UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIONES DEL CÁLCULO. MATERIAL DE
APOYO PARA ALUMNOS DE BACHILLERATO Y LICENCIATURA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M Á T I C O .

P R E S E N T A :

FRANCISCO CONSTANTINO LUENGAS BERMÚDEZ

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

2001

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Aplicaciones del Cálculo. Material de apoyo para alumnos de Bachillerato y Licenciatura"

realizado por Francisco Constantino Luengas Bermúdez

con número de cuenta 08016648-1, quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. EN C. Alejandro Bravo Mojica
Propietario	M. EN C. Francisco Struck Chávez
Propietario	Dra. Ana Meda Guardiola
Suplente	M. en C. Manuel Fernández Villanueva Medina
Suplente	Fís. Enrique Cruz Martinez

Consejo Departamental de Matemáticas

M. EN C. Alejandro Bravo Mojica

A la memoria de mis Abuelos:

Esperanza y Rodolfo;

por su cariño, apoyo y confianza.

- Quiero expresar mi profundo agradecimiento a la **UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**; institución que me dio la oportunidad de ser: un profesionista, una mejor persona y formarme en los más altos valores morales. Gracias

- A la **D.G.S.C.A** por las facilidades otorgadas para la elaboración de este trabajo, en particular al Físico Enrique Cruz Martínez jefe del departamento de; **Super Cómputo**, quien me facilitó el equipo de cómputo y los manuales necesarios [15] [16] [17].

- Al M.en C. Alejandro Bravo Mojica por su paciencia y disposición para la realización de este trabajo.

- A mis Sinodales por sus valiosos comentarios y sugerencias.

- A mis Padres, principalmente a Miguel Angel Luengas Mendoza por estar siempre a mi lado en los momentos más difíciles, así como en los más agradables.

- Pero sobre todo a una Gran Mujer que me ha apoyado siempre, y sin su valiosa labor este trabajo no hubiera visto la luz. Mi admiración, respeto y cariño . Gracias **Elia**.

- A Alma y Oscar por su cooperación y alegría.

- A Enrique Cruz Martínez por su: amistad, dedicación y colaboración para la finalización de este trabajo. Y a todos mis amigos que de una forma u otra han contribuido.

Índice General

I INTRODUCCIÓN 5

II PROBLEMAS 9

1 Razón de Cambio **11**
1.1 Ondas circulares en un estanque 12
1.2 Expansión de una burbuja de jabón 13
1.3 Rapidez de un Aeroplano 14
1.4 Agua en un vaso de papel 16
1.5 Rapidez con que se separan dos aviones 18
1.6 Rapidez con que se acerca un bote al muelle 20
1.7 Rapidez con que resbala una escalera 21
1.8 Desplazamiento de una mancha de Petróleo 23

2 Optimización **25**
2.1 Viga de máxima resistencia 25
2.2 Volumen máximo de un Cilindro 28
2.3 Cono inscrito en una Esfera 29
2.4 Cilindro inscrito en un Cono 31
2.5 Sistema vascular Sanguíneo 33
2.6 Aplicaciones a la Economía. 36
2.6.1 Precio de una Revista 36
2.6.2 Costo de un Oleoducto 39
2.6.3 Costo de una Línea Telefónica 41
2.6.4 Renta de Departamentos 42
2.6.5 Manufactura y venta de Tostadores 43

3 Aplicaciones del Cálculo Integral **47**
3.1 Recursos Renovables 47
3.2 Personas que verán un Anuncio 54
3.3 Población de la Tierra 56
3.4 Trabajo 58
3.4.1 Cálculo del Trabajo para vaciar un depósito en forma de triángulo Isósceles 58

3.4.2 Cálculo del Trabajo para vaciar un depósito en forma de triángulo Rectángulo 60
3.4.3 Cálculo del Trabajo para vaciar un depósito en forma de Trapecio 61
3.4.4 Cálculo del Trabajo para vaciar un depósito Semicircular 63
3.4.5 Bombeo de aceite de un Cilindro 65
3.4.6 Bombeo de aceite de un tanque Esférico 66
3.4.7 Llenado de un tanque Esférico 68
3.4.8 Vaciado de un tanque Cónico 68
3.5 Mezclas 70
3.5.1 Cantidad de sal en un tanque de $200l$ 70
3.5.2 Salmuera en un tanque de $500gal$ 71
3.6 Determinación de fechas por radio carbono 72
3.6.1 Datación de Murales Prehistóricos 73
3.7 Ley de Newton del Enfriamiento 74
3.7.1 Enfriamiento de un Termómetro 74
3.7.2 Calentamiento de una barra pequeña 76

4 Sin proceso de límite **79**
4.1 Área máxima de un Triángulo Rectángulo 79
4.2 Caja rectangular de volumen máximo 82
4.3 Reloj de Agua 86
4.4 Área máxima de un cuadrilátero 89
4.5 Volumen entre dos cilindros 91

III CONCLUSIONES Y BIBLIOGRAFÍA **95**

5 Conclusiones **97**

Parte I

INTRODUCCIÓN

Introducción

Presentamos un grupo de problemas de: razón de cambio, máximos y mínimos, trabajo, población, ley de Newton de enfriamiento, costos, etc.

Estos problemas estan resueltos en forma detallada para que puedas seguirlos paso a paso. Debes tener en cuenta que podemos dividir las matemáticas en 2 formas: La primera es la parte mecánica que es donde te ejercitas con problemas, donde no es necesario pensar mucho sino simplemente aplicar una fórmula o aplicar una técnica; en esta parte se te puede enseñar una o varias técnicas y lo único que debes hacer es seguir el método . La otra parte consiste en resolver problemas para los que sí requieres pensar, obviamente ningún profesor te va a enseñar a pensar.

Es como jugar futbol. El entrenador te enseñará la técnica (dominar el balón, golpear el balón de cierta forma). Pero en un partido tú debes saber en que momento aplicar lo aprendido; es igual en matemáticas la técnica sería: factorizar, derivar, integrar, etc y el partido ("aplicaciones de las matemáticas") sería la resolución de los problemas.

Te mostraremos cómo se resuelven esos problemas, esto no quiere decir que sea la única forma de resolverlos, tal vez haya una persona que lo haga en una forma muy diferente, pero existen ciertos principios básicos que son los mismos; estos principios esperamos los encuentres por ti mismo. Lo que buscamos es prepararte para resolver problemas de cualquier tipo.

Parte II

PROBLEMAS

Capítulo 1

Razón de Cambio

INTRODUCCIÓN

Una de las preguntas más frecuentes que hacen los alumnos es: ¿para que sirven las matemáticas? esta pregunta la hacen principalmente por que (según creo) la mayor parte del tiempo solamente resuelven problemas de tipo algebráico, esto es; pueden estar resolviendo ejercicios de geometría analítica, cálculo ó estadística pero todo en el contexto del álgebra, dedicandole muy poco tiempo a la solución de problemas donde se puede apreciar la belleza y poder de las matemáticas, en muy pocas escuelas se resuelven problemas de "aplicación". A lo largo del trabajo iremos respondiendo parcialmente la pregunta.

Nuestra primera serie de problemas son los concernientes a la razón de cambio ó razones afines también se le conoce como razones relacionadas. Un problema de este tipo implíca el uso de dos o más cantidades que varien con el tiempo (esta condición es importante), a la derivada de estas cantidades se le llama razón de cambio; por ejemplo si y mide una distancia, la cual varía con el tiempo t, entonces $\frac{dy}{dt}$ se le llama razón de cambio, en este caso a esta razón se le llama rapidez (la magnitud del vector velocidad).

Es importante hacer notar que los valores de estas cantidades están dados en cierto instante, recuerde que el concepto de derivada es de tipo local, es decir en un punto y en una vecindad entorno a él.

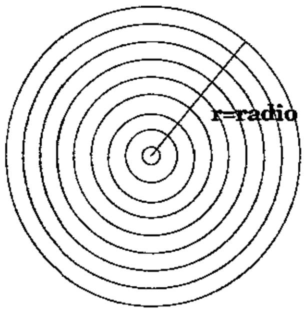
El problema consiste por lo general en determinar la razón de cambio que no es conocida en un instante dado. La técnica es aplicar derivación implícita a una relación que conecte una variable y con otra variable x y conocer de antemano el valor de $\frac{dx}{dt}$.

Los problemas están expuestos en grado de dificultad desde el más simple hasta el más complejo.

1.1 Ondas circulares en un estanque

Una piedra se deja caer sobre un estanque en reposo y produce ondas circulares concéntricas. El radio r de la onda exterior en un momento dado tiene una rapidez de 30 centímetros por segundo. Cuando su radio es de 120cm , ¿a qué ritmo está creciendo el área total A de la zona perturbada?

SOLUCIÓN



El área del círculo esta dada por la fórmula: $A = \pi r^2$

El ritmo de crecimiento del área está dada por la expresión:

$$\frac{dA}{dt}$$

Aplicando la derivada con respecto al tiempo a la fórmula del área para el círculo; obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d\pi r^2}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \pi \frac{dr^2}{dt}$$

Aplicamos la regla de la cadena ;

$$\frac{dA}{dt} = \pi \frac{dr^2}{dr} \frac{dr}{dt}$$

Resolviendo la derivada correspondiente:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

de los datos del problema

$$\frac{dr}{dt} = 30cm/s \qquad \text{y } r = 120cm$$

por lo que si sustituimos:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(120cm)(30cm/s)$$

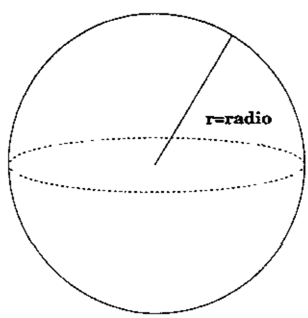
$$\frac{dA}{dt} = 7200\pi cm^2/s$$

El área en ese momento, y solamente en ese momento, crece a un ritmo de $7200\pi cm^2$.

1.2 Expansión de una burbuja de jabón

Suponiendo que una burbuja de jabón mantenga su forma esférica cuando se expande, ¿qué tan rápido aumenta su radio cuando mide dos pulgadas, si se sopla aire al interior a razón de cuatro pulgadas cúbicas por segundo?

SOLUCIÓN



El volumen de la esfera es: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ donde r es su radio, si derivamos la ecuación anterior con respecto a t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\frac{dr^3}{dt}$$

aplicamos la regla de la cadena

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\frac{dr^3}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3r^2)\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

Ahora :

La derivada $\frac{dV}{dt}$ es la razón de cambio del volumen y es igual a $4in^3/s$.

La derivada $\frac{dr}{dt}$ es la razón (rapidez) del radio; esta es la incógnita.

r es el radio $= 2in$

Despejamos $\frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2}$$ en esta ecuación vemos que $\frac{dr}{dt}$ depende de $\frac{dV}{dt}$ y r

sustituyendo los valores de cada variable

$$\frac{dr}{dt} = \frac{4in^3/s}{4\pi(2in)^2} = \frac{1in^3/s}{\pi(4in^2)}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi}in/s$$

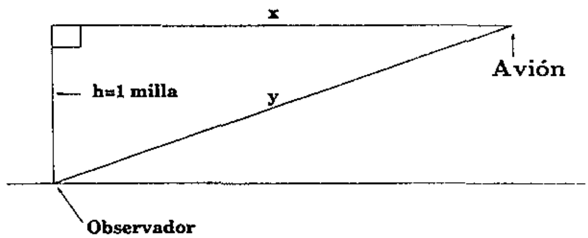
$$\frac{dr}{dt} \simeq 0.08in/s$$

Cuando el radio: tiene 2 pulgadas y entra aire a razón de 4 pulgadas cúbicas por segundo, el radio crece a razón de $0.08in/s$ si se cambian las condiciones anteriores es obvio que $\frac{dr}{dt}$ cambiará.

1.3 Rapidez de un Aeroplano

Un aeroplano vuela en dirección horizontal a una altitud de una milla y pasa directamente arriba de un observador. Si la velocidad constante del aeroplano es de 240 millas por hora, ¿Con qué rapidez se aleja del observador 30 segundos más tarde?

SOLUCIÓN



Sea x la distancia que recorre el avión y y la distancia del avión al observador por los datos del problema la rapidez es; $\frac{dx}{dt} = 240mi/h$ y se nos pide que encontremos $\frac{dy}{dt}$ cuando $t = 30seg$

De los cursos de física elemental $v = \frac{x}{t}$ despejando la variable x : $x = vt$ para poder sustituir debemos tener todas las variables en las mismas unidades por lo que los 30 segundos los convertimos a horas, utilizando una regla de tres:

$$1 \text{ hora} \sim 3600\text{s}$$
$$t \text{ horas} \sim 30\text{s}$$
$$t = \frac{30s}{3600s} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{120}h$$

Ahora sustituimos $x = (240mi/h)(\frac{1h}{120})$ por lo que $x = 2mi$ de la figura anterior vemos que tenemos un triángulo rectángulo donde se cumple la relación $y^2 = x^2 + h^2$ sustituyendo:

$$y^2 = (2mi)^2 + (1mi)^2$$
$$y^2 = 5mi^2$$
$$y = \sqrt{5}mi$$

Si derivamos $y^2 = x^2 + h^2$ obtenemos:

$$\frac{dy^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dh^2}{dt}$$

Ahora aplicamos la regla de la cadena en ambos lados de la ecuación:

$$\frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dx^2}{dx}\frac{dx}{dt}$$

donde aplicamos que $\frac{dh^2}{dt} = 0$, por que $h = 1$ es decir; es una costante. Realizando cada derivada se obtiene:

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

despejando $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt}}{2y}$$

cancelando el factor 2 y sustituyendo los valores correspondientes

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(2mi)(240mi/h)}{\sqrt{5}mi}$$

$$\frac{dy}{dt} = 96\sqrt{5}mi/h$$

$$\frac{dy}{dt} \simeq 214.7mi/h$$

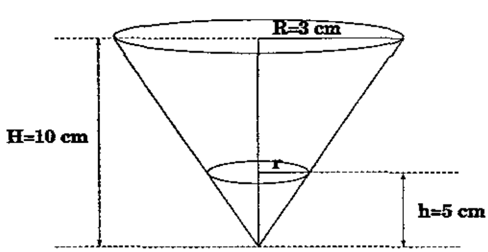
Por lo que el avión se aleja del observador a una rapidez aproximada de 215 millas por hora.

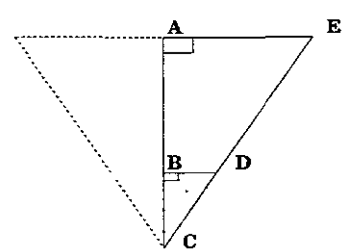
1.4 Agua en un vaso de papel

Un estudiante usa un popote para beber agua de un vaso de papel cónico, cuyo eje es vertical. Si la altura del vaso es de 10cm y el diámetro de la base es de 6cm, ¿Con qué rapidez baja el nivel del líquido cuando la profundidad es de 5cm y la rapidez de succión es de 3 centímetros cúbicos por segundo?

SOLUCIÓN

Con los datos del problema podemos hacer un esquema como el siguiente:





Definimos las siguientes variables:

H altura del cono = 10cm
R radio del cono = 3cm
h profundidad del agua
r radio del cono de agua que se forma

Si en la figura hacemos un corte observamos que se forman dos triángulos semejantes (rectángulos), $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ donde el segmento: $\overline{AC} = H, \overline{AE} = R, \overline{BC} = h, \overline{BD} = r$ por lo que podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$$\text{por semejanza de triángulos: } \frac{H}{h} = \frac{R}{r}$$

despejando la variable r: $\quad r = \dfrac{hR}{H}$

puesto que $R = 3cm$ y $H = 10cm$ $\quad r = \dfrac{3h}{10}$

La fórmula del volumen de un cono es: $\quad V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

Sustituyendo el valor de r en la fórmula anterior: $\quad V = \dfrac{1}{3}\pi \left(\dfrac{3h}{10}\right)^2 h$

Desarrollando: $\quad V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{9h^2}{100}\right) h$

Finalmente la fórmula del volumen es; $\quad V = \frac{3}{100}\pi h^3$
Esta fórmula es la que utilizaremos para aplicar la regla de la cadena.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi}{100}\frac{dh^3}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{3\pi}{100}\right)\frac{dh^3}{dh}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{3\pi}{100}\right)(3h^2)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{9\pi h^2}{100}\right)\frac{dh}{dt}$$

El problema pide que encontremos con que rapidez baja el líquido, esto significa que debemos encontrar $\frac{dh}{dt}$, para hacerlo solamente despejamos esta derivada de la última ecuación:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{100\frac{dV}{dt}}{9\pi h^2} \quad \text{depende de } h \text{ y de } \frac{dV}{dt}$$

Del problema obtenemos los siguientes datos:

$$\frac{dV}{dt} = 3cm^3/s \qquad\qquad h = 5cm$$

$$\text{sustituyendo:} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{100(3cm^3/s)}{9\pi(25cm^2)} = \frac{4}{3\pi}cm/s$$

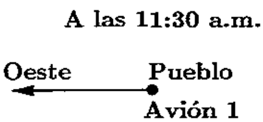
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{3\pi}cm/s$$

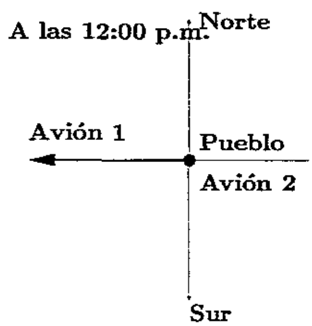
El agua está bajando a una razón de $0.42cm/s$, este resultado solo es válido bajo las condiciones anteriores.

1.5 Rapidez con que se separan dos aviones

Un aeroplano vuela hacia el oeste a 400 millas por hora y pasa sobre cierto pueblo a las 11:30 am; un segundo aeroplano vuela a la misma altura hacia el sur a 500 millas por hora y pasa por el mismo pueblo al mediodía. ¿Qué tan rápido se separan a la 1:00 pm?

SOLUCIÓN





Sabemos que el tiempo entre el primer aeroplano y el segundo es de 30 minutos ó media hora, con este dato y la ecuación de la distancia $d = vt$ podemos calcular la distancia que recorre el primer aeroplano.

$d = vt \qquad d = (400mi/h)(\frac{1}{2}h) \qquad d = 200mi$

esto significa que cuando el segundo aeroplano se encuentra sobre el pueblo el primero avanzó 200 millas hacia el oeste

Vamos a definir las siguientes variables:

x; la distancia que recorre el primer aeroplano
y; la distancia que recorre el segundo aeroplano
s; la distancia entre los dos aeroplanos

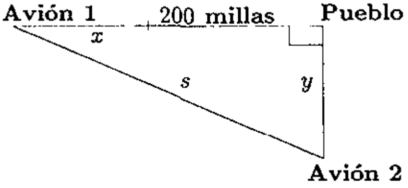
$v_1 = \frac{dx}{dt}$; la rapidez del primer aeroplano

$v_2 = \frac{dy}{dt}$; la rapidez del segundo aeroplano

$\frac{ds}{dt}$; la rapidez con que se separan

A partir de las doce tanto el primer como el segundo avión se han desplazado cierta distancia, usando la ecuación adecuada encontramos estas distancias:

$$x = v_1 t \qquad x = (400mi/h)(1h) \qquad x = 400mi$$
$$y = v_2 t \qquad y = (500mi/h)(1h) \qquad y = 500mi$$



Vemos de la figura que se forma un triángulo rectángulo cuyos lados son $x + 200$, y y s y su ecuación es: $s^2 = y^2 + (x + 200)^2$ sustituyendo los valores de cada variable tenemos:

$$s^2 = (500)^2 + (400 + 200)^2$$

$$s^2 = 250000 + 360000$$

$$s^2 = 610000$$

$$s \simeq 781mi$$

Aplicamos la regla de la cadena

$$\frac{ds^2}{dt} = \frac{d(x+200)^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt}$$

$$\frac{ds^2}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d(x+200)^2}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dt}$$

$$2s\frac{ds}{dt} = 2(x+200)\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\text{simplificando el factor 2} \quad s\frac{ds}{dt} = (x+200)\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$\text{despejando} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{(x+200)\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{s}$$

$$\text{sustituyendo} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{(400+200)400 + 500(500)}{781}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{240000 + 250000}{781}$$

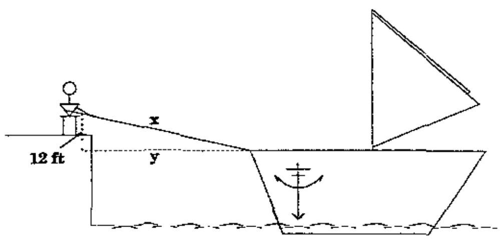
$$\frac{ds}{dt} = 627.4mi/h$$

Esto significa que se estan separando a una rapidez de 627.4mi/h a la 1:00pm es importante hacer notar que esta rapidez es instantánea, es decir, si queremos determinar la rapidez a la que se separan a la 1:05pm debemos hacer los cálculos correspondientes.

1.6 Rapidez con que se acerca un bote al muelle

En un muelle un hombre tira de una cuerda atada a la proa de un pequeño bote. Si las manos del hombre están a 12 pies arriba del punto en que la cuerda está atada al bote y si está recobrando la cuerda a razón de tres pies por segundo, ¿con qué rapidez se aproxima el bote al muelle cuando faltan por recogerse 20 pies de cuerda?

SOLUCIÓN



Primero definamos las variables que vamos a usar:

x; representa la distancia del bote a las manos del hombre
y; representa la distancia del bote al muelle

Vemos de la figura que se forma un triángulo rectángulo, que se expresa como:

$$y^2 + (12)^2 = x^2$$

sustituyendo el valor de $x = 20$ y despejando la variable y

$$y^2 + (12)^2 = (20)^2; \qquad y^2 = (20)^2 - (12)^2;$$

$$y^2 = 400 - 144; \qquad y^2 = 256; \qquad y = 16ft$$

Derivemos la expresión $y^2 + (12)^2 = x^2$ con respecto al tiempo;

$$\frac{dy^2}{dt} + \frac{d(12)^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt}$$

aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dx^2}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

despejamos $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt}}{2y}$$

cancelando el factor 2 y sustituyendo valores

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(20ft)(3ft/s)}{16ft}$$

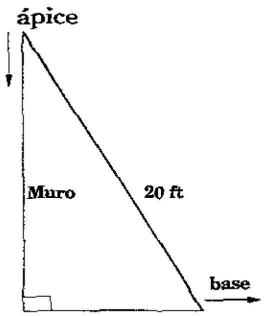
$$\frac{dy}{dt} = 3.75ft/s$$

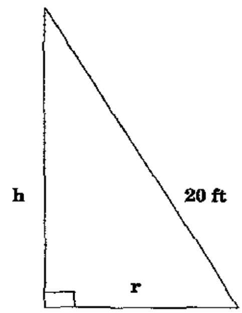
Esto significa que el bote se acerca al muelle a una velocidad aproximada de 3.75 pies por segundo.

1.7 Rapidez con que resbala una escalera

Una escalera de 20 pies está recargada contra un muro. Si la base de la escalera resbala a lo largo del pavimento ¿con qué rapidez baja por el muro el ápice de la escalera? cuando en ese momento su base está a 4 pies del muro y la rapidez con que resbala es de 2 pies por segundo.

SOLUCIÓN





Definamos las variables que vamos a utilizar:

h: representa la distancia del ápice al suelo; es una incógnita
r: representa la distancia de la base de la escalera al muro $= 4ft$
$\frac{dh}{dt}$: representa la rapidez con que baja el ápice; esta es la pregunta del problema
$\frac{dr}{dt}$: es la rapidez con que se desplaza la base de la escalera $= 2ft/s$

De la figura se observa que se forma un triángulo rectángulo con lados h,r y 20 (el valor de la hipotenusa). Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + r^2 = (20)^2 \tag{1.1}$$

vamos a sustituir r y despejar h

$$\begin{aligned} h^2 + (4)^2 &= (20)^2 \\ h^2 &= (20)^2 - (4)^2 \\ h^2 &= 400 - 16 \\ h^2 &= 384 \\ h &\simeq 19.6 \end{aligned}$$

Ahora vamos a derivar la ecuación (1.1):

$$\frac{dh^2}{dt} + \frac{dr^2}{dt} = \frac{d(20)^2}{dt}$$

aplicando la regla de la cadena: $\frac{dh^2}{dh}\frac{dh}{dt} + \frac{dr^2}{dr}\frac{dr}{dt} = 0$

$$2h\frac{dh}{dt} + 2r\frac{dr}{dt} = 0$$

despejamos $\frac{dh}{dt} = \frac{-2r\frac{dr}{dt}}{2h}$

cancelamos el factor 2: $\frac{dh}{dt} = -\frac{r\frac{dr}{dt}}{h}$

sustituimos en esta ecuación los valores de las variables

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{4ft(2ft/s)}{19.6ft}$$

$$\frac{dh}{dt} \simeq -0.4ft/s$$

El signo negativo es por que la escalera se está moviendo hacia abajo con una rapidez de $0.4ft/s$

1.8 Desplazamiento de una mancha de Petróleo

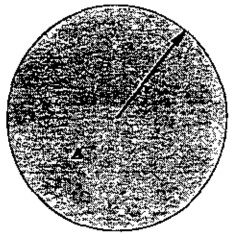
Se derrama petróleo de un tanque roto formando una mancha circular. Si el radio del círculo crece en promedio con una rapidez de 1.5 pies por segundo, ¿con qué rapidez aumenta el área cubierta al término de 20 segundos?

SOLUCIÓN

La fórmula de la distancia es $d = vt$, tomamos a r en lugar de d y sustituimos $r = (1.5ft/s)(20s)$, es decir $r = 30ft$

Sabemos de geometría que el área de un círculo es: $A = \pi r^2$ y por los datos del problema: $t = 20s$ y $\frac{dr}{dt} = 1.5ft/s$. Derivando la fórmula del área :

$$\frac{dA}{dt} = \pi\frac{dr^2}{dt}$$



si aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{dA}{dt} = \pi \frac{dr^2}{dr} \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

sustituyendo los valores correspondientes:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(30ft)(1.5ft/s)$$

$$\frac{dA}{dt} = 90\pi ft^2/s$$

Esto es; la mancha crece a un ritmo de $2827ft^2/s$ pero solamente en ese momento.

Capítulo 2

Optimización

INTRODUCCIÓN

Me parece que una de las ramas más importantes del cálculo es la referente a los problemas de optimización, es aquí donde se puede apreciar en todo su esplendor la aplicación de las matemáticas.

Si tomamos en cuenta que a menudo se desea maximizar: áreas, volumenes, voltajes, ganancias, etc y minimizar: costos, tiempos, material, etc. La técnica de optimización es una herramienta poderosa.

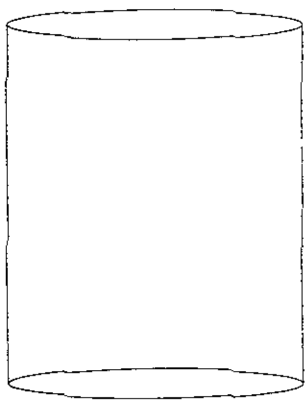
En general primero se determina la cantidad a optimizar, esta cantidad será la variable dependiente que a su vez se expresa en función de una y solamente una variable independiente (se podría expresar en función de dos o más pero esto ya saldría del contexto de este trabajo) si el dominio de la variable independiente es un intervalo cerrado, entonces procedemos con el método de máximo y mínimo en un intervalo cerrado.

2.1 Viga de máxima resistencia

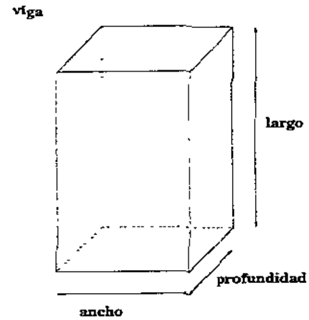
¿Cuáles deben ser las dimensiones de la viga de máxima resistencia que puede obtenerse de un tronco de diámetro D?

SOLUCIÓN

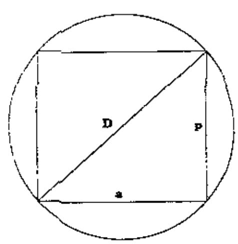
El problema lo podemos plantear como sigue: se tiene un tronco y se desea cortar de tal forma que se tenga una viga de máxima resistencia. Ahora bien, *la resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional a su ancho y al cuadrado de su profundidad*



Tronco



Denotemos por:



D el diámetro del tronco
p la profundidad de la viga
a el ancho de la viga
r la resistencia de la viga

de estas variables solamente conocemos el diámetro D y tenemos que encontrar: p y a

La frase "la resistencia es directamente proporcional a el ancho y al cudrado de la profundidad" se reescribe en forma algebráica como:

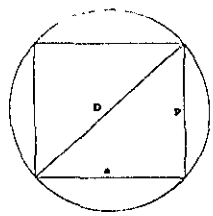
$$r = kap^2 \tag{2.1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Esta última ecuación es la que debemos de maximizar. Aquí surge un problema y es que tenemos dos variables y nosotros solo sabemos hacer cálculo en una variable; para solucionarlo tenemos que hacer la expresión $r = kap^2$ sea función solo de una variable $r(a)$ ó $r(p)$.

Para lograrlo regresemos a nuestro dibujo:

observa que en este dibujo tenemos un triángulo rectángulo, usando el teorema de Pitágoras $D^2 = a^2 + p^2$; de esta relación podemos despejar a ó p, pero observando la fórmula para la resistencia, ($r = kap^2$), resulta natural (y más fácil) despejar p^2, es decir: $p^2 = D^2 - a^2$.



y el resultado lo sustituimos en la ecuación (2.1), es decir obtenemos:

$$r = ka(D^2 - a^2)$$

observa que esta última ecuación es función solamente de a puesto que D es conocido y k es una constante

$$r = kD^2a - ka^3$$

por lo que el problema se reduce a maximizar esta última función:

$$\frac{dr}{da} = kD^2 - 3ka^2$$

$$\text{si } \frac{dr}{da} = 0 \quad \Rightarrow \quad kD^2 - 3ka^2 = 0$$

$$\text{despejando } a\text{:} \quad a^2 = \frac{kD^2}{3k} \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{\frac{D^2}{3}}$$

$$\text{por lo que las posibles soluciones son:} \quad a = \frac{D}{\sqrt{3}} \qquad a = -\frac{D}{\sqrt{3}}$$

observa que en ambos casos no depende de, k, la constante de proporcionalidad además parece razonable que la solución negativa no tiene sentido, es decir el ancho debe ser $a = \frac{D}{\sqrt{3}}$

Hemos resuelto parcialmente el problema, puesto que solamente hemos hallado el ancho. Nos falta hallar la profundidad, para esto nos auxiliamos de la ecuación $p^2 = D^2 - a^2$ sustituyendo el valor de a.

$$p^2 = D^2 - (\frac{D}{\sqrt{3}}) = D^2 - \frac{D^2}{3}$$

$$p^2 = \frac{2D^2}{3} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{\frac{2D^2}{3}} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{\frac{2}{3}}D$$

En resumen la viga de resistencia máxima debe tener:

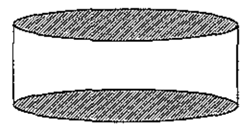
$$\text{ancho igual a:} \quad \frac{D}{\sqrt{3}} \qquad \text{profundidad igual a:} \quad \sqrt{\frac{2}{3}}D$$

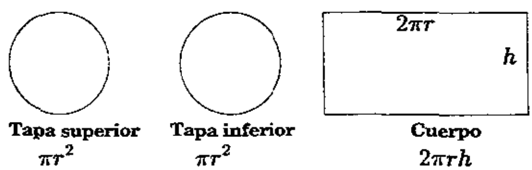
2.2 Volumen máximo de un Cilindro

Dada una superficie S ¿Cuál es el cilindro de volumen máximo que se puede construir?

SOLUCIÓN

La superficie del cilindro está compuesta por las dos tapas y el área del "cuerpo"





El área total es igual a el área de la tapa superior πr^2, más el área del cuerpo $2\pi rh$, más el área de la tapa inferior πr^2, por lo que la superficie es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \text{y además el volumen es:} \quad V = \pi r^2 h$$

por como se plantea el problema se supone que conocemos S; con este dato despejamos h de la fórmula de la superficie:

$$h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} \tag{2.2}$$

sustituyendo esta ecuación en la fórmula del volumen:

$$V = \pi r^2 \left(\frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} \right) \quad \text{cancelando términos:}$$

$$V = r \left(\frac{S - 2\pi r^2}{2} \right) = \frac{Sr - 2\pi r^3}{2}$$

Derivamos esta última ecuación con respecto a r:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d\left(\frac{Sr - 2\pi r^3}{2}\right)}{dr} = \frac{S - 6\pi r^2}{2}$$

$$\text{si } \frac{dV}{dr} = 0 : \quad \frac{S - 6\pi r^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S - 6\pi r^2 = 0$$

despejamos r:

$$6\pi r^2 = S \quad \Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

es obvio que la solución es la raiz positiva. Hasta ahora solamente hemos encontrado el valor del radio: $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ pero falta encontrar el valor de la altura; para lograrlo sustituimos la r en la ecuación (2.2):

$$h = \frac{S - 2\pi\left(\frac{S}{6\pi}\right)}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} \quad \text{reduciendo un factor 2 y } \pi; \quad h = \frac{S - \frac{S}{3}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}$$

$$\text{realizamos el quebrado del numerador} \quad \frac{\frac{2S}{3}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \frac{\frac{2S}{3}}{\frac{2\pi\sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}}}$$

realizando esta división de fracciones y simplificando:

$$h = \frac{2S\sqrt{6\pi}}{6\pi\sqrt{S}} = \frac{2\sqrt{S}\sqrt{S}\sqrt{6\pi}}{\sqrt{6\pi}\sqrt{6\pi}\sqrt{S}} = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

pero recordemos que $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ lo que se traduce en $h = 2r$, es decir la altura debe de ser el doble del radio.

$$r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \qquad\qquad h = 2r$$

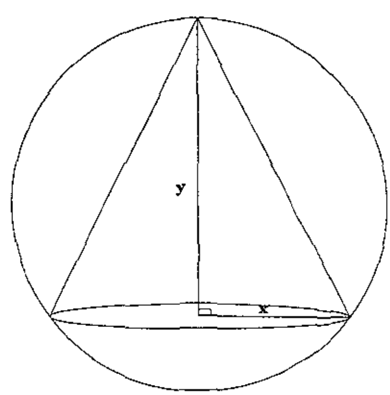
2.3 Cono inscrito en una Esfera

Hallar la altura del cono de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio r.

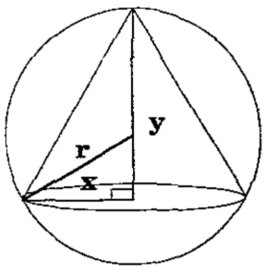
SOLUCIÓN

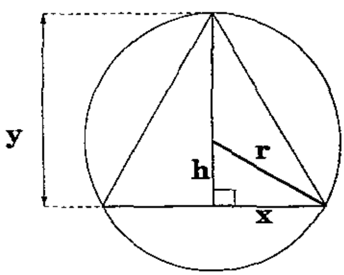
comentarios:

- x representa el radio de la base del cono y y representa la altura del cono
- buscamos el valor de la variable y por lo que la función que trataremos debe ser una función de dicha variable
- por los datos del problema debemos máximizar el volumen
- el radio de la esfera ya está dado, esto es, ya es fijo y su valor es r



Ahora la función a maximizar es la del volumen del cono $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ esta función está expresada en términos de dos variables, pero ya dijimos que debe ser función sólo de la variable y, así que buscaremos una relación entre x y y. Regresemos a la figura:





- podemos formar un triángulo rectángulo con lados h, r y x donde r es el radio de la esfera (hipotenusa), $h = y - r$ es el cateto opuesto.
- $r^2 = h^2 + x^2$
- despejamos x^2: $x^2 = r^2 - h^2$
- sustituimos h: $x^2 = r^2 - (y - r)^2$
- desarrollamos el cuadrado:
- $x^2 = r^2 - (y^2 - 2yr + r^2)$
- $x^2 = r^2 - y^2 + 2yr - r^2$ simplificando:
- $x^2 = 2yr - y^2$

Sustituimos el valor de $x^2 = 2yr - y^2$ en la fórmula del volumen $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ por lo que obtenemos la siguiente expresión:

$V = \frac{1}{3}\pi(2yr - y^2)y$, realizando la multiplicación, encontramos la función a maximizar:

$$V = \frac{1}{3}\pi(2ry^2 - y^3)$$

calculamos la primera derivada: $V' = \dfrac{1}{3}\pi(4ry - 3y^2)$

anulamos la primera derivada para establecer los valores críticos:

$$V' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi(4ry - 3y^2) = 0$$

puesto que el término $\frac{1}{3}\pi$ es diferente de cero lo podemos transponer dividiendo, y obtener:

$$(4ry - 3y^2) = 0$$

factorizando y: $\qquad y(4r - 3y) = 0$

igualando a cero ambos factores: $y = 0; \quad 4r - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{4r}{3}$

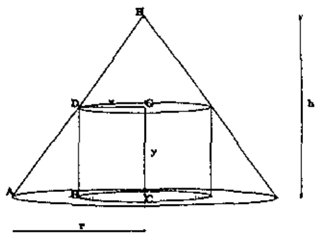
Es obvio que la solución $y = 0$ significa una altura cero, es decir, no hay cono; así que la altura que maximiza el volumen es:

$$y = \frac{4r}{3}$$

2.4 Cilindro inscrito en un Cono

Hallar la altura del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado.

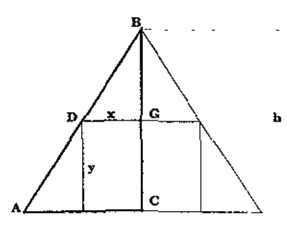
SOLUCIÓN



Sea $\overline{AC} = r$ y $\overline{BC} = h$ (ver figura), lo que buscamos es la altura del cilindro; observa que en la figura dicha altura es y y la del cono es h por lo tanto nuestro objetivo es encontrar y haciendo que el volumen del cilindro sea el máximo posible.

Recordemos que la fórmula para el volumen del cilindro es $V = \pi x^2 y$, como en el problema anterior esta función depende de dos variables y la debemos hacer dependiente de una sola variable, obviamente de y que es lo que andamos buscando. Para esto debemos encontrar una relación entre x y y tomemos un corte transversal de la figura.

- observa los triángulos:
- $\triangle ABC$
- $\triangle BDG$

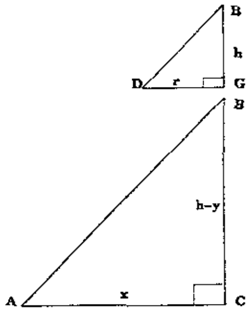


La longitud $\overline{BC} = \overline{BG} + \overline{GC}$ (observa la figura), despejemos $\overline{BG}; \overline{BG} = \overline{BC} - \overline{GC}$; también observa que $\overline{BC} = h$ y $\overline{GC} = y$, por lo tanto:

$$\overline{BG} = h - y \tag{2.3}$$

Ahora $\triangle ABC \sim \triangle BDG$ la razón es por que tienen un ángulo común $\angle B$ y ambos tienen un ángulo recto, es decir tienen dos ángulos iguales y por (geometría elemental) el postulado ángulo-ángulo se sigue que son semejantes.

Esto significa que sus lados son proporcionales;



- $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{BG}} \Rightarrow \frac{x}{h-y} = \frac{r}{h}$
- despejando x:
  $x = \frac{h-y}{h} r = \frac{r(h-y)}{h}$
- elevando ambos lados al cuadrado:
- $x^2 = \frac{r^2(h-y)^2}{h^2}$
- desarrollando el cuadrado:
- $x^2 = \frac{r^2(h^2-2hy+y^2)}{h^2}$

Por lo que sustituyendo esta expresión en la fórmula del volumen $V = \pi x^2 y$ obtenemos:

$$V = \frac{\pi r^2(h^2 - 2hy + y^2)}{h^2} y$$

multiplicando y reordenando:

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2}(h^2 y - 2hy^2 + y^3)$$

π, r, h son constantes la única variable es y, bien ahora encontremos y haciendo V máximo, derivando la fórmula del volumen que acabamos de encontrar:

$$V'(y) = \frac{\pi r^2}{h^2}(h^2 - 4hy + 3y^2)$$

anulamos la primera derivada ($V'(y) = 0$) para determinar los valores críticos:

$$\frac{\pi r^2}{h^2}(h^2 - 4hy + 3y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad h^2 - 4hy + 3y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y^2 - 4yh + h^2 = 0$$

utilizamos la fórmula general para solucionar esta ecuación

$$y = \frac{-(-4h) \pm \sqrt{(-4h)^2 - 4(3)(h^2)}}{2(3)} = \frac{4h \pm \sqrt{16h^2 - 12h^2}}{6}$$

$$y = \frac{4h \pm \sqrt{4h^2}}{6} = \frac{4h \pm 2h}{6}$$

obtenemos dos soluciones: $y_1 = \frac{4h + 2h}{6} = \frac{6h}{6} = h; \quad y_2 = \frac{4h - 2h}{6} = \frac{2h}{6} = \frac{h}{3}.$

Analicemos las dos soluciones:

$y_1 = h$ significa que la altura del cilindro debe ser igual a la altura del cono; lo

cual no puede ser por que entonces el cilindro no puede estar dentro del cono.
$y_2 = \frac{h}{3}$ significa que el cilindro está dentro del cono
La solución buscada es que la altura del cilindro debe ser un tercio la altura del cono.

2.5 Sistema vascular Sanguíneo

El sistema vascular sanguíneo consiste de vasos sanguíneos (arterias, arteriolas, capilares y venas) que conllevan sangre del corazón a los organos y de regreso al corazón. Este debe trabajar de tal forma que minimiza la energía que gasta el corazón en bombear la sangre. En particular, esta energía es reducida cuando la resistencia de la sangre es la menor posible. Una ley de la resistencia R de la sangre está dada por la ley de Poiseville:

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

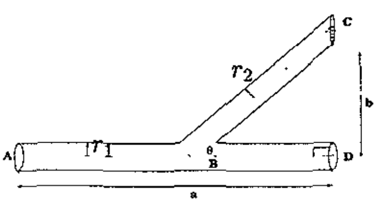
donde L es la longitud del vaso sanguíneo, r es su radio y C es una constante positiva determinada por la viscosidad de la sangre (Poiseville establecio esta ley experimentalmente). La figura muestra el vaso sanguíneo principal con radio r_1 y una pequeña rama con radio r_2 formando un ángulo θ

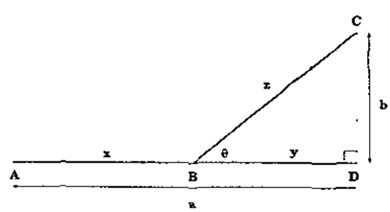
a) Calcule la resistencia total de la sangre a lo largo de la trayectoria ABC

b) Encuentre una relación entre los radios para que la resistencia sea mínima

c) Si r_2 es dos tercios de r_1 halle el ángulo óptimo de la rama

SOLUCIÓN





Sean:

x la distancia $\overline{AB}$
y la distancia $\overline{BD}$
z la distancia $\overline{BC}$

de la figura observamos que la suma de las distancias x y y da como resultado la longitud de la vena principal, es decir:

$$x + y = a \quad \text{despejando } x: \quad x = a - y \tag{2.4}$$

Por otro lado vemos que en la figura se forma un triángulo rectángulo BCD con hipotenusa z. De trigonometría elemental obtenemos las siguientes relaciones:

$$\sin\theta = \frac{b}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{b}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad z = b\csc\theta \tag{2.5}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{\tan\theta} \quad \Rightarrow \quad y = b\cot\theta \tag{2.6}$$

estas ecuaciones están definidas siempre que $\theta \neq 0$ y $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, esto tiene sentido por que si $\theta = 0$ la rama coincidiría con la vena principal, y si $\theta = \frac{\pi}{2}$ se formaría un trombo, es decir al quedarse la sangre estancada se formaría un coágulo ó por lo menos no podría fluir correctamente la sangre.

El problema nos dice que la sangre debe recorrer la trayectoria ABC; $\overline{AB} = x$ y $\overline{BC} = z$ es obvio que esta trayectoria es la suma de $x + z$., y la expresión de Poiseville para cada región es:

$$R_x = C\left(\frac{x}{r_1^4}\right) \quad R_z = C\left(\frac{z}{r_2^4}\right) \quad R = R_x + R_z \quad \text{esto es:}$$

$$R = C\left(\frac{x}{r_1^4} + \frac{z}{r_2^4}\right) \text{sustituyendo } x \text{ de la ecuación; (2.4) obtenemos:}$$

$$R = C\left(\frac{a-y}{r_1^4} + \frac{z}{r_2^4}\right)$$

sustituimos los valores de y y z de las ecuaciones (2.5) y (2.6), obteniendo:

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right) \tag{2.7}$$

es decir la resistencia total de la sangre a través de la trayectoria ABC está dada por la ecuación (2.7). Supongamos que a, b, r_1 y r_2 son valores fijos y solamente varía θ; derivemos la ecuación (2.7) con respecto a θ para encontrar la resistencia mínima.

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[C\left(\frac{a}{r_1^4} - \frac{b}{r_1^4}\cot\theta + \frac{b}{r_2^4}\csc\theta\right)\right]$$

$$\frac{dR}{d\theta} = C\left[-\frac{b}{r_1^4}\frac{d\cot\theta}{d\theta} + \frac{b}{r_2^4}\frac{d\csc\theta}{d\theta}\right]$$

$$\frac{dR}{d\theta} = C\left[-\frac{b}{r_1^4}(-\csc^2\theta) + \frac{b}{r_2^4}(-\cot\theta\csc\theta)\right]$$

$$\frac{dR}{d\theta} = C\left[\frac{b}{r_1^4}\csc^2\theta - \frac{b}{r_2^4}\cot\theta\csc\theta\right]$$

si anulamos la primera derivada $\frac{dR}{d\theta} = 0$ llegamos ala ecuación:

$$C\left[\frac{b}{r_1^4}\csc^2\theta - \frac{b}{r_2^4}\cot\theta\csc\theta\right] = 0$$

es obvio que b y c son diferentes de cero, por lo tanto podemos dividir toda la ecuación entre bc

$$\frac{\csc^2\theta}{r_1^4} - \frac{\cot\theta\csc\theta}{r_2^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\csc^2\theta}{r_1^4} = \frac{\cot\theta\csc\theta}{r_2^4}$$

multiplicando ambos lados por $\sin^2\theta$

$$\frac{\sin^2\theta\csc^2\theta}{r_1^4} = \frac{\sin^2\theta\cot\theta\csc\theta}{r_2^4}$$

$$\frac{1}{r_1^4} = \left(\sin\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{1}{r_2^4} \quad \text{simplificando } \sin\theta \text{ se obtiene:}$$

$$\frac{1}{r_1^4} = \frac{\cos\theta}{r_2^4} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

lo que significa que el ángulo que minimiza la resistencia depende de la razón de los radios. Puesto que $r_2 < r_1$ (condición que es clara por que el radio r_2 es el perteneciente a la rama) $\frac{r_2}{r_1} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2^4}{r_1^4} < 1$, es decir $\cos\theta$ está bien definida, en el caso particular que

$$r_2 = \frac{2}{3}r_1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{(\frac{2}{3})^4 r_1^4}{r_1^4}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad \theta = 1.372rad$$

Por lo que la solución a cada inciso es :

a) La resistencia total de la sangre a lo largo de la trayectoria ABC es:

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

b) La relación entre los radios para que la resistencia sea mínima es :

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

c) Si r_2 es dos tercios de r_1 el ángulo optimo de la rama es: $\theta = 1.372\,rad$

2.6 Aplicaciones a la Economía.

Dentro de la Economía se puede aplicar el concepto de derivada; para esto debemos de comprender algunos términos:
Costo Marginal.- Es el costo promedio por artículo extra cuando se efectua un cambio muy pequeño en la cantidad producida.

$$\text{Costo Marginal} = \frac{dC}{dx}$$

Costo promedio por artículo= $\frac{C(x)}{x}$ donde x representa las unidades producidas.

Si $R(x)$ denota el ingreso por la venta de x artículos, definimos el ingreso marginal como la derivada $R'(x)$. La función de ingreso puede escribirse en la forma $R(x) = xp$, en donde p es el precio por artículo y x el número de artículos vendidos, en muchos casos existe una relación entre x y p carecterizada por la ecuación de demanda. Mientras más artículos pueda vender la empresa, más bajo puede fijar el precio, entre más alto se fije el precio, en general, menor será el volumen de ventas.

La utilidad que una empresa obtiene está dada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos. Si la función de ingreso es $R(x)$ y si la función de costo es $C(x)$ al producirse esos mismos artículos, entonces la utilidad $P(x)$ obtenida por producir y vender x artículos está dada por $P(x) = R(x) - C(x)$ la derivada $P'(x)$ se denomina la utilidad marginal. Representa la utilidad adicional por artículo si la producción sufre un pequeño incremento.

2.6.1 Precio de una Revista

El editor de una revista descubre que si fija un precio de \$1.00 a su revista, vende 20,000 ejemplares al mes; sin embargo, si el precio fijado es de \$1.50, sus ventas solo serán 15,000 ejemplares. El costo de producción de cada ejemplar es de \$0.80, y tiene costos fijos de \$10,000 al mes. Suponiendo una ecuación de demanda lineal, Calcule su función de utilidad marginal y determine el precio de la revista que haga la utilidad marginal igual a cero. Evalúe la utilidad misma cuando el precio es a) \$1.80 b) \$1.90 c) \$2.00

SOLUCIÓN

Empezaremos por establecer la ecuación de demanda; puesto que el problema supone una relación lineal utilizaremos la ecuación de una recta dados dos puntos, esto es: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ pero en lugar de la variable y utilizaremos la variable p, sea:

x el número de ejemplares vendidos al mes
p el precio de cada ejemplar

un punto en el plano, x, p tiene la forma (x, p) esto significa que según los datos del problema se tienen los puntos: (20000,1) y (15000,1.5).,usando la ecuación anterior:

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

sustituyendo los valores obtenemos:

$$p - 1 = \frac{1.5 - 1}{15000 - 20000}(x - 20000)$$

$$p - 1 = \frac{0.5}{-5000}(x - 2000)$$

$$p - 1 = -0.0001(x - 20000)$$

$$p - 1 = -0.0001x + 2$$

$$p = -0.0001x + 3 \text{ ecuación de demanda}$$

Ahora establezcamos la ecuación del costo: $C(x)$ La oración : "por cada ejemplar se gasta 0.80" significa $0.8x$ además se tiene un costo fijo de 10,000 por lo que $C(x) = 0.8x + 10,000$
Nuestro siguiente paso es encontrar la ecuación de ingreso $R(x) = xp$

$$R(x) = x(-0.0001x + 3) = -0.0001x^2 + 3x$$

Así que la función de utilidad es:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = -0.0001x^2 + 3x - 0.8x - 10000$$

$$P(x) = -0.0001x^2 + 2.2x - 10000$$

La utilidad Marginal es $P'(x) = -0.0002x + 2.2$

$$\begin{aligned}\text{Si } P'(x) = 0 \Rightarrow -0.0002x + 2.2 = 0\\ -0.0002x = -2.2\\ x = \tfrac{-2.2}{-0.0002}\\ x = 11,000\end{aligned}$$

Esto significa que si se venden 11000 ejemplares al mes. La utilidad marginal es cero, y el precio es de:

$$p = -0.0001(11000) + 3$$

$$p = -1.1 + 3$$

$$p = \$1.90$$

Despejando x de la ecuación de demanda

$$p = -0.0001x + 3$$

$$0.0001x = 3 - p$$

$$x = 10000(3 - p)$$

Con esta última ecuación podemos calcular el valor de x, si conocemos de antemano el valor de p

Si el precio($\$p$) es de:	El número de ejemplares vendidos(x) es de:
1.80	12,000
1.90	11,000
2.00	10,000

Ahora sustituimos x para encontrar la utilidad. Recordemos que la expresión para la utilidad es $P(x) = -0.0001x^2 + 2.2x - 10,000$

$$p = 1.80; x = 12000; P(x) = -0.0001(12000)^2 + 2.2(12000) - 10000 = 2,000$$
$$p = 1.90; x = 11000; P(x) = -0.0001(11000)^2 + 2.2(11000) - 10000 = 4,200$$
$$p = 2.00; x = 10000; P(x) = -0.0001(10000)^2 + 2.2(10000) - 10000 = 2,000$$
$$p = 1.00; x = 20000; P(x) = -0.0001(20000)^2 + 2.2(20000) - 10000 = -6,000$$
$$p = 1.50; x = 15000; P(x) = -0.0001(15000)^2 + 2.2(15000) - 10000 = 500$$

Podemos resumir:

x número de ejemplares vendidos al mes:	p precio por ejemplar($):	$P(x)$utilidad
20,000	1.00	-6,000
15,000	1.50	500
12,000	1.80	2,000
11,000	1.90	4,200
10,000	2.00	2,000

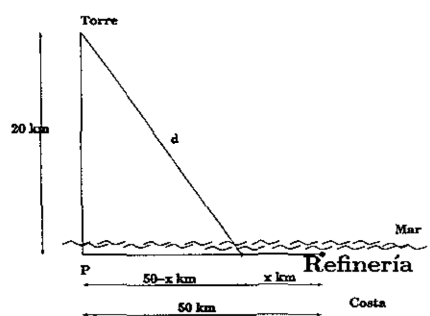
Por lo que la utilidad máxima es cuando se producen 11,000 ejemplares vendidos a $1.90 cada ejemplar.

2.6.2 Costo de un Oleoducto

Una compañía petrolera requiere un oleoducto de una torre de perforación situada mar adentro a una refinería que se costruye en la costa cercana. La distancia de la torre de perforación al punto más cercano P sobre la costa es de 20 km y la distancia a lo largo de la costa de P a la refinería es de 50 km. A partir de la refinería el oleoducto recorrerá una distancia x a lo largo de la costa, después seguirá una linea recta hasta la torre de perforación. El costo por kilómetro de oleoducto bajo el agua es tres veces el correspondiente a la sección sobre tierra. Encuentra el valor de x que minimiza el costo total del oleoducto.

SOLUCIÓN

Primero haremos un esquema de la situación



Para encontrar la distancia d, que representa el número de kilómetros que debe recorrer el oleoducto bajo el agua, observamos que se forma un triángulo rectángulo; con catetos 20 km y $(50 - x)$ km e hipotenusa igual a d. Usando el teorema de Pitágoras $d^2 = (50 - x)^2 + 20^2$; desarrollando:

$$d = \sqrt{2500 - 100x + 400 + x^2}$$

$$d = \sqrt{x^2 - 100x + 2900}$$

Sea q el costo por kilómetro de oleoducto en tierra y $3q$ el costo por kilómetro bajo el agua (esto se entiende por que el material usado debe ser más resistente, además el mantenimiento debe ser mayor y más costoso).

El costo total es $C(x)$ = costo por kilómetro en tierra + costo de kilómetro bajo el agua, es decir:

$$C(x) = xq + \sqrt{x^2 - 100x + 2900}(3q)$$

calculemos el costo marginal

$$\frac{dC}{dx} = \frac{dxq}{dx} + \frac{d\sqrt{x^2 - 100x + 2900}}{dx}3q$$

$$\frac{dC}{dx} = q + \frac{2x - 100}{2\sqrt{x^2 - 100x + 2900}}3q$$

$$\frac{dC}{dx} = q + \frac{3x - 150}{\sqrt{x^2 - 100x + 2900}}q$$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow q = \frac{150 - 3x}{\sqrt{x^2 - 100x + 2900}}q$$

$$\sqrt{x^2 - 100x + 2900q} = (150 - 3x)q$$

eliminando q y elevando al cuadrado

$$x^2 - 100x + 2900 = (150 - 3x)^2$$

$$x^2 - 100x + 2900 = 22500 - 900x + 9x^2$$

$$x^2 - 9x^2 - 100x + 900x + 2900 - 22500 = 0$$

$-8x^2 + 800x - 19600 = 0$ dividiendo toda la ecuación entre -8
$x^2 - 100x + 2450 = 0$ observe que no depende de q
si usamos la fórmula general para resolver la ecuación

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4(1)(2450)}}{2}$$

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{200}}{2}$$

$x_1 = 57.07\,km$ y $x_2 = 42.9\,km$ el primer resultado no tiene sentido por que excede la distancia de $50\,km$ por lo que la solución es $42.9\,km$ por tierra.

Para conocer los kilómetros por debajo del agua debemos sustituir el valor de $x = 42.9$ en la fórmula donde expresamos esta cantidad

$$d = \sqrt{x^2 - 100x + 2900}$$

esto es:

$$d = \sqrt{42.9^2 - 100(42.9) + 2900} \quad \Rightarrow \quad d = 21.2\,km$$

por lo tanto la solución final es:

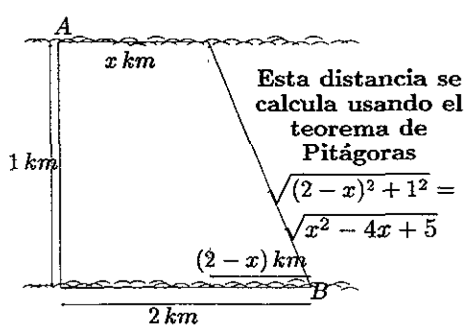
42.9 kilómetros por tierra y 21.2 kilómetros por debajo de la superficie del agua

2.6.3 Costo de una Línea Telefónica

Se desea construir una línea telefónica entre dos puntos A y B situados en orillas opuestas de un río. El ancho del río es de 1 kilómetro, y B está situado 2 kilómetros río abajo de A. Se tiene un costo \$c por kilómetro tender una línea sobre tierra y \$2c por kilómetro abajo del agua. La línea telefónica seguirá la orilla del río a partir de A, una distancia x en kilómetros y luego cruzará diagonalmente el río en línea recta directamente hasta B. Determina el valor de x que minimíza el costo total.

SOLUCIÓN

Con los datos del problema podemos dibujar el siguiente esquema:



El costo total $C(x) = xc + \sqrt{x^2 - 4x + 5}(2c)$ donde xc representa el costo de tender la línea sobre tierra y $\sqrt{x^2 - 4x + 5}(2c)$ representa el costo de tender la línea bajo el agua. Ahora calculemos el costo marginal:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{dxc}{dx} + \frac{d\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{dx}(2c)$$

$$\frac{dC}{dx} = c + \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}(2c) \quad \text{cancelamos el factor 2}$$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}(c) = -c \qquad \text{ahora cancelamos c}$$

$$2x - 4 = -\sqrt{x^2-4x+5} \qquad \text{elevando al cuadrado ambos lados:}$$

$$(2x-4)^2 = (-\sqrt{x^2-4x+5})^2$$

$$4x^2 - 16x + 16 = x^2 - 4x + 5 \qquad \text{transponiendo términos:}$$

$$4x^2 - x^2 - 16x + 4x + 16 - 5 = 0 \qquad \text{reduciendo:}$$

$$3x^2 - 12x + 11 = 0 \qquad \text{observe que no depende de “c”}$$

Ésta ecuación la resolvemos usando la fórmula general:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(11)}}{2(3)} = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6}$$

$$x_1 = 2.56 \qquad x_2 = 1.42$$

Recordemos que x no puede ser mayor de 2 kilómetros por lo que la solución se da con el valor de $x = 1.42\,km$, que es la distancia que se debe tender la línea por tierra. Pero también debemos encontrar la distancia bajo el agua; esto lo logramos sustituyendo $x = 1.42$ en la ecuación $\sqrt{x^2-4x+5}$

$$d = \sqrt{(1.42)^2 - 4(1.42) + 5} = 1.33$$

La solución es $1.42\,km$ por tierra y $1.33\,km$ por debajo del agua

2.6.4 Renta de Departamentos

El dueño de un motel de lujo de 80 departamentos puede rentarlos todos si cobra \$20.00 dolares por noche cada departamento. Sin embargo, por cada dolar que él eleva sobre este precio por departamento quedarán vacantes 2 unidades. ¿Cuántos departamentos debe rentar por noche y a qué precio para maximizar sus ingresos diarios?

SOLUCIÓN

Denotemos con :
d el número de departamentos del motel
a el precio del alquiler de cada departamento
x el dolar adicional de renta
I el ingreso obtenido por el alquiler

Es claro que el ingreso se obtiene multiplicando el número de departamentos por el precio de cada uno de ellos; $I = ad$ con esta expresión podemos construir una tabla donde se expresen las 3 cantidades; tomando en cuenta que por cada dolar se desocupan 2 departamentos

dolar adicional(x)	alquiler(a)	departamentos(d)	Ingreso(I)
0	\$20	80	\$1600
1	\$21	78	\$1638
2	\$22	76	\$1672
3	\$23	74	\$1702
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x	\$(20+x)	(80-2x)	$(20+x)(80-2x)$

Esto significa que la función de ingreso (es la que nos interesa maximizar) está dada por la expresión $I = (20+x)(80-2x)$, si derivamos esta expresión con respecto a x; usando la regla del producto se obtiene:

$$\frac{dI}{dx} = (80-2x) - 2(20+x)$$

si se anula la derivada $\quad \dfrac{dI}{dx} = 0 \Rightarrow 80 - 2x - 40 - 2x = 0$

simplificando: $\quad -4x + 40 = 0 \quad$ despejando x;

$$-4x = -40 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-40}{-4} \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

este resultado nos dice que lo máximo que debemos aumentar es \$10 dolares

Si se aumentan \$10 dolares se debe de cobrar \$30 dolares por cada departamento y se alquilarán 60 departamentos, obteniendose un ingreso de \$1800 dolares.

2.6.5 Manufactura y venta de Tostadores

Una compañía planea manufacturar y vender un nuevo tostador eléctrico de dos ranuras. Después de un extenso estudio de mercado el departamento de investigación estimó: que en una semana hubo una demanda de 200 tostadores a un precio de \$16.00 por tostador y en la siguiente semana se tiene una demanda de 300 tostadores a un precio de \$14.00 por tostador. El departamento de finanzas estimó que los costos fijos por semana serán de \$1400.00 y los costos variables (costo por unidad) serán de \$4.00

a) Suponga que la ecuación de demanda es lineal use la estimación del departamento de investigación para hallar la ecuación de demanda.

b) Halle la ecuación de ingreso en términos de la variable x

c) Suponga que la ecuación de costo es lineal use los resultados del departamento de finanzas para encontrar la ecuación de costo

d) Halle la ecuación de la utilidad en términos de la variable x

e) Evalue la utilidad marginal en $x = 250$ y $x = 475$, e interprete los resultados

SOLUCIÓN

Designemos las siguientes variables, sea;
x: el número de tostadores producidos en una semana
p: el precio del tostador

Puesto que se nos pide que supongamos una ecuación de demanda de tipo lineal usamos la ecuación de la recta dados dos puntos;

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

donde los puntos que utilizaremos son (200,16) y (300,14)

$$\begin{aligned} p - 16 &= \frac{14 - 16}{300 - 200}(x - 200) \\ p - 16 &= \frac{-2}{100}(x - 200) \\ p - 16 &= \frac{-1}{50}(x - 200) \\ p &= \frac{-x}{50} + 4 + 16 \\ p &= 20 - \frac{x}{50} \end{aligned}$$

El ingreso está dado por la ecuación: $R(x) = xp$ por lo que para este caso la expresión del ingreso es:

$$R(x) = x(20 - \frac{x}{50})$$

$$R(x) = 20x - \frac{x^2}{50}$$

Para encontrar la ecuación de costos el problema nos indica que la compañía tiene gastos fijos de \$1,400.00 además de \$4.00 por unidad producida, por lo que la expresión para el costo es:

$$C(x) = 4x + 1400$$

Por último la utilidad está dada por la expresión $P(x) = R(x) - C(x)$ sustituyendo ambas expresiones en está fórmula obtenemos:

$$P(x) = (20x - \frac{x^2}{50}) - (4x - 1400)$$

$$P(x) = -\frac{x^2}{50} + 16x - 1400$$

Para calcular la utilidad marginal simplemente derivamos la ecuación anterior

$$P'(x) = -\frac{2x}{50} + 16$$

$$P'(x) = -\frac{x}{25} + 16$$

Anulemos la derivada, $P'(x) = 0$, y despejemos el valor de x

$$-\frac{x}{25} + 16 = 0$$

$$-\frac{x}{25} = -16$$

$$x = -16(-25) \qquad x = 400$$

El problema nos pide evaluar $x = 250$ y $x = 475$ en la utilidad marginal, la cual está dada por la expresión $P'(x) = -\frac{x}{25} + 16$, e interpretar los resultados

$$P'(x) = -\frac{250}{25} + 16 = 6$$

Esto significa que si la producción es de 250 tostadores el margen de utilidad será de una ganancia de $6.00

$$P'(x) = -\frac{475}{25} + 16 = -3$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 475 unidades se tendrá una perdida de $3.00

Capítulo 3

Aplicaciones del Cálculo Integral

De igual manera que el cálculo diferencial, el integral tiene una gran variedad de aplicaciones; aquí las veremos a: trabajo, mezclas, poblaciones y enfriamiento.

El concepto inicial de la integral fue el cálculo de áreas por el método llamado de exhaución, el cual desarrolló Arquímedes., más adelante Kepler retomó este método pero lo denomina profundo. Kepler, tiene la idea de que "...cualquier figura o cuerpo se representa en la forma de una suma de un conjunto de partes infinitamente pequeños. El método de "sumación" de los actualmente infinitésimos, Kepler lo extiende también a otras figuras y cuerpos geométricos no complejos (conos y cilindros) y sus partes, también consideradas por Arquímedes. En algunos casos se aparta aún más del rigor de la exposición, introduciendo consideraciones intuitivas...." [1]

El concepto esencial en ambos métodos es dividir la figura en pequeñas partes calcular el área o volumen de cada una de estas partes y sumar todas ellas. Esta misma idea la expondremos al solucionar los problemas de trabajo realizado por una fuerza variable.

3.1 Recursos Renovables

Aprovechamiento de un recurso renovable. Supóngase que la población $N(t)$ de cierta especie de peces (por ejemplo atún) en una región dada del océano se describe por la ecuación logística :

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{k}\right)N$$

[1] K.Ríbnikov; Historia de las Matemáticas, Ed Mir Moscú, 1987.

Aunque es deseable utilizar esta fuente de alimento, de manera intuitiva es evidente que si se pescan demasiados peces, entonces su población puede reducirse a menos de un nivel útil y posiblemente, incluso se lleve a la extinción.

A cierto nivel de esfuerzo, resulta razonable suponer que la rapidez a la que se capturen los peces depende de la población N: Mientras más peces haya, más fácil es atraparlos. Por tanto se supone que la razón a la que se capturen los peces, es decir el rendimiento Y de la pesca, queda definida por $Y = EN$, donde E es una constante positiva, cuyas unidades son $\frac{1}{t}$ (donde t es el tiempo), y que mide el esfuerzo total realizado para aprovechar la especie dada de peces. Al fin de incluir este efecto, la ecuación logística se sustituye por:

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{k}\right)N - EN$$

Esta ecuación se conoce como modelo de Schaefer, en honor al Biólogo M.B Schaefer, quien lo aplicó a las poblaciones de peces

a) Demuestre que si $E < r$, entonces existen dos puntos de equilibrio $N_1 = 0$ y $N_2 = k\left(1 - \frac{E}{r}\right) > 0$

b) Demuestre que $N = N_1$ es inestable y $N = N_2$ es estable.

SOLUCIÓN

Primero tomemos en cuenta lo siguiente: Si $N = 0$ ó $N = k$, entonces $\frac{dN}{dt} = 0$ y $N(t)$ no cambia. Las soluciones constantes $N = \phi_1(t) = 0$ y $N = \phi_2(t) = k$ son soluciones de equilibrio; a las cuales corresponden los puntos $N = 0$ y $N = k$ del eje N que se denominan puntos de equilibrio o puntos críticos.

Para cada $N > 0$ la solución tiende asintóticamente a la solución de equiibrio $N = \phi_2(t) = k$ cuando $t \to \infty$. De donde se dice que la solución constante $\phi_2(t)$ es una solución asintóticamente estable, o que el punto $N = k$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable o punto de crítico. Esto significa que después de un tiempo largo la población está próxima al nivel de saturación k, sin importar el tamaño inicial de la población, en tanto sea positivo.

Por otra parte, la situación para la solución de equilibrio $N = \phi_1(t) = 0$ es bastante diferente. Incluso las soluciones que parten muy cerca de cero crecen cuando t aumenta y, como se ha visto, tiende a k cuando $t \to \infty$. Se dice que $\phi_1(t) = 0$ es una solución de equilibrio inestable.

Empecemos desarrollando la multiplicación de la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{k}\right)N - EN$$

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{k}N^2 - EN \quad \text{reagrupando:}$$

$$\frac{dN}{dt} = (r-E)N - \frac{r}{k}N^2 \quad \text{si renombramos: } a = r - E \text{ y } b = \frac{r}{k}$$

observamos que $a > 0$ si $r > E$. La ecuación toma la forma :

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dN}{dt} = (a - bN)N$$

Ahora, bien, sabemos que la derivada puede ser:

1. $\frac{dN}{dt} > 0$ positiva

2. $\frac{dN}{dt} < 0$ negativa

3. $\frac{dN}{dt} = 0$ cero

empecemos con este último caso. Si la derivada es cero, entonces $(a-bN)N = 0$; lo que significa que: $a - bN = 0$ ó $N = 0$

$$\text{si } a - bN = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{a}{b}$$

recordemos que: $a = r - E$, $b = \frac{r}{k}$ y $r > E$ por lo que:

$$\frac{a}{b} = \frac{r-E}{\frac{r}{k}} = \frac{(r-E)k}{r} = \left(1 - \frac{E}{r}\right)k$$

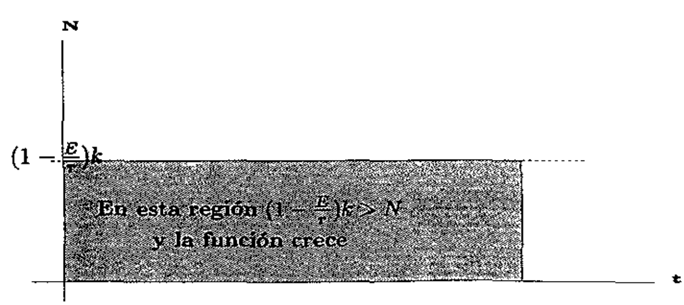
resumiendo, si $\frac{dN}{dt} = 0$ los puntos de equilibrio son:

$$N_1 = 0 \;\text{ y }\; N_2 = k\left(1 - \frac{E}{r}\right) > 0 \;\text{ si }\; r > E$$

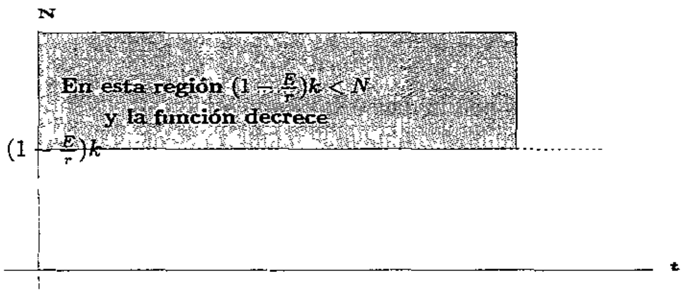
1^{er} caso si $\frac{dN}{dt} > 0$ esto significa que:

$$a - bN > 0 \;\Rightarrow\; a > bN \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} > N \;\text{ es decir }\; \left(1 - \frac{E}{r}\right)k > N$$

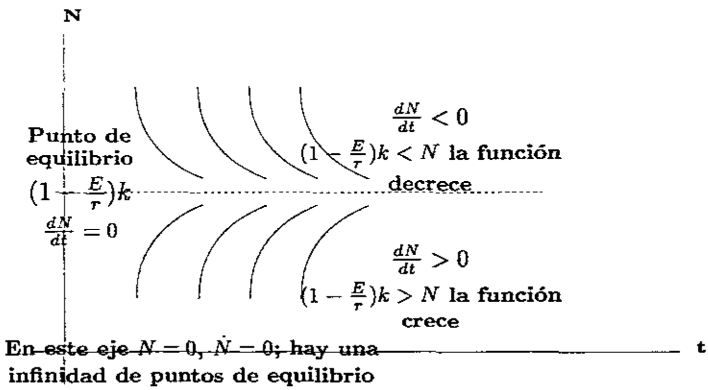
lo que significa que la función es creciente para $\left(1 - \frac{E}{r}\right)k > N$



$2do$ caso si $\frac{dN}{dt} < 0$ entonces $\frac{a}{b} < N$, esto es $\left(1 - \frac{E}{r}\right) k < N$.
la función es monótona decreciente si $\left(1 - \frac{E}{r}\right) k < N$.



Resumiendo los dos casos anteriores tenemos la siguiente figura:



Si se deriva la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$ con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{d^2N}{dt^2} = a\frac{dN}{dt} - 2bN\frac{dN}{dt} = a\dot{N} - 2bN\dot{N}$$

$$\ddot{N} = (a - 2bN)\dot{N}$$

podemos hacer un análisis semejante al anterior:
1^{er} caso $\ddot{N} = 0$ implica $a - 2bN = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{a}{2b}$ ó $\dot{N} = 0$ pero como ya vimos esto significa: $N = \frac{a}{b}$ ó $N = 0$ esto es:

$$\ddot{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{a}{2b}, \;\; N = \frac{a}{b}, \;\; N = 0$$

recordemos que $\ddot{N} = 0$ nos indica en dónde la curva cambia su concavidad

2^{do} caso $\ddot{N} > 0$ (en dónde la curva es cóncava hacia arriba) aquí se pueden dar los siguientes subcasos:

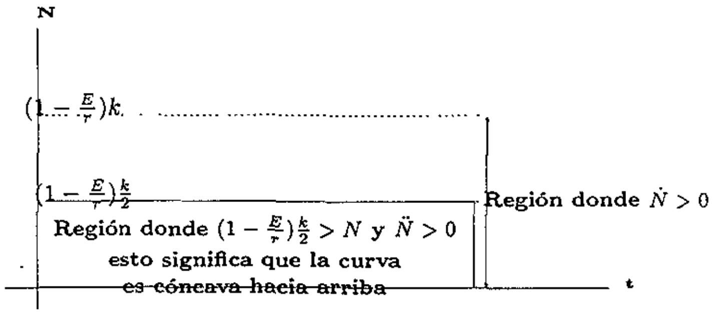
i) $a - 2bN > 0$ y $\dot{N} > 0$

ii) $a - 2bN < 0$ y $\dot{N} < 0$

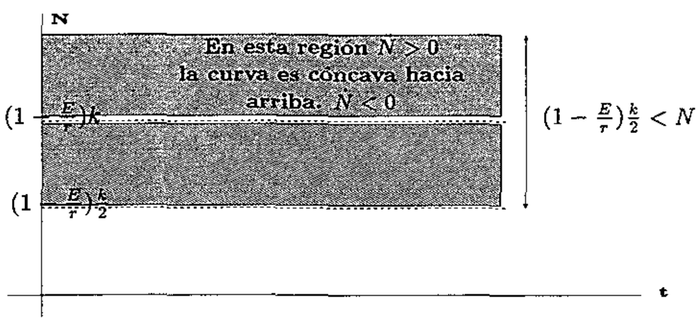
veamos el primer inciso i) $a - 2bN > 0$ y $\dot{N} > 0$:
primeramente $a - 2bN > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 2bN \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2b} > N$ esto se traduce en:

$$\frac{a}{2b} = \left(1 - \frac{E}{r}\right)\frac{k}{2} > N$$

gráficamente esto se ve de la siguiente forma:



ahora veamos el segundo inciso: $a - 2bN < 0$ y $\dot{N} < 0$ como en el caso anterior:
$a - 2bN < 0 \quad \Rightarrow \quad a < 2bN \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2b} < N \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{E}{r}\right)\frac{k}{2} < N$

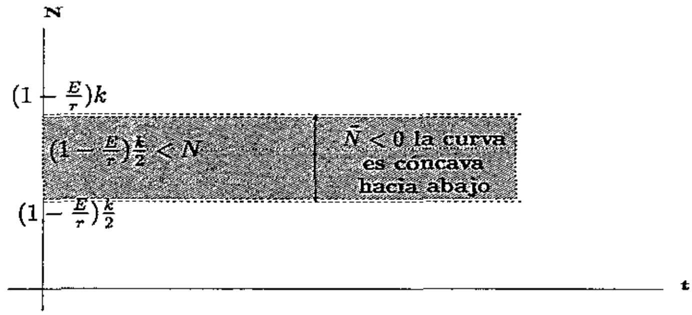


3^{er} caso $\ddot{N} < 0$ (en donde la curva es cóncava hacia abajo) aquí se pueden dar los siguientes subcasos:

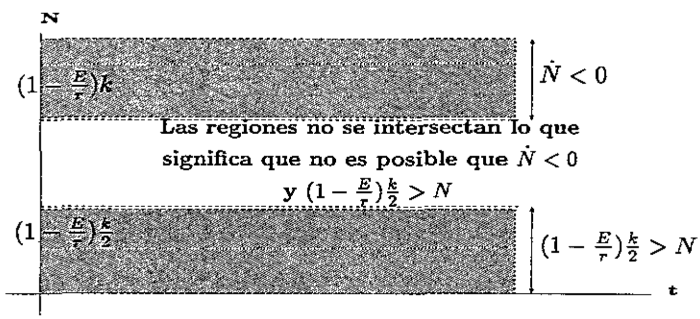
i) $a - 2bN < 0$ y $\dot{N} > 0$

ii) $a - 2bN > 0$ y $\dot{N} < 0$

para el primer inciso podemos decir que $\left(1-\frac{E}{r}\right)\frac{k}{2} < N$

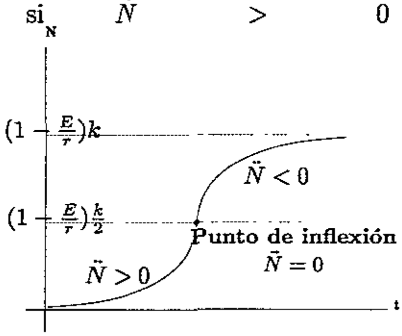


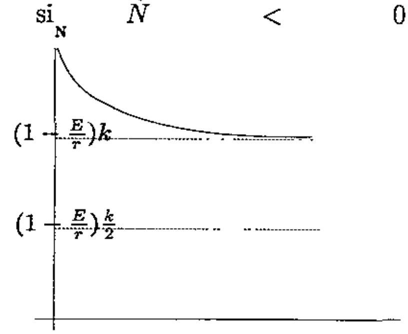
para el segundo inciso podemos decir que $\left(1-\frac{E}{r}\right)\frac{k}{2} < N$



En resumen:

si $\dot{N} > 0$ si $\dot{N} < 0$





Ahora daremos la forma como se resuelve la ecuación diferencial, en el contexto cuantitativo, es decir, como ejemplo de la técnica de fracciones parciales.

$$\frac{dN}{dt} = (a-bN)N$$

dividiendo ambos lados de la ecuación por la expresión del lado derecho:

$$\frac{1}{(a-bN)N}\frac{dN}{dt} = 1$$

integramos ambos lados con respecto al tiempo:

$$\int \frac{1}{(a-bN)N}\frac{dN}{dt}\,dt = \int dt$$

esta integral la podemos expresar de la forma :

$$\int \frac{1}{(a-bN)N}\frac{dN}{dt}\,dt = \int \frac{A}{(a-bN)}\,dt + \int \frac{B}{N}\,dt = \int dt \qquad (3.1)$$

para resolver esta integral utilizamos, como ya lo dijimos, el método de fracciones parciales; esto es:

$$\frac{1}{(a-bN)N} = \frac{A}{a-bN} + \frac{B}{N} \qquad \text{donde debemos determinar los valores de } A \text{ y } B$$

multiplicando ambos lados por $(a-bN)N$ teniendo en cuenta que $N \neq \frac{a}{b}$ y $N \neq 0$ obtenemos la expresión:

$$1 = \frac{N(a-bN)A}{a-bN} + \frac{N(a-bN)B}{N} \quad \text{simplificando:}$$

$$1 = AN+(a-bN)B \quad \Rightarrow \quad 1 = AN+aB-bNB \quad \Rightarrow \quad 1 = aB+(A-bB)N$$

$$\text{igualando términos: } aB = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{a}$$

$$A - bB = 0 \quad \Rightarrow \quad A = bB \quad \Rightarrow \quad A = \frac{b}{a}$$

si sustituimos estos resultados en la integral (3.1) se obtiene:

$$\int \frac{a}{b}\frac{dN}{a-bN}\,dt + \int \frac{1}{a}\frac{dN}{N}\,dt$$

$$\text{realizando cada una de las integrales: } \frac{b}{a}\left(-\frac{1}{b}\ln(a-bN)\right) + \frac{1}{a}\ln N = t + k_0$$

$$\text{simplificando: } -\frac{\ln(a-bN)}{a} + \frac{\ln N}{a} = t + k_0$$

$$\text{usando las leyes de los logaritmos: } \ln\frac{N}{a-bN} = at + k_0$$

$$\text{aplicando la función exponencial en ambos lados: } \frac{N}{a-bN} = K_1 \exp at; \text{ donde } K_1 = \exp k_0$$

Ahora vamos a despejar la variable N:

$$\frac{N}{a-bN} = K_1 e^{at} \quad \Rightarrow \quad N = (a-bN)K_1 e^{at}$$

$$N = aK_1 e^{at} - bK_1 e^{at} N \quad \Rightarrow \quad N + bK_1 e^{at} N = aK_1 e^{at}$$

$$N(1+bK_1e^{at}) = aK_1e^{at} \quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{1+bK_1e^{at}}{K_1e^{at}}\right) = a$$

$$N\left(\frac{1}{K_1}e^{-at}+b\right) = a., \quad \text{sea } c = \tfrac{1}{K_1} \quad \Rightarrow \quad N(ce^{-at}+b) = a$$

$$N = \frac{a}{ce^{-at}+b} \quad \text{si } t \to \infty \text{ entonces } ce^{-at} \to 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{a}{b}$$

esto significa que cuando el tiempo tiende a infinito, N, la población tiende a un valor fijo, en particular, no tiende a infinito; recordemos que $\frac{a}{b} = \left(1-\frac{E}{r}\right)k$ de esta forma la población tiende a establecerse en el valor $N = \left(1-\frac{E}{r}\right)k$

3.2 Personas que verán un Anuncio

La cantidad $N(t)$ de personas en una comunidad bajo la influencia de determinado anuncio se apega a la ecuación logística. Al principio, $N(0) = 500$ y se observa que $N(1) = 1,000$. Se pronostica que habrá un límite de $50,000$ individuos que verán el anuncio. Determine $N(t)$

Solución

La ecuación diferencial la podemos plantear como la razón de cambio de la población es proporcional a la población que ha visto el anuncio N por la parte que no lo ha visto $50,000-N$; es decir:

$$\frac{dN}{dt} = kN(50,000-N)$$

como lo menciona el problema $N(0) = 500$ y $N(1) = 1,000$, para hacer más sencillos los cálculos sea $q = 50,000$

$$\frac{dN}{dt} = kN(q-N) \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{N(q-N)} = k\,dt \quad \text{integrando:}$$

$$\int \frac{dN}{N(q-N)} = \int k\,dt$$

hagamos unos cambios de variables sean; $y = N$ y $x = t$, donde los límites de integración son: $0 \le x \le t$ y $500 \le y \le N$ por lo que las integrales toman la forma:

$$\int_{500}^{N} \frac{dy}{y(q-y)} = k\int_0^t dx$$

la integral del lado izquierdo la resolveremos usando fracciones parciales

$$\frac{1}{y(q-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{q-y} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(q-y)+By \quad \Rightarrow \quad Aq+(B-A)y = 1$$

igualando términos, tenemos que: $Aq = 1$ y $B - A = 0$, esto es; $A = \frac{1}{q}$ y $B = A$, por lo tanto:

$$\int_{500}^{N} \frac{1}{q}\frac{dy}{y} + \int_{500}^{N} \frac{1}{q}\frac{dy}{q-y} = k\int_{0}^{t} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q}\left[\int_{500}^{N} \frac{dy}{y} + \int_{500}^{N} \frac{dy}{q-y}\right] = k\int_{0}^{t} dx$$

transponemos el coeficiente q:

$$\int_{500}^{N} \frac{dy}{y} + \int_{500}^{N} \frac{dy}{q-y} = qk\int_{0}^{t} dx \quad \Rightarrow \quad [\ln y - \ln(q-y)]_{500}^{N} = qkx \,|_{0}^{t}$$

antes de evaluar primero aplicamos las propiedades de los los logaritmos:

$$\ln\left|\frac{y}{q-y}\right|\Big|_{500}^{N} = qk(t-0)$$

$$\ln\left|\frac{N}{q-N}\right| - \ln\left|\frac{500}{q-500}\right| = qkt \tag{3.2}$$

en esta parte usamos el hecho que cuando $t = 1$ $N = 1,000$

$$\ln\left|\frac{1\,000}{q-1\,000}\right| - \ln\left|\frac{500}{q-500}\right| = qk$$

en este punto nos conviene hacer un poco de aritmética, utilizando que: $q = 50,000$ pero solamente en el lado izquierdo de la ecuación anterior

$$\ln\left|\frac{1,000}{50,000-1,000}\right| - \ln\left|\frac{500}{50,000-500}\right| = qk \;\Rightarrow\; qk = \ln\left|\frac{1,000}{49,000}\right| - \ln\left|\frac{500}{49,500}\right|$$

simplificando los quebrados, y utilizando propiedades de logaritmos:

$$qk = \ln\left|\frac{1}{49}\right| - \ln\left|\frac{1}{99}\right| = \ln\left|\frac{\frac{1}{49}}{\frac{1}{99}}\right| = \ln\left|\frac{99}{49}\right|$$

por lo tanto $qk = \ln\left|\frac{99}{49}\right|$. Ahora; si regresamos a la ecuación (3.2)

$$\ln\left|\frac{N}{q-N}\right| = \ln\left|\frac{99}{49}\right| t + \ln\left|\frac{500}{49,500}\right| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{N}{q-N}\right| = \ln\left|\frac{99}{49}\right| t + \ln\left|\frac{1}{99}\right|$$

aplicando exponenciales se tiene:

$$\frac{N}{q-N} = e^{\ln\left(\frac{99}{49}\right)t} e^{\ln\left|\frac{1}{99}\right|} = \frac{1}{99} e^{\ln\left(\frac{99}{49}\right)t}$$

Empecemos a despejar N

$$99\frac{N}{q-N} = e^{\ln\left(\frac{99}{49}\right)t} \quad \Rightarrow \quad 99N = (q-N)e^{\ln\left(\frac{99}{49}\right)t}$$

$99N = qe^{\ln(\frac{99}{49})t} - Ne^{\ln(\frac{99}{49})t}$ agrupando y factorizamos los términos de N:

$$99N + Ne^{\ln(\frac{99}{49})t} = qe^{\ln(\frac{99}{49})t} \quad \Rightarrow \quad N(99 + e^{\ln(\frac{99}{49})t}) = qe^{\ln(\frac{99}{49})t}$$

$$N = \frac{qe^{\ln(\frac{99}{49})t}}{99 + e^{\ln(\frac{99}{49})t}} \quad \text{multiplicamos y dividimos por: } e^{-\ln(\frac{99}{49})t}$$

$$N = \frac{qe^{\ln(\frac{99}{49})t}e^{-\ln(\frac{99}{49})t}}{99e^{-\ln(\frac{99}{49})t} + e^{\ln(\frac{99}{49})t}e^{-\ln(\frac{99}{49})t}} = \frac{q}{1 + 99e^{-\ln(\frac{99}{49})t}}$$

si sustituimos $q = 50\,000$ la expresión para $N(t)$ es:

$$N(t) = \frac{50,000}{1 + 99e^{-\ln(\frac{99}{49})t}}$$

como vimos en el ejemplo anterior; si $t \to \infty$ $N \to 50,000$, es decir, a final (con $t = 23$ horas, dias, etc, es suficiente) todos los miembros de la comunidad verán el anuncio.

3.3 Población de la Tierra

Suponga que la población de la tierra cambia con una rapidez proporcional a la población actual. Además se estima que en el instante $t = 0$ (1650), la población de la tierra era de 600 millones (6×10^8); en el instante $t = 300$ (1950), la población era de 2.8 mil millones (2.8×10^9). Encuentre una expresión que dé la población de la tierra en cualquier instante. Si se supone que la población máxima que la tierra puede sostener es de 25 mil millones (2.5×10^{10}), ¿Cuándo alcanzará este límite?

SOLUCIÓN

Sea:

t: el tiempo medido en años
$P(t)$: la población ó número de habitantes
En 1650, $t = 0$, la población (inicial) era: $P(0) = 6 \times 10^8$ habitantes
en 1950, $t = 300$, la población era: $P(300) = 2.8 \times 10^9$ habitantes

La frase: "...la población de la tierra cambia con una rapidez proporcional a la población actual ..." se expresa como:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es una constante de proporcionalidad que se debe de determinar. La solución de la ecuación diferencial anterior, es muy sencilla y es de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dt}\frac{1}{P} = k \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dP}{dt}\frac{1}{P}\,dt = \int k\,dt$$

$$\ln P = kt + c$$

donde c es la constante de integración. Aplicando exponenciales a ambos lados:

$$P(t) = \exp[kt + c] = \exp kt \exp c = C \exp kt \qquad \Rightarrow \qquad P(t) = Ce^{kt}$$

solamente nos falta determinar los valores de k y C para esto utilizamos las condiciones vistas arriba; $P(0) = 6 \times 10^8$ y $P(300) = 2.8 \times 10^9$

$$P(0) = Ce^{k(0)} = 6 \times 10^8 \qquad \Rightarrow \qquad C = 6 \times 10^8$$

ahora $P(300) = Ce^{k(300)} = 2.8 \times 10^9 \qquad \Rightarrow \qquad 6 \times 10^8 e^{300k} = 2.8 \times 10^9$

$\Rightarrow \qquad e^{300k} = \dfrac{2.8 \times 10^9}{6 \times 10^8} = \dfrac{14}{3}$ aplicando logaritmos en ambos lados:

$$\ln e^{300k} = \ln \frac{14}{3} \qquad \Rightarrow \qquad 300k = \ln \frac{14}{3} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{\ln \frac{14}{3}}{300}$$

sustituyendo los valores de C y k obtenemos:

$$P(t) = 6 \times 10^8 e^{\frac{\ln \frac{14}{3}}{300} t} \tag{3.3}$$

Esta última expresión dá la población de la tierra en cualquier instante.

Para encontrar en que momento la población alcanza 2.5×10^{10} habitantes igualamos la ecuación (3.3) al número de habitantes;

$$P(t) = 6 \times 10^8 e^{\frac{\ln \frac{14}{3}}{300} t} = 2.5 \times 10^{10} \qquad \Rightarrow \qquad e^{\frac{\ln \frac{14}{3}}{300} t} = \frac{2.5 \times 10^{10}}{6 \times 10^8} = \frac{125}{3}$$

aplicando logaritmos: $\ln e^{\frac{\ln \frac{14}{3}}{300} t} = \ln \dfrac{125}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{\ln \frac{14}{3}}{300} t = \ln \dfrac{125}{3}$

despejando t: $t = \dfrac{\ln \frac{125}{3}}{\ln \frac{14}{3}} 300 \qquad t \simeq 726.3$

726 años contados a partir de 1650, es decir, aproximadamente en el año 2376

Este problema pertenece al libro de Boyce DiPrima (pag 69, ejercico 13) ver [10], tal vez el autor quería solamente ilustrar el tema de poblaciones sin tomar en cuenta los datos de la población de la tierra después de 1950.

año	S XVII	S XIX	1918-27	60	74	87	90	2000*	10	22
hab.$\times 10^9$	0.5	1	2	3	4	5	5.2	6.2	7	8

estos datos se tomarón del libro *Mathematical Biology., Second, Corrected Edition., Biomathematics;vol 19., J.D.Murray., Springer* a partir del año 2000 los datos fuéron extrapolados por el autor.

Si quisieramos calcular la población de la tierra con la ecuación (3.3) tendríamos que usar $t = 227.5$ para el período 1918-1927; $t = 310$ para 1960,etcétera, y se obtiene:

año	1918-27	60	74	87	90
hab.$\times 10^9$	1.9	2.9	3.1	3.38	3.43

Podemos observar que los datos calculados no se ajustan a los datos reales, y concluir que el modelo no sirve para extrapolar hasta el año 2376.

3.4 Trabajo

Una aplicación de la integral definida, que no se refiere a longitudes, áreas o volumenes, es la referente al trabajo. El concepto de trabajo es importante para determinar la energía necesaria para realizar diferentes tareas físicas por ejemplo: la cantidad de trabajo cuando una grúa eleva una viga de acero, cuando se comprime un muelle, cuando se lanza un cohete o cuando un camión transporta una carga por una carretera. En general, decimos que se ha realizado un trabajo cuando una fuerza mueve un objeto, la fuerza puede ser constante ó variable.

El caso que nos ocupa es el de la fuerza variable, si ésta es aplicada a un objeto, usamos el método de exhaustión para determinar el trabajo realizado (obviamente solo seguiremos los lineamientos generales). Supongamos que el objeto cambia de posición, digamos que se está moviendo a lo largo del eje x de la posición a a la posición b sujeto a la fuerza variable de magnitud $F(x)$ en el punto x, donde F es una función continua.

La técnica es la siguiente: primero dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos, después calculamos el trabajo en uno de los subintervalos.

- suponemos que sobre una pieza obra una fuerza constante de x a Δx cuyo valor es $F(x)$
- debemos calcular el área de la figura involucrada
- calcular la distancia que debe de recorrer el objeto
- con los datos anteriores construimos Δw

por último integramos todos los trocitos de trabajo (Δw), es decir:

$$W \simeq \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta W_i; \text{ donde } c_i \text{ es un punto del subintervalo } x,\ x + \Delta x$$

Usamos la siguiente definición:
Sea F una función continua en $[a, b]$. Si $F(x)$ es la magnitud en x de una fuerza que actúa a lo largo del eje de las x, el trabajo realizado por la fuerza al mover el objeto de a a b es:

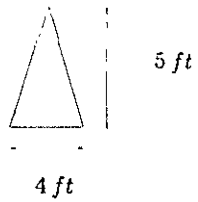
$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

En cada uno de los siguientes problemas (3.4.1 al 3.4.4) se muestra el extremo vertical de un depósito. Suponga que el depósito tiene $10ft$ de largo y que está lleno de agua, la cuál va a ser bombeada a una altura de $5ft$ arriba del borde del depósito. Encuentre el trabajo necesario para vaciar el depósito[2].

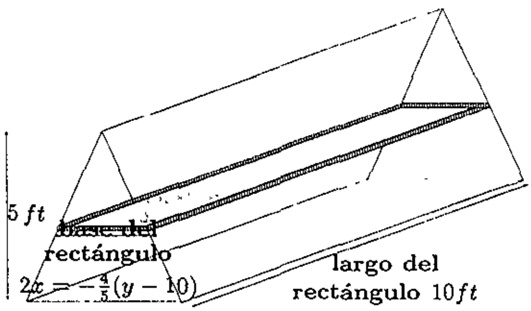
3.4.1 Cálculo del Trabajo para vaciar un depósito en forma de triángulo Isósceles

Esquema:

[2] En este grupo de problemas lo única que se modifica es la forma del depósito

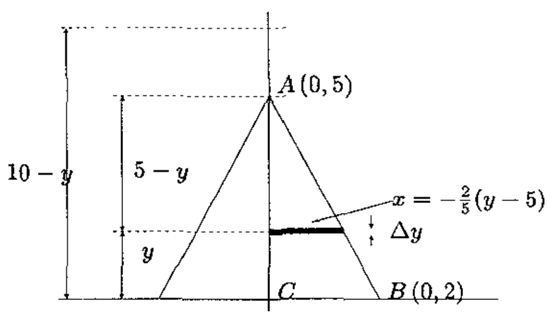


Como mencionamos anteriormente el primer paso es dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos, en este caso $[a, b]$ es la altura del depósito, es decir, $a = 0$ y $b = 5$, no importa que se realice en el eje y.



la figura la colocamos en un sistema cartesiano. Con los datos del problema obtenemos las coordenadas de los puntos $A(0, 5)$, $B(2, 0)$, $C(0, 0)$ el lado $\overline{AB}$ tiene ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = \frac{0 - 5}{2 - 0}(x) \quad \text{despejando } y\text{:} \quad y = -\frac{5}{2}x + 5$$



de la figura observamos que el ancho del rectángulo (uno de los subintervalos), denotada con la variable $2x$ es $x = -\frac{4}{5}(y - 5)$ esto se obtuvo despejando x de la ecuación anterior. Ahora bien la "rebanada" tiene ancho $2x$, altura Δy y largo $10ft$ por lo que el volumen de esta "rebanada" es:

$$V = -\frac{4}{5}(y - 5)10\Delta y \quad \Rightarrow \quad V = -8(y - 5)\Delta y \quad .$$

por otro lado el peso (que en este caso juega el papel de la fuerza F) del líquido es: $P = \rho V$ en donde $\rho = 62.4\frac{lb}{ft}$, si sustituimos ambos valores:

$$P = 62.4(8)(5-y)\Delta y$$

siguiendo el método descrito arriba $\Delta W_i = P \cdot d$ donde d es la distancia que debe de recorrer el líquido $d = 10 - y$ (ver figura 1), esto es;

$$\Delta W_i = 62.4(8)(5-y)(10-y)\Delta y \text{ tomando el límite}$$

$$W = \int_0^5 62.4(8)(5-y)(10-y)\,dy$$

desarrollando el producto e integrando:

$$W = 499.2\int_0^5 (50 - 15y + y^2)\,dy = 499.2\left[50y - \frac{15}{2}y^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^5$$

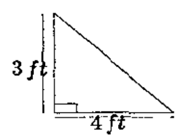
sustituyendo los límites de integración y simplificando;

$$W = 499.2\left[50(5) - \frac{15}{2}(5^2) + \frac{5^3}{3}\right] = 499.2\left[250 - \frac{375}{2} + \frac{125}{3}\right]$$

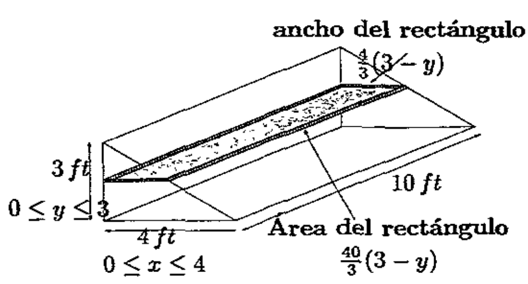
es decir el trabajo es: $W = 52000\, lb \cdot ft$

3.4.2 Cálculo del Trabajo para vaciar un depósito en forma de triángulo Rectángulo

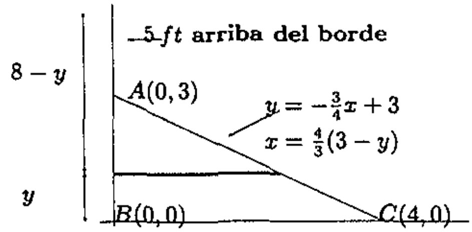
Esquema



Primero hagamos una proyección del depósito y coloquemos el valor de sus lados



La explicación del valor de cada lado es la siguiente:
Pongamos en un sistema de coordenadas, un corte transversal del depósito



La ecuación del lado $\overline{AC}$ es:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1; \qquad y = -\frac{3}{4}x + 3 \text{ despejando } x: \qquad x = \frac{4}{3}(3 - y)$$

aquí x representa el ancho del rectángulo, el largo es 10 pies y el espesor es Δy por lo que; el volumen de la rebanada es: $V = \frac{40}{3}(3 - y)\Delta y$ ahora; la fuerza ó peso es igual al volumen por la densidad $P = V \cdot \rho$, sustituyendo valores: $F = \frac{40}{3}(3 - y)(62.4)\Delta y = 832(3 - y)\Delta y$ siguiendo nuestra línea de razonamiento la distancia d que debe recorrer la "rebanada de agua" para ser bombeada es; $(8 - y)$, de esta forma la integral que representa al trabajo, $W = \int_a^b F(y)\, dy$:

$$W = \int_0^3 832(3 - y)(8 - y)\, dy \qquad \Rightarrow \qquad W = 832 \int_0^3 (24 - 11y + y^2)\, dy$$

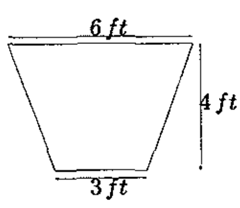
integrando y sustituyendo los límites de integración

$$W = 832 \left[24y - \frac{11}{2}y^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 832 \left[24(3) - \frac{11}{2}(9) + 9\right] \quad \Rightarrow \quad W = 832[31.5]$$

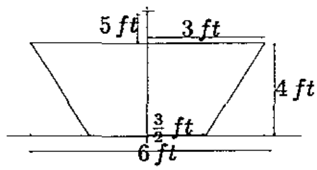
es decir el trabajo es: $W = 26208\, lb \cdot ft$

3.4.3 Cálculo del Trabajo para vaciar un depósito en forma de Trapecio

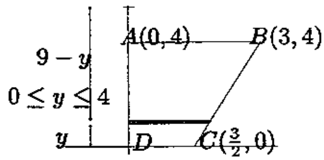
Esquema



Coloquemos esta figura en un sistema rectangular



para simplificar los cálculos usemos solamente la mitad de la figura

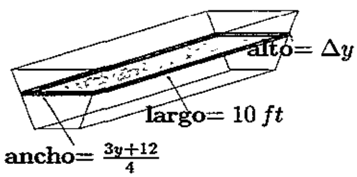


la pendiente de la recta $\overline{BC}$ es; $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ sustituyendo valores:

$$y - 4 = \frac{0-4}{\frac{3}{2} - 3}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \frac{4}{\frac{3}{2}}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \frac{8}{3}(x-3)$$

$$3(y-4) = 8(x-3) \quad \Rightarrow \quad 3y - 12 = 8x - 24 \quad \Rightarrow \quad 8x - 3y - 12 = 0$$

despejando x obtenemos: $x = \frac{3y+12}{8}$ con estos datos formamos la figura:



y de la figura obtenemos el volumen de la rebanada de agua; V =ancho·largo·alto

$$V = \left(\frac{3y+12}{4}\right)(10)\Delta y = \frac{(3y+12)5}{2}\Delta y = \frac{5}{2}(3y+12)\Delta y$$

ahora el peso es $P = \rho \cdot V$, es decir:

$$P = 62.4\left(\frac{5}{2}\right)(3y+12)\Delta y = 156(3y+12)\Delta y$$

y la distancia que debe recorrer el agua es: $d = (9 - y)$ por lo que el trabajo se expresa como:

$$W = \int_0^4 156(3y+12)(9-y)\,dy$$

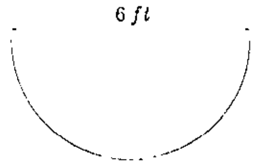
desarrollando la integral paso a paso, obtenemos:

$$W = 156\int_0^4 (-3y^2 + 15y + 108)\,dy = 156\left[-y^3 + \frac{15}{2}y^2 + 108y\right]_0^4$$

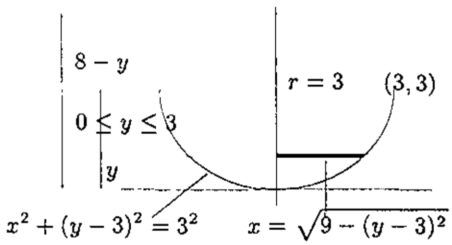
$$W = 156[-64 + 120 + 432] \qquad \text{el trabajo es:} \qquad W = 76,128\,lb \cdot ft$$

3.4.4 Cálculo del Trabajo para vaciar un depósito Semicircular

Esquema



Como en el ejemplo anterior empecemos por hacer un corte transversal de la figura



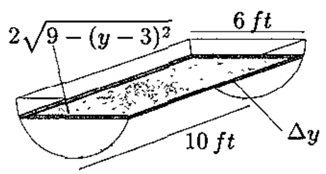
es obvio que en este caso no aplicaremos la ecuación de la recta para encontrar el valor de x, como colocamos a la figura tenemos un medio círculo con centro en $(0,3)$ cuya ecuación es:

$$x^2+(y-3)^2=9$$

de donde despejamos x; y solamente utilizamos el lado derecho del semicírculo

$$x=\sqrt{9-(y-3)^2}$$

con la figura anterior podemos construir la siguiente:



como lo hemos visto en los casos anteriores el volumen es: base por largo por altura, para este caso:

$$V=2\sqrt{9-(y-3)^2}\cdot 10\cdot \Delta y=20\sqrt{9-(y-3)^2}\Delta y$$

la expresión para el peso es:

$$P=62.4(20)(\sqrt{9-(y-3)^2})\Delta y \quad \text{y para la distancia:} \quad d=(8-y)$$

a su vez el trabajo está dado por:

$$W = \int_0^3 1248\sqrt{9-(y-3)^2}(8-y)\,dy = 1248\int_0^3 \sqrt{9-(y-3)^2}(8-y)\,dy$$

denotemos por I a, $\int_0^3 \sqrt{9-(y-3)^2})(8-y)\,dy$ por lo tanto;

$$W = 1248I \tag{3.4}$$

calculemos por separado $I = \int_0^3 \sqrt{9-(y-3)^2}(8-y)\,dy$. Manipulando el integrando, en particular $(8-y) = (5+(3-y))$ se obtiene:

$$I = \int_0^3 \sqrt{9-(y-3)^2}(5+(3-y))\,dy = 5\int_0^3 \sqrt{9-(y-3)^2}\,dy + \int_0^3 \sqrt{9-(y-3)^2}(3-y)\,dy$$

sea I_1 la primera integral e I_2 la segunda integral, calculamos por separado cada una de estas integrales, ántes de continuar observemos que $I = I_1 + I_2$, empecemos calculando I_1:

$$I_1 = 5\int_0^3 \sqrt{9-(3-y)^2}\,dy \quad \text{usamos uncambio de variable:}$$

$$u = 3-y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u(0) = 3 \\ u(3) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad du = -dy$$

por lo que la integral toma la forma:

$$I_1 = 5\int_3^0 \sqrt{9-u^2}\,(-du) \text{ intercambiando los límites de integración:}$$

$$I_1 = 5\int_0^3 \sqrt{9-u^2}\,(du) \text{ hacemos un segundo cambio de variable:}$$

$$u = 3\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{si } u = 0 & \Rightarrow \theta = 0 \\ \text{si } u = 3 & \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad du = 3\cos\theta d\theta$$

$$I_1 = 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-(3\sin\theta)^2}(3\cos\theta\,d\theta) = 15\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-9\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$

$$I_1 = 15\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta = 45\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ \cos\theta\,d\theta$$

$$I_1 = 45\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta \quad \text{usando la identidad trigonométrica:}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$I_1 = 45\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \text{ intregrando: } I_1 = 45\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_1 = 45\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\sin 2(\frac{\pi}{2})}{4} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4}\right) = 45\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4}\right) = 45\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ es decir;}$$

$$I_1 = \frac{45\pi}{4}$$

Ahora calculemos $I_2 = \int_0^3 \sqrt{9-(3-y)^2}\,(3-y)\,dy$, el cambio de variable propuesto para ésta integral es:

$$u = 9-(3-y)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u(0) = 3 \\ u(3) = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad du = 2(3-y)dy \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{du}{2(3-y)}$$

la integral toma la forma:

$$I_2 = \int_0^9 \sqrt{u}\,(3-y)\,\frac{du}{2(3-y)} \text{ observe que se cancela } (3-y)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\int_0^9 \sqrt{u}\,du\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{u^3}}{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^9 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{9^3} - \sqrt{0^3}\right] = \frac{1}{3}(27) = 9$$

$$I_2 = 9$$

recordemos que $I = I_1 + I_2$, sustituyendo el valor de estas integrales

$$I = \frac{45\pi}{4} + 9 = \frac{45\pi + 36}{4}$$

sustitutendo este resultado en la ecuación (3.4)

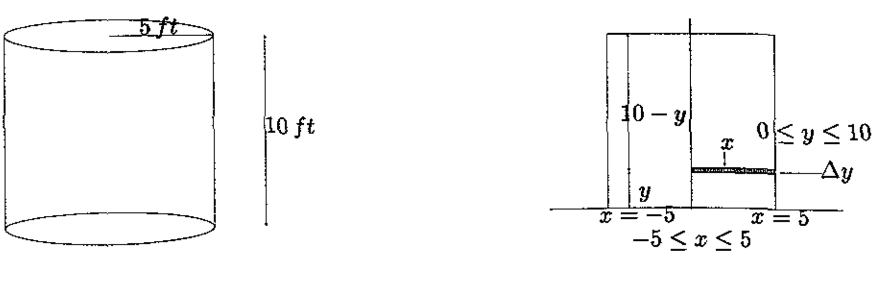
$$W = 1248\left(\frac{45\pi + 36}{4}\right) = 312(45\pi + 36)$$

el trabajo es $W \simeq 55\,340\,lb \cdot ft$

3.4.5 Bombeo de aceite de un Cilindro

Encuentre el trabajo realizado al bombear todo el aceite (densidad $\rho = 50\,\frac{lb}{ft}$) sobre el borde de un recipiente cilíndrico apoyado sobre su base. Suponga que el radio de la base es de $5ft$, su altura es de $10ft$ y está lleno de aceite.

SOLUCIÓN



observamos de la figura que la base es un círculo de radio $x = 5$ por lo que el área debe ser:

$$A = \pi x^2 = \pi 5^2 = 25\pi$$

ahora el incremento del volumen de la "rebanada de aceite" es:

$$\Delta V = 25\pi \Delta y$$

de las misma forma el incremento del peso es:

$$\Delta P = \rho \Delta V = 50(25\pi)\Delta y = 1250\pi \Delta y$$

por último el incremento de trabajo es:

$$\Delta W = \Delta P \cdot d$$

donde d es la distancia que debe de recorrer la rebanada de aceite; $d = 10 - y$, esto es:

$$\Delta W = 1250\pi(10 - y)\Delta y$$

ahora debemos sumar todos estos incrementos de trabajo:

$$W = \int_0^{10} 1250\pi(10 - y)\, dy = 1250\pi \int_0^{10} (10 - y)\, dy$$

$$W = 1250\pi \left[10y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{10} = 1250\pi[100 - 50] = 1250\pi(50)$$

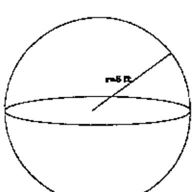
por lo que el trabajo que se debe de realizar al bombear todo el aceite es:

$$W = 62\,500\pi\, lb \cdot ft \simeq 196\,350\, lb \cdot ft$$

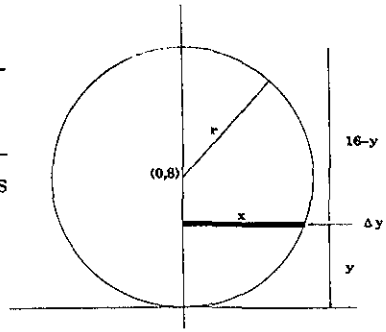
3.4.6 Bombeo de aceite de un tanque Esférico

Un tanque esférico de $8ft$ de radio está lleno por su mitad de un aceite con peso específico $50\,\frac{lb}{ft^3}$. Calcular el trabajo requerido para bombear el aceite a través de un orificio en la parte superior del tanque

SOLUCIÓN



Pongamos un sistema de coordenadas de tal forma que el centro del círculo quede sobre el eje de las ordenadas.



- La distancia que debe de recorrer el líquido es: $16 - y$
- La "rebanada" de aceite tiene radio x y ancho Δy
- Puesto que la esfera está llena hasta la mitad la y varía de 0 a 8, es decir $0 \leq y \leq 8$
- La ecuación del círculo es:
- $x^2 + (y-8)^2 = 64$
- $x^2 + y^2 - 16y + 64 = 64$
- $x^2 = 16y - y^2$

El incremento de volumen de la "rebanada" es:

$$\Delta V = \pi x^2 \Delta y$$

sustituyendo x^2 por $16y - y^2$ se obtiene:

$$\Delta V = \pi(16y - y^2)\Delta y$$

a su vez el incremento del peso está dado por la fórmula :

$$\Delta F = \rho \Delta V = 50\pi(16y - y^2)\Delta y$$

El incremento del trabajo es igual a el incremento del peso por la distancia que debe recorrer el líquido, es decir:

$$\Delta W = \Delta F \cdot d$$

en donde d es la distancia y como ya vimos es igual a $(16 - y)$:

$$\Delta W = 50\pi(16y - y^2)(16 - y)\Delta y$$

Sumando todos estos incrementos:

$$W = \int_0^8 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\, dy$$

$$W = 50\pi \left[\frac{256}{2}y^2 - \frac{32}{3}y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^8$$

$$W = 50\pi \left[\frac{1536y^2 - 128y^3 + 3y^4}{12}\right]_0^8$$

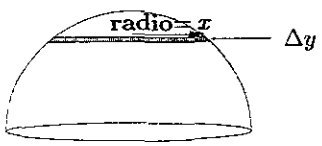
$$W = 50\pi \left[\frac{1536(8)^2 - 128(8)^3 + 3(8)^4}{12}\right]$$

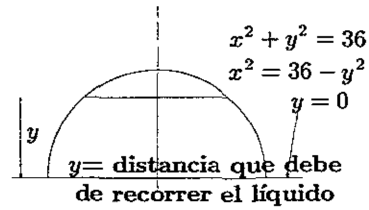
el trabajo que se debe de realizar es de :

$$W \simeq 589\,783\, lb \cdot ft$$

3.4.7 Llenado de un tanque Esférico

Un depósito semiesférico de $6ft$ de radio se coloca de tal forma que la base es el círculo. ¿Cuánto trabajo se requiere para llenar el depósito con agua a través de un agujero en la base, si la fuente acuífera está en la base?





El área de la rebanada es:	$A = \pi x^2 = \pi(36 - y^2)$
El incremento del volumen es:	$\Delta V = \pi(36 - y^2)\Delta y$
El incremento del peso es:	$\Delta F = \rho\pi(36 - y^2)\Delta y$
El incremento del trabajo es:	$\Delta W = \rho\pi(36 - y^2)y\Delta y$

Sumando todos los incrementos del trabajo:

$$W = \int_0^6 \rho\pi(36y - y^3)\,dy$$

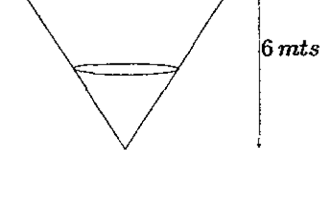
$$W = \rho\pi\left[18y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^6 = \rho\pi\left(18(36) - \frac{6^4}{4}\right) = 324\rho\pi$$

si $\rho = 62.4$, por ser agua; $\quad W \simeq 20\,218\,lb \cdot ft$

La diferencia de este problema con los anteriores es que la distancia que debe de recorrer el líquido es simplemente y y no $k - y$.

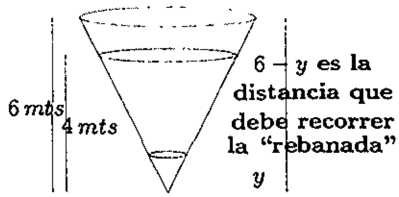
3.4.8 Vaciado de un tanque Cónico

Calcular el trabajo para vaciar el tanque cónico, cuyas dimensiones se indican, lleno hasta $\frac{2}{3}$ partes de agua, cuya densidad es $\rho = 1000\,\frac{Kg}{cm^3}$

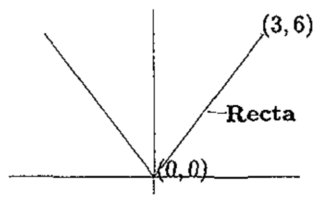


SOLUCIÓN

El tanque está lleno $\frac{2}{3}$ partes de su capacidad es decir, $\frac{2}{3}(6m) = 4m$



Tomamos una "rebanada" a una distancia y. Si colocamos una sección transversal del cono en un sistema de coordenadas obtenemos:

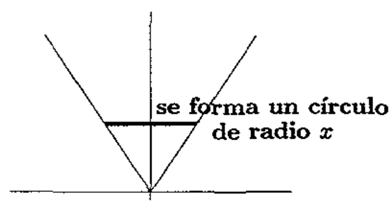


la pendiente de esta recta es:

$$y = \frac{6-0}{3-0}(x-0) \quad \text{es decir:} \quad y = 2x$$

$$\text{despejando } x \text{ se obtiene;} \quad x = \frac{y}{2}$$

de la figura vemos que se forma un círculo de radio x.



El área de este círculo es: $A = \pi x^2$ sustituyendo el valor de x:

$$A = \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{\pi y^2}{4}$$

el volumen del disco ("rebanada") es: $\Delta V = \frac{\pi}{4} y^2 \Delta y$, ahora el incremento de la fuerza está dado por la expresión:

$$\Delta F = \rho \Delta V \quad \text{donde } \rho = 1000 \tfrac{kg}{cm^3}$$

Nota: debemos de convertir cm^3 a m^3 para manejar las mismas unidades;

$$1m = 100cm \quad \Rightarrow \quad 1cm = \frac{1}{100}m \quad \Rightarrow \quad (1cm)^3 = \left(\frac{1}{100}m\right)^3$$

$$1cm^3 = \frac{1}{1,000,000}m^3 = 1 \times 10^{-6}m^3$$

por lo tanto; $\rho = 1,000\frac{kg}{1\times 10^{-6}m^3} \quad \Rightarrow \quad \rho = 1 \times 10^9 \frac{kg}{m^3}$, por lo que:

$$\Delta F = 1 \times 10^9 \frac{kg}{m^3}\left(\frac{\pi}{4}y^2\right)\Delta y$$

A su vez el incremento de trabajo es $\Delta W = \Delta F \cdot d$ donde la distancia d es lo que debe recorrer la "rebanada" desde donde se toma hasta el borde del depósito, es decir, $(6 - y)$ esto es :

$$\Delta W = \frac{1 \times 10^9}{4}\pi y^2(6 - y)\Delta y$$

sumando todos los incrementos de trabajo desde cero hasta 4 metros se obtiene:

$$W = \int_0^4 \frac{1 \times 10^9\pi}{4}(6y^2 - y^3)\, dy$$

$$W = \frac{1 \times 10^9\pi}{4}\left[2y^3 - \frac{y^4}{4}\right]_0^4 = \frac{1 \times 10^9\pi}{4}\left[2(4)^3 - \frac{4^4}{4}\right]$$

por lo que el trabajo realizado es $W \simeq 5.03 \times 10^{10}J$

3.5 Mezclas

Problemas en Biología e Ingeniería Química surgen al mezclar dos soluciones de distintas concentraciones; una solución que contiene una concentración fija de una sustancia s fluye con cierto gasto, (la razón del volumen con respecto al tiempo $G = \frac{v}{t}$) a un recipiente, el cuál contiene otra solución que contiene una sustancia s^* y tal vez otras sustancias; se mezcla haciendo una solución homogenea saliendo con un flujo y un gasto, que puede ser diferentes.

Este tipo de problemas dan origen a una ecuación diferencial de 1^{er} orden, por ejemplo *tomemos dos soluciones salinas; y queremos determinar* la cantidad de sal $A(t)$, que hay en el recipiente en el instante t. La rapidez con que cambia $A(t)$ es la tasa neta:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix}\text{tasa de entrada}\\ \text{de la sustancia}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{tasa de salida}\\ \text{de la sustancia}\end{pmatrix} = R_1 - R_2$$

Los siguientes problemas dan una idea de este tipo de ecuaciones

3.5.1 Cantidad de sal en un tanque de $200l$

Un tanque que contiene 200 litros de agua en que se han disuelto 30 gramos de sal y le entran $4\frac{l}{min}$ de solución con un gramo de sal por litro; está bien mezclado, y de él sale líquido con el mismo flujo $(4\frac{l}{min})$. Calcule la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier momento t

SOLUCIÓN

Sea $A(0)$ la cantidad inicial de sal; $A(0) = 30g$, como ya vimos la ecuación diferencial es de la forma:

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2$$

donde $R_1 = \left(4\frac{l}{min}\right)\left(1\frac{g}{l}\right) = 4\frac{g}{min}$ y $R_2 = \left(4\frac{l}{min}\right)\left(\frac{A}{200}\frac{g}{l}\right) = \frac{A}{50}\frac{g}{min}$ esto significa que:

$$\frac{dA}{dt} = 4 - \frac{A}{50} = \frac{200 - A}{50} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{200 - A} = \frac{dt}{50}$$

integrando esta ecuación:

$$\int \frac{dA}{200 - A} = \int \frac{dt}{50} \quad \Rightarrow \quad -\ln|200 - A| = \frac{t}{50} + C$$

debemos determinar el valor de C, para lograrlo usamos las condiciones iniciales:

$$\text{si } t = 0, \text{ entonces } A = 30g; \quad -\ln|200 - 30| = \frac{0}{50} + C$$

de aquí resulta claro que $C = -\ln 170$, ahora debemos despejar A

$$-\ln|200 - A| = \frac{t}{50} - \ln 170 \quad \Rightarrow \quad \ln|200 - A| = -\frac{t}{50} + \ln 170$$

aplicando exponenciales a ambos lados de la ecuación:

$$200 - A = e^{-\frac{t}{50} + \ln 170} \quad \Rightarrow \quad 200 - A = 170e^{-\frac{t}{50}}$$

por lo que el modelo que nos indica la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier momento es:

$$A(t) = 200 - 170\,e^{-\frac{t}{50}}$$

3.5.2 Salmuera en un tanque de $500gal$

Un tanque tiene 500 galones de agua pura y le entra salmuera con 2 libras de sal por galón a un flujo de 5 galones por minuto. El tanque está bien mezclado, y sale de él el mismo flujo de solución. Calcule la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en cualquier momento t.

SOLUCIÓN

Establecemos la ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = \left(2\frac{lb}{gal}\right)\left(5\frac{gal}{min}\right) - \left(5\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{A}{500}\frac{lb}{gal}\right)$$

simplificamos y por el momento no escribiremos las unidades:

$$\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{A}{100} = \frac{1\,000 - A}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{1\,000 - A} = \frac{dt}{100}$$

integrando ambos lados:

$$\int \frac{dA}{1\,000 - A} = \frac{1}{100}\int dt \quad \Rightarrow \quad -\ln|1\,000 - A| = \frac{1}{100}t + C$$

aplicando exponenciales:

$$1\,000 - A = Ce^{\frac{1}{100}t}$$

despejando A: $A = 1\,000 - Ce^{-\frac{1}{100}t}$, cuando se empieza la mezcla ($t = 0$) no hay sal ($A = 0$) esto se deduce de la frase "...Un tanque tiene 500 galones de agua pura..." con estas condiciones podemos encontrar C

$$0 = 1\,000 - Ce^{-\frac{1}{100}(0)} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1\,000 - C \quad \Rightarrow \quad C = 1\,000$$

es decir: $A = 1\,000 - 1\,000e^{-\frac{t}{100}}$ por lo tanto la expresión que nos da la cantidad de sal es:

$$A = 1\,000\left(1 - e^{-\frac{t}{100}}\right)$$

3.6 Determinación de fechas por radio carbono

Un instrumento importante en la investigación arqueológica es la determinación de fechas por radiocarbono, que es un medio para determinar la antigüedad de restos de madera y plantas y, por tanto, de huesos humanos o de animales o artefactos encontrados a la misma profundidad. El procedimiento fue desarrollado por el químico estadounidense Willard Libby (1908-1980) a principios de la década de 1950, por lo que fue galardonado con el Premio Nobel de Química en 1960. La determinación de fechas por radicarbono se basa en el hecho de que algunos restos de madera o plantas, siguen conteniendo cantidades residuales de carbono 14, un isótopo radiactivo. Este isótopo se acumula durante la vida de la planta y comienza a decaer a la muerte de ésta. Como la vida media del carbono 14 es larga (aproximadamente de 5 568 años[2]), después de muchos miles de años permanecen cantidades mensurables de carbono 14. Libby demostró que si incluso está presente una diminuta fracción de la cantidad original de carbono 14, entonces por medio de mediciones adecuadas de laboratorio puede determinarse con exactitud la proporción de la cantidad original de carbono 14 que resta. En otras palabras si $Q(t)$ es la cantidad de carbono 14 en el instante t y Q_0 es la cantidad original, entonces puede determinarse la razón $Q(t)/Q_0$, por lo menos si esta cantidad no es demasiado pequeña. Las técnicas de medición actuales permiten la aplicación de este método para periodos de hasta alrededor

[2] La vida media internacionalmente aceptada del carbono 14 es 5 568±30 años, según se indica en la *McGraw-Hill Encyclopedia of Science and technology* (5a ed.) (New York:McGraw-Hill,1982), Vol.11,pp 328-335

de 100 000 años, después de los cuales la cantidad de carbono 14 restante es de sólo un poco más o menos 4×10^{-6} de la cantidad original[1]

Veremos un ejemplo de este tema.

3.6.1 Datación de Murales Prehistóricos

En un trozo de madera quemada o carbón vegetal se determinó que el 85.5% de su $C-14$ se había desintegrado (El periodo medio de $C-14$ radiactivo es, aproximadamente 5 600 años). Determine la edad aproximada de la madera. Estos datos sirvieron a los arqueólogos para fechar los murales prehistóricos de una caverna en Lascaux, Francia

SOLUCIÓN

Sea: M la cantidad de $C-14$ en la madera
y M_0 la cantidad inicial de $C-14$ en la madera

La ecuación diferencial para este caso es de la forma:

$$\frac{dM}{dt} = kM$$

donde k es una costante de proporcionalidad. La solución de esta ecuación es:

$$\frac{dM}{M} = kt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dM}{M} = k\int dt$$

$$\ln|M| = kt + C \quad \Rightarrow \quad M = Ce^{kt}$$

primero vamos adeterminar el valor de la constante C:

$$M(0) = Ce^{k(0)} = M_0 \quad \Rightarrow \quad C = M_0 \quad \Rightarrow \quad M = M_0e^{kt}$$

ahora vamos a determinar el valor de k, para esto utilizamos el hecho de que la vida media del $C-14$ es 5 600 años, es decir:

$$M(5\,600) = \frac{M_0}{2} \quad \Rightarrow \quad M_0e^{5\,600k} = \frac{M_0}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{5\,600k} = \frac{M_0}{2M_0} = \frac{1}{2}$$

aplicamos logaritmos a esta última ecuación:

$$\ln e^{5\,600k} = \ln\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 5\,600k = -\ln 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{-\ln 2}{5\,600}$$

esto significa que la ecuación es de la forma:

$$M = M_0e^{\frac{-\ln 2}{5\,600}t}$$

[1] *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Boyce.DiPrima (4a ed.)(Limusa Noriega Editores,1998),pp 67-68

para poder determinar la edad de la madera aplicamos el hecho de que se desintegró el 85.5%. Si inicialmente (en el momento en que muere la madera) había un 100% entonces queda; 100%-85.5%=14.5% de $C-14$ en la madera.

$$M(t)=0.145M_0 \quad \Rightarrow \quad M(t)=M_0e^{\frac{-\ln 2}{5\,600}t}=0.145M_0 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{-\ln 2}{5\,600}t}=\frac{0.145M_0}{M_0}$$

simplificando M_0

$$e^{\frac{-\ln 2}{5\,600}t}=0.145 \quad \text{aplicamos logaritmos:} \quad \frac{-\ln 2}{5\,600}t=\ln 0.145$$

$$t=5\,600\frac{\ln 0.145}{-\ln 2}$$

resolviendo esta última operación:

$$t=15\,600 \text{ años}$$

3.7 Ley de Newton del Enfriamiento

Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea, que es la temperatura ambiente. Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el momento t, T_m es la temperatura constante del medio que lo rodea y $\frac{dT}{dt}$ es la rapidez con que se enfría el objeto, la ley de Newton del enfriamiento se traduce en el enunciado matemático

$$\frac{dT}{dt}\propto T-T_m \qquad \text{o sea:} \qquad \frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$$

en donde k es la constante de proporcionalidad. Como supusimos que el objeto se enfría, se debe cumplir que $T>T_m$; en consecuencia, lo lógico es que $k<0$[1]

3.7.1 Enfriamiento de un Termómetro

Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es $70°F$ y se lleva al exterior donde la temperatura es $10°F$. Pasando $\frac{1}{2}$ minuto el termómetro indica $50°F$ ¿cuál es la lectura cuando $t=1$ minuto? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a $15°F$?

SOLUCIÓN

Del problema obtenemos los siguientes datos:
La temperatura inicial del termómetro, cuando $t=0$, es $T(0)=70°F$, esto es por que la temperatura del termómetro y la del recinto es la misma. Ahora

[1] *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado.* Dennis G. Zill (6a ed.) International Thomson Editores.

la temperatura del exterior es $T_m = 10°F$, como dato adicional tenemos que la lectura del termómetro después de $t = 30seg = \frac{1}{2}min$, es $50°F$, lo cuál se expresa como: $T(\frac{1}{2}) = 50°F$. Debemos de resolver dos preguntas:

a) $T(1)$, la lectura del termómetro después de un minuto.

b) Para que valor del tiempo, t, la lectura debe ser $15°F$

Como ya vimos la ecuación que rige este fenómeno es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

lo cuál se traduce en:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10) \qquad \text{por el momento no usaremos las unidades}$$

despejando k se obtiene:

$$\frac{1}{T-10}\frac{dT}{dt} = k \qquad \text{integramos ambos lados:}$$

$$\int \frac{1}{T-10}\frac{dT}{dt}\,dt = \int k\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dT}{T-10} = k\int dt$$

resolviendo cada integral obtenemos:

$$\ln|T - 10| = kt + c \tag{3.5}$$

antes de despejar T encontremos los valores de las constantes k y c, recordemos que k debe ser menor que cero.
Primero si $t = 0$ entonces $T = 70$, sustituyendo en la ecuación (3.5):

$$\ln|70 - 10| = k(0) + c \qquad \Rightarrow \qquad c = \ln|60|$$

ahora si $t = \frac{1}{2}$ entonces $T = 50$, sustituyendo en (3.5):

$$\ln|50 - 10| = k\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 60 \qquad \Rightarrow \qquad \ln 40 = \frac{k}{2} + \ln 60$$

$$\ln 40 - \ln 60 = \frac{k}{2} \qquad \text{esto es:} \qquad k = 2\left[\ln 40 - \ln 60\right]$$

aplicando la propiedad $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$, se obtiene: $k = 2\ln\frac{40}{60} \Rightarrow k = 2\ln\frac{2}{3}$, ahora aplicamos la propiedad $n\ln a = \ln a^n$, es decir, $k = \ln\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \ln\frac{4}{9}$ observe que $\ln\frac{4}{9} < 0$ y esto cumple con $k < 0$. Antes de sustituir estos valores regresemos a la ecuación (3.5) y despejemos T:
$\ln|T - 10| = kt + c$ aplicamos exponenciales en ambos lados:

$$e^{\ln|T-10|} = e^{kt+c} = e^{kt}e^{c}$$

sustituyendo los valores de k y c:

$$T - 10 = e^{\ln(\frac{4}{9})t}e^{\ln 60} \;\Rightarrow\; T - 10 = 60e^{\ln(\frac{4}{9})t}$$

por lo que la expresión que gobierna la lectura del termómetro es:

$$T(t) = 60e^{\ln(\frac{4}{9})t} + 10 \tag{3.6}$$

con esta expresión calculemos la temperatura cuando $t = 1$ minuto:

$$T(1) = 60e^{\ln(\frac{4}{9})(1)} + 10 = 60e^{\ln(\frac{4}{9})} + 10 = 60\left(\frac{4}{9}\right) + 10 \;\Rightarrow\; T(1) \simeq 36.67°F$$

por último despejemos el tiempo, t, cuando hay una lectura de $15°F$, sustituyendo en la ecuación (3.6):
$15 = 60e^{\ln(\frac{4}{9})t} + 10$ reordenando la ecuación;

$$60e^{\ln(\frac{4}{9})t} + 10 = 15 \quad\Rightarrow\quad 60e^{\ln(\frac{4}{9})t} = 15 - 10$$

$$60e^{\ln(\frac{4}{9})t} = 5 \quad\Rightarrow\quad e^{\ln(\frac{4}{9})t} = \frac{5}{60}$$

simplificando: $e^{\ln(\frac{4}{9})t} = \frac{1}{12}$ aplicamos logaritmos en ambos lados:
$\ln(\frac{4}{9})t = \ln(\frac{1}{12})$, despejando t obtenemos:

$$t = \frac{\ln(\frac{1}{12})}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} \quad\Rightarrow\quad t \simeq 3.06\,minutos$$

por lo que la respuesta es:

a) $T(1)$; la lectura del termómetro después de un minuto, es: $36.67°F$

b) El valor del tiempo, t, para que la lectura sea $15°F$ es: $3.06\,minutos$

3.7.2 Calentamiento de una barra pequeña

Si una barra metálica pequeña, cuya temperatura inicial es $20°C$, se deja caer en un recipiente con agua hirviente, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar $90°C$, si se sabe que su temperatura aumentó $2°C$, en un segundo? ¿cuánto tiempo tardará en llegar a $98°C$?

SOLUCIÓN

Como lo marca el problema la temperatura inicial es $20°C$; es decir $T(0) = 20°C$, pero en este caso la barra se está calentando en vez de enfriarse. Tomaremos el tiempo, t, en segundos,como en el caso anterior a la temperatura del objeto le restamos la temperatura del medio ambiente; para este caso a la barra le debemos restar la temperatura del agua hirviendo, que suponemos debe ser

$100°C$ (esta condición en realidad es muy arbitraria por que el agua hierve a $100°C$ a nivel del mar y el problema no lo menciona), es decir como se está calentando la barra la ecuacion diferencial debe ser:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

sustituyendo $T_m = 100$ se obtiene; $\frac{dT}{dt} = k(T - 100) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T-100}\frac{dT}{dt} = k$ integrando ambos lados:

$$\int \frac{dT}{T - 100} = \int k\, dt$$

realizemos un cambio de variables, sea $x = T$ y $y = t$ por lo que la integral anterior queda de la forma:

$$\int \frac{dx}{x - 100} = k \int dy$$

los límites de integración para la primera integral son $20 \leq x \leq T$ y para la segunda $0 \leq y \leq t$ por lo tanto nuestra integral toma la forma:

$$\int_{20}^{T} \frac{dx}{x - 100} = k \int_{0}^{t} dy$$

integrando ambos lados:

$$\ln|x - 100| \,|_{20}^{T} = ky \,|_{0}^{t} \quad \Rightarrow \quad \ln|T - 100| - \ln|-80| = k(t - 0)$$

$$\ln|T - 100| - \ln|-80| = kt \tag{3.7}$$

si despejamos k de la ecuación anterior se obtiene; $k = \frac{\ln|T-100|-\ln|-80|}{t}$ para determinar el valor de k usamos el hecho que; si $t = 1seg$ entonces $T = 22°C$ o simplemente $T = 22$, es decir;

$$k = \ln|22 - 100| - \ln|-80| = \ln|-78| - \ln|-80| = \ln\left(\frac{-78}{-80}\right)$$

simplificando el quebrado $k = \ln\left(\frac{39}{40}\right)$, sustituyendo este valor en la ecuación (3.7); $\ln|T - 100| - \ln|-80| = \ln\left(\frac{39}{40}\right) t$ pero nos conviene dejarla de la siguiente manera:

$$\ln|T - 100| = \ln\left(\frac{39}{40}\right) t + \ln|-80| \tag{3.8}$$

ahora bien debemos despejar T de esta última ecuación, usando exponenciales:

$$e^{\ln|T-100|} = e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t + \ln|-80|} \quad \Rightarrow \quad e^{\ln|T-100|} = e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t} e^{\ln|-80|}$$

$T - 100 = -80e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t}$ por lo tanto:

$$T = 100 - 80e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t} \tag{3.9}$$

esta última ecuación es la que rige el comportamiento de la temperatura . Para contestar las preguntas retomemos le ecuación (3.8) y despejemos t:

$$\ln\left(\frac{39}{40}\right)t+\ln|-80| = \ln|T-100| \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{39}{40}\right)t = \ln|T-100|-\ln|-80|$$

$$\ln\left(\frac{39}{40}\right)t = \ln\left|\frac{T-100}{-80}\right| \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\ln\left|\frac{T-100}{-80}\right|}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)}$$

si $T=90°C$; $t=\frac{\ln\left|\frac{90-100}{-80}\right|}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} \quad\Rightarrow\quad t\simeq 82.133seg$

de la misma manera si $T=98°C$; $t=\frac{\ln\left|\frac{98-100}{-80}\right|}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} \quad\Rightarrow\quad t\simeq 145.7036seg$

es decir:
si $t\simeq 82.1\,seg$ entonces $T=90°C$ y
si $t\simeq 145.7\,seg$ entonces $T=98°C$

Capítulo 4

Sin proceso de límite

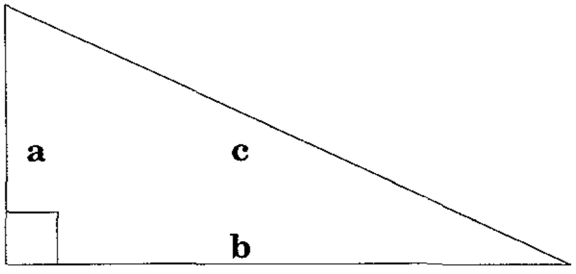
Hay una gran variedad de problemas que se resuelven sin la necesidad de aplicar derivadas o integrales (proceso de límite), sino que es posible solucionarlos utilizando, ya sea solamente Álgebra elemental, Trigonometría, Geometría o quizá en un caso extremo una pequeña derivada.

Aunque el objetivo principal del trabajo es presentar las aplicaciones del Cálculo tanto Diferencial como Integral me parece interesante e importante presentar este tipo de problemas, para crear la idea en el lector que no hay una sola forma de resolver los problemas, además de hacerle ver que puede hacerse de una manera más sencilla aplicando una u otra técnica.

4.1 Área máxima de un Triángulo Rectángulo

Encontrar las dimensiones del triángulo rectángulo dado su perímetro y que tenga área máxima.

Solución



Sean: a y b los catetos del triángulo y c su hipotenusa. Sabemos que el perímetro está dado por la expresión: $P = a + b + c$ y el área por $A = \frac{1}{2}ab$, del perímetro despejemos $a + b$; $a + b = P - c$, si elevamos al cuadrado ambos lados:

$$(a+b)^2 = (P-c)^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2 = P^2-2Pc+c^2 \Rightarrow a^2+b^2+2ab = P^2-2Pc+c^2$$

en esta última ecuación usamos la identidad $a^2 + b^2 = c^2$

$$c^2 + 2ab = P^2 - 2Pc + c^2 \quad \Rightarrow \quad 2ab = P^2 - 2Pc$$

dividiendo entre 4 ambos lados y simplificando se tiene:

$$\frac{2ab}{4} = \frac{P^2 - 2Pc}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{ab}{2} = \frac{P^2 - 2Pc}{4}$$

pero como ya dijimos; el lado izquierdo de esta expresión representa el área del triángulo

$$A = \frac{P^2 - 2Pc}{4}$$

Aquí la única variable es c puesto que P es el perímetro y este valor ya es conocido.

Observación: si quisieramos resolver este problema usando derivadas tendríamos graves problemas:

$$\frac{dA}{dc} = -\frac{2P}{4} = -\frac{P}{2}$$

tendríamos que igualar a cero la primera derivada y encontrar los valores críticos

$$\frac{dA}{dc} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{P}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 0$$

donde los problemas serían:

i) no tenemos valores críticos; por que no hay variable c que despejar

ii) $P = 0$ significa que el perímetro es cero; lo cuál no es posible por que no habría triángulo

es decir no es posible usar cálculo (en una variable) para resolver este problema.

Antes de retomar el problema, resolvamos el siguiente:
Encontrar 2 números positivos cuya suma esté dada y cuyo producto sea el máximo posible; $x + y = S$ y $xy = M$, despejemos y de la primera ecuación: $y = S - x$ y la sustituimos en la segunda, es decir;

$$M = (S - x)x \tag{4.1}$$

es claro que $S - x$ debe ser mayor que cero; $S - x > 0$, por otro lado vemos de la ecuación (4.1) que un factor puede ser mayor o igual a el otro digamos: $(S - x) \geq x$ lo que significa que $S \geq x + x$ lo que se traduce en: $S \geq 2x$ tomemos el primer caso $S = 2x$ sustituyendo en $y = S - x$ se tiene $y = x$, es decir los dos números deben ser iguales
ahora tomemos el segundo caso $S > 2x$ sustituyendo en $y + x = S$

$$y + x > 2x \quad \Rightarrow \quad y > 2x - x \quad \Rightarrow \quad y > x$$

es decir uno de los números es mayor que el otro, digamos que x es mayor que y; $y = x - r$ donde $r > 0$

- si los dos números son iguales, $y = x$, el producto. $M_1 = yx = xx = x^2$, sería un cuadrado perfecto
- Si los dos números son diferentes, $y = x - r$, el producto sería $M_2 = (x - r)x = x^2 - rx$
- es obvio que $M_1 > M_2$
- Podemos concluir que los números deben ser iguales para tener un producto máximo

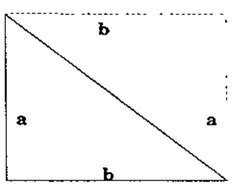
como ejemplo podemos plantearlo como: Encontrar 2 números cuya suma sea 14 y cuyo producto sea máximo.
todos los números cuya suma es 14 son:

y	x	$S = x + y$	$M = xy$
0	14	14	0
1	13	14	13
2	12	14	24
3	11	14	33
4	10	14	40
5	9	14	45
6	8	14	48
7	7	14	49

por comodidad usamos números enteros; pero lo mismo sucede con los fraccionarios y los radicales.

Ahora sí retomemos el problema inicial:
Completemos el rectángulo es decir tomemos dos triángulos rectángulos

y replanteamoslo como buscar dos números cuya suma (perímetro) está dada y cuyo producto (área) sea máximo. Como acabamos de ver estos números deben ser iguales $a = b$



Por lo que las dimensiones del triángulo deben ser, dos lados iguales a y la hipotenusa $c^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2}a$ pero como

$$P = a + b + c \quad \Rightarrow \quad P = a + a + \sqrt{2}a \quad \Rightarrow \quad P = (2 + \sqrt{2})a$$

despejando a se tiene

$$a = \frac{P}{2 + \sqrt{2}}$$

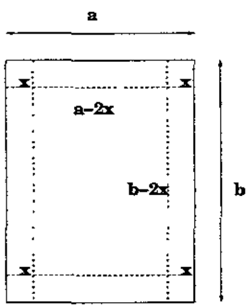
en resumen el triángulo debe tener las dimensiones:

$$a = \frac{P}{2 + \sqrt{2}} \quad b = \frac{P}{2 + \sqrt{2}} \quad c = \frac{\sqrt{2}P}{2 + \sqrt{2}}$$

4.2 Caja rectangular de volumen máximo

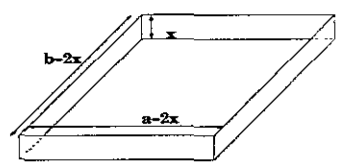
Calcular las dimensiones de una caja sin tapa; que tenga el máximo volumen que se obtiene de una hoja rectangular, cortando cuadrados idénticos en las 4 esquinas.

Solución



Representamos con:
a el ancho del rectángulo;
b el largo del rectángulo;
x la cantidad a cortar y también representa la altura de la caja;
$a-2x$ ancho de la base de la caja;
$b-2x$ largo de la base de la caja

El volumen de la caja está expresado por:
$V =$ (ancho)(largo)(alto) esto significa que:
$V = (a-2x)(b-2x)(x)$
y lo que deseamos es encontrar x



Es obvio que si queremos un volumen máximo :

i) $x > 0$; por que: no hay cortes negativos ($x < 0$), y si $x = 0$ significa que la altura es cero lo cual no puede suceder, por que no habría caja

ii) el producto $(a-2x)(b-2x)$ debe ser positivo; para que, el volumen tenga sentido, $V > 0.$, es decir $(a-2x)(b-2x) > 0$, ambos factores deben ser positivos o ambos deben ser negativos

$\longrightarrow$ Si ambos son positivos:

$$a-2x > 0 \Rightarrow -2x > -a \Rightarrow x < \frac{-a}{-2} \Rightarrow x < \frac{a}{2}$$

$$b-2x > 0 \Rightarrow -2x > -b \Rightarrow x < \frac{-b}{-2} \Rightarrow x < \frac{b}{2}$$

puesto que $a < b$ entonces $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$ con lo que podemos asegurar que si $x < \frac{a}{2}$ automáticamente $x < \frac{b}{2}$; es decir es suficiente pedir que:

$$x < \frac{a}{2}$$

⟶ Si ambos son negativos:

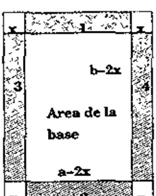
$$a - 2x < 0 \Rightarrow -2x < -a \Rightarrow x > \frac{a}{2}$$
$$b - 2x < 0 \Rightarrow -2x < -b \Rightarrow x > \frac{b}{2}$$

con el mismo argumento si $b > a \Rightarrow \frac{b}{2} > \frac{a}{2}$, entonces si $x > \frac{b}{2}$ automáticamente $x > \frac{a}{2}$

En resumen $x < \frac{a}{2}$ ó $x > \frac{b}{2}$ puesto que x representa el corte que se debe hacer a la hoja de material, entre menos material desperdiciemos es mejor y esto nos lo garantiza la desigualdad $x < \frac{a}{2}$, la que significa que debemos cortar menos de la mitad del ancho; en el otro caso $x > \frac{b}{2}$ nos diría que debemos de cortar más de la mitad del largo.

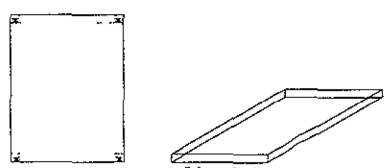
Hasta este momento solamente sabemos que debemos hacer un corte de menos de la mitad del ancho; pero ¿qué tanto menos?, hay una infinidad de números que cumplen esta condición por ejemplo: $\frac{a}{3}, \frac{a}{5}, \frac{a}{10}, \frac{a}{1\,000\,000}$, etc, es decir; solamente sabemos que $x > 0$ y $x < \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < x < \frac{a}{2}$

Para encontrar el valor de x tomemos los casos extremos: primero $x \approx 0$ muy cercano a cero y segundo $x \approx \frac{a}{2}$ casi la mitad de a algo así como $x = 0.4\overline{9}a$. Observemos nuestra figura:

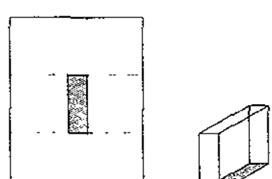


el área de la base es: $(a-2x)(b-2x)$
el área de las caras 1 y 2 es $(a-2x)x$
el área de las caras 3 y 4 es $(b-2x)x$

El primer caso $x \approx 0$ significa que el área de la base es muy grande y las áreas laterales (de las caras) muy pequeñas por lo que el volumen es pequeño.



Para el segundo caso, $x \approx \frac{a}{2}$, la altura es mayor pero la base es pequeña y el voumen también se ve afectado en ser menor de lo esperado, aunque parezca que es mayor que el caso anterior.



En el primer caso el área de la base es mayor que la suma de las áreas de las caras 1,2 y las caras 3,4; $A_B > A_{1,2} + A_{3,4}$. En el segundo caso el área de la base es menor que la suma de las caras laterales; $A_B < A_{1,2} + A_{3,4}$, en ambos casos el volumen parece ser pequeño o no parece cumplir con ser el máximo volumen que se espera.

Ahora veamos la posibilidad cuando área de la base es igual a la suma de las áreas laterales

$$A_B = A_{1,2} + A_{3,4}$$

sustituyendo los valores de estas expresiones se tiene:

$$(a-2x)(b-2x) = 2x(a-2x) + 2x(b-2x)$$

$$ab - 2ax - 2bx + 4x^2 = 2ax - 4x^2 + 2bx - 4x^2$$

$$ab - 2ax - 2bx + 4x^2 - 2ax + 4x^2 - 2bx + 4x^2 = 0$$

simplificando; agrupando términos semejantes

$$12x^2 - 4ax - 4bx + ab = 0$$

$$12x^2 - 4x(a+b) + ab = 0$$

resolvemos esta ecuación usando la fórmula general

$$x = \frac{-[-4(a+b)] \pm \sqrt{[-4(a+b)]^2 - 4(12)(ab)}}{2(12)}$$

$$x = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16(a+b)^2 - 48ab}}{24} = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16[(a+b)^2 - 3ab]}}{24}$$

$$x = \frac{4(a+b) \pm 4\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - 3ab}}{24}$$

$$x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} \tag{4.2}$$

Observación; si $a = b$ se tiene un cuadrado en vez de un rectángulo

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + a^2}}{6} = \frac{2a \pm \sqrt{a^2}}{6} = \frac{2a \pm a}{6}$$

$$x_1 = \frac{3a}{6} = \frac{a}{2} \text{ si cortamos con esta medida no tendríamos caja}$$

$$x_2 = \frac{a}{6} \text{ este resultado cumple con la condición } x < \tfrac{a}{2}$$

Es decir para el caso de tener un cuadrado en vez de un rectángulo la solución es:

- ancho $a - 2x = a - 2\left(\frac{a}{6}\right) = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$
- largo $b - 2x = \frac{2a}{3}$ por que $a = b$
- alto $x = \frac{a}{6}$

Retomemos nuestro problema; de la ecuación (4.2) obtenemos dos valores:

$$x_1 = \frac{(a+b)+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} \qquad x_2 = \frac{(a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

la solución debe de cumplir con la condición $x < \frac{a}{2}$
supongamos que la solución es x_1, esta solución debe cumplir: $x_1 < \frac{a}{2}$ esto significa que:

$$x_1 = \frac{(a+b)+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} < \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad (a+b)+\sqrt{a^2-ab+b^2} < 3a$$

$$\sqrt{a^2-ab+b^2} < 3a-(a+b) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2-ab+b^2} < 2a-b$$

elevando al cuadrado; $a^2 - ab + b^2 < 4a^2 - 4ab + b^2$
transponiendo términos; $-ab + 4ab < 4a^2 - a^2 + b^2 - b^2$ y simplificando;

$$3ab < 3a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3ab}{3a} < \frac{3a^2}{3a}$$

reduciendo los quebrados se obtiene: $b < a$ lo cual no es posible, entonces nuestra suposición no es correcta
Ahora supongamos que x_2 es la solución; si $x_2 < \frac{a}{2}$, entonces:

$$\frac{(a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} < \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad (a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2} < 3a$$

$$(a+b)-3a < \sqrt{a^2-ab+b^2} \quad \Rightarrow \quad b-2a < \sqrt{a^2-ab+b^2}$$

elevando al cuadrado; $b^2 - 4ab + 4a^2 < a^2 - ab + b^2$
transponiendo; $4a^2 - a^2 < 4ab - ab + b^2 - b^2$ y simplificando;

$$3a^2 < 3ab \quad \Rightarrow \quad \frac{3a^2}{3a} < \frac{3ab}{3a}$$

reduciendo los quebrados se tiene: $a < b$ esta desigualdad es cierta, lo que se traduce en que x_2 es la solución correcta.

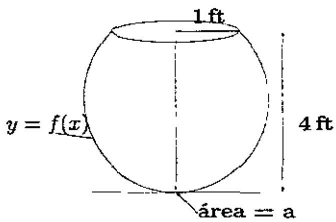
Es decir en las esquinas se debe de hacer un corte de $x = \frac{(a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ y por ende las dimensiones son:

- ancho de la caja; $a - 2x = a - \frac{(a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3} = \frac{2a-b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}$
- largo de la caja; $b - 2x = b - \frac{(a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3} = \frac{2b-a-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{3}$
- altura de la caja; $x = \frac{(a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$

4.3 Reloj de Agua

La clepsidra o reloj de agua. Un reloj de agua de 12 horas se va a diseñar con las dimensiones que se muestran en la figura, con la forma de la superficie obtenida al girar la curva $y = f(x)$ en torno al eje y. ¿Qué ecuación debe tener esta curva y qué radio debe tener el agujero circular del fondo, de modo que el nivel del agua descienda a razón constante de $4\, in/h$

Solución



Tomemos un tanque el cuál tiene un agujero, de área a, en el fondo del recipiente por donde sale el agua. Designemos por $h(t)$ la profundidad en ft del agua en el tanque en el tiempo t, y por $V(t)$ el volumen de agua en ft^3

Antes de continuar consideremos la ecuación de Bernoulli bajo las siguientes condiciones; que el flujo del fluido sea:

1. Estacionario; esto es que la velocidad en cualquier punto no varíe
2. Irrotacional; el elemento del fluido en un punto dado no tiene velocidad angular neta alrededor de dicho punto
3. Incompresible; que la densidad sea constante
4. No viscoso; la viscosidad introduce fuerzas tangenciales entre las capas del fluido en movimiento relativo y se traduce en una disipación de la energía mecánica.

con estas condiciones podemos asegurar que la ecuación para dos puntos del fluido es:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \tag{4.3}$$

donde: P es la presión
ρ es la densidad
$g = 32\frac{ft}{s^2}$ es la gravedad
y_1, y_2 la altura a la que se encuentra el fluido

de esta ecuación observamos que: la presión es la misma en cualquier punto del fluido; $P_1 = P_2$ y además ρ es constante y diferente de cero, por lo que la ecuación (4.3) se simplifica y obtenemos:

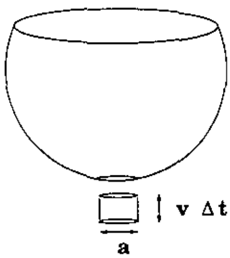
$$\frac{1}{2}v_1^2 + gy_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + gy_2$$

si tomamos un depósito con un líquido, y ésta tiene un orificio, donde se descarga, a una distancia h por debajo del nivel del agua; $v_2 = 0$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{1}{2}v_1^2 = gy_2 - gy_1$$
$$v_1^2 = 2g(y_2 - y_1)$$
$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

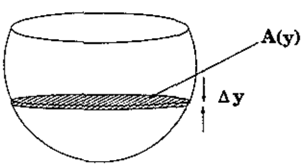
Esto es; la velocidad del flujo del agua que sale por el agujero es $v_1 = \sqrt{2gh}$, que es la velocidad adquirida por una gota de agua en caida libre desde la superficie del agua hasta el agujero., este enunciado es conocido como la ley de Torricelli. Cambiemos la variable h por la y, por lo que: $v_1 = \sqrt{2gy}$

Regresemos a nuestro problema



El volumen de agua que sale en un instante Δt está dado por el cilindro de agua; cuya área de la base es a y altura de la base es $v\Delta t$ por lo que el cambio resultante, ΔV, en el volumen de agua en el tanque está dado por:
$\Delta V = -av\Delta t = -a\sqrt{2gy}\Delta t$

Pero si $A(y)$ denota el área de la sección transversal del tanque a una altura y y sobre el agujero, se tiene:



$\Delta V = A(y)\Delta y$
Igualando las dos ecuaciones anteriores:

$$A(y)\Delta y = -a\sqrt{2gy}\Delta t$$
$$A(y)\frac{\Delta y}{\Delta t} = -a\sqrt{2gy} \quad (4.4)$$

Observemos que:

- $A(y)$ es igual a πx^2; por que es el círculo que se obtiene al girar $y = f(x)$ al rededor del eje y
- $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ es la razón a la que desciende el nivel del agua, es decir;

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -4\frac{in}{h} = -4\left(\frac{1}{12}ft\right)\left(\frac{1}{3600s}\right) = -\frac{1}{10\,800}\frac{ft}{s}$$

  esta conversión es necesaria para que todas las cantidades esten en las mismas unidades

- $g = 32\,\frac{ft}{s^2}$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (4.4), se obtiene:

$$\pi x^2\left(-\frac{1}{10\,800}\frac{ft}{s}\right)=-a\sqrt{2\left(32\frac{ft}{s^2}\right)y}\quad\Rightarrow\quad\frac{\pi x^2}{10\,800}\frac{ft}{s}=a\sqrt{64y\frac{ft}{s^2}}$$

$$\frac{\pi x^2}{10\,800}ft=8a\sqrt{y\,ft}\quad\Rightarrow\quad\frac{\pi x^2}{8a(10\,800)}ft=\sqrt{y\,ft}$$

elevando al cuadrado ambos lados :

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{86\,400}\right)^2 x^4\,ft^2=y\,ft$$

$$y=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{86\,400}\right)^2 x^4\,ft \tag{4.5}$$

para encontrar el valor de a^2 tomemos en cuenta que la curva debe pasar por los puntos $(0,0)$ y $(1\,ft,4\,ft)$

$$4\,ft=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{86\,400}\right)^2 ft^4\,ft\;\Rightarrow\;a^2=\frac{1}{4\,ft}\left(\frac{\pi}{86\,400}\right)^2 ft^5\;\Rightarrow\;a=\frac{\pi}{172\,800}ft^2$$

a representa el área del agujero; sea r el radio de ese círculo

$$a=\pi r^2\quad\Rightarrow\quad\pi r^2=\frac{\pi}{172\,800}ft^2\quad\Rightarrow\quad r^2=\frac{1}{172\,800}ft^2$$

$$r=\sqrt{\frac{1}{172\,800}ft^2}\quad\Rightarrow\quad r=\frac{1}{240\sqrt{3}}ft$$

para determinar la ecuación de la curva empleamos la ecuación (4.5), sustituyendo el valor de a^2:

$$y=\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{86\,400}\right)^2}\left(\frac{\pi}{86\,400}x^4\right)^2\quad\text{simplificando}\quad y=4x^4$$

así que la solución es:

i) La curva debe tener la forma $y=4x^4$

ii) El radio del agujero debe ser $r=\frac{1}{240\sqrt{3}}ft$

Si se observa en ningún momento utilizamos el hecho que el reloj debe durar 12 horas. Esto se utiliza al resolver la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dt}=-4\,\frac{in}{h}$

$$y=-4t\frac{in}{hr}+48\,in \tag{4.6}$$

usamos la conversión $4\,ft=48\,in$. Por último si sustituimos $t=12h$ en la ecuación (4.6); $y=0$ que es cuando se vacía totalmente el tanque.

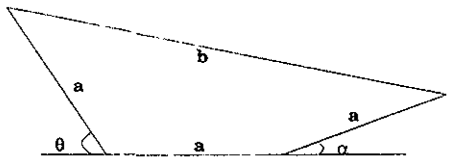
Con la ecuación (4.6) podemos constrir una tabla que nos de información de el tiempo transcurrido y la altura del agua en el recipiente.

$t\,hrs$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$h\,in$	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0

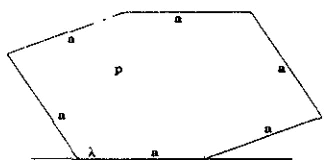
4.4 Área máxima de un cuadrilátero

Considere un cuadrilatero con 3 lados iguales de longitud a y uno diferente de longitud b ¿Cuánto deben medir los ángulos exteriores θ y α, ver figura, para que el área del cuadrilatero sea máxima?

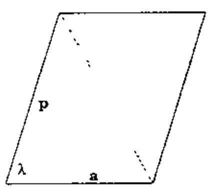
Solución



Primero consideremos el hexágono completo; trazando paralelas a cada lado

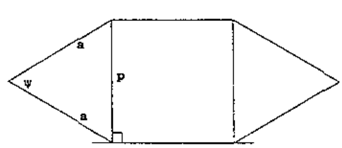


El área total del hexágono está compuesta por las áreas de los triángulos y del paralelogramo. Fijemos nuestra atención al área del paralelogramo



para calcular esta área dividamos en dos triángulos el paralelogramo. Sea A_T el área del triángulo y A_P el área del paralelogramo $A_P = 2A_T$ donde
$A_T = \frac{1}{2}ap\sin\lambda$ por lo tanto:
$A_P = 2\left(\frac{1}{2}ap\sin\lambda\right) = ap\sin\lambda$

recordemos que: $-1 \leq \sin\lambda \leq 1$, el máximo valor de la función seno se alcanza cuando $\sin\lambda = 1$, esto es si $\lambda = \frac{\pi}{2}$., por lo que el hexágono toma la forma:



Lo que significa que el paralelogramo es en sí un rectángulo de área $A_P = ap$. Ahora calculemos el área del triángulo del lado izquierdo,(en realidad no importa el lado), de geometría elemental sabemos que:

$$A_t = \frac{1}{2}a^2\sin\psi$$

por otro lado usando la ley de los cosenos;

$$p^2 = a^2+a^2-2(a)(a)cos\psi \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2a^2-2a^2\cos\psi \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2a^2(1-\cos\psi)$$

$$p = \sqrt{a^2 2(1-\cos\psi)} \quad \Rightarrow \quad p = a\sqrt{2(1-\cos\psi)}$$

por lo que el área del hexágono es la suma de los dos triángulos más el área del rectángulo; $A_e = 2A_t + A_P$, si sustituimos sus respectivos valores:

$$A_e = a^2\sin\psi + ap \quad \Rightarrow \quad A_e = a^2\sin\psi + a\left[a\sqrt{2(1-\cos\psi)}\right]$$

$$A_e = a^2\sin\psi + a^2\sqrt{2(1-\cos\psi)}$$

tomemos la primera derivada de esta expresión para encontrar los valores críticos:

$$\frac{dA_e}{d\psi} = a^2\cos\psi + a^2\left[\frac{2\sin\psi}{2\sqrt{2(1-\cos\psi)}}\right] \quad \text{simplificando el factor 2 e igualando a cero}$$

$$\frac{dA_e}{d\psi} = a^2\left[\cos\psi + \frac{\sin\psi}{\sqrt{2(1-\cos\psi)}}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\psi = -\frac{\sin\psi}{\sqrt{2(1-\cos\psi)}}$$

$$\sqrt{2(1-\cos\psi)}\cos\psi = -\sin\psi \quad \text{elevando al cuadrado:}$$

$$2(1-\cos\psi)\cos^2\psi = \sin^2\psi \quad \text{usamos la identidad: } \sin^2\psi = 1-\cos^2\psi;$$

$$2(1-\cos\psi)\cos^2\psi = 1-\cos^2\psi \quad \text{factorizando la diferencia de cuadrados:}$$

$$2(1-\cos\psi)\cos^2\psi = (1-\cos\psi)(1+\cos\psi) \quad \text{cancelando el término } (1-\cos\psi)$$

esta cancelación es valida por que si $(1-\cos\psi)$ fuera igual a cero entonces; $\psi = 0$ lo que significa que tendríamos un triángulo de área cero y esto no es posible. Regresando a la ecuación:

$$2\cos^2\psi = 1+\cos\psi \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2\psi - \cos\psi - 1 = 0$$

para resolver esta ecuación de segundo grado aplicamos la fórmula general:

$$\cos\psi = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\cos\psi = \frac{1+3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos\psi = 1 \quad \Rightarrow \quad \psi = 0$$

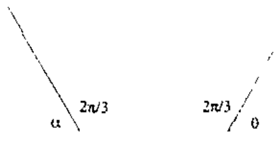
$$\cos\psi = \frac{1-3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos\psi = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{2\pi}{3}$$

ya explicamos por que la solución $\psi = 0$ no es posible, por lo que la única solución posible es:

$$\psi = \frac{2\pi}{3}$$

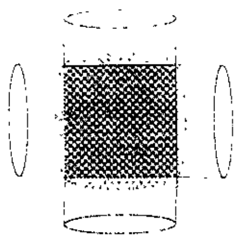
lo que nos indica que el hexágono debe ser regular

Por lo tanto la solución del problema es: $\alpha = \theta = \frac{\pi}{3}$



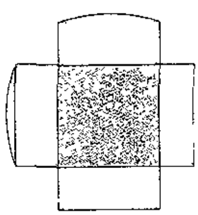
4.5 Volumen entre dos cilindros

Como último ejemplo calculemos el volumen que se obtiene al intersectar dos cilindros del mismo radio.



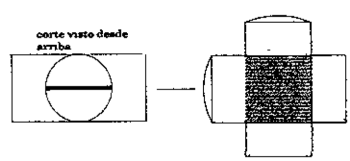
Apliquemos el método de exhaustión para resolver este problema, es decir; calculemos el volumen de una parte de la región y después sumemos todos estos "pequeños volumenes".

Primero hagamos un corte paralelo al eje de uno de los cilindros; que divida en dos partes a la figura.

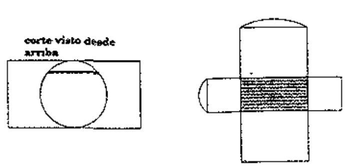


Observamos que se forma un cuadrado en la parte en donde se intersectan los cilindros, ahora bien este cuadrado cambia su tamaño, dependiendo donde se haga el corte.

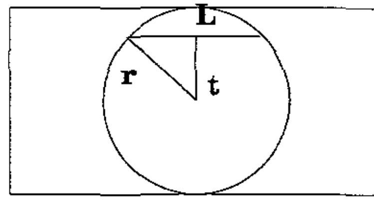
Por ejemplo si el corte se hace por el diámetro del círculo del cilindro el cuadrado formado es el de mayor tamaño.



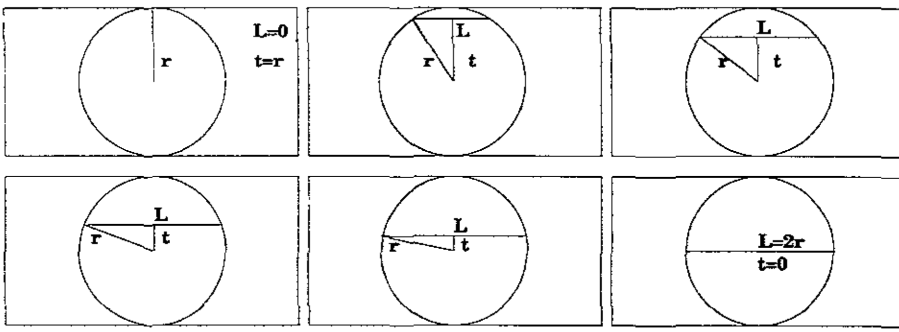
Pero si el corte se hace cerca de una orilla el tamaño del cuadrado es menor que el anterior



Es claro que el lado del cuadrado depende de donde se tome el corte, representemos por:



- n el número de cuadrados
- L el lado del cuadrado
- r el radio del círculo del cílindro
- t es una parte del radio

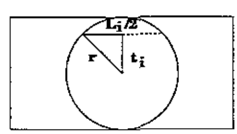


En las figuras anteriores vemos la forma de variar de L y t en la figura 1; $L = 0$ y $t = r$, y en la figura 6; $L = 2r$ y $t = 0$, esto nos sugiere que: $t = kr$ la forma de variar k es de tipo fraccionario, es decir; $k = \frac{i}{n}$ donde i representa el i-ésimo cuadrado desde $i = 1$ hasta $i = n$, por lo que:

$$t = \frac{i}{n}r$$

En el i-ésimo cuadrado, se forma un triángulo rectángulo cuya ecuación es:

$$\left(\frac{L_i}{2}\right)^2 + t_i^2 = r^2$$



si despejamos L_i^2, obtenemos:

$$L_i^2 = 4(r^2 - t_i^2) \text{ sustituyendo } t \text{ por } \tfrac{i}{n}r$$

$$L_i^2 = 4\left(r^2 - \left(\frac{ir}{n}\right)^2\right) \quad \Rightarrow \quad L_i^2 = 4\left(r^2 - \frac{i^2r^2}{n^2}\right) \quad \Rightarrow \quad L_i^2 = 4r^2\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$$

Si L_i representa el lado del i-ésimo cuadrado; L_i^2 representa el área de dicho cuadrado, y si además a éste cuadrado le damos una altura $\frac{r}{n}$ el volumen de esta caja es:

$$V_i = \text{área (altura)} = 4r^2\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)\frac{r}{n} = \frac{4r^3}{n}\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$$

Sumando todos los V_i desde $i = 1$ hasta $i = n$, se obtiene el volumen de la mitad de la figura:

$$V_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{4r^3}{n}\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$$

desarrollando esta ecuación:

$$V_m = \frac{4}{n}r^3\left[\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right] \tag{4.7}$$

La primera suma es muy sencilla; es sumar n veces 1 que es igual a n; y la segunda suma es la de los primeros naturales al cuadrado:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

sustituyendo en la ecuación (4.7), obtenemos:

$$V_m = \frac{4r^3}{n}\left[n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]$$

la variable n del denominador de la primera fracción la introducimos dentro del corchete, para obtener:

$$V_m = 4r^3\left[\frac{n}{n} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right]$$

el segundo sumando lo podemos expresar como:

$$V_m = 4r^3\left[\frac{n}{n} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n)(n)(n)}\right] = 4r^3\left[\frac{n}{n} - \frac{1}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right]$$

realizando la división de cada término, tenemos:

$$V_m = 4r^3\left[1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

como n representa el número de cuadrados., entre más cuadrados tomemos la expresión fraccionaria cada vez es más pequeña, es decir; si n es muy grande $\frac{1}{n}$ es muy pequeño, tanto que no influye a la operación, y la fracción la podemos aproximar a cero, obteniendo:

$$V_m = 4r^3\left[1 - \frac{1}{6}(1)(2)\right] = 4r^3\left[1 - \frac{1}{3}\right] = 4r^3\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{8}{3}r^3$$

por lo que el volumen requerido es: $V = 2V_m$

$$V = \frac{16}{3}r^3$$

Parte III

CONCLUSIONES Y BIBLIOGRAFÍA

Capítulo 5

Conclusiones

Habíamos mencionado que una de las preguntas más frecuentes de los alumnos de Bachillerato es ¿Para qué sirven las Matemáticas?. Me parece que esta pregunta encierra: Frustración, Ignorancia y Desinterés.

Frustración porque no hay o hay muy pocos logros académicos, sobre todo una calificación que es lo que más le interesa al alumno.

Ignorancia por que creen que las Matemáticas han sido "inventadas" por una sola persona que no tenía nada que hacer y pués para matar el tiempo las "inventó". No conciben a la Matemática como un "instrumento" útil para la solución de problemas prácticos. No se dan cuenta que todo lo que les rodea: radios, casas, automóviles, televisión, ropa, etc., ha tenido que ser diseñado y en este diseño se utilizó una gran cantidad de: álgebra, trigonometría, geometría, etc. Mucho menos se dan cuenta que la Matemática encierra una belleza tanto en su estructura lógica como en su naturaleza intrínseca de simetría (igualdad). De hecho hay una "teoría" basada en la razón dorada para "medir" la belleza física. (desde el punto de vista occidental).

El Desinterés se manifiesta en tomar una actitud de hacer lo mínimo necesario para aprobar el curso en turno sin molestarse por pensar: cómo puedo aplicar lo aprendido en mi propia experiencia; o diseñar por muy simple que sea un problema que se pueda resolver con los temas vistos en clase.

Todas estas carecterísticas se deben a como ya lo mencioné a que por diferentes razones (sobre todo en el Bachillerato) todo el curso se basa en el contexto de problemas algebráicos.

Espero que este trabajo:

i) Conteste a la pregunta, que se tenga una idea de que la Matemática es aplicada en todo aquello que necesite medirse, y es puesta en práctica en muchas ramas del conocimiento.

ii) Cambie la actitud de los estudiantes hacia la Matemática.

iii) Sea utilizado, si no como texto, sí como un libro de consulta y no termine solamente almacenado en la biblioteca de la Facultad de Ciencias.

Gracias

Bibliografía

[1] Raymond A. Barnett, Michel R. Ziegler; Calculus for Business, Economics, Life Sciences and Social Sciences sixth edition, Dellen Macmillan

[2] Jagdish C. Ayra, Robin W. Lardner; Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía 3ª edición, Prentice Hall

[3] Kenneth L. Whipkey, Mary Nell Whipkey; Introducción al Cálculo en Administración y ciencias Sociales, Editorial Limusa; México 1979

[4] Edwin J. Purcell, Dale Varberg; Cálculo Diferencial e Integral 4ª edición, Prentice Hall

[5] C.H. Edwards, Jr., David E. Penney, Cálculo con Geometría Analítica, 4ª edición, Prentice Hall

[6] Ronald. E. Larson, Robert. P. Hostetler, Bruce. H. Edwards., Cálculo y Geometría Analítica; vol I, 5ª edición. Mc Graw-Hill

[7] J.D. Murray, Mathematical Biology, Second, Corrected Edition. Biomathematics Volume 19., Springer

[8] I.P. Natanson, La Suma de Cantidades Infinitamente Pequeñas, Temas Matemáticos., Editorial Limusa, México 1980

[9] K. Ríbnikov, Historia de las Matemáticas., Editorial Mir Moscú, 1987

[10] Boyce. DiPrima, Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera., 4ª edición, Limusa Noriega Editores, 1998

[11] Dennis. G. Zill, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado., 6ª edición, International Thomson Editores

[12] Philip's World Handbook, Published in the G.B. in 1995 by George Philip Limited

[13] Almanaque Mundial 1994, Editorial América. S.A.

[14] Almanaque Norma 1994, Grupo Editorial Norma Referencia

[15] Gerardo Herrera Corral, Piotr Kielanowski, Katarzyna Skawran, LaTeX en ejemplos. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. Departamento de Ingeniería Eléctrica; No. 63 Serie Azul, Mayo 1992

[16] Bueger, David J. LaTeX for Engineers & Scientist, Mc Graw-Hill Publishing Company

[17] Lipkin, Bernice Sacks, LaTeX for Linux; New York: Springer, 1998