



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estabilidad y estructura de la región focal
en medios inhomogéneos

298411

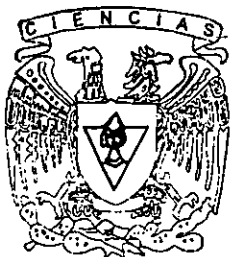
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
FÍSICO

P R E S E N T A :

Ricardo Ugo Conconi Ramos Elorduy

DIRECTOR DE TESIS: Doctor Enrique López Moreno



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"ESTABILIDAD Y ESTRUCTURA DE LA REGION FOCAL EN MEDIOS INHOMOGENEOS"

realizado por **CONCONI RAMOS-ELORDUY RICARDO UGO**

con número de cuenta **3752572-5** , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. ENRIQUE LOPEZ MORENO

Propietario

DR. MAYO VILLAGRAN MUNIZ

Propietario

DR. SALVADOR CUEVAS CARDONA

Suplente

DR. MARTHA ROSETE AGUILAR

Suplente

DR. RENELA MARIA VALLADARES MC NELIS

Consejo Departamental de Física



DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENABONE
Coordinadora de Licenciatura DEPARTAMENTO DE FÍSICA

*A Sandy, mi luz, mi guía, mi
inspiración y mi compañera*

AGRADECIMIENTOS

A Sandy por todo el apoyo y la paciencia que supo darme durante la elaboración del presente trabajo.

A mi Madre por su colaboración en mi educación, por su paciencia y dedicación desde el momento de mi nacimiento hasta el día de hoy. Por todo ese tiempo invertido en mi temprana infancia para desarrollar mis habilidades mentales. Por su guía y su ejemplo no sólo en lo académico, sino también en lo humano a través de todos estos años.

A mi Padre quien siempre fue más que un padre mi mejor amigo. Por todos esos problemas que comenzaban con "Papa va al mercado" que generaron en mí un gusto especial por las matemáticas.

A Mariangela y Ernesto quienes, a pesar de ser más pequeños que yo, me han servido como ejemplo y como guía para jamás darme por vencido ante ningún reto por grande que éste sea.

A mis abuelos que se sentirían muy orgullosos si vivieran, mi abuelo materno siempre quiso tener un físico en la familia.

A Silvia, José Antonio, Abby y Paola quienes me han adoptado como un miembro más de su familia y de los cuales he recibido un trato como el que se le ofrece sólo a un hijo, a un nieto ó a un hermano.

A Enrique sin cuya guía, esfuerzo, dedicación y valiosa colaboración a través de todos estos años este trabajo no hubiera sido posible, en quién además he encontrado un amigo.

A todos mis sinodales por el tiempo que le dedicaron a la revisión del presente trabajo.

A todos mis profesores de licenciatura por la paciencia que tuvieron para contestar todas mis dudas.

Introducción

Capítulo I.- Óptica Geométrica.

1.1 La formulación de Lagrange y Hamilton de la Óptica

1.2 La ecuación Eikonal.

1.3 Teoría de aberraciones de tercer orden

Capítulo II.- Clasificación de las Catástrofes.

Capítulo III.- Ejemplos de catástrofes en sistemas ópticos.

3.1 Dioptra plano.

3.2 Casquete esférico.

3.3 Ventana de índice inhomogéneo.

3.4 Trazado de rayos en medios inhomogéneos.

Introducción

En el estudio de la formación de imágenes por un sistema óptico es importante determinar sus aberraciones, lo cual se realiza mediante un desarrollo en series de Taylor que es conveniente cortar en algún orden. La determinación de este orden se realiza usualmente en forma empírica, incluyendo términos hasta tercer orden.

La teoría de Catástrofes se ocupa del problema de la determinación del orden hasta el cual se obtiene todo el comportamiento cualitativo de un sistema descrito por una función analítica. Con estas técnicas podemos eliminar en la serie de Taylor los términos que no aportan nada al comportamiento general de la función que describe al sistema. De esta manera, la Teoría de la Catástrofes nos permite determinar los parámetros que son relevantes en el comportamiento del sistema y los valores para los cuales se presentan cambios radicales en su conducta.

Las regiones de enfocamiento de la luz representan lugares geométricos en los cuales la longitud de camino óptico, desde la fuente hasta el punto considerado, tiene un punto crítico degenerado, es decir, donde la derivada se anula a órdenes superiores al primero. Si la imagen es perfecta, la longitud de camino óptico es una constante al variar el camino del rayo y el punto imagen es de degeneración infinita, esto quiere decir que en su serie de Taylor, salvo el término constante, todos los órdenes de aberración son nulos. En un caso más general, en presencia de aberraciones, la función camino óptico tendrá contribuciones en su desarrollo de Taylor para distintos órdenes y mediante la Teoría de Catástrofes podríamos determinar hasta que orden calcular las aberraciones, incluyendo todos sus aspectos cualitativos, obteniendo así información acerca de la estructura de la cáustica. Para mostrar la utilidad del análisis de las aberraciones de la imagen de un sistema con la incorporación de la teoría de catástrofes, se presentan tres ejemplos: el dioptro plano, el casquete esférico y una ventana con índice inhomogéneo.

Es importante notar que podemos recuperar algunos resultados clásicos usando los métodos de la teoría de Catástrofes; por ejemplo, obtendremos la ecuación de Gauss para las imágenes paraxiales y los puntos aplanáticos en el problema de la refracción en la esfera. Después se exploran problemas de mayor dificultad donde se incluye un índice de refracción inhomogéneo, para determinar que no sería suficiente un cálculo de aberraciones a tercer orden, y establecemos la estructura de la región de enfocamiento, lo cual es comprobado por un cálculo analítico exacto mediante las técnicas de Hamilton. En relación con este último punto, incluir la formulación Hamiltoniana nos dará un método de trazo de rayos en medios inhomogéneos el cual representa una de las contribuciones a esta tesis.

El método aquí desarrollado puede ser usado como complemento a la óptica Hamiltoniana, determinando los parámetros relevantes, prediciendo el comportamiento cualitativo de la imagen ante cambios en estos parámetros y dividiendo el espacio de parámetros en zonas de comportamientos cualitativos distintos. Nos permite predecir el orden más apropiado para cortar la serie de Taylor de las aberraciones para obtener todo el comportamiento cualitativo de la imagen y también aquellos valores de los parámetros a partir de los cuales existe un cambio en su forma.

En el primer capítulo se revisa la formulación de Hamilton y Lagrange de la óptica, la conexión que existe entre el tratamiento de la luz como una onda y la ecuación de los rayos la cual se obtiene al suponer que la longitud de onda es muy pequeña, también se exponen las aberraciones de Seidel que son el resultado de cortar la serie de Taylor a tercer orden. En el segundo capítulo se describen brevemente los principales resultados de la Teoría de las Catástrofes así como una clasificación de estas para los casos en que existen simetrías. En el tercer capítulo aplicamos lo expuesto anteriormente a 3 casos el dioptro plano, el casquete esférico y una ventana de índice inhomogéneo. Los primeros dos son ejemplos bien conocidos que nos sirven para confirmar que los resultados obtenidos usando Catástrofes son congruentes. El tercer ejemplo nos permite vislumbrar todo el potencial de esta herramienta, pudiendo predecir resultados en un sistema bastante complejo en forma muy simple.

Quedan todavía problemas sin resolver como por ejemplo si el hecho de la invariancia del sistema de la ventana inhomogénea se debe al índice de refracción propuesto o no, que características debe de cumplir el índice de refracción para que se mantenga dicha invariancia, etc.

Capítulo I.- Óptica Geométrica.

El campo electromagnético asociado con la luz se caracteriza por oscilaciones muy rápidas (10^{14} Hz) ó lo que es lo mismo por longitudes de onda muy pequeñas (10^{-5} cm). Si esta longitud de onda es despreciable comparada con las dimensiones del sistema óptico, de modo que efectos tales como la difracción ó interferencia no pueden detectarse, entonces la Óptica Geométrica resulta una buena aproximación. En la Óptica Geométrica es posible modelar el comportamiento de la luz mediante leyes formuladas en el lenguaje de la geometría.

La descripción de la luz en la óptica geométrica se lleva a cabo por medio del concepto de rayos luminosos, los cuales se asocian con las direcciones de propagación de la energía cuando la longitud de onda es despreciable. Así, las trayectorias que unen un punto inicial sobre una fuente luminosa con otro punto final son los rayos.

También, como podremos ver más adelante, en este mismo límite de pequeñas longitudes de onda es posible definir el concepto de frente de onda geométrico el cual resulta de las soluciones de la ecuación de onda en este límite y considerando aquellas superficies para las cuales la fase es una constante.

Así, en las dos secciones siguientes obtendremos las leyes que conforman la Óptica Geométrica a partir de dos caminos muy distintos. En el primero utilizaremos el principio de Fermat como postulado, mientras que para el segundo partiremos de la ecuación de onda y tomaremos el límite cuando la longitud de onda λ tiende a cero. El Principio de Fermat es un principio variacional el cual describe la luz por medio de curvas extremales las cuales parten de una fuente y llegan a un punto final siguiendo una trayectoria la cual se asocia con un rayo. Sin embargo, existe la posibilidad de que dicha trayectoria no sea única, dando lugar a un tema de mayor riqueza que es el de la clasificación de las cáusticas, el cual desarrollaremos en un capítulo central más tarde. Para el segundo caso, nuestro interés será el de mostrar a la luz como frentes de onda que avanzan en el espacio a partir de un frente de onda inicial.

1.1. La formulación de Lagrange y Hamilton de la Óptica.

El principio de Fermat.

Consideremos una trayectoria sobre una curva cualquiera C en el espacio definida paramétricamente por

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad (1.1.1)$$

donde u es un parámetro cualquiera. La longitud de camino óptico desde un punto inicial P_i hasta un punto final P_f sobre esta curva se define como:

$$L = \int_{P_i}^{P_f} n(x, y, z) ds \quad (1.1.2)$$

donde $n(x, y, z)$ es la función índice de refracción y la integral esta evaluada a lo largo de la curva C .

De las muchas trayectorias que conectan P_i con P_f , para que la curva C sea la seguida por un rayo real es necesario satisfacer el principio de Fermat, el cual establece que sólo serán seguidas las trayectorias para las cuales la longitud de camino óptico sea un extremo, esto es,

$$\delta \int_{P_i}^{P_f} n(x, y, z) ds = 0, \quad (1.1.3)$$

donde la δ representa la variación sobre una trayectoria próxima.

La Lagrangiana óptica

Ahora definiremos las funciones de Lagrange y Hamilton de un sistema óptico.

En coordenadas cartesianas el elemento de longitud de arco ds se expresa:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad (1.1.4)$$

en términos de u , el parámetro que describe el avance sobre la curva C desde P_i hasta P_f , sustituyendo la ecuación (1.1.4) en la ecuación (1.1.3), obtenemos

$$\delta \int_{u_i}^{u_f} n(x, y, z) \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du = 0, \quad (1.1.5)$$

donde los valores del parámetro $u=u_i$ y $u=u_f$, corresponden a los puntos P_i inicial y P_f final de la curva.

Las condiciones necesarias para que la curva C satisfaga la ecuación (1.1.5) las podemos encontrar por medio de las técnicas del cálculo variacional¹; sin pérdida de generalidad consideremos el caso unidimensional para las variaciones sobre la coordenada x . Al efectuar dicha variación obtenemos:

$$\int_{u_i}^{u_f} \left[\sum \frac{\partial L}{\partial x'} \delta x' + \sum \frac{\partial L}{\partial x} \delta x \right] du = 0 \quad (1.1.6)$$

donde L es la función en el integrando de (1.1.5), la cual juega el papel de la lagrangiana mecánica en óptica. La \sum indica la suma de términos similares y usamos la notación

$$x' \equiv \frac{dx}{du}; \quad \delta x' \equiv \frac{d}{du} \delta x.$$

¹ Para un análisis más profundo ver Born Max and Wolf Emil, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 6th ed. 719-720.

Integrando por partes la ecuación (1.1.6) obtenemos :

$$\left[\sum \frac{\partial L}{\partial x'} \delta x \right]_{u_i}^{u_f} - \int_{u_i}^{u_f} \sum \left(\frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \delta x du = 0. \quad (1.1.7)$$

Primero consideraremos una clase especial de variaciones en las cuales la variación δx sobre los puntos extremos P_i y P_f es cero, el primer sumando de la ecuación (1.1.7) es nulo, ya que al evaluarlo en u_i y u_f δx es cero. Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.1.7) obtenemos :

$$\int_{u_i}^{u_f} \sum \left(\frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \delta x du = 0. \quad (1.1.8)$$

La única manera de anular la ecuación (1.1.8) para cambios arbitrarios en δx es que el integrando sea cero. Al pedir esta condición se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange para la componente x :

$$\frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (1.1.9 a)$$

De forma totalmente análoga podemos obtener las ecuaciones para las componentes y , z obteniendo :

$$\frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad (1.1.9 b)$$

$$\frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0. \quad (1.1.9 c)$$

sustituyendo el valor de L en las ecuaciones (1.1.9) encontramos

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{nx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right\} - \frac{\partial n}{\partial x} \left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) = 0 \quad (1.1.10 a)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{ny'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right\} - \frac{\partial n}{\partial x} \left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) = 0 \quad (1.1.10 b)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{nz'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right\} - \frac{\partial n}{\partial x} \left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) = 0. \quad (1.1.10 c)$$

Donde las cantidades entre llaves representan respectivamente las componentes del vector momento óptico $\bar{P} \equiv (p, q, m)$:

$$p = \frac{\partial L}{\partial x'} \quad q = \frac{\partial L}{\partial y'} \quad m = \frac{\partial L}{\partial z'} \quad (1.1.11)$$

De las ecuaciones (1.1.10) podemos deducir que el valor absoluto del vector momento óptico se encuentra acotado ya que :

$$p^2 + q^2 + m^2 = n^2 \quad (1.1.12)$$

Hasta este punto aún no hemos seleccionado el parámetro mediante el cual vamos a recorrer la curva, como esta elección es arbitraria elijamos $u=z$, ya que cuando existe un eje de simetría (eje óptico) sobre el cual se tiene una dirección de propagación general de los rayos, esta elección resulta conveniente. Con esta elección del parámetro, la lagrangiana óptica queda :

$$L = n(x, y, z) \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dz}\right)^2} = n(x, y, z) \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \quad (1.1.13)$$

De acuerdo a la regla usual, definimos la hamiltoniana óptica correspondiente a la L en (1.1.13), según la transformación de Legendre

$$H = px' + qy' - L \quad (1.1.14)$$

donde ahora las nuevas variables que describen al sistema son p, q, x, y mientras que z es el parámetro.

Las ecuaciones canónicas las podemos obtener tomando la diferencial de H en (1.1.14), como $H(p, q, x, y, z)$ depende de p, q, x, y, z tomando las derivadas parciales de H con respecto a p, q, z y usando la expresión (1.1.13) obtenemos:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad y' = \frac{\partial H}{\partial q} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial L}{\partial z} \quad (1.1.15a)$$

y usando las expresiones (1.1.13), (1.1.11) y (1.1.9) en las derivadas parciales de H con respecto a x, y obtenemos :

$$\frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dz} p - \frac{\partial L}{\partial x} = p' - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow p' = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -p' \Rightarrow p' = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dz} q - \frac{\partial L}{\partial y} = q' - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow q' = \frac{\partial L}{\partial y}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial L}{\partial y} = -q' \Rightarrow q' = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (1.1.15b)$$

De lo anterior se sigue que, para este caso, tenemos 5 ecuaciones canónicas en lugar de 6 ya que debido a la restricción de que los rayos se propaguen en la dirección z la dependencia de H en m es nula, anulando una de las ecuaciones, mientras que la dependencia de H en z se convierte en la tercera ecuación en (1.1.15a).

Si en la ecuación (1.1.14) sustituimos las ecuaciones (1.1.13) y los valores para los momentos de las ecuaciones (1.1.10) obtenemos :

$$H = \frac{nx'^2}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} + \frac{ny'^2}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} - n\sqrt{1+x'^2+y'^2} = -\frac{n}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{n^2((1+x'^2+y'^2)-(x'^2+y'^2))}{1+x'^2+y'^2}} = -\sqrt{n^2-p^2-q^2} \quad (1.1.16)$$

El Hamiltoniano Óptico

Consideremos ahora una clase más general de variaciones de la longitud de camino óptico, en las cuales varían infinitesimalmente las posiciones de los puntos inicial y final. Supongamos además que las trayectorias que unen los puntos inicial y final pertenecen a rayos reales, como ya se había demostrado para rayos reales la integral del segundo sumando de la ecuación (1.1.7) es cero, dando como resultado:

$$\delta V = \left[\sum \frac{\partial L}{\partial x'} \delta x \right]_{u_i}^{u_f}$$

$$= (p_f \delta x_f + q_f \delta y_f + m_f \delta z_f) - (p_i \delta x_i + q_i \delta y_i + m_i \delta z_i) \quad (1.1.17)$$

Donde designamos a la longitud de camino óptico por la letra V para distinguir este tipo de variaciones de las anteriores.

De la ecuación (1.1.17) es claro que si consideramos que las coordenadas de un punto cualquiera están dadas por x, y, z , y sus momentos p, q, m podemos concluir que :

$$p = \frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad q = \frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad m = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.1.18)$$

Como podemos observar V es función de las coordenadas de los puntos inicial y final, por lo que también se le conoce como función característica de punto. Además es importante resaltar que V está determinada por el medio, definido por la función índice de refracción $n(\mathbf{r})$, es decir, conociendo la función $V(x_i, y_i, z_i, x_f, y_f, z_f)$, podemos calcular la correspondencia que el medio óptico establece entre los rayos inicial y final evaluando solamente sus derivadas.

De aquí se desprende que siempre que conozcamos los puntos iniciales y finales y además como varia n con la posición, podremos determinar, a partir de V , la dirección con la que salió el rayo y la dirección que tiene al llegar al punto final. Sin embargo existen otros tipos de problemas, en los que las cantidades conocidas son otras, para cada combinación de cantidades conocidas Hamilton obtuvo una función distinta para la longitud de camino óptico, a estas se les conoce como funciones características. Estas funciones características se obtienen a partir de V por medio de una transformación de Legendre.

A continuación se obtienen cada una de estas funciones características, indicando cuales son las cantidades conocidas y como obtener las que faltan por medio de simples derivadas.

Funciones Características Mezcladas

Si conocemos la posición del punto inicial y la dirección del rayo en el punto final ó viceversa, las funciones a usar serán las características mezcladas. Se les llama así debido a que tengo una mezcla de posiciones con direcciones conocidas.

Para obtenerlas es suficiente aplicar a V (función característica de punto) las siguientes transformaciones de Legendre :

$$W_1 = V + \sum p_i x_i \quad (1.1.19a)$$

$$W_2 = V - \sum p_f x_f \quad (1.1.19b)$$

Donde W_1 representa la función característica mezclada cuando conocemos la dirección inicial y la posición final y W_2 cuando conocemos la posición inicial y la dirección final.

Si tomamos la diferencial de W y sustituimos el valor de δV de la ecuación (1.1.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= p_f \delta x_f + q_f \delta y_f + m_f \delta z_f - (p_i \delta x_i + q_i \delta y_i + m_i \delta z_i) + \\ &\quad + (p_i \delta x_i + q_i \delta y_i + m_i \delta z_i + x_i \delta p_i + y_i \delta q_i + z_i \delta m_i) \\ &= (p_f \delta x_f + q_f \delta y_f + m_f \delta z_f) + (x_i \delta p_i + y_i \delta q_i + z_i \delta m_i). \end{aligned} \quad (1.1.20a)$$

$$\begin{aligned} \delta W_2 &= p_f \delta x_f + q_f \delta y_f + m_f \delta z_f - (p_i \delta x_i + q_i \delta y_i + m_i \delta z_i) \\ &\quad - (p_f \delta x_f + q_f \delta y_f + m_f \delta z_f + x_f \delta p_f + y_f \delta q_f + z_f \delta m_f) \\ &= -(p_i \delta x_i + q_i \delta y_i + m_i \delta z_i) - (x_f \delta p_f + y_f \delta q_f + z_f \delta m_f). \end{aligned} \quad (1.1.20b)$$

Estas ecuaciones implican que las relaciones hamiltonianas que guarda W con el resto de las variables sean las siguientes

$$\begin{aligned} p_f &= \frac{\partial W_1}{\partial x_f} ; & q_f &= \frac{\partial W_1}{\partial y_f} ; & m_f &= \frac{\partial W_1}{\partial z_f} \\ x_i &= \frac{\partial W_1}{\partial p_i} ; & y_i &= \frac{\partial W_1}{\partial q_i} ; & z_i &= \frac{\partial W_1}{\partial m_i} \end{aligned} \quad (1.1.21a)$$

$$\begin{aligned}
p_i &= -\frac{\partial W_2}{\partial x_i} ; & q_i &= -\frac{\partial W_2}{\partial y_i} ; & m_i &= -\frac{\partial W_2}{\partial z_i} \\
x_f &= -\frac{\partial W_2}{\partial p_f} ; & y_f &= -\frac{\partial W_2}{\partial q_f} ; & z_f &= -\frac{\partial W_2}{\partial m_f} .
\end{aligned}
\tag{1.1.21b}$$

Función característica angular

Si las cantidades conocidas resultan ser la dirección inicial y la dirección final, la función característica que se usa recibe el nombre de función característica angular. Su nombre proviene de el hecho de que las únicas cantidades conocidas resultan ser la dirección o el ángulo de salida y la dirección ó el ángulo de llegada del rayo.

Para obtenerla es necesario aplicar a V la siguiente transformación de Legendre

$$T = V + \sum p_i x_i - \sum p_f x_f . \tag{1.1.22}$$

Si tomamos nuevamente la diferencial de T y sustituimos el valor de δV de la ecuación (1.1.17) obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta T &= p_f \delta x_f + q_f \delta y_f + m_f \delta z_f - (p_i \delta x_i + q_i \delta y_i + m_i \delta z_i) + \\
&\quad + (p_i \delta x_i + q_i \delta y_i + m_i \delta z_i + x_i \delta p_i + y_i \delta q_i + z_i \delta m_i) - \\
&\quad - (p_f \delta x_f + q_f \delta y_f + m_f \delta z_f + x_f \delta p_f + y_f \delta q_f + z_f \delta m_f) \\
&= (x_i \delta p_i + y_i \delta q_i + z_i \delta m_i) - (x_f \delta p_f + y_f \delta q_f + z_f \delta m_f) .
\end{aligned}
\tag{1.1.23}$$

Por lo tanto las relaciones hamiltonianas para T quedan como sigue

$$\begin{aligned}
x_i &= \frac{\partial T}{\partial p_i} ; & y_i &= \frac{\partial T}{\partial q_i} ; & z_i &= \frac{\partial T}{\partial m_i} \\
x_f &= -\frac{\partial T}{\partial p_f} ; & y_f &= -\frac{\partial T}{\partial q_f} ; & z_f &= -\frac{\partial T}{\partial m_f} .
\end{aligned}
\tag{1.1.24}$$

Simplificación de las funciones características en medios homogéneos

Como es posible observar, las funciones características dependen en general de 6 variables, las cuales son normalmente una combinación de posiciones ó direcciones iniciales con posiciones ó direcciones finales. Sin embargo, si en alguno de los puntos de interés, ya sea el inicial ó el final, el medio es homogéneo es posible eliminar la dependencia en una de las variables usando el hecho de que el momento esta acotado.

Desde luego es requisito indispensable que además la descripción del sistema esté hecha con base en las direcciones iniciales, finales ó ambas, ya que de lo contrario sería imposible aplicar esta constricción. En el caso en que la descripción se realice por medio de la característica angular, las variables se reducen a 4, mientras que para las funciones características mezcladas solo es posible eliminar a una de las variables.

En el caso de una lente generalmente el medio inicial y el final cumplen con la homogeneidad. Esto simplifica enormemente algunas de las funciones características. A continuación se deducen las funciones características de Hamilton que cumplen con este caso.

Como el medio es homogéneo, si derivamos la ecuación (1.1.12) y después despejamos δm en función de δp y δq obtenemos

$$2p\delta p + 2q\delta q + 2m\delta m = 0$$

$$\delta m = -\frac{p\delta p + q\delta q}{m} \quad (1.1.25)$$

Como esta ecuación es válida para todo punto, eliminando δm_i ó δm_f de las ecuaciones (1.1.20a, 1.1.20b, 1.1.23) según corresponda, obtenemos

$$= (p_f\delta x_f + q_f\delta y_f + m_f\delta z_f) + \left(x_i\delta p_i + y_i\delta q_i - z_i \frac{p_i\delta p_i + q_i\delta q_i}{m_i} \right)$$

$$= (p_f\delta x_f + q_f\delta y_f + m_f\delta z_f) + \left(x_i - \frac{z_i p_i}{m_i} \right) \delta p_i + \left(y_i - \frac{z_i q_i}{m_i} \right) \delta q_i \quad (1.1.26a)$$

$$= -(p_i\delta x_i + q_i\delta y_i + m_i\delta z_i) - \left(x_f\delta p_f + y_f\delta q_f - z_f \frac{p_f\delta p_f + q_f\delta q_f}{m_f} \right)$$

$$= -(p_i\delta x_i + q_i\delta y_i + m_i\delta z_i) - \left(x_f - \frac{z_f p_f}{m_f} \right) \delta p_f - \left(y_f - \frac{z_f q_f}{m_f} \right) \delta q_f \quad (1.1.26b)$$

$$= \left(x_i\delta p_i + y_i\delta q_i - z_i \frac{p_i\delta p_i + q_i\delta q_i}{m_i} \right) - \left(x_f\delta p_f + y_f\delta q_f - z_f \frac{p_f\delta p_f + q_f\delta q_f}{m_f} \right)$$

$$= \left(x_i - \frac{z_i p_i}{m_i} \right) \delta p_i + \left(y_i - \frac{z_i q_i}{m_i} \right) \delta q_i - \left(x_f - \frac{z_f p_f}{m_f} \right) \delta p_f - \left(y_f - \frac{z_f q_f}{m_f} \right) \delta q_f. \quad (1.26c)$$

Por tanto las relaciones hamiltonianas para las funciones características mezcladas (1.1.26a, 1.1.26b) y la función característica angular (1.1.26c) quedan como sigue

$$p_f = \frac{\partial W_1}{\partial x_f} ; \quad q_f = \frac{\partial W_1}{\partial y_f} ; \quad m_f = \frac{\partial W_1}{\partial z_f}$$

$$x_i - \frac{z_i p_i}{m_i} = \frac{\partial W_1}{\partial p_i} ; \quad y_i - \frac{z_i q_i}{m_i} = \frac{\partial W_1}{\partial q_i} \quad (1.1.27a)$$

$$p_i = -\frac{\partial W_2}{\partial x_i} ; \quad q_i = -\frac{\partial W_2}{\partial y_i} ; \quad m_i = -\frac{\partial W_2}{\partial z_i}$$

$$x_f - \frac{z_f p_f}{m_f} = -\frac{\partial W_2}{\partial p_f} ; y_f - \frac{z_f q_f}{m_f} = -\frac{\partial W_2}{\partial q_f} \quad (1.1.27b)$$

$$x_i - \frac{z_i p_i}{m_i} = \frac{\partial T}{\partial p_i} ; y_i - \frac{z_i q_i}{m_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$x_f - \frac{z_f p_f}{m_f} = -\frac{\partial T}{\partial p_f} ; y_f - \frac{z_f q_f}{m_f} = -\frac{\partial T}{\partial q_f} \quad (1.1.27c)$$

En donde las características mezcladas dependen de 5 variables, mientras que la característica angular depende solo de 4.

1.2. La ecuación Eikonal.

La descripción clásica del comportamiento de la luz se encuentra en la Teoría de Maxwell del Campo Electromagnético. Las ecuaciones del electromagnetismo permiten derivar, en un medio óptico, una ecuación de onda la cual describe la propagación de la luz en dicho medio.

Si consideramos ondas monocromáticas en un medio donde no existan densidades de corriente ni de carga, las ecuaciones de Maxwell quedan como sigue

$$\nabla \times \mu \mathbf{B} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (1.2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 . \quad (1.2.1b)$$

Si tomamos una de las ecuaciones (1.2.1a) y le aplicamos el operador rotacional de ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla \times \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ -\nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Si en esta ecuación sustituimos el valor para el rotacional de B que se encuentra en la ecuación (1.2.1a) se tiene

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ \nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

como la velocidad de la luz en un medio es $v = \frac{c}{n}$ el índice de refracción resulta $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ y así podemos reescribir la ecuación (1.2.3) como sigue

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.2.4)$$

Es posible demostrar que la ecuación (1.2.4) se satisface también para el campo magnético \mathbf{B} .

Denotemos a una componente cualquiera del campo por χ . Observemos además que la ecuación (1.2.4) tiene como una de sus soluciones una onda armónica en el tiempo de la forma

$$\chi = \Psi e^{-i\omega t}. \quad (1.2.5)$$

Si derivamos la ecuación (1.2.5) dos veces con respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} &= -i\omega \Psi e^{-i\omega t} = -i\omega \chi, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= -i\omega (-i\omega \Psi e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \chi. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (1.2.4)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= \nabla^2 \chi - \frac{1}{v^2} (-\omega^2 \chi) = \nabla^2 \chi + \frac{\omega^2}{v^2} \chi = \\ \nabla^2 (\Psi e^{-i\omega t}) + \frac{\omega^2}{v^2} (\Psi e^{-i\omega t}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Como $\nabla^2 (\Psi e^{-i\omega t}) = e^{-i\omega t} \nabla^2 \Psi$, entonces es posible reescribir la ecuación (1.2.7)

$$\nabla^2 \Psi + \frac{\omega^2}{v^2} \Psi = 0, \quad (1.2.8)$$

donde hemos eliminado el factor común dependiente del tiempo. Esta última se conoce como ecuación de Helmholtz.

Si ahora queremos expresar este resultado en términos de k_0 y n , sólo debemos recordar que

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}; \quad n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi\nu}{c} n = k_0 n \quad (1.2.9)$$

Por lo tanto la ecuación (1.2.8) queda como sigue

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 n^2 \psi = 0 \quad (1.2.10)$$

donde ψ representa una componente del campo electromagnético, n es el índice de refracción del medio y $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ representa al número de onda en el vacío, que a su vez es función de ω la frecuencia, λ_0 la longitud de onda, y c la velocidad de la luz en el vacío.

Cuando el medio es homogéneo, la ecuación (1.2.10) tiene soluciones de la forma e^{ikz} , donde z representa la dirección de propagación. Entonces cuando el medio es inhomogéneo podríamos proponer una solución exponencial de la ecuación (1.2.10), que represente las rápidas variaciones del campo electromagnético, y que tenga la siguiente forma :

$$\psi = \psi_0 e^{ik_0 S(x,y,z)} \quad (1.2.11)$$

donde suponemos que ψ_0 y S son funciones reales que dependen de la posición, varían lentamente con esta, y además son independientes de k_0 . Bajo estos supuestos si sustituimos el valor de ψ de la ecuación (1.2.12) en la ecuación (1.2.11) obtenemos

$$k_0^2 [n^2 - (\nabla S)^2] \psi_0 + ik_0 (2\nabla S \cdot \nabla \psi_0 + \psi_0 \nabla^2 S) + \nabla^2 \psi_0 = 0 \quad (1.2.12)$$

Como ψ_0 y S son reales, si resolvemos la parte real de la ecuación (1.2.13) obtenemos

$$(\nabla S)^2 = n^2 + \frac{1}{k_0^2 \psi_0} \nabla^2 \psi_0 \quad (1.2.13)$$

Si ahora consideramos que la longitud de onda de la luz es despreciable $\lambda_0 \rightarrow 0$, lo cual implica $k_0 \rightarrow \infty$, como además S y ψ_0 no dependen de k_0 la ecuación (1.2.14) queda como sigue

$$(\nabla S)^2 = n^2 \quad (1.2.14)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación eikonal, donde la variable S es llamada la eikonal.

1.3 Teoría de aberraciones de tercer orden

En el proceso de la formación de imágenes, dentro de la aproximación paraxial, todos los rayos de luz que salen de un punto objeto deben de intersectarse en un solo punto en la imagen, formando así una imagen perfecta ó ideal. Generalmente los rayos que forman ángulos grandes con el eje z ó se encuentran muy alejados de este, no se intersectan en un solo punto, al defecto producido en la imagen debido a esto, se conoce como aberración.

Las aberraciones de Seidel ó de tercer orden, clasifican a este tipo de deformaciones en 5 grupos dependiendo de la deformación producida: Aberración Esférica, Coma, Astigmatismo, Curvatura de Campo y Distorsión.

Más adelante se obtendrán valores explícitos para los 5 coeficientes de Seidel en un sistema óptico con simetría rotacional, basándonos en expandir el Hamiltoniano que describe el comportamiento del sistema por medio de una serie de Taylor, considerando términos hasta tercer orden.

Si consideramos que el sistema tiene simetría rotacional entonces todos los puntos que se encuentren sobre un círculo centrado en el eje, sobre el plano objeto, irán a dar a un círculo en la imagen, con lo que se obtiene una restricción sobre el sistema y nos bastaría una coordenada para la posición y una para el momento óptico para describir completamente al sistema. Además todos los puntos sobre un círculo cuyo centro pase por el eje de simetría y esté inscrito en un plano paralelo al plano $X-Y$ tendrán el mismo índice de refracción por lo cual es posible definir n como función de $X^2 + Y^2$ y z . Las nuevas coordenadas podrían definirse de la siguiente forma :

$$V = P^2 + Q^2 \quad (1.3.1)$$

$$U = X^2 + Y^2 \quad (1.3.2)$$

Donde X, Y representan la posición del objeto y P, Q son los cosenos directores del rayo.

En la sección 1.1 obtuvimos el Hamiltoniano para un sistema óptico cualquiera (ecuación 1.1.16). Si consideramos que el sistema tiene simetría rotacional el Hamiltoniano expresado en las nuevas variables sería

$$H = -\sqrt{n^2(U, z)} - V \quad (1.3.3)$$

tomando este valor para H las ecuaciones de Hamilton obtenidas en el apartado anterior quedan de la siguiente forma (ver ecuaciones 1.1.15)

$$\frac{dX}{dz} = \frac{dH}{dV} \frac{dV}{dP} = 2P \frac{dH}{dV}, \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{dH}{dU} \frac{dU}{dX} = -2X \frac{dH}{dU} \quad (1.3.4 a)$$

$$\frac{dY}{dz} = \frac{dH}{dV} \frac{dV}{dQ} = 2Q \frac{dH}{dV}, \quad \frac{dQ}{dz} = -\frac{dH}{dU} \frac{dU}{dY} = -2Y \frac{dH}{dU} \quad (1.3.4 b)$$

Como se vio en el Capítulo 1.1 hay varias maneras de especificar un rayo, conociendo su posición y dirección en cualquier plano ó bien teniendo los valores de su posición en dos planos distintos. Nosotros usaremos la segunda forma de condiciones de frontera, para ello escogeremos 2 planos de la siguiente forma, el primero será el plano objeto al cual le asignamos $z = z_0$, y el segundo será el plano que contiene la pupila de salida $z = \zeta$, donde z representa la dirección de propagación general de los rayos a lo largo del eje de simetría (ver figura 1.3.1). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que estos valores están dados por :

$$X(z_0) = x_0, \quad X(\zeta) = \xi \quad (1.3.5 a)$$

$$Y(z_0) = y_0, \quad Y(\zeta) = \eta \quad (1.3.5 b)$$

Si resolvemos las ecuaciones 1.3.4 bajo estas condiciones de frontera, las soluciones para X, Y, P, Q , estarán expresadas en términos de x_0, y_0, ξ, η . Los rayos paraxiales serán aquellos para los cuales x_0, y_0, ξ, η , tomen valores muy pequeños. Para un rayo cualquiera podríamos expandir X, Y, P, Q , en potencias ascendentes de x_0, y_0, ξ, η para obtener :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots, \quad P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots \quad (1.3.6 a)$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots, \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots \quad (1.3.6 b)$$

donde el subíndice representa el grado del polinomio en términos de x_0, y_0, ξ, η . El término de grado 0 no aparece debido a que el rayo que atraviesa al sistema óptico a través del eje de simetría viaja sin desviarse, por lo cual si x_0, y_0, ξ, η son iguales a cero entonces X, Y, P, Q , valen cero en todas partes. Para valores infinitesimales de x_0, y_0, ξ, η , podemos despreciar los términos de orden superior quedándonos sólo con los de primer orden por lo tanto X_1, Y_1, P_1, Q_1 representan los valores paraxiales de X, Y, P, Q , respectivamente.

Sin embargo para un sistema con simetría rotacional los términos pares de las ecuaciones (1.3.6) se eliminan ya que si un rayo especificado por las coordenadas (x_0, y_0, ξ, η) toma valores $X(z_1), Y(z_1), P(z_1), Q(z_1)$ para algún plano $z = z_1$, entonces un rayo especificado por $(-x_0, -y_0, -\xi, -\eta)$ debería tomar los siguientes valores $-X(z_1), -Y(z_1), -P(z_1), -Q(z_1)$, en el mismo plano $z = z_1$. Como los términos pares de la serie no cumplen con esta condición es claro que debemos eliminarlos de las ecuaciones (1.3.6) obteniendo

$$X = X_1 + X_3 + \dots, \quad P = P_1 + P_3 + \dots \quad (1.3.7 a)$$

$$Y = Y_1 + Y_3 + \dots, \quad Q = Q_1 + Q_3 + \dots \quad (1.3.7 b)$$

donde los términos X_3, Y_3, P_3, Q_3 representan correcciones a la aproximación paraxial dada por los términos X_1, Y_1, Q_1, P_1 y son las llamadas aberraciones de tercer orden. De manera semejante los términos de ordenes superiores son llamados de acuerdo a su grado aberraciones de quinto orden, aberraciones de séptimo orden, etc. Son aberraciones debido a que en ausencia de ellas cada uno de los puntos en el plano objeto se enfocarían en un solo punto en la imagen y por lo tanto representarían una imagen perfecta ó ideal.

Para poder calcular las aberraciones, expandiremos por medio de su serie de Taylor el Hamiltoniano dado por la ecuación 1.3.3 alrededor del punto $U = 0, V = 0$ obteniendo

$$H = H_0 + H_1 U + H_2 V + \frac{1}{2}(H_{11} U^2 + 2H_{12} UV + H_{22} V^2) + \dots \quad (1.3.8)$$

donde H_i y H_{ij} son los coeficientes de la serie de Taylor y son todos función de z . Substituyendo las expansiones en series de Taylor obtenidas en las ecuaciones 1.3.7 y en la ecuación 1.3.8 en las ecuaciones 1.3.4 obtenemos

$$(\dot{X}_1 + \dot{X}_3 + \dots) = 2(P_1 + P_3 + \dots)(H_2 + H_{12}U + H_{22}V + \dots) \quad (1.3.9 a)$$

$$(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_3 + \dots) = 2(Q_1 + Q_3 + \dots)(H_2 + H_{12}U + H_{22}V + \dots) \quad (1.3.9 b)$$

$$(\dot{P}_1 + \dot{P}_3 + \dots) = -2(X_1 + X_3 + \dots)(H_1 + H_{12}V + H_{11}U + \dots) \quad (1.3.9 c)$$

$$(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_3 + \dots) = -2(Y_1 + Y_3 + \dots)(H_1 + H_{12}V + H_{11}U + \dots) \quad (1.3.9 d)$$

donde los puntos representan derivada con respecto a z . Ahora obtengamos las expresiones a tercer orden para U y V

$$\begin{aligned} U &= X^2 + Y^2 = (X_1 + X_3 + \dots)^2 + (Y_1 + Y_3 + \dots)^2 = \\ &= U_1 + 2(X_1 X_3 + Y_1 Y_3) + \text{términos de orden superior} \end{aligned} \quad (1.3.10 a)$$

$$\begin{aligned} V &= P^2 + Q^2 = (P_1 + P_3 + \dots)^2 + (Q_1 + Q_3 + \dots)^2 = \\ &= V_1 + 2(P_1 P_3 + Q_1 Q_3) + \text{términos de orden superior} \end{aligned} \quad (1.3.10 b)$$

donde $U_1 = X_1^2 + Y_1^2$ y $V_1 = P_1^2 + Q_1^2$

substituyendo (1.3.10) en (1.3.9) obtenemos

$$\begin{aligned} (\dot{X}_1 + \dot{X}_3 + \dots) &= 2(P_1 + P_3 + \dots)(H_2 + H_{12}[U_1 + 2(X_1 X_2 + Y_1 Y_2) + \dots] + H_{22}[V_1 + 2(P_1 P_3 + Q_1 Q_3) + \dots]) \\ (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_3 + \dots) &= 2(Q_1 + Q_3 + \dots)(H_2 + H_{12}[U_1 + 2(X_1 X_2 + Y_1 Y_2) + \dots] + H_{22}[V_1 + 2(P_1 P_3 + Q_1 Q_3) + \dots]) \\ (\dot{P}_1 + \dot{P}_3 + \dots) &= -2(X_1 + X_3 + \dots)(H_1 + H_{12}[V_1 + 2(P_1 P_3 + Q_1 Q_3) + \dots] + H_{11}[U_1 + 2(X_1 X_2 + Y_1 Y_2) + \dots]) \\ (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_3 + \dots) &= -2(Y_1 + Y_3 + \dots)(H_1 + H_{12}[V_1 + 2(P_1 P_3 + Q_1 Q_3) + \dots] + H_{11}[U_1 + 2(X_1 X_2 + Y_1 Y_2) + \dots]) \end{aligned}$$

igualando los términos del mismo orden

$$\dot{X}_1 = 2H_2 P_1 \quad (1.3.11 \text{ a})$$

$$\dot{Y}_1 = 2H_2 Q_1 \quad (1.3.11 \text{ b})$$

$$\dot{P}_1 = -2H_1 X_1 \quad (1.3.11 \text{ c})$$

$$\dot{Q}_1 = -2H_1 Y_1 \quad (1.3.11 \text{ d})$$

$$\dot{X}_3 = 2H_2 P_3 + 2(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)P_1 \quad (1.3.12 \text{ a})$$

$$\dot{Y}_3 = 2H_2 Q_3 + 2(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)Q_1 \quad (1.3.12 \text{ b})$$

$$\dot{P}_3 = -2H_1 X_3 - 2(H_{11}U_1 + H_{12}V_1)X_1 \quad (1.3.12 \text{ c})$$

$$\dot{Q}_3 = -2H_1 Y_3 - 2(H_{11}U_1 + H_{12}V_1)Y_1 \quad (1.3.12 \text{ d})$$

Las ecuaciones 1.3.11 son las ecuaciones paraxiales, mientras que las ecuaciones 1.3.12 representan correcciones a tercer orden de la aproximación paraxial.

Dado un sistema óptico si conocemos n como función de U y z podremos calcular los coeficientes H_i y H_{ij} . Con esta información es posible resolver las ecuaciones paraxiales (1.3.11), una vez resueltas si sustituimos el resultado en las ecuaciones para las aberraciones de tercer orden (1.3.12) podremos calcular la corrección a tercer orden representada por X_3 , Y_3 . A continuación obtendremos expresiones explícitas para X_3 , Y_3 en función de los parámetros del sistema x_0 , y_0 , ξ , η , para ello usaremos dos rayos específicos. El primero de ellos, el rayo axial satisface las siguientes condiciones de frontera :

$$X_1(z_0) = 0, \quad Y_1(z_0) = 0, \quad X_1(\zeta) = 1, \quad Y_1(\zeta) = 0 \quad (1.3.13)$$

La solución para las ecuaciones paraxiales con estas condiciones de frontera las podemos representar como :

$$X_1(z_0) \equiv g(z), \quad P_1(z_0) \equiv \vartheta(z) \quad (1.3.14)$$

donde $g(z_0) = 0$, $g(\zeta) = 1$

El segundo rayo llamado el rayo del campo satisface las siguientes condiciones de frontera :

$$X_1(z_0) = 1, \quad Y_1(z_0) = 0, \quad X_1(\zeta) = 0, \quad Y_1(\zeta) = 0 \quad (1.3.13)$$

La solución para las ecuaciones paraxiales con estas condiciones de frontera las podemos representar como :

$$X_1(z_0) \equiv G(z), \quad P_1(z_0) \equiv \theta(z) \quad (1.3.14)$$

donde $G(z_0) = 1, \quad G(\zeta) = 0$

Como $g(z), G(z), \theta(z)$ y $\vartheta(z)$ forman dos soluciones particulares linealmente independientes del conjunto de ecuaciones paraxiales (1.3.11) entonces la solución general la podemos expresar como una combinación lineal de ellas

$$X_1(z) = x_0 G(z) + \xi g(z) \quad (1.3.15 a)$$

las ecuaciones para X , P y para Y, Q son idénticas si intercambiamos X con Y y P con Q por lo que su solución es de la misma forma

$$Y_1(z) = y_0 G(z) + \eta g(z) \quad (1.3.15 b)$$

Los coeficientes para la combinación lineal fueron elegidos de manera que se satisfagan las condiciones impuestas desde un principio para seleccionar un rayo (ver ecuaciones 1.3.5).

Como $g(z), G(z), \theta(z)$ y $\vartheta(z)$ son soluciones especiales de las ecuaciones paraxiales deben de satisfacerlas de manera que si en las ecuaciones 1.3.11 sustituimos $g(z), G(z), \theta(z)$ y $\vartheta(z)$ según corresponda obtenemos

$$\frac{dg}{dz} = 2H_2 \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dz} = -2H_1 g \quad (1.3.16 a)$$

$$\frac{dG}{dz} = 2H_2 \theta, \quad \frac{d\theta}{dz} = -2H_1 G \quad (1.3.16 b)$$

Si despejamos $P_1(z)$ de la ecuación 1.3.11a y sustituimos las ecuaciones 1.3.16 obtenemos

$$P_1(z) = \frac{1}{2H_2} \frac{dX_1}{dz} = \frac{1}{2H_2} (x_0 \dot{G} + \xi \dot{g}) = x_0 \theta + \xi \vartheta \quad (1.3.17 a)$$

Si despejamos $Q_1(z)$ de la ecuación 1.3.11b y sustituimos las ecuaciones 1.3.16 obtenemos

$$Q_1(z) = \frac{1}{2H_2} \frac{dY_1}{dz} = \frac{1}{2H_2} (y_0 \dot{G} + \eta \dot{g}) = y_0 \theta + \eta \vartheta \quad (1.3.17 b)$$

Lo que nos interesa es conocer la aberración del sistema en el plano definido por la imagen paraxial, para lograr esto definamos el plano imagen paraxial de la siguiente manera: Consideremos un punto sobre el eje de simetría en el plano objeto de coordenadas $(0,0,z_0)$. El rayo que sale de este punto sobre el eje de simetría del sistema no será desviado. Cualquier otro rayo que salga de este mismo punto podrá ser representado por un múltiplo de $g(z)$, ya que la ecuación 1.3.15 nos dice que si $x_0 = 0, y_0 = 0$ entonces $X_1(z) = \xi g(z), Y_1(z) = \eta g(z)$ y por lo tanto cualquier rayo que salga de este punto y sea paraxial

podrá ser representado como un múltiplo de $g(z)$. La imagen paraxial será formada en el punto de intersección de estos dos rayos, es decir en el punto en el cual $g(z_1)=0$ para $z_1 \neq z_0$. El plano que cumple con la condición anterior se conoce como el plano imagen paraxial.

Como para este plano se cumple que $g(z_1)=0$ la solución paraxial para este plano estará dada simplemente por

$$X_1(z_1) = x_0 G(z_1) \quad (1.3.18 \text{ a})$$

$$Y_1(z_1) = y_0 G(z_1) \quad (1.3.18 \text{ b})$$

como $G(z_1)$ está determinada por las condiciones de frontera (1.3.13), es independiente de x_0, y_0, ξ, η , y entonces la ecuación 1.3.18 nos dice que bajo la aproximación paraxial todos los rayos que salen de un punto $[x_0, y_0, \theta]$ situado en el plano objeto, se intersectan en un punto $[X_1(z_1), Y_1(z_1), \theta]$ situado en el plano imagen, sin importar los valores que tomen ξ, η .

Calculemos ahora la aberración de un rayo a tercer orden (los términos X_3, Y_3) que satisfaga las condiciones de frontera impuestas por las ecuaciones 1.3.5 en términos de las funciones $g(z), G(z), \theta(z)$ y $\vartheta(z)$.

Si resolvemos las ecuaciones paraxiales bajo las siguientes condiciones de frontera:

$$X_1(z_0) = x_0, \quad Y_1(z_0) = y_0, \quad X_1(\zeta) = \xi, \quad Y_1(\zeta) = \eta \quad (1.3.19)$$

Entonces es claro que, por (1.3.5), para el plano $z = z_0$ no existirá aberración alguna

$$(X_3(z_0) = X_5(z_0) = \dots = 0)$$

Si despejamos el valor de $2H_2$ de la ecuación 1.3.16a obtenemos

$$2H_2 = \frac{\dot{g}}{g} \quad (1.3.20)$$

Si sustituimos estos resultados en la ecuación 1.3.12a y 1.3.12b obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 &= \left(\frac{\dot{g}}{g}\right) P_3 + 2(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)P_1 \Rightarrow \\ \dot{X}_3 g - \dot{g}P_3 &= 2(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)P_1 g \end{aligned} \quad (1.3.21 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_3 &= \left(\frac{\dot{g}}{g}\right) Q_3 + 2(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)Q_1 \Rightarrow \\ \dot{Y}_3 g - \dot{g}Q_3 &= 2(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)Q_1 g \end{aligned} \quad (1.3.21 \text{ b})$$

Si despejamos el valor de $2H_1$ de la ecuación 1.3.16a obtenemos

$$2H_1 = -\frac{\dot{\vartheta}}{g} \quad (1.3.22)$$

Si sustituimos estos resultados en la ecuación 1.3.12c y 1.3.12d obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{P}_3 &= \left(\frac{\dot{\vartheta}}{g}\right) X_3 - 2(H_{11}U_1 + H_{12}V_1)X_1 \Rightarrow \\ -\dot{P}_3g + \dot{\vartheta}X_3 &= 2(H_{11}U_1 + H_{12}V_1)X_1g \end{aligned} \quad (1.3.23 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_3 &= \left(\frac{\dot{\vartheta}}{g}\right) Y_3 - 2(H_{11}U_1 + H_{12}V_1)Y_1 \Rightarrow \\ -\dot{Q}_3g + \dot{\vartheta}Y_3 &= 2(H_{11}U_1 + H_{12}V_1)Y_1g \end{aligned} \quad (1.3.23 \text{ b})$$

Si sumamos las ecuaciones 1.3.21 con las ecuaciones 1.3.22 obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{X}_3\vartheta + X_3\dot{\vartheta} - \dot{g}P_3 - \dot{P}_3g &= 2(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)P_1\vartheta + 2(H_{11}U_1 + H_{12}V_1)X_1g \Rightarrow \\ \frac{d}{dz}(X_3\vartheta - gP_3) &= 2[(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)P_1\vartheta + (H_{11}U_1 + H_{12}V_1)X_1g] \end{aligned} \quad (1.3.21 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_3\vartheta + Y_3\dot{\vartheta} - \dot{g}Q_3 - \dot{Q}_3g &= 2(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)Q_1\vartheta + 2(H_{11}U_1 + H_{12}V_1)Y_1g \Rightarrow \\ \frac{d}{dz}(Y_3\vartheta - gQ_3) &= 2[(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)Q_1\vartheta + (H_{11}U_1 + H_{12}V_1)Y_1g] \end{aligned} \quad (1.3.21 \text{ b})$$

Si integramos estas ecuaciones desde el plano objeto $z = z_0$, hasta el plano imagen $z = z_1$, se obtiene

$$(X_3\vartheta - gP_3)\Big|_{z_0}^{z_1} = 2 \int_{z_0}^{z_1} [(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)P_1\vartheta + (H_{11}U_1 + H_{12}V_1)X_1g] dz \quad (1.3.22 \text{ a})$$

$$(Y_3\vartheta - gQ_3)\Big|_{z_0}^{z_1} = 2 \int_{z_0}^{z_1} [(H_{12}U_1 + H_{22}V_1)Q_1\vartheta + (H_{11}U_1 + H_{12}V_1)Y_1g] dz \quad (1.3.22 \text{ b})$$

Si usamos el hecho de que $g(z_0) = 0$, $X_3(z_0) = 0$, $g(z_1) = 0$ obtenemos

$$X_3(z_1) = \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} [(H_{11}U_1 + H_{12}V_1)X_1g + (H_{12}U_1 + H_{22}V_1)P_1\vartheta] dz \quad (1.3.23 \text{ a})$$

$$Y_3(z_1) = \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} [(H_{11}U_1 + H_{12}V_1)Y_1g + (H_{12}U_1 + H_{22}V_1)Q_1\vartheta] dz \quad (1.3.23 \text{ b})$$

que representan la aberración del rayo a lo largo de las direcciones X y Y en el plano imagen paraxial.

Para escribir X_3 y Y_3 en términos de $g(z)$, $G(z)$, $\theta(z)$ y $\vartheta(z)$ observemos que :

$$U_1 = X_1^2 + Y_1^2 = [x_0G(z) + \xi g(z)]^2 + [y_0G(z) + \eta g(z)]^2 = rG^2 + 2tGg + sg^2 \quad (1.3.24 \text{ a})$$

$$V_1 = P_1^2 + Q_1^2 = [x_0\theta(z) + \xi\vartheta(z)]^2 + [y_0\theta(z) + \eta\vartheta(z)]^2 = r\theta^2 + 2t\theta\vartheta + s\vartheta^2 \quad (1.3.24 \text{ b})$$

donde

$$r = x_0^2 + y_0^2, \quad t = x_0\xi + y_0\eta, \quad s = \xi^2 + \eta^2$$

Si sustituimos estos valores (ecuaciones 1.3.24) y además sustituimos las expresiones obtenidas para X_1 , Y_1 , P_1 , Q_1 (ecuaciones 1.3.15a, 1.3.15b, 1.3.17a y 1.3.17b) en las ecuaciones 1.3.23 obtendremos los coeficientes de aberración X_3 y Y_3 en términos de las soluciones a las ecuaciones paraxiales ($g(z)$, $G(z)$, $\theta(z)$ y $\vartheta(z)$). A continuación se obtienen estos coeficientes de acuerdo a la separación propuesta inicialmente por Seidel, separando las integrales en cinco términos conocidos como los coeficientes de aberración de Seidel.

$$X_3(z_1) = \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (H_{11}(rG^2 + 2tGg + sg^2) + H_{12}(r\theta^2 + 2t\theta\vartheta + s\vartheta^2))(x_0G + \xi g)g dz + \\ + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (H_{12}(rG^2 + 2tGg + sg^2) + H_{22}(r\theta^2 + 2t\theta\vartheta + s\vartheta^2))(x_0\theta + \xi\vartheta)\vartheta dz \quad (1.3.25 \text{ a})$$

$$Y_3(z_1) = \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (H_{11}(rG^2 + 2tGg + sg^2) + H_{12}(r\theta^2 + 2t\theta\vartheta + s\vartheta^2))(y_0G + \eta g)g dz + \\ + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (H_{12}(rG^2 + 2tGg + sg^2) + H_{22}(r\theta^2 + 2t\theta\vartheta + s\vartheta^2))(y_0\theta + \eta\vartheta)\vartheta dz \quad (1.3.25 \text{ b})$$

Como x_0, y_0, ξ, η, r y s no dependen de z , los podemos sacar de la integral, además si expandemos los productos y agrupamos los términos en función de x_0, y_0, ξ, η obtenemos

$$\begin{aligned}
 X_3(z_1) = & \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11}G^3g + H_{12}\theta^2Gg + H_{12}G^2\theta\vartheta + H_{22}\theta^3\vartheta) dz \right] rx_0 + \\
 & + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11}G^2g^2 + H_{12}\theta^2g^2 + H_{12}G^2\vartheta^2 + H_{22}\theta^2\vartheta^2) dz \right] r\xi + \\
 & + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11}G^2g^2 + 2H_{12}\theta\vartheta Gg + H_{22}\theta^2\vartheta^2) dz \right] 2tx_0 + \\
 & + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11}Gg^3 + H_{12}\theta\vartheta g^2 + H_{12}Gg\vartheta^2 + H_{22}\theta\vartheta^3) dz \right] 2t\xi + \\
 & + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11}Gg^3 + H_{12}\vartheta^2Gg + H_{12}g^2\theta\vartheta + H_{22}\theta\vartheta^3) dz \right] sx_0 + \\
 & + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11}g^4 + 2H_{12}\vartheta^2g^2 + H_{22}\vartheta^4) dz \right] s\xi
 \end{aligned} \tag{1.3.26 a}$$

$$\begin{aligned}
 Y_3(z_1) = & \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11}G^3g + H_{12}\theta^2Gg + H_{12}G^2\theta\vartheta + H_{22}\theta^3\vartheta) dz \right] ry_0 + \\
 & + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11}G^2g^2 + H_{12}\theta^2g^2 + H_{12}G^2\vartheta^2 + H_{22}\theta^2\vartheta^2) dz \right] r\eta + \\
 & + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11}G^2g^2 + 2H_{12}\theta\vartheta Gg + H_{22}\theta^2\vartheta^2) dz \right] 2ty_0 + \\
 & + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11}Gg^3 + H_{12}\theta\vartheta g^2 + H_{12}Gg\vartheta^2 + H_{22}\theta\vartheta^3) dz \right] 2t\eta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11} G g^3 + H_{12} \vartheta^2 G g + H_{12} g^2 \theta \vartheta + H_{22} \theta \vartheta^3) dz \right] s y_0 + \\
& + \frac{2}{\vartheta(z_1)} \left[\int_{z_0}^{z_1} (H_{11} g^4 + 2H_{12} \vartheta^2 g^2 + H_{22} \vartheta^4) dz \right] s \eta \quad (1.3.26 \text{ b})
\end{aligned}$$

Como podemos apreciar el coeficiente de $2t\xi$ es igual al de sx_0 para X_3 , y $2t\eta$ es igual al de sy_0 para Y_3 , pero aun así estos no son aun los coeficientes de aberración de Seidel, sin embargo en la manera en que mejor se describe a las aberraciones según Seidel los coeficientes de $r\xi$ y $r\eta$ deben reescribirse en términos de los coeficientes de $2\alpha_0$ y $2ty_0$; Si además reagrupamos los términos y los reescribimos de forma que la ecuación se parezca a la de la aproximación paraxial (ecuación 1.3.15), obtenemos

$$X_3(z_1) = x_0 [Bs + 2Ct + Er] + \xi [As + 2Bt + (C + D)r] \quad (1.3.27 \text{ a})$$

$$Y_3(z_1) = y_0 [Bs + 2Ct + Er] + \eta [As + 2Bt + (C + D)r] \quad (1.3.27 \text{ b})$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (H_{11} g^4 + 2H_{12} \vartheta^2 g^2 + H_{22} \vartheta^4) dz \\
B &= \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (H_{11} G g^3 + H_{12} g \vartheta (\theta g + G \vartheta) + H_{22} \theta \vartheta^3) dz \\
C &= \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (H_{11} G^2 g^2 + 2H_{12} \theta \vartheta G g + H_{22} \theta^2 \vartheta^2) dz \\
D &= \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (H_{12} \theta^2 g^2 - 2H_{12} \theta \vartheta G g + H_{12} G^2 \vartheta^2) dz = \\
&= \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (\theta^2 g^2 - 2\theta \vartheta G g + G^2 \vartheta^2) H_{12} dz = \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (\theta g - G \vartheta)^2 H_{12} dz \Rightarrow \\
D &= \frac{2}{\vartheta(z_1)} (\theta g - G \vartheta)^2 \int_{z_0}^{z_1} H_{12} dz \quad \text{ya que}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \theta \dot{g} + \dot{\theta} g - G \dot{\vartheta} - \dot{G} \vartheta = \theta (2H_2 \vartheta) + g (-2H_1 G) - G (-2H_1 g) - \vartheta (2H_2 \theta) = 0$$

donde $\Gamma = (\theta g - G \vartheta)$ es el invariable óptico paraxial del sistema y no depende de z

$$E = \frac{2}{\vartheta(z_1)} \int_{z_0}^{z_1} (H_{11}G^3g + H_{12}G\theta(g\theta + G\vartheta) + H_{22}\theta^3\vartheta) dz.$$

Los coeficientes A, B, C, D, E se conocen como *coeficientes de aberración*, estos no dependen más que de parámetros del sistema y los planos objeto e imagen y tienen relacionado con ellos una interpretación física, a continuación estudiaremos el tipo de deformación producida en la imagen por cada uno de estos términos en forma independiente, cada una de estas corresponde a una aberración de Seidel (Aberración Esférica, Coma, Astigmatismo, Curvatura de Campo y Distorsión).

Debido a la simetría rotacional, es más fácil estudiar la imagen formada por un conjunto de rayos que golpean a una distancia fija ρ del eje z en el plano que contiene la pupila de salida, variando después ρ desde θ hasta el diámetro de la pupila de salida para obtener el conjunto completo de rayos que forman la imagen.

Los valores de ξ y η para este tipo de rayos están dados por:

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \varphi \quad (1.3.28)$$

donde los diferentes valores de φ representan a los rayos que golpean la pupila de salida en los distintos puntos del círculo de radio ρ centrado en $\xi = \eta = 0$ en el plano que contiene a la pupila de salida.

Como el sistema posee simetría rotacional podemos, sin pérdida de generalidad, elegir un punto en el plano objeto de coordenadas (x_0, θ, z_0) para algún sistema de referencia dado. Como $y_0 = 0$, podemos reescribir r, t, s de la Ec.(1.3.24) de la siguiente forma :

$$r = x_0^2, \quad t = x_0 \xi = x_0 \rho \cos \varphi, \quad s = \xi^2 + \eta^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \quad (1.3.29)$$

y los coeficientes de aberración X_3 y Y_3 dados por la ecuación (1.3.27) se reducen a

$$\begin{aligned} X_3(z_1) &= x_0 [B\rho^2 + 2Cx_0\rho \cos \varphi + Ex_0^2] + \rho \cos \varphi [A\rho^2 + 2Bx_0\rho \cos \varphi + (C + D)x_0^2] = \\ &= A\rho^3 \cos \varphi + B\rho^2 x_0 (1 + 2 \cos^2 \varphi) + 3Cx_0^2 \rho \cos \varphi + Dx_0^2 \rho \cos \varphi + Ex_0^3 = \\ &= A\rho^3 \cos \varphi + B\rho^2 x_0 (2 + \cos 2\varphi) + (3C + D)x_0^2 \rho \cos \varphi + Ex_0^3 \end{aligned} \quad (1.3.30 a)$$

$$\begin{aligned} Y_3(z_1) &= \rho \sin \varphi [A\rho^2 + 2Bx_0\rho \cos \varphi + (C + D)x_0^2] = \\ &= A\rho^3 \sin \varphi + 2Bx_0\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi + Cx_0^2 \rho \sin \varphi + Dx_0^2 \rho \sin \varphi \\ &= A\rho^3 \sin \varphi + Bx_0\rho^2 \sin 2\varphi + (C + D)x_0^2 \rho \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.3.30 b)$$

Aberración Esférica

Si A es el único coeficiente distinto de cero, ó bien el objeto se encuentra sobre el eje de simetría ($x_0 = 0, y_0 = 0$), las ecuaciones (1.3.30) que describen las aberraciones a lo largo de los ejes X y Y se reducen a

$$X_3(z_1) = A\rho^3 \cos\varphi, \quad Y_3(z_1) = A\rho^3 \sin\varphi, \quad (1.3.31)$$

De donde X, Y estarán dados a tercer orden por

$$X = X_1 + X_3, \quad Y = Y_1 + Y_3. \quad (1.3.32)$$

Si consideramos los resultados de la ecuación 1.3.31 y de la ecuación 1.3.32 podemos obtener

$$\left((X_1 + X_3) - X_1 \right)^2 + \left((Y_1 + Y_3) - Y_1 \right)^2 = (A\rho^3 \cos\varphi)^2 + (A\rho^3 \sin\varphi)^2 = (A\rho^3)^2. \quad (1.3.33)$$

De esta ecuación podemos ver que los rayos que inciden sobre la pupila de salida a una distancia fija ρ intersectarán al plano imagen paraxial en un círculo de radio $A\rho^3$ cuyo centro este en (X_1, Y_1) . Por lo tanto bajo la presencia de esta aberración la imagen de un punto en el plano objeto ira a dar a un círculo de radio $A\rho_0^3$, centrado en la imagen paraxial de dicho punto, donde ρ_0 es el radio de la abertura de la pupila de salida. A la distancia $A\rho_0^3$ se le conoce como aberración esférica lateral, y es función del punto considerado en el plano objeto.

También existe otra deformación asociada con A conocida como aberración esférica longitudinal y definida como la distancia que existe entre el foco paraxial y el foco marginal (lugar donde se enfocan los rayos provenientes del círculo de radio ρ_0 en la pupila de salida). A contiunción calculamos el valor de la aberración esférica longitudinal como función de la posición de la imagen paraxial, y se denotará como z_l .

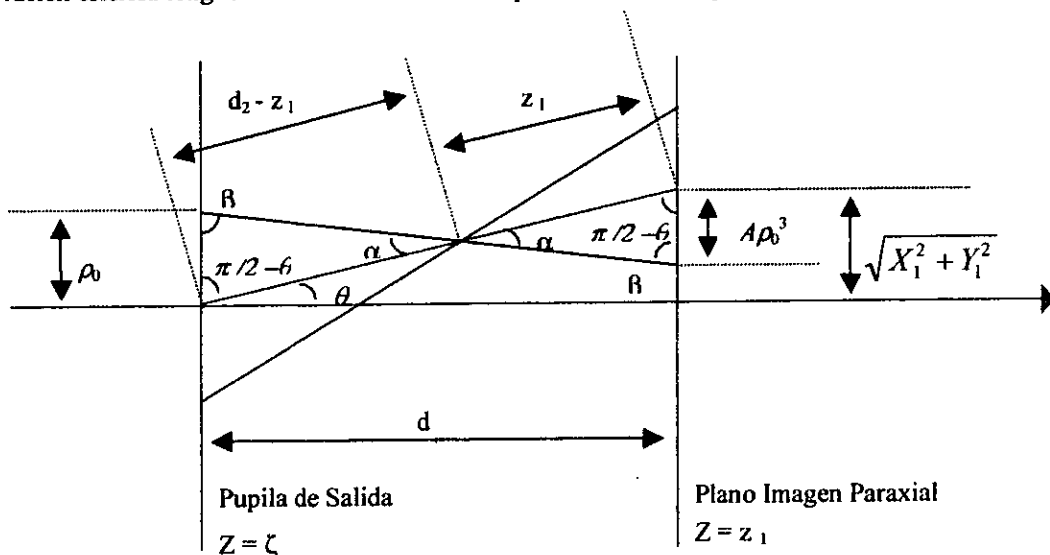


Figura 1.3.1

Consideremos el rayo de la imagen paraxial que pasa por el centro de la pupila de salida, el cual forma un ángulo θ respecto al eje-óptico como se ilustra en la Fig. 1.3.1. Asimismo, tomemos los rayos marginales, esto es, los que pasan por el borde de la pupila de salida a una distancia ρ_0 del eje-óptico. Calculamos la aberración esférica longitudinal z_l como función de las coordenadas de la posición de la imagen paraxial. La distancia desde el centro de la pupila de salida hasta la imagen paraxial esta dada por :

$$d_2 = \sqrt{d^2 + X_1^2 + Y_1^2} = \sqrt{(z_1 - \zeta)^2 + X_1^2 + Y_1^2} .$$

Utilizando la ley de los senos en los triángulos opuestos por el vértice que se forman con el rayo paraxial y el marginal superior, podemos obtener

$$\frac{A\rho_0^3}{\sin \alpha} = \frac{z_l}{\sin \beta}, \quad \frac{\rho_0}{\sin \alpha} = \frac{d_2 - z_l}{\sin \beta} .$$

Por lo tanto

$$\frac{A\rho_0^3}{z_l} = \frac{\rho_0}{d_2 - z_l} .$$

Despejando z_l y substituyendo la expresión para d_2 obtenemos

$$z_l = \frac{A\rho_0^2 d_2}{1 + A\rho_0^2} = \frac{A\rho_0^2 \sqrt{(z_1 - \zeta)^2 + X_1^2 + Y_1^2}}{1 + A\rho_0^2} . \quad (1.3.34)$$

En conclusión, la aberración esférica longitudinal crece si la posición del objeto se aleja del eje-óptico.

Si colocamos planos entre el plano que contiene la pupila de salida y el plano imagen paraxial, en cada uno de ellos la imagen de un punto en el plano objeto estará formada por un círculo relleno, al círculo de menor radio se le conoce como el círculo de confusión mínima.

Coma

Como se menciono antes, la única aberración presente para un objeto puntual que se encuentra sobre el eje-óptico es la aberración esférica. Sin embargo si consideramos puntos que se encuentren muy próximos al eje-óptico (x_0 pequeña), y despreciamos los términos cuadráticos ó de orden superior en x_0 , la aberración estará dada por los términos cuyos coeficientes contienen a A y B en la ecuación 1.3.30.

Consideremos ahora un sistema para el cual la única aberración presente se debe a el término que contiene a B y que representa al Coma. La aberración a tercer orden de la ecuación 1.3.30 estaría dada por :

$$X_3(z_1) = B\rho^2 x_0 (2 + \cos 2\varphi) \quad (1.3.35 a)$$

$$Y_3(z_1) = Bx_0 \rho^2 \sin 2\varphi . \quad (1.3.35 b)$$

Si eliminamos φ de las ecuaciones 1.3.35 y usamos la ecuación 1.3.32 podemos obtener

$$\left(X - (X_1 + 2B\rho^2 x_0)\right)^2 + (Y - Y_1)^2 = (B\rho^2 x_0)^2 \quad (1.3.36)$$

que como se puede apreciar representa un círculo de radio $B\rho^2 x_0$ cuyo centro se desplaza sobre el eje X conforme ρ crece. Esto formará círculos pequeños cuando ρ es pequeña que crecerán y se desplazarán sobre el eje x conforme ρ aumente. Como podemos apreciar en la Figura 1.3.2 la imagen es parecida a un cometa y es por eso que a esta aberración se le da el nombre de Coma.

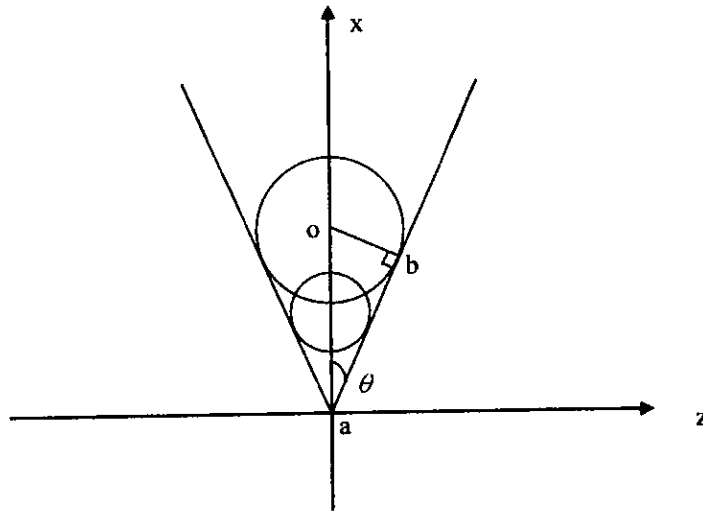


Figura 1.3.2

Todos estos círculos poseen tangentes en común y el ángulo que forman estas dos tangente con el eje X es de 30° , como a continuación demostraremos. Tomemos el triángulo rectángulo formado por los puntos a y b de la Figura 1.3.2 y calculemos el valor de su seno considerando los resultados de la ecuación 1.3.36

$$\sin \theta = \frac{ob}{ao} = \frac{Bx_0\rho^2}{2Bx_0\rho^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

por lo cual la imagen esta confinada dentro de un triángulo equilátero cuyos catetos forman un ángulo de 30° con respecto al eje X , su vértice esta en el punto imagen paraxial y su altura estará determinada por el radio de apertura de la pupila de salida de la siguiente forma $h=3Bx_0 \rho^2$.

Astigmatismo y Curvatura de Campo

Para su estudio, en la elección de coeficientes realizada por Seidel (A, B, C, D, E), las aberraciones de astigmatismo y de curvatura se analizan juntas, debido a que las ecuaciones resultantes son más sencillas. Si suponemos que la deformación en la imagen sólo se debe a estas aberraciones, los únicos coeficientes distintos de cero, serán C y D por lo que la ecuación 1.3.30 se reduce a :

$$X_3(z_1) = (3C + D)x_0^2 \rho \cos \varphi \quad (1.3.37a)$$

$$Y_3(z_1) = (C + D)x_0^2 \rho \sin \varphi. \quad (1.3.37b)$$

Si eliminamos la dependencia en φ de las ecuaciones 1.3.37 obtenemos

$$\frac{X_3^2}{[(3C + D)x_0^2 \rho]^2} + \frac{Y_3^2}{[(C + D)x_0^2 \rho]^2} = 1 \quad (1.3.38)$$

que representa la ecuación de una elipse centrada en la imagen paraxial y con semiejes $(3C + D)x_0^2 \rho$ y $(C + D)x_0^2 \rho$. Entonces todos los rayos que salen de un círculo de radio ρ en la pupila de salida irán a dar a una elipse en el plano imagen paraxial.

Consideremos un plano paralelo al plano imagen paraxial cuya distancia a éste se mida por medio de la coordenada z donde z será positiva a la derecha del plano imagen paraxial y negativa a la izquierda. Sea d la distancia entre la pupila de salida y el plano imagen paraxial, sean (\bar{x}, \bar{y}) las coordenadas en el plano especificado por z . Entonces utilizando triángulos semejantes podemos obtener: (ver Figura 1.3.3)

$$\bar{x} = -\frac{z}{d} \xi + \left(\frac{d+z}{d} \right) x \quad (1.3.39 a)$$

$$\bar{y} = -\frac{z}{d} \eta + \left(\frac{d+z}{d} \right) y \quad (1.3.39 b)$$

donde hemos usado el hecho de que z es negativa a la derecha del plano imagen paraxial, (x, y) representan las coordenadas del punto de intersección del rayo con el plano imagen paraxial.

Como solo estamos considerando que la imagen contiene Astigmatismo y Curvatura de campo, podemos obtener el valor de (x, y) a partir de las ecuaciones 1.3.37 añadiéndole los términos de primer orden (X_1, Y_1). Si sustituimos este resultado en las ecuaciones 1.3.39 obtenemos

$$\bar{x} = \frac{d+z}{d} X_1 + \left[-\frac{z}{d} + \frac{d+z}{d} (3C + D)x_0^2 \right] \xi \quad (1.3.40 a)$$

$$\bar{y} = \left[-\frac{z}{d} + \frac{d+z}{d} (C + D)y_0^2 \right] \eta \quad (1.3.40 a)$$

donde hemos usado el hecho de que $Y_1 = 0$ ya que el objeto se encuentra sobre el plano $x - z$.

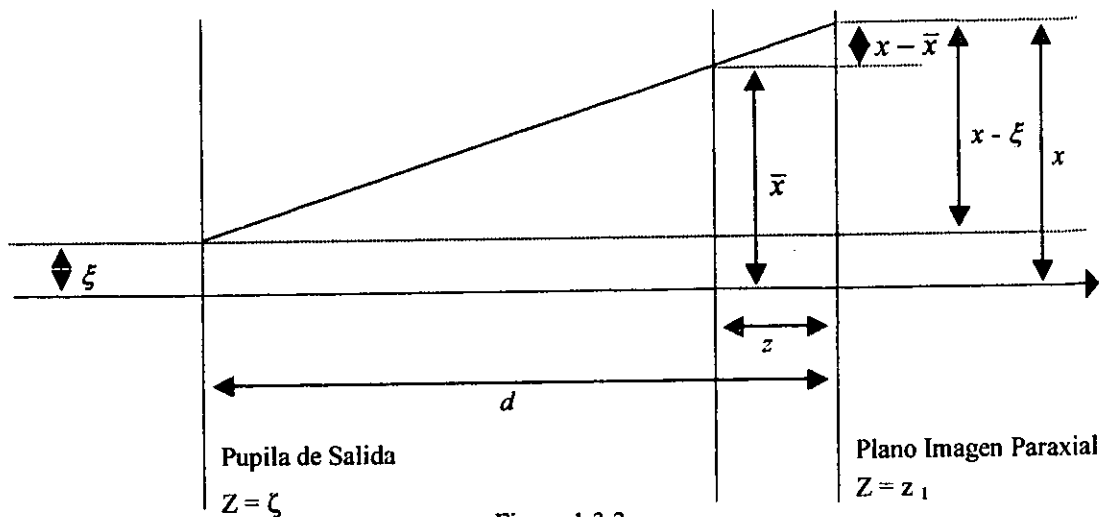


Figura 1.3.3

Despejando ξ , η de las ecuaciones 1.3.40 y usando que $\xi^2 + \eta^2 = \rho^2$ tenemos

$$\frac{\left[\bar{x} - \frac{(z+d)X_1}{d} \right]^2}{\left[-\frac{z}{d} + \frac{(d+z)(3C+D)x_0^2}{d} \right]^2} + \frac{[\bar{y}]^2}{\left[-\frac{z}{d} + \frac{(d+z)(C+D)x_0^2}{d} \right]^2} = \rho^2. \quad (1.3.41)$$

La ecuación 1.3.41 nos dice que para cualquier plano a una distancia z del plano imagen paraxial, la imagen que formaran los rayos provenientes de un círculo de radio ρ en la pupila de salida, será una elipse con centro en $\left(\frac{d+z}{d} X_1, 0 \right)$. Una elipse posee tres tipos de degeneraciones :

- Una línea recta paralela al eje x .
- Una línea recta perpendicular al eje x .
- Un círculo.

En óptica a cada una de estas degeneraciones se asocia un nombre. Además la distancia entre las dos líneas rectas es una medida del astigmatismo, ya que a tercer orden solo depende de C . A continuación obtendremos las expresiones para la posición del plano que contiene a cada una de estas degeneraciones.

En la ecuación 1.3.41 el parámetro a de la elipse que representa el ancho de la elipse sobre el eje x puede tomar el valor de 0 para un valor especial de z , como para este caso la elipse degenera en una línea recta paralela al eje y , el plano representado por este valor especial de z se le conoce como plano tangencial y a la z que lo representa se le denota como z_T . La expresión para z_T la obtenemos pidiendo que a valga cero obteniendo

$$-\frac{z_T}{d} + \frac{d+z_T}{d} (3C+D)x_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$z_T = \frac{(3C + D)x_0^2}{1 - (3C + D)x_0^2} d. \quad (1.3.42a)$$

De la misma manera pidiendo condiciones semejantes ahora para el parámetro b de la elipse que representa el ancho sobre el eje y , obtenemos el plano sagital representado por el valor z_S y cuya degeneración es una recta perpendicular al eje x . La expresión para z_S la obtenemos pidiendo que b valga cero obteniendo

$$-\frac{z_S}{d} + \frac{d + z_S}{d} (C + D)x_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$z_S = \frac{(C + D)x_0^2}{1 - (C + D)x_0^2} d. \quad (1.3.42b)$$

De manera que

$$z_T - z_S = \left[\frac{(3C + D)x_0^2}{1 - (3C + D)x_0^2} - \frac{(C + D)x_0^2}{1 - (C + D)x_0^2} \right] d. \quad (1.3.43)$$

Si expandemos esta expresión por medio de una serie de Taylor sobre los coeficientes C y D obtenemos

$$z_T - z_S = 2x_0^2 Cd + 4x_0^4 DCd + O(D^2) \cdot C + O(C^2). \quad (1.3.44)$$

Como tanto C , D se obtienen de una aproximación a tercer orden, si deseo cortar la serie de la ecuación 1.3.44 a tercer orden, solo sobreviven los términos que contengan a C ó a D , ya que el producto de estos sería de orden 6. Si cortamos la serie de la ecuación 1.3.44 a tercer orden y sustituimos el valor de d obtenemos

$$z_T - z_S = 2x_0^2 (z_1 - \zeta) C. \quad (1.3.45)$$

Como se mencionó anteriormente $z_T - z_S$ es una medida del astigmatismo ya que a tercer orden solo depende de C . Por lo tanto los dos focos solo coinciden a tercer orden cuando $C = 0$.

Por último consideremos el caso para el cual la elipse degenera en un círculo, en este caso $a = \pm b$, si imponemos esta condición sobre la elipse obtenida en la ecuación 1.3.41 obtenemos

$$\left[-\frac{z}{d} + \frac{(d + z)(3C + D)x_0^2}{d} \right] = \pm \left[-\frac{z}{d} + \frac{(d + z)(C + D)x_0^2}{d} \right]. \quad (1.3.46)$$

Si usamos el signo positivo obtenemos $C = 0$ que corresponde a ausencia de astigmatismo, lo cual quiere decir que en ausencia de astigmatismo la imagen es un círculo para todos los planos y degenera en un

punto cuando $z = \frac{dDx_0^2}{1 - Dx_0^2}$. Por otro lado si usamos el signo negativo en la ecuación 1.3.46 obtenemos

$$z = \frac{(2C + D)x_0^2 d}{1 - (2C + D)x_0^2}.$$

Por lo tanto la imagen es circular solo en un plano fijo, a esta imagen se le conoce como el círculo de confusión mínima. Nótese que este plano coincide con el plano imagen paraxial cuando $C = -D/2$, que como se mostrará más adelante, corresponde a curvatura de campo cero.

Si M es el aumento transversal del sistema sobre el eje x , entonces dentro de la aproximación a tercer orden, tenemos que

$$x_0 = \frac{x_1}{M}. \quad (1.3.47)$$

Si en las ecuaciones 1.3.42 sustituimos este resultado y expandemos por medio de una serie de Taylor quedándonos a primer orden en C, D obtenemos

$$Z_T = \frac{(3C + D)}{M^2} dx_1^2, \quad (1.3.48a)$$

$$Z_S = \frac{(C + D)}{M^2} dx_1^2. \quad (1.3.48b)$$

Estas ecuaciones representan las ecuaciones de un círculo para x_1 pequeña, lo cual se muestra a continuación. Consideremos un círculo de radio R centrado en el punto $(-R, 0)$. Sea (z, x) cualquier punto sobre la circunferencia, entonces por geometría obtenemos

$$(z + R)^2 + x^2 = R^2 \Rightarrow z^2 + 2Rz + x^2 = 0. \quad (1.3.49)$$

Si queremos obtener la solución de la ecuación 1.3.49 que tiende a cero cuando $x \rightarrow 0$ obtenemos

$$z = -R + R\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \approx -\frac{x^2}{2R}. \quad (1.3.50)$$

Como se puede apreciar las ecuaciones 1.3.48 representan circunferencias para x_1 pequeña, cuyos radios de curvatura estarían dados por

$$\frac{1}{R_T} = \frac{2d}{M^2}(3C + D), \quad \frac{1}{R_S} = \frac{2d}{M^2}(C + D). \quad (1.3.51)$$

A estos valores se les conoce como curvatura tangencial y curvatura sagital respectivamente y a la media de las dos se le llama curvatura de campo y esta dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_S} \right) = \frac{d}{M^2}(3C + D) + \frac{d}{M^2}(C + D) = \frac{2d}{M^2}(2C + D) \quad (1.3.52)$$

que como se puede apreciar para $C = -D/2$ es cero.

A continuación intentaremos ilustrar como deforman estas aberraciones a la imagen. Observemos la siguiente figura

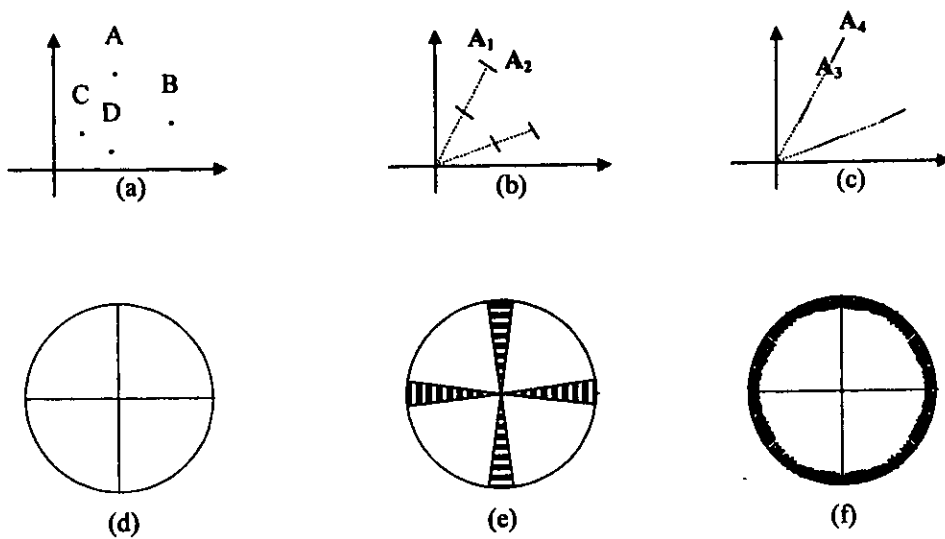


Figura 1.3.4

Supongamos que A,B,C,D son cuatro puntos en el plano objeto. En el plano tangencial, cada punto se convertirá en una línea recta perpendicular a la línea recta que une al punto con el origen (b), mientras que en el plano sagital cada punto irá a dar a una línea recta paralela a la línea recta que une al punto con el origen (c). Por ejemplo el punto A ira a dar a la línea $A_1 A_2$ en el plano tangencial (b) y a la línea $A_3 A_4$ en el plano sagital. Entonces si tuviéramos un objeto como el de (d) este se convertiría en (e) en el plano tangencial y en (f) en el plano sagital.

Distorsión

Por último el coeficiente E representa la distorsión en la imagen. Nuevamente para estudiar su significado físico consideraremos un punto en el plano objeto con coordenadas (x_0, y_0) , y que el sistema está libre de las otras aberraciones ($A = B = C = D = 0$). Bajo estas condiciones la ecuación 1.3.27 la podemos reescribir de la siguiente forma

$$X_3 = E(x_0^2 + y_0^2)x_0, \quad Y_3 = E(x_0^2 + y_0^2)y_0. \quad (1.3.53)$$

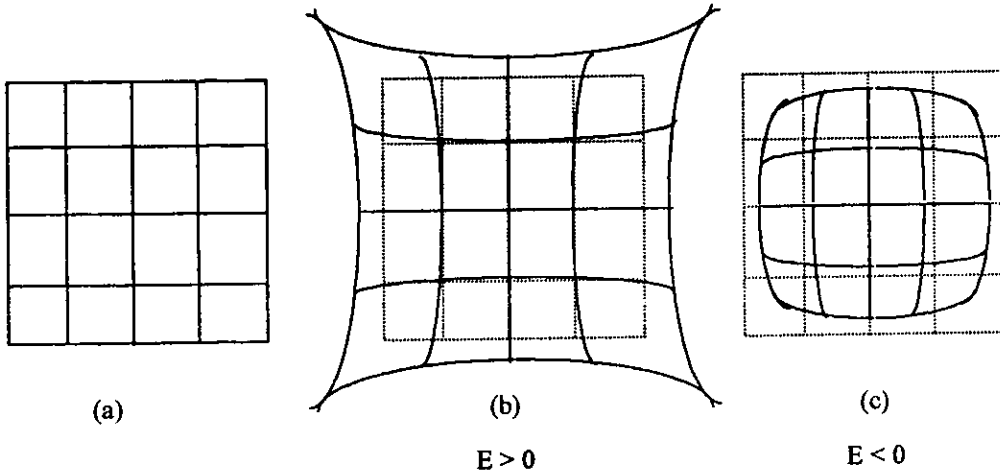


Figura 1.3.5

Consideremos una malla cuadrada como la representada en la figura 1.3.5, sea a la distancia entre líneas. Solo analizaremos un cuadrante en detalle ya que los demás los podemos obtener por simetría. Las coordenadas de varios puntos de intersección en el primer cuadrante estarán dadas por $(0,0)$, $(a,0)$, $(2a,0)$, (a,a) , $(a,2a)$, $(2a,a)$ y $(2a,2a)$. Las coordenadas en el plano imagen paraxial para el punto (x_0, y_0) estarán dadas por

$$x_1 = Mx_0 + E(x_0^2 + y_0^2)x_0 \quad (1.3.54a)$$

$$y_1 = My_0 + E(x_0^2 + y_0^2)y_0 \quad (1.3.54b)$$

donde M es el aumento transversal del sistema. Consideremos por simplicidad que el sistema posee amplificación transversal unitaria positiva, las coordenadas de los puntos considerados anteriormente estarán dadas por: $(0,0)$, $(a+Ea^3,0)$, $(2a+4Ea^3,0)$, $(0,a+Ea^3)$, $(0,2a+4Ea^3)$, $(a+2Ea^3,a+2Ea^3)$, $(a+5Ea^3,2a+10Ea^3)$, $(2a+10Ea^3,a+5Ea^3)$, $(2a+16Ea^3,2a+16Ea^3)$.

Considerando estos valores se realizó la Figura 1.3.5 (b) para $E > 0$ y (c) para $E < 0$. Donde las líneas punteadas representan la imagen sin deformar. A estas deformaciones de la imagen se les conoce como deformación de pincushion (b) y deformación de barril (c).

Físicamente estas deformaciones se observan cuando en la pupila de salida tenemos una abertura muy pequeña de manera que $\xi = \eta = 0$ esto provoca que la única aberración distinta de cero sea la Distorsión, ya que E es el único coeficiente distinto de cero.

Además, por una abertura con estas características a cada punto en la imagen le corresponde un solo rayo, esto trae como consecuencia que solo la aberración debida a la distorsión del objeto por una ampliación no uniforme sea la única que sobreviva.

Es posible considerar el caso en que todas las aberraciones de Seidel están presentes al mismo tiempo. La imagen resultante sería una combinación de la forma de todas las imágenes que hasta ahora hemos considerado. Para obtenerla combinemos las ecuaciones 1.3.30 para obtener

$$\begin{aligned} & \left\{ X_3 - 2Bx_0\rho^2 - Ex_0^3 - [A\rho^3 + (3C + D)x_0^2\rho] \cos\varphi \right\}^2 + \\ & + \left\{ Y_3 - [A\rho^3 + (C + D)x_0^2\rho] \sin\varphi \right\}^2 = (Bx_0\rho^2)^2. \end{aligned} \quad (1.3.55)$$

Esta ecuación representa a un círculo de radio $Bx_0\rho^2$ cuyo centro se mueve sobre una elipse con semiejes $A\rho^3 + (3C + D)x_0^2\rho$ y $A\rho^3 + (C + D)x_0^2\rho$ con centro en $(2Bx_0\rho + Ex_0^3, 0)$. Cada vez que el centro del círculo da una vuelta completa sobre la elipse, éste gira sobre su propio eje 2 veces.

Capítulo II.- Clasificación de las Catástrofes

Las ecuaciones y su comportamiento han sido estudiadas durante muchos años analizando sus variables, los parámetros que afectan a las mismas jugaban en un segundo termino y se consideraba muy complicado un análisis del comportamiento cualitativo de las mismas. Finalmente por medio de la teoría de las catástrofes es posible predecir para que valores de los parámetros se obtienen cambios muy significativos en el comportamiento cualitativo de un sistema. A continuación se expone brevemente un primer acercamiento a el programa de la teoría de las catástrofes así como algunos ejemplos para sistemas con simetría.

Supongamos que el estado de un sistema físico está descrito por las variables de estado $\Psi_j(t, x_i; c_\alpha)$, donde t y x_i juegan el papel de las variables y podrían ser, respectivamente, el tiempo y la posición; mientras que las c_α representan un conjunto de parámetros, los cuales describen la influencia o las perturbaciones del medio donde se encuentra el sistema. Debido a que estos parámetros pueden controlar cualitativamente las propiedades de las soluciones $\Psi_j(t, x_i; c_\alpha)$, las c_α son llamadas parámetros de control. Las variables de estado resultan ser las soluciones de ecuaciones que expresan las leyes dinámicas del sistema físico considerado. En Óptica las variables podrían ser el momento óptico p , la altura a la que incide el rayo y los parámetros de control el índice de refracción, el ancho de la ventana, etc. Nosotros nos ocuparemos solamente de aquellos casos en los cuales el sistema dinámico es un sistema gradiente, esto es, cuando por ejemplo, tenemos fuerzas derivables de un potencial $F = -\nabla V$:

$$\frac{d\Psi_j}{dt} + \frac{\partial V(\Psi_j; c_\alpha)}{\partial \Psi_j} = 0. \quad (2.1.1)$$

La Teoría de las Catástrofes estudia la dependencia y la naturaleza del equilibrio del sistema, respecto a los parámetros de control, conforme estos parámetros cambian.

Las propiedades locales, tanto de los potenciales $V(\Psi_j)$ como de las familias de potenciales $V(\Psi_j; c_\alpha)$, están determinadas por una secuencia de teoremas y resultados del análisis funcional los cuales involucran un creciente acercamiento con la Topología. Entre estos resultados destacan el Teorema de la función Implícita del Cálculo Avanzado, el Lema de Morse y finalmente, el Teorema de Thom, el cual es el resultado central de la Teoría de las Catástrofes.

El Teorema de la Función Implícita

Considere una superficie F

$$\{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}. \quad (2.1.2)$$

El teorema de la función implícita nos permite encontrar las condiciones bajo las cuales la superficie tiene una representación única en términos de una función implícita f . Según este teorema, en las vecindades de un punto x_0 sobre la superficie, sobre el cual el plano tangente no es vertical, es decir sobre el cual $D_3 F(x_0) \neq 0$, podremos encontrar una vecindad de x_0 tal que la superficie tiene una representación única de la forma

$$\{(x, y, z) \mid z = F(x, y, z)\}. \quad (2.1.3)$$

Considere por ejemplo la esfera

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\} \quad (2.1.4)$$

Tomemos un punto (x_0, y_0, z_0) sobre el hemisferio superior ($z_0 > 0$). Entonces, para una vecindad del punto (x_0, y_0) en el plano XY, la ecuación de la esfera define implícitamente una función continua f , única en el

dominio de esa vecindad, y que contiene el punto (x_0, y_0, z_0) en su gráfica. Esta función está dada por la regla de correspondencia

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} . \quad (2.1.5)$$

Si (x_0, y_0, z_0) es un punto sobre el hemisferio inferior ($z_0 < 0$), entonces se obtiene un resultado semejante con la función implícita f dada por la regla de correspondencia

$$f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2} . \quad (2.1.6)$$

Sin embargo, si el punto (x_0, y_0, z_0) es un punto sobre la esfera pero con $z_0 = 0$, entonces no es posible encontrar una vecindad en el plano XY para la cual haya una función implícita única, continua, que tenga esta vecindad como dominio y que contenga al punto (x_0, y_0, z_0) en su gráfica. Los puntos $(x_0, y_0, 0)$ difieren de los demás puntos de la esfera en que en estos puntos el plano tangente a la esfera es el paralelo al eje- Z .

En el ejemplo anterior, determinar explícitamente la función f resultó fácil; sin embargo, en general, esta tarea podría ser muy difícil, o aún más, podría no ser factible. Precisamente entonces, el Teorema de la función implícita nos permite asegurar su existencia, y bajo ciertas circunstancias, nos ofrece fórmulas para las derivadas parciales de esta función.

El Lema de Morse

Formas Cuadráticas

Una forma cuadrática general

$$q(x) = \sum_{ij} \lambda_{ij} x_i x_j \quad (2.2.1)$$

en general podrá ponerse en la forma canónica [3]

$$\bar{x}_1^2 + \dots + \bar{x}_r^2 - \bar{x}_{r+1}^2 - \dots - \bar{x}_s^2 \quad (2.2.2)$$

donde $s \leq n$. El número s es llamado el rango de la forma cuadrática y $(s - r)$ el índice de la forma cuadrática q , y cualquier forma cuadrática está determinada de manera única por su rango e índice. Una forma cuadrática resulta ser degenerada siempre que su rango sea menor que el número n de variables. La diferencia $(n - r)$ es el co-rango, y mide el número de direcciones independientes en el espacio de dimensión n de las variables, en las cuales la forma cuadrática resulta degenerada. Podremos representar la forma cuadrática $q(x)$ de la Ec. (2.2.1) en forma matricial mediante la matriz A_{ij} , y así, tenemos

$$q(x) = x \Lambda x^T . \quad (2.2.3)$$

La degeneración de la forma cuadrática tiene lugar si y solo si el determinante de su matriz se anula.

Por ejemplo, en dos dimensiones reales, la forma cuadrática

$$q(x, y) = ax^2 + 2bx + cy^2 \quad (2.2.4)$$

tiene asociada la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} .$$

Puntos Críticos no degenerados o de Morse

Si el sistema físico está en equilibrio, tendremos que sobre un punto particular x_c del espacio de estados, se cumple $\nabla V = 0$. A dichos puntos se les llama puntos críticos de la función V . Las propiedades de estabilidad sobre estos puntos críticos, bajo las condiciones que presentamos a continuación, pueden ser determinadas por los eigenvalores de la matriz de estabilidad, o matriz Hessiana $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$. Claramente, ya no se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Implícita, sin embargo, si se cumple la condición: $\det V_{ij} \neq 0$, entonces los puntos críticos se llaman no-degenerados y el Lema de Morse garantiza la existencia de una forma localmente cuadrática no-degenerada [11]

$$V \cong \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2. \quad (2.3.1)$$

Aquí, las λ_i son los eigenvalores de la matriz de estabilidad V_{ij} , evaluados en el punto crítico. Por medio del cambio de coordenadas siguiente: $\tilde{y}_i = |\lambda_i|^{1/2} y_i$, la forma cuadrática anterior se puede expresar en forma canónica [2]

$$V \cong -\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2 \dots - \tilde{y}_i^2 + \tilde{y}_{i+1}^2 + \dots + \tilde{y}_n^2 \equiv M_i^n(\tilde{y}). \quad (2.3.2)$$

La forma $M_i^n(\tilde{y})$ es llamada una silla- i de Morse.

La matriz Hessiana determina si un punto crítico no-degenerado resulta un máximo, un mínimo, o un punto de silla.

Ejemplo. En las siguientes funciones en dos variables el origen resulta un punto crítico no-degenerado, representando un ejemplo de un máximo, un mínimo, y un punto de silla, respectivamente,

$$f(x, y) = -x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2, \quad x^2 - y^2 \quad (2.3.3)$$

Además, el punto crítico es aislado, i.e., en una vecindad de puntos alrededor de él, no existen otros puntos críticos. Se puede demostrar que los puntos críticos no-degenerados tienen que ser aislados [3].

Formas de Thom

Si el sistema físico está en equilibrio, esto es, si sobre un punto particular x_c del espacio de estados, se cumple $\nabla V = 0$, pero la matriz de estabilidad resulta tal que $\det V_{ij} = 0$, entonces claramente ya no se cumplen las condiciones del Teorema de Morse, y tenemos que los puntos críticos resultan degenerados. Por sí misma, la matriz Hessiana ya no puede determinar la naturaleza del punto crítico degenerado, si este resulta un máximo, un mínimo, un punto de silla, o alguna otra forma más elaborada.

Ejemplo. Considerada en una sola variable, la función $f(x) = x^2$, tiene en el origen un punto crítico aislado y no-degenerado. En cambio, para todas las funciones siguientes, el origen resulta todavía un punto crítico aislado, pero degenerado

$$f(x) = x^n, \quad n = 3, 4, 5, 6, 7. \quad (2.4.1)$$

El criterio de la segunda derivada no puede determinar por sí mismo la naturaleza del punto crítico. Por ejemplo, para el caso $n = 3$ en la ecuación anterior, la segunda derivada en el origen se anula, y tenemos un punto de inflexión, pero para $n = 4$, la segunda derivada en el origen también se anula, y sin embargo tenemos un mínimo.

Ejemplo. La siguiente función, considerada en dos variables, (x, y) , tiene sus puntos críticos degenerados y no aislados

$$f(x, y) = x^2. \quad (2.4.2)$$

Su matriz Hessiana (matriz de segundas derivadas [8]) resulta

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera observamos que el eigenvalor de la matriz, asociado a la variable x , nunca se anula. En cambio, en la variable y siempre se tiene un punto crítico degenerado. La función anterior tiene un mínimo en la dirección del eje- X , cuando $x = 0$, y este punto crítico resulta degenerado y no-aislado en la dirección del eje- Y .

Ejemplo. La siguiente función tiene en el origen un punto crítico degenerado y aislado

$$f(x, y) = x^2y - y^3, \quad (2.4.3)$$

Su derivada resulta

$$\nabla f = (2xy, x^2 - 3y^2). \quad (2.4.4)$$

Su matriz Hessiana resulta

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -6y \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. La función

$$f(x) = x^3 + c_1x + c_0, \quad (2.4.5)$$

tiene en el origen un mínimo aislado y no degenerado. Este punto de Morse resulta estable, sin importar la variación que sufran los parámetros c_1 y c_0 . Sin embargo esto no es así para otras funciones, para las cuales se incluyen puntos no de Morse, como veremos a continuación. Por ejemplo, la estabilidad del punto crítico de la función

$$f(x) = x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \quad (2.4.6)$$

dependerá de la elección de los parámetros. Sin pérdida de generalidad, podemos llevar la expresión anterior a la forma

$$g(x) = x^3 + px + q, \quad (2.4.7)$$

donde

$$p = c_1 - \frac{c_2^2}{3}, \quad q = c_0 - \frac{c_1c_2}{3} + 2\left(\frac{c_2}{3}\right)^3. \quad (2.4.8)$$

Para esta función tenemos que sus derivadas resultan

$$g'(x) = 3x^2 + p, \quad g''(x) = 6x \quad (2.4.9)$$

Así, vemos que si $p > 0$, no existen puntos críticos. Si $p < 0$, entonces existen dos puntos críticos aislados, no-degenerados, con un máximo en $x_{cr} = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ y un mínimo en $x_{cr} = \sqrt{-\frac{p}{3}}$. Si $p = 0$, entonces existe un solo punto crítico aislado, degenerado, en $x_{cr} = 0$, como ya vimos en el ejemplo de la Ec.(2.4.1).

En este último ejemplo podemos apreciar cómo es controlado el sistema por los parámetros; de hecho debemos apreciar que existe en realidad un solo parámetro, p , matemáticamente relevante, el cual involucra a los dos parámetros físicos, c_1 y c_2 , los cuales son los que manejan la conducta cualitativa del sistema físico descrito por el potencial $f(x)$ en la Ec.(2.4.6).

Si el potencial $V(x_i; c_\alpha)$, depende de uno o más parámetros de control c_α , entonces la matriz de estabilidad Hessiana $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ y sus eigenvalores λ_i , también dependerán de estos parámetros de control.

Entonces uno o más de los eigenvalores podrían anularse para ciertos valores de los parámetros, y así tendríamos el resultado: $\det V_{ij} = 0$, al evaluarse sobre alguno de los puntos críticos, resultando estos degenerados. Puesto que no se cumplen las hipótesis del Lema de Morse, ya no sería posible, sobre estos puntos, asignar localmente una forma cuadrática no-degenerada. Sin embargo, sobre un punto crítico degenerado resulta posible asignar una forma canónica para el potencial. Este es el importante resultado conocido como Lema de la Partición de Thom [12], [3], [11]

Lema. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función lisa, con $Df = 0$, cuyo Hessiano en 0 tiene rango r (y co-rango $n - r$). Entonces f es equivalente, alrededor de 0, a una función de la forma

$$\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2 + \hat{f}(x_{r+1}, \dots, x_n), \quad (2.4.10)$$

donde

$$\hat{f}: \mathbb{R}^{n-r} \rightarrow \mathbb{R},$$

y es lisa.

Este Lema nos dice que alrededor de un punto crítico degenerado, una función f , lisa, de n variables, puede expresarse mediante coordenadas adecuadas, como la suma de dos tipos diferentes de funciones, una en la forma cuadrática no-degenerada en r variables, más otra función totalmente degenerada con un número reducido de variables, igual al co-rango del Hessiano. Por ejemplo, si en un punto crítico degenerado una función tiene 12 variables y es de co-rango 2, se requerirá estudiar solamente una función en dos variables. Esta drástica reducción en el número de variables es lo que hace tan importante y sorprendente este Lema.

Así, si sobre uno de los puntos críticos del potencial $V(x_i; c_\alpha)$ se anulan $l = n - r$ de los eigenvalores de su Hessiano: $\lambda_1(c), \dots, \lambda_l(c)$, sobre cierto punto del espacio de parámetros, $c = c^0$, entonces el Lema de partición de Thom puede ser utilizado para partir la función en una parte de Morse, asociada con los r eigenvalores distintos de cero, y una parte totalmente degenerada de $l = n - r$ variables y de los c_α parámetros.

Teorema de Thom

Bajo ciertas condiciones, que incluyen la limitación a un número de parámetros $k \leq 5$, y la ausencia de restricciones impuestas por simetría en la familia de funciones $V(x_i; c_\alpha)$, el teorema de Thom [Thom,(1972)] establece la existencia de una transformación de variables lisa, de manera que la función se puede escribir de una forma canónica

$$V \equiv \tilde{G}(l) + \sum_{j=l+1}^n \lambda_j y_j^2. \quad (2.5.1)$$

La función $\tilde{G}(l)$ es llamada el germen de la catástrofe. En la Tabla 1 se presentan todos los germen de catástrofes para $k \leq 5$, en el caso de $l \leq 2$ eigenvalores nulos del Hessiano.

En conclusión, en ausencia de toda simetría, cuando degenera un punto crítico de una cierta función, entonces es posible aproximar dicha función alrededor de ese punto, por medio de alguna de las catástrofes elementales, cuando el número de parámetros esenciales resulta menor o igual a cinco. En la Tabla 1, se presentan estas catástrofes elementales, y tenemos que para dos variables se requieren tres o más parámetros asociados con alguna forma canónica.

Tabla 1. *Catástrofes elementales de Thom*

Nombre	k	Germen	Perturbación
A_2	1	x^3	a_1x
A_{23}	2	$\pm x^4$	$a_1x + a_2x^2$
A_4	3	x^5	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
A_{35}	4	$\pm x^6$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$
A_6	5	x^7	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$
D_4	3	$x^2y - y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
D_{34}	3	$x^2y + y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
D_5	4	$x^2y + y^4$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2$
D_{66}	5	$x^2y - y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
D_6	5	$x^2y + y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
$E_{\pm 6}$	5	$x^3 \pm y^4$	$a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5xy^2$

Catástrofes con simetría

Las funciones y familias de funciones que hemos considerado hasta ahora son de un carácter muy general, y en la terminología usual se les llama típicas. Lo anterior significa que no existe restricción en los términos de la serie de Taylor de una función, ni tampoco se imponen restricciones a las relaciones entre dichos términos. La Teoría Elemental de las Catástrofes supone el caso típico. Si existe, sin embargo, una restricción sobre un sistema, el cual es descrito por una función, esta restricción se reflejará por medio de restricciones entre los términos de la expansión en serie de Taylor de la función alrededor de algún punto. El estudio de los casos atípicos representa un problema abierto en la Teoría de las Catástrofes en donde se han hecho avances, particularmente para funciones restringidas por diferentes clases de simetría. En este trabajo donde tenemos la existencia del eje óptico, nos interesa considerar sistemas que presentan una restricción originada por la simetría de rotación de un eje.

Para ilustrar el punto presentado aquí, daremos algunos ejemplos en los cuales tomamos una familia de funciones $F(x, y; c)$, con dos variables de estado (x, y) , y k parámetros de control, $c \in \mathbb{R}^k$. Consideremos que F tiene un punto crítico en el origen de coordenadas, y veremos el efecto restrictivo que imponen distintas clases de simetría. En la parte final plantearemos el programa de la Teoría de las Catástrofes extendido al caso de la presencia de una simetría, el cual podremos aplicar en el capítulo siguiente del presente trabajo debido a que, como ya se mencionó, nosotros nos ocuparemos de sistemas ópticos donde existe un eje óptico, el cual representa un eje de simetría ante rotaciones del sistema alrededor de él.

Simetría C_{3v}

Iniciamos el análisis de una función $F(x, y; c)$, suponiendo que su simetría es la del grupo C_{3v} . Esta función resulta, por ejemplo si tiene una dependencia en el ángulo γ de la forma $\cos(3\gamma)$, donde expresamos en coordenadas polares la posición de un punto $(x, y) \rightarrow (\rho, \gamma)$. Una forma general de la F con simetría ante el grupo C_{3v} , es invariante ante rotaciones de $2\pi/3$ radianes; así como ante reflexiones en los tres ejes: $\gamma = 0, \gamma = 2\pi/3$ y $\gamma = 4\pi/3$. Esas tres rotaciones y estas tres reflexiones representan las 6 operaciones del grupo llamado C_{3v} .

Estudiando el efecto de las transformaciones del grupo puntual C_{3v} sobre el vector unitario en el plano a $(1,0)$ se encuentran los vectores

$$b = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad c = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

(ver Fig. 2.1.1) y se concluye que se transforman entre sí bajo la acción del grupo C_{3v} . Esto sugiere que se consideren los polinomios de primer orden en las variables (x, y) del plano cartesiano:

$$p_a(x, y) = x, \quad p_b(x, y) = \frac{-x + \sqrt{3}y}{2}, \quad p_c(x, y) = \frac{-x - \sqrt{3}y}{2} \tag{2.6.1}$$

La acción de los elementos del grupo C_{3v} sobre estos polinomios se exhibe en la tabla siguiente:

	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
p_a	p_a	p_b	p_c	p_a	p_c	p_b
p_b	p_b	p_c	p_a	p_c	p_b	p_a
p_c	p_c	p_a	p_b	p_b	p_a	p_c

Es inmediato mostrar que los polinomios (2.6.1) no son linealmente independientes, ya que

$$p_a(x, y) + p_b(x, y) + p_c(x, y) = 0,$$

y entonces cualesquiera dos de ellos sirven como base para generar polinomios que portan la representación irreducible bidimensional, que denotamos $\{\lambda_3\}$, del grupo C_{3v} . Por ejemplo, el polinomio de grado d más general está dado por el desarrollo

$$P_d^{\{\lambda_3\}}(x, y) = \sum_{p,q} A_{p,q} p_a^p p_b^q,$$

donde $p + q = d$.

Para demostrar lo mencionado arriba utilizamos los operadores de proyección asociados a las tres representaciones irreducibles del grupo:

$$p^{(\lambda_1)} = \frac{1}{6}(E + C_3 + C_3^2 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$p^{(\lambda_2)} = \frac{1}{6}(E + C_3 + C_3^2 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3),$$

$$p^{(\lambda_3)} = \frac{1}{6}(2E - C_3 - C_3^2).$$

La aplicación de estos operadores de proyección sobre los polinomios (2.6.1) da el resultado siguiente:

$$p^{(\lambda_1)} p_\alpha = p^{(\lambda_2)} p_\alpha = 0, \quad p^{(\lambda_3)} p_\alpha = \frac{1}{2} p_\alpha$$

donde $\alpha = a, b, c$. De la Tabla 2 es inmediato mostrar que el polinomio de grado d dado por

$$J(d) = \frac{1}{3}(p_a^d + p_b^d + p_c^d)$$

es invariante ante el grupo C_{3v} . A continuación calculamos los polinomios invariantes hasta de cuarto grado:

$$J(0) = 1, \quad J(1) = 0, \quad J(2) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$J(3) = \frac{1}{4}(x^3 - 3xy^2), \quad J(4) = \frac{3}{8}(x^2 + y^2)^2.$$

Para estudiar los polinomios posibles que se pueden generar con los invariantes basta considerar la región de la recta $\gamma = 0$ a la recta $\gamma = \pi/3$ en la Fig. 2.1.1. Así, vemos que en el desarrollo de la serie de Taylor alrededor del origen, después de restar el término constante y dividir toda la serie por un factor común, los términos lineales serán cero, por tratarse de un punto crítico. Si tenemos el caso de dos parámetros de control, i.e. $k = 2$, los términos cuadráticos y cúbicos se eliminan por una adecuada elección de los parámetros. El primer término que permanece, invariante ante el grupo de simetría, es el *germen de la función*. Esto es, podemos concluir que el germen de F resulta la cuártica: $(x^2 + y^2)^2$. Por la expresión calculada para $J(4)$, notamos que el germen es efectivamente invariante ante el grupo C_{3v} . Así, no requerimos de una transformación que preserve la simetría y podremos simplemente despreciar los términos de grado más alto de la serie de Taylor

$$F(x, y; c) = a_1(x^2 + y^2) + a_2(x^3 - 3xy^2) + (x^2 + y^2)^2.$$

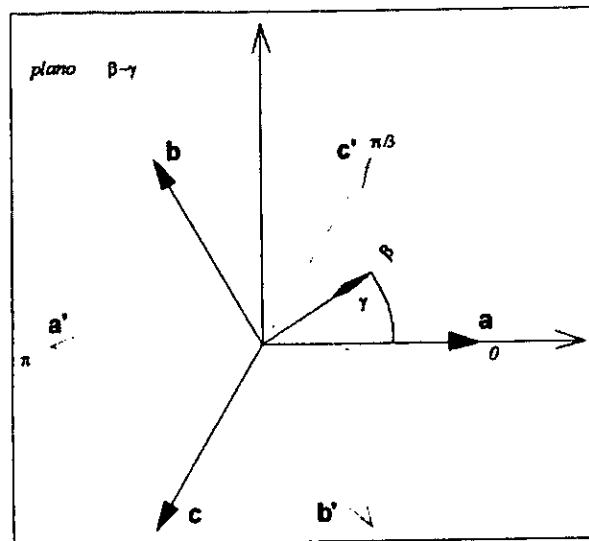


Figura 2.1.1 Acción de los elementos C_{3v} sobre los vectores $a, b, y c$; así como

$$\text{sobre } a' = (-1, 0), \quad b' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{y} \quad c' = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Simetría C_{4v}

La función $F(x, y; c)$ tiene la simetría del grupo C_{4v} si resulta invariante ante el grupo de ocho elementos consistentes en cuatro rotaciones de $\pi/2$ radianes, cada una, y cuatro reflexiones ante los ejes $x = 0, y = 0, x = y, y x = -y$.

Tabla 3. Acción del grupo C_{4v} sobre las coordenadas (x, y) de cualquier punto en el plano $X - Y$

	E	C_4	C_4^2	C_4^3	σ_{v1}	σ_{v2}	σ_{d1}	σ_{d2}
x	x	y	-x	-y	x	-x	y	-y
y	y	-x	-y	x	-y	y	x	-x

La invariancia de la función $F(x, y; c)$ ante las operaciones del grupo C_{4v} , resulta en que los coeficientes de los términos $x^p y^q$, en su expansión en serie de Taylor alrededor del origen, son cero si p o q son impares, y además, el coeficiente del término $x^p y^q$ resulta idéntico al coeficiente del término $x^q y^p$. Como se puede probar, lo anterior implica la dependencia funcional $F(x^2 + y^2, x^2 y^2; c)$. Así, la expansión en serie de Taylor es de la forma

$$F(x, y; c) = F_{00} + F_{20}(x^2 + y^2) + F_{40}(x^4 + y^4) + F_{22} x^2 y^2 + \dots$$

Simetría ante rotaciones

La invariancia de la función $F(x, y; c)$ ante las operaciones del grupo de rotaciones la podemos expresar mediante la igualdad

$$F(x', y'; c) = F(x, y; c)$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces F es una función solamente invariante de grupo $\rho^2 = x^2 + y^2$, y así, la expansión en serie de Taylor es de la forma

$$F(x,y;c) = F_0 + F_2 \rho^2 + F_4 \rho^4 + \dots$$

En cada una de las expansiones en series de los ejemplos anteriores los coeficientes son funciones de los k parámetros de control c .

Determinación del Germen

Como ya se ha mencionado en la sección anterior, pueden existir valores de los parámetros de una función para los cuales algunos de sus puntos críticos degeneren. Entonces, como sabemos, sobre la región en el espacio de los parámetros en la cual los puntos críticos son degenerados tenemos que la función $F(r, c_k)$ ya no podrá aproximarse por una forma cuadrática no degenerada alrededor del punto crítico correspondiente. Uno puede preguntarse entonces si las propiedades cualitativas de la función quedarán completamente bien determinadas cuando la expansión en serie de Taylor alrededor de los puntos críticos degenerados es cortada para los términos más allá de un cierto orden p , con p finita. Si este fuera el caso, diremos que la función es p -determinada en ese punto. Determinar si una función puede en efecto ser cortada y para qué orden p de su serie de Taylor puede así quedar truncada, se conoce como el problema de la *determinación* [2;3]. En los casos típicos, Mather ha desarrollado un algoritmo para decidir la *determinación* de una función analítica. Lo anterior supone que no existe restricción alguna sobre los coeficientes de la serie de Taylor de la función alrededor del punto crítico.

Cuando el punto crítico degenerado, el cual suponemos en el origen, está bajo alguna simetría impuesta sobre el sistema, como la de un grupo de rotaciones, la del grupo C_{3v} , o cualquier otra, como vimos en los ejemplos, encontraremos ciertas restricciones sobre los términos de su serie de Taylor alrededor de este punto. El programa de la Teoría de Catástrofes se ha extendido para casos en los que tenemos funciones restringidas por simetría. A continuación describimos a grandes rasgos este programa [2] y en el siguiente capítulo aplicaremos esta extensión a nuestros problemas.

1. Se arreglan los coeficientes de la serie de Taylor en orden creciente.
2. Se utilizan los k -grados de libertad de los parámetros de control para eliminar los primeros k coeficientes de Taylor distintos de cero.
3. Se eliminan los términos de grado más alto de la serie de Taylor por medio de una transformación continua y diferenciable que preserve la simetría. La función que permanece será el germen de la función, invariante ante el grupo de simetría.
4. Al desarrollo de términos que fueron eliminados por elección apropiada de los parámetros de control se le llama perturbación universal.

Capítulo III.- Ejemplos de catástrofes en sistemas ópticos.

Las propiedades de las imágenes formadas por lentes y sistemas centrados en general, se pueden estudiar utilizando la aproximación Gaussiana ó paraxial, en la cual se desprecian los términos cuadráticos y de órdenes más altos respecto a la distancia al eje óptico, ó equivalentemente, del ángulo que forman los rayos con dicho eje de simetría. Como un refinamiento en los cálculos, la Teoría de las Aberraciones considera entonces aquellas potencias de órdenes superiores al segundo en la Función Camino Óptico. Esta ha sido la aproximación tradicional, muy exitosa en el estudio de la formación de las imágenes dentro de la aproximación de la Optica Geométrica.

Por otro lado, la conducta de la luz en las vecindades de las regiones de enfocamiento más general, es decir, en las llamadas cústicas, ha sido estudiada en diversas ocasiones en el pasado [1;6]. Las cústicas representan así singularidades en la teoría geométrica de la luz, *i. e.*, aquellas regiones donde la densidad de energía del campo luminoso se hace infinita. La morfología de las cústicas ha sido clasificada en algunos casos por medio de la Teoría de las Catástrofes. En este capítulo se analizan algunos ejemplos en los cuales veremos cómo la aplicación de estos métodos de la teoría de catástrofes nos permite obtener propiedades complementarias a los resultados clásicos de la Optica Geométrica y mediante los cuales, se puede clasificar el grado de degeneración en la imagen paraxial y así establecer un criterio cuantitativo para determinar el orden máximo al cual es necesario aproximar el desarrollo de la serie de Taylor que se asocia con el tratamiento de las aberraciones de la imagen, obteniendo de una nueva manera el comportamiento cualitativo más general de la imagen y sus aberraciones.

3.1. Dioptró plano.

Un problema simple, pero no trivial, que nos deja apreciar la forma de aproximarse en el contexto de la teoría de las catástrofes al estudio de la formación de imágenes y la estructura de sus aberraciones, es el de una superficie plana frontera entre dos medios homogéneos. En esta sección, el uso de la teoría de las catástrofes nos permite justificar que es suficiente considerar términos hasta de tercer orden en la serie de Taylor de las aberraciones, para obtener el comportamiento más general. En la presentación del trabajo, primero recuperamos la ley de Snell a partir del Principio de Fermat; *v. gr.*, partiendo de la condición de que los puntos por los cuales pasa un rayo sean puntos críticos de la función longitud de camino óptico. La posición más general de la imagen, incluida la paraxial, se obtiene imponiendo la condición adicional de que los puntos críticos sean degenerados. Después se discute la estabilidad de la imagen, obteniéndose dos ramas de enfocamiento bajo este criterio, una representada por una catástrofe con simetría y la otra resultando en una línea focal, la cual representa una catástrofe de mayor complejidad estructural. Finalmente, con esta perspectiva nos encontramos ante la posibilidad de asociar este problema con el de la Optica Global y el Teorema de Damién, en donde se considera la geometría de todo el frente de onda, refractándose en toda una superficie.

Como sabemos, la longitud de camino óptico Φ depende del camino C de una manera muy general; sin embargo, si es posible formar el camino por un número finito de segmentos, siendo cada uno de ellos un rayo, podremos escribir la longitud de camino óptico como una función que depende de un número finito de variables. Así, para calcular la longitud de camino óptico recorrida por un rayo en el ejemplo del dioptró plano, tomaremos el camino formado por dos segmentos de recta: $P_0 A$ y $A P_i$. El primer segmento de recta viaja en un medio de índice de refracción n , desde el punto P_0 en el objeto, hasta el punto A sobre la interface entre los dos medios (Figura 3.1.1). El segundo segmento atraviesa desde el punto A hasta el punto final P_i . Por lo tanto la longitud de camino óptico estará dada por :

$$\Phi = n|P_0 A| + |A P_i| \quad (3.1.1)$$

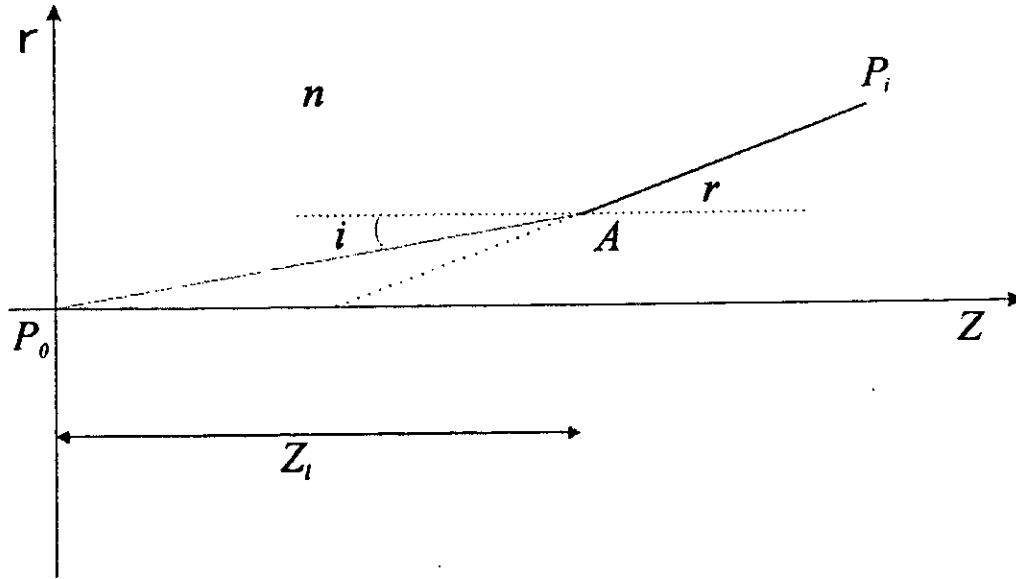


Figura 3.1.1 : Diagrama del dioptra plano

Si expresamos el resultado anterior en coordenadas cilíndricas obtenemos :

$$\Phi(r; R) = n\sqrt{z_i^2 + \rho^2} \pm \sqrt{(z_i - z_i)^2 + \rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos(\phi - \phi_i)} \quad (3.1.2)$$

donde $r = (\rho, \phi, z_i)$ es el vector de posición del punto A , y $R = (\rho_i, \phi_i, z_i)$ representa a la posición final P_i . El signo positivo está asociado con los rayos reales que se encuentran dentro de la región para la cual $z > z_i$; el signo negativo se asocia a rayos virtuales para los cuales $z < z_i$.

El punto final P_i puede ser cualquier punto del espacio y sus coordenadas pueden tomarse como parámetros de control, mientras que las coordenadas del punto A las tomaremos como las variables del sistema. Según el Principio de Fermat, determinamos las trayectorias de los rayos tomando los puntos extremos en la función Φ , calculando sus derivadas con respecto a estas variables.

Para el presente problema hemos considerado que la distancia entre la fuente y la superficie refractora está fija, es decir z_i es una constante. A continuación encontraremos el gradiente de la longitud de camino óptico con respecto a las variables ρ y ϕ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{n\rho}{\sqrt{z_i^2 + \rho^2}} \pm \frac{\rho - \rho_i \cos(\phi - \phi_i)}{\sqrt{(z_i - z_i)^2 + \rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos(\phi - \phi_i)}} \quad (3.1.3a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \pm \frac{\rho\rho_i \sin(\phi - \phi_i)}{\sqrt{(z_i - z_i)^2 + \rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos(\phi - \phi_i)}} \quad (3.1.3b)$$

Los valores extremos de Φ se obtienen cuando se anulan ambas derivadas en la ecuación (3.1.3). Respecto a la variable angular ϕ , los valores críticos los obtenemos anulando la derivada expresada en la ecuación (3.1.3b), de donde se obtiene la siguiente condición :

$$(\phi - \phi_i) = 0, \pi . \quad (3.1.4)$$

Esto implica que el rayo refractado se encuentra sobre el plano de incidencia. El plano de incidencia es subtendido por el rayo incidente y la normal en el punto de incidencia. Ahora, para obtener el valor crítico respecto de la variable ρ , pedimos que la derivada expresada en la ecuación (3.1.3a) se anule. Si además incluimos la condición anterior obtenemos:

$$\frac{n\rho}{\sqrt{z_i^2 + \rho^2}} \pm \frac{\rho \mp \rho_i}{\sqrt{(z_i - z_i)^2 + (\rho \mp \rho_i)^2}} = 0 \quad (3.1.5)$$

donde el signo - corresponde al valor $\phi = 0$ y el signo + corresponde al valor $\phi = \pi$.

Si llamamos al ángulo de incidencia i y al ángulo de refracción r , encontramos las siguientes relaciones :

$$\sin i = \frac{\rho}{\sqrt{z_i^2 + \rho^2}} \quad (3.1.6a)$$

y

$$\sin r = \mp \frac{\rho \mp \rho_i}{\sqrt{(z_i - z_i)^2 + (\rho \mp \rho_i)^2}} \quad (3.1.6b)$$

Por lo tanto la ecuación 3.1.5 representa la ley de refracción de Snell

$$n \sin i = \sin r \quad (3.1.7)$$

La ecuación 3.1.5 define la familia de todos los rayos refractados por la superficie $z = z_i$ para los cuales el punto $(r; R) = (z_i, \rho, \phi, z_i, \rho_i, \phi_i)$ es crítico. Las propiedades del punto crítico se analizan por medio de las derivadas de orden más alto de la función Φ . Su matriz de segundas derivadas se llama matriz Hessiana y la denotamos por M . Dicha matriz define las propiedades de estabilidad de la función. Escribamos el Hessiano como :

$$M = \begin{pmatrix} M_{\rho\rho} & M_{\rho\phi} \\ M_{\phi\rho} & M_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (3.1.8)$$

donde los subíndices denotan las derivadas parciales respectivas. Un punto crítico $(r, R)_{CR}$ será degenerado si el $\det M = 0$. Generalmente este no será el caso y tendremos que: $\det M \neq 0$. A estos puntos se les conoce como puntos de Morse, y el valor del determinante del Hessiano también define la naturaleza del punto crítico. Sin embargo al ir cambiando el valor del conjunto de parámetros en R , dos ó más puntos críticos podrían degenerar, y al lugar de todos estos puntos R se le conoce como cáustica.

Al imponer la condición de que el rayo refractado se encuentre en el plano de incidencia (ecuación 3.1.4) la matriz M se vuelve diagonal :

$$M_{\rho\rho} = \frac{n z_i^2}{\sqrt[3]{z_i^2 + \rho^2}} - \frac{(z_i - z_i)^2}{\sqrt[3]{(z_i - z_i)^2 + (\rho - \rho_i)^2}} \quad (3.1.9a)$$

$$M_{\rho\phi} = M_{\phi\rho} = 0 \quad (3.1.9b)$$

$$M_{\phi\phi} = -\frac{\rho\rho_i}{\sqrt{(z_i - z_i)^2 + (\rho - \rho_i)^2}} \quad (3.1.9c)$$

De estos resultados podemos observar que un punto crítico $(r, R)_{CR}$ es degenerado cuando $\rho_i = 0$, ya que para este valor de ρ el eigenvalor asociado con ϕ ($M_{\phi\phi}$) toma el valor de cero (ecuación 3.1.9). Este caso representa la rama de la cáustica que consiste en una línea a lo largo del eje óptico y atraviesa prácticamente toda la región iluminada. Para encontrar las otras ramas de la cáustica resolveremos el sistema de ecuaciones simultáneas formado por las ecuaciones (3.1.5) y el lado derecho de la ecuación (3.1.9a) igualado a cero, y bajo la condición impuesta por la ecuación (3.1.4). Substituyendo la ecuación (3.1.4) en las ecuaciones (3.1.5) y (3.1.9a), obtenemos :

$$\frac{n\rho}{\sqrt{z_i^2 + \rho^2}} \pm \frac{\rho \mp \rho_i}{\sqrt{(z_i - z_i)^2 + (\rho \mp \rho_i)^2}} = 0 \quad (3.1.10a)$$

y

$$\frac{n z_i^2}{\sqrt{(z_i^2 + \rho^2)^3}} - \frac{(z_i - z_i)^2}{\sqrt{[(z_i - z_i)^2 + (\rho - \rho_i)^2]^3}} = 0 \quad (3.1.10b)$$

Eliminando ρ de las ecuaciones anteriores obtenemos

$$[n(z_i - z_i)]^{2/3} + [(n^2 - 1)\rho_i]^{2/3} = z_i^{2/3} \quad (3.1.11)$$

que representa la ecuación de una curva cuspidal de revolución en el espacio de parámetros. En efecto, se tratará de la evoluta de una elipse ó de una hipérbola, cuando $z_i = 1$ [14]. Una de las evolventes de esta curva esta dada por

$$\frac{(z_i - 1)^2}{n^2} + \frac{\rho_i^2}{n^2 - 1} = 1 \quad (3.1.12)$$

donde hemos hecho un cambio de escala asignándole un valor unitario a la distancia z_i . La evoluta (ecuación 3.1.11) es la evoluta de una elipse para incidencia interna $n > 1$, ó de una hipérbola para

incidencia externa $n < 1$. La evolvente representa el Frente de Fase Cero, que resulta importante al aplicar la transformación de Damièn.

Desde un punto de vista más avanzado, M. V. Berry [13] estudia el problema de las Catástrofes Ópticas en general y dentro de este esquema la estructura general de esta cáustica puede ser clasificada. La cáustica completa está formada por las dos partes, la línea a lo largo del eje óptico y el cono de revolución cuspidal. Este cono, si no se rompe la simetría axial es estructuralmente estable. Las cúspides sobre el eje z de la curva (3.1.11) son los focos umbilícos hiperbólicos, los cuales representan la imagen virtual de un objeto real sobre uno de los focos de la elipse (3.1.12), y el otro, la imagen real de un objeto virtual en el otro foco; además, no existen puntos umbilícos elípticos. Para demostrar esto, recordemos primero que los puntos umbilícos son los puntos cónicos locales donde las dos curvaturas principales de los frentes de onda se intersectan; entonces, la condición para que un punto sea umbilíco está dada por:

$$M_{\rho\rho} - M_{\phi\phi} = M_{\rho\phi} = 0 \quad 3.1.13$$

que es precisamente la ecuación (3.1.10b) junto con las condiciones de degeneración, discutidas en el párrafo anterior, para puntos críticos sobre el eje óptico. Cuando se introduce una perturbación del sistema óptico, como puede suceder si se rompe la simetría axial, podemos observar el desdoblamiento de la cáustica. El desdoblamiento de la punta del cono focal cuspidal de la cáustica está dado por una catástrofe umbilíca elíptica ó hiperbólica, según las curvas de nivel de la curvatura de los frentes de onda cerca de los puntos umbilícos formen elipses o hipérbolas. Es posible clasificar a los puntos umbilícos de la manera planteada por Berry en términos de los coeficientes de los términos cúbicos de una expansión local de la función longitud de camino óptico. Estas son terceras derivadas evaluadas en el punto umbilíco, y emplearemos la siguiente notación en coordenadas cartesianas

$$\alpha \equiv \phi_{xxx}, \quad \beta \equiv \phi_{xxy}, \quad \gamma \equiv \phi_{xyy}, \quad \delta \equiv \phi_{yyy} \quad 3.1.14$$

donde el subíndice i , denota derivada con respecto a la variable i . La clasificación de catástrofes para un punto umbilíco se realiza de la siguiente manera, sea D el coeficiente de clasificación dado por

$$D(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \equiv 4(\alpha\gamma - \beta^2)(\beta\delta - \gamma^2) - (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \quad 3.1.15$$

- Si D es mayor que cero entonces el punto es (E)-umbilíco.
- Si D es menor que cero el punto es (H)-umbilíco.

Ahora para probar que los puntos son hiperbólicos, podemos hacer la gráfica de D en la vecindad de los puntos críticos degenerados para el eje z en todos los casos. La gráfica resulta siempre negativa como se ilustra en la figura 3.1.2 para los valores de índice de refracción $n = 1.5$ y $z_l = 1$.

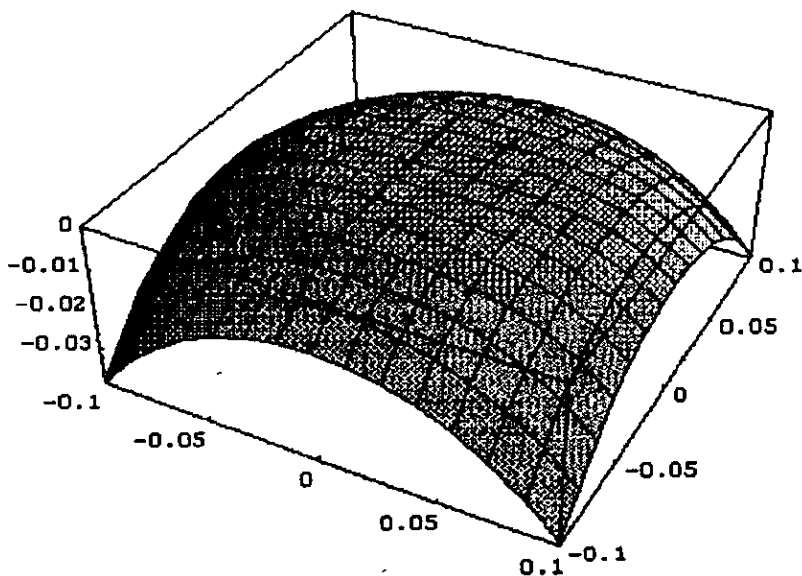


figura 3.1.2

3.2. Casquete esférico.

Uno de los problemas clásicos de la óptica geométrica es el de la formación de las imágenes ante la refracción por medio de un casquete esférico. En la aproximación paraxial de este problema se obtiene como un resultado clásico la ecuación de Gauss. Esta ecuación rige la conducta de la imagen paraxial y sirve de base para los cálculos en la formación de las imágenes en las lentes. En la presente sección demostraremos que aplicando los métodos de la teoría de catástrofes también es posible reproducir estos resultados de la óptica geométrica. La posición de la imagen paraxial resultará de estudiar la degeneración de los puntos críticos en la función camino óptico. Más aún, como un resultado interesante, con este mismo método veremos que al anular el germen de la catástrofe asociada a esta función, resulta la formación de una imagen perfecta.

Como sabemos, la longitud de camino óptico Φ depende del camino C de una manera muy general; sin embargo, según nuestro método mencionado anteriormente, es posible formar este camino por un número finito de segmentos, siendo cada uno de ellos un rayo, y podremos escribir la longitud de camino óptico como una función que depende de un número finito de variables. Así, para calcular la longitud de camino óptico recorrida por un rayo, tomaremos el camino formado por dos segmentos rectilíneos, uno por cada una de las regiones homogéneas. Como se verá, construiremos una familia de funciones asociadas a la longitud de camino óptico, para las cuales, las coordenadas del punto de incidencia se asocian a las variables, y los parámetros nos permiten ubicar la posición del punto final.

Coloquemos un casquete esférico refractor con su vértice en el origen de coordenadas y el eje-z como eje de simetría. Tomemos una fuente luminosa puntual, P_0 , situada sobre este eje a una cierta distancia $|Z_0|$.

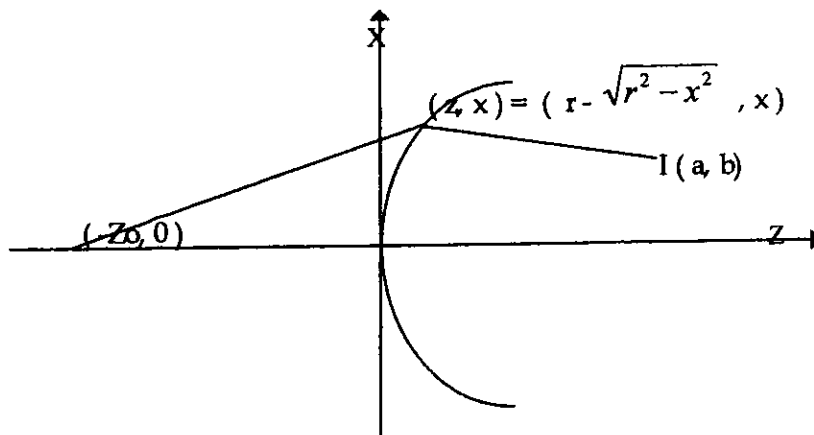


Figura 3.2.1

La longitud de camino óptico desde un punto P_0 sobre el eje de simetría, hasta un punto P_1 cualquiera, refractándose sobre la superficie del casquete en el punto A cuyas coordenadas son (z, x) , estará dada por :

$$L(x, a, b) = \sqrt{(Z_0 - r + \sqrt{r^2 - x^2})^2 + x^2} + n\sqrt{(r - a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 + (x - b)^2} \quad (3.2.1)$$

donde x es la altura a la cual incide el rayo sobre el casquete medida desde el eje óptico, y a, b , son las coordenadas de algún punto después de refractado el rayo virtual (Fig. 3.2.1).

Se considera en primer lugar el Principio de Fermat para obtener todos los rayos reales refractados por el casquete esférico. En un tratamiento convencional, la imagen resulta de considerar un cono finito de rayos, próximos al eje-óptico, para los cuales la función camino óptico es constante en primer orden de aproximación.

Sin embargo, bajo el tratamiento de la teoría de las catástrofes, veremos que utilizando solamente el rayo axial ($x = 0$), seremos capaces de recuperar la ecuación Gaussiana, y aún más, los puntos para los cuales la imagen es perfecta.

Desde el punto de vista de las catástrofes, la Ec. (3.2.1) representa en realidad una familia de funciones, en la variable x , y con los parámetros (a, b) . Como un primer paso, se encuentran los puntos críticos. Posteriormente, se encuentran las condiciones de degeneración de estos puntos críticos en función de los valores de los parámetros. Finalmente, se determinan las condiciones de máxima degeneración de estos puntos críticos. En este problema, por simetría, la máxima degeneración se encuentra sobre el eje-óptico, de esta manera tomamos el valor $x = 0$, y obtenemos en primer lugar los puntos críticos de la función camino óptico

$$\left. \frac{\partial L(x, a, b)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{bn}{\sqrt{b^2 + a^2}} = 0 \quad (3.2.2)$$

lo cual implica necesariamente $b = 0$ ($a \neq 0$), de donde vemos que si el rayo que sale del objeto está sobre el eje Z, su imagen al atravesar la lente debe estar, evidentemente, sobre el eje Z.

Si ahora, por medio de la segunda derivada encontramos cuáles de estos puntos, para este mismo rayo axial, son puntos críticos degenerados, obtenemos que :

$$\left. \frac{\partial^2 L(x, a, b)}{\partial x^2} \right|_{x=0, b=0} = -\frac{n}{a} - \frac{1-n}{r} + \frac{1}{Z_0} \quad (3.2.3)$$

Igualando a cero (condición para que sea un punto crítico degenerado) y reorganizando los términos, obtenemos la ecuación de Gauss.

$$\frac{n}{a} + \frac{1}{-Z_0} = \frac{n-1}{r} \Rightarrow a_i = \frac{nrZ_0}{r - Z_0 + nZ_0} \quad (3.2.4)$$

Si, continuando con los métodos de catástrofes, con estas condiciones ($b = 0$, $a_i = \frac{nrZ_0}{r - Z_0 + nZ_0}$) sustituimos en la tercera derivada, encontramos

$$\left. \frac{\partial^3 L(x, a, b)}{\partial x^3} \right|_{x=0, a=a_i, b=0} = 0. \quad (3.2.5)$$

La cual se anula sin necesidad de elegir algún otro parámetro. La teoría de catástrofes nos pide continuar hasta hallar la primera derivada que no se anula por medio de una elección de parámetros adecuada.

Calculemos la cuarta derivada bajo estas mismas condiciones ($b = 0$, $a_i = \frac{nrZ_0}{r - Z_0 + nZ_0}$)

$$\left. \frac{\partial^4 L(x, a, b)}{\partial x^4} \right|_{x=0, a=a_i, b=0} = \frac{3(Z_0 - r)^2 (r - n^2 r - Z_0 + nZ_0)}{n^2 r^3 Z_0^3} \quad (3.2.6)$$

La cuarta derivada es la primera que no se anula por elección de parámetros, lo cual implica que se trata del germen de la catástrofe cuspidal.

La teoría de las catástrofes nos dice que los primeros términos se pueden anular por medio de una elección de parámetros adecuada, y esto es precisamente lo que hemos hecho y nos ha permitido recuperar la ecuación Gaussiana. Los últimos términos de la serie, en general, se anularían por medio de transformaciones de coordenadas, quedando intermedio el germen, y precisamente lo que nos da el comportamiento de la cáustica es este germen. En este caso si anulamos el germen (pedimos que la cuarta derivada sea cero) la imagen es perfecta. A continuación recuperaremos los puntos de la esfera para los cuales la imagen es perfecta al imponer las condiciones anteriores sobre la cuarta derivada.

Igualando a cero la cuarta derivada (ecuación 3.2.6) y resolviendo para Z_0 , obtenemos

$$Z_0 = r \quad (\text{raiz doble}), \quad Z_0 = r(n+1) \quad (3.2.7)$$

Si calculamos a_i de la Ec. (3.2.4) para estos valores de Z_0 , obtenemos :

$$Z_0 = r \Rightarrow a_i = r \quad (3.2.8)$$

$$Z_0 = r(n+1) \Rightarrow a_i = r + \frac{r}{n} \quad (3.2.9)$$

Estas parejas de puntos corresponden al centro y a los puntos aplanáticos¹ [1] de la esfera, respectivamente y para ellos la imagen es perfecta. Así, vemos que el anular el germen de la catástrofe nos permite recuperar los puntos para los cuales la imagen es perfecta.

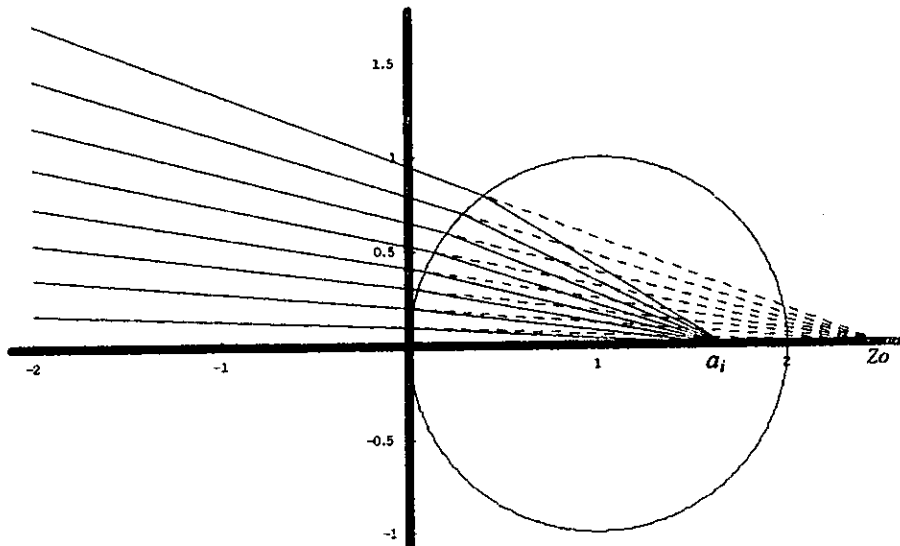


Figura 3.2.2 : Puntos Aplanáticos de la esfera
Objeto virtual, imagen real

Comprobaremos este último resultado de una manera alternativa clásica. Con este propósito, calculamos la longitud de camino óptico de cualquier rayo que salga de (Z_0, θ) y llegue a $(a_i, 0)$, donde las coordenadas, Z_0 y a_i , cumplen las ecuaciones (3.2.8-9). Como veremos, L resultará una constante, independiente de la trayectoria seleccionada, y así la imagen efectivamente será perfecta para estos puntos.

Si sustituimos el valor obtenido para Z_0 y a_i en las Ecs. (3.2.8 ó 3.2.9) en la ecuación (3.2.1) para poder calcular $L(x, a, \theta)$ obtenemos :

$$L(x, a_i, 0) = 0 \quad \forall x. \quad (3.2.10)$$

Lo cual implica que para cualquier camino que se elija entre estos dos puntos la longitud de camino óptico es la misma y por lo tanto la imagen es perfecta.

¹ Si dos puntos axiales son imágenes conjugadas uno del otro y cumplen con la condición del seno se dice que son aplanáticos.

En esta sección hemos atacado uno de los problemas clásicos de la óptica geométrica, el de la formación de las imágenes ante la refracción por medio de un casquete esférico. Con la aproximación clásica a este problema, se obtiene la ecuación de Gauss como una primera aproximación, y más tarde se consideran los términos de aberración, debidos a los órdenes sucesivos más altos de la serie de Taylor en el desarrollo de la función de aberración, para una mejor predicción de la posición de los rayos refractados, pero sin embargo, carecemos de un verdadero criterio acerca de qué tan lejos debemos ir en este desarrollo. En la presente sección, basados en la teoría de las catástrofes, hemos encontrado un resultado fundamental para este sistema óptico. Demostramos que la función de camino óptico, en este problema, queda determinada a cuarto orden, y la serie de aberraciones puede así ser cortada en términos a lo más de tercer orden. La conducta más general de las familias de rayos en este problema quedan suficientemente determinados dentro de esta aproximación, y si elegimos más términos de la serie, estaríamos sobredeterminando la función de camino óptico. En particular, es posible elegir cuatro coeficientes, según hemos visto, para que la función de camino óptico sea una constante para toda la familia de rayos que conforman el sistema objeto-imagen.

3.3. Medios estratificados $n(z)$.

Los ejemplos anteriores se pueden considerar como eslabones de un sistema dentro de un dispositivo óptico. En ambos casos hemos encontrado que la singularidad más grande en la cáustica formada por dichos sistemas resulta ser la Cúspide. En la presente sección veremos que si se introduce un parámetro nuevo, la forma de las cáusticas será de mayor complejidad. Una manera de agregar otro parámetro se obtiene permitiendo que el índice de refracción sea una función de la coordenada z , esto es, consideraremos el problema del enfocamiento de los rayos luminosos cuando estos se propagan en medios estratificados en los cuales el valor del índice es de la forma funcional $n(z)$. En el ataque del problema, consideraremos al Principio de Fermat como la ley básica, pero incluiremos el formalismo desarrollado por Hamilton, el cual fue considerado en el capítulo 1. Primero consideraremos una ventana homogénea, con sus caras refractoras perfectamente planas y mutuamente paralelas. Para este sistema óptico encontraremos sus superficies cáusticas, demostrando que se produce una cáustica de naturaleza cuspidal, idéntica a la que corresponde a una sola cara plana refractora, como la que ya hemos calculado en la sección 3.1. Cuando el índice de refracción de la ventana se torna inhomogéneo, con un índice de gradiente longitudinal, cuya ley de variación introduce un nuevo parámetro, entonces la cáustica adquiere una forma más compleja. En esta ocasión evaluaremos dichas cáusticas considerándolas como las envolventes de las familias de los rayos refractados a la salida de la ventana. Veremos que la teoría de Catástrofes nos indicará que la degeneración de la función de camino óptico resulta de un orden mayor, prediciendo la aparición de una singularidad en la cáustica asociada con la catástrofe fundamental llamada de Mariposa. Este último resultado nos ofrece una comprobación de lo que se obtuvo mediante el cálculo independiente de la envolvente de la familia de rayos refractados por este sistema.

La característica mezclada en un medio estratificado $n(z)$

Siguiendo a Lunenburg [5], veremos que es posible dar una expresión exacta de W para un medio estratificado $n(z)$. Si el índice de refracción depende sólo de la coordenada z , entonces, de (1.1.12) y (1.1.21b), tenemos

$$\frac{\partial W}{\partial z_0} = - \left(n^2(z) - \left(\frac{\partial W}{\partial x_0} \right)^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial y_0} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.3.1)$$

Queremos determinar una solución de esta ecuación con la condición de frontera

$$W = -(x_0 p + y_0 q), \quad \text{si } z = z_0 \quad (3.3.2)$$

la cual efectivamente cumple con la Ec. (1.1.21), ya que entonces $p = p_0$; $q = q_0$; $x = x_0$ y $y = y_0$.

La solución que cumple con la condición de frontera es

$$W = \int_{z_0}^z \sqrt{n^2(z) - p^2 - q^2} dz - (x_0 p + y_0 q). \quad (3.3.3)$$

Esta expresión nos permite dar una generalización de la ley de Snell para medios inhomogéneos diferenciables $n(z)$. Supongamos por ejemplo que $q_0 = 0$; entonces por (1.1.21b) $q = 0$, manteniéndose el rayo en el "plano de incidencia". Además, también de (1.1.21b) se sigue que $p_0 = p$; lo cual puede describirse en términos del ángulo $\theta(z)$, que forma el rayo con el eje z , como

$$n(z_0) \sin \theta(z_0) = n(z) \sin \theta(z). \quad (3.3.4)$$

3.4 La ventana inhomogenea. Catástrofe de Mariposa.

Consideremos una ventana perpendicular al eje z con un gradiente longitudinal en su índice de refracción (ver figura 3.4.1) dado por la función :

$$\begin{aligned} n(z) &= n_0 e^{\pm k^2(z-z_0)} \quad \text{si } z > z_0 \text{ y } z < z_0 + t \\ n(z) &= n_1 \quad \text{si } z < z_0 \text{ y } z > z_0 + t. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

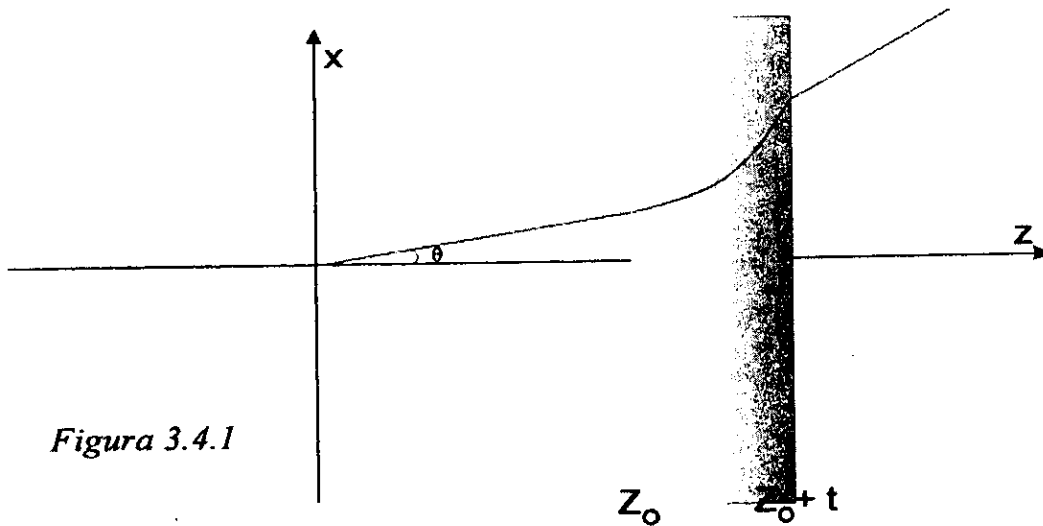


Figura 3.4.1

A continuación utilizaremos la ecuación (3.3.3) para encontrar la función característica mezclada para este medio suponiendo que los rayos parten del origen ($x_0 = y_0 = 0$) y además como el medio solo depende de z nos podemos restringir a un plano lo cual implica que con una rotación adecuada alrededor de el eje z podemos hacer que $q = 0$ por lo que la función característica mezclada se reduce a:

$$W = \int_{z_0}^z \sqrt{n^2(z) - p^2} dz. \quad (3.4.2)$$

Substituyendo en esta ecuación el valor de $n(z)$ (Ec.3.4.1) y considerando que n no depende de z ni antes ni después de la ventana obtenemos:

$$W = \int_0^{z_0} \sqrt{n_1^2 - p^2} dz + \int_{z_0}^{z_0+t} \sqrt{n_0^2 e^{\pm 2k^2(z-z_0)} - p^2} dz + \int_{z_0+t}^z \sqrt{n_1^2 - p^2} dz \quad (3.4.3)$$

resolviendo

$$W = \sqrt{n_1^2 - p^2} (z-t) \mp \frac{1}{k^2} \left(\sqrt{n_0^2 - p^2} - \sqrt{n_0^2 e^{\pm 2k^2 t} - p^2} \right) \pm \frac{p}{k^2} \left(\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 - p^2}}{p} \right) - \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 e^{\pm 2k^2 t} - p^2}}{p} \right) \right). \quad (3.4.4)$$

Basta con derivar la función característica mezclada con respecto a p , como se demostró en el capítulo I (ver Ec. 1.1.21b), para obtener la ecuación de los rayos:

$$x = -\frac{\partial W}{\partial p} = \frac{p(z-t)}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} \mp \frac{1}{k^2} \left(\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 - p^2}}{p} \right) - \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 e^{\pm 2k^2 t} - p^2}}{p} \right) \right). \quad (3.4.5)$$

Esta ecuación representa la familia de rayos de la ventana inhomogénea obteniendo un rayo distinto para cada valor de p . Si queremos obtener la ecuación de la zona de enfocamiento o cóustica, la geometría analítica nos pide que representemos a este conjunto de familias de rayos por medio de la función $F(p) = 0$ y que resolvamos en forma simultánea la Ec. (3.4.6) y la familia de puntos críticos de dicha función Ec. (3.4.7).

$$F(p) = x - \frac{p(z-t)}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} \pm \frac{1}{k^2} \left(\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 - p^2}}{p} \right) - \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 e^{\pm 2k^2 t} - p^2}}{p} \right) \right) = 0 \quad (3.4.6)$$

$$\frac{\partial F(p)}{\partial p} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{\sqrt{n_0^2 e^{\pm 2k^2 t} - p^2}} - \frac{1}{\sqrt{n_0^2 - p^2}} \right) - (z-t) \left(\frac{n_1^2}{\sqrt{n_1^2 - p^2} (n_1^2 - p^2)} \right) = 0 \quad (3.4.7)$$

resolviendo en forma simultánea obtenemos :

$$x(p) = \left(\frac{p^2 - n_1^2}{n_1^2} \right) \left(\frac{p}{k^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n_0^2 - p^2}} - \frac{1}{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2}} \right) - \frac{1}{k^2} \left(\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 - p^2}}{p} \right) - \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2}}{p} \right) \right) \\ z(p) = \frac{1}{k^2} \left(\frac{p^2 - n_1^2}{n_1^2} \right) \left(\sqrt{\frac{n_1^2 - p^2}{n_0^2 - p^2}} - \sqrt{\frac{n_1^2 - p^2}{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2}} \right) + t \quad (3.4.8)$$

Esta ecuación corresponde a la catástrofe de la mariposa, como se puede apreciar en las siguientes figuras:

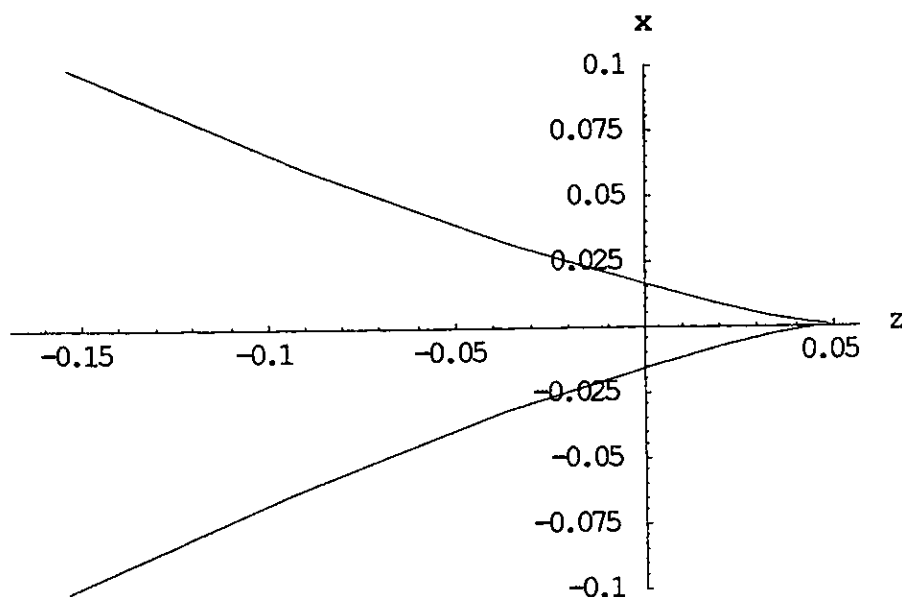


Fig 3.4.2 : *Cáustica para $n_0 = 1, n_1 = 1.5, t = 1, k = 1$
Para estos valores, el punto más degenerado lo obtenemos calculando $z(0) = (0.0518192, 0)$.*

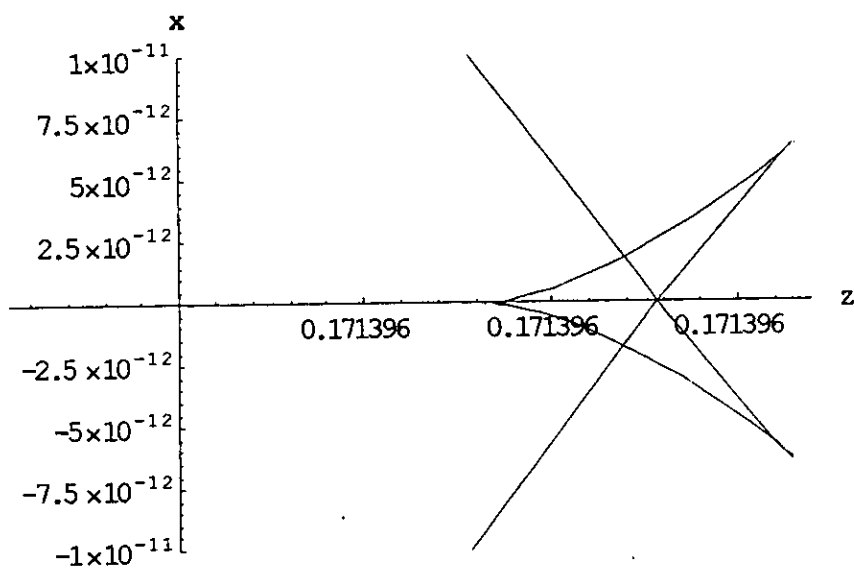


Fig 3.4.3 : *Cáustica para $n_0 = 1, n_1 = 1.5, t = 1, k = 1.1545$
Para estos valores, el punto más degenerado lo obtenemos calculando $z(0) = (0.171396, 0)$.*

Como se puede apreciar la mariposa se forma en una región muy pequeña y solo para ciertos valores de los parámetros que sin ayuda de la teoría de las catástrofes es difícil localizar. A continuación mostraremos una gráfica que ilustra la catástrofe de la mariposa formada al trazar un conjunto de 1960 rayos usando la ecuación Ec. (3.4.5).

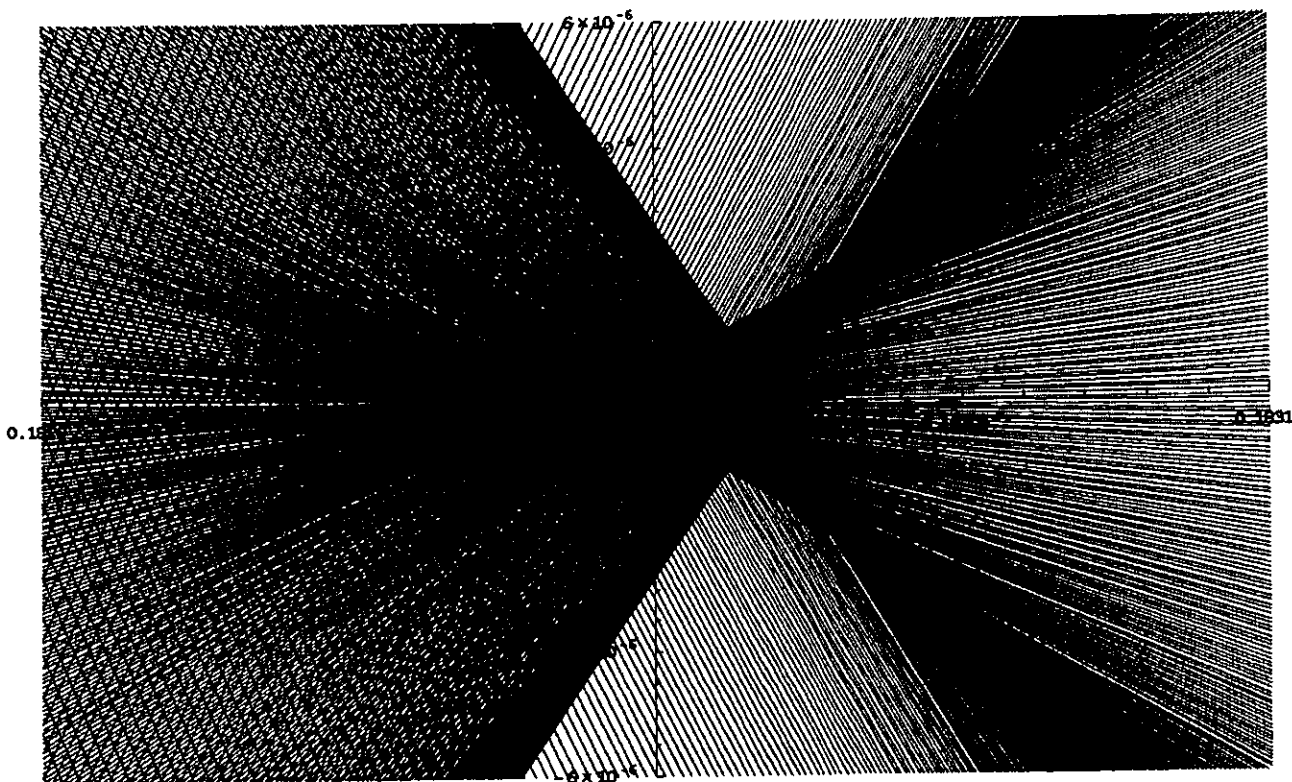


Fig 3.4.3b : Trazado de rayos para $n_0 = 1$, $n_1 = 1.5$, $t = 1$, $k = 1.1545$

En la figura 3.4.3b observamos una gran concentración de rayos en las zonas en donde la figura 3.4.3 predecía que se iban a formar las líneas de enfocamiento o cáusticas. También se distingue claramente la mariposa.

Hasta aquí hemos usado los métodos de la óptica Hamiltoniana. Si queremos conocer la forma de la imagen que se formará con esta lente, clásicamente tomaríamos la aproximación paraxial para la Ec 3.4.5 y después por la teoría de las aberraciones de Seidel encontraríamos que tipo de deformaciones o distorsiones serían producidas por esta lente. Seidel nos pide generar la serie de Taylor, cortar a tercer orden y encontrar 5 coeficientes que nos dirán si para este sistema existe o no cierto tipo de aberración (ver Capítulo I).

¿Porque a tercer orden? Existe la posibilidad de continuar a ordenes mayores y para ciertas lentes el tercer orden no es suficiente para describir de forma correcta la zona en donde los rayos se van a enfocar, además de que resulta bastante complicado continuar a ordenes superiores al tercero, ¿Como sabríamos a que orden cortar para obtener el comportamiento de la imagen? La teoría de las catástrofes nos ofrece la posibilidad de conocer la forma de la imagen y de conocer a que orden debemos de cortar para obtener todo el comportamiento cualitativo de la cáustica. A continuación resolveremos este problema usando los métodos de la teoría de las catástrofes.

Siguiendo los pasos usados para el casquete esférico, comencemos por dividir la trayectoria en dos partes desde el origen hasta la salida de la ventana ($z_0 + t, x[z_0 + t]$) y desde la salida de la ventana hasta un punto cualquiera de coordenadas a, b (ver figura 3.4.2).

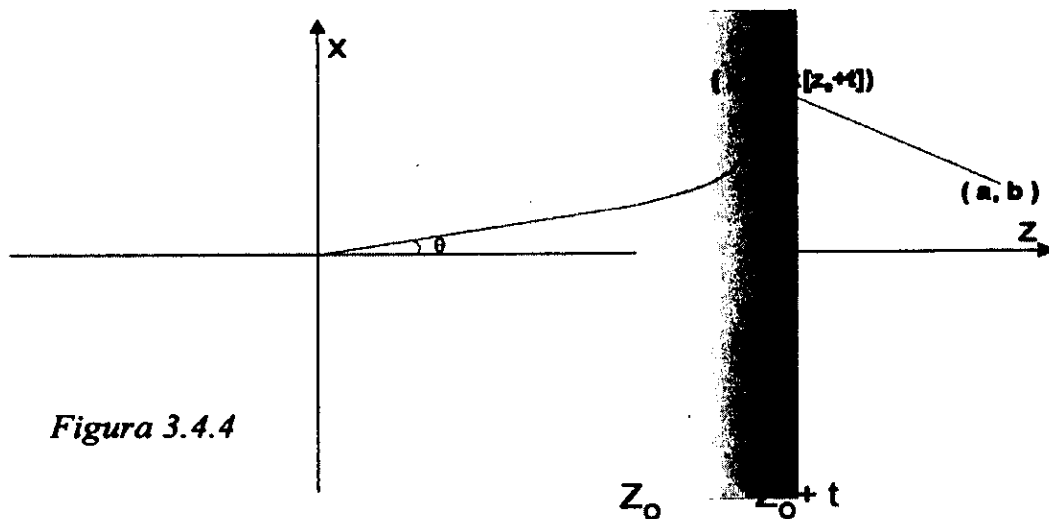


Figura 3.4.4

La primera parte de la longitud de camino óptico la podemos obtener usando la función característica mezclada y las transformaciones de Legendre. Si sustituimos $z = z_0 + t$ en la W de la ecuación 3.4.4 y luego le aplicamos la transformación de Legendre obtenemos :

$$V_1 = \frac{\sqrt{n_0^2 e^{2kt} - p^2} - \sqrt{n_0^2 - p^2}}{k^2} + \frac{n_1^2 z_0}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} \quad (3.4.9)$$

Para la segunda parte de la trayectoria el índice de refracción se mantiene constante por lo cuál la longitud de camino óptico la obtenemos simplemente multiplicando el índice de refracción por la distancia entre los dos puntos. Para encontrar las coordenadas del punto inicial podemos usar la ecuación de los rayos Ec. (3.4.5) obtenida anteriormente para $z = z_0 + t$, obteniendo :

$$x_i = \frac{p z_0}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} + \frac{\text{ArcCot}\left(\frac{p}{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2}}\right) - \text{ArcCot}\left(\frac{p}{\sqrt{n_0^2 - p^2}}\right)}{k^2} \quad (3.4.10)$$

$$z_i = z_0 + t$$

Aplicando la formula para la distancia entre dos puntos y multiplicándola por el índice de refracción obtenemos:

$$V_2 = n_1 \sqrt{(z_0 + t - a)^2 + \left[\frac{p z_0}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} + \frac{\text{ArcCot}\left(\frac{p}{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2}}\right) - \text{ArcCot}\left(\frac{p}{\sqrt{n_0^2 - p^2}}\right)}{k^2} - b \right]^2} \quad (3.4.11)$$

La longitud de camino óptico desde el origen hasta un punto cualquiera de coordenadas a , b la obtenemos mediante la suma de $V_1 + V_2$ para imagen real, pero en este caso como los rayo son divergentes la imagen es virtual y por lo tanto la longitud de camino óptico viene dada por $V_1 - V_2$.

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2} - \sqrt{n_0^2 - p^2}}{k^2} + \frac{n_1^2 z_0}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} -$$

$$- n_1 \sqrt{(z_0 + t - a)^2 + \left[\frac{p z_0}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} + \frac{\text{ArcCot}\left(\frac{p}{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2}}\right) - \text{ArcCot}\left(\frac{p}{\sqrt{n_0^2 - p^2}}\right)}{k^2} - b \right]^2} \quad (3.4.12)$$

La teoría de Catástrofes nos pide que para obtener el germen derivemos hasta obtener la primera derivada que no se puede anular por una elección adecuada de parámetros. A continuación derivaremos la longitud de camino óptico e igualamos a cero para buscar puntos críticos degenerados. Por simetría podemos suponer que el punto crítico más degenerado se encuentra sobre el eje de simetría ($x = 0$). Si obtenemos la primera derivada y la evaluamos en $p = 0$ obtenemos :

$$\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{p=0} = \frac{b n_1 \left(\frac{1 - e^{-k^2 t}}{n_0 k^2} + \frac{z_0}{n_1} \right)}{\sqrt{b^2 + (z_0 + t - a)^2}} \quad (3.4.13)$$

Si buscamos para que valores de b se anula esta ecuación obtenemos que el único que satisface esta condición es $b = 0$ por lo tanto $b_c = 0$. Como estamos buscando el punto crítico más degenerado, las siguientes derivadas deberán ser evaluadas en este punto crítico. Derivando nuevamente y evaluando en el punto crítico obtenemos :

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right|_{p=0, b=0} = \frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2 n_0} + \frac{z_0}{n_1} - \frac{n_1 \left(\frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2 n_0} + \frac{z_0}{n_1} \right)^2}{z_0 + t - a} \quad (3.4.14)$$

Si igualamos a cero y buscamos los valores de a que satisfacen esta condición obtenemos que la a_c esta dada por :

$$a_c = \frac{n_1 (e^{-k^2 t} - 1)}{k^2 n_0} + t \quad (3.4.15)$$

Es importante notar que podemos recuperar los valores de la cúspide sobre el eje óptico, correspondiente al punto crítico más degenerado, y comprobar al sustituir los parámetros usados para generar las Figuras 3.4.2 y 3.4.3 obteniendo las mismas coordenadas.

La tercera derivada evaluada en el punto crítico es cero

$$\left. \frac{\partial^3 V}{\partial p^3} \right|_{p=0, b=0, a=a_c} = 0 \quad (3.4.16)$$

La cuarta derivada evaluada en el punto crítico es :

$$\left. \frac{\partial^4 V}{\partial p^4} \right|_{p=0, b=0, a=a_c} = \frac{n_0^2 (3 - 3e^{-k^2 t}) + n_1^2 (e^{-3k^2 t} - 1)}{k^2 n_0^3 n_1^2} \quad (3.4.17)$$

Igualando a cero y resolviendo para k obtenemos:

$$k_c = \frac{\sqrt{\text{Log} \left[\frac{n_1^2 + \sqrt{12n_0^2 n_1^2 - 3n_1^4}}{6n_0^2 - 2n_1^2} \right]}}{\sqrt{t}} \quad (3.4.18)$$

La quinta derivada evaluada en el punto crítico es cero :

$$\left. \frac{\partial^5 V}{\partial p^5} \right|_{p=0, b=0, a=a_c, k=k_c} = 0 \quad (3.4.19)$$

La sexta derivada es la primera que no podemos anular por medio de las condiciones iniciales para objetos reales lo cual implica que la función es "seis determinada" y por lo tanto se trata de la catástrofe de la Mariposa.

$$\left. \frac{\partial^6 V}{\partial p^6} \right|_{p=0, b=0, a=a_c, k=k_c} = \frac{-9\sqrt{12n_0^2 n_1^2 - 3n_1^4} (4n_0^4 + 3n_0^2 n_1^2 - n_1^4) + 27n_1^2 (10n_0^4 - 5n_0^2 n_1^2 + n_1^4)}{2n_0^5 n_1^6 \left(\text{Log} [6n_0^2 - 2n_1^2] - \text{Log} [n_1^2 + \sqrt{12n_0^2 n_1^2 - 3n_1^4}] \right)} t \quad (3.4.20)$$

Si quisiéramos anular la sexta derivada podemos escoger 3 parámetros t , n_1 , n_0 . Si elegimos a t , la única solución posible es $t = 0$ y por lo tanto la ventana no existe. Para n_1 y n_0 las soluciones son las siguientes $n_1 = \pm n_0$ y soluciones imaginarias Ec. (3.4.21). Si son iguales no existe la ventana y obviamente no existen índices de refracción imaginarios ni negativos.

$$n_0 = \pm \frac{\sqrt{7 \pm i\sqrt{15}}}{4\sqrt{2}} n_1, \quad n_1 = \pm \frac{\sqrt{7 \pm i\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} n_0 \quad (3.4.21)$$

Finalmente podemos concluir que los métodos de la teoría de catástrofes nos permiten conocer la topología de la cústica de manera general, simplemente derivando para determinar la degeneración más alta. Con la teoría de las aberraciones de Seidel disponemos de una manera de conocer el grado de imperfección de una imagen, desarrollando una serie de Taylor a tercer orden y agrupando las desviaciones respecto a una imagen perfecta en cinco distintas categorías, las aberraciones clásicas. Sin embargo, ¿Porque detenerse a tercer orden? ¿Es posible que órdenes superiores de la serie de Taylor nos den otro tipo de comportamientos? Cuando el grado de imperfección de la imagen resulta superior al de las aberraciones de Seidel, se requiere añadir más términos de esta serie de Taylor. ¿Cómo saber hasta que orden detenerse? ¿Estaría incluido todo el comportamiento cualitativo en ese orden de la serie? Como hemos mostrado, la teoría de las catástrofes nos permite por medio de simples derivadas no solo obtener el orden a partir del cual ya no existen cambios cualitativos en el comportamiento de la imagen, sino también conocer cuales son los parámetros relevantes.

Si ahora regresamos a nuestra zona de enfocamiento, o cáustica en la Ec. (3.4.8), podremos predecir que valores de los parámetros nos van a generar el máximo grado de degeneración de los puntos críticos y a partir de donde se van a observar cambios cualitativos en la imagen. Combinando ambos métodos podremos determinar la máxima degeneración de los puntos críticos, predecir la topología general y el tipo de comportamiento que tiene la imagen alrededor de esta zona. Si quisiéramos hacer esto sin la ayuda de la teoría de las catástrofes, tendríamos que graficar y observar para muchos valores de los parámetros z_0 , k , t , n_1 y n_0 , sin saber en realidad cuales de estos parámetros son relevantes y teniendo que probar lo que pasa al variar cada uno de ellos.

Recapitulando, en el medio estratificado anterior, con la primera derivada obtenemos la información de que el punto crítico más degenerado se encuentra sobre el eje óptico ($b_c = 0$), la segunda nos dice cuáles son las coordenadas de dicho punto en función de los demás parámetros (a_c , θ). La cuarta derivada proporciona información sobre el valor de la constante en el gradiente del índice de refracción, k , del punto crítico más degenerado. La sexta derivada es la primera que no es posible anular mediante una elección de parámetros. Lo anterior nos dice que se trata de la Catástrofe de la Mariposa. Quedan libres z_0 , t , n_1 y n_0 lo cual quiere decir que estos parámetros no provocan cambios cualitativos en la imagen. Además z_0 no aparece en las ecuaciones para a_c , k_c o en la envolvente, por lo tanto dicha variable la podemos eliminar con un cambio de escala. A continuación obtendremos valores para a_c y k_c eligiendo los siguientes valores de los parámetros independientes :

$$t = 1, \quad n_0 = 1 \quad \text{y} \quad n_1 = 1.5$$

obtenemos :

$$k_c = 1.15443 \quad \text{y} \quad a_c = 0.171343.$$

A continuación graficamos las cáusticas para estos valores pero variando k alrededor de k_c , usando la ecuación de la envolvente (3.4.8) y obtenemos las siguientes figuras:

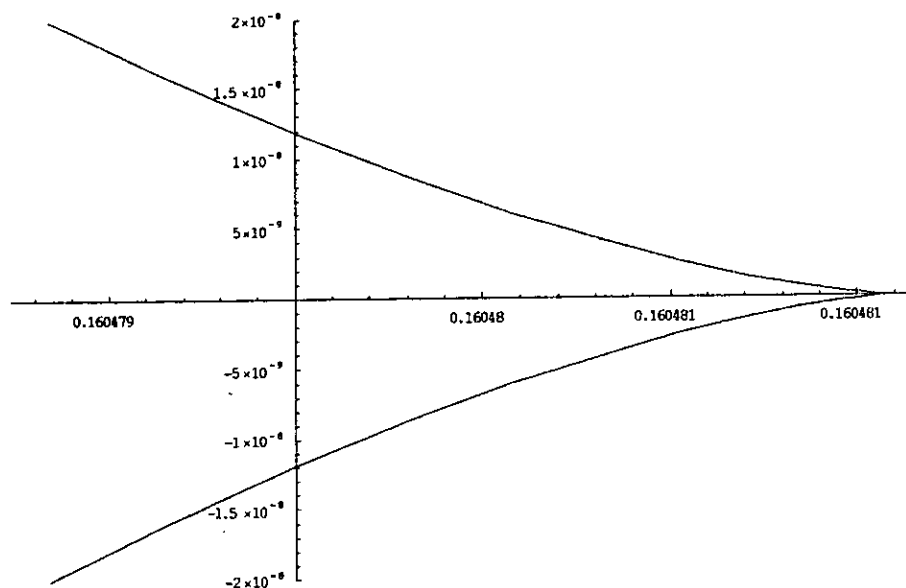


Fig 3.4.5 : Catástrofe de la Mariposa para $n_0 = 1$, $n_1 = 1.5$, $t = 1$, $k = 1.14$
 $a_c = 0.160481$.

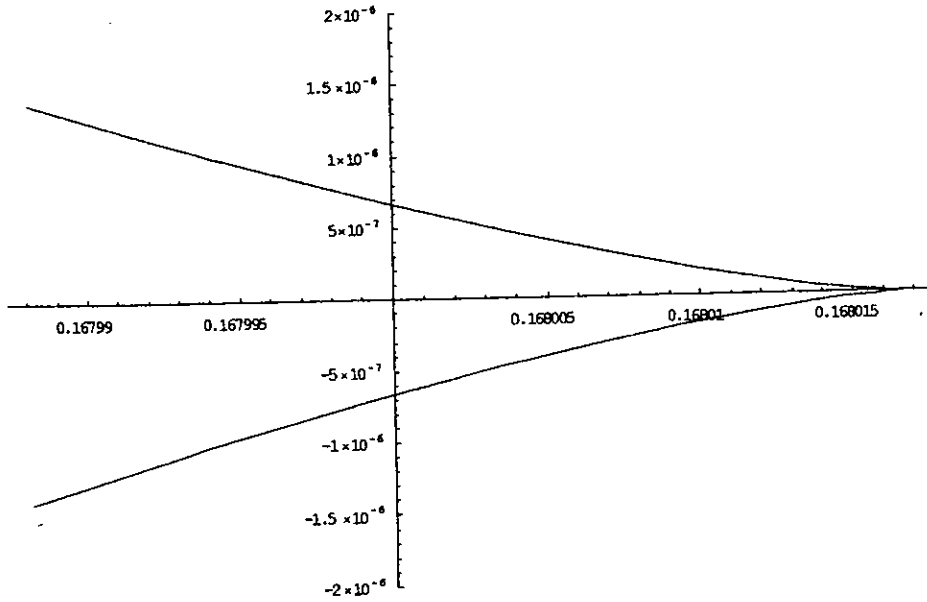


Fig 3.4.6 : *Catástrofe de la Mariposa para $n_0 = 1, n_1 = 1.5, t = 1, k = 1.15$
 $a_c = 0.168017$.*

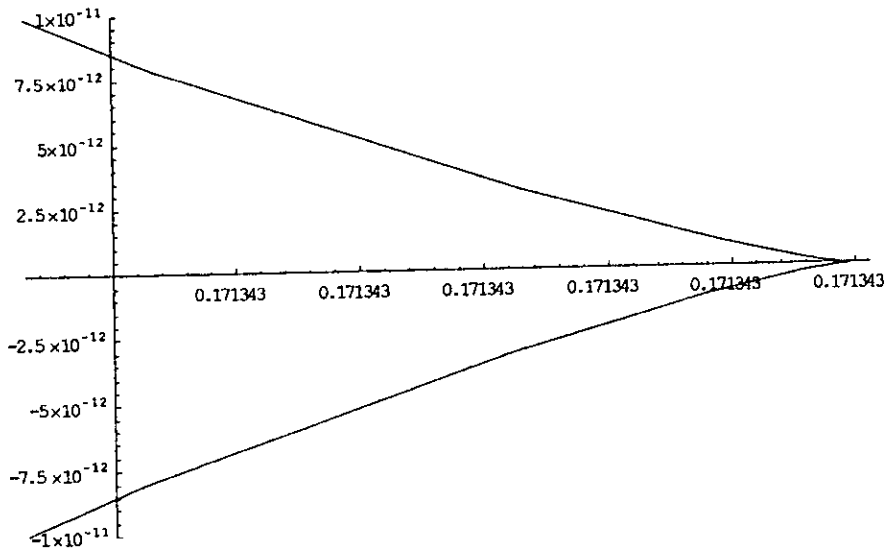


Fig 3.4.7 : *Catástrofe de la Mariposa para $n_0 = 1, n_1 = 1.5, t = 1, k = 1.15443$
 $a_c = 0.171343$ punto crítico mas degenerado.*

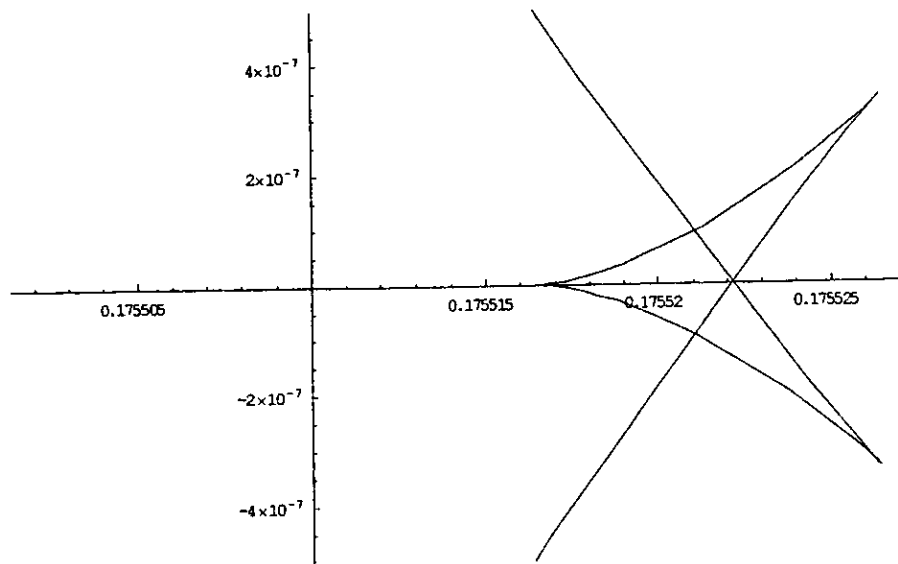


Fig 3.4.8 : *Catástrofe de la Mariposa para $n_0 = 1$, $n_1 = 1.5$, $t = 1$, $k = 1.16$
 $a_c = 0.175517$.*

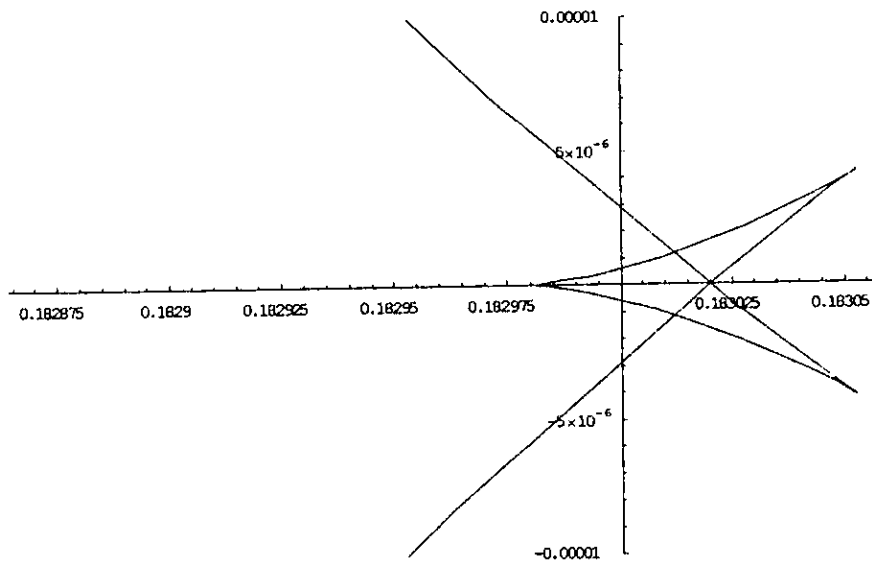


Fig 3.4.9 : *Catástrofe de la Mariposa para $n_0 = 1$, $n_1 = 1.5$, $t = 1$, $k = 1.17$
 $a_c = 0.182979$.*

Se puede apreciar claramente el cambio de comportamiento al pasar por la k_c , con lo cual se confirman gráficamente los resultados obtenidos por Catástrofes.

3.5. Trazado de rayos en medios inhomogeneos

A continuación vamos a usar la ecuación (3.4.5) para trazar los rayos desde el objeto hasta la salida de la ventana inhomogenea y a demostrar que esta ventana es invariante ante una reflexión sobre la recta

$$z = z_0 + \frac{t}{2}$$

Para poder trazar los rayos dentro de la ventana supusimos que x era función de t y graficamos desde z_0 hasta $z_0 + t$, usando Mathematica 4.0 para los siguientes valores de los parámetros:

$$z_0 = 1, \quad n_0 = 1.3, \quad n_1 = 1, \quad k = 0.75$$
$$t \in [0, 2] \quad , \quad 18 \text{ valores de } p \text{ entre } [0.05, 0.90] \text{ variando } 0.05$$

obteniendo los siguientes resultados para la ventana creciente

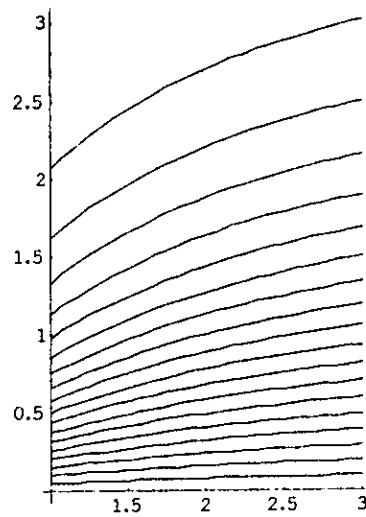


Figura 3.5.1 : Trazado de rayos dentro de la ventana inhomogenea
Cada rayo representa un valor distinto de p

Después se trazan las rectas desde el objeto hasta la entrada de la ventana para cada valor de p obteniendo :

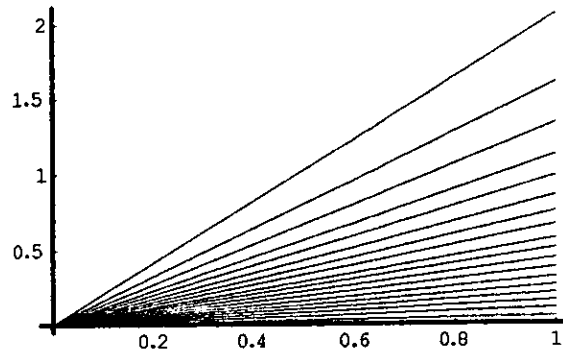


Figura 3.5.2 : Trazado de rayos desde el objeto hasta la ventana inhomogenea
Cada rayo representa un valor distinto de p

Finalmente juntamos ambas graficas y trazamos un cuadrado para representar a la ventana, obteniendo:

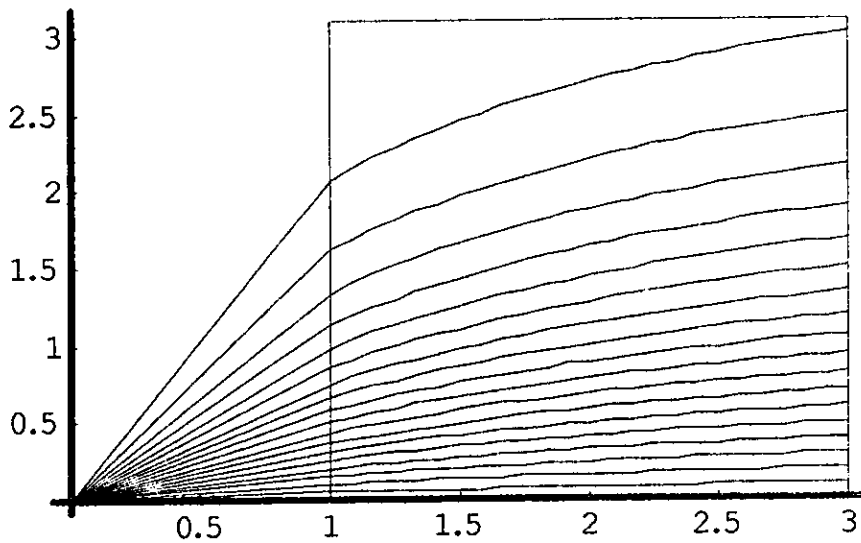


Figura 3.5.3 : Trazado de rayos para una ventana inhomogenea creciente de ancho 2

Si queremos graficar esta misma ventana después de la reflexión, debemos de cuidar que los valores iniciales y finales de la ventana estén invertidos y que la ventana cambie de creciente a decreciente. La primera condición nos da un cambio en el valor de n_0 , y la segunda provoca que en lugar de usar el signo positivo usemos el negativo en la ecuación (3.4.5). El cambio en n_0 para los valores de los parámetros usados anteriormente da como resultado :

$$n_0 = 4.000428$$

Usando un procedimiento análogo al anterior y representando el cambio dentro de la ventana por medio de líneas punteadas obtenemos:

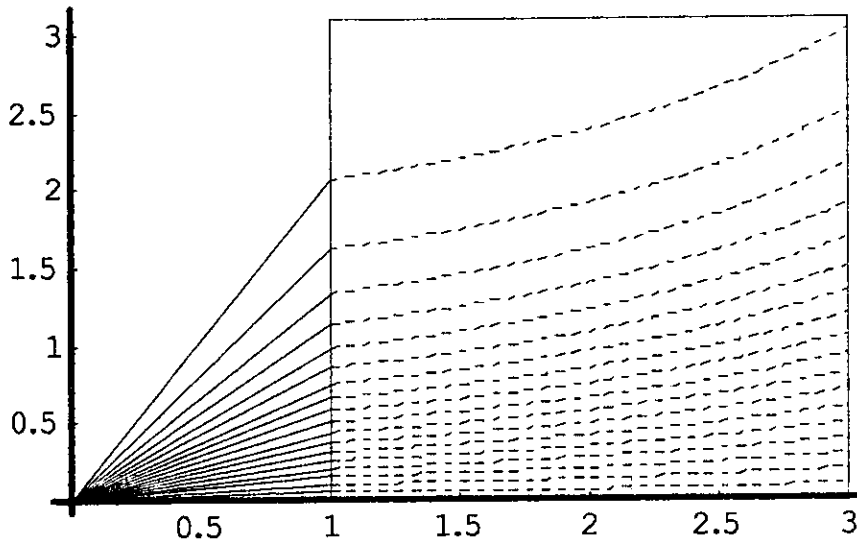


Figura 3.5.4 : Trazado de rayos para una ventana inhomogenea decreciente de ancho 2

Si disminuimos el número de rayos y trazamos ambas ventanas en la misma grafica nos damos cuenta de la invariancia ante la reflexión sobre z.

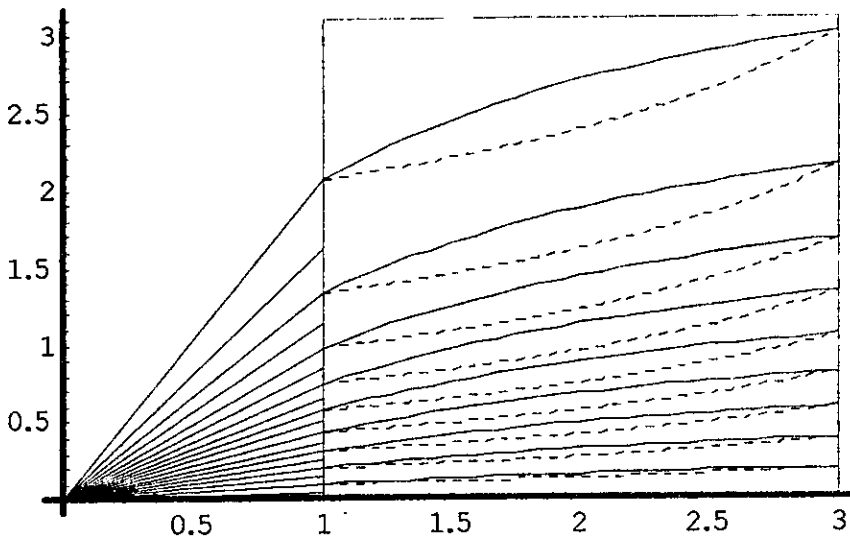


Figura 3.5.5 : Invariancia ante reflexión sobre el eje z para una ventana inhomogenea

Como podemos observar para cada rayo la altura a la que salen de la ventana es la misma para las dos ventanas, como el momento óptico se conserva la imagen que forman la ventana creciente y la decreciente (creciente reflejada) es la misma.

Esto podría ser una casualidad para los valores elegidos de los parámetros, sin embargo haciendo el análisis sobre las ecuaciones se puede demostrar que sucede para cualquier ventana con el índice de refracción que elegimos independientemente de los valores de los parámetros. A continuación se demuestra este hecho.

Tomemos la ecuación de los rayos después de atravesar la ventana inhomogénea para el caso creciente y decreciente :

$$x_{cre} = \frac{p(z-t)}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} - \frac{1}{k^2} \left(\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 - p^2}}{p} \right) - \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2}}{p} \right) \right) \quad (3.5.1)$$

$$x_{dec} = \frac{p(z-t)}{\sqrt{n_{11}^2 - p^2}} + \frac{1}{k^2} \left(\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_{00}^2 - p^2}}{p} \right) - \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_{00}^2 e^{-2k^2 t} - p^2}}{p} \right) \right)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ambas ventanas están inmersas en el mismo medio y por lo tanto :

$$n_{11} = n_1$$

El índice de refracción dentro de la ventana esta definido por :

$$n(z)_{cre} = n_0 e^{k^2(z-z_0)} \quad (3.5.2)$$

$$n(z)_{dec} = n_{00} e^{-k^2(z-z_0)}$$

a la entrada de la ventana $z = z_0$ usando la ecuación anterior obtenemos

$$n(z)_{cre} = n_0 \quad (3.5.3)$$

$$n(z)_{dec} = n_{00}$$

a la salida de la ventana $z = z_0 + t$ usando la ecuación (3.4.2) obtenemos

$$n(z)_{cre} = n_0 e^{k^2 t} \quad (3.5.4)$$

$$n(z)_{dec} = n_{00} e^{-k^2 t}$$

como queremos que el índice de refracción a la entrada de la ventana decreciente sea igual al índice de refracción a la salida de la ventana creciente, obtenemos la siguiente condición sobre n_{00}

$$n_{00} = n_0 e^{k^2 t} \quad (3.5.5)$$

ESTE LIBRO NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

que como se puede observar satisface que los índices de refracción de la ventana decreciente sean iguales a los de la ventana creciente invertidos

entrada

$$n(z)_{cre} = n_0 e^{k^2 t}$$

$$n(z)_{dec} = n_0$$

salida

$$n(z)_{cre} = n_0$$

$$n(z)_{dec} = n_0 e^{k^2 t}$$

con esta condición se satisface que al reflejar la ventana, la cara mas alejada de la ventana es ahora la mas próxima y viceversa. Si sustituimos esta misma condición en la ecuación (3.4.1) para la ventana decreciente y además suponemos que $n_{II} = n_I$ obtenemos :

$$\begin{aligned} x_{dec} &= \frac{p(z-t)}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} + \frac{1}{k^2} \left(\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2}}{p} \right) - \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} e^{-2k^2 t} - p^2}}{p} \right) \right) \\ &= \frac{p(z-t)}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} + \frac{1}{k^2} \left(\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2}}{p} \right) - \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 - p^2}}{p} \right) \right) \\ &= \frac{p(z-t)}{\sqrt{n_1^2 - p^2}} - \frac{1}{k^2} \left(-\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 e^{2k^2 t} - p^2}}{p} \right) + \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{n_0^2 - p^2}}{p} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

que es exactamente la ecuación para la ventana creciente, con lo que queda demostrado que toda ventana

con este índice de refracción es invariante ante un reflexión sobre la recta $z = z_0 + \frac{t}{2}$, ya que los rayos a

la salida de ambas ventanas son los mismos.

Conclusiones

Por medio de la Teoría de las Catástrofes es posible obtener los cambios cualitativos en el comportamiento de un sistema descrito por una función analítica., por medio de ella podemos eliminar en la serie de Taylor los términos que no aportan nada al comportamiento general de la función que describe al sistema . En óptica para calcular las aberraciones clásicas cortamos una serie de Taylor a tercer orden de forma empírica, lo cual no siempre describe adecuadamente al sistema, por ejemplo para el casquete esférico es correcto cortar a tercer orden, pero para la ventana inhomogénea es necesario llegar hasta sexto orden.

Para el casquete esférico se recuperaron la ecuación de Gauss y los puntos aplanáticos de la esfera, empleando sistemáticamente la herramienta de las catástrofes , la cual nos pide examinar la degeneración de los puntos críticos. La condición de doble degeneración implicó la ecuación de Gauss, mientras que la condición de máxima degeneración nos llevó a obtener las posiciones de los puntos conjugados objeto-imagen perfectas para esta sistema.

La ventana inhomogénea presenta un comportamiento más complejo y en ella no es posible cortar a tercer orden. Si se quiere obtener toda la gama de comportamientos cualitativos, la teoría de catástrofes nos indica que es necesario continuar hasta sexto orden. Una confirmación de lo anterior fue llevada a cabo usando métodos numéricos y óptica Hamiltoniana, para trazar los rayos correspondientes a este sistema inhomogéneo, y comprobar, en la región de parámetros anticipada del análisis anterior, que concuerdan con la catástrofe de la mariposa, con su triple cúspide. Es importante notar que sin el auxilio del método de catástrofes resulta muy improbable encontrar la región de parámetros donde se configura la mariposa.

En la sección 3.4, en la que se trata el trazo de rayos en medios inhomogéneos, ofrecemos un método original que nos permite dar la curva del rayo a partir de las funciones Hamiltonianas. Un resultado sorprendente de la expresión analítica de las coordenadas del rayo saliente es que resultan invariantes ante una rotación de la ventana, la cual lleva la cara final a la cara inicial (y la inicial a la final, por supuesto). Se demostró que esto es general, y solamente depende de la forma funcional elegida. Quedan por investigar si esto se sigue cumpliendo para otras formas funcionales del gradiente de índice de refracción.

Los métodos de la teoría de las catástrofes nos permiten, sin necesidad de ser un experto en el tema a investigar, obtener resultados clásicos para problemas bien conocidos. Sin embargo en un problema no trivial como el de la ventana inhomogénea nos ilustra un comportamiento que aun para el ojo entrenado, es difícil de predecir ya que solo se obtiene para valores muy especiales de los parámetros y en una zona muy pequeña (la mariposa). En esta Tesis se demuestra la efectividad de dichos métodos y se plantea una alternativa para conocer antes de resolver un problema que comportamientos cualitativos se van a obtener y para que valores de los parámetros de control existen cambios cualitativos importantes en el sistema.

Referencias

- [1] Max Born and Emil Wolf, *Principles of Optics*, Maxwell Macmillan International Editions, 6th ed. , Oxford, (1989)
- [2] Robert Gilmore, *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, New York, (1981)
- [3] Tim Poston + Ian Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, London, (1978)
- [4] Ghatak A K and Thyagarajan K, *Contemporary Optics*, Plenum Press, New York and London, (1978)
- [5] Marcela Grether y Enrique López Moreno, *Revista Mexicana de Física* 38, No 6 (1992) 968-983
- [6] R.K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*, University of California Press, Berkeley. (1964)
- [7] E. C. Zeeman, *Catastrophe Theory: Selected Papers 1972-1977* (Reding: Addison-Wesley, 1977)
- [8] Norman B. Haaser, Joseph P. LaSalle and Joseph A. Sullivan, *Análisis Matemático* 2, Ed. F. Trillas, México, (1970)
- [9] Eugene Hecht and Alfred Zajac, *Óptica* , Ed. Addison-Wesley Iberoamericana , USA, (1977)
- [10] Rene Tom, *Estructural Stability and Morphogenesis*, Reading Benjamin, 1975
- [11] Domenico P. L. Castriano y Sandra A. Hayes, *Catastrophe Theory*, Addison Wesley Publishing Company, Reading Massachessetts, New York México City, 1993
- [12] D. Gromoll y W. Mayer, *On differentiable functions with isolated critical points*, *Topology* 8, 1969
- [13] M. V. Berry and C. Upstill, *Catastrophe Optics: Morphologies of Caustics and their Diffraction Patterns*, E. Wolf Progress in Optics XVIII, North Holland, 1980
- [14] J.D. Lawrence, *A Catalog of special plane curves*, Dover Publications, New York, 1972