



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“SOBRE LOS LIMITES INVERSOS GENERADOS POR LOS ELEMENTOS DE LA FAMILIA DE LAS TIENDAS”.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

TATIANA MARIA MENDOZA VON DER BORCH

DIRECTORES DE TESIS: DR. RAUL ESCOBEDO CONDE

DR. CALIXTO FERNANDEZ LANGO



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

298879

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

2001



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



VERDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"SOBRE LOS LIMITES INVERSOS GENERADOS POR LOS ELEMENTOS
DE LA FAMILIA DE LAS TIENDAS".


realizado por Tatiana María Mendoza von der Borch

con número de cuenta 9561339-6 quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas.


Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente


Director de Tesis
Propietario

Dr. Raúl Escobedo Conde 


Director de Tesis
Propietario

Dr. Héctor Méndez Lanço 


Propietario

Dr. Alejandro Illanes Mejía 

Suplente

Dra. María Isabel Puça Espinosa 

Suplente

M. en C. Jefferson Edwin King Dávalos 

Consejo Departamental de Matemáticas



M. en C. Alejandro Bravo Mojica

Agradecimientos:

A los jefones, más que nada por su paciencia y su sin-patía y su confianza.

A la Coye y la Pulga, por sátrapas y sopichinas.

A la Ele, la Vale, la Vanesoa y el Leo porque los quiero bien machin y porque se me dá la gana.

A Héctor y Raúl por haber dirigido este trabajo con respeto y con cariño y con ganas.

A la Mary, que me ayudó sin que se lo pidiera.

A Alejandro, Bety y Jeff por la atenta lectura que hicieron a mi trabajo.

Y a todos los muchos que quiero mucho mucho.

SOBRE LOS LIMITES INVERSOS
GENERADOS POR LOS ELEMENTOS DE
LA FAMILIA DE LAS TIENDAS

Tatiana María Mendoza von der Borch

Introducción

La temática de esta tesis pertenece a la Teoría de los Continuos. Para cada número s en $[0,2]$ existe una única función de $[0,1]$ en $[0,1]$ que en los puntos 0 y 1 toma el valor 0, en $\frac{1}{2}$ el de $\frac{s}{2}$ y es lineal en $[0, \frac{1}{2}]$ y en $[\frac{1}{2}, 1]$. Así, a partir de los puntos en el intervalo $[0,2]$, se construye una familia de funciones, conocida como *la familia de las tiendas*. Los resultados que se presentan en este trabajo, constituyen una recopilación de ciertas aportaciones que se han hecho para resolver el problema de la clasificación de los continuos que son límite inverso de intervalos con funciones de ligadura en la familia de las Tiendas.

Ya que, como probaremos en el primer capítulo, el límite inverso correspondiente a un punto en $[0,1]$ es a su vez un punto, dicho problema de clasificación, se reduce a la consideración de los parámetros en $[1,2]$. Uno podría pensar que dos parámetros lo suficientemente cercanos en este intervalo deberían dar lugar a dos límites inversos homeomorfos, al menos localmente. Sin embargo, se ha demostrado una hipótesis opuesta: En cualquier abierto de $[1,2]$ podemos encontrar dos parámetros tales que cada uno de los dos límites inversos relacionados con dichos parámetros, contiene un subcontinuo indescomponible; y si tomamos cualquier par de vecindades cerradas en estos dos continuos indescomponibles, resultan ser topológicamente diferentes.

En 1991, Stu Baldwin le preguntó a Tom Ingram si existen dos parámetros distintos en el $[1,2]$ que produzcan dos límites inversos homeomorfos. Sobre esta pregunta se han obtenido

varios resultados parciales. Algunos de éstos -entre los cuales se encuentra un primer desarrollo de las ideas descritas en el párrafo anterior- se exponen en este texto.

Este proyecto está dirigido a los estudiantes de licenciatura en Matemáticas que han tomado al menos un curso de Topología General pero que no necesariamente están familiarizados con la Teoría de Continuos o de Límites Inversos.

En el primer capítulo se introducen las definiciones y algunos ejemplos de continuos y de límites inversos, y se prueban algunos resultados que constituyen herramientas útiles para los capítulos subsecuentes. A partir de cada parámetro $s \in [0, 2]$ se define una función Tienda, con la cual se construye el límite inverso con dicha función como ligadura. Se demuestra que cualquier límite inverso generado por un parámetro $s \in [0, 1)$ es un punto, y que el límite inverso que produce el número $s = 1$ es un arco. Por último, se introduce la noción de indescomponibilidad y se demuestra que con el parámetro $s = 2$ se construye un continuo indescomponible, conocido como el continuo de Knaster.

En el segundo capítulo se da una descripción topológica muy general de los límites inversos creados con los parámetros en $(1, 2)$. Se demuestra que los espacios correspondientes a parámetros en $(\sqrt{2}, 2)$, son siempre un rayo topológico cuyo límite es un subcontinuo indescomponible. El número $s = \sqrt{2}$ genera un rayo topológico que converge a la unión de dos continuos de Knaster que tienen al punto extremo en común. Los elementos de $(\sqrt[4]{2}, \sqrt{2})$ producen un rayo topológico que tiende a la unión de otros dos rayos, los cuales parten de un mismo punto y cada uno de ellos se aproxima a un subcontinuo indescomponible. Y en general, cada límite inverso que corresponde a un número

real en $(\sqrt[2^{n+1}]{2}, \sqrt[2^n]{2})$, es la unión de 2^n subcontinuos homeomorfos al indescomponible generado por s^{2^n} , más $2^{n+1} - 1$ rayos topológicos. Si el punto es exactamente $s = \sqrt[2^{n+1}]{2}$, en lugar de cada uno de estos subcontinuos indescomponibles tenemos la unión de dos continuos de Knaster con el mismo extremo. Estos hechos se prueban en [I2], pero nosotros hemos elegido un camino diferente para hacerlo.

Los resultados del Capítulo 2 nos permiten concluir que, en caso de que existan 2 parámetros distintos en $[1, 2]$ cuyos límites inversos correspondientes son homeomorfos, entonces por fuerza lo mismo ha de ocurrir para dos diferentes parámetros en $(\sqrt{2}, 2]$. Por esta razón, los siguientes capítulos -y los párrafos en esta introducción que los refieren-, se restringen a este intervalo.

El Capítulo 3 se ocupa del comportamiento de las órbitas del punto $x = \frac{1}{2}$ bajo algunos elementos de la familia de las tiendas. Se identifican tres conjuntos de parámetros en $(\sqrt{2}, 2]$: los parámetros para los cuales la órbita de $x = \frac{1}{2}$ bajo la correspondiente función tienda contiene a $\frac{1}{2}$, aquellos para los que dicha órbita contiene a un punto fijo, y por último los parámetros para los que el punto $\frac{1}{2}$ genera una órbita densa en $[T_s^2(\frac{1}{2}), T_s(\frac{1}{2})]$. Los parámetros del primer tipo se denominan periódicos, los del segundo prefijos y los del tercero densos. Se prueba que tanto el conjunto de parámetros periódicos como el de prefijos son densos en $(\sqrt{2}, 2]$, y que los parámetros densos forman un conjunto G_δ en el mismo intervalo. El contenido de este capítulo está basado en [BR-D-O-T].

En el Capítulo 4 -cuya investigación está centrada en [B-MA]-se ve que las propiedades dinámicas de las funciones tienda con-

llevan información acerca de las características topológicas de los límites inversos que generan. Específicamente, se utiliza el hecho de que la cantidad de puntos extremos de un espacio es un invariante topológico para poder diferenciar entre algunos de estos límites inversos: cada parámetro periódico genera un límite inverso con tantos puntos extremos como el período de la órbita de $x = \frac{1}{2}$ -lo cual es una cantidad finita y mayor que cero-; los continuos construidos a partir de un parámetro prefijo no tienen puntos extremos; y el conjunto de puntos extremos de un espacio producido por un parámetro denso, constituye un conjunto denso en tal límite inverso. También se hace notar que para cada abierto contenido en $(\sqrt{2}, 2]$ existe una infinidad de enteros positivos que son el período de $\frac{1}{2}$ bajo alguna función tienda construida a partir de algún parámetro en dicho abierto.

Estos hechos, y los resultados presentados en el Capítulo 3 nos permiten concluir que los parámetros de cualquier intervalo no degenerado contenido en $[1, 2]$ generan una familia de límites inversos, dentro de la cual podemos encontrar al menos una cantidad numerable de continuos topológicamente diferentes. Así, se puede establecer una clasificación parcial de los continuos que son límite inverso de intervalos con funciones de ligadura en la familia de las tiendas, con lo cual concluye este trabajo.

Tatiana María Mendoza von der Borch
Facultad de Ciencias, UNAM
Octubre de 2001

Contenido

Introducción	i
1 Preliminares y presentación de las Tiendas	1
1.1 Preliminares	1
1.2 La familia de las tiendas	10
1.3 Continuos y sucesiones indescomponibles.	12
2 Descripciones del Límite Inverso de $\{I, T_s\}$	17
2.1 Puntos importantes en nuestra familia	17
2.2 Continuos indescomponibles cuando el parámetro varía en $(\sqrt{2}, 2)$	21
2.3 Subcontinuos indescomponibles cuando el parámetro varía en $(1, \sqrt{2}]$	25
2.4 Compactaciones del rayo.	34
3 Tres conjuntos densos en $[\sqrt{2}, 2]$	40
3.1 Dos herramientas útiles.	40
3.2 Parámetros periódicos.	43
3.3 Parámetros prefijos.	45
3.4 Parámetros densos	54
4 Diferentes continuos en nuestra familia	58
4.1 Puntos extremos de un continuo.	59

4.2	Puntos extremos para los parámetros periódicos y prefijos.	61
4.3	Puntos extremos para los parámetros densos.	73
	Referencias	83

Capítulo 1

Preliminares y presentación de las Tiendas

En este capítulo se introducen algunos conceptos y resultados básicos. Además se define la familia de funciones conocidas como las *tiendas*, a partir de la cual se define una familia de espacios -los límites inversos generados por estas funciones- y se estudian las características topológicas de los más sencillos.

1.1 Preliminares

1.1 Definición. Un *continuo* es un espacio compacto, conexo, métrico y no vacío. Los *subcontinuos* de un espacio X son aquellos subconjuntos de X que son continuos.

Veamos algunos de los más conocidos ejemplos de continuos:

1.2 Ejemplo. Es fácil ver que el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ es un continuo. Un subcontinuo de $[0, 1]$ debe ser conexo y por lo tanto un intervalo. Para que sea compacto ha de ser un intervalo cerrado. Es decir que los subcontinuos de $[0, 1]$ son los subintervalos cerrados.

1.3 Ejemplo. La *curva del topólogo* se define como la cerradura en \mathbb{R}^2 del conjunto $W = \{(x, \text{sen}(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$. No es difícil mostrar que \overline{W} también es un continuo.

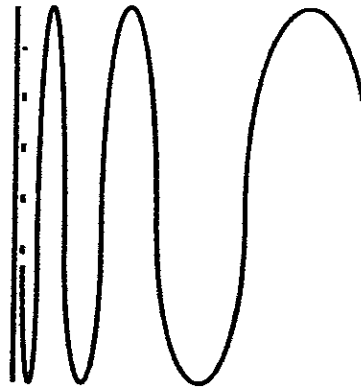


Figura 1

1.4 Observación. Se sabe que la imagen de un conexo bajo una función continua es también conexas. Lo mismo sucede con los conjuntos compactos. Esto implica que una función continua entre espacios métricos envía continuos en continuos.

Uno de los teoremas más importantes, debido a Tychonov, afirma que el producto de espacios compactos es compacto, [K2, Teo. 4, p. 17]. Por otra parte, también se conoce que el producto de espacios conexos es conexo, [K2, Teo. 11, p. 137]. En general, el producto de espacios métricos no es un espacio metrizable, [M, Ejemplo 2, p. 131]. Sin embargo, el producto numerable de espacios métricos sí es metrizable, [K1, p. 212]. Considerando esto se establece el siguiente teorema:

1.5 Teorema. El producto cartesiano de una cantidad finita o numerable de continuos, con la topología producto, es un continuo.

1.6 Ejemplo. De acuerdo con el teorema anterior, podemos tomar el producto de S^1 con sí mismo y obtener otro continuo, conocido como el *toro*. No es difícil ver que el toro es homeomorfo a la superficie de una dona como subespacio de \mathbb{R}^3 , vea [A, p.76].

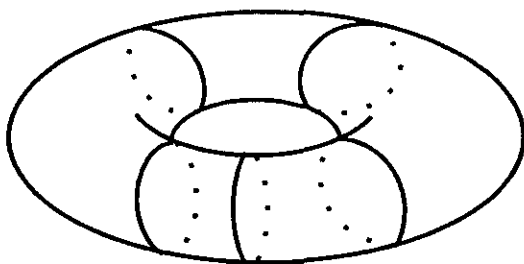


Figura 2

1.7 Teorema. Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos tal que $X_i \supseteq X_{i+1}$ para todo número $i \in \mathbb{N}$, y sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Entonces X es un continuo.

Demostración:

Primero observe que X es un conjunto cerrado contenido en X_1 , y por lo tanto es compacto. Como $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene la propiedad de la intersección finita, X es distinto del vacío. Supongamos que existen dos conjuntos, K y L , ajenos y cerrados en X cuya

unión es todo el conjunto X . Entonces K y L son compactos en X_1 , el cual es normal y, en consecuencia, existen dos abiertos en X_1 , U y V , ajenos y tales que $K \subset U$ y $L \subset V$.

Mostraremos que existe algún X_n que está contenido en $U \cup V$. En caso de que suceda lo contrario, la colección

$$\{X_k \setminus (U \cup V) : k \in \mathbb{N}\}$$

es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita, lo cual implica, por ser X_1 compacto, que

$$\bigcap_k \in N(X_k \setminus (U \cup V)) \neq \emptyset.$$

Ahora, si x es un punto en esta última intersección entonces $x \in X \setminus (U \cup V)$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto debe haber un X_n contenido en $U \cup V$, pero por ser conexo debe estar contenido en U o en V . Así que $X \subset U$ ó $X \subset V$, y entonces $K = \emptyset$ ó $L = \emptyset$. Esto prueba que X es conexo. Claramente también es métrico, y por lo tanto es un continuo. \square

El Teorema 1.7 constituye una herramienta que nos permite obtener varios continuos. El siguiente ejemplo fue construido por Waclaw Sierpinski en 1916:

1.8 Ejemplo. Sea X_1 el continuo $[0, 1] \times [0, 1]$. Si dividimos X_1 en 9 cuadrados iguales y removemos el interior del cuadrado central obtenemos el continuo

$$X_2 = X_1 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Ahora, a cada uno de los 8 cuadrados restantes lo podemos dividir nuevamente en 9 cuadrados de lado $\frac{1}{9}$ y quitar el interior

del cuadrado del centro de cada uno de ellos. Así obtenemos X_3 . Al aplicar este proceso una infinidad de veces, construimos una sucesión anidada de continuos X_1, X_2, \dots . La *curva universal de Sierpinski* es la intersección de todos ellos. Observe que, como subconjunto del plano, este continuo tiene interior vacío. Se le llama universal porque cualquier continuo en el plano con interior vacío es homeomorfo a un subcontinuo de éste. Una demostración completa de esta afirmación se puede consultar en [P, Cap. 2].

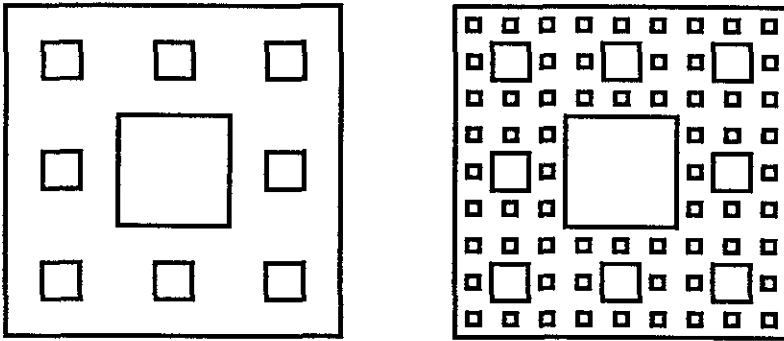


Figura 3

1.9 Definición. Una *sucesión inversa* es una doble sucesión $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de espacios X_i y funciones continuas $f_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$. Si $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa, entonces el *límite inverso* de $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, denotado por $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, es el subespacio del

producto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ definido por

$$\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i, \text{ para cada } i \in \mathbb{N} \right\}$$

1.10 Nota. A los espacios X_i se les llama espacios de coordenadas, y a las funciones f_i funciones de ligadura. Algunas veces el límite inverso, $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, es denotado por X_{∞} . Por otra parte, si todas las funciones de ligadura son iguales entre sí, es decir, si existen una función f y un espacio X tales que $f_i = f$ y $X_i = X$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces el límite inverso de la sucesión $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, es denotado por $\varprojlim \{X, f\}$.

1.11 Nota. Supongamos que cada espacio X_i tiene una métrica d_i , y que existe un número real $M > 0$ tal que, para cualquier $i \in \mathbb{N}$, y para todo par de puntos $x, y \in X_i$, sucede que $d_i(x, y) \leq M$. Entonces la distancia entre dos puntos $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$ en $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ está definida por

$$d(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, z_i)}{2^i}.$$

Aquí no demostraremos que d es una métrica, pero una prueba se puede encontrar en [K1, p. 212].

1.12 Definición. Para cada $i \in \mathbb{N}$, la proyección en la i -ésima coordenada,

$$\pi_i : \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow X_i$$

es la función que a cada elemento del límite inverso, $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, le asigna el punto $x_i \in X_i$.

1.13 Observación. Las proyecciones son funciones continuas, ya que son restricciones a $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de las mismas funciones definidas en $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, las cuales, por la definición de la topología producto, son continuas. Además, las funciones proyección pueden usarse para verificar la continuidad de una función que tiene rango en un espacio producto, una prueba de este hecho puede consultarse, por ejemplo, en [K1, p. 147]. En particular, se obtiene lo que establecemos en el lema que sigue.

1.14 Lema. Sean X un espacio topológico, $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa y $h : X \rightarrow \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una función. Entonces h es continua si y sólo si $\pi_j \circ h$ es continua para toda $j \in \mathbb{N}$.

1.15 Teorema. Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa, donde cada X_i es un continuo, entonces $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un continuo. En particular, si $X_i = I = [0, 1]$ entonces $\varprojlim \{I, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un continuo.

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\varphi_n = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ si } i \leq n \right\}.$$

Vamos a demostrar que la función

$$h_n : \varphi_n \rightarrow \prod_{j=n+1}^{\infty} X_j,$$

dada por $h_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_j)_{j=n+1}^{\infty}$, define un homeomorfismo.

La inversa de h_n está determinada por $h_n^{-1}(x_j)_{j=n+1}^\infty = (y_i)_{i=1}^\infty$, donde $y_i = x_i$ si $i \geq n+1$, $y_n = f_n(y_{n+1})$ y recursivamente, $y_i = f_i(y_{i+1})$ para cada $i < n$. Es claro entonces que h_n es biyectiva. Para ver que h_n y h_n^{-1} son continuas sólo tenemos que notar que el lema anterior también funciona si sustituimos $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ por $\prod_{j=n+1}^\infty X_j$ o por φ_n ; y además que las composiciones de h_n y h_n^{-1} con cualquier proyección son continuas.

Por lo tanto φ_n es un continuo para cada entero positivo n . Además, $\varphi_{n+1} \subset \varphi_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y

$$\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \varphi_n$$

Por el Teorema 1.7, tenemos que $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ es también un continuo. \square

Los siguientes resultados nos serán útiles para los próximos capítulos.

1.16 Proposición. Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ una sucesión inversa tal que f_i es un homeomorfismo para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces la proyección $\pi_1 : \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty \rightarrow X_1$ es un homeomorfismo.

Demostración:

La inversa de π_1 está dada por

$$x_1 \rightarrow (x_1, f_1^{-1}(x_1), f_2^{-1} \circ f_1^{-1}(x_1), \dots)$$

Ya que cada f_i es un homeomorfismo, π_1^{-1} está bien definida; y por tanto π_1 es biyectiva y continua. Del lema anterior se deriva que π_1^{-1} es también continua, y así π_1 es un homeomorfismo. \square

De aquí en adelante, para cualquier función f , el símbolo f^n denotará la n -ésima iteración de la función f . Es decir que $f^1 = f$ y para todo entero positivo $n \geq 2$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1.17 Proposición. Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua, y sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\varprojlim \{I, f\}$ y $\varprojlim \{I, f^k\}$ son homeomorfos.

Demostración:

Denotamos $X_\infty = \varprojlim \{I, f\}$ y $Y_\infty = \varprojlim \{I, f^k\}$ y definimos $h : Y_\infty \rightarrow X_\infty$ como sigue:

$$h(t_1, t_2, \dots, t_n, \dots) = (t_1, f^{k-1}(t_2), f^{k-2}(t_2), \dots, f(t_2), t_2, \dots)$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, $\pi_j \circ h$ es continua, lo cual implica que h es continua. La función $h^{-1} : X_\infty \rightarrow Y_\infty$ cuya regla de correspondencia es

$$h^{-1}(z_0, z_1, \dots, z_n, \dots) = (z_0, z_k, z_{2k}, \dots)$$

es la inversa de h . Si $p_n : Y_\infty \rightarrow I$ es la proyección n -ésima, entonces $p_n \circ h^{-1}$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto h^{-1} también es continua, y así h es un homeomorfismo. \square

1.18 Proposición. Sean $\{X_i, f_i\}$ y $\{Y_i, g_i\}$ dos sucesiones inversas. Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que X_i y Y_i son continuos, y que existe un homeomorfismo $\varphi_i : X_i \rightarrow Y_i$ tal que $\varphi_i \circ f_i = g_i \circ \varphi_{i+1}$, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xleftarrow{f_i} & X_{i+1} \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_{i+1} \\ Y_i & \xleftarrow{g_i} & Y_{i+1} \end{array}$$

Entonces $X_\infty = \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ es homeomorfo a $Y_\infty = \varprojlim \{Y_i, g_i\}$

Demostración:

Sea $\varphi : X_\infty \rightarrow Y_\infty$ definida por $\varphi(x_i)_{i=1}^\infty = (\varphi_i(x_i))_{i=1}^\infty$. Vamos a ver que φ está bien definida. Si $(x_i)_{i=1}^\infty \in X_\infty$, entonces cada $\varphi_i(x_i) \in Y_i$, así que $y = (\varphi_i(x_i))_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty Y_i$. Ahora, si $y = (y_i)_{i=1}^\infty$ tenemos que

$$g_i(y_{i+1}) = g_i(\varphi_{i+1}(x_{i+1})) = \varphi_i \circ f_i(x_{i+1}) = \varphi_i(x_i) = y_i,$$

y por lo tanto $y \in Y_\infty$.

Luego, $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$ para toda i , así que cada $\pi_i \circ \varphi$ es continua y entonces φ es continua. Como $\varphi^{-1} = (\varphi_i^{-1})_{i=1}^\infty$ es la inversa de φ , ésta es biyectiva y φ^{-1} es continua por un argumento análogo al de que φ es continua. Así φ es un homeomorfismo. \square

1.2 La familia de las tiendas

Nuestro objeto de estudio a lo largo de esta tesis es la familia de funciones *Tienda*, definida de la siguiente manera:

Para cada parámetro $s \in [0, 2]$, sea $T_s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función cuya regla de correspondencia es:

$$T_s(x) = \begin{cases} sx, & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ s(1-x), & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

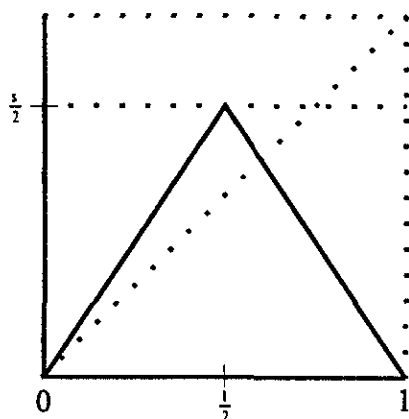


Figura 4

Para cada parámetro $s \in [0, 2]$ queremos averiguar cómo es el $\varprojlim \{I, T_s\}$. Además nos gustaría entender cómo van cambiando estos espacios al variar el parámetro.

1.19 Proposición. Si $s \in [0, 1)$, entonces $\varprojlim \{I, T_s\}$ es un punto.

Demostración:

Si $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim \{I, T_s\}$, entonces para toda i y toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_i = T_s^n(x_{i+n})$, y en consecuencia, $x_i \in T_s^n(I)$. Ahora, $T_s[0, 1] = [0, \frac{s}{2}]$ y como $\frac{s}{2} < \frac{1}{2}$, es fácil ver que $T_s^n(I) = [0, \frac{s^n}{2}]$ y por lo tanto que

$$x_i \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{s^n}{2} \right] = \{0\}$$

Esto implica que $(x_i)_{i=1}^{\infty} = (0, 0, 0, 0, \dots)$. Como $(0, 0, 0, \dots)$ pertenece a $\varprojlim \{I, T_s\}$, la proposición está demostrada. \square

1.20 Proposición. Si $s = 1$, entonces $\varprojlim \{I, T_s\}$ es un arco.

Demostración:

Si $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim \{I, T_1\}$, entonces todas sus coordenadas están en $T_1(I) = [0, \frac{1}{2}]$. Como T_1 restringida a $[0, \frac{1}{2}]$ es la función identidad, tenemos que

$$\varprojlim \{I, T_1\} = \varprojlim \left\{ \left[0, \frac{1}{2} \right], T_1 \big|_{[0, \frac{1}{2}]} \right\} = \varprojlim \left\{ \left[0, \frac{1}{2} \right], Id \right\}$$

Así que $\varprojlim \{I, T_1\} = \{(t, t, t, \dots) : t \in [0, \frac{1}{2}]\}$, y por lo tanto la función π_1 , la proyección en la primera coordenada, define un homeomorfismo entre $\varprojlim \{I, T_1\}$ y $[0, \frac{1}{2}]$. \square

1.3 Continuos y sucesiones indescomponibles.

1.21 Definición. Un continuo X es *indescomponible* si no se puede expresar como la unión de dos subcontinuos propios.

No es fácil imaginar este tipo de continuos. Los cuatro ejemplos que hemos visto no lo son. El siguiente ejemplo es conocido

como el continuo de Knaster:

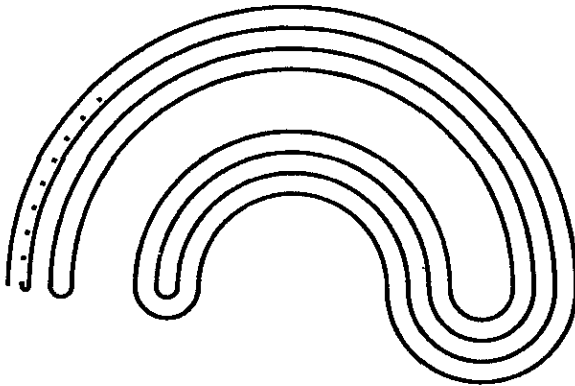


Figura 5

1.22 Ejemplo. Sea K el subconjunto de \mathbb{R}^2 que está formado por:

- i) Todos los semicírculos contenidos en el semiplano superior ($y \geq 0$) con centro en $(\frac{1}{2}, 0)$ y extremos en el conjunto de Cantor, ($C \subset [0, 1]$).
- ii) Todos los semicírculos contenidos en el semiplano inferior ($y \leq 0$) descritos para cada $n \in \mathbb{N}$ por su centro en $(\frac{5}{2 \cdot 3^n})$ y por sus extremos en los puntos del conjunto de Cantor en el intervalo $[\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}]$.

En [K2, p. 205 y *Remark* en p. 213] se muestra que este conjunto es un continuo indescomponible.

A continuación veremos algunas herramientas que nos ayudarán en este capítulo y en el siguiente a descubrir más continuos de este tipo.

1.23 Definición. Una sucesión inversa $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde cada X_i es un continuo, es una *sucesión inversa indescomponible* si para cada $i \in \mathbb{N}$, siempre que A_{i+1} y B_{i+1} sean subcontinuos de X_{i+1} tales que $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$, entonces $f_i(A_{i+1}) = X_i$ ó $f_i(B_{i+1}) = X_i$

1.24 Teorema. Si $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión indescomponible, entonces el espacio $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un continuo indescomponible.

Para la demostración necesitamos el siguiente lema.

1.25 Lema. Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso $X_{\infty} = \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Sea A un subespacio compacto de X_{∞} . Entonces $\{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas, y

$$\varprojlim \{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^{\infty} = A = \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty}.$$

Demostración:

Notemos que para cualquier $(x) = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X_{\infty}$ y para toda $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $f_i \circ \pi_{i+1}(x) = f_i(x_{i+1}) = x_i = \pi_i(x)$. Es decir, que para toda $i \in \mathbb{N}$, $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$. Por lo tanto, $\{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa con funciones de

ligadura suprayectivas. Ahora, es fácil ver que

$$\varprojlim \{ \pi_i(A), f_i |_{\pi_{i+1}(A)} \}_{i=1}^{\infty} = \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty}$$

y además que, $A \subset \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty}$. Así que basta con demostrar la contención $\left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty} \subset A$. Sea $(y) = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty}$. Para cada $j = 1, 2, 3, \dots$ sea

$$K_j = A \cap \pi_j^{-1}(y_j) = \{ (x) \in A : x_i = y_i \text{ si } i \leq j \}.$$

Ya que $y_j \in \pi_j(A)$, $K_j \neq \emptyset$. Como $\pi_j^{-1}(y_j)$ es cerrado y A es compacto, K_j es también compacto. Es claro que $K_{j+1} \subset K_j$, y por lo tanto tenemos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$. Ahora, sea $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$. Entonces $p \in A$ y $\pi_i(p) = y_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Esto implica que $p = (y)$ y por lo tanto que $(y) \in A$. Esto completa la demostración. \square

Demostración del Teorema 1.24:

De la definición de sucesión inversa indescomponible se deriva que cada f_i es suprayectiva, y en consecuencia, que cada proyección $\pi_i : X_{\infty} \rightarrow X_i$ también lo es. Sean A y B dos subcontinuos de X_{∞} tales que $A \cup B = X_{\infty}$. Como cada π_i es sobre, se tiene que

$$X_{i+1} = \pi_{i+1}(X_{\infty}) = \pi_{i+1}(A) \cup \pi_{i+1}(B).$$

Entonces $f_i[\pi_{i+1}(A)] = X_i$ ó $f_i[\pi_{i+1}(B)] = X_i$, y ya que $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$, tenemos que $\pi_i(A) = X_i$ ó $\pi_i(B) = X_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sin perder generalidad, podemos suponer que existe un subconjunto infinito M de \mathbb{N} tal que $\pi_i(A) = X_i$ si $i \in M$. Como cada f_i es sobre, y (por la definición de límite inverso) $f_j \circ \dots \circ f_k \circ \pi_{k+1} = \pi_j$ si $1 \leq j < k$, tenemos que si $\pi_i(A) = X_i$,

entonces $\pi_j(A) = X_j$ para cada $j \leq i$. Por lo tanto $\pi_i(A) = X_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Así,

$$A = \varprojlim \{ \pi_i(A), f_i |_{\pi_{i+1}(A)} \}_{i=1}^{\infty} = \varprojlim \{ X_i, f_i \}_{i=1}^{\infty} = X_{\infty}. \quad \square$$

1.26 Proposición. Si $s=2$, $\varprojlim \{I, T_s\}$ es indescomponible.

Demostración:

Sea $I = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de I . Como A y B son intervalos, alguno de los dos contiene al intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ o al intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Como $T_2 [0, \frac{1}{2}] = I = T_2 [\frac{1}{2}, 1]$, la sucesión inversa $\{I, T_2\}$ es indescomponible y por lo tanto $\varprojlim \{I, T_2\}$ es indescomponible. \square

Es conocido que $\varprojlim \{I, T_2\}$ es homeomorfo al continuo de Knaster definido anteriormente. Este hecho se puede demostrar, por ejemplo, usando 2.10 y 2.22 de [N].

Con esto concluimos el primer capítulo.

Capítulo 2

Descripciones del Límite Inverso de $\{I, T_s\}$

En este capítulo haremos una primera descripción de $\varprojlim \{I, T_s\}$, para cada parámetro $s \in (1, 2)$; y veremos que cualquiera de estos continuos contiene al menos un subcontinuo indescomponible.

2.1 Puntos importantes en nuestra familia

Para cada $s \in (1, 2)$ sean $\tau(s) = \frac{1}{2}$, $\beta(s) = T_s(\frac{1}{2})$, $\alpha(s) = T_s^2(\frac{1}{2})$, $g(s) = T_s^3(\frac{1}{2})$. Es decir, que $\beta(s) = \frac{s}{2}$ y $\alpha(s) = T_s(\beta(s)) = s(1 - \frac{s}{2})$, vea la Figura 6.

2.1 Nota. Hemos definido cuatro funciones en s , a saber τ , β , α y g . A veces fijaremos un parámetro s y escribiremos τ , β , α , g y T en vez de $\tau(s)$, $\beta(s)$, $\alpha(s)$, $g(s)$ y T_s respectivamente, a menos que sea necesario especificar. Es decir, que τ denotará tanto a la función constante $\tau(s)$ como al número real $\frac{1}{2}$, y lo análogo sucederá para las otras cuatro funciones. Estamos seguros de que esto no causará confusiones al lector.

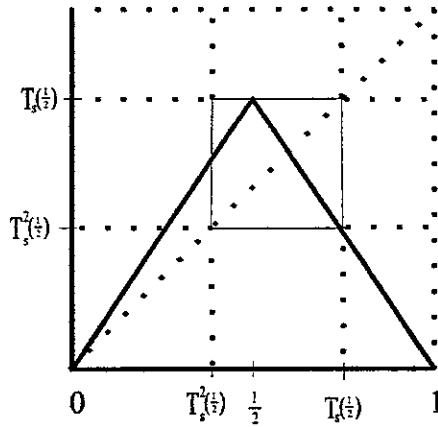


Figura 6

2.2 Lema. Sea $s \in (1, 2)$. Considerando las hipótesis y notaciones señaladas anteriormente, sucede lo siguiente:

- i) $\alpha < \beta$
- ii) $\alpha < \tau < \beta$
- iii) $I_s = [\alpha, \beta]$ es invariante bajo T_s .

Demostración:

$$i) \alpha < \beta \Leftrightarrow s - \frac{s^2}{2} < \frac{s}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{s}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < s.$$

$$ii) \alpha < \tau \Leftrightarrow s - \frac{s^2}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow s^2 - 2s + 1 > 0 \\ \Leftrightarrow (s - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow s \neq 1.$$

$$\tau < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{s}{2} \Leftrightarrow 1 < s.$$

De aquí se deriva que como $\alpha < \frac{1}{2}$, entonces $T(\alpha) = s\alpha = s^2(1 - \frac{s}{2})$, y por lo tanto que $g = s^2(1 - \frac{s}{2})$.

iii) Como T es creciente en $[0, \tau]$, tenemos que

$$T[\alpha, \tau] = [T(\alpha), T(\tau)] = [g, \beta]$$

y como $1 < s$, entonces $\alpha < \alpha s$, es decir, $\alpha < g$. Esto prueba que $T[\alpha, \tau] \subset [\alpha, \beta]$. Luego, como T es decreciente en $[\tau, 1]$, $T[\tau, \beta] = [T(\beta), T(\tau)] = I_s$. Por lo tanto $T(I_s) = I_s$. \square

La gráfica de T restringida a I_s es la de la Figura 7-a.

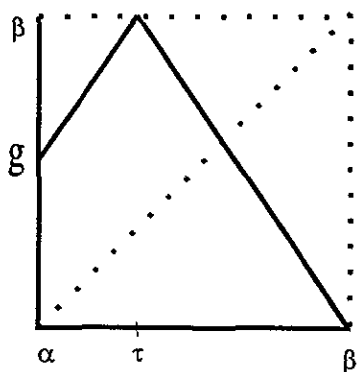


Figura 7-a

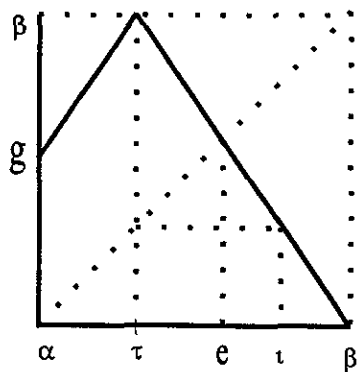


Figura 7-b

Ahora observemos que:

a) Existe un punto fijo (denotado por e) en el intervalo (τ, β) .

Para demostrar esto basta con ver que $T(\tau) - \tau = \beta - \tau > 0$, mientras que $T(\beta) - \beta = \alpha - \beta < 0$, así que debe existir un punto e en (τ, β) tal que $T(e) - e = 0$

Para calcular e , sólo hay que observar que como $e > \tau$, entonces $T(e) = s(1 - e) = e$. Esto implica que $s = (s + 1)e$ y por lo tanto que $e = \frac{s}{s+1}$.

b) Existe un punto $\iota \in (e, \beta)$ tal que $T(\iota) = \tau$.

Esto pasa porque $T(e) = e > \tau$, y $T(\beta) = \alpha < \tau$. Otra vez podemos calcular ι , viendo que, como $\iota > e > \tau$, entonces $T(\iota) = s(1 - \iota) = \tau$ y por lo tanto

$$\iota = \frac{s - \tau}{s} = \frac{s - \frac{1}{2}}{s} = 1 - \frac{1}{2s}.$$

En relación con esto último vea la Figura 7-b.

Así que tenemos las funciones $\alpha, \beta, \tau, g, e, \iota$ que van del intervalo $[1, 2]$ al intervalo $[0, 1]$. Las gráficas de las primeras cinco funciones aparecen en la Figura 8.

En estas gráficas se ve que tenemos varios casos:

- 1) $g < \tau$
- 2) $g = \tau$
- 3) $\tau < g < e$
- 4) $g = e$
- 5) $g > e$

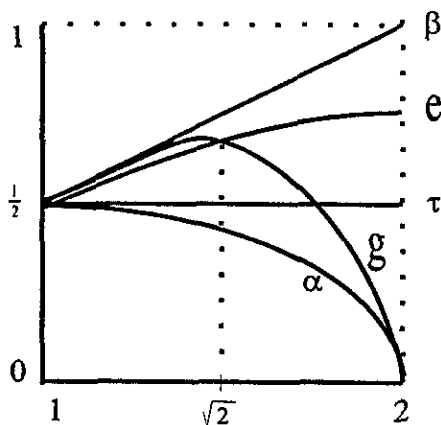


Figura 8

El $\varprojlim \{I_s, T\}$ (el cual es un subcontinuo de $\varprojlim \{I, T\}$) puede variar mucho, según los distintos casos. Como demostraremos en lo que sigue, en los primeros tres casos resulta ser indecomponible, en el cuarto es la unión de dos continuos indecomponibles que se intersecan en un punto y en el último caso, el límite inverso contiene dos o más subcontinuos indecomponibles.

2.2 Continuos indecomponibles cuando el parámetro varía en $(\sqrt{2}, 2)$

Vamos a estudiar primero los casos 1, 2 y 3, es decir, los casos en los que $g < e$, vea las figuras al final de esta sección:

2.3 Teorema. Sea $s \in (1, 2)$. Si $g(s) < e(s)$, entonces el $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ es un continuo indescomponible.

Demostración:

Observemos que

$$\begin{aligned} g < e &\Leftrightarrow s^2 \left(1 - \frac{s}{2}\right) < \frac{s}{s+1} \\ \Leftrightarrow s \left(1 - \frac{s}{2}\right) < \frac{1}{s+1} &\Leftrightarrow s^2 + s - \frac{s^3}{2} - \frac{s^2}{2} - 1 < 0 \\ \Leftrightarrow s^3 - s^2 - 2s + 2 > 0 &\Leftrightarrow (s-1)(s^2-2) > 0. \end{aligned}$$

Como $s > 1$, tenemos que $s-1 > 0$ y por lo tanto que $g < e \Leftrightarrow s^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow |s| > \sqrt{2}$ pero como $s > 0$, tenemos que

$$g < e \Leftrightarrow \sqrt{2} < s < 2.$$

Ahora vamos a ver que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, si $I_s = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de I_s , entonces $T^n(A) = I_s$ o $T^n(B) = I_s$. Lo que implicará que $\varprojlim \{I_s, T^n\}$ es indescomponible y por lo tanto (por la Proposición 1.17) que $\varprojlim \{I_s, T\}$ también lo es.

Si $I_s = A \cup B$, donde A y B son dos subcontinuos de I_s , entonces A y B son intervalos y por lo tanto alguno de los dos contiene a $[\alpha, \tau]$ ó a $[\tau, \beta]$. Entonces basta demostrar que existe algún natural n tal que $T^n([\alpha, \tau]) = I_s$ y $T^n([\tau, \beta]) = I_s$.

Ya habíamos visto que $T[\tau, \beta] = I_s$, así que sólo falta ver que hay un entero positivo n tal que $T^n([\alpha, \tau]) = I_s$.

Consideremos para esto dos casos:

- a) $g \leq \tau$
- b) $\tau < g < e$

En el caso a), el hecho de que $T[\alpha, \tau] = [g, \beta]$ implica que $T[\alpha, \tau] \supseteq [\tau, \beta]$. De aquí que $T^2[\alpha, \tau] \supseteq T[\tau, \beta] = I_s$, así que

tomando $n = 2$ resolvemos el problema (vea las Figuras 9-a, 9-b y 9-c).

Veamos ahora el caso b) (vea la Figura 9-d). Como $T^2[\tau, \iota] \supseteq [T^2(\tau), T^2(\iota)] = [\alpha, \beta]$ basta demostrar que, para algún $m \in \mathbb{N}$, $T^m[\alpha, \tau] \supseteq [\tau, \iota]$. Sabemos que $T[g, \beta] = [T(\beta), T(g)] = [\alpha, T(g)]$, ya que T es decreciente en $[\tau, \beta]$. Por lo tanto

$$T^2([\alpha, \tau]) = T[g, \beta] = [\alpha, T(g)],$$

y como $g < e$, tenemos que $T(g) > T(e) = e > \tau$. Es decir, que $T^2([\alpha, \tau]) \supseteq [\alpha, \tau]$, lo que implica que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $T^{2k}([\alpha, \tau]) \supseteq [\alpha, \tau]$.

Entonces es suficiente ver que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $T^{2l}([\alpha, \tau])$ tiene algún elemento mayor o igual que ι . Vamos a demostrar que, para algún $k_0 \in \mathbb{N}$, $T^{2(k_0+1)}(\alpha) \geq \iota$.

Observemos primero que en el intervalo $(e, \iota]$ la gráfica de la función T^2 queda por arriba de la identidad, es decir, que $T^2(x) > x$, si $x \in (e, \iota]$. Para ver esto, notemos que, si $x \in (e, \iota]$, entonces $T(x)$ está en el intervalo $[\tau, e)$ y por lo tanto $T(x) = s - sx$ y $T^2(x) = s - s(s - sx) = s - s^2 + s^2x$. Así que

$$T^2(x) > x \Leftrightarrow s(1 - s) + (s^2 - 1)x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{s(s-1)}{(s+1)(s-1)} = \frac{s}{s+1} = e$$

lo cual sí se cumple. Ahora sí, notemos que

$$T^{2(k_0+1)}(\alpha) = T^{2k_0+1}(T(\alpha)) = T^{2k_0+1}(g)$$

y supongamos que $T^{2k+1}(g) < \iota$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, en particular si $k = 0$ tenemos que $T(g) < \iota$. Ahora, como $T(g) \in (e, \iota)$, tenemos que la sucesión

$$\{T(g), T^3(g), T^5(g), \dots\}$$

es creciente y contenida en (e, ι) , y por lo tanto debe ser convergente a un número $r \in (e, \iota)$. Si aplicamos la función T^2 a los elementos de la sucesión y a r , obtenemos que la sucesión

$$\{T^3(g), T^5(g), T^7(g), \dots\}$$

converge a $T^2(r)$ y por lo tanto que r es fijo bajo T^2 . Pero como $r \in (e, \iota)$, resulta que $T^2(r) > r$, lo cual es una contradicción.

Así, debe existir una $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{2(k_0+1)}(\alpha) \geq \iota$ y entonces

$$T^{2(k_0+1)}([\alpha, \tau]) \supseteq [\tau, \iota],$$

lo que queríamos demostrar. \square

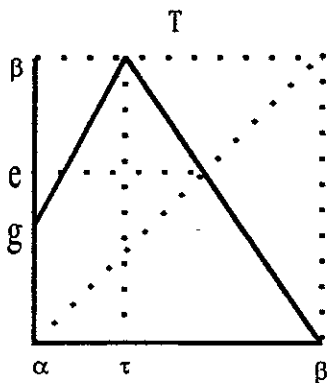


Figura 9-a

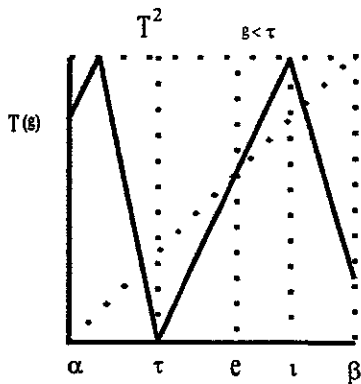


Figura 9-b

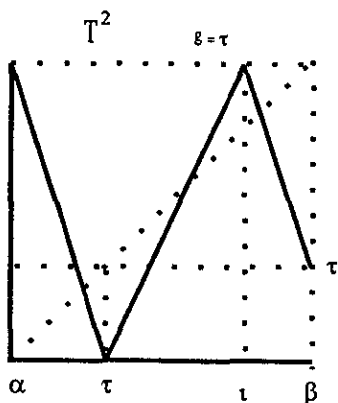


Figura 9-c

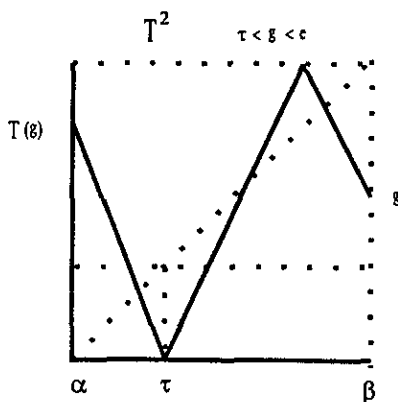


Figura 9-d

2.3 Subcontinuos indescomponibles cuando el parámetro varía en $(1, \sqrt{2}]$

Vamos a continuar ahora con el caso cuatro:

2.4 Proposición. Sea $s \in (1, 2)$ tal que $g(s) = e(s)$. Entonces $\varprojlim \{I_s, T\}$ es la unión de dos subcontinuos propios, cada uno de los cuales es indescomponible.

Demostración:

Observemos primero que $g(s) = e(s)$ si y sólo si $s^2(1 - \frac{s}{2}) = \frac{s}{s+1}$, lo cual ocurre exactamente cuando $s = \sqrt{2}$ (vea el inicio de

la demostración del teorema anterior). Las gráficas de T y T^2 son las siguientes:

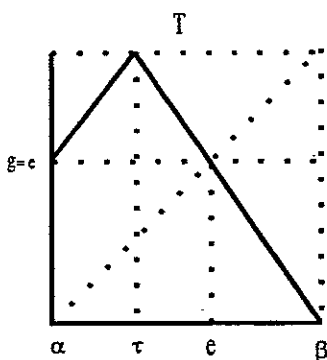


Figura 10-a

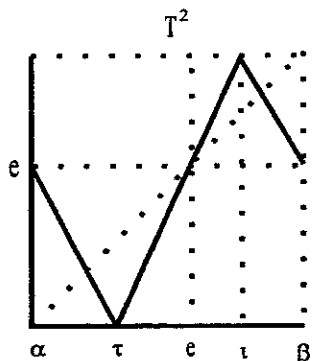


Figura 10-b

Ahora, $T^2[\alpha, \tau] = T[e, \beta] = [\alpha, e]$, mientras que $T^2[\tau, e] = T[e, \beta] = [\alpha, e]$. Es decir, $[\alpha, e]$ es invariante bajo T^2 y la sucesión $\{[\alpha, e], T^2\}$ es indescomponible. Por lo tanto $\varprojlim \{[\alpha, e], T^2\} = A$ es un subcontinuo indescomponible de $\varprojlim \{[\alpha, \beta], T^2\}$.

Análogamente, $T^2[e, \iota] = [e, \beta]$ y $T^2[\iota, \beta] = [e, \beta]$, así que $\varprojlim \{[e, \beta], T^2\} = B$ es indescomponible.

Por lo tanto, $\varprojlim \{[\alpha, \beta], T\} \approx \varprojlim \{[\alpha, \beta], T^2\} = A \cup B$ es la unión de dos subcontinuos indescomponibles que se intersectan en el punto (e, e, e, \dots) . \square

En la demostración de la siguiente proposición se verá claramente que cada uno de estos subcontinuos es homeomorfo al

continuo de Knaster, el límite inverso que resulta cuando $s = 2$.

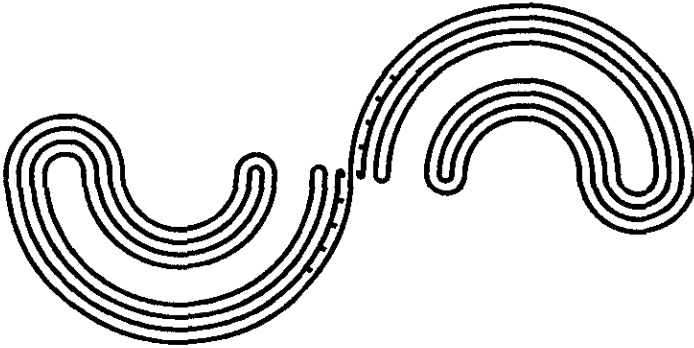


Figura 11

Nos queda por último el caso en el que $g > e$, es decir, cuando $1 < s < \sqrt{2}$.

2.5 Proposición. Si $s \in (1, 2)$ es tal que $g(s) > e(s)$, entonces sucede lo siguiente:

- i) $[\alpha, e]$ y $[e, \beta]$ son invariantes bajo T^2 , y por lo tanto

$$\varprojlim \{I_s, T\} \approx \varprojlim \{I_s, T^2\} = \varprojlim \{[\alpha, e], T^2\} \cup \varprojlim \{[e, \beta], T^2\}$$
- ii) $\varprojlim \{[\alpha, e], T^2\}$ es homeomorfo a $\varprojlim \{[e, \beta], T^2\}$
- iii) $\varprojlim \{[e, \beta], T^2\} = \varprojlim \{[e(s), \beta(s)], T_s^2\}$ es homeomorfo a

$$\varprojlim \{[0, \beta(s^2)], T_{s^2}\} = \varprojlim \{I, T_{s^2}\}$$

Demostración:

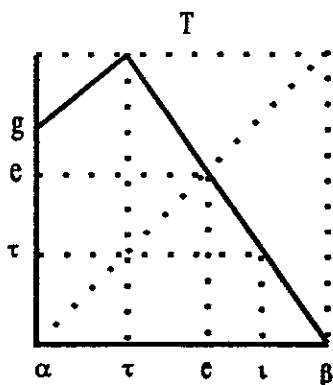


Figura 12-a

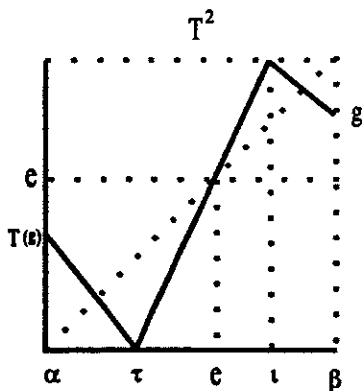


Figura 12-b

- i) $T[\alpha, \tau] = [g, \beta] \subset [e, \beta]$ y $T[\tau, e] = [e, \beta]$. Esto implica que $T[\alpha, e] = [e, \beta]$ y por lo tanto que $T^2[\alpha, e] = T[e, \beta] = [\alpha, e]$.

Análogamente, $T[e, \beta] = [\alpha, e]$ y por eso $T^2[e, \beta] = T[\alpha, e] = [e, \beta]$.

Esta afirmación prueba que $\varprojlim \{[\alpha, \beta], T\}$ no es un continuo indescomponible, pues es la unión de dos subcontinuos propios. Sin embargo, ya veremos que cada uno de éstos contiene al menos un subcontinuo indescomponible.

ii) La función $\varphi = T|_{[e, \beta]} : [e, \beta] \rightarrow [\alpha, e]$ es monótona y suprayectiva, así que es un homeomorfismo. Además $\varphi \circ T^2 = T^3 = T^2 \circ \varphi$, con lo cual se tiene la conclusión gracias a la Proposición 1.18.

iii) Para tener mayor comodidad en la lectura, denotaremos, como hasta ahora, $e(s)$, $\beta(s)$, $\iota(s)$ y $g(s)$ por e , β , ι y g , respectivamente, y además $\alpha(s^2)$ y $\beta(s^2)$ por α' y β' , también respectivamente.

Vamos a demostrar que existe un homeomorfismo $\psi : [e, \beta] \rightarrow [0, \beta']$ tal que $\psi \circ T_s^2 = T_{s^2} \circ \psi$, es decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 [e, \beta] & \xrightarrow{T_s^2} & [e, \beta] \\
 \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 [0, \beta'] & \xleftarrow{T_{s^2}} & [0, \beta']
 \end{array}$$

En realidad, el homeomorfismo ψ que funciona es la transformación lineal que manda el intervalo $[e, \beta]$ en $[0, \beta']$. Sea $\psi : [e, \beta] \rightarrow [0, \beta']$ dada por $\psi(x) = \frac{-s^2 + s(1+s)x}{s-1}$.

Como ψ es lineal, basta demostrar que $\psi(e) = 0$ y $\psi(\beta) = \beta'$ para probar que está bien definida y es un homeomorfismo,

$$\begin{aligned}\psi(e) &= \frac{-s^2 + s(1+s)\left(\frac{s}{1+s}\right)}{s-1} = 0. \\ \psi(\beta) &= \frac{-s^2 + (s+s^2)\left(\frac{s}{2}\right)}{s-1} = \frac{-s^2}{2} + \frac{s^3}{2} = \\ &= \frac{s^2(s-1)}{2(s-1)} = \beta'.\end{aligned}$$

Falta ver que $\psi \circ T_s^2 = T_{s^2} \circ \psi$. Empezaremos por considerar sólo el intervalo $[e, \iota]$.

Observemos primero que $\psi(\iota) = \tau$:

$$\begin{aligned}\psi(\iota) &= \frac{-s^2 + s(1+s)\left(1 - \frac{1}{2s}\right)}{s-1} \left(\frac{2}{2}\right) = \\ &= \frac{-2s^2 + (s+1)(2s-1)}{2(s-1)} = \frac{s-1}{2(s-1)} = \tau.\end{aligned}$$

Ahora, sea $x \in [e, \iota]$. Entonces $T_s(x) = s - sx$, y como $T_s[e, \iota] = [\tau, e]$ tenemos que $T_s^2(x) = s - s(s - sx) = -s^2 + s + s^2x$. Así que $\psi \circ T_s^2(x) = \frac{1}{s-1}(-s^2 + s(1+s)(-s^2 + s + s^2x)) = \frac{s^2}{s-1}(-1 + (1+s)(-s + 1 + sx)) = \frac{s^2}{s-1}(-s^2 + s(1+s)x)$.

Por otro lado, $\psi(x) = \frac{-s^2 + s(1+s)x}{s-1}$, y como $\psi[e, \iota] = [0, \tau]$ resulta que $T_{s^2} \circ \psi(x) = \frac{s^2}{s-1}(-s^2 + s(1+s)x)$.

Ya probamos la igualdad en $[e, \iota]$. En $[\iota, \beta]$ los cálculos y los razonamientos son similares, así que los omitiremos.

Hemos probado ya que $\varprojlim \{[e, \beta], T_s^2\}$ es homeomorfo a $\varprojlim \{I, T_{s^2}\}$. \square

2.6 Observación. Las afirmaciones *i*), *ii*), y *iii*) de la proposición anterior se cumplen también para $s = \sqrt{2}$. Por eso, $\varprojlim \{I_{\sqrt{2}}, T_{\sqrt{2}}\}$

es la unión de dos subcontinuos, cada uno de los cuales es homeomorfo a $\varprojlim \{I, T_2\}$, el continuo de Knaster; hecho que habíamos anunciado sin demostración previamente a la proposición anterior.

2.7 Teorema. Si $s \in (1, 2]$, entonces $\varprojlim \{I, T_s\}$ contiene al menos un subcontinuo indescomponible.

Demostración:

Por comodidad, denotaremos a $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ por $A(s)$.

Tratemos de resumir lo que hemos descubierto en este capítulo y en el anterior sobre el $\varprojlim \{I, T_s\}$:

En el Capítulo 1 vimos que si $s = 2$, entonces $\varprojlim \{I, T_s\}$ es homeomorfo al continuo de Knaster, el cual es indescomponible. En la sección anterior descubrimos que si $s \in (\sqrt{2}, 2)$, entonces $A(s)$ es un subcontinuo indescomponible de $\varprojlim \{I, T_s\}$. Vea la Figura 13-a.

Si $s = \sqrt{2}$, tenemos que $A(s)$ es la unión de dos subcontinuos homeomorfos al Knaster. Luego, acabamos de probar en la proposición anterior que en el caso de que $s \in (1, \sqrt{2})$, $A(s)$ es la unión de dos subcontinuos propios que se tocan en el punto (e, e, e, \dots) , cada uno de los cuales es homeomorfo a $\varprojlim \{I, T_{s^2}\}$. Es decir, que $\varprojlim \{I, T_s\}$ contiene dos copias de $A(s^2)$. Si además $\sqrt[4]{2} < s < \sqrt{2}$ resulta que $\sqrt{2} < s^2 < 2$ y por lo tanto $A(s^2)$ es indescomponible, con lo cual el $\varprojlim \{I, T_s\}$ contiene dos subcontinuos indescomponibles y homeomorfos, vea la Figura 13-b.

Construyamos un argumento inductivo para probar que cuando el parámetro s sigue recorriendo el intervalo $(1, 2]$, en forma decreciente en dirección al 1, va ocurriendo un proceso similar:

Sea $K = \{2, 2^2, \dots, 2^n \dots\} = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$, y supongamos que si $j \in K$ y $1 < s \leq 2^{\frac{1}{j}}$, entonces $A(s)$ contiene j copias de $A(s^j)$. Ahora, cuando $1 < s \leq 2^{\frac{1}{2j}}$ podemos aplicar la hipótesis pues $2^{\frac{1}{2j}} < 2^{\frac{1}{j}}$ y por eso sabemos que $A(s)$ contiene j subcontinuos homeomorfos a $A(s^j)$. Pero además $1 < s^j \leq \sqrt{2}$, así que $A(s^j)$ contiene dos subcontinuos homeomorfos a $A(s^{2j})$. Esto implica que $A(s)$ contiene $2j$ copias de $A(s^{2j})$. Si también sucede que $2^{\frac{1}{4j}} < s \leq 2^{\frac{1}{2j}}$, entonces $\sqrt{2} < s^{2j} \leq 2$ y por eso cada una de estas copias es un continuo indescomponible. Si s es exactamente $2^{\frac{1}{2j}}$ cada copia es el continuo de Knaster.

Esto completa el argumento y así hemos probado que si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $2^{\frac{1}{2^{n+1}}}\sqrt{2} < s \leq 2^{\frac{1}{2^n}}\sqrt{2}$, entonces $A(s)$ contiene 2^n subcontinuos indescomponibles, y que si $s = 2^{\frac{1}{2^n}}\sqrt{2}$ entonces cada uno de éstos es homeomorfo al continuo de Knaster, ver Figura 13-c.

Ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2^n}} = 1$, tenemos que, para cualquier s en $(1, 2]$, $\varprojlim \{I, T_s\}$ contiene al menos un subcontinuo indescomponible. Más precisamente, la cantidad de subcontinuos indescomponibles contenidos en $\varprojlim \{I, T_s\}$ tiende a ∞ cuando s tiende a 1 por la derecha. \square

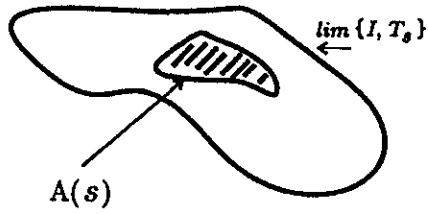


Figura 13-a

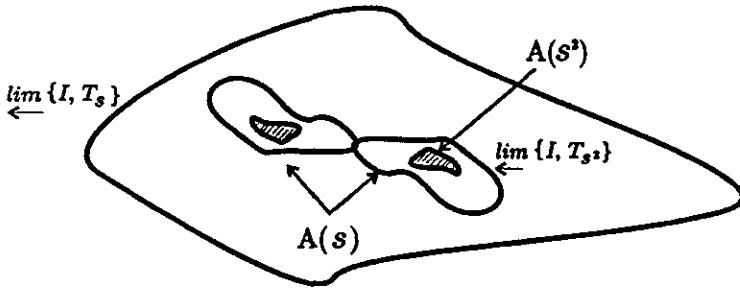


Figura 13-b

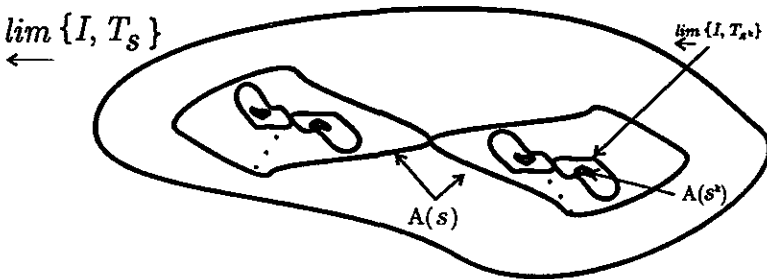


Figura 13-c

2.4 Compactaciones del rayo.

Para los objetivos de esta sección y de los siguientes capítulos, nos resultará útil definir la función “*corrimiento*” de la siguiente manera:

$\widehat{T} : \varprojlim \{I, T_s\} \rightarrow \varprojlim \{I, T_s\}$ está dada para cualquier elemento $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \varprojlim \{I, T_s\}$ por

$$\widehat{T}(x) = (T(x_1), x_1, \dots, x_n, \dots).$$

Es claro que $\widehat{T}(x) \in \varprojlim \{I, T_s\}$, lo cual implica que \widehat{T} está bien definida. Además, si $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in \varprojlim \{I, T_s\}$ entonces $\widehat{T}^{-1}(y) = (y_2, \dots, y_n, \dots)$, de aquí que \widehat{T} es biyectiva. También es continua puesto que su composición con cualquier proyección lo es, igualmente \widehat{T}^{-1} . Así, \widehat{T} es un homeomorfismo.

La intención de esta sección es estudiar un poco lo que ocurre con el complemento de $A(s) = \varprojlim \{I_s, T_s\}$ en $\varprojlim \{I, T_s\}$ cuando el parámetro s varía en el intervalo $(1, 2]$. Por comodidad vamos a denotar $A(s)$ por A , $\varprojlim \{I, T_s\}$ por L , y T_s por T , en el entendido de que s es un parámetro fijo en $(1, 2]$. Recordemos que $I_s = [\alpha(s), \beta(s)]$.

Los puntos de $L \setminus A$ son aquellos que tienen al menos una coordenada en $[0, \alpha)$; es decir, que si para cualquier entero positivo n , L_n denota el conjunto de puntos en L cuya n -ésima coordenada pertenece a $[0, \alpha)$, o bien, $L_n = \pi_n^{-1}[0, \alpha)$, entonces $L \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$.

Como $[\alpha, \beta]$ es invariante bajo T , entonces cualquier punto en L que tenga la n -ésima coordenada en $[0, \alpha)$, tiene también todas las coordenadas “a la derecha” de ésta en $[0, \alpha)$. En otras palabras, $L_n \subseteq L_{n+1}$ para cualquier entero positivo n .

2.8 Proposición. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que L_n es homeomorfo a un intervalo de la forma $[a, b)$.

Demostración:

Un punto x está en L_1 si y sólo si $\pi_1(x)$ está en $[0, \alpha)$, y esto ocurre exactamente cuando, para cualquier entero positivo j , se tiene que $\pi_j(x)$ está en la preimagen de $[0, \alpha)$ bajo T^{j-1} . Es decir que si $I_1 = [0, \alpha]$ y $I_j = T^{-(j-1)}[0, \alpha) = [0, \frac{\alpha}{s^{j-1}})$ para cada $j > 1$, entonces $L_1 = \varprojlim \{I_j, T|_{I_{j+1}}\}$ y ya que la función T restringida a cada $[0, \frac{\alpha}{s^{j-1}}) \subset [0, \alpha)$ es monótona, tenemos que L_1 es un límite inverso cuyas funciones de ligadura son homeomorfismos, y por lo tanto la proposición 1.16 prueba que la proyección $\pi_1|_{L_1}$ de L_1 en $[0, \alpha)$ es un homeomorfismo.

Ahora, veamos que para cualquier $n \geq 1$, $\widehat{T}(L_n) = L_{n+1}$: para cualquier punto x en L , el corrimiento recorre todas las coordenadas de x un lugar a la derecha. Formalmente, $\pi_{n+1} \circ \widehat{T}(x) = \pi_n(x)$, lo cual significa que si $x \in L_n$, entonces $\widehat{T}(x) \in L_{n+1}$. De manera similar, si $z \in L_{n+1}$, entonces $\widehat{T}^{-1}(z) \in L_n$; y como $z = \widehat{T} \circ \widehat{T}^{-1}(z)$, se tiene que $z \in \widehat{T}(L_n)$.

Es decir que $\widehat{T}^{n-1}(L_1) = L_n$ y por tanto L_1 es homeomorfo a L_n . En conclusión, $L \setminus A$ es homeomorfo a una unión de intervalos encajados. \square

Recordemos que un espacio X es un rayo topológico si es homeomorfo a $[0, \infty)$

2.9 Teorema. El conjunto $R = L \setminus A$ es un rayo topológico.

Demostración:

Dividiremos esta demostración en tres pasos:

Paso 1. Antes de establecer un homeomorfismo g entre R y $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, empecemos por definir, para cada número natural n , la función $g_n : L_n \rightarrow [0, s^{n-1}\alpha)$ que a cada elemento x le asigna el número $\pi_n(x) s^{n-1}$.

Si $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots)$ es un elemento de L_n , podemos obtener la coordenada x_n "quitando las primeras $n - 1$ coordenadas y luego proyectando la que sigue", es decir que $\pi_n|_{L_n} = \pi_1 \circ \widehat{T}^{-(n-1)}|_{L_n}$. Ahora $\widehat{T}^{-(n-1)}|_{L_n} : L_n \rightarrow L_1$ es un homeomorfismo, y en L_1 , π_1 también lo es; por tanto, lo mismo le sucede a la composición de ambas, $\pi_n|_{L_n} : L_n \rightarrow [0, \alpha)$. Multiplicar por s^{n-1} sólo es componer con una función monótona, así que g_n es otro homeomorfismo.

Paso 2. Afirmamos que $g_{n+1}|_{L_n} = g_n$. Si $x \in L_n$, entonces $\pi_n(x)$ está en $[0, \alpha)$, y como $\pi_n = T \circ \pi_{n+1}$, tenemos que $\pi_{n+1}(x) \in T^{-1}[0, \alpha) = [0, \frac{\alpha}{s}) \subset [0, \tau)$. O sea que $\pi_{n+1}(x)$ es menor que $\frac{1}{2}$, lo cual implica que $T \circ \pi_{n+1}(x) = s\pi_{n+1}(x)$ y por lo tanto $\pi_n(x) = s\pi_{n+1}(x)$. Es decir, que $g_{n+1}(x) = s^n \pi_{n+1}(x) = s^{n-1} \pi_n(x) = g_n(x)$.

Ya podemos definir nuestra función $g : R \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ por $g(x) = g_n(x)$ si $x \in L_n$, para cualquier $x \in R$. La afirmación anterior y el hecho de que $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ prueban que g está bien definida. Falta ver que es un homeomorfismo.

Paso 3. La imagen de R bajo g es la unión de las imágenes de los L_n bajo g_n , donde n recorre todos los naturales. En otras palabras, $g(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(L_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, s^{n-1}\alpha)$. Como $s > 1$, s^{n-1} tiende a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto g es suprayectiva. Supongamos ahora que g coincide en dos elementos de R , x y y . Existen dos números naturales, m y n tales que $x \in L_n$ y $y \in L_m$. Podemos suponer que $n \leq m$ y en consecuencia que x

y y pertenecen ambos a L_m . Así, $g_m(x) = g(x) = g(y) = g_m(y)$ y por ser g_m inyectiva, $x = y$. Esto prueba que g es biyectiva.

Ahora tomemos un abierto U en R . Entonces

$$g(U) = g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cap L_n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(U \cap L_n).$$

Cada g_n es un homeomorfismo, y por lo tanto $g_n(U \cap L_n)$ es abierto en $[0, s^{n-1}\alpha)$, el cual es abierto en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Es decir, que todos los $g_n(U \cap L_n)$ son abiertos en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, y por lo tanto $g(U)$ también lo es. Esto implica que la función g es abierta, o en otras palabras, que su inversa es continua.

Para ver que g es continua, observemos antes que cualquier L_n es abierto en R , ya que $L_n = \pi_n^{-1}[0, \alpha)$, es decir que es la imagen inversa de un abierto bajo una función continua. Además, el hecho de que $g|_{L_n} = g_n$ implica que $g^{-1}|_{[0, s^{n-1}\alpha)}$ y g_n^{-1} son ambas inversas de g_n , así que coinciden.

Tomemos ahora un abierto V en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Entonces

$$g^{-1}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(V \cap [0, s^{n-1}\alpha)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}(V \cap [0, s^{n-1}\alpha))$$

Cada conjunto en la última unión es abierto en L_n , y en consecuencia es abierto en R . Acabamos de probar que g es continua, con lo cual se demuestra que R es un rayo topológico. \square

Por último, vamos a averiguar que tan "cerca" se encuentra este rayo del continuo $A(s) = \varprojlim \{I_s, T_s\}$.

2.10 Teorema. La cerradura de R en $L = \varprojlim \{I, T_s\}$ es todo el conjunto L .

Demostración:

Es claro que $\overline{R} \subset \overline{L} = L$, así que debemos probar que $L \subset \overline{R}$. Como $L = R \cup A$, sólo tenemos que demostrar que $A \subset \overline{R}$.

Sea x en A . Sea $n \in \mathbb{N}$. Si algún $y \in L$ fuera tal que $x_n = y_n$, tendríamos que $d(x, y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} \leq \frac{1}{2^n}$. Tomemos $y_i = x_i$ para cada $i \leq n$. En vista de que $T[0, \tau] = [0, \beta]$, podemos encontrar una sucesión $\{y_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ en $[0, \tau]$ tal que $T(y_{n+k}) = y_{n+k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En $[0, \tau]$ la función T sólo multiplica por s , así que para cualquier k natural, $y_{n+k-1} = T(y_{n+k}) = sy_{n+k}$, es decir que $y_{n+k} = \frac{y_{n+k-1}}{s}$ y por inducción $y_{n+k} = \frac{y_n}{s^k}$. Sea $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$.

Es claro que $y \in L$, pero además como $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n+k} = 0$ hay algún y_m en $[0, \alpha)$. Esto significa que $y \in R$, y ya habíamos visto que $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$.

Todo esto quiere decir que, para cualquier $x \in A$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe alguna $y \in R$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Dicho de otra manera, todo $x \in A$ es punto límite de R , y por lo tanto está en su cerradura. Es decir, $\overline{R} = L$, así que L es una compactación del rayo. \square

Con esto ya podríamos completar las últimas dos figuras de la sección anterior, dibujando en cada zona blanca un rayo que se "entrometa" por todo A , así que ya tenemos una idea más clara de cómo es el continuo $\varprojlim \{I, T_s\}$, para cualquier parámetro s en $(1, 2]$. Vea las siguientes figuras:

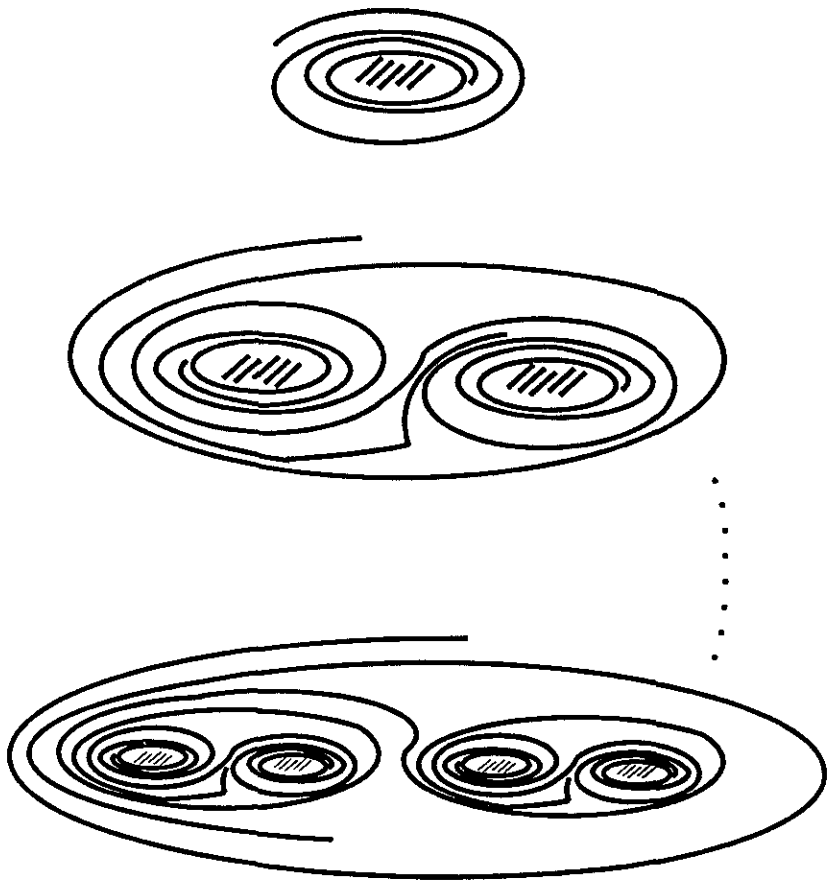


Figura 14

Capítulo 3

Tres conjuntos densos en $[\sqrt{2}, 2]$

En este capítulo veremos tres teoremas relacionados con la dinámica generada por las tiendas, los cuales serán muy importantes para la conclusión del siguiente capítulo. Definiremos tres conjuntos ajenos y densos en $[\sqrt{2}, 2]$. Que un parámetro pertenezca a uno de estos tres conjuntos nos dará información sobre las iteraciones de $\frac{1}{2}$, $\{T_s^n(\frac{1}{2})\}_{n=1}^{\infty}$, y nos permitirá, en el próximo capítulo, distinguir entre los posibles límites inversos generados por la familia.

Recordemos que en el capítulo anterior, una vez fijado un parámetro $s \in (1, 2]$, los símbolos α , β y τ se utilizaban tanto para denotar funciones como los números reales $\alpha(s) = T_s^2(\frac{1}{2})$, $\beta(s) = T_s(\frac{1}{2})$ y $\tau(s) = \frac{1}{2}$, respectivamente. El mismo abuso de notación sucederá en este capítulo, a no ser que consideremos necesario hacer una especificación.

3.1 Dos herramientas útiles.

Vamos a definir dos sucesiones de funciones, $\{\varphi_n\}$ y $\{G_n\}$, que nos servirán a lo largo del capítulo.

Para cualquier natural n , sea $\varphi_n : [\sqrt{2}, 2] \rightarrow [0, 1]$ la función que al parámetro s le asigna el número

$$\varphi_n(s) = T_s^n\left(\frac{1}{2}\right)$$

Observemos que para cada s se tiene que $\varphi_1(s) = \beta(s)$ y que $\varphi_2(s) = \alpha(s)$.

Antes de definir la siguiente función, recordemos que si $s \in [\sqrt{2}, 2]$, entonces I_s denota al intervalo $[\alpha, \beta]$.

Ahora, sea $M = \{(s, x) : s \in [\sqrt{2}, 2], x \in I_s\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $G_n : M \rightarrow [0, 1]$, como $G_n(s, x) = T_s^n(x)$.

Notemos que si $s \in [\sqrt{2}, 2]$, entonces $\varphi_n(s) = G_n(s, \tau)$, es decir, φ_n es la restricción de G_n a una horizontal de M . Además, si fijamos un parámetro s , entonces $T_s^n = G_n|_{s \times I_s}$; o bien, T_s^n restringe la función G_n a una vertical de M .

3.1 Proposición. Cada φ_n es una función continua.

Demostración:

Procederemos por inducción. Es claro que φ_1 es continua. Supongamos que φ_k también lo es. Sean f y g las siguientes dos funciones:

$f : [\sqrt{2}, 2] \rightarrow [\sqrt{2}, 2] \times [0, 1]$ cuya regla de correspondencia es $f(s) = (s, \varphi_k(s))$ y $g : [\sqrt{2}, 2] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$g(s, y) = \left\{ \begin{array}{ll} sy & \text{si } y \leq \frac{1}{2}, \\ s(1-y) & \text{si } y \geq \frac{1}{2} \end{array} \right\} = T_s(y)$$

Es fácil ver que f y g son continuas. Notemos ahora que si $s \in [\sqrt{2}, 2]$, tenemos que $\varphi_{k+1}(s) = T_s \circ T_s^k(\tau) = T_s(\varphi_k(s)) =$

$g(s, \varphi_k(s)) = g \circ f(s)$. Es decir que $\varphi_{k+1} = g \circ f$ y por lo tanto φ_{k+1} es continua. Esto completa la inducción. \square

3.2 Proposición. Cada G_n es continua.

Demostración:

Por definición, $G_1(s, x) = T_s(x) = g(s, x)$, función que es continua. Supongamos ahora que G_k también lo es, y observemos que $G_{k+1}(s, x) = T_s(G_k(s, x)) = g(s, G_k(s, x))$, lo que prueba que G_{k+1} es continua. Esto prueba que cualquier G_n satisface la proposición. \square

3.3 Proposición. Sean $s_0 \in [\sqrt{2}, 2]$, $x_0 \in I_{s_0}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $x_0 \neq \tau$ y $G_k(s_0, x_0) \neq \tau$ para toda $k \in \{1, \dots, n\}$. Entonces existe una vecindad de (s_0, x_0) en M donde G_n tiene derivadas parciales continuas, y además $\frac{\partial G_n}{\partial x}(s_0, x_0) \neq 0$.

Demostración:

Sea $k \in \{1, \dots, n\}$. Como $G_k(s_0, x_0) \neq \tau$, podemos encontrar una vecindad V_k de (s_0, x_0) en M tal que $G_k(s, x) \neq \tau$, si (s, x) está en V_k . Además, como $x_0 \neq \tau$, también hay una vecindad conexa V_0 de (s_0, x_0) tal que $x \neq \tau$ para toda (s, x) en V_0 .

Sea V un abierto y conexo en M que contenga a (s_0, x_0) y tal que $V \subseteq \bigcap_{k=0}^n V_k$. A partir de aquí procederemos por inducción.

Como V es conexo y está contenido en V_0 , tenemos que $x < \tau$ para toda $(s, x) \in V$ ó $x > \tau$ para toda $(s, x) \in V$. Si sucede lo primero, entonces $G_1(s, x) = sx$ para cada pareja (s, x) ; y si ocurre lo segundo, $G_1(s, x) = s(1-x)$. De cualquier modo, G_1 tiene derivadas parciales continuas en V , y además $\left| \frac{\partial G_1}{\partial x}(s_0, x_0) \right| = s_0 \neq 0$. Supongamos que $k < n$, que G_k tiene derivada continua en V y que $\frac{\partial G_k}{\partial x}(s_0, x_0) \neq 0$. Como V es

conexo, y $G_k(V)$ no contiene a τ , tenemos que $G_k(V)$ está contenido en $[0, \tau)$ ó en $(\tau, 1]$. En el primer caso, para cualquier pareja (s, x) ocurre que $G_{k+1}(s, x) = sG_k(s, x)$ y por lo tanto que $\frac{\partial G_{k+1}}{\partial x}(s, x) = s\frac{\partial G_k}{\partial x}(s, x)$. En el segundo,

$$G_{k+1}(s, x) = s(1 - G_k(s, x)),$$

así que $\frac{\partial G_{k+1}}{\partial x}(s, x) = -s\frac{\partial G_k}{\partial x}(s, x)$. En ambos casos, G_{k+1} tiene derivadas parciales continuas y $\frac{\partial G_{k+1}}{\partial x}$ es distinta de cero en (s_0, x_0) . Acabamos de probar que ambas cosas suceden para cualquier $k \in \{1, \dots, n\}$. \square

En las siguientes secciones vamos a enfatizar ciertas características de algunos parámetros en $(\sqrt{2}, 2)$, que en el próximo capítulo nos servirán para identificar algunas diferencias entre los límites inversos correspondientes.

3.2 Parámetros periódicos.

3.4 Definición. Un parámetro $s \in (\sqrt{2}, 2)$ es *periódico* si existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $T_s^m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, es decir que $\varphi_m(s) = \tau$. Si m es el mínimo natural que satisface esta condición, entonces m es el *período* de s .

3.5 Observación. Recordemos que en el capítulo anterior calculamos que para cada s en $(1, 2)$, se tiene que

$$T_s^3\left(\frac{1}{2}\right) = T_s(\alpha) = s^2\left(1 - \frac{s}{2}\right)$$

Además, en el intervalo $(1, 2)$ tenemos que $\alpha < \frac{1}{2} < \beta$. Por lo tanto, s es un parámetro periódico y de período 3 si y solamente si $s^2\left(1 - \frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}$, lo cual sucede únicamente cuando $s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Este número es conocido como la "razón dorada".

3.6 Definición. Decimos que $s \in (\sqrt{2}, 2)$ es un parámetro *preperiódico* si no es periódico y hay dos naturales m y n que cumplen que $T_s^m(\frac{1}{2}) = T_s^n(\frac{1}{2})$, o bien que $\varphi_m(s) = \varphi_n(s)$.

3.7 Lema. Hay una constante positiva λ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y toda $s \in [\sqrt{2}, 2]$ para la cual $\varphi'_n(s)$ existe, se tiene que $\lambda s^n \leq |\varphi'_n(s)|$.

La demostración de este lema se puede encontrar en [BR-M]. No la presentaremos para no desviarnos de los objetivos de esta sección.

3.8 Teorema. El conjunto de parámetros periódicos es denso en $[\sqrt{2}, 2]$.

Demostración:

Supongamos que existe un intervalo abierto $U = (a, b)$ que no contiene parámetros periódicos. Esto quiere decir que para cualquier $s \in U$ y $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(s) \neq \tau$. Por lo tanto $\varphi_n(U) \subseteq [0, \tau)$ ó $\varphi_n(U) \subseteq (\tau, 1]$, ya que U es conexo y φ_n es continua. Ahora, $\varphi_1(s) = \frac{s}{2}$ para toda s . Supongamos que $\varphi_k|_U$ es un polinomio. Si $\varphi_k(U) \subseteq [0, \tau)$ entonces $\varphi_{k+1}(s) = s\varphi_k(s)$ para toda s y si $\varphi_k(U) \subseteq (\tau, 1]$, tenemos que $\varphi_{k+1}(s) = s(1 - \varphi_k(s))$. De cualquier manera $\varphi_{k+1}|_U$ es también un polinomio y así hemos probado, por inducción, que cualquier $\varphi_n|_U$ lo es. Por lo tanto cada φ_n es derivable en U . Por el lema anterior, para toda $m \in \mathbb{N}$ y toda $s \in U$ tenemos que $\lambda s^m \leq |\varphi'_m(s)|$ y como $U \subseteq [\sqrt{2}, 2]$, resulta que $\lambda\sqrt{2}^m \leq \lambda s^m \leq |\varphi'_m(s)|$. Ahora, por el teorema del valor medio, para cada m existe $s_m \in U$ que satisface que $\frac{\varphi_m(b) - \varphi_m(a)}{b - a} = \varphi'_m(s_m)$ y entonces

$$\left| \frac{\varphi_m(b) - \varphi_m(a)}{b - a} \right| \geq \lambda\sqrt{2}^m.$$

Pero ya que $\varphi_m(b)$ y $\varphi_m(a)$ están en $[0, 1]$, resulta que

$$|\varphi_m(b) - \varphi_m(a)| \leq 1,$$

y en consecuencia $\frac{1}{b-a} \geq \lambda(\sqrt{2})^m$, lo cual es una contradicción pues $\sqrt{2} > 1$ y por lo tanto $(\sqrt{2})^m \rightarrow \infty$ cuando $m \rightarrow \infty$. \square

Vamos ahora a estudiar un segundo tipo de parámetros.

3.3 Parámetros prefijos.

3.9 Definición. Un parámetro $s \in (\sqrt{2}, 2)$ es *prefijo* si $T_s^n(\frac{1}{2}) = e(s) = e_s$, o equivalentemente, si $\varphi_n(s) = e_s$, para alguna $n \in \mathbb{N}$.

El objetivo de esta sección es probar que los parámetros prefijos son densos en $(\sqrt{2}, 2)$. Para esto necesitaremos probar tres lemas.

Antes de enunciar el primer lema, recordemos que un número t en \mathbb{R} es algebraico si es raíz de un polinomio con coeficientes racionales. Es conocido el hecho de que el conjunto de números algebraicos es numerable.

3.10 Lema. Cualquier abierto en $(\sqrt{2}, 2)$ contiene un parámetro que no es periódico ni preperiódico.

Demostración:

Afirmamos que si $s \in (\sqrt{2}, 2)$ y n es un natural, entonces $\varphi_n(s)$ es un polinomio en s de grado n con coeficientes racionales. Para ver esto sólo notemos que $\varphi_1(s) = s/2$ y si $\varphi_k(s)$ satisface la afirmación entonces

$$\varphi_{k+1}(s) = T_s^{k+1}(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} sT_s^k(\tau) \text{ ó} \\ s(1 - T_s^k(\tau)) \end{array} \right\},$$

la cual es un polinomio en s que aumenta un grado a $\varphi_k(s)$. Además los coeficientes de $\varphi_{k+1}(s)$ siguen siendo racionales.

Ahora, si s es un parámetro periódico y m su período, entonces $\varphi_m(s) = \tau$ y por lo tanto s es un número algebraico. Lo mismo sucede si s es preperiódico, ya que $\varphi_m(s) = \varphi_{m'}(s)$ para un par de naturales m y m' . Como el conjunto de números algebraicos es numerable, cualquier abierto debe tener un elemento que no lo sea, y así tampoco será periódico ni preperiódico. \square

3.11 Observación. Esta demostración deja entrever que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen 2^{n-1} polinomios de grado n tales que cualquier parámetro periódico de período n es solución de alguno de ellos. Ya que cada uno de estos polinomios tiene a lo más n raíces reales, existen cuando mucho $n2^{n-1}$ parámetros periódicos de período n ; la cual es una cantidad finita.

3.12 Observación. Después de leer la demostración del lema anterior, no debe ser difícil advertir que si s es un parámetro tal que $\varphi_m(s) = \varphi_{m'}(s)$ para algún par $\{m, m'\} \subset \mathbb{N}$, entonces s es solución de un polinomio con coeficientes enteros y coeficiente inicial igual a 1. Un resultado de álgebra prueba que esto implica que si s es un número racional, entonces es un entero. Ya que no hay enteros en $(1, 2)$, los parámetros para los cuales el conjunto $\{T_s^n(\frac{1}{2}) : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, son números irracionales.

No utilizaremos esta última observación en ningún lugar de la tesis, pero la incluimos porque nos pareció un dato interesante.

3.13 Lema. Sean $s \in (\sqrt{2}, 2]$ y δ un número real positivo. Entonces existe un entero positivo n tal que si $J \subset [0, 1]$ es un intervalo de longitud mayor o igual a δ , se tiene que $I_s \subseteq T_s^n(J)$.

Demostración:

Observemos primero que si $K \subseteq [0, 1]$ es un intervalo y si $\tau \notin K$, entonces T_s es monótona en K y así $|T_s(K)| = s|K|$ (donde $|K|$ denota la longitud de K). Si $\tau \in K$, entonces τ divide al intervalo en dos subintervalos K_1 y K_2 . Si K_1 es el intervalo más largo, al menos tiene longitud igual a $\frac{|K|}{2}$, y por lo tanto $|T_s(K)| \geq |T_s(K_1)| = s|K_1| \geq \frac{s}{2}|K|$. En ambos casos, $|T_s(K)| \geq \frac{s}{2}|K|$.

Ahora, para encontrar un entero positivo m tal que $I_s \subseteq T_s^m(K)$, bastaría con que $\{\alpha, \beta\} \subseteq T_s^m(K)$, y para esto sería suficiente con que $\tau \in T_s^{m-2}(K)$ y que $\tau \in T_s^{m-1}(K)$.

Supongamos que no se cumple la conclusión del lema. Entonces para cualquier entero par $n \geq 2$ existe un intervalo J , tal que $|J| \geq \delta$ y además $I_s \not\subseteq T_s^n(J)$. Como $T_s(I_s) = I_s$, también tenemos que $I_s \not\subseteq T_s^k(J)$ si $k \leq n$. El párrafo anterior argumenta que entonces para cualquier entero $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ se tiene que $\tau \notin T_s^{k-2}(J)$ ó $\tau \notin T_s^{k-1}(J)$. En el primer caso, como ya observamos, sucede que $|T_s^{k-1}(J)| = s|T_s^{k-2}(J)|$ y entonces

$$|T_s^k(J)| \geq \frac{s}{2}|T_s^{k-1}(J)| = \frac{s^2}{2}|T_s^{k-2}(J)|.$$

En el segundo caso,

$$|T_s^k(J)| = s|T_s^{k-1}(J)| \geq \frac{s^2}{2}|T_s^{k-2}(J)|.$$

Esto significa que, de cualquier forma

$$|T_s^k(J)| \geq \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 |T_s^{k-2}(J)|,$$

para cada $2 \leq k \leq n$, o bien por un argumento inductivo que $|T_s^n(J)| \geq \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^n |J| \geq \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^n \delta$. Como $T_s^n(J)$ está contenido

en $[0, 1]$, se tiene que $1 \geq \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^n \delta$ para todo par $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción puesto que $s > \sqrt{2}$ y $\delta > 0$ y así $\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^{2l} \delta \rightarrow \infty$, si $l \rightarrow \infty$. Esto concluye la demostración. \square

3.14 Observación. Del lema se deduce que para cualquier intervalo no degenerado J existe $N \in \mathbb{N}$, $N(J)$ tal que si $n \geq N$, entonces $I_s \subseteq T_s^n(J)$.

Notemos que esta observación deja muy claro que hay algún entero positivo n para el que la sucesión $\{I_s, T_s^n\}$ es indescomponible (vea la Definición 1.21). Por lo tanto es también otra demostración del Teorema 2.3, quizá más sencilla que la que ofrecimos en el Capítulo 2. Sin embargo elegimos la primera demostración, pues nos pareció que nos familiarizaba con las funciones T_s .

3.15 Lema. Sean u en $(\sqrt{2}, 2)$ y $e_* \in I_u$ tales que e_* es una preimagen de e_u bajo T_u , y u no es prefijo. Entonces existen una vecindad W de u , $W \subseteq (\sqrt{2}, 2)$ y una función continua $g : W \rightarrow I$ tales que:

i) $g(u) = e_*$

ii) Para toda $s \in W$, se tiene que $g(s)$ es una preimagen de e_s bajo T_s .

Demostración:

Sabemos que existe un entero positivo n tal que $T_u^n(e_*) = e_u$. Como u no es un parámetro prefijo y e_* es una preimagen de e_u bajo T_u , entonces por fuerza se tiene que $e_* \neq \tau$, y además que

para toda $k \in \{1, \dots, n\}$, $T_u^k(e_*) \neq \tau$, o bien, que $G_k(u, e_*) \neq \tau$. Esto implica, por la Proposición 3.3, que hay una vecindad V de (u, e_*) en M donde G_n tiene derivadas parciales continuas, y $\frac{\partial G_n}{\partial x}(u, e_*) \neq 0$. Ahora, sea $F : V \rightarrow [0, 1]$ definida por $F(s, x) = T_s^n(x) - e_s$. Entonces $F(s, x) = G_n(s, x) - e_s$ y por eso F es continua y tiene derivadas parciales continuas en V , y además $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G_n}{\partial x}$, la cual no es cero en (u, e_*) . Es claro que $F(u, e_*) = 0$ y en consecuencia que la curva de nivel $C = \{(s, x) \in V : F(s, x) = 0\}$ contiene a este punto. Por lo que acabamos de argumentar, el teorema de la función implícita nos dice que existen una vecindad $W \subseteq (\sqrt{2}, 2)$ de u y una función $g : W \rightarrow [0, 1]$ tales que:

i) $g(u) = e_*$

ii) Para toda s en W tenemos que $(s, g(s))$ está en C , lo cual implica que $T_s^n(g(s)) = e_s$, es decir que $g(s)$ es una pre-imagen de e_s bajo T_s . \square

Vamos ahora hacia la parte más importante de esta sección.

En el siguiente teorema, para cualquier par de números a, b en $[0, 1]$, el intervalo abierto cuyos extremos son a y b se denotará por $\langle a, b \rangle$.

3.16 Teorema. El conjunto de parámetros prefijos es denso en $[\sqrt{2}, 2]$.

Demostración:

Ya que la prueba es bastante larga, la dividiremos en varios pasos.

Paso 1. Sea U un intervalo abierto en $[\sqrt{2}, 2]$. Queremos encontrar algún $s \in U$ y un entero positivo n que cumplan que

$\varphi_n(s) = e_s$. Supongamos lo contrario. Esto significa que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n(s) > e_s \text{ para toda } s \in U$$

o

$$\varphi_n(s) < e_s \text{ para toda } s \in U$$

Sabemos que existe un parámetro periódico t en U . Sea m el período de t . Entonces si $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, tenemos que $\varphi_{qm+r}(t) = T_t^{qm+r}(\tau) = T_t^r(\tau) = \varphi_r(t)$. De aquí que, si $\varphi_r(t) > e_t$, sucede que $\varphi_{qm+r}(t) > e_t$ para toda $q \in \mathbb{N}$, y por tanto $\varphi_{qm+r}(s) > e_s$ para todos $q \in \mathbb{N}$ y $s \in U$.

Con un razonamiento análogo, para cuando $\varphi_r(t) < e_t$, podemos concluir que, para cada r , tenemos uno de los dos siguientes casos:

i) $\varphi_{qm+r}(s) > e_s$ para todo $q \in \mathbb{N}$ y $s \in U$

ii) $\varphi_{qm+r}(s) < e_s$ para todo $q \in \mathbb{N}$ y $s \in U$.

Vea la Figura 15.

Esto implica que si $s \in U$, cualquier intervalo de la forma

$$\langle \varphi_{qm+r}(s), \varphi_{pm+r}(s) \rangle = W_{p,q,r}$$

donde p y q son enteros positivos, está contenido en $[\varphi_2(s), e_s] = \Omega_{1s}$ o en $(e_s, \varphi_1(s)] = \Omega_{2s}$. Ahora, si $\tau \notin W_{p,q,r}$, entonces T_s es monótona en este intervalo y por lo tanto

$$T_s(W_{p,q,r}) = \langle \varphi_{qm+r+1}(s), \varphi_{pm+r+1}(s) \rangle$$

Dicho de otra forma, $T_s(W_{p,q,r}) = W_{p,q,r+1}$, el cual de nuevo está dentro de Ω_{1s} o de Ω_{2s} . El problema está cuando $\tau \in W_{p,q,r}$, ya que en este caso

$$T_s(W_{p,q,r}) = (\min\{\varphi_{qm+r+1}(s), \varphi_{pm+r+1}(s)\}, \varphi_1(s)]$$

Nos gustaría que $T_s(W_{p,q,r})$ fuera otra vez algún $W_{p',q',r'}$, y así probaríamos que $T_s^n(W_{p,q,r}) \subseteq \Omega_{1s}$ o Ω_{2s} para todo $n \in \mathbb{N}$; lo cual contradiría el Lema 3.13, si $W_{p,q,r}$ fuera no vacío (para esto sólo necesitamos encontrar algún s que no sea periódico ni preperiódico).

Si $r = 0$ tendríamos que

$$(\min \{ \varphi_{qm+1}(s), \varphi_{pm+1}(s) \}, \varphi_1(s)) = W_{l,0,1},$$

donde $l \in p, q$. Sin embargo, esto no necesariamente ocurre. No obstante, hay una manera de remediar esta tragedia y continuar con este tipo de razonamientos.

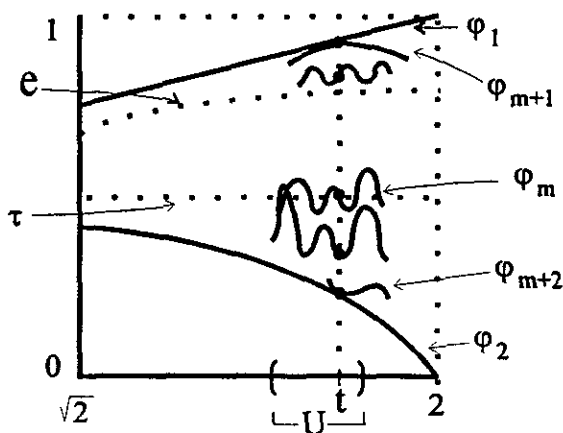


Figura 15

Paso 2. Ya que $\varphi_2(t) < \tau < \varphi_1(t)$, podemos encontrar j_1 y j_2 en $\{1, 2, \dots, m-1\}$ tales que $\varphi_{j_1}(t)$ y $\varphi_{j_2}(t)$ sean "los más cercanos posibles" a τ , es decir que $\varphi_{j_1}(t) < \tau < \varphi_{j_2}(t)$ y que

ningún otro $\varphi_k(t)$ sea elemento de $(\varphi_{j_1}(t), \tau) \cup (\tau, \varphi_{j_2}(t))$. Del Lema 3.13 se deriva que el conjunto de preimágenes del punto e_t bajo T_t es denso en $[0, 1]$. Esto quiere decir que podemos encontrar dos puntos, e_*^1 y e_*^2 , ambos en dicho conjunto, tales que $e_*^1 \in (\varphi_{j_1}(t), \tau)$ y $e_*^2 \in (\tau, \varphi_{j_2}(t))$.

Aplicando el Lema 3.15 podemos construir un par de funciones continuas g_1 y g_2 , definidas en una vecindad conexa $W \subset U$ de t , tales que:

- i) $g_1(t) = e_*^1$ y $g_2(t) = e_*^2$.
- ii) Para cada $s \in W$, se tiene que $g_j(s)$, $j = 1, 2$, es una preimagen de e_s bajo T_s .

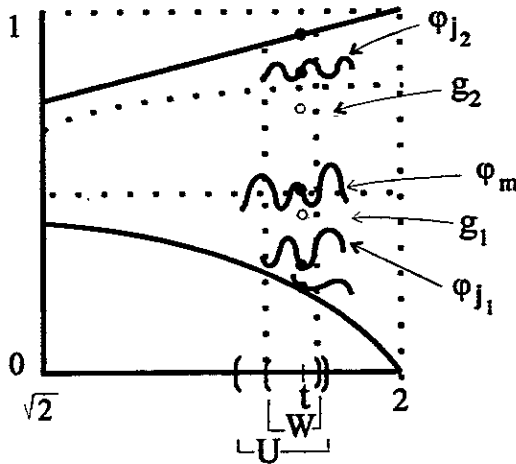


Figura 16

Esta vez, los razonamientos anteriores sí darán resultado.

Para cada $s \in W$, sean

$$\Delta_{1s} = (\varphi_2(s), g_1(s)),$$

$$\Delta_{2s} = (g_1(s), g_2(s)), \text{ y}$$

$$\Delta_{3s} = (g_2(s), \varphi_1(s)).$$

Si para algún $s \in W$ y una $j \in \{1, 2\}$ sucede que $g_j(s) = \tau$ o $g_j(s) = T_s^n(\tau)$, donde $n \in \mathbb{N}$; entonces τ es una preimagen de e_s bajo T_s , lo que significa que s es un parámetro prefijo. Como supusimos que no hay parámetros prefijos en U , esto no puede ocurrir. Esto quiere decir que ni la gráfica de g_1 ni la de g_2 pueden cruzarse con alguna gráfica de φ_n ni con la de la función constante τ . De aquí que $g_1(t) < \tau < g_2(t)$ implica que $\tau \in \Delta_{2s}$ para toda $s \in W$. Además, para toda $r = 1, \dots, m$ y toda $j = 1, 2, 3$ sucede que si $\varphi_r(t) \in \Delta_{jt}$ tenemos que $\varphi_{pm+r}(t) \in \Delta_{jt}$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $\varphi_{pm+r}(s) \in \Delta_{js}$ para todos $s \in W$ y $p \in \mathbb{N}$.

De lo anterior podemos derivar que, debido a que $\varphi_m(t) = \tau$ está en Δ_{2t} , sucede que $\varphi_{pm}(s) \in \Delta_{2s}$ para cada $s \in W$ y cada $p \in \mathbb{N}$. Cuando $r \neq 0$, ocurre, por como elegimos e_*^1 y e_*^2 , que $\varphi_r(t) < e_*^1$ o $\varphi_r(t) > e_*^2$, por lo que tenemos dos opciones:

$$\varphi_{pm+r}(s) \in \Delta_{1s} \text{ para todos } s \in W \text{ y } p \in \mathbb{N}$$

o

$$\varphi_{pm+r}(s) \in \Delta_{3s} \text{ para todos } s \in W \text{ y } p \in \mathbb{N}$$

De manera informal, podemos decir que las funciones g_1 y g_2 separan a φ_m y τ de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}$.

Paso 3. Tomemos un parámetro t_1 en W que no sea periódico ni preperiódico (para facilitar la lectura escribiremos Δ_j en vez de Δ_{jt_1} , $j = 1, 2, 3$). Por lo que acabamos de ver, cualquier intervalo $W_{p,q,r} = \langle \varphi_{pm+r}(t_1), \varphi_{qm+r}(t_1) \rangle$ está contenido en Δ_1 o

Δ_3 si r es distinto de cero, y si $r = 0$, entonces está contenido en Δ_2 .

En el primer caso, el hecho de que $\tau \in \Delta_2$ implica que $\tau \notin W_{p,q,r}$ y por lo tanto $T_{t_1}(W_{p,q,r}) = W_{p,q,r+1}$. Si $r = 0$, entonces

$$T_{t_1}(W_{p,q,0}) = \begin{cases} W_{p,q,1}, & \text{si } \tau \notin W_{p,q,0}, \\ (\min\{\varphi_{pm+1}(t_1), \varphi_{qm+1}(t_1)\}, \varphi_1(t_1)], & \text{si } \tau \in W_{p,q,0}. \end{cases}$$

De cualquier manera, para toda terna p, q, r se tiene que $T_{t_1}(W_{p,q,r})$ es de nuevo algún $W_{p',q',r'}$; y en consecuencia podemos tomar $G = (\varphi_2(t_1), \varphi_{m+2}(t_1))$, el cual tiene dos extremos distintos y por tanto es no vacío; y además, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $T_s^n(G) \subseteq \Delta_j$, para algún $j = 1, 2, 3$. Como además ni $g_1(t_1)$ ni $g_2(t_1)$ coinciden con $\varphi_1(t_1)$ o $\varphi_2(t_1)$, tenemos que cada Δ_j es distinta de I_{t_1} . Con esto hemos llegado a una contradicción al Lema 3.13, y por tanto debe existir un parámetro prefijo en U . \square

En la siguiente sección estudiaremos un tercer tipo de parámetros.

3.4 Parámetros densos

3.17 Definición. Sea s un parámetro en $[\sqrt{2}, 2]$. La órbita de τ bajo el mapeo T_s , es el conjunto $\mathcal{O}(\tau, T_s) = \{T_s^n(\tau) : n \in \mathbb{N}\} = \{\varphi_n(s) : n \in \mathbb{N}\}$.

3.18 Definición. A los elementos del conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ s \in [\sqrt{2}, 2] : \mathcal{O}(\tau, T_s) \text{ es densa en } I_s \right\}$$

los llamaremos *parámetros densos*.

3.19 Lema. Para cualquier intervalo abierto V en $(\sqrt{2}, 2)$, hay un entero positivo n tal que

$$I_{\sqrt{2}} \subseteq \varphi_n(V) \cup \varphi_{n+1}(V)$$

Demostración:

Primero notemos que el hecho de que β es creciente y α es decreciente, implica que si $s \leq s'$, entonces $I_s \subseteq I_{s'}$. Así que es suficiente con encontrar algún parámetro $s_0 \in (\sqrt{2}, 2)$ y un entero positivo n tal que $I_{s_0} \subseteq \varphi_n(V) \cup \varphi_{n+1}(V)$. Ahora, vamos a encontrar algún s_0 , un elemento $x \in I$ y un natural n que satisfagan que $[\varphi_2(s_0), x] \subseteq \varphi_{n+1}(V)$ y $[x, \varphi_1(s_0)] \subseteq \varphi_n(V)$.

Sea s_0 cualquier parámetro periódico en V , y t un parámetro prefijo. Si k es el período de s_0 y m es tal que $\varphi_m(t) = e_t$, podemos tomar un entero positivo n que cumpla que $n - 1$ es múltiplo de k y que $n \geq m$.

Así, $\tau = T_{s_0}^{n-1}(\tau)$ y entonces $T_{s_0}(\tau) = T_{s_0}^n(\tau)$, con lo cual $\varphi_1(s_0) = T_{s_0}(\tau) = T_{s_0}^n(\tau) = \varphi_n(s_0)$; es decir que $\varphi_1(s_0) \in \varphi_n(V)$. Análogamente, $\varphi_2(s_0) \in \varphi_{n+1}(V)$. Además,

$$e_t = \varphi_m(t) = \varphi_n(t) = \varphi_{n+1}(t),$$

o en otras palabras $e_t \in \varphi_n(V) \cap \varphi_{n+1}(V)$.

Lo anterior implica que

$$\{\varphi_2(s_0), e_t\} \subseteq \varphi_{n+1}(V) \quad \text{y} \quad \{e_t, \varphi_1(s_0)\} \subseteq \varphi_n(V).$$

Ya que V es conexo, cada $\varphi_j(V)$ también y por tanto

$$[\varphi_2(s_0), e_t] \subseteq \varphi_{n+1}(V) \quad \text{y} \quad [e_t, \varphi_1(s_0)] \subseteq \varphi_n(V),$$

con lo que $I_{s_0} = [\varphi_2(s_0), \varphi_1(s_0)] \subseteq \varphi_n(V) \cup \varphi_{n+1}(V)$, lo que queríamos demostrar. \square

Capítulo 4

Diferentes continuos en nuestra familia

Una de las principales motivaciones para este trabajo ha sido el problema -hasta ahora sin resolver por completo- de clasificar los continuos que son generados por elementos de la familia de las tiendas. Todavía no se sabe con certeza cuándo dos parámetros en $[1, 2]$ generan límites inversos homeomorfos y cuándo no lo hacen; ni tampoco cuántos espacios distintos podemos encontrar en esta familia. Sin embargo, en este capítulo trabajaremos con una herramienta que permite distinguir entre algunos de estos continuos.

Observemos antes que, de acuerdo a lo que desarrollamos en el capítulo 2, si un parámetro s está en el intervalo $(\sqrt[2^{n+1}]{2}, \sqrt[2^n]{2}]$ entonces $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ está formado por 2^n subcontinuos homeomorfos a $\varprojlim \{I_{s^{2^n}}, T_{s^{2^n}}\}$ y un número finito de rayos.

Esto significa que la tarea de clasificación que mencionamos en el primer párrafo se reduce a clasificar los continuos generados por los parámetros en el intervalo $(\sqrt{2}, 2]$. Es por esta razón que en este capítulo trabajaremos sólo con dicho intervalo.



4.1 Puntos extremos de un continuo.

4.1 Definición. Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es un *punto extremo* de X si para cualquier par de subcontinuos A y B de X tales que $x \in A \cap B$, sucede que $A \subset B$ o $B \subset A$.

4.2 Observación. De la definición anterior se deriva que cualquier homeomorfismo hace corresponder puntos extremos con puntos extremos. Es decir que el número de puntos extremos de un espacio es un invariante topológico. Este invariante será una herramienta que nos permitirá distinguir ciertas diferencias entre algunos límites inversos en la familia de las tiendas.

4.3 Ejemplo. Es fácil ver que el intervalo $[0, 1]$ contiene sólo dos puntos extremos, el 0 y el 1.

4.4 Ejemplo. El continuo dibujado en la Figura 17, el *Triodo simple*, no contiene puntos extremos. En el dibujo se ilustran un punto x y dos subcontinuos del Triodo que no satisfacen la condición de la Definición 4.1.

4.5 Ejemplo. El continuo de Knaster -K-, sólo contiene un punto extremo, el $(0,0)$. Cualquier otro punto x está en medio de un arco contenido en K y por lo tanto no es *punto extremo*. Vea la Figura 18.

4.6 Ejemplo. La curva del topólogo, definida en el Ejemplo 1.3 tiene 3 puntos extremos: $(1, \text{sen}(1))$, $(0, -1)$ y $(0, 1)$.

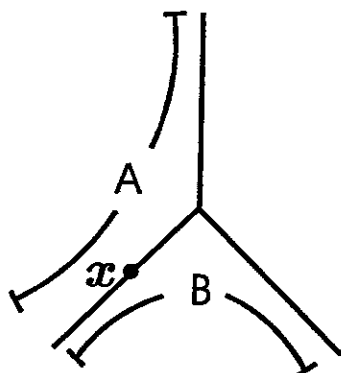


Figura 17

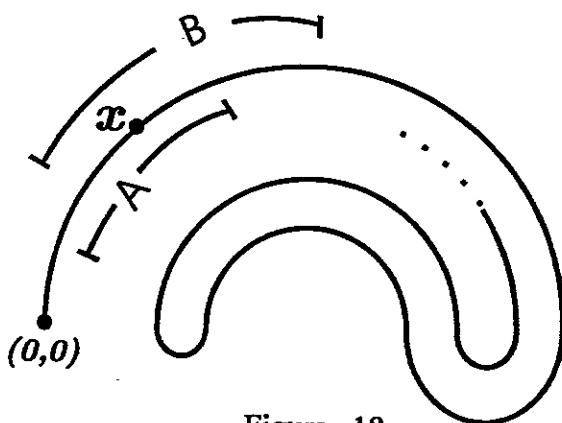


Figura 18

4.7 Ejemplo. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se dibujan en las Figuras 19-a y 19-b.

Ya que $\varprojlim f$ es homeomorfo a K , tiene sólo un punto extremo; además no es difícil ver que $\varprojlim g$ tiene dos puntos extremos: el

$(0, 0, 0, \dots)$ y el $(1, 1, 1, \dots)$. Esto implica que $\varprojlim f$ y $\varprojlim g$ son dos espacios topológicamente distintos.

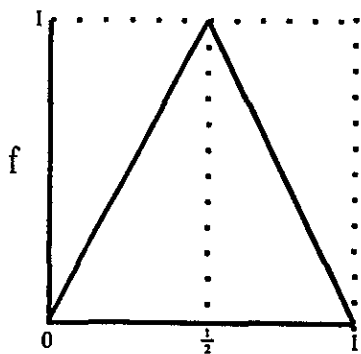


Figura 19-a

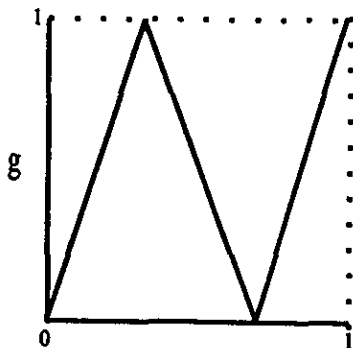


Figura 19-b

A través de la cantidad de puntos extremos, trataremos en la siguiente sección de diferenciar entre algunos límites inversos generados por parámetros periódicos o prefijos.

4.2 Puntos extremos para los parámetros periódicos y prefijos.

En lo que sigue diremos que una función es monótona si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

4.8 Definición. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua. Decimos que f tiene un número finito de *puntos de retorno* si

existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que f es monótona en cada $[t_i, t_{i+1}]$ y es creciente en $[t_i, t_{i+1}]$ si y sólo si es decreciente en $[t_{i-1}, t_i]$. El conjunto $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es el conjunto de *puntos de retorno* de f .

Notemos que si t es un punto de retorno y $t \notin \{a, b\}$, entonces existe un intervalo abierto U que contiene a t y tal que $f(U)$ es un intervalo de la forma $[f(t), c)$ ó $(d, f(t)]$.

Recordemos que para cada parámetro s , las letras τ , β y α denotan a $\frac{1}{2}$, $T_s(\frac{1}{2})$ y $T_s^2(\frac{1}{2})$, respectivamente, y además I_s denota al intervalo $[\alpha, \beta]$. Observemos entonces que la función $T_s|_{I_s}$ tiene tres puntos de retorno; éstos son α , β y τ , ver Figura 7-a.

4.9 Lema. Sean $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ lineal por pedazos, y x un punto de retorno de f . Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que x es punto de retorno de f^n .

Demostración:

Sabemos que x es punto de retorno de f . Supongamos que también es punto de retorno de f^k . Ya que f es lineal por pedazos, f^{k+1} también lo es y por tanto f^{k+1} tiene un número finito de puntos de retorno. Por la misma razón, existe un intervalo $(f^k(x) - \varepsilon, f^k(x) + \varepsilon)$ tal que f restringida a $U_1 = (f^k(x) - \varepsilon, f^k(x)]$ y f restringida a $U_2 = [f^k(x), f^k(x) + \varepsilon)$ son monótonas.

Por la hipótesis de inducción hay un número $\delta > 0$ tal que $f^k(x - \delta, x + \delta)$ es un intervalo semiabierto cuyo punto extremo es $f^k(x)$. Podemos entonces suponer que δ es lo suficientemente pequeña como para que $f^k(x - \delta, x + \delta)$ esté contenido en U_1 o

en U_2 . Esto implica que el conjunto $f^{k+1}(x - \delta, x + \delta)$ es de la forma $[f^{k+1}(x), c]$ ó $(d, f^{k+1}(x)]$. Entonces x también es punto de retorno de f^{k+1} y esto completa el argumento inductivo. \square

4.10 Lema. Supongamos que t es un punto de retorno de la función $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ y que $t \notin \{a, b\}$. Entonces existe un número positivo δ tal que si J es un intervalo, $t \in J$ y $f(J)$ contiene a $f(t)$ en su interior, se tiene que $|J| > \delta$.

Demostración:

Como t es un punto de retorno de f , existe un intervalo abierto (z, w) tal que $t \in (z, w)$ y $f(t)$ es un punto extremo de $f(z, w)$. Tomemos $\delta = \min\{t - z, w - t\}$. Probaremos que tal δ funciona. Para esto, consideremos un intervalo $J = (z_1, w_1)$, tal que $t \in J$ y $f(t)$ pertenece al interior de $f(J)$. Notemos que si $J \subset (z, w)$, entonces $f(J) \subset f(z, w)$ y así $f(t)$ es punto extremo de $f(J)$, lo cual es imposible. Por tanto, se tiene que J no está contenido en (z, w) . Así, $z_1 < z$ o $w < w_1$; y en consecuencia $|J| > \delta$. \square

4.11 Lema. Sea s un parámetro periódico en $(\sqrt{2}, 2)$, y sea n el período de s . Sea τ el punto en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ que cumple que $\pi_{nj}(\tau) = \tau$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Sea H un subcontinuo propio y no degenerado de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ que contenga a τ . Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $H_i = \pi_i(H)$. Entonces existen $\lambda \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{c_j\}_{j > \lambda} \subset \mathbb{R}$ tales que

- i) $H_{nj} = [\tau, c_j]$ para toda $j > \lambda$,
- o
- ii) $H_{nj} = [c_j, \tau]$ para toda $j > \lambda$.

Demostración:

Ya que H es un continuo, H_i es un intervalo cerrado que está contenido en el intervalo I_s . Además $\tau \in H_{nj}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como $H = \varprojlim \{H_i, T_s|_{H_{i+1}}\}$ y H es un subcontinuo propio, debe existir algún $k \in \mathbb{N}$ que cumpla que $H_k \neq I_s$. Dado que $T_s(I_s) = I_s$ y que $H_i = T_s(H_{i+1})$ para cada i , de lo anterior se deriva que si $i \geq k$ se tiene que $H_i \neq I_s$. En consecuencia existe algún $r \in \mathbb{N}$ tal que $H_{nj} \neq I_s$, si $j \geq r$.

Sabemos que τ es punto de retorno de la función T_s , y entonces -por el Lema 4.9- es también punto de retorno de T_s^n . Además para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $T_s^n(H_{n(j+1)}) = H_{nj}$ y $\tau \in H_{n(j+1)}$. Así, el Lema 4.10 implica que hay un número $\delta > 0$ tal que si $\tau \in \text{int}(H_{nj})$, entonces $|H_{n(j+1)}| > \delta$.

Supongamos que para una infinidad de índices j se tiene que $\tau \in \text{int}(H_{nj})$. Esto implica que para una infinidad de números j ,

$$|H_{n(j+1)}| > \delta. \quad (4.1)$$

El Lema 3.13 garantiza que podemos encontrar un entero positivo N para el cual, siempre que $m \geq N$ y que K es un intervalo tal que $|K| \geq \delta$, se tiene que $T_s^m(K) \supseteq I_s$. Sean l y $j \in \mathbb{N}$ tales que $nl \geq N$, $j \geq r$ y $|H_{n(j+l)}| > \delta$. Del argumento anterior se deduce que $H_{nj} = T_s^{nl}(H_{n(j+l)}) = I_s$, lo cual es una contradicción que derivó de suponer 4.1. Así, existe una $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que τ es un punto extremo de H_{nj} para cada $j \geq \lambda$.

Por otro lado, el hecho de que τ es punto de retorno de T_s^n implica que existe un intervalo abierto (z, w) que contiene a τ y tal que

$$1) T_s^m(z, w) \subset [\tau, \beta] \text{ o}$$

2) $T_s^n(z, w) \subset [\alpha, \tau]$.

Para todo $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $\tau \in H_{n(j+1)}$ y por eso $H_{n(j+1)} \cap (z, w) \neq \emptyset$. Si $H_{n(j+1)}$ es un intervalo no degenerado, lo mismo le ocurre a su intersección con (z, w) . Como $H \neq \{\underline{\tau}\}$, a partir de algún $\lambda' \in \mathbb{N}$ las proyecciones H_i deberán ser no degeneradas. Por simplicidad podemos asumir que $\lambda' = \lambda$.

Asumamos que sucede (1). Entonces para cada $j > \lambda$ tenemos que $H_{n(j+1)} \cap (a, b)$ es un intervalo distinto a un solo punto. Por eso, y porque además hay dos conjuntos de la forma $(\tau - \varepsilon, \tau]$, y $[\tau, \tau + \varepsilon)$ en cada uno de los cuales T_s^n es monótona, podemos deducir que $T_s^n(H_{n(j+1)}) \cap (\tau, \beta] \neq \emptyset$. Esto implica que $H_{nj} \cap (\tau, \beta] \neq \emptyset$ y ya que τ es un punto extremo de H_{nj} , éste debe ser de la forma $[\tau, c_j]$, para algún c_j en $(\tau, \beta]$. Si estamos en el caso (2), argumentos similares nos llevan a que $H_{nj} = [c_j, \tau]$ para toda $j > \lambda$. \square

4.12 Teorema. Sea s un parámetro periódico en $(\sqrt{2}, 2)$, y sea n el período de s . Entonces el punto $\underline{\tau} \in \varprojlim \{I_s, T_s\}$ descrito en el lema anterior es un punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$.

Demostración:

Tomemos dos subcontinuos propios A y B de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ que contengan propiamente a $\underline{\tau}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $A_i = \pi_i(A)$ y $B_i = \pi_i(B)$. Notemos que entonces $A_i = T_s(A_{i+1})$ y $B_i = T_s(B_{i+1})$. De aquí que, si algún A_i está contenido en B_i , entonces $A_j \subseteq B_j$ para cada $j = 1, 2, \dots, i$.

En la demostración del lema anterior se ve que el hecho de que suceda el caso $i)$ ó $ii)$ no depende de cómo es el continuo H . Es decir, que todos los subcontinuos de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ que contienen

a $\underline{\tau}$ se encuentran en el mismo caso. Sin perder generalidad, podemos suponer que sucede i).

Así que deben existir un entero positivo λ y dos sucesiones $\{a_j\}_{j>\lambda}$ y $\{b_j\}_{j>\lambda}$ tales que para cada $j > \lambda$, se tiene que $A_{nj} = [\tau, a_j]$ y $B_{nj} = [\tau, b_j]$, con lo cual $A_{nj} \subseteq B_{nj}$ ó $B_{nj} \subseteq A_{nj}$. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que hay un subconjunto infinito de \mathbb{N} , denotado por L tal que si $j \in L$, entonces $A_{nj} \subseteq B_{nj}$. Esto implica que $A_i \subseteq B_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto que $A = \varinjlim \{A_i, T_s |_{A_{i+1}}\} \subseteq \varinjlim \{B_i, T_s |_{B_{i+1}}\} = B$. Esto prueba que $\underline{\tau}$ es punto extremo de $\varinjlim \{I_s, T_s\}$. \square

4.13 Observación. Ya que el corrimiento \widehat{T}_s definido en el Capítulo 2 es un homeomorfismo, el teorema anterior nos permite concluir que el conjunto $M = \{\underline{\tau}, \widehat{T}_s(\underline{\tau}), \dots, \widehat{T}_s^{n-1}(\underline{\tau})\}$ está formado únicamente por puntos extremos de $\varinjlim \{I_s, T_s\}$. Notemos que $\pi_n(M) = \{\tau, T_s(\tau), \dots, T_s^{n-1}(\tau)\}$. Ya que todos los puntos de $\pi_n(M)$ son distintos, lo mismo sucede con los puntos de M . Esto significa que hemos encontrado al menos n puntos extremos distintos en $\varinjlim \{I_s, T_s\}$. En el corolario del siguiente teorema probaremos que son los únicos.

Notemos que los puntos en M son aquellos para los cuales τ aparece en una infinidad de coordenadas. Por lo tanto un punto (p_1, \dots, p_m, \dots) está en $\varinjlim \{I_s, T_s\} \setminus M$ si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ para el cual $p_j \neq \tau$ siempre que $j \geq k$.

Para el siguiente teorema recordemos que si $s \in (\sqrt{2}, 2)$, entonces $\mathcal{O}(\tau, T_s)$ denota al conjunto $\{T_s^m(\tau) : m \in \mathbb{N}\}$.

4.14 Teorema. Si $s \in (\sqrt{2}, 2)$ y $p = (p_1, \dots, p_n, \dots) \in \varprojlim \{I_s, T_s\}$ son tales que $\mathcal{O}(\tau, T_s)$ es finita y algún $p_i \notin \mathcal{O}(\tau, T_s)$, entonces p no es punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$.

Demostración:

Por las condiciones que asumimos, podemos encontrar un intervalo $J_i \subseteq I_s$ tal que $p_i \in \text{int}(J_i)$, y además $J_i \cap \mathcal{O}(\tau, T_s) = \emptyset$. Ya que $\mathcal{O}(\tau, T_s)$ es finita, existen dos enteros positivos m y k que satisfacen:

1) $[T_s^m(\tau), T_s^k(\tau)]$ es no degenerado y contiene a p_{i+1} .

2) $(T_s^m(\tau), T_s^k(\tau)) \cap \mathcal{O}(\tau, T_s) = \emptyset$

Sea $[a, b] = [T_s^m(\tau), T_s^k(\tau)]$. De 2) se deduce que T_s es monótona en $[a, b]$, y de 1), que $p_i \in T_s[a, b]$. Además $T_s\{a, b\} \subset \mathcal{O}(\tau, T_s)$ y por lo tanto ni $T_s(a)$ ni $T_s(b)$ pertenecen a J_i .

Es decir, $T_s[a, b]$ es un intervalo que sí interseca a J_i pero cuyos extremos no pertenecen a J_i . Esto implica que $T_s[a, b] \supseteq J_i$. Así, existe un subintervalo J_{i+1} de $[a, b]$ para el cual $T_s(J_{i+1}) = J_i$. Por lo que ya hemos argumentado, a y b no están en J_{i+1} . De nuevo tenemos un intervalo J_{i+1} que cumple que $p_{i+1} \in J_{i+1}$ $J_{i+1} \cap \mathcal{O}(\tau, T_s) = \emptyset$. Entonces de manera inductiva podemos encontrar, para cada $m > 0$ un intervalo J_{i+m} tal que:

*) $p_{i+m} \in J_{i+m}$

*) $J_{i+m} \cap \mathcal{O}(\tau, T_s) = \emptyset$

*) $T_s(J_{i+m}) = J_{i+m-1}$

De aquí que cada $T_s|_{J_{i+m}} : J_{i+m} \rightarrow J_{i+m-1}$ es un homeomorfismo y por tanto $\{J_{i+m}, T_s|_{J_{i+m+1}}\}_{m=0}^\infty$ es una sucesión inversa de homeomorfismos de arcos. Entonces, por la Proposición 1.16, el $\varprojlim \{J_{i+m}, T_s|_{J_{i+m+1}}\}_{m=0}^\infty$ es homeomorfo a J_i . Notemos que como $p_i \in \text{int}(J_i)$, tenemos que (p_i, p_{i+1}, \dots) está no es un punto extremo de este último límite inverso (que es un arco).

Ahora, para cada $k < i$, sea $J_k = T_s^k(J_i)$. El $\varprojlim \{J_l, T_s |_{J_{l+1}}\}_{l=i}^\infty$ y el $\varprojlim \{J_l, T_s |_{J_{l+1}}\}_{l=1}^\infty$ se relacionan a través de un homeomorfismo -la función corrimiento aplicada $i - 1$ veces- que hace corresponder a (p_i, p_{i+1}, \dots) con el punto p . Esto demuestra que p se encuentra en un arco contenido en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ y no es ninguno de sus puntos extremos.

Entonces, p divide a dicho arco en dos arcos diferentes, los cuales son subcontinuos de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$; esto significa que p no es un punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$. \square

4.15 Corolario. Si s es un parámetro periódico de período n , entonces $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ tiene exactamente n puntos extremos.

Demostración:

Volvamos a la notación utilizada en la Observación 4.13. Ya vimos que $M = \mathcal{O}(\tau, \widehat{T}_s)$ tiene n elementos, los cuales son puntos extremos. Si $p = (p_1, \dots, p_n, \dots)$ no está en M , entonces -como hicimos notar en la Observación 4.13- hay algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $p_j \neq \tau$ si $j \geq k$. Supongamos que p_{k+n} está en $\mathcal{O}(\tau, T_s)$. Entonces algún elemento de $\{p_{k+n}, p_{k+n-1}, \dots, p_k\}$ es τ , lo cual es una contradicción. Así que p_{k+n} no pertenece a $\mathcal{O}(\tau, T_s)$. Como esta órbita es finita, el teorema anterior prueba que p no es punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$. \square

En la última sección del segundo capítulo probamos que para cualquier número s en $(1, 2]$, el continuo $\varprojlim \{[0, 1], T_s\}$ es una compactación de un rayo; y que el complemento de dicho rayo es el $\varprojlim \{I_s, T_s\}$. Partiendo de aquí, no es difícil probar que los puntos extremos de $\varprojlim \{[0, 1], T_s\}$ son precisamente los puntos extremos de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$, más el punto extremo del rayo.

Así, el corolario anterior prueba que para que dos parámetros periódicos s y t generen límites inversos homeomorfos, deben tener el mismo período.

En el Capítulo 3 vimos que el conjunto de parámetros periódicos es denso en $(\sqrt{2}, 2)$. También vimos que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un número finito de parámetros de período n . Por esta razón cualquier abierto en $(\sqrt{2}, 2)$ tiene una cantidad infinita de parámetros periódicos, todos ellos de distinto período. Esto implica que los límites inversos correspondientes son todos topológicamente diferentes.

De hecho, Kailhoffer y Raines, por caminos separados, han probado que si P es el conjunto de parámetros periódicos en $(\sqrt{2}, 2)$, entonces siempre que s y $t \in P$, $s \neq t$, se tiene que $\varprojlim \{I_s, T_s\} \neq \varprojlim \{I_t, T_t\}$. En [W], [D] y [B-D] se desarrollan técnicas que en ocasiones sirven para identificar diferencias topológicas entre espacios con el mismo número de puntos extremos.

Por lo pronto, en este trabajo hemos encontrado entonces una cantidad numerable de espacios distintos en la familia de los continuos generados por las funciones tienda. Hasta ahora no se sabe si esta cantidad podría o no aumentar a una no numerable.

Uno podría preguntarse si existen otro tipo de parámetros que generen un límite inverso que tenga una cantidad finita y mayor a cero de puntos extremos. Dedicaremos lo que sigue a responder esta pregunta.

De aquí en adelante, una vez fijado un parámetro s , R denotará al conjunto $\{\alpha, \beta, \tau\}$, de puntos de retorno de T_s en I_s . Además, para cualquier punto x en $[0, 1]$, la distancia entre x y

R , denotada por $d(x, R)$, es la mínima distancia posible entre x y algún punto de R .

4.16 Teorema. Sean $s \in (\sqrt{2}, 2)$ y $p = (p_1, \dots) \in \varprojlim \{I_s, T_s\}$. Supongamos que existen $i \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que si $n \geq i$, se tiene que $d(p_n, R) > \delta$. Entonces p no es punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$.

Demostración:

Primero notemos que para cada $n \geq i$, el intervalo cerrado $[p_n - \delta, p_n + \delta]$ no toca a R , y por ello está contenido en I_s , además de que no contiene a τ . Esto implica que T_s es monótona en $[p_n - \delta, p_n + \delta]$.

Ahora, sea $J_i = [p_i - \delta, p_i + \delta]$. El intervalo $[p_{i+1}, p_{i+1} + \delta]$ es de longitud δ y τ no le pertenece, con lo cual -como vimos en la prueba del Lema 3.13- tenemos que $T_s[p_{i+1}, p_{i+1} + \delta]$ es un intervalo de longitud $s\delta$ que tiene por uno de sus extremos a p_i . Ya que $s > 1$, $s\delta > \delta$ y así $T_s[p_{i+1}, p_{i+1} + \delta]$ contiene a $[p_i - \delta, p_i]$ o a $[p_i, p_i + \delta]$. Lo mismo sucede con $[p_{i+1} - \delta, p_{i+1}]$. Como T_s es monótona en $[p_{i+1} - \delta, p_{i+1} + \delta]$, la imagen de los dos subintervalos $[p_{i+1} - \delta, p_{i+1}]$ y $[p_{i+1}, p_{i+1} + \delta]$ sólo coincide en p_i . De todo esto se deriva que $T_s[p_{i+1} - \delta, p_{i+1} + \delta] \supseteq J_i$. Por lo tanto hay un subintervalo J_{i+1} de $[p_{i+1} - \delta, p_{i+1} + \delta]$, tal que $T_s(J_{i+1}) = J_i$. Es claro que p_{i+1} debe estar en J_{i+1} .

De la misma forma en que encontramos J_{i+1} , podemos localizar, para cada $m \geq 1$, un intervalo $J_{i+m} \subset [p_{i+m} - \delta, p_{i+m} + \delta]$, que cumple que $T_s|_{J_{i+m}} : J_{i+m} \rightarrow J_{i+m-1}$ es un homeomorfismo y además p_{i+m} está en J_{i+m} .

A partir de ahora, los argumentos son exactamente los mismos que ofrecimos en la prueba del teorema anterior, desde que

encontramos la sucesión $\{J_{i+m}\}_{m=0}^{\infty}$. \square

4.17 Corolario. Sean $s \in (\sqrt{2}, 2)$ y n un entero positivo. Entonces s es un parámetro periódico y de período n si y solamente si $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ tiene exactamente n puntos extremos.

Demostración:

La parte “solamente si” ya la probamos en el corolario anterior. Nos resta argumentar la otra parte.

Supongamos entonces que $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ tiene exactamente n puntos extremos. Sea $\underline{z} = (z_1, \dots, z_i, \dots)$ uno de ellos. Ya que \widehat{T}_s^{-1} es un homeomorfismo, envía puntos extremos en puntos extremos, y de aquí que para cada $m \in \mathbb{N}$, el punto (z_m, z_{m+1}, \dots) es también extremo en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$.

Por esto, el punto \underline{z} tiene a lo más n coordenadas distintas. En consecuencia, hay un punto de I_s que aparece en una infinidad de coordenadas, de lo cual se deduce que \underline{z} es de la forma $(x, T_s^k(x), \dots, T_s(x), x, \dots)$, para algún $x \in I_s$ y $0 \leq k < n$.

Supongamos que s no es periódico. Entonces τ no es elemento del conjunto $\{x, T_s(x), \dots, T_s^k(x)\}$, y tampoco lo son α ni β , pues $T_s^{-1}\{\beta\} = \{\tau\}$ y $T_s^{-2}\{\alpha\} = \{\tau\}$. En otras palabras, $\{x, T_s(x), \dots, T_s^k(x)\}$ no interseca al conjunto R ; y por tanto existe algún número $\delta > 0$ tal que $d(T_s^l(x), R) > \delta$ para cada $l \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Así, $d(z_m, R) > \delta$ para cada $m \in \mathbb{N}$; y por el teorema anterior \underline{z} no es punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$.

Esto es una contradicción que prueba que s es un parámetro periódico. Si el período de s es $k \neq n$, entonces el $\varprojlim \{I_s, T_s\}$

tiene k puntos extremos, lo cual de nuevo contradice nuestras hipótesis. De aquí que el período de s debe ser n , con lo cual hemos concluido la demostración. \square

4.18 Teorema. Si s es un parámetro prefijo o preperiódico, entonces $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ no tiene puntos extremos.

Demostración:

Sea $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$ en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$. Por la hipótesis del teorema, $\mathcal{O}(\tau, T_s)$ es finita. Si algún $x_i \notin \mathcal{O}(\tau, T_s)$, el Teorema 4.14 prueba que \underline{x} no es punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$.

Supongamos que cada x_i está en $\mathcal{O}(\tau, T_s)$. Notemos que entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un conjunto finito. Si alguna coordenada x_k es igual a τ , entonces $\tau = x_k = T_s(x_{k+1})$. Pero x_{k+1} está en $\mathcal{O}(\tau, T_s)$ y así $x_{k+1} = T_s^m(\tau)$, para alguna $m \geq 0$. Entonces $\tau = T_s^{m+1}(\tau)$ y como $m+1 \geq 1$, se tiene que τ es periódico, lo cual no es verdad.

Entonces cada x_i es distinta de τ . Como $T_s^{-1}(\beta) = \{\tau\}$ y $T_s^{-2}(\alpha) = \{\tau\}$, también tenemos que toda x_i es distinta de β y de α . Es decir que $d(x_i, R) > 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es finita, podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que $d(x_i, R) > \delta$ para toda $i \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, \underline{x} cumple las hipótesis del Teorema 4.16, con lo cual no es punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$. \square

En la sección que viene, expondremos un resultado que habla de la cantidad de puntos extremos de los límites inversos generados por los parámetros densos. Este teorema no es suficiente para poder distinguir -en términos de los límites inversos correspondientes- entre este tipo de parámetros, pero sí nos permite

distinguirlos de los parámetros para los que la órbita de τ es finita.

4.3 Puntos extremos para los parámetros densos.

Para el siguiente lema, recordemos que si $t \in [0, 1]$ y $\delta > 0$, entonces $B_\delta(t) = \{u \in [0, 1] : |u - t| < \delta\}$.

4.19 Lema. Sea $s \in (\sqrt{2}, 2)$. Sea $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$ en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$. Supongamos que existen una sucesión creciente de enteros positivos $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ y una sucesión de números reales positivos $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ tales que:

- 1) Si $i > k$, se tiene que $T_s^{N_i - N_k}[\alpha, \alpha + \varepsilon_i] \subset B_{\frac{1}{2^{k+1}}}(T_s^{N_i - N_k}(\alpha))$
- 2) $x_{N_i} \in [\alpha, \alpha + \varepsilon_i]$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Entonces \underline{x} es un punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$.

Demostración:

Supongamos que \underline{x} no es punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$. Entonces existen dos subcontinuos A y B de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ tales que $\underline{x} \in A \cap B$, $B \setminus A \neq \emptyset$ y $A \setminus B \neq \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = \pi_n(A)$ y $B_n = \pi_n(B)$. Entonces A_n y B_n son subcontinuos de I_s y en consecuencia son intervalos cerrados. Como además $x_n \in A_n \cap B_n$, la unión de estos subintervalos es de nuevo un intervalo. Llamémosle $[y_n, z_n]$.

En la prueba del Teorema 4.12 vimos que si existe una sucesión creciente $\{m_j\}$ para la cual $A_{m_j} \subseteq B_{m_j}$, $j = 1, 2, \dots$ se tiene que $A \subseteq B$, lo cual no es cierto. Lo mismo sucede si cambiamos A_{m_j} por B_{m_j} en este argumento. Es decir, existe un entero positivo N tal que si $n \geq N$, entonces $B_n \setminus A_n \neq \emptyset$ y $A_n \setminus B_n \neq \emptyset$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $N_k \geq N$.

Debe entonces existir un número $\varepsilon > 0$ que cumpla lo que sigue:

a) Alguno de los conjuntos $B_{N_k} \setminus A_{N_k}$ o $A_{N_k} \setminus B_{N_k}$ contiene a $[y_{N_k}, y_{N_k} + \varepsilon]$ y el otro conjunto contiene a $[z_{N_k} - \varepsilon, z_{N_k}]$. Sin perder generalidad podemos suponer que

$$[y_{N_k}, y_{N_k} + \varepsilon] \subseteq B_{N_k} \setminus A_{N_k} \quad \text{y} \quad [z_{N_k} - \varepsilon, z_{N_k}] \subseteq A_{N_k} \setminus B_{N_k}.$$

Además,

$$b) \quad x_{N_k} \in \text{int} [y_{N_k} + \varepsilon, z_{N_k} - \varepsilon].$$

Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $i > k$ y $B_{\frac{1}{2^i}}(x_{N_k}) \subseteq (y_{N_k} + \varepsilon, z_{N_k} - \varepsilon)$. Por las hipótesis del lema, sabemos que

$$T_s^{N_i - N_k}[\alpha, \alpha + \varepsilon_i] \subseteq B_{\frac{1}{2^{i+1}}}(T_s^{N_i - N_k}(\alpha)).$$

Ahora, como $x_{N_i} \in [\alpha, \alpha + \varepsilon_i]$ y $T_s^{N_i - N_k}(x_{N_i}) = x_{N_k}$, tenemos que $d(T_s^{N_i - N_k}(\alpha), x_{N_k}) < \frac{1}{2^{i+1}}$.

Si $z \in B_{\frac{1}{2^{i+1}}}(T_s^{N_i - N_k}(\alpha))$, sucede que

$$d(z, x_{N_k}) < d(z, T_s^{N_i - N_k}(\alpha)) + d(T_s^{N_i - N_k}(\alpha), x_{N_k}) < \frac{2}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^i}.$$

Esto quiere decir que $B_{\frac{1}{2^{i+1}}}(T_s^{N_i - N_k}(\alpha)) \subseteq B_{\frac{1}{2^i}}(x_{N_k})$.

Entonces $T_s^{N_i - N_k}[\alpha, \alpha + \varepsilon_i] \subseteq B_{\frac{1}{2^i}}(x_{N_k}) \subseteq (y_{N_k} + \varepsilon, z_{N_k} - \varepsilon)$, lo cual significa que

$$T_s^{N_i - N_k}[\alpha, \alpha + \varepsilon_i] \cap [y_{N_k}, y_{N_k} + \varepsilon] = \emptyset \quad (4.2)$$

y también $T_s^{N_i-N_k} [\alpha, \alpha + \varepsilon_i] \cap [z_{N_k} - \varepsilon, z_{N_k}] = \emptyset$

Notemos que $T_s^{N_i-N_k} (A_{N_i}) = A_{N_k}$ y $T_s^{N_i-N_k} (B_{N_i}) = B_{N_k}$.
Entonces

$$T_s^{N_i-N_k} [y_{N_i}, z_{N_i}] = [y_{N_k}, z_{N_k}] \quad (4.3)$$

Sin pérdida de generalidad, $z_{N_i} \in A_{N_i}$. Como $x_{N_i} \in A_{N_i} \cap B_{N_i}$ tenemos que $[x_{N_i}, z_{N_i}] \subseteq A_{N_i}$. Entonces $T_s^{N_i-N_k} [x_{N_i}, z_{N_i}] \subseteq A_{N_k}$.

De aquí que, como $[y_{N_k}, y_{N_k} + \varepsilon] \subseteq B_{N_k} \setminus A_{N_k}$, sucede que $T_s^{N_i-N_k} [x_{N_i}, z_{N_i}] \cap [y_{N_k}, y_{N_k} + \varepsilon] = \emptyset$. Como $x_{N_i} \in [\alpha, \alpha + \varepsilon_i]$, se tiene por 4.2 y el argumento anterior que

$$T_s^{N_i-N_k} [\alpha, z_{N_i}] \cap [y_{N_k}, y_{N_k} + \varepsilon] = \emptyset,$$

lo cual contradice 4.3.

Esto prueba que \underline{x} es un punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$. \square

4.20 Teorema. Si $s \in (\sqrt{2}, 2)$ es un parámetro denso, entonces $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ tiene una infinidad de puntos extremos.

Demostración:

Vamos a dividir esta prueba en dos partes. Primero construiremos un punto extremo, y después veremos que hay una infinidad.

Para la primera parte, encontraremos dos sucesiones $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y un punto \underline{x} en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ que satisfagan las condiciones del lema anterior. En realidad, construiremos dos sucesiones $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ a partir de las cuales definiremos lo siguiente:

- *) $N_k = n_1 + \dots + n_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$
- *) $x_{N_k} = \lim_{j \rightarrow \infty} T_s^{n_{k+1} + \dots + n_j}(\alpha) = \lim_{j \rightarrow \infty} T^{N_j - N_k}(\alpha)$ para $k = 1, 2, \dots$

Para poder hacer esto, y aplicar el lema anterior, necesitamos pedirles a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfagan tres condiciones:

- *) Que para toda $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $\left\{ T_s^{n_{k+1} + \dots + n_j}(\alpha) \right\}_{j > k}$ sea convergente. Así podremos definir x_{N_k} .
- *) Que cada x_{N_k} sea elemento de $[\alpha, \alpha + \varepsilon_k]$.
- *) Que para cada $k \in \mathbb{N}$, y cada $i > k$, se tenga que

$$T_s^{n_{k+1} + \dots + n_i}[\alpha, \alpha + \varepsilon_i] \subseteq B_{\frac{1}{2^{i+1}}} \left(T_s^{n_{k+1} + \dots + n_i}(\alpha) \right).$$

Primero que nada, observemos que la órbita de α bajo T_s es también densa en I_s , pues $\mathcal{O}(\alpha, T_s) = \mathcal{O}(\tau, T_s) \setminus \{\tau, \beta\}$.

Ahora, sean $n_1 = 1$ y $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Podemos tomar $n_2 \in \mathbb{N}$ que cumpla que $T_s^{n_2}(\alpha)$ esté lo suficientemente cerca de α como para que $|T_s^{n_1}(\alpha) - T_s^{n_1}(T_s^{n_2}(\alpha))| < \frac{1}{4}$ (recordemos que $T_s^{n_1}$ es continua), y además $T_s^{n_2}(\alpha) \in [\alpha, \alpha + \varepsilon_1]$.

Luego, como $T_s^{n_2}$ y $T_s^{n_1+n_2}$ son funciones continuas, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$T_s^{n_2}[\alpha, \alpha + \varepsilon_2] \subseteq B_{\frac{1}{8}}(T_s^{n_2}(\alpha)) \quad \text{y}$$

$$T_s^{n_1+n_2}[\alpha, \alpha + \varepsilon_2] \subseteq B_{\frac{1}{8}}(T_s^{n_1+n_2}(\alpha)).$$

Supongamos que ya están definidas n_1, n_2, \dots, n_k y $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ que satisfacen lo siguiente para cualquier par $\{l, r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, $l < r$:

$$I) |T_s^{n_l+\dots+n_{r-1}}(\alpha) - T_s^{n_l+\dots+n_r}(\alpha)| < \frac{1}{2^r}$$

$$II) T_s^{n_l+\dots+n_r}(\alpha) \in [\alpha, \alpha + \varepsilon_l]$$

$$III) T_s^{n_l+\dots+n_r}[\alpha, \alpha + \varepsilon_r] \subseteq B_{\frac{1}{2^{r+1}}}(T_s^{n_l+\dots+n_r}(\alpha)).$$

Usando la hipótesis (II), (tomando $r = k$ y $l = 1, \dots, k$), podemos encontrar un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left. \begin{array}{l} T_s^{n_k}[\alpha, \alpha + \varepsilon] \subseteq [\alpha, \alpha + \varepsilon_{k-1}] \\ T_s^{n_{k-1}+n_k}[\alpha, \alpha + \varepsilon] \subseteq [\alpha, \alpha + \varepsilon_{k-2}] \\ \vdots \\ T_s^{n_2+\dots+n_k}[\alpha, \alpha + \varepsilon] \subseteq [\alpha, \alpha + \varepsilon_1] \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

Sea n_{k+1} tal que $T_s^{n_{k+1}}(\alpha) \in [\alpha, \alpha + \varepsilon_k) \cap [\alpha, \alpha + \varepsilon)$.

Así, puesto que $T_s^{n_{k+1}}(\alpha) \in [\alpha, \alpha + \varepsilon)$, de (4.4) deducimos que si $l \neq 1$

$$T_s^{n_l+\dots+n_k}(T_s^{n_{k+1}}(\alpha)) \in [\alpha + \varepsilon_{l-1})$$

Además, como $T_s^{n_{k+1}}(\alpha) \in [\alpha, \alpha + \varepsilon_k)$, si para cada número $l \in \{1, \dots, k-1\}$ tomamos $r = k$ tenemos por (III) que

$$T_s^{n_l+\dots+n_k}(T_s^{n_{k+1}}(\alpha)) \in B_{\frac{1}{2^{k+1}}}(T_s^{n_l+\dots+n_k}(\alpha))$$

Con esto, los conjuntos $\{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}\}$ y $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k\}$ cumplen con (I) y (II).

Ahora, ya que $T_s^{n_{k+1}}, T_s^{n_k+n_{k+1}}, \dots, T_s^{n_1+\dots+n_{k+1}}$ son continuas, podemos tomar un número real $\varepsilon_{k+1} > 0$ tal que si $l \in \{1, \dots, k+1\}$,

$$T_s^{n_l+\dots+n_{k+1}}[\alpha, \alpha + \varepsilon_{k+1}] \subseteq B_{\frac{1}{2^{k+2}}}(T_s^{n_l+\dots+n_{k+1}}(\alpha)).$$

Hemos construido de manera inductiva dos sucesiones $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ para las cuales cada pareja $\{l, r\} \subseteq \mathbb{N}$ ($l < r$) satisface las condiciones (I), (II) y (III).

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $N_k = n_1 + \dots + n_k$. Vamos a probar que la sucesión $\left\{ T_s^{n_{k+1} + \dots + n_j}(\alpha) \right\}_{j>k}$ es de Cauchy:

Sean $i, j \in \{k+1, k+2, \dots\}$, $i > j$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \left| T_s^{n_{k+1} + \dots + n_j}(\alpha) - T_s^{n_{k+1} + \dots + n_i}(\alpha) \right| \leq \\ & \leq \left| T_s^{n_{k+1} + \dots + n_j}(\alpha) - T_s^{n_{k+1} + \dots + n_{j+1}}(\alpha) \right| + \dots \\ & \dots + \left| T_s^{n_{k+1} + \dots + n_{i-1}}(\alpha) - T_s^{n_{k+1} + \dots + n_i}(\alpha) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2^{j+1}} + \dots + \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{2^j}. \end{aligned}$$

la última línea se obtiene por (I).

Esto prueba lo que queríamos, y por lo tanto podemos definir x_{N_k} como $\lim_{j \rightarrow \infty} T_s^{n_{k+1} + \dots + n_j}(\alpha)$.

Notemos que $N_k = N_{k-1} + n_k$ y además

$$T_s^{n_k}(x_{N_k}) = \lim_{j \rightarrow \infty} T_s^{n_k + \dots + n_j}(\alpha) = x_{N_{k-1}}.$$

Esto significa que hay un único punto \underline{x} en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ tal que $\pi_{N_k}(\underline{x}) = x_{N_k}$ para toda $k = 1, 2, \dots$

Luego, por (II) sabemos que $T_s^{n_{k+1} + \dots + n_j}(\alpha) \in [\alpha, \alpha + \varepsilon_k]$ para cada $j > k$, y en consecuencia $x_{N_k} \in [\alpha, \alpha + \varepsilon_k]$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Ya que $N_j - N_k = n_{k+1} + \dots + n_j$ para toda $j > k$, la propiedad (III) es exactamente la condición (1) del lema anterior.

Por lo tanto \underline{x} es un punto extremo de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$.

Pasemos a la segunda parte de la demostración; es decir, a probar que hay una infinidad de puntos extremos.

Ya que s no es un parámetro periódico, el Corolario 4.17 implica que $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ no puede tener una cantidad finita y mayor a cero de puntos extremos. Como al menos tiene uno, debe tener una infinidad. \square

Notemos que para cualquier parámetro s como $T_s|_{I_s}$ es suprayectiva, existe un punto $\hat{\alpha}$ en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ tal que $\pi_1(\hat{\alpha}) = \alpha$.

4.21 Lema. Si s es un parámetro denso, entonces $\mathcal{O}(\hat{\alpha}, T_s)$ es densa en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$.

Demostración:

Sean $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots)$ en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ y $\varepsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\delta > 0$ tal que si $|a - b| < \delta$, entonces $|T_s^l(a) - T_s^l(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $l = \{1, \dots, n\}$.

Existe $k \in \mathbb{N}$ para la cual $|T_s^k(\alpha) - z_{n+1}| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} & d\left(\widehat{T}_s^{k+n}(\hat{\alpha}), \underline{z}\right) \leq \\ & \leq \frac{|T_s^{k+n}(\alpha) - z_1|}{2} + \dots + \frac{|T_s^{k+1}(\alpha) - z_n|}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} + \dots\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n} < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

4.22 Teorema. Si s es un parámetro denso, el conjunto de puntos extremos es denso en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$.

Demostración:

Sean $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots)$ en $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ y $\varepsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$. Por el lema anterior, existe $m \geq n$ que cumple que $d(\widehat{T}_s^m(\widehat{\alpha}), \underline{z}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\delta > 0$ tal que si $|a - b| < \delta$, entonces $|T_s^l(a) - T_s^l(b)| < \frac{\varepsilon}{4}$, si $l = \{1, \dots, m\}$.

Sea \underline{x} el punto extremo encontrado en el teorema anterior. Como cada x_{N_k} está en $(\alpha, \alpha + \varepsilon_k) \subset [\alpha, \alpha + \frac{1}{k}]$ tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k} = \alpha$. De aquí que existe k tal que $|x_{N_k} - \alpha| < \delta$. Como \widehat{T}_s y \widehat{T}_s^{-1} son homeomorfismos, envían puntos extremos a puntos extremos. Podemos aplicar una iteración de alguna de estas funciones al punto \underline{x} y obtener un punto extremo \underline{w} de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ para el cual $\pi_{m+1}(\underline{w}) = x_{N_k}$. Entonces

$$\begin{aligned} & d(\widehat{T}_s^m(\widehat{\alpha}), \underline{w}) \leq \\ & \leq \frac{|T_s^m(\alpha) - T_s^m(x_{N_k})|}{2} + \dots + \frac{|T_s(\alpha) - T_s(x_{N_k})|}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^m} \right) + \frac{1}{2^m} \left(\frac{1}{2} + \dots \right) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto $d(\underline{z}, \underline{w}) < \varepsilon$. \square

Notemos ahora que los parámetros para los que el punto $\frac{1}{2}$ produce una órbita finita son los parámetros periódicos, prefijos y preperiódicos. Ya vimos en la sección anterior que estos parámetros dan lugar a un límite inverso con un número finito

de puntos extremos. De aquí que este último teorema prueba que si tomamos uno de estos parámetros y un parámetro denso, y nos fijamos en cualquier par de subcontinuos de los dos límites inversos correspondientes, no resultan ser homeomorfos.

Después de probar el Corolario 4.15 hicimos notar que en cualquier intervalo abierto en $(1, 2)$ podemos encontrar, en el espacio de los límites inversos correspondientes, una infinidad de continuos topológicamente distintos. Sin embargo, todos ellos tienen un número finito y no cero de puntos extremos.

Estos últimos Teoremas (4.18 y 4.20) prueban algo más: ya que cualquier abierto U en $(1, 2)$ contiene una infinidad de parámetros periódicos, una infinidad de parámetros prefijos y una infinidad de parámetros densos, el espacio de límites inversos correspondiente a U contiene una infinidad de continuos con un número finito y no cero de puntos extremos, una infinidad de continuos que no tienen puntos extremos, y una infinidad de continuos con una infinidad de puntos extremos.

Esto significa que dichos continuos se pueden distinguir no sólo por un número finito de puntos extremos -como los generados por los parámetros periódicos-, sino por una infinidad. Vemos así que la topología de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ es muy sensible respecto a s . Hasta ahora no se sabe si existen o no dos parámetros s y t en $[1, 2]$ para los cuales el $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ y $\varprojlim \{I_t, T_t\}$ son homeomorfos.

Sin embargo, en [B-BR-D] se demuestra que los parámetros periódicos, prefijos o preperiódicos generan límites inversos que localmente se ven iguales en casi todas partes. Más específicamente, si t es uno de estos parámetros y tomamos un punto \bar{x} en $\varprojlim \{I_t, T_t\}$ que no sea punto extremo, existe una vecindad de

\bar{x} contenida en $\varprojlim \{I_t, T_t\}$, la cual es homeomorfa al producto cartesiano del conjunto de Cantor y el intervalo $[0, 1]$.

En cambio, en el mismo artículo se prueba que existe un conjunto $K \subseteq (\sqrt{2}, 2)$ formado por parámetros densos, el cual a su vez es G_δ y tiene medida de Lebesgue $2 - \sqrt{2}$, tal que si tomamos un parámetro s en K , entonces cualquier vecindad de cualquier punto en el $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ contiene una copia de cualquier límite inverso generado por una función de la familia de las tiendas.

Nuestra investigación obviamente no abarca estos trabajos, pero quisimos mencionarlos brevemente dado que muestran qué tanto pueden cambiar estos continuos sin importar qué tan pequeña sea la diferencia entre los parámetros.

Esto podría no sorprender demasiado. Hasta ahora no hemos hablado de ninguna "continuidad" de $\varprojlim \{I_s, T_s\}$ con respecto a s . Sin embargo hay una manera de hacerlo.

Sea $\mathcal{L} = \{Y : Y \text{ es subcontinuo de } \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]\}$. En \mathcal{L} podemos definir una distancia con la cual se vuelve espacio topológico, pero para eso necesitamos un concepto. Si Y está en \mathcal{L} , entonces $N_\varepsilon(Y) = \cup \{B_\varepsilon(y) : y \in Y\}$. Ahora sí, la distancia entre dos elementos A y B de \mathcal{L} , está dada por

$$H(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 : N_\varepsilon(A) \supseteq B \text{ y } N_\varepsilon(B) \supseteq A\}.$$

Así, podemos definir la función $\mathcal{F} : [1, 2] \rightarrow \mathcal{L}$ mediante la regla $\mathcal{F}(s) = \varprojlim \{I_s, T_s\}$. No lo probaremos, pero esta función resulta ser continua. Ahora sí, con lo que trabajamos a lo largo del capítulo podemos ver que siempre es posible encontrar dos elementos de $\mathcal{F}[1, 2]$ tan cercanos como queramos, pero con características topológicas muy distintas. Con esto finalizamos nuestro trabajo.

Referencias

- [A] Armstrong, M. A., *Basic Topology*, Springer-Verlag New York Inc., 1983.
- [B-BR-D] Barge M., Bruks K., and Diamond B., *Self-similarity in Inverse Limit Spaces of the Tent Family*, Proc. Amer. Math. Soc., 124, num. 11, (1996), 3563-3570.
- [B-D] Barge M. and Diamond B., *Homeomorphisms of Inverse Limit Spaces of one-dimensional Maps*, manuscrito.
- [B-MA] Barge M. and Martin J., *End Points of Inverse Limit Spaces and Dynamics*, Continua with the Houston Problem Book, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 170 (1995), 165-182.
- [BR-D-O-T] Brucks K. M., Diamond B., Otero-Espinar M. V., and Tresser C., *Dense Orbits of Critical Points for the Tent Map*, Continuum Theory and Dynamical Systems, Contemporary Mathematics, 117 (1991), 57-61.
- [BR-M] Brucks K. and Misiurewicz M., *The Trajectory of the turning Point is Dense for Almost all Tent Maps*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 16 (1996), 1173-1183.
- [D] Debski W., *On Topological Types of the Simplest Indecomposable Continua*, Colloq. Math. XLIX (1985), 203-211.

- [I] Ingram W. T., *Periodicity and Indecomposability*, Proc. Amer. Math. Soc., 123 (1995), 1907-1916.
- [I2] Ingram W. T., *Inverse Limits on $[0, 1]$ using Tent Maps and certain other Piecewise Linear Bonding Maps*, Continua with the Houston Problem Book, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 170 (1995), 253-258.
- [K1] Kuratowski K., *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.
- [K2] Kuratowski K., *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.
- [M] Munkres J. R., *Topology, A First Course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [N] Nadler S. B., Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Marcel Dekker, New York, N. Y., 1992.
- [P] Pellicer Covarrubias P., *Solenoides y otros ejemplos relacionados con el Conjunto de Cantor*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM., 1998.
- [W] Watkins W. T., *Homeomorphic Classification of certain Inverse Limit Spaces with Open Bonding Maps*, Pacific J. Math., 103 (1982), 589-601.