos el requisito de liquidez neta.

Es importante recordar que nunca se invertirá en instrumentos que tengan vencimiento fuera del horizonte de planeación, es decir, el plazo máximo J de vencimiento de los instrumentos será menor o igual al total de periodos T que se considera para el horizonte de planeación, $J \leq T$.

La relación matemática que representa los recursos disponibles en el periodo t, provenientes de inversiones hechas en periodos anteriores dentro del horizonte de planeación, tiene la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{M} N_i \, n_{ij(t-j)} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j\geq l}^{N}\sum_{l=1}^{M} C^t_{ij(t-l)} \, n_{ij(t-l)}$$

El primer término de la relación anterior representa el flujo de efectivo (o recursos) obtenido por el vencimiento de instrumentos comprados durante el horizonte de planeación. Hay que notar que la suma que corresponde a los plazos j tiene un límite indefinido M. La razón es porque depende del periodo t y el plazo máximo J de vencimiento, ya que si $t \leq J$, existe la posibilidad de que $t - J \leq 0$. Es decir, se requieren montos correspondientes a instrumentos comprados en periodos anteriores a los que se consideran en el horizonte de planeación; pero éstos ya están considerados en el requisito neto de liquidez, definido en la ecuación (2). Por lo tanto, se define

$$M = \begin{cases} t-1 & \text{para } t = 2, 3, \ldots, J \\ J & \text{para } t = J+1, \ldots, T \end{cases}$$

Por otro lado, el segundo término corresponde al efectivo obtenido del pago de cupón de instrumentos adquiridos durante el horizonte de planeación con vencimiento en el periodo t o en algún periodo posterior. Nuevamente, la suma que corresponde a lo plazos j tiene un límite indefinido N. El motivo es porque depende del periodo en el que fueron adquiridos $t - l$ y el plazo máximo al que pudieron haber sido comprados para garantizar que tienen su vencimiento dentro del horizonte de planeación y en un periodo mayor o igual a t. Asimismo, observamos que la suma que corresponde a los periodos $t - l$ en el que se adquieren los instrumentos tienen el límite indefinido M. La causa es porque, al igual que en el primer factor, depende del periodo en el que fueron comprados y el plazo máximo J de vencimiento, para evitar considerar recursos de instrumentos vencidos o comprados anteriormente al horizonte de planeación. Por lo tanto, se define

$$\mathrm{N} = \begin{cases} \mathrm{J} & \text{para } t = 2,\ldots,\mathrm{T}+1-\mathrm{J} \\ \mathrm{T}-t+l & \text{para } t = \mathrm{T}-\mathrm{J}+2,\ldots,\mathrm{T} \end{cases}$$

Por lo tanto, el presupuesto de inversión para el periodo t se define como:

$$\mathrm{P}_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\mathrm{I}}\sum_{j=1}^{t-1}\mathrm{N}_{ij}\, n_{ij(t-j)} + \sum_{i=1}^{\mathrm{I}}\sum_{j\geq l}^{\mathrm{N}}\sum_{l=t}^{t-1} C^{t}_{ij(t-l)} n_{ij(t-l)} - L_t; & t = 2,3,\ldots,\mathrm{J} \\ & (3) \\ \sum_{i=1}^{\mathrm{I}}\sum_{j=1}^{\mathrm{J}}\mathrm{N}_{ij}\, n_{ij(t-j)} + \sum_{i=1}^{\mathrm{I}}\sum_{j\geq l}^{\mathrm{N}}\sum_{l=t}^{\mathrm{J}} C^{t}_{ij(t-l)} n_{ij(t-l)} - L_t; & t = \mathrm{J}+1,\ldots,\mathrm{T} \end{cases}$$

Estas restricciones empiezan a partir del segundo periodo porque el presupuesto para el primer periodo P_1 es un dato inicial del modelo.

Restricciones Intraperiodos

Dos condiciones en particular que se deben satisfacer en cada periodo son:

i) La cantidad de dinero invertido en cada periodo no debe exceder el presupuesto disponible en el periodo respectivo, y

ii) El requisito de liquidez se debe satisfacer en cada periodo. Es decir, los recursos en cada periodo deben ser suficientes para cubrir los requisitos de liquidez de los periodos respectivos.

Cada una de las condiciones anteriores dan origen a dos grupos de restricciones, el primer grupo se puede representar por medio de la ecuación

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} P_{ijt}\, n_{ijt} \leq \mathsf{P}_t, \qquad t = 1,2,\ldots,T \tag{4}$$

Mientras que el segundo, referente al requisito de liquidez, se puede representar mediante el uso de la ecuación (3) exigiendo que el presupuesto P_t disponible en cada periodo sea no negativo; es decir, que:

$$\mathsf{P}_t \geq 0; \qquad t = 2,3,\ldots,T \tag{5}$$

CONDICIONES SOBRE EL NÚMERO DE ACTIVOS

Al representar n_{ijt} la cantidad de instrumentos i adquiridos en un periodo t, no puede ser negativa. Aún más, al trabajar con instrumentos que no se pueden fraccionar, no podemos comprar medio CETE o tres cuartos de BONDE, n_{ijt} debe ser entero.

La observación anterior exhibe un factor no considerado hasta el momento. Al no poder fraccionar los instrumentos, no todo el presupuesto en un periodo será invertido. Es posible que exista un remanente en efectivo que no es suficiente para adquirir algún instrumento pero que debe ser considerado para el periodo siguiente.

Para efectos de modelación, y por simplicidad en la notación, incluiremos a este remanente como un instrumento adicional (I+1) con características similares a los CETES. Emitidos en todos los periodos, a plazo 1 y con valor nominal 1.

En este caso $n_{(\mathrm{I}+1)1t}$ es una variable dependiente donde su valor está determinado por

$$n_{(\mathrm{I}+1)1\mathrm{t}} = \mathsf{P}_{\mathrm{t}} - \sum_{i=1}^{\mathrm{I}} \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} \mathsf{P}_{ijt} n_{ijt},$$

Por lo que

$$\begin{aligned} &n_{(\mathrm{I}+1)1t} \geq 0 \\ &n_{(\mathrm{I}+1)1t} \in R \qquad t = 1,\ldots,\mathrm{T} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las restricciones para los valores de n_{ijt} son:

$$n_{ijt} \geq 0, \quad n_{ijt} \in Z \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ldots,\mathrm{I} \\ j = 1,\ldots,\mathrm{J} \\ t = 1,\ldots,\mathrm{T} \end{array}$$

$$n_{(\mathrm{I}+1)1t} \geq 0, \quad n_{(\mathrm{I}+1)1t} \in R \qquad t = 1,\ldots,\mathrm{T}$$

CRITERIO DE DECISIÓN (FUNCIÓN OBJETIVO)

Como hemos apreciado, hasta este momento hemos introducido alguna notación, determinado las variables de decisión y expresado matemáticamente todas las relaciones y restricciones importantes en el problema. Por lo tanto, únicamente nos resta incluir el criterio de decisión.

Nuestro criterio permitirá elegir entre todas las carteras distintas, prefiriendo aquella que al término del horizonte de planeación tenga el máximo valor posible. Esto equivale a la expresión

$$\text{maximizar} \quad \sum_{i=1}^{\mathrm{I}+1}\sum_{j=1}^{\mathrm{J}} \mathrm{N}_i \, n_{ij(\mathrm{T}+1-j)} + \sum_{i=1}^{\mathrm{I}+1}\sum_{j=1}^{\mathrm{J}} C_{ij(\mathrm{T}+1-j)}^{(\mathrm{T}+1)} n_{ij(\mathrm{T}+1-j)} \qquad (6)$$

EL MODELO

Para armar el modelo de selección de cartera emplearemos las ecuaciones (3), (4), (5), las restricciones de no negatividad y la ecuación (6) que expresa la función objetivo. Al conjuntar todas ellas se obtiene una representación de un problema de programación lineal expresado como:

$$\text{maximizar} \quad \sum_{i=1}^{\mathrm{I}+1}\sum_{j=1}^{\mathrm{J}} \mathrm{N}_t \, n_{ij(\mathrm{T}+1-j)} + \sum_{i=1}^{\mathrm{I}+1}\sum_{j=1}^{\mathrm{J}} C^{(\mathrm{T}+1)}_{ij(\mathrm{T}+1-j)} n_{ij(\mathrm{T}+1-j)}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{I}+1}\sum_{j=1}^{t-1} \mathrm{N}_{ij(t-j)} \, n_{ij(t-j)} + \sum_{i=1}^{\mathrm{I}+1}\sum_{j\geq l}^{\mathrm{N}}\sum_{l=t}^{t-1} C^{t}_{ij(t-l)} n_{ij(t-l)} - L_t = \mathsf{P}_t \qquad t = 2,3,\ldots,\mathrm{J}$$

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{I}+1}\sum_{j=1}^{\mathrm{J}} \mathrm{N}_{ij(t-j)} \, n_{ij(t-j)} + \sum_{i=1}^{\mathrm{I}+1}\sum_{j\geq l}^{\mathrm{N}}\sum_{l=t}^{\mathrm{J}} C^{t}_{ij(t-j)} n_{ij(t-l)} - L_t = \mathsf{P}_t \qquad t = \mathrm{J}+1,\ldots,\mathrm{T}$$

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{I}}\sum_{j=1}^{\mathrm{J}} p_{ijt} \, n_{ijt} \leq \mathsf{P}_t \\ \mathsf{P}_t \geq 0 \end{array}\right\} \quad t = 1,2,\ldots,13$$

$$n_{(\mathrm{I}+1)1t} = \mathsf{P}_t - \sum_{i=1}^{\mathrm{I}}\sum_{j=1}^{\mathrm{J}} p_{ijt} n_{ijt}$$

$$\left.\begin{array}{c} n_{ijt} \geq 0 \\ n_{ijt} \in Z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} i = 1,\ldots,\mathrm{I}+1 \\ j = 1,\ldots,\mathrm{J} \\ t = 1,\ldots,\mathrm{T} \end{array}$$

$$n_{(\mathrm{I}+1)1t} \in R^{+} \qquad t = 1,\ldots,\mathrm{T}$$

SOLUCIÓN PARA EL INVERSIONISTA

Después de haber obtenido el modelo general de selección de cartera estamos en posibilidad de aplicarlo al caso particular de nuestro inversionista. Muchos de los datos necesarios los hemos conocido através del planteamiento del modelo como son: el número de instrumentos, su valor nominal y su precio. Por lo tanto, únicamente resta calcular los datos iniciales: el presupuesto inicial, los recursos disponibles en cada periodo y el requisito de liquidez neto.

Presupuesto Inicial y Recursos Disponibles en Periodos Posteriores

Como se indico en los datos de inicio del modelo, nuestro inversionista no realizó inversiones anteriores, no existe una cartera vigente. Por lo tanto, los recursos para el primer periodo son cero, $R_1 = 0$, y el presupuesto para el periodo 1, lo obtenemos como el excedente en las percepciones menos el requisito de liquidez bruto, es decir,

$$P_1 = 35 - 3 = 32.$$

Por la misma razón, los recursos disponibles para periodos posteriores se pueden obtener de la tabla de excedentes.

Recursos Disponibles

Periodo (semanas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Monto (miles de pesos)	0	0	37	0	35	17	37	0	35	0	37	25	0

El requisito de liquidez neto

Como el requisito de liquidez del primer periodo queda incluido en el cálculo del presupuesto para ese periodo, sólo se debe calcular para los periodos siguientes. En todos los periodos contamos con recursos provenientes de los excedentes, por lo tanto, la liquidez neta se obtiene restando de dichas cantidades las correspondientes de la tabla de liquidez.

Liquidez Neta

Periodo (semanas)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Monto (miles de pesos)	5	-34	18	-32	-12	-34	4.5	-32	5	-34	-20.5	3

Con los datos anteriores y los dados al inicio del problema ya es posible elaborar el modelo para el caso particular. Para estos efectos determinaremos todas las restricciones del problema, las que emplearemos posteriormente, para determinar la solución específica con la ayuda de un programa de computación.

RESTRICCIONES

Restricciones con respecto a la liquidez

Para ejemplificar la construcción de estas restricciones, vamos a desarrollar para el periodo $t = 3$.

$$10\, n_{121} + 10\, n_{112} + n_{512} - P_3 = -34{,}000$$

En este periodo se deben contabilizar las inversiones realizadas en periodos anteriores y que vencen al inicio de $t = 3$. Así, si se compraron Cetes, a plazo 2 en el periodo 1; a su vencimiento (periodo 3) se obtiene el nominal por el número de instrumentos comprados, n_{121}. Lo mismo sucede con el número n_{112} de Cetes, comprados a plazo 1 en el periodo 2. Además se debe considerar la cantidad de dinero remanente n_{512} del periodo anterior.

A continuación desarrollamos para el periodo $t = 5$;

$$10\, n_{141} + 10\, n_{132} + 10\, n_{123} + 10\, n_{114} + n_{514} + 0.5419 n_{381} + 0.5419 n_{372} + \\ + 0.5419 n_{363} + 0.5419 n_{354} - P_5 = -32{,}000$$

En este caso observamos que además de los instrumentos que vencen al inicio del periodo, existen instrumentos comprados con anterioridad a éste que aunque su vencimiento sea posterior paga cupón. Tal es el caso de un BONDE 28 comprado a plazo 6 en el periodo 3, cuyo vencimiento es en el periodo 9 pero paga cupón en el periodo 5, (0.5419), siendo un recurso disponible para este periodo.

Restricciones con respecto al presupuesto

Al igual que en el caso anterior, vamos a desarrollar la restricción para el periodo $t = 5$ y comprender la forma en que se deben de construir.

$$9.9707\ n_{115} + 9.9415\ n_{125} + 9.9126\ n_{135} + 9.8836\ n_{145} + 9.8547\ n_{255} +$$
$$+9.8258\ n_{265} + 9.7969\ n_{275} + 9.7680\ n_{285} + 9.7392\ n_{295} + 99.9536\ n_{345} +$$
$$+102.1792\ n_{445} + 101.1097\ n_{485} + n_{515} - P_5 = 0$$

Al conocer los precios de los instrumentos factibles a comprar en este periodo, se conoce de cuánto será la inversión al comprar cierto número de ellos. Por ejemplo, el precio de un Cete a plazo 1 en este periodo es de 9.9707 pesos. Así, al comprar n_{115} Cetes se invierte 9.9707 n_{115}.

La suma de las compras realizadas en todos los instrumentos posibles no debe exceder al presupuesto. Sin embargo, recordemos que en caso de existir un remanente en efectivo este se considera en el factor n_{515}.

A continuación presentamos todas las restricciones con relación a la liquidez que intervienen en el modelo:

$$10\ n_{111} + n_{511} - P_2 = 5{,}000$$

$$10\ (\ n_{121} + n_{112}\ ) + n_{512} - P_3 = -34{,}000$$

$$10\ (\ n_{131} + n_{122} + n_{113}\ ) + n_{513} - P_4 = 18{,}000$$

$$10\ (\ n_{141} + n_{132} + n_{123} + n_{114}\ ) + 0.5419\ (\ n_{381} + n_{372} + n_{363} + n_{354}\ ) +$$
$$+n_{514} - P_5 = -32{,}000$$

$$10\ (\ n_{142} + n_{133} + n_{124} + n_{115} + n_{251}\ ) + n_{515} - P_6 = -12{,}000$$

$$10\ (\ n_{116} + n_{125} + n_{134} + n_{143} + n_{252} + n_{261}\ ) + n_{516} - P_7 = -\ 34{,}000$$

$$10\,(n_{117} + n_{126} + n_{135} + n_{144} + n_{253} + n_{262} + n_{271}) + n_{517} - P_8 = 4{,}500$$

$$10\,(n_{118} + n_{127} + n_{136} + n_{145} + n_{254} + n_{263} + n_{272} + n_{281}) + 100\,(n_{318} + n_{327} + n_{336} + n_{345} + n_{354} + n_{363} + n_{372} + n_{381}) + 0.5091\,(n_{318} + n_{327} + n_{336} + n_{345} + n_{354} + n_{363} + n_{372} + n_{381}) + 100\,(n_{418} + n_{427} + n_{436} + n_{445} + n_{454} + n_{463} + n_{472} + n_{481}) + 2.6321\,(n_{418} + n_{427} + n_{436} + n_{445} + n_{454} + n_{463} + n_{472} + n_{481}) + n_{518} - P_9 = -32{,}000$$

$$10\,(n_{119} + n_{128} + n_{137} + n_{146} + n_{255} + n_{264} + n_{273} + n_{282} + n_{291}) + n_{519} - P_{10} = 5{,}000$$

$$10\,(n_{1,1,10} + n_{129} + n_{138} + n_{147} + n_{256} + n_{265} + n_{274} + n_{283} + n_{292} + n_{2,10,1}) + n_{5,1,10} - P_{11} = -34{,}000$$

$$10\,(n_{1,1,11} + n_{1,2,10} + n_{139} + n_{148} + n_{257} + n_{266} + n_{275} + n_{284} + n_{293} + n_{2,10,2} + n_{2,11,1}) + n_{5,1,11} - P_{12} = -20{,}500$$

$$10\,(n_{1,1,12} + n_{1,2,11} + n_{1,3,10} + n_{149} + n_{258} + n_{267} + n_{276} + n_{285} + n_{294} + n_{2,10,3} + n_{2,11,2} + n_{2,12,1}) + 100\,(n_{4,1,12} + n_{4,2,11} + n_{4,3,10} + n_{449} + n_{458} + n_{467} + n_{476} + n_{485} + n_{494} + n_{4,10,3} + n_{4,11,2} + n_{4,12,1}) + 2.2653\,(n_{4,1,12} + n_{4,2,11} + n_{4,3,10} + n_{449} + n_{458} + n_{467} + n_{476} + n_{485} + n_{494} + n_{4,10,3} + n_{4,11,2} + n_{4,12,1}) + n_{5,1,12} - P_{13} = 3{,}000$$

Las siguientes restricciones son respecto al presupuesto:

periodo 1

$$9.9707\,n_{111} + 9.9415\,n_{121} + 9.9124\,n_{131} + 9.8833\,n_{141} + 9.8542\,n_{251} + 9.8251\,n_{261} + 9.7959\,n_{271} + 9.7666\,n_{281} + 9.7374\,n_{291} + 9.7082\,n_{2,10,1} + 9.6789\,n_{2,11,1}$$

$+ 9.6499\ n_{2,12,1} + 9.6209\ n_{2,13,1} + 99.9136\ n_{381} + 101.3624\ n_{481} + 100.3677\ n_{4,12,1} + n_{511} - 32{,}000 = 0$

periodo 2

$9.9707\ n_{112} + 9.9415\ n_{122} + 9.9123\ n_{132} + 9.8834\ n_{142} + 9.8544\ n_{252} + 9.8253\ n_{262} + 9.7964\ n_{272} + 9.7672\ n_{282} + 9.7381\ n_{292} + 9.7087\ n_{2,10,2} + 9.6795\ n_{2,11,2} + 9.6503\ n_{2,12,2} + 100.1636\ n_{372} + 101.5424\ n_{472} + 100.5817\ n_{4,11,2} + n_{512} - P_2 = 0$

periodo 3

$9.9707\ n_{113} + 9.9416\ n_{123} + 9.9125\ n_{133} + 9.8835\ n_{143} + 9.8545\ n_{253} + 9.8254\ n_{263} + 9.7965\ n_{273} + 9.7677\ n_{283} + 9.7386\ n_{293} + 9.7093\ n_{2,10,3} + 9.6799\ n_{2,11,3} + 100.2937\ n_{363} + 101.9044\ n_{463} + 100.7927\ n_{4,10,3} + n_{513} - P_3 = 0$

periodo 4

$9.9707\ n_{114} + 9.9415\ n_{124} + 9.9125\ n_{134} + 9.8835\ n_{144} + 9.8546\ n_{254} + 9.8256\ n_{264} + 9.7967\ n_{274} + 9.7678\ n_{284} + 9.7389\ n_{294} + 9.7098\ n_{2,10,4} + 100.5046\ n_{354} + 101.9102\ n_{454} + 100.8517\ n_{494} + n_{514} - P_4 = 0$

periodo 5

$9.9707\ n_{115} + 9.9415\ n_{125} + 9.9126\ n_{135} + 9.8836\ n_{145} + 9.8547\ n_{255} + 9.8258\ n_{265} + 9.7969\ n_{275} + 9.7680\ n_{285} + 9.7392\ n_{295} + 99.9536\ n_{345} + 102.1792\ n_{445} + 101.1097\ n_{485} + n_{515} - P_5 = 0$

periodo 6

$9.9707\ n_{116} + 9.9416\ n_{126} + 9.9125\ n_{136} + 9.8836\ n_{146} + 9.8548\ n_{256} + 9.8259\ n_{266} + 9.7970\ n_{276} + 9.7683\ n_{286} + 100.0696\ n_{336} + 102.2622\ n_{436} + 101.1496\ n_{476} + n_{516} - P_6 = 0$

periodo 7

$9.9707\ n_{117} + 9.9415\ n_{127} + 9.9126\ n_{137} + 9.8836\ n_{147} + 9.8548\ n_{257} + 9.8260\ n_{267} + 9.7972\ n_{277} + 100.2406\ n_{327} + 102.4122\ n_{427} + 101.3626\ n_{467} + n_{517} - P_7 = 0$

periodo 8

$9.9707\ n_{118} + 9\ 9415\ n_{128} + 9.9125\ n_{138} + 9.8837\ n_{148} + 9.8548\ n_{258} + 9.8261\ n_{268} + 100.5086\ n_{318} + 102.6262\ n_{418} + 101.6206\ n_{458} + n_{518} - P_8 = 0$

periodo 9

$9.9707\ n_{119} + 9.9416\ n_{129} + 9.9126\ n_{139} + 9.8836\ n_{149} + 9.8548\ n_{259} + 101.7053\ n_{449} + n_{519} - P_9 = 0$

periodo 10

$9.9708\ n_{1,1,10} + 9.9416\ n_{1,2,10} + 9.9126\ n_{1,3,10} + 9.8837\ n_{1,4,10} + 101.8045\ n_{4,3,10} + n_{5,1,10} - P_{10} = 0$

periodo 11

$9.9708\ n_{1,1,11} + 9.9417\ n_{1,2,11} + 9.9126\ n_{1,3,11} + 102.1052\ n_{4,2,11} + n_{5,1,11} - P_1{=}0$

periodo 12

$$9.9708\, n_{1,1,12} + 9.9417\, n_{1,2,12} + 102.2532\, n_{4,1,12} + n_{5,1,12} - P_{12} = 0$$

periodo 13

$$9.9708\, n_{1,1,13} + n_{5,1,13} - P_{13} = 0$$

En total, el modelo consta de 25 restricciones que involucran 119 variables enteras y 25 variables reales.

FUNCIÓN OBJETIVO

Como se mencionó, el objetivo es determinar la cartera de inversión que al finalizar el horizonte de planeación tenga el máximo valor posible. Por lo tanto, la función objetivo es

$$\text{Max} \quad 10\, n_{1,1,13} + 10\, n_{1,2,12} + 10\, n_{1,3,11} + 10\, n_{1,4,10} + 10\, n_{259} + 10\, n_{268} + 10\, n_{277} + 10\, n_{286} + 10\, n_{295} + 10\, n_{2,10,4} + 10\, n_{2,11,3} + 10\, n_{2,12,2} + 10\, n_{2,13,1} + n_{5,1,13}$$

SOLUCIÓN

La composición de la cartera que genera el máximo valor posible no pudo ser obtenida con exactitud por problemas computacionales.[8] No obstante, se presenta una solución aproximada obtenida a partir del resultado generado por el paquete de programación entera LINGO, al considerar únicamente 30 variables enteras.

La **solución aproximada** da como resultado un valor de **$ 199,254 pesos.**

[8] La versión de LINGO a la cual se tuvo acceso limita el número de variables enteras a 30 Ver Anexo "C"

Y, la estrategia de inversión queda determinada por el valor de las siguientes variables

Variable	Valor
$n_{1,1,1}$	500
$n_{2,13,1}$	2807
$n_{5,1,1}$	8.784
P_2	8.784
$n_{5,1,2}$	8.784
P_3	34008.874
$n_{1,1,3}$	1800
$n_{2,11,3}$	1659
$n_{5,1,3}$	2.57
P_4	2.57
$n_{5,1,4}$	2.57
P_5	32002.57
$n_{2,9,5}$	3285
$n_{5,1,5}$	9.298
P_6	12009.298
$n_{2,8,6}$	1229
$n_{5,1,6}$	4.058
P_7	34004.058
$n_{1,1,7}$	3410
$n_{5,1,7}$	3.971
P_8	29603.971
$n_{1,1,8}$	2969
$n_{5,1,8}$	0.963
P_9	61690.963
$n_{1,1,9}$	6187
$n_{5,1,9}$	2.243

P_{10}	56870
$n_{1,2,10}$	5720
$n_{5,1,10}$	4.048
P_{11}	34004.048
$n_{1,3,11}$	3430
$n_{5,1,11}$	3.83
P_{12}	77703.83
$n_{1,1,12}$	7793
$n_{5,1,12}$	5.216
P_{13}	74935.216
$n_{1,1,13}$	7515
$n_{5,1,13}$	4.654

La interpretación de esta solución equivale a comprar:

500 Cetes 28 a plazo uno en el periodo uno y,
2807 Cetes 91 a plazo trece en el periodo uno.
En el periodo dos no se realizan compras.
1659 Cetes 91 a plazo once en el periodo tres.
En el periodo cuatro no se realizan compras.
3285 Cetes 91 a plazo nueve en el periodo cinco.
1229 Cetes 91 a plazo ocho en el periodo seis.
3410 Cetes 28 a plazo uno en el periodo siete.
2969 Cetes 28 a plazo uno en el periodo ocho.
6187 Cetes 28 a plazo uno en el periodo nueve.
5720 Cetes 28 a plazo dos en el periodo diez.
3430 Cetes28 a plazo tres en el periodo once.
7793 Cetes 28 a plazo uno en el periodo doce.

7515 Cetes 28 a plazo uno en el periodo trece.

Por lo tanto, el valor del portafolio al final del horizonte de planeación queda determinado por la cantidad de instrumentos que tienen su vencimiento en este tiempo multiplicados por su valor nominal, i.e.

Instrumento	Plazo	Periodo	Cantidad	Valor Nominal	Total
Cetes 91	13	1	2807	10	28070
Cetes 91	11	3	1659	10	16590
Cetes 91	9	5	3285	10	32850
Cetes 91	8	6	1229	10	12290
Cetes 28	3	11	3430	10	34300
Cetes 28	1	13	7515	10	75150
Remanente	1	13	4.654	1	4.654

De esta forma se obtiene el valor de la cartera de \$ 199,254 pesos. Al comparar este valor con \$ 171,000 que hubiera tenido el inversionista en caso de no haber acudido con el asesor, observamos una ganancia de \$ 28,054. Por lo que se concluye fue una buena decisión acudir con el asesor.

En este ejemplo se pueden apreciar las técnicas empleadas para crear un modelo matemático que permita determinar una cartera de inversión con ciertas características. Asimismo, permite ejemplificar la relación que guardan las finanzas con las Matemáticas.

ANEXO "B"

C E T E S

Los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES) son títulos de crédito al portador en los cuales se consigna la obligación del gobierno federal a pagar su valor nominal, diez pesos, a la fecha de su vencimiento.

Los miércoles de cada semana se subasta una nueva emisión de CETES a plazos diferentes (el plazo máximo previsto por la ley es de un año). Para nuestro caso haremos referencia a plazos de 28 y 91 días, CETES 28 y CETES 91, respectivamente.

Dado que las emisiones de CETES se colocan semanalmente y que el plazo más frecuente de éstos es de 91 días, el inversionista encontrará en el mercado CETES con trece plazos distintos. El inversionista obtiene ventajas con esto ya que así programa sus necesidades de liquidez comprando CETES con el vencimiento que más le convenga.

Los CETES se venden a los inversionistas con un descuento, es decir, debajo de su valor nominal (bajo par), de ahí que el rendimiento que recibe el inversionista consiste en la diferencia entre el precio de compra y venta.

Para determinar el precio al que se venden los CETES hay que calcular el descuento de estos títulos. Lo anterior nos lleva al concepto de tasa de descuento, que se puede definir como un porcentaje que, aplicado al valor nominal, nos indica la cantidad de pesos que se debe descontar a los CETES para conocer su precio. Las tasas de descuento de los CETES las determina el mercado, principalmente en función de los rendimientos de otros instrumentos de inversión y a la oferta y demanda existentes.

BONDES

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (BONDES) son títulos de crédito al portador en los cuales se consigna la obligación del gobierno federal a pagar su valor nominal, cien pesos, a la fecha de su vencimiento además de pagar intereses periódicos, denominados *pagos de cupón.*

Existen BONDES con pagos de cupón a 28 días (BONDES 28) y a 91 días (BONDES 91). A diferencia de los CETES, los BONDES son instrumentos de inversión a largo plazo, emitidos a plazos mayores a un año y menores a cinco años. Su emisión está sujeta a las condiciones económicas del país, por lo que no existen emisiones periódicas. Al igual que los CETES los BONDES son instrumentos que se venden a descuento.

ANEXO "C"

A continuación se presenta la implementación del problema en el software.

```
max = n1_1_13*10 + n1_2_12*10 + n1_3_11*10 + n1_4_10*10 + n2_5_9*10 + n2_6_8*10 +
n2_7_7*10 + n2_8_6*10 + n2_9_5*10 + n2_10_4*10 + n2_11_3*10 + n2_12_2*10 +
n2_13_1*10 + n5_1_13;

n1_1_1*10 + n5_1_1 - P2 = 5000;

n1_2_1*10 + n1_1_2*10 + n5_1_2 - P3 = -34000;

n1_3_1*10 + n1_2_2*10 + n1_1_3*10 + n5_1_3 - P4 = 18000;

n1_4_1*10 + n1_3_2*10 + n1_2_3*10 + n1_1_4*10 + n3_8_1*0.5419 + n3_7_2*.5419 +
n3_6_3*0.5419 + n3_5_4*0.5419 + n5_1_4 - P5 = -32000;

n1_4_2*10 + n1_3_3*10 + n1_2_4*10 + n1_1_5*10 + n2_5_1*10 + n5_1_5 - P6 = -12000;

n1_1_6*10 + n1_2_5*10 + n1_3_4*10 + n1_4_3*10 + n2_5_2*10 + n2_6_1*10 + n5_1_6 -
P7 = -34000;

n1_1_7*10 + n1_2_6*10 + n1_3_5*10 + n1_4_4*10 + n2_5_3*10 + n2_6_2*10 +
n2_7_1*10 + n5_1_7 - P8 = 4500;

n1_1_8*10 + n1_2_7*10 + n1_3_6*10 + n1_4_5*10 + n2_5_4*10 + n2_6_3*10 +
n2_7_2*10 + n2_8_1*10 + n3_1_8*100 + n3_2_7*100 + n3_3_6*100 + n3_4_5*100 +
n3_5_4*100 + n3_6_3*100 + n3_7_2*100 + n3_8_1*100 + n3_1_8*0.5091 + n3_2_7*0.5091
+ n3_3_6*0.5091+ n3_4_5*0.5091 + n3_5_4*0.5091 + n3_6_3*0.5091 + n3_7_2*0.5091 +
n3_8_1*0.5091 + n4_1_8*100 + n4_2_7*100 + n4_3_6*100 + n4_4_5*100 + n4_5_4*100 +
n4_6_3*100 + n4_7_2*100 + n4_8_1*100 + n4_1_8*2.6321 + n4_2_7*2.6321 +
n4_3_6*2.6321 + n4_4_5*2.6321 + n4_5_4*2.6321 + n4_6_3*2.6321 + n4_7_2*2.6321 +
n4_8_1*2.6321 + n5_1_8 - P9 =-32000;


n1_1_9*10 + n1_2_8*10 + n1_3_7*10 + n1_4_6*10 + n2_5_5*10 + n2_6_4*10 + n2_7_3*10
+ n2_8_2*10 + n2_9_1*10 + n5_1_9 - P10 =5000;


n1_1_10*10 + n1_2_9*10 + n1_3_8*10 + n1_4_7*10 + n2_5_6*10 + n2_6_5*10 +
n2_7_4*10 + n2_8_3*10 + n2_9_2*10 + n2_10_1*10 + n5_1_10 - P11 = - 34000;


n1_1_11*10 + n1_2_10*10 + n1_3_9*10 + n1_4_8*10 + n2_5_7*10 + n2_6_6*10 +
n2_7_5*10 + n2_8_4*10 + n2_9_3*10 + n2_10_2*10 + n2_11_1*10 + n5_1_11 - P12 = -
20500;


n1_1_12*10 + n1_2_11*10 + n1_3_10*10 + n1_4_9*10 + n2_5_8*10 + n2_6_7*10 +
n2_7_6*10 + n2_8_5*10 + n2_9_4*10 + n2_10_3*10 + n2_11_2*10 + n2_12_1*10 +
n4_1_12*100 + n4_2_11*100 + n4_3_10*100 + n4_4_9*100 + n4_5_8*100 + n4_6_7*100 +
n4_7_6*100 + n4_8_5*100 + n4_9_4*100 + n4_10_3*100 + n4_11_2*100 + n4_12_1*100 +
n4_1_12*2.2653 + n4_2_11*2.2653 + n4_3_10*2.2653 + n4_4_9*2.2653 + n4_5_8*2.2653
+ n4_6_7*2.2653 + n4_7_6*2.2653 + n4_8_5*2.2653 + n4_9_4*2.2653 + n4_10_3*2.2653
+ n4_11_2*2.2653 + n4_12_1*2.2653 + n5_1_12 - P13 = 3000;
```

```
n1_1_1*9.9707 + n1_2_1*9.9415 + n1_3_1*9.9124 + n1_4_1*9.8833 + n2_5_1*9.8542 +
n2_6_1*9.8251 + n2_7_1*9.7959 + n2_8_1*9.7666 + n2_9_1*9.7374 + n2_10_1*9.7082 +
n2_11_1*9.6789 + n2_12_1*9.6499 + n2_13_1*9.6209 + n3_8_1*99.9136 +
n4_8_1*101.3624 + n4_12_1*100.3677 + n5_1_1 = 32000;

n1_1_2*9.9707 + n1_2_2*9.9415 + n1_3_2*9.9123 + n1_4_2*9.8834 + n2_5_2*9.8544 +
n2_6_2*9.8253 + n2_7_2*9.7964 + n2_8_2*9.7672 + n2_9_2*9.7381 + n2_10_2*9.7087 +
n2_11_2*9.6795 + n2_12_2*9.6503 + n3_7_2*100.1636 + n4_7_2*101.5424 +
n4_11_2*100.5817 + n5_1_2 - P2 = 0;

n1_1_3*9.9707 + n1_2_3*9.9416 + n1_3_3*9.9125 + n1_4_3*9.8835 + n2_5_3*9.8545 +
n2_6_3*9.8254 + n2_7_3*9.7965 + n2_8_3*9.7677 + n2_9_3*9.7386 + n2_10_3*9.7093 +
n2_11_3*9.6799 + n3_6_3*100.2937 + n4_6_3*101.9044 + n4_10_3*100.7927 + n5_1_3 -
P3 = 0;

n1_1_4*9.9707 + n1_2_4*9.9415 + n1_3_4*9.9125 + n1_4_4*9.8835 + n2_5_4*9.8546 +
n2_6_4*9.8256 + n2_7_4*9.7967 + n2_8_4*9.7678 + n2_9_4*9.7389 + n2_10_4*9.7098 +
n3_5_4*100.5046 + n4_5_4*101.9102 + n4_9_4*100.8517 + n5_1_4 - P4 = 0;

n1_1_5*9.9707 + n1_2_5*9.9415 + n1_3_5*9.9126 + n1_4_5*9.8836 + n2_5_5*9.8547 +
n2_6_5*9.8258 + n2_7_5*9.7969 + n2_8_5*9.7680 + n2_9_5*9.7392 + n3_4_5*99.9536 +
n4_4_5*102.1792 + n4_8_5*101.1097 + n5_1_5 - P5 = 0;

n1_1_6*9.9707 + n1_2_6*9.9416 + n1_3_6*9.9125 + n1_4_6*9.8836 + n2_5_6*9.8548 +
n2_6_6*9.8259 + n2_7_6*9.7970 + n2_8_6*9.7683 + n3_3_6*100.0696 + n4_3_6*102.2622
+ n4_7_6*101.1496 + n5_1_6 - P6 = 0;

n1_1_7*9.9707 + n1_2_7*9.9415 + n1_3_7*9.9126 + n1_4_7*9.8836 + n2_5_7*9.8548 +
n2_6_7*9.8260 + n2_7_7*9.7972 + n3_2_7*100.2406 + n4_2_7*102.4122 +
n4_6_7*101.3626 + n5_1_7 - P7 = 0;

n1_1_8*9.9707 + n1_2_8*9.9415 + n1_3_8*9.9125 + n1_4_8*9.8837 + n2_5_8*9.8548 +
n2_6_8*9.8261 + n3_1_8*100.5086 + n4_1_8*102.6262 + n4_5_8*101.6206 + n5_1_8 - P8
= 0;

n1_1_9*9.9707 + n1_2_9*9.9416 + n1_3_9*9.9126 + n1_4_9*9.8836 + n2_5_9*9.8548 +
n4_4_9*101.7053 + n5_1_9 - P9 = 0;

n1_1_10*9.9708 + n1_2_10*9.9416 + n1_3_10*9.9126 + n1_4_10*9.8837 +
n4_3_10*101.8045 + n5_1_10 - P10 = 0;

n1_1_11*9.9708 + n1_2_11*9.9417 + n1_3_11*9.9126 + n4_2_11*102.1052 + n5_1_11 -
P11 = 0;

n1_1_12*9.9708 + n1_2_12*9.9417 + n4_1_12*102.2532 + n5_1_12 - P12 = 0;

n1_1_13*9.9708 + n5_1_13 - P13 = 0;
```

```
p2>=0;
p3>=0;
p4>=0;
p5>=0;
p6>=0;
p7>=0;
p8>=0;
p9>=0;
p10>=0;
p11>=0;
p12>=0;
p13>=0;
n1_4_9>=0;
n1_4_10>=0;
n2_5_1>=0;
n2_5_2>=0;
n2_5_3>=0;
n2_5_4>=0;
n2_5_5>=0;
n2_5_6>=0;
n2_5_7>=0;
n2_5_8>=0;
n2_5_9>=0;
n2_6_1>=0;
n2_6_2>=0;
n2_6_3>=0;
n2_6_4>=0;
n2_6_5>=0;
n2_6_6>=0;
n2_6_7>=0;
n2_6_8>=0;
n2_7_1>=0;
n2_7_2>=0;
n2_7_3>=0;
n2_7_4>=0;
n2_7_5>=0;
n2_7_6>=0;
n2_7_7>=0;
n2_8_1>=0;
n2_8_2>=0;
n2_8_3>=0;
n2_8_4>=0;
n2_8_5>=0;
n2_8_6>=0;
n2_9_1>=0;
n2_9_2>=0;
n2_9_3>=0;
n2_9_4>=0;
n2_10_1>=0;
n2_10_2>=0;
n2_10_3>=0;
n2_10_4>=0;
n2_11_1>=0;
n2_11_2>=0;
n2_12_1>=0;
n2_12_2>=0;
n3_8_1>=0;
n3_7_2>=0;
n1_4_8>=0;
n1_4_7>=0;
n1_4_6>=0;
n1_4_5>=0;
n1_1_1>=0;
n1_1_2>=0;
n1_1_3>=0;
n1_1_4>=0;
n1_1_5>=0;
n3_5_4>=0;
n4_8_1>=0;
n4_7_2>=0;
n4_5_4>=0;
n4_12_1>=0;
n4_11_2>=0;
n4_9_4>=0;
n5_1_1>=0;
n5_1_2>=0;
n5_1_3>=0;
n5_1_4>=0;
n5_1_5>=0;
n5_1_6>=0;
n5_1_7>=0;
n5_1_8>=0;
n5_1_9>=0;
n5_1_10>=0;
n5_1_11>=0;
n5_1_12>=0;
n5_1_13>=0;
@gin(n1_1_6);
@gin(n1_1_7);
@gin(n1_1_8);
@gin(n1_1_9);
@gin(n1_1_12);
@gin(n1_1_13);
@gin(n1_2_10);
@gin(n1_3_11);
@gin(n2_9_5);
@gin(n2_11_3);
@gin(n2_13_1);
@gin(n3_6_3);
@gin(n3_4_5);
@gin(n3_3_6);
@gin(n3_2_7);
@gin(n3_1_8);
@gin(n4_6_3);
@gin(n4_4_5);
@gin(n4_3_6);
@gin(n4_2_7);
@gin(n4_1_8);
@gin(n4_10_3);
@gin(n4_8_5);
@gin(n4_7_6);
@gin(n4_6_7);
@gin(n4_5_8);
@gin(n4_4_9);
@gin(n4_3_10);
@gin(n4_2_11);
@gin(n4_1_12);
n1_1_10>=0;
n1_1_11>=0;
n1_2_1>=0;
n1_2_2>=0;
n1_2_3>=0;
n1_2_4>=0;
n1_2_5>=0;
n1_2_6>=0;
n1_2_7>=0;
n1_2_8>=0;
n1_2_9>=0;
n1_2_11>=0;
n1_2_12>=0;
n1_3_1>=0;
n1_3_2>=0;
n1_3_3>=0;
n1_3_4>=0;
n1_3_5>=0;
n1_3_6>=0;
n1_3_7>=0;
n1_3_8>=0;
n1_3_9>=0;
n1_3_10>=0;
n1_4_1>=0;
n1_4_2>=0;
n1_4_3>=0;
n1_4_4>=0;
end
```

La solución es la siguiente

```
Global optimal solution found at step:             79
 Objective value:                             199253.3
 Branch count:                                       3

     Variable              Value          Reduced Cost
     N1_1_13            7515.000         -0.3142052E-03
     N1_2_12            0.0000000         0.2553589E-04
     N1_3_11            3430.000         -0.4531906E-04
     N1_4_10            0.2714922         0.0000000
     N2_5_9             0.0000000         0.4558528E-04
     N2_6_8             0.0000000         0.4254333E-03
     N2_7_7            0.0000000          0.2130450E-03
     N2_8_6            1228.839           0.0000000
     N2_9_5            3285.000          -0.4916805E-03
     N2_10_4           0.0000000          0.2781188E-02
     N2_11_3           1659.000           0.1282751E-02
     N2_12_2           0.2144701          0.0000000
     N2_13_1           2807.000          -0.1168799E-02
     N5_1_13           0.0000000          0.0000000
     N1_1_1             500.8266          0.0000000
     N5_1_1            0.0000000          0.3045097E-02
         P2            8.265594           0.0000000
     N1_2_1            0.0000000          0.1470688E-04
     N1_1_2            0.6214100          0.0000000
     N5_1_2            0.0000000          0.3036175E-02
         P3            34006.21           0.0000000
     N1_3_1            0.0000000          0.4438207E-04
     N1_2_2            0.0000000          0.1466379E-04
     N1_1_3             1800.000          0.0000000
     N5_1_3            0.0000000          0.3027279E-02
         P4            0.0000000          0.0000000
     N1_4_1            0.000000           0.4259925E-02
     N1_3_2            0.0000000          0.4215196E-02
     N1_2_3            0.0000000          0.4392508E-02
     N1_1_4            0.0000000          0.4274567E-02
     N3_8_1            0.0000000          1.291594
     N3_7_2            0.0000000          1.246406
     N3_6_3            0.0000000          1.076712
     N3_5_4            0.0000000          0.9903583
     N5_1_4            0.0000000          0.3445866E-02
         P5            32000.00           0.0000000
     N1_4_2            0.0000000          0.4351068E-02
     N1_3_3            0.0000000          0.4409485E-02
     N1_2_4            0.0000000          0.4276621E-02
     N1_1_5            0.6661026          0.0000000
     N2_5_1            0.0000000          0.4099937E-02
     N5_1_5            0.0000000          0.3008313E-02
         P6            12006.66           0.0000000
     N1_1_6            0.0000000         -0.1452923E-04
     N1_2_5            0.8700000E-02      0.0000000
     N1_3_4            0.0000000          0.4382036E-02
     N1_4_3           0.0000000           0.4427110E-02
     N2_5_2           0.0000000           0.4280643E-02
     N2_6_1           0.0000000           0.3837277E-02
     N5_1_6           0.0000000           0.2998045E-02
         P7           34000.09            0.0000000
```

N1_1_7	3410.000	-0.1023720E-03
N1_2_6	0.3008300	0.0000000
N1_3_5	0.0000000	0.1323329E-03
N1_4_4	0.0000000	0.4311766E-02
N2_5_3	0.0000000	0.4269049E-02
N2_6_2	0.0000000	0.3930909E-02
N2_7_1	0.0000000	0.3295002E-02
N5_1_7	0.0000000	0.2980477E-02
P8	29603.01	0.0000000
N1_1_8	2969.000	0.2051661E-03
N1_2_7	0.0000000	0.1175383E-03
N1_3_6	0.0000000	0.2347393E-03
N1_4_5	0.0000000	0.3822031E-03
N2_5_4	0.0000000	0.4564724E-02
N2_6_3	0.0000000	0.4227878E-02
N2_7_2	0.0000000	0.4008633E-02
N2_8_1	0.0000000	0.2869010E-02
N3_1_8	0.0000000	0.3012695
N3_2_7	0.0000000	0.3272797
N3_3_6	0.0000000	0.4527495
N3_4_5	0.0000000	0.6346897
N4_1_8	0.0000000	0.3021480
N4_2_7	0.0000000	0.3895886
N4_3_6	0.0000000	0.5430671
N4_4_5	0.0000000	0.7654854
N4_5_4	0.0000000	0.8404644
N4_6_3	0.0000000	1.142982
N4_7_2	0.0000000	1.077264
N4_8_1	0.0000000	1.199400
N5_1_8	0.0000000	0.3002498E-02
P9	61690.00	0.0000000
N1_1_9	6187.000	-0.1469981E-04
N1_2_8	0.0000000	0.2042672E-03
N1_3_7	0.0000000	0.3358259E-03
N1_4_6	0.0000000	0.3663834E-03
N2_5_5	0.0000000	0.4269070E-03
N2_6_4	0.0000000	0.4406825E-02
N2_7_3	0.0000000	0.4085508E-02
N2_8_2	0.0000000	0.3467646E-02
N2_9_1	0.0000000	0.2239106E-02
N5_1_9	0.0000000	0.2971714E-02
P10	56870.00	0.0000000
N1_1_10	0.1368649	0.0000000
N1_2_9	0.1286614	0.0000000
N1_3_8	0.0000000	0.2333684E-03
N1_4_7	0.0000000	0.2784933E-03
N2_5_6	0.0000000	0.4268514E-03
N2_6_5	0.0000000	0.2980628E-03
N2_7_4	0.0000000	0.4178395E-02
N2_8_3	0.0000000	0.3872910E-02
N2_9_2	0.0000000	0.2856735E-02
N2_10_1	0.0000000	0.1435655E-02
N5_1_10	0.0000000	0.2954359E-02
P11	34002.66	0.0000000
N1_1_11	0.2444400	0.0000000
N1_2_10	5720.000	-0.8626729E-04
N1_3_9	0.0000000	0.2990637E-04
N1_4_8	0.0000000	0.3797506E-03
N2_5_7	0.0000000	0.3390377E-03
N2_6_6	0.0000000	0.2986802E-03
N2_7_5	0.0000000	0.8295127E-04
N2_8_4	0.0000000	0.3863698E-02
N2_9_3	0.0000000	0.3264084E-02

N2_10_2	0.0000000	0.1848686E-02
N2_11_1	0.0000000	0.4420076E-03
N5_1_11	0.0000000	0.2945732E-02
P12	77702.44	0.0000000
N1_1_12	7793.000	0.3258702E-03
N1_2_11	0.0000000	0.3407360E-03
N1_3_10	0.0000000	0.2696736E-03
N1_4_9	0.0000000	0.2996675E-03
N2_5_8	0.0000000	0.6642134E-03
N2_6_7	0.0000000	0.6394369E-03
N2_7_6	0.0000000	0.4103637E-03
N2_8_5	0.0000000	0.1076946E-03
N2_9_4	0.0000000	0.3788856E-02
N2_10_3	0.0000000	0.2688473E-02
N2_11_2	0.0000000	0.1287738E-02
N2_12_1	0.5620000E-01	0.0000000
N4_1_12	0.0000000	0.2915281
N4_2_11	0.0000000	0.4434344
N4_3_10	0.0000000	0.4408516
N4_4_9	0.0000000	0.6427234
N4_5_8	0.0000000	0.8618907
N4_6_7	0.0000000	0.9014223
N4_7_6	0.0000000	0.9872598
N4_8_5	0.0000000	1.250583
N4_9_4	0.0000000	1.333209
N4_10_3	0.0000000	1.577556
N4_11_2	0.0000000	1.664934
N4_12_1	0.0000000	1.748809
N5_1_12	0.0000000	0.2969718E-02
P13	74930.56	0.0000000
P1	0.0000000	0.0000000

CONCLUSIONES

El desarrollo del presente trabajo permite entender y comprender la importancia de la modelación matemática en los problemas de la vida real.

Los modelos matemáticos son de gran utilidad al permitir representar, por medio de ellos, la esencia de una situación o problema real.

Proporcionan muchas ventajas sobre los problemas reales al poder experimentar con ellos, mientras que en la práctica muchas veces esto sería imposible.

La aplicación de la modelación matemática se presenta en los negocios, la economía, la industria, las ciencias sociales, etc. Algunos modelos matemáticos se caracterizan, en cierta forma, por la necesidad de asignar recursos limitados entre las diversas actividades de una organización.

Además, se observa la importancia y aplicación de la estadística, la probabilidad y la programación lineal en la construcción de los distintos modelos matemáticos que se plantearon. En particular, la programación lineal es una herramienta estándar de gran utilidad para organizaciones comerciales e industriales.

También los modelos matemáticos forman un puente hacia el uso de las computadoras para el análisis del problema.

No olvidemos que los modelos matemáticos son una representación de la vida real, y que no solo es importante la representación sino también la solución. Solución que se puede obtener al resolver, por ejemplo, algunas ecuaciones matemáticas.

Nunca debemos olvidar que el objetivo es dar solución a un problema real, por tanto debemos de ser capaces de dar una interpretación congruente y realista a la solución matemática. Las soluciones en términos del problema real permitirán entonces tomar decisiones con respecto a la situación.

Bibliografía

1.- Kapur, J.N.
Mathematical Modelling
New York, John Wiley, 1988

2.- Huntley, I.D., D.J. James
Mathematical Modelling A Source of Case Studies
Oxford, University Press, 1990

3.- Williams, H.P.
Model Building in Mathematical Programming
New York, John Wiley and Sons,1990

4.- Márquez Diez-Canedo, Javier
Carteras de Inversión, Fundamentos Teóricos y Modelos de Selección Óptima
México, Limusa, 1981

5.- Wilbur Lundine, Nelson
Petroleum Refinery Engineering
New York, McGraw Hill, 1958

6.- Canavos, George C.
Probabilidad y Estadística, Aplicaciones y Métodos
México, McGraw Hill, 1996

7.- Mood, Alexander M., Franklin A. Graybill and Duane C. Boes
Introduction to the Theory of Statistics
McGraw Hill

8.- Bodie, Zvi y Robert C. Merton
Finanzas
Prentice Hall

9.- Brealey, Richard y Stewart Myers
Principios de Finanzas Corporativas
McGraw Hill

10.- Bronshtein, I. y K. Semendiaev
Manual de Matemáticas
Mir

11.- Chávez Ríos, Héctor
Evaluación de Proyectos y Estrategias de Inversión
CEC (Centro de Educación Continua) UNAM

12.- Hillier, Frederick y Gerarld J. Lieberman
Introducción a la Investigación de Operaciones
McGraw Hill

13.- Alvarenga, Máximo
Física General
HARLA