



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CONTROL DE TRACCIÓN Y FRENADO VEHICULAR

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECÁNICO

PRESENTA:

HERNÁNDEZ RIVERA, OMAR

ASESOR: HERNÁNDEZ RIVERA, OMAR

MÉXICO, D. F.

2001



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

6

297520

Control de Tracción y Frenado Vehicular

Omar Hernández Rivera

Agosto 2001

Índice General

1	Introducción	1
2	Desarrollo de Sistemas de Frenado en Automóviles	4
2.1	Sistemas de Frenado más Comunes y Vehículos en los que se Utilizan	5
2.2	Sistema de Frenos Antibloqueo (ABS)	11
2.2.1	¿Cómo trabaja un sistema ABS?	12
2.2.2	¿ Cuáles son y cómo funcionan los componentes de un sistema ABS?	12
2.2.3	¿Por qué el sistema ABS es benéfico?	14
2.3	Características de la Interacción en la Interfase llanta/camino	15
2.4	Modelos Matemáticos de Fricción	17
2.5	Sistemas Dinámicos, Sensibilidad a las Condiciones Iniciales y Estabilidad	20
2.5.1	Puntos de Equilibrio de Sistemas	21
3	Desarrollo y Diseño Conceptual de un Control para Frenado de Emergencia Empleado en Sistemas de Frenado Antibloqueo	25

3.1	Modelado Dinámico del Vehículo	26
3.2	Valor Pico del Coeficiente de Fricción	29
3.3	Par de Frenado	30
3.4	Diseño del Control.	30
3.5	Resultado de Simulaciones	31
4	Análisis del Modelo de un Cuarto de Vehículo	36
4.1	Modelado Matemático	37
4.2	Diseño del Control	40
4.3	Resultado de Simulaciones	43
4.4	Análisis de Resultados	45
4.4.1	Del Control	46
4.4.2	Convergencia Paramétrica	47
4.4.3	Rango	48
5	Propuesta de Modelado Bidimensional de un Automóvil en Condiciones de Tracción y Frenado “Modelo Bicicleta”.	51
5.1	Caso Tractivo	52
5.2	Caso de Frenado	57
5.3	Diseño del Control	60
5.3.1	Caso Tractivo	61

5.3.2	Caso Frenado	64
5.4	Resultado de Simulaciones	67
5.5	Análisis de Resultados	67
5.5.1	Del Control	68
5.5.2	Convergencia Paramétrica	74
5.5.3	Rango	75
6	Conclusiones	76
A	Características del Automóvil.	79
B	Tablas de Resultados.	81

Capítulo 1

Introducción

Al automatizar los sistemas de transporte superficial, el principal objetivo es incrementar su capacidad sin comprometer la seguridad de los viajeros y sin la necesidad de construir nuevos caminos. La seguridad en estos sistemas está ligada principalmente al sistema de frenado de los vehículos, en especial, en condiciones extremas o de emergencia. La seguridad durante el frenado de emergencia cambia con el desempeño del sistema de frenos y la topología de la autopista. Desde la perspectiva de frenado de emergencia existen dos factores que determinan la capacidad de frenado: la fricción entre las llantas y el camino y el par disponible de frenado. Las fuerzas de fricción tienen muchos efectos importantes, tanto deseables como indeseables, en las aplicaciones de ingeniería. Por ejemplo: el funcionamiento adecuado de un automóvil depende de las fuerzas de fricción entre sus neumáticos y el suelo y entre las bandas y las poleas de su motor, pero la fricción entre sus pistones y cilindros ocasiona un desgaste que se debe minimizar por medio de un lubricante.

El problema de diseñar un control de tracción y frenado para vehículos es de gran importancia en la industria automotriz desde el punto de vista de seguridad del viajero. Cuando un automóvil es sometido a acciones de aceleración o frenado, la potencia del motor se transmite a través de las llantas por un fenómeno llamado deslizamiento, que implica que

la velocidad tangencial de la llanta sea distinta de la velocidad del centro de gravedad del vehículo. En la mayoría de los textos de dinámica, el estudio del coeficiente de fricción seca se realiza omitiendo el fenómeno de deslizamiento. Sin embargo, en condiciones de aceleración y frenado, éste debe ser considerado para observar su influencia sobre el coeficiente de fricción y en consecuencia poder conocer el comportamiento dinámico del vehículo con mayor precisión. Toda esta información influye directamente en la seguridad del pasajero ya que, si son conocidas las variables dinámicas del vehículo, se puede predecir el comportamiento bajo frenado de emergencia que indique la distancia que sería recorrida durante el frenado. Esta distancia puede ser comparada con la información obtenida por un sensor colocado en la parte frontal del automóvil, y si ésta medición resulta menor a la que sería recorrida en condiciones de emergencia, se envía una señal de alerta al conductor y con ello se reduce el riesgo de tener un accidente.

En este trabajo se diseña, por medio de técnicas de Lyapunov, un control de tracción y frenado que actúa sobre el par aplicado a las llantas del automóvil para que la velocidad de su centro de gravedad siga una señal de referencia simulando un andar común en autopista, en el cual se presentan periodos de aceleración y frenado donde se hace partícipe el fenómeno de deslizamiento longitudinal. La finalidad de diseñar este control es poder conocer las variables dinámicas del vehículo, como su velocidad longitudinal, velocidad angular de las llantas, aceleración del automóvil y coeficiente de fricción entre las llantas y el camino. Además se tiene la posibilidad de simular el fenómeno en una computadora, y así recopilar una gran cantidad de información del estado del automóvil que puede ser utilizada para predecir la distancia que sería recorrida en el frenado de emergencia. Para diseñar el control se requieren conocer algunas funciones matemáticas, llamadas modelos matemáticos de fricción, que relacionan el deslizamiento y la velocidad del vehículo con el coeficiente de fricción entre las llantas y el camino y parámetros adimensionales que ajusten dicha función a la topología del camino como puede ser asfalto seco, asfalto mojado, hielo, etc.

Para diseñar el control de tracción y frenado, en primera instancia se recurrió a [2], un

trabajo previamente realizado en el cual se diseña un control que determina la presión aplicada a los frenos del automóvil para que éste frene lo más rápido posible bajo condiciones de emergencia. La utilidad de incluir dicho diseño es obtener los parámetros adimensionales mencionados anteriormente para asfalto seco. Además, se extrajo el modelado dinámico del vehículo llamado “modelo de un cuarto de vehículo” empleado para el diseño del primer control de tracción y frenado que será mostrado en el capítulo cuatro. Este modelo considera que la carga normal aplicada a las cuatro llantas es igual. Posteriormente se trabajó sobre un modelado de vehículo más complejo llamado “modelo bicicleta” que distingue las cargas normales sobre las llantas delanteras y traseras e incorpora una fuerza de resistencia para la rodadura de llantas.

Durante el desarrollo del trabajo, en el capítulo dos, se hace una revisión de los sistemas de frenado más comunes y vehículos en los que se utilizan y se documentan los modelos matemáticos más empleados en fricción de llantas. En el tercer capítulo se expone el simulador para frenado de emergencia así como los resultados que éste proporciona. En el cuarto capítulo se trabaja con el modelo de “un cuarto de vehículo” con un análisis de los resultados obtenidos. El quinto capítulo presenta el modelado de “bicicleta” así como sus resultados y un análisis de los mismos. Finalmente en el capítulo seis se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Desarrollo de Sistemas de Frenado en Automóviles

En los primeros vehículos de tracción animal, el frenado se realizaba con un patín de madera recubierto de cuero que se aplicaba contra la rueda metálica en su parte externa y que era suficiente para frenar al circular a velocidades inferiores a 25 km/h.

Al aparecer las bandas neumáticas de rodadura en las ruedas a finales del siglo XIX, las velocidades de los vehículos alcanzaron los 100 km/h, la transmisión se efectuaba por cadena y la frenada se realizaba mediante frenos acollarados de tambor que rozaban sobre las coronas de transmisión, su mando era por una palanca exterior y de varillaje. Al desaparecer la transmisión por cadena en 1907, un pedal manda a los tambores solidarios a las ruedas traseras y una pieza roza sobre el tambor colocado a la salida de la caja de velocidades. Las zapatas eran de fundición, con un punto de articulación y mandadas por una leva.

En 1909 nace la banda inventada por Herbert Frood compuesta por una capa de amianto con hilo de latón entrecruzado impregnado de resina, es lo que se conoce hoy como Ferodo. Teniendo ya el material Ferodo, el sistema es aún deficiente hasta 1922, en que Malcon

Loughead aplicó la fuerza hidráulica al sistema de frenos empleando cilindros y tubos para transmitir la presión de un líquido contra las zapatas de los frenos por primera vez en 1924. Es hasta 1945 en que casi la totalidad de los vehículos son equipados con este sistema.

Siendo cada vez mayores las velocidades de los vehículos surge un nuevo problema, que es el aumento de calor. Se dió como solución en 1953 la incorporación de frenos de disco en un vehículo Jaguar, durante las pruebas de las 24 horas de le Mans. Diez años después surge el primer vehículo equipado con cuatro frenos de disco: el Renault 8. En 1955 el primer vehículo en aplicar frenos de disco en Francia fue Citroen en el tren delantero.

A finales del siglo XX, los automóviles se enfrentan a dos desafíos fundamentales: por un lado, aumentar la seguridad de los ocupantes para reducir así el número de víctimas de los accidentes de tránsito, ya que en los países industrializados constituyen una de las primeras causas de mortalidad en la población no anciana; por otro lado, aumentar su eficiencia para reducir el consumo de recursos y la contaminación atmosférica, de la que son uno de los principales causantes.

2.1 Sistemas de Frenado más Comunes y Vehículos en los que se Utilizan

En general, se puede hablar de cuatro tipos de frenos en vehículos dependiendo de la forma para transmitir la fuerza de frenado, los cuales se describen a continuación:

1. **Hidráulico:** Es aquel en el cual la fuerza de frenado se transmite desde el pedal que presiona el conductor hasta las ruedas con base en el principio de multiplicación de la fuerza hidráulica (ver fig. 2.1). Este sistema es el más común en vehículos livianos y semipesados (hasta 5 toneladas).

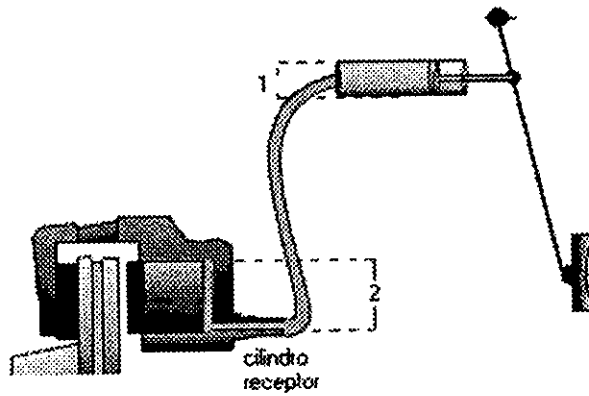


Figura 2.1: Sistema simple de frenado hidráulico.

$$\begin{aligned}
 P_1 &= P_2 \\
 \frac{F_1}{A_1} &= \frac{F_2}{A_2} \\
 F_2 &= \frac{A_2}{A_1} F_1
 \end{aligned}$$

2. **Neumático:** El pistón que presiona las zapatas contra el disco que se encuentra dentro de la rueda es accionado por aire comprimido y es aplicado a vehículos pesados a partir de 6 toneladas.
3. **Mecánico:** Este sistema se vale de varillas para detener o mantener en reposo el automotor. Este tipo de freno es el más utilizado como freno de parqueo o estacionamiento en vehículos pequeños y medianos.
4. **De Motor:** Es usado en vehículos pesados para controlar la velocidad en los descensos, evitando que en la carrera de compresión de los pistones del motor se aproveche toda la potencia.

Freno Hidráulico.

El sistema de frenos es básicamente un amplificador de la fuerza que el conductor aplica sobre el pedal, transmitiéndola a los frenos para detener las ruedas.

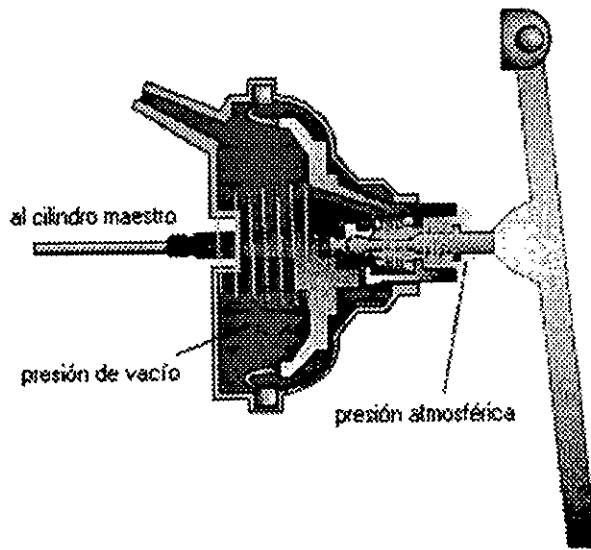


Figura 2.2: Servofreno o "booster"

El primer amplificador que se encuentra es el pedal que dependiendo de su mayor o menor longitud amplifica la fuerza. El segundo elemento amplificador es el servofreno o "booster" (ver fig. 2.2), el cual, ayudado por el motor crea una diferencia de presiones, vacío en un lado y presión atmosférica al otro; al accionar el freno colabora con el esfuerzo del conductor. Entre mayor sea el diámetro del servofreno mayor será la amplificación. Como tercera ayuda está el sistema hidráulico comprendido entre el cilindro maestro (fig. 2.3) y los cilindros receptores, a mayor diferencia entre las áreas de los pistones del cilindro maestro y de los pistones del cilindro de rueda, mayor amplificación se obtendrá. Entre más grande sea el diámetro de los cilindros en las ruedas y más pequeño el de la bomba, la amplificación de la fuerza de frenado es mayor. Al llegar al final del sistema encontramos que las zapatas son otro amplificador que actúan como una palanca mecánica y su efecto es directamente proporcional a la longitud, entre el punto de apoyo (anclaje) y el punto en que se aplica la fuerza (del pistón). El elemento que se encuentra en movimiento es la campana en conjunto con la rueda y sobre aquella actuarán las zapatas para detener el movimiento (ver fig. 2.4). A mayor diámetro de campana mayor potencia.

En el freno de disco, el elemento que gira es el rotor (ver fig. 2.5) y contra él se apoyarán las pastillas para inmovilizarlo.

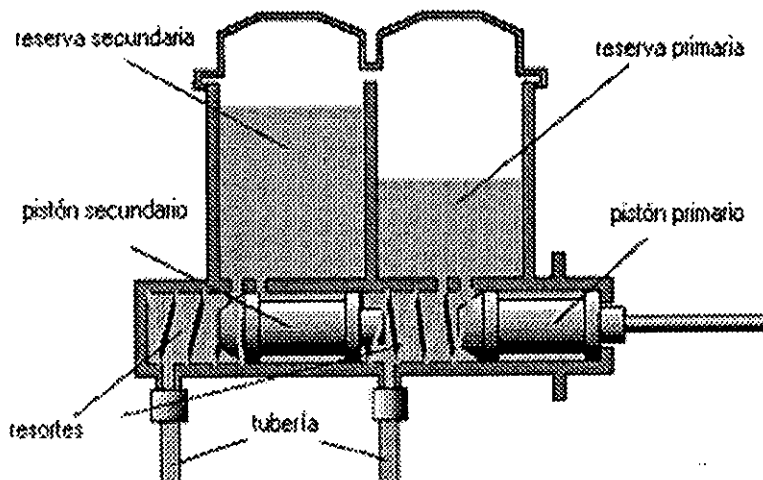


Figura 2.3: Cilindro maestro

Freno Neumático.

El sistema neumático se instala en vehículos pesados, a partir de seis toneladas, y la transmisión del esfuerzo del conductor hasta las ruedas se hace al liberar aire comprimido.

Los componentes básicos del sistema neumático son:

1. **Compresor:** Es el encargado de tomar aire de la atmósfera y almacenarlo en los tanques instalados para tal fin.
2. **Gobernador:** Cuando se llega a la presión máxima establecida (generalmente 120 PSI) el gobernador suspende el paso de aire hacia el tanque impidiendo así una sobrepresión. Cuando la presión disminuye entre 10 y 15 PSI del nivel máximo, permite nuevamente el flujo de aire hacia el tanque.
3. **Tanque o Depósito de Reserva:** Mantienen una presión máxima de 120 PSI, el tamaño y cantidad varía de acuerdo a la longitud, número de líneas y tamaño de las cámaras.

Un depósito normalmente tiene en su parte inferior una válvula para drenar el agua y el lubricante acumulado.

4. **Válvula de Seguridad:** Permite la salida de aire cuando se sobrepasa la máxima presión establecida por falla del gobernador (150 PSI).
5. **Válvula Reguladora de Pedal:** Es la compuerta del aire comprimido. Cuando el conductor acciona el pedal abre el paso de aire comprimido hacia las cámaras en cada rueda. Al mantener una fuerza constante sobre el pedal se cierra el paso de aire controlando de esta forma la frenada a voluntad, ya que al ejercer una mayor fuerza se abre nuevamente la válvula. Al liberar el pedal se cierra nuevamente el paso de aire hacia las cámaras y conectan las líneas de conducción con la atmósfera a través de la válvula reguladora permitiendo la descompresión de la tubería.
6. **Cámara de Aire:** Convierte la energía del aire comprimido en energía mecánica transmitiéndola a la leva de ajuste (candado) la cual aplica las bandas contra la campana para detener su movimiento. En ciertos vehículos el aire liberado por la válvula del pedal no es suficiente para actuar los frenos traseros. En este caso es necesario acondicionar una línea adicional desde el tanque hasta una válvula cercana a las ruedas traseras que entre a colaborar con la línea principal en el suministro de aire a las cámaras traseras. Esta válvula es conocida como relevadora o "relay".

Freno Mecánico.

El freno de mano o de parqueo está diseñado para mantener en reposo el vehículo sobre una pendiente del 18% y en caso de emergencia producir una desaceleración de 2.75 m/s^2 .

La transmisión de la fuerza del conductor es en forma mecánica por varillas y palancas. Actúa generalmente sobre las ruedas traseras aprovechando el freno de servicio, aunque en algunos casos se encuentra en las ruedas delanteras o sobre el eje de la transmisión.

En los automóviles se presentan generalmente dos frenos: el freno de mano, o de emergencia, y el freno de pie o pedal. El freno de emergencia suele actuar sólo sobre las ruedas traseras o sobre el árbol de la transmisión. El freno de pie de los automóviles modernos siempre actúa sobre las cuatro ruedas.

En los automóviles existen principalmente dos sistemas de frenado:

1. Los frenos de tambor.
2. Los frenos de disco.

Los frenos de tambor o balatas (fig. 2.4), que es el sistema antiguo y ahora se usa en algunos autos y sólo en las ruedas traseras. El freno de tambor se usa principalmente en los autos sin sistema de frenado antibloqueo que será explicado posteriormente. El sistema funciona con un tambor (un cilindro ancho) que gira con la rueda. Al presionar el pedal se mueve un sistema de resortes que hacen que unos metales toquen al tambor y esto produce un gran roce que frena al auto.

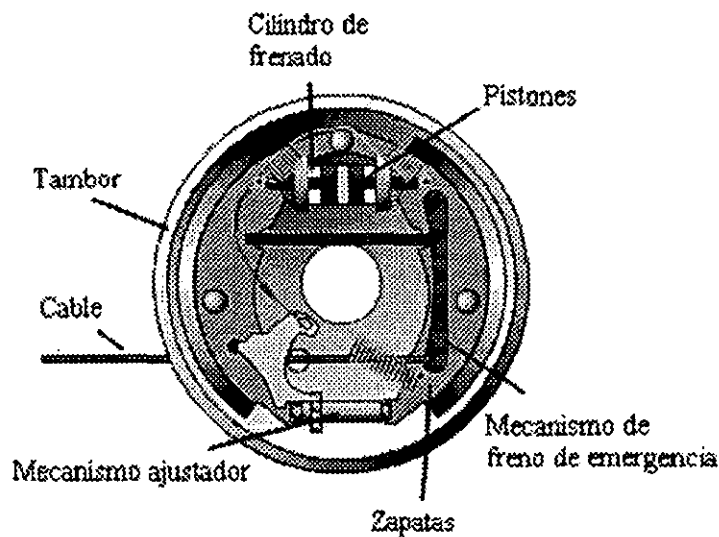


Figura 2.4: Freno de tambor.

Los frenos de disco (fig. 2.5) funcionan con un disco acoplado con la rueda (de ahí su nombre). Envuelto, en una pequeña parte, por pastillas (normalmente dos) que rozan al disco frenándolo junto con la rueda. Las pastillas son movidas por una serie de pistones que se mueven con la presión del líquido de frenos. Este sistema es más eficiente que el

anterior, además algunos discos son autoventilados (se enfrían mientras giran). También es el sistema que mayormente permite la existencia del sistema antibloqueo.

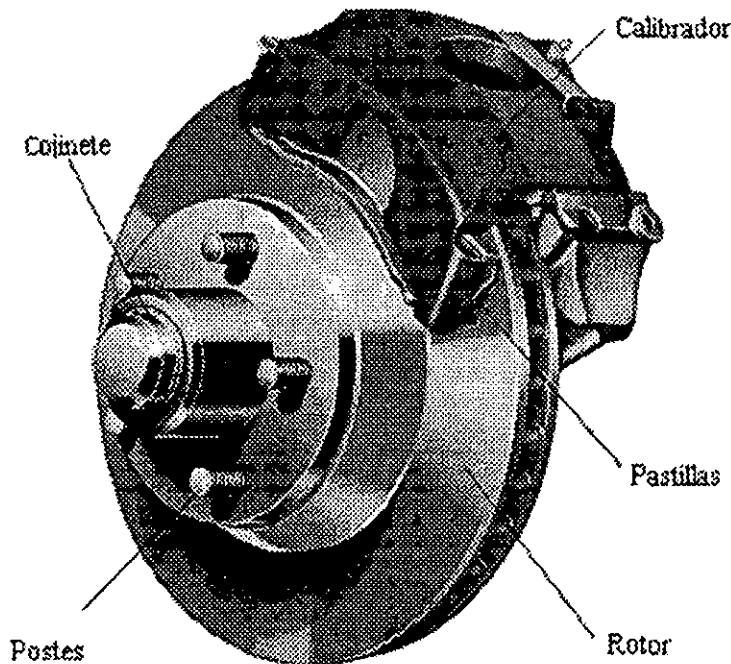


Figura 2.5: Freno de disco.

2.2 Sistema de Frenos Antibloqueo (ABS)

Un sistema de frenado antibloqueo (ABS) controla automáticamente la presión del líquido de frenos, evitando que las ruedas se bloqueen cuando se ejerce excesiva presión sobre el pedal, generalmente en situaciones de alto riesgo, optimizando de tal manera el funcionamiento del sistema y permitiendo al conductor, al mismo tiempo, mantener la estabilidad y control del vehículo.

Las siglas que lo identifican provienen de su denominación en idioma inglés : Antilock Braking System. Sin embargo, autores españoles han castellanizado la acepción, denominándolos SFA (Sistema de Frenos Antibloqueo). Se le suele calificar como sistema reactivo pues funciona reaccionando frente a una o más ruedas bloqueadas.

2.2.1 ¿Cómo trabaja un sistema ABS?

Los conductores están acostumbrados a oír un ruido chirriante cuando alguien, conduciendo a alta velocidad, frena repentinamente. Esto sucede cuando una rueda se bloquea y resbala sobre la superficie del camino.

A partir del uso del ABS, al evitarse el bloqueo de ruedas no hay más chirridos. La ausencia de ese sonido indica que el sistema está trabajando. Todo conductor sabe por experiencia que es mejor “bombear” el freno cuando debe bajar bruscamente la velocidad porque si aprieta a fondo las ruedas se bloquean y el coche se desliza sin control.

El sistema ABS a través de sus sensores efectúa el mismo bombeo pero a una frecuencia mucho mayor que la que se logra actuando sobre el pedal.

Los sensores de velocidad de las ruedas detectan el bloqueo y envían señales para modificar la presión de frenado que varía rápidamente adaptándose al requerimiento a que se le somete. Los sistemas ABS comúnmente usados en los vehículos modernos realizan la operación de disminuir y aumentar la presión de frenado unas 15 veces por segundo.

Cuando se presiona el pedal en un automóvil equipado con frenos antibloqueo algunos conductores notan una sensación pulsante. Esto es debido a que los frenos están haciendo su propio “bombeo”. Por ello se recomienda no bombear el pedal cuando el automóvil está equipado con ABS, debido a que disminuirá significativamente la eficacia de los frenos.

2.2.2 ¿ Cuáles son y cómo funcionan los componentes de un sistema ABS?

Un típico sistema antibloqueo se compone y opera como a continuación se indica :

1. Unidad hidráulica, la cual está compuesta por: Cilindro Maestro, en algunos casos servofreno hidráulico y un bloque de electroválvulas encargadas de la regulación de

presión hacia los cilindros de frenos cuando entra a actuar el ABS.

2. Una computadora electrónica (panel), encargada de recibir las señales de las ruedas y avisar al bloque de electroválvulas cuando se debe actuar a la vez que monitorea el sistema cada vez que se abre el interruptor de encendido, para constatar que está funcionando en forma correcta o alertar si se detecta alguna falla mediante una señal luminosa en el tablero. La computadora electrónica está generalmente ubicada detrás del asiento trasero.
3. Sensores o captadores de velocidad, son cables que van desde las ruedas y/o del diferencial de la transmisión hasta la computadora electrónica encargados de llevar la información hasta la computadora sobre la velocidad de las ruedas mediante señales de corriente variable.

Los sensores de velocidad, vinculados a las ruedas, miden su velocidad y transmiten la información a una unidad electrónica de control. Con esta información la unidad electrónica de control determina cuando una rueda está a punto de bloquearse o bloqueada y activa el modulador de presión del freno, también detecta cualquier desperfecto presente en el sistema.

El mencionado modulador reduce, retiene, y restaura presión a una o más vías con independencia del esfuerzo del conductor sobre el pedal.

Algunos sistemas controlan únicamente las dos ruedas delanteras y otros las cuatro ruedas del vehículo. En general los sistemas de control sobre las cuatro ruedas proveen de mayor estabilidad y control durante el frenado a expensas de un mayor precio.

En los sistemas más evolucionados, en caso de un desperfecto en el sistema antibloqueo, una lámpara de advertencia situada en el panel de instrumentos indica al conductor que el ABS necesita reparación. Los frenos normales del vehículo continúan funcionando.

2.2.3 ¿Por qué el sistema ABS es benéfico?

La primer ventaja a destacar es que los sistemas antibloqueo permiten que el automotor se detenga en distancias más cortas. Esto se explica porque al mejorar el contacto neumático/suelo, se mantiene un mayor coeficiente de fricción y como consecuencia se logra una mayor eficiencia de frenado. Sobre pavimento húmedo, el sistema permite que el agua drene por las estrías y no se forme la cuña de agua que caracteriza al hidropneumático.

La segunda mejora, no menos importante, se pone de manifiesto cuando en situaciones extremas los conductores ejercen la máxima presión posible sobre el pedal de freno.

En vehículos provistos de sistemas estándar de frenado es común que durante una frenada de pánico sobre pavimento seco las ruedas delanteras se bloqueen. Cuando la calzada está mojada o resbaladiza, ese riesgo aumenta significativamente especialmente a velocidades inadecuadas o cuando las estrías de los neumáticos se encuentran desgastadas. Cuando esto ocurre el conductor pierde el control del vehículo que no responde a los mandos del volante y se desliza en la dirección y sentido que llevaba al iniciarse el bloqueo. Al evitar ese bloqueo, el sistema ABS permite que el conductor mantenga bajo control el direccionamiento del vehículo, al mismo tiempo que lo decelera, optimizando de esa manera la conducción en situaciones de riesgo.

El ABS también permite que funcione el sistema antiderrape, ya que cuando otros sensores especializados detectan que el auto está derrapando aplica los frenos en las ruedas necesarias.

2.3 Características de la Interacción en la Interfase llanta/camino

La fricción es la resistencia del movimiento relativo entre dos cuerpos en contacto. Si no hubiese fricción, jamás sería posible parar un cuerpo en movimiento. La fuerza de fricción entre la llanta y el camino juega un papel muy importante en el desempeño dinámico de cualquier vehículo. El par de tracción no podría acelerar al vehículo si no existiera suficiente fricción entre la llanta y el camino, asimismo el par de frenado generado por el conductor mediante el pedal no actuaría correctamente sin la existencia de suficiente fricción.

En el campo automotor, se denomina acción de frenado, cuando se aplica una fuerza para retardar o parar un cuerpo en movimiento.

Cuatro factores gobiernan el aumento de fricción desarrollado en la “acción de frenado”:

1. La presión.
2. La superficie de contacto.
3. La temperatura, resultado de la fricción.
4. El coeficiente de fricción.

Presión.

Cuando se aplica presión a dos superficies en fricción, una de estas superficies tenderá a asegurarse fuertemente a la otra y resistirá cualquier movimiento entre ellas.

Superficie de Contacto.

El tamaño de las superficies en contacto es un factor que influye básicamente en el desgaste del material de fricción, en efecto, 50 centímetros cuadrados de superficie de fricción se desgastan dos veces más rápido que 100 centímetros cuadrados.

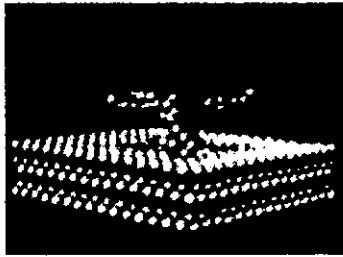


Figura 2.6: Enlace molecular entre una superficie de oro y una de platino.

Temperatura.

La temperatura es el resultado de la fricción; los frenos utilizados en un vehículo, transforman energía cinética en calor cuando el vehículo está siendo frenado. Así, los frenos deben ser dimensionados para absorber o disipar el calor generado durante la acción de frenado.

Coefficiente de Fricción.

Un cuarto factor es la calidad del material usado en las superficies de fricción. Algunos materiales requieren más fuerza para moverlos sobre una superficie que otros, aunque la presión aplicada sobre ellos sea idéntica, lo que significa que los diferentes materiales tienen diferentes características de fricción. Esto es conocido como coeficiente de fricción y puede definirse así:

"La fuerza requerida para mover un objeto sobre una superficie, dividida por el peso del objeto que actúa en la superficie."

De esa manera determinamos, que tratándose de frenos, si el coeficiente de fricción fuese alto, el frenado sería violento y causaría el bloqueo prematuro de las ruedas. Por otro lado, el coeficiente de fricción fuese muy bajo, se necesitaría excesiva presión en los frenos para parar el vehículo. Las fuerzas de fricción surgen en parte debido a las rugosidades o asperezas de las superficies en contacto. A escala aún menor, las superficies tienden a formar enlaces atómicos que las adhieren entre sí como lo muestra la figura 2.6.

2.4 Modelos Matemáticos de Fricción

Generalmente el comportamiento del coeficiente de fricción se expresa en función del deslizamiento longitudinal, y otros parámetros como la fuerza normal sobre las llantas y la velocidad del vehículo. El deslizamiento longitudinal se define como el cociente de la velocidad relativa del centro de gravedad del vehículo respecto a la velocidad lineal del neumático entre la velocidad del centro de gravedad del vehículo. La figuras 2.7 y 2.8 representan el comportamiento típico del coeficiente de fricción en función del deslizamiento para varios tipos de camino y velocidades, respectivamente.

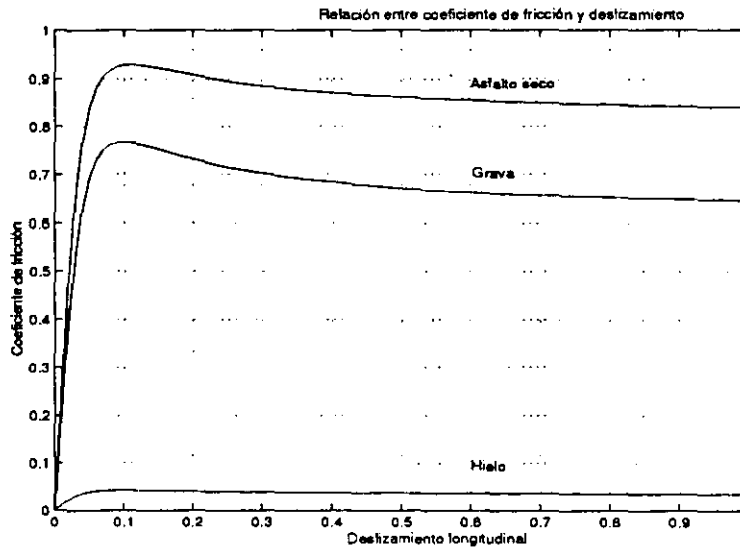


Figura 2.7: Comportamiento del coeficiente de fricción en función del deslizamiento.

Como podemos observar en la gráfica 2.8, para deslizamientos pequeños el coeficiente de fricción o crece junto con el deslizamiento (λ) hasta alcanzar su máximo valor, el cual se denomina μ_0 , y posteriormente disminuye conforme aumenta el deslizamiento. Este valor máximo es de suma importancia ya que en esta condición se obtiene el máximo frenado, si el deslizamiento sobrepasa el valor de deslizamiento que corresponde a μ_0 y la presión en los frenos se mantiene, se produce como resultado el bloqueo de la llanta. Existen varios modelos matemáticos que representan el comportamiento del coeficiente de fricción ante el deslizamiento longitudinal, uno muy empleado es el modelo propuesto por

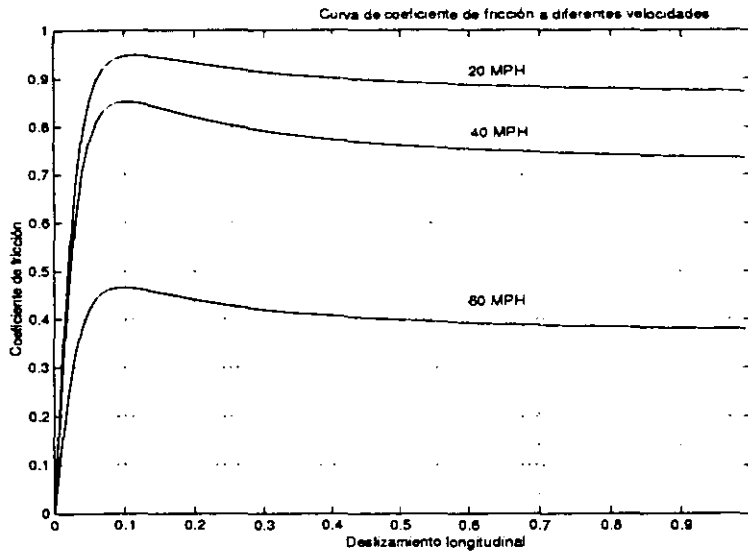


Figura 2.8: Comportamiento del coeficiente de fricción en función del deslizamiento.

Buckhardt [4]:

$$\mu = C_1(1 - e^{-C_2\lambda_u} - C_3\lambda_u)e^{-C_4v}$$

Donde C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son constantes a determinar, λ_u representa el deslizamiento y v la velocidad del centro de gravedad del vehículo.

Otro modelo empleado es:

$$\mu = \mu_0 \operatorname{sen}(C \arctan(Bs))$$

Donde μ_0 es el valor máximo del coeficiente de fricción, s el deslizamiento y B y C son constantes a determinar.

Uno de los modelos más conocidos es el modelo de Pacejka [1], también conocido como la "fórmula mágica". Este modelo ha mostrado adaptarse satisfactoriamente a datos experimentales bajo condiciones particulares de velocidad lineal y angular constantes. El modelo de Pacejka tiene la forma :

$$\mu(\lambda) = c_1 \operatorname{sen}(c_2 \arctan(c_3 \lambda - c_4(c_3 \lambda - \arctan(c_3 \lambda))))$$

Donde c_i son los parámetros que caracterizan el modelo y λ el deslizamiento. Estos parámetros pueden ser identificados mediante la equiparación de datos experimentales.

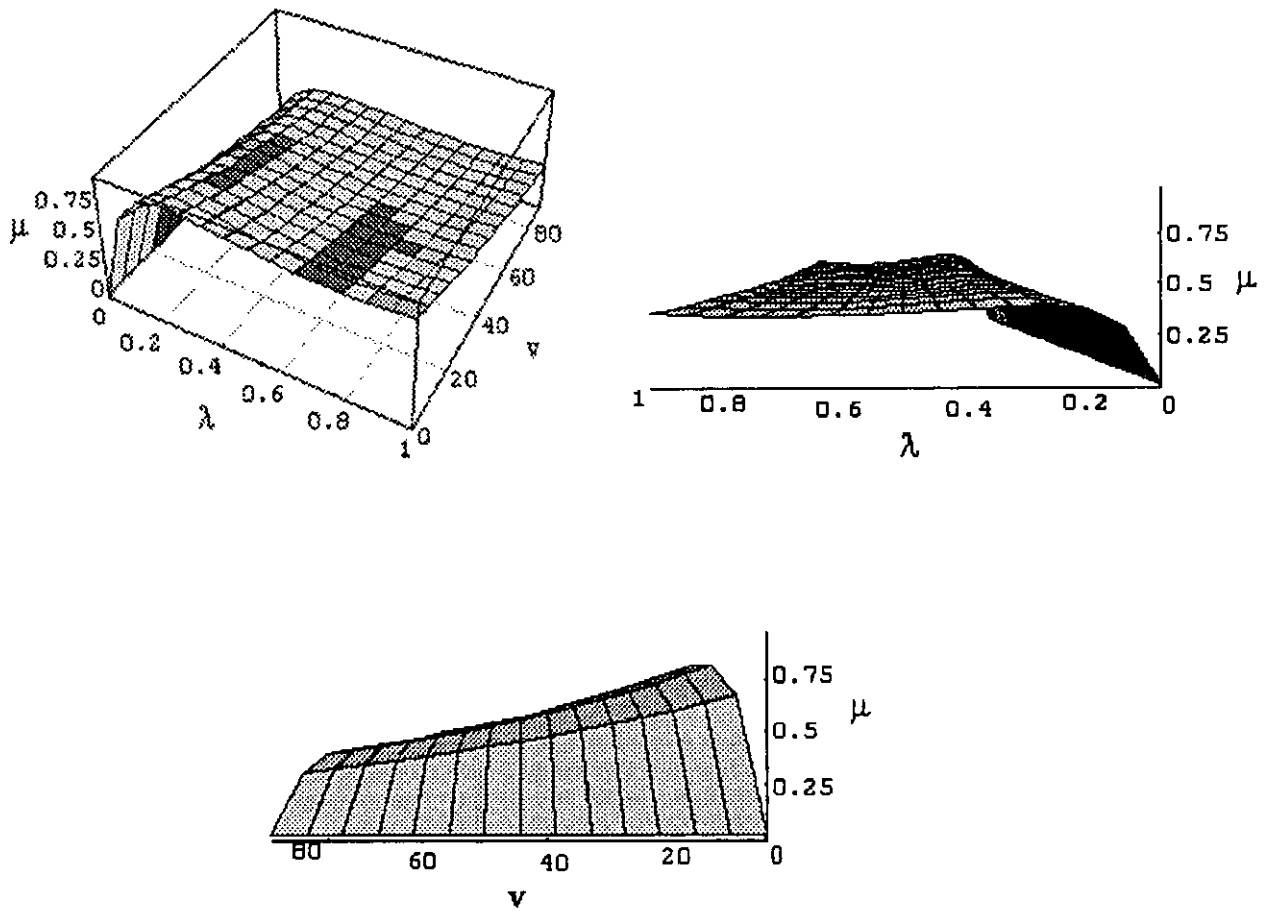


Figura 2.9: Diferentes vistas de la gráfica 2.8.

Los coeficientes c_i dependen de las características de la llanta, como por ejemplo composición, marcas, textura, profundidad de la marca, presión, temperatura, tipo de camino y de las condiciones de operación del vehículo, como la carga y la velocidad.

La fuerza de fricción es expresada como el cociente entre la fuerza longitudinal que actúa sobre la llanta y la fuerza normal. En realidad resulta difícil medir directamente la fuerza normal sobre la llanta, por lo que tiene que recurrirse a algún método alternativo como la ley de Euler que relaciona la fuerza de fricción y los pares de aceleración o frenado con la aceleración angular de la llanta, con la facilidad de que ésta puede ser medida. Asimismo ambos pares resultan difíciles de medir directamente, pero con la gran ventaja de que pueden ser estimados.

2.5 Sistemas Dinámicos, Sensibilidad a las Condiciones Iniciales y Estabilidad

Muchos sistemas dinámicos, cualquiera que sea su naturaleza (físicos, químicos, electromecánicos), son extremadamente sensibles a los valores de sus condiciones iniciales, tales como la posición, velocidad, etcétera, es decir, con un pequeño cambio existe gran variación a la respuesta del sistema. Esto pone un límite a la posibilidad de predecir el estado futuro del sistema, ya que dicha predicción está basada en la suposición de que las causas pequeñas producen efectos también pequeños y que, por lo tanto, un pequeño cambio en los valores iniciales de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema, producirá un cambio proporcionalmente pequeño en la solución de estas ecuaciones que nos da a conocer el estado futuro.

Corresponde aquí distinguir entre ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. La solución de una ecuación diferencial se denomina integración; la clase más importante entre las ecuaciones integrables es la de las ecuaciones lineales. La familia de las ecuaciones diferenciales lineales tiene la propiedad de que la suma de dos soluciones, dan como resultado también una solución. En general, las ecuaciones lineales son mucho más fáciles de resolver que las no lineales, y por ello han sido las más estudiadas; además, cuando un fenómeno físico requería ser expresado mediante una ecuación no lineal de difícil solución, el procedimiento usual era linealizarla eliminando aquellos términos que influían menos, es decir, se hacía una aproximación lineal. Pero en la naturaleza, la mayoría de los fenómenos son expresables mediante ecuaciones no lineales. Recientemente fue posible encarar la resolución numérica de cualquier ecuación no lineal con la aparición de las computadoras, ya que éstas permiten el análisis numérico de todo tipo de ecuación por complicada que sea. Hoy se puede entonces, gracias a las computadoras, estudiar los sistemas dinámicos cuyo comportamiento corresponde a ecuaciones no lineales, y que son precisamente los que presentan sensibilidad a las condiciones iniciales.

2.5.1 Puntos de Equilibrio de Sistemas

Un sistema físico puede encontrarse en equilibrio estable o en equilibrio inestable. Lo que caracteriza a estas situaciones es el comportamiento del sistema cuando es apartado aunque sea muy poco del estado de equilibrio inicial.

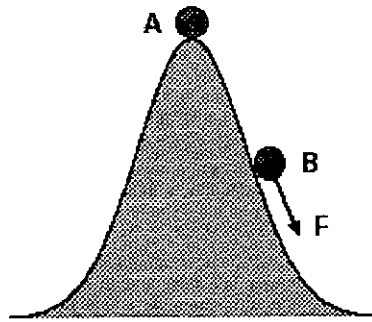


Figura 2.10: Equilibrio inestable.

En la figura 2.10, podemos ver el caso de un sistema en equilibrio inestable (con frecuencia se dice “equilibrio dinámicamente inestable”), la bola en el punto (A) no experimenta ninguna fuerza y puede permanecer en su posición indefinidamente. Sin embargo si la apartamos de esta posición aparecerá de inmediato una fuerza (en este caso el peso) que la impulsará rápidamente lejos del equilibrio inicial (B), porque esta fuerza tiene la misma dirección y sentido del apartamiento original.

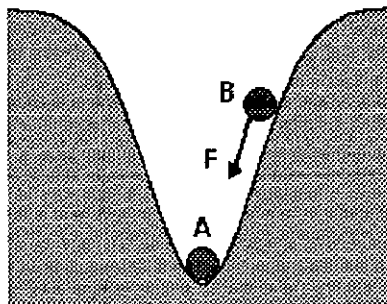


Figura 2.11: Equilibrio estable.

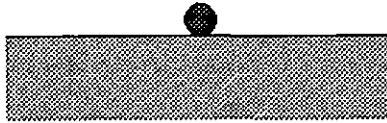


Figura 2.12: Equilibrio indiferente.

La figura 2.11 ilustra la situación de un sistema en equilibrio dinámicamente estable. Nuevamente la bola que se encuentra en el fondo del pozo (A) no sufre ninguna fuerza, pero un apartamiento de esa posición hace aparecer fuerzas (peso en este caso) las cuales al apuntar en dirección contraria al apartamiento tienden a devolver a la bola a su posición de equilibrio inicial.

Existe un tercer caso y es el de equilibrio cinemáticamente inestable o “equilibrio indiferente” de la figura 2.12. Otra vez la bola que representa nuestro sistema no experimenta ninguna fuerza, pero en esta oportunidad, un pequeño apartamiento no hace aparecer nuevas fuerzas que la aparten o acerquen a su posición inicial, la bola quedara en el punto donde la situemos o, de aplicarse alguna fuerza externa, continuará moviéndose por inercia en la dirección de esa fuerza.

El modo en que se determina en que estado de equilibrio se halla un sistema mecánico, por ejemplo, es muy simple, lo apartamos de la posición original y observamos en que dirección apuntan las fuerzas que aparecen (si es que aparecen), sin embargo para sistemas complejos este sencillo método puede encerrar serias complicaciones matemáticas. Para resolver este tipo de problemas se recurre a la teoría de estabilidad de Lyapunov la cual centra su estudio en los siguientes lineamientos:

1. Permite que puntos de equilibrio de sistemas no lineales sean clasificados en estables o inestables.
2. Permite estudiar la estabilidad de puntos de equilibrio en sistemas dinámicos sin la

necesidad de que sean solucionados.

3. Centra su estudio en consideraciones energéticas.

Para comprender las consideraciones de estabilidad con base en el criterio de Lyapunov, se requieren las siguientes definiciones:

Función Positiva Definida.- Función positiva en el espacio de estados excepto en el origen. En el origen la función es igual a cero.

Función Negativa Definida.- Función negativa en el espacio de estados excepto en el origen. En el origen la función es igual a cero.

Función Positiva Semidefinida.- Función positiva en el espacio de estados excepto en el origen. La función es igual a cero en el origen y en otros puntos.

Algunas de las consideraciones en las cuales se basa esta teoría se enumeran a continuación:

1. Intuitivamente, un sistema físico sólo puede almacenar una cantidad finita de energía.
2. Si podemos mostrar que esa energía siempre se disipa excepto en el origen, entonces el sistema debe alcanzar su equilibrio en el origen.
3. La energía debe ser una función positiva definida del estado del sistema.
4. La tasa de variación de la energía respecto al tiempo debe ser una función negativa definida del estado del sistema.

El criterio de estabilidad de Lyapunov se resume en los siguientes puntos:

1. El origen es un punto de equilibrio estable si existe una función positiva definida $V(X)$ tal que $\dot{V}(X) \leq 0$, donde X representa el estado del sistema. Si se cumplen ambas condiciones $V(X)$ es una función de Lyapunov.

2. La existencia de una función de Lyapunov para el sistema de interés es suficiente para probar la estabilidad del mismo.
3. Si $\dot{V}(X)$ es una función negativa definida, el punto de equilibrio del sistema es asintóticamente estable. Lo cual significa que conforme pase el tiempo el sistema tiende al origen, su punto de equilibrio.

Capítulo 3

Desarrollo y Diseño Conceptual de un Control para Frenado de Emergencia Empleado en Sistemas de Frenado Antibloqueo

Como se mencionó en la introducción, este trabajo pretende dar continuidad al diseño de un control que actúa sobre la presión de frenado y que fue implementado para funcionar en automóviles que cuentan con sistema de frenado antibloqueo, cuya finalidad es incrementar la seguridad y el mejoramiento de dicho sistema para reaccionar en situaciones de frenado repentino, lográndolo de una manera rápida y eficiente. Esto se logra proporcionando la presión requerida para mantener el deslizamiento de las llantas en el punto en el cual se obtiene el máximo coeficiente de fricción entre la llanta y el camino. Dicha continuidad se centra en proporcionar información al control de frenado de emergencia acerca del estado del automóvil (velocidad longitudinal y relativa del automóvil) en un tiempo específico de su andar en autopista.

En este capítulo, con el fin de mostrar el modelo del automóvil llamado “cuarto de

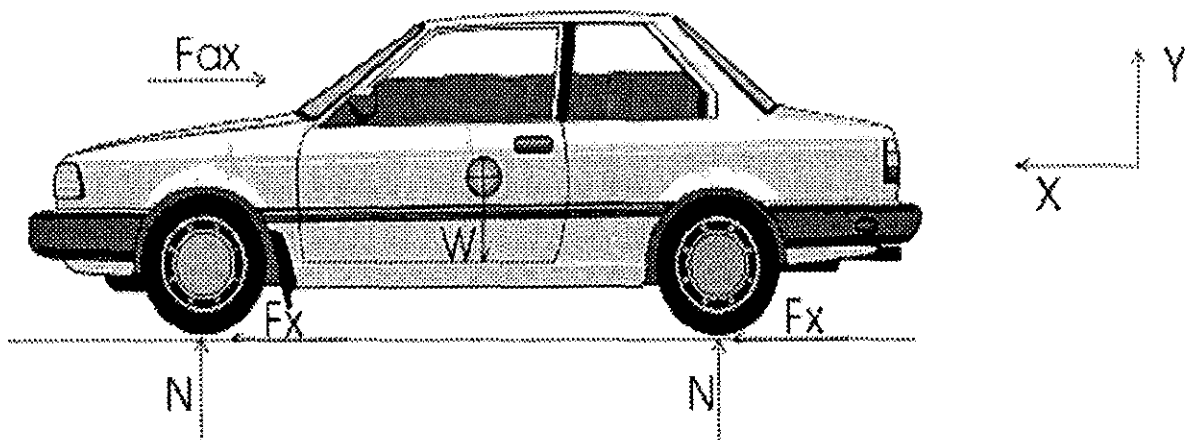


Figura 3.1: Diagrama de cuerpo libre del vehículo.

vehículo”, un método de estimación del coeficiente de fricción y el esquema del diseño del control para frenado de emergencia. Se transcribirá el trabajo citado en la referencia [2].

3.1 Modelado Dinámico del Vehículo

El presente modelado llamado “Un cuarto de vehículo” considera que la fuerza normal ejercida por el camino es igual para las cuatro llantas y sólo analiza fuerzas que actúan longitudinalmente sobre el vehículo, es decir, supone que se mueve en línea recta. El diagrama de cuerpo libre del vehículo se muestra en la figura 3.1.

Empleando la segunda ley de Newton obtenemos

$$4F_x - F_{ax} = m\dot{v} \quad (3.1)$$

Donde F_x es la fuerza de fricción sobre la superficie de la llanta que se encuentra en contacto con el camino, F_{ax} representa la fuerza de arrastre sobre el vehículo, m la masa del mismo y v su velocidad.

La dinámica rotacional de la llanta puede ser modelada con la ley de Euler, partiendo del diagrama de cuerpo libre como se muestra en la figura 3.2

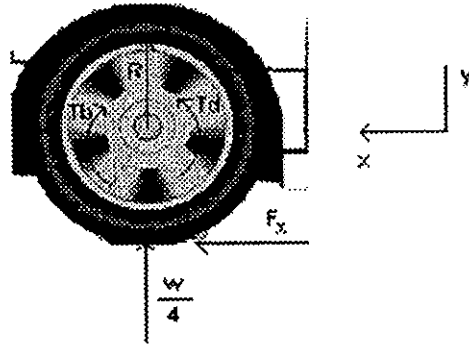


Figura 3.2: Diagrama de cuerpo libre de la llanta.

$$\tau_d - \tau_b - F_x R = I \dot{\omega} \quad (3.2)$$

donde ω es la velocidad angular de la llanta, I el momento de inercia de la misma, τ_d el par de tracción y τ_b el par de frenado.

La velocidad tangencial de la llanta y la velocidad lineal del vehículo pueden relacionarse mediante su velocidad relativa s

$$s = v - \omega R \quad (3.3)$$

Definamos al deslizamiento como el cociente de la velocidad relativa entre la velocidad del centro de gravedad del vehículo : $\lambda = s/v$

Derivando respecto al tiempo la ecuación (3.3) obtenemos

$$\dot{s} = \dot{v} - \dot{\omega} R \quad (3.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.1) y (3.2) en la ecuación (3.4) se obtiene

$$\dot{s} = -\frac{R}{I} \tau_d + \frac{R}{I} \tau_b + \frac{R^2}{I} F_x + \frac{4}{m} F_x - \frac{F_{ax}}{m} \quad (3.5)$$

La fuerza de arrastre se expresa como

$$F_{ax} = \frac{1}{2} \rho C_d A v^2 = C_{ax} v^2 \quad (3.6)$$

Donde: C_d representa el coeficiente de arrastre, ρ la densidad del aire y A el área proyectada de la parte frontal automóvil.

Durante el frenado la fuerza de fricción tiene un sentido opuesto al movimiento

$$F_x = -\mu F_n = -\mu \frac{mg}{4} \quad (3.7)$$

Donde μ es el coeficiente de fricción, y F_n la fuerza normal sobre cada llanta.

Sustituyendo las ecuaciones (3.6) y (3.7) en las ecuaciones (3.1) y (3.5) obtenemos que la aceleración y la derivada respecto al tiempo de la velocidad relativa pueden ser expresadas mediante las siguientes ecuaciones, que modelan el estado del automóvil

$$\dot{s} = -(a + c)\mu - b - dv^2 + e\tau_b \quad (3.8)$$

$$\dot{v} = -c\mu - dv^2 \quad (3.9)$$

donde: $a = \frac{R^2}{4I}mg$, $b = \frac{R}{I}\tau_d$, $c = g$, $d = \frac{C_{ax}}{m}$, $e = \frac{R}{I}$

Despejando el coeficiente de fricción de la ecuación (3.9) obtenemos

$$\mu = -\frac{\dot{v}}{c} - \frac{d}{c}v^2 \quad (3.10)$$

Expresión que permite obtener el coeficiente de fricción partiendo del conocimiento de la velocidad del vehículo y su aceleración, las cuales pueden ser medidas o estimadas, y mediante el coeficiente aerodinámico C_{ax} el cual se supone conocido.

El modelo de Buckhardt, que comunmente es empleado para obtener el comportamiento del coeficiente de fricción en función del deslizamiento y la velocidad, es de la siguiente forma

$$\mu = C_1(1 - e^{-C_2\lambda_u} - C_3\lambda_u)e^{-C_4v} \quad (3.11)$$

donde $\lambda_u = |\lambda|$ y se emplea con el supuesto de que la carga normal sobre las llantas permanece constante.

En la ecuación (3.11), debido al término de la velocidad, la estimación de parámetros no es completamente lineal, es decir no podemos manipularla algebraicamente para presentarla como el producto de dos vectores: un vector en el cual se incluyan mediciones de variables y un vector que incluya los parámetros a estimar. Por ello este trabajo propuso la siguiente aproximación hacia la ecuación anterior

$$\mu = p_1 e^{-p_2 \lambda_u} \lambda_u^{(p_3 \lambda_u + p_4)} e^{p_5 v} \quad (3.12)$$

donde p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 son parámetros a determinar. Aplicando la función logaritmo natural a ambos miembros de la ecuación, ésta se puede expresar como

$$y = \ln \mu = p_1' - p_2 \lambda_u + p_3 \lambda_u \ln \lambda_u + p_4 \ln \lambda_u - p_5 v \quad (3.13)$$

donde $p_1' = \ln p_1$

Ordenando la ecuación anterior en forma vectorial obtenemos

$$y = U\Theta \quad (3.14)$$

donde $U = [1, -\lambda_u, \lambda_u \ln \lambda_u, \ln \lambda_u, -v]$ y $\Theta^T = [p_1', p_2, p_3, p_4, p_5]$

Donde las variables U_i son llamadas variables de regresión, el vector U es llamado regresor y Θ se llama vector de parámetros. Al ser desconocidos sus elementos, estos pueden ser estimados a partir un algoritmo estándar de gradiente [3]

$$\dot{\Theta} = \Gamma U^T \tilde{y} \quad (3.15)$$

donde $\tilde{y} = y - \hat{y} = U(\Theta - \hat{\Theta}) = U\tilde{\Theta}$.

\tilde{y} representa al error de estimación de la variable y , y $\Gamma = \Gamma^T > 0$ es una matriz diagonal de ganancias. El error de estimación en el coeficiente de fricción se define como

$$\tilde{\mu} = \mu - \hat{\mu}$$

donde $\hat{\mu}$ se obtiene mediante

$$\hat{\mu} = e^{\hat{y}}$$

3.2 Valor Pico del Coeficiente de Fricción

Si la velocidad permanece constante, el valor pico μ_{max} puede ser calculado encontrando el máximo absoluto de la ecuación (3.12)

$$\mu_{max}|_{v=v_0} = p_1 e^{-p_2 \lambda_m} \lambda_m^{(p_3 \lambda_m + p_4)} e^{p_5 v_0} \quad (3.16)$$

La solución a la ecuación anterior está dada por

$$p_3 \lambda_m (\ln \lambda_m + 1) = p_2 \lambda_m - p_4 \quad (3.17)$$

3.3 Par de Frenado

En el procedimiento para obtener el coeficiente de fricción máximo, el cual por ende genera la fuerza máxima de fricción, requerimos un par de frenado que proporcione las condiciones adecuadas de deslizamiento.

Cuando se diseña un control para frenado de emergencia, la estimación de la ganancia del sistema es de suma importancia. Esta varía de acuerdo a la temperatura, velocidad del vehículo y otros parámetros. Para este propósito se considera la siguiente relación entre la presión P_b y el par de frenado τ_b

$$\tau_b = K_b P_b \quad (3.18)$$

Donde K_b representa la ganancia del sistema de frenado.

3.4 Diseño del Control.

Esta sección explica el control para frenado de emergencia que utiliza el conocimiento del coeficiente de fricción. Se asume que el vehículo cuenta con sistema de frenado antibloqueo y que la velocidad angular de las ruedas y longitudinal del vehículo pueden ser medidas. El primer paso es sustituir la ecuación (3.18) en la ecuación (3.8) obteniendo

$$\dot{s} = -(a + c)\mu - b - dv^2 + eK_b P_b \quad (3.19)$$

Definamos

$$\tilde{s} = s - s_m \quad (3.20)$$

donde $s_m = \hat{\lambda}_m v$ es la velocidad pico relativa que corresponde al valor de deslizamiento pico estimado a la velocidad v . s_m puede ser obtenido utilizando las ecuaciones (3.16) y (3.17) y la estimación de Θ . El error de la velocidad puede ser definido como $\tilde{v} = v - v_d$, donde v_d representa la velocidad deseada; para el frenado de emergencia la velocidad deseada es igual a cero por lo que la definición de error de velocidad no es útil. La presión de frenado, es decir el control, se toma como

$$P_b = \frac{1}{e\hat{K}_b}((a+c)\mu + b + dv^2 - \zeta\tilde{s}) \quad (3.21)$$

donde \hat{K}_b es el valor estimado de K_b y $\zeta > 0$ es la ganancia del control proporcional, éste representado por el término $\zeta\tilde{s}$ de la ecuación (3.21).

$\dot{\hat{K}}_b$ se escoge como

$$\dot{\hat{K}}_b = -\frac{\xi\tilde{s}}{\hat{K}_b}((a+c)\mu + b + dv^2 - \zeta\tilde{s}) \quad (3.22)$$

donde ξ representa la ganancia de adaptación. Con esta selección se garantiza que los errores \tilde{s} , \tilde{y} y v tienden a cero. Para mayor detalle consultar [2].

3.5 Resultado de Simulaciones

A continuación se reproducen los resultados tomados de [2] de las simulaciones realizadas por computadora del comportamiento del vehículo y la estimación de parámetros.

Podemos observar en la figura 3.3 que ambos errores (\tilde{s} y $\tilde{\mu}$) se estabilizan a partir de un segundo, lo cual indica que el sistema alcanza la velocidad relativa deseada a partir de dicho tiempo manteniendo el deslizamiento adecuado para obtener el valor máximo de coeficiente de fricción, además de obtener una adecuada estimación en el mismo. En las gráficas de la figura 3.4 observamos la evolución del par de frenado, siendo éste creciente conforme transcurre del tiempo, lo cual influye directamente en la desaceleración del vehículo como lo muestra la gráfica en la misma figura. La figura 3.5 muestra el estado del vehículo e indica que éste tiende al reposo en un tiempo de cuatro segundos aproximadamente.

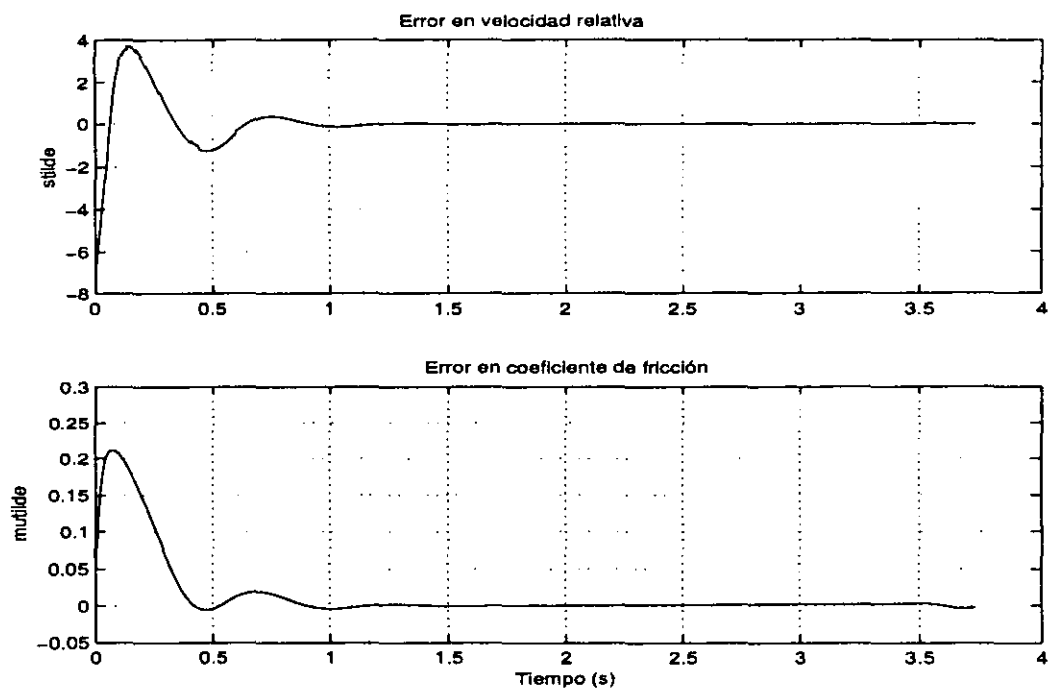


Figura 3.3: Señales de error.

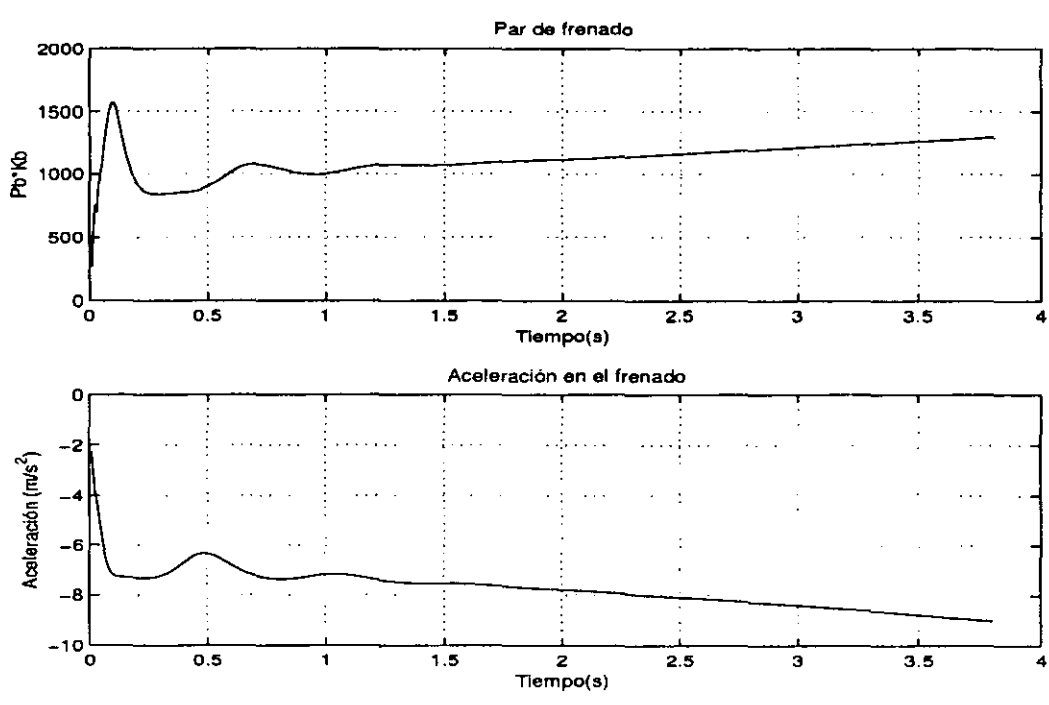


Figura 3.4: Par de frenado y desceleración.

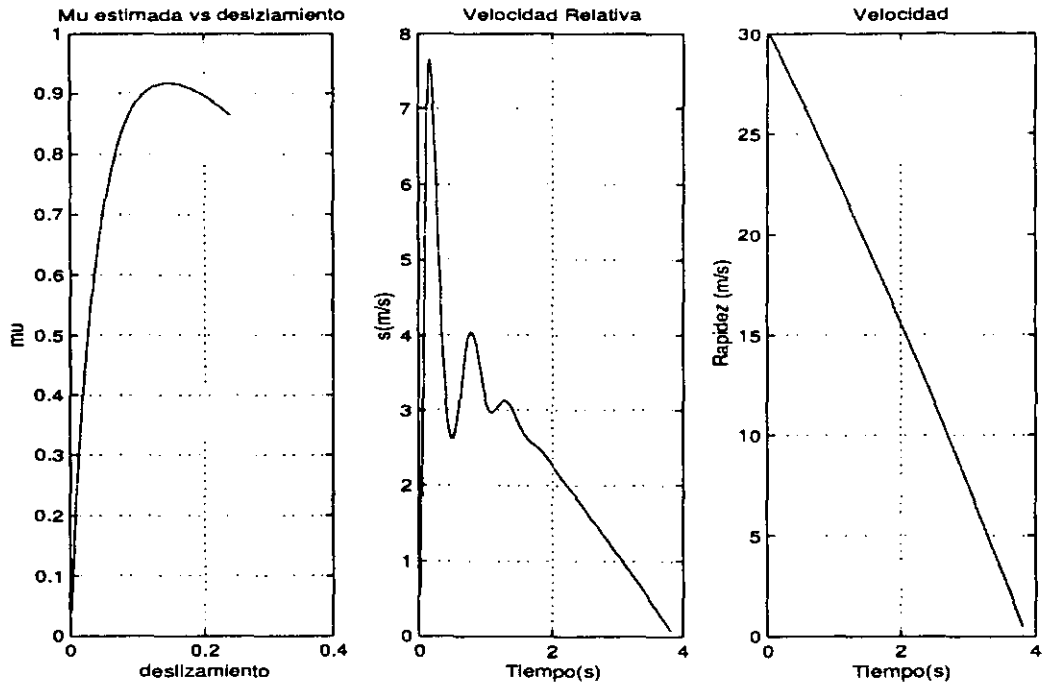


Figura 3.5: Curva de deslizamiento vs. coeficiente de fricción y evolución del estado.

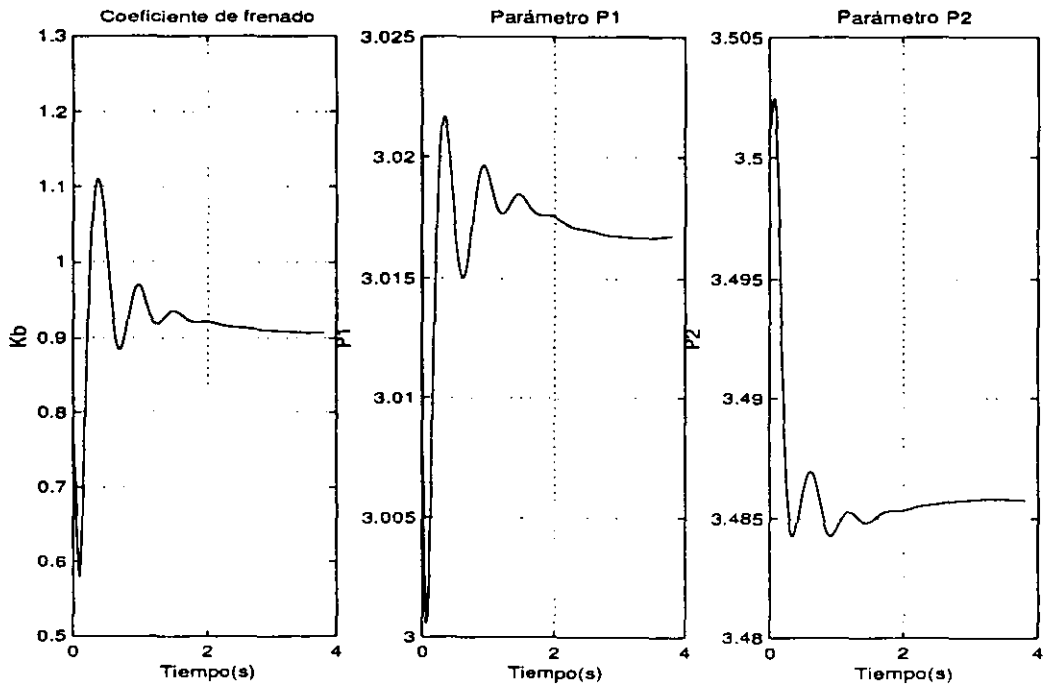


Figura 3.6: Parámetros adaptados.

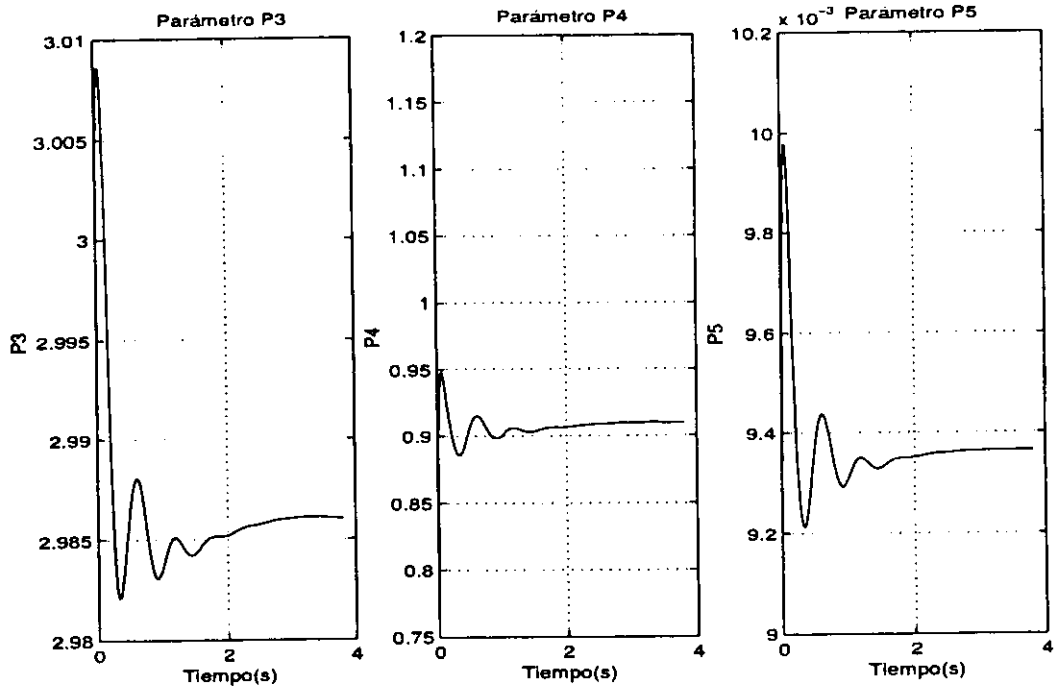


Figura 3.7: Parámetros adaptados.

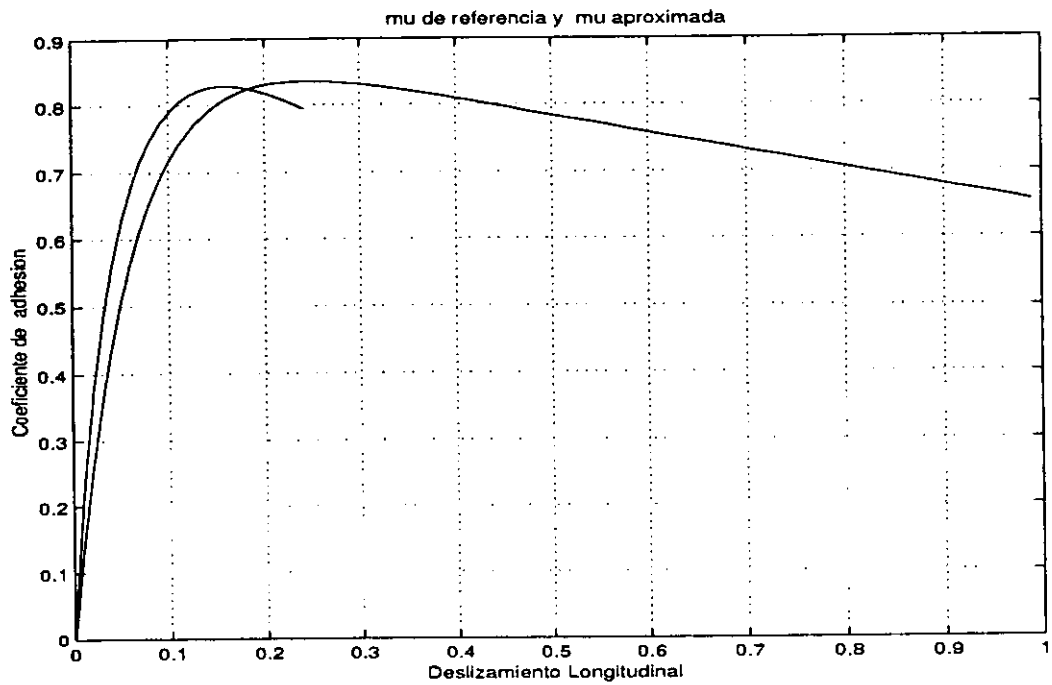


Figura 3.8: La aproximación a la ecuación de Buckhardt se muestra con la curva truncada.

Con las figuras 3.6 y 3.7 observamos que los parámetros del modelo (3.12) convergen hacia los siguientes valores:

p_1'	p_2	p_3	p_4	p_5
3.16	3.3	2.64	1.05	0.01

Al construir una curva de fricción mediante la ecuación (3.12) con los parámetros anteriores se observa una adecuada aproximación hacia la ecuación (3.11), dicha aproximación puede ser observada en la figura 3.8. De ahora en adelante estos parámetros serán llamados parámetros nominales y su vector se denotará por Θ_0 .

Capítulo 4

Análisis del Modelo de un Cuarto de Vehículo

En este capítulo se examina el comportamiento de los parámetros estimados involucrados en el modelo de fricción mediante un programa elaborado por computadora. Con esta herramienta se observa dicho comportamiento mediante la simulación del vehículo ya no en condiciones de frenado de emergencia, sino en un andar común en autopista y con ello recopilar información del estado del vehículo para que ésta pueda ser utilizada en el simulador de frenado de emergencia. En este trabajo proponemos una velocidad lineal de referencia del vehículo de forma senoidal debido a que representa en forma adecuada periodos de aceleración y frenado. A partir de esta señal se obtenemos las demás variables que caracterizan el comportamiento del vehículo, como lo es la aceleración lineal, coeficiente de fricción, deslizamiento longitudinal y velocidad relativa. El objetivo es diseñar un control que lleve al vehículo a comportarse en dichas condiciones de referencia mediante un control que utilice ésta información y actúe sobre el par de aceleración o frenado. La señal senoidal será manipulada para diversas situaciones, es decir, sus parámetros como frecuencia y amplitud serán modificados y con ello se observa el comportamiento de la estimación de los parámetros que conforman el modelo de fricción (3.12) a través del tiempo.

4.1 Modelado Matemático

Como se mencionó en el capítulo anterior, la dinámica del vehículo está regida por la segunda ley de Newton y la dinámica rotacional de la llanta por la ley de Euler

$$\begin{aligned}4F_x - F_{ax} &= m\dot{v} \\ \tau - F_x R &= I\dot{\omega}\end{aligned}$$

La velocidad relativa se obtiene mediante

$$s = v - \omega R \quad (4.1)$$

Y su derivada temporal por

$$\dot{s} = \dot{v} - R\dot{\omega} \quad (4.2)$$

Sustituyendo la ley de Newton y Euler en la ecuación anterior se obtiene

$$\dot{s} = \frac{4F_x}{m} - \frac{F_{ax}}{m} - \frac{R\tau}{I} + \frac{R^2 F_x}{I} \quad (4.3)$$

Donde F_x y F_{ax} representan la fuerza de fricción y aerodinámica respectivamente. Estas fuerzas son modeladas mediante las ecuaciones (3.6) y (3.7).

Realizando la suma de fuerzas en el eje "y" la fuerza normal ejercida sobre el camino hacia la llanta queda equilibrada con un cuarto del peso del vehículo por lo que ésta queda expresada como

$$F_n = \frac{w}{4} = \frac{mg}{4} \quad (4.4)$$

Se consideró que la fuerza normal es igual para todos los neumáticos.

Sustituyendo las ecuaciones (3.7), (3.6) y (4.4) en la ecuación

$$4F_x - F_{ax} = m\dot{v}$$

obtenemos que

$$\dot{v} = c\mu - dv^2 \quad (4.5)$$

donde $c = g$ y $d = \frac{C_{ax}}{m}$, así mismo sustituyendo las ecuaciones (3.7), (3.6) y (4.4) en la ecuación (4.3) obtenemos

$$\dot{s} = (a + c)\mu - b\tau - dv^2 \quad (4.6)$$

donde $a = \frac{R^2}{4I}mg$ y $b = \frac{R}{I}$

Despejando el coeficiente de fricción de la ecuación (4.5) y dados v_d , \dot{v}_d hallamos μ_d que satisface

$$\mu_d = \frac{\dot{v}_d + dv_d^2}{c} \quad (4.7)$$

Usando la curva de $\mu = f(\lambda, \hat{\Theta}, v)$ se halla λ_d tal que

$$\mu_d = f(\lambda_d, \hat{\Theta}, v_d) \rightarrow \lambda_d = f^{-1}(\mu_d, \hat{\Theta}, v_d) \quad (4.8)$$

Como la curva de comportamiento del coeficiente de fricción contra el deslizamiento longitudinal es una función no lineal, para un coeficiente de fricción se pueden obtener uno o más valores de deslizamiento, por lo que se escogerá el deslizamiento que se encuentra comprendido entre el intervalo de $[0, \lambda_0]$ por las razones explicadas en la sección 2.4. Al no conocer los parámetros nominales o reales, éstos se requieren estimar en el tiempo y cada estimación será utilizada en la ecuación (4.8) para conocer el deslizamiento deseado. La estimación paramétrica se realiza con el método estándar de gradiente

$$\dot{\hat{\Theta}} = \Gamma U \tilde{y}$$

donde \tilde{y} es

$$\tilde{y} = y - \hat{y}$$

con $y = \ln \mu$ y $\hat{y} = \ln \hat{\mu}$

$\hat{\mu}$ se obtiene a partir de

$$\hat{y} = U\hat{\Theta} \Rightarrow \hat{\mu} = e^{\hat{y}} \quad (4.9)$$

Como ya se mencionó: $U = [1, -\lambda_u, \lambda_u \ln \lambda_u, \ln \lambda_u, -v]$ y \dot{v}_d se obtiene derivando la función senoidal propuesta.

La convergencia de \tilde{y} hacia cero se puede demostrar mediante el siguiente análisis

Sea la siguiente función de Lyapunov

$$W_0 = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} \quad (4.10)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación anterior obtenemos

$$\dot{W}_0 = \frac{1}{2} (\tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}) + \frac{1}{2} (\dot{\tilde{\Theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}) \quad (4.11)$$

$$\text{y como } \dot{\tilde{\Theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}})^T \quad (4.12)$$

$$\dot{W}_0 = \frac{1}{2} (\tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}) + \frac{1}{2} (\tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}})^T \quad (4.13)$$

Sea $A = \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}$. Las dimensiones de las matrices que conforman A son las siguientes

$$\begin{array}{l} \tilde{\Theta}^T \quad 1 \times n \\ \Gamma \quad n \times n \\ \dot{\tilde{\Theta}} \quad n \times 1 \end{array}$$

Por lo tanto las dimensiones de A son 1×1 , lo cual representa a un escalar, por lo tanto la ecuación (4.13) queda expresada como

$$\dot{W}_0 = A = \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \quad (4.14)$$

La derivada temporal del error de estimación paramétrica está dado por

$$\dot{\tilde{\Theta}} = \dot{\Theta}_0 - \dot{\hat{\Theta}} = \vec{0} - \Gamma U^T \tilde{y}$$

Sustituyendo en \dot{W}_0 , obtenemos

$$\dot{W}_0 = -\tilde{\Theta}^T U^T \tilde{y}$$

$$\text{y como } \tilde{y} = U(\Theta - \hat{\Theta})$$

$$\dot{W}_0 = -\tilde{\Theta}^T U^T U \tilde{\Theta}$$

$$\dot{W}_0 = -(U \tilde{\Theta})^T U \tilde{\Theta}$$

$$\dot{W}_0 = -\tilde{y}^2 \leq 0$$

La cual es una función negativa definida. Con base en el análisis anterior se demuestra que: $\tilde{y} \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{\mu} \rightarrow 0$

4.2 Diseño del Control

Definamos al error de seguimiento de velocidad relativa en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\tilde{s} &= s - s_d \\ \text{y su derivada temporal es } \dot{\tilde{s}} &= \dot{s} - \dot{s}_d \\ &= \dot{s} - \lambda_d \dot{v}_d - \dot{\lambda}_d v_d\end{aligned}$$

donde $s_d = \lambda_d v_d$

El error de seguimiento en velocidad lo definimos como

$$\tilde{v} = v - v_d \quad (4.15)$$

Se propone la siguiente candidata a función de Lyapunov en términos de \tilde{v} y \tilde{s} (puntos de equilibrio con: $\tilde{s} = \tilde{v} = 0$)

$$W = \frac{1}{2}\tilde{s}^2 + \frac{1}{2}\tilde{v}^2 \quad (4.16)$$

Si podemos demostrar que \dot{W} es una función negativa definida demostraremos que $\tilde{s} \rightarrow 0$ y $\tilde{v} \rightarrow 0$ lo cual significa que los errores de seguimiento tienden a cero conforme transcurre el tiempo.

Derivando respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{W} = \tilde{s}\dot{\tilde{s}} + \tilde{v}\dot{\tilde{v}} = \tilde{s}[(a+c)\mu - b\tau - dv^2 - \lambda_d \dot{v}_d - \dot{\lambda}_d v_d] + \tilde{v}\dot{\tilde{v}} \quad (4.17)$$

Escogiendo el siguiente par como control

$$\tau = \frac{1}{b}[(a+c)\mu - dv^2 - \lambda_d \dot{v}_d - \dot{\lambda}_d v_d + \zeta_1 \tilde{s}] \quad (4.18)$$

Obtenemos

$$\dot{W} = -\zeta_1 \tilde{s}^2 + \tilde{v}\dot{\tilde{v}} \quad (4.19)$$

La derivada respecto al tiempo del error de seguimiento de velocidad longitudinal está dada por

$$\dot{\tilde{v}} = \dot{v} - \dot{v}_d = c\mu - dv^2 - (c\mu_d - d v_d^2) \quad (4.20)$$

Se elige el coeficiente de fricción deseado de la siguiente forma

$$\mu_d = \frac{\dot{v}_d + d v_d^2}{c} + \zeta_2 \tilde{v} \quad (4.21)$$

Donde $\zeta_2 > 0$ y sustituyendo en la ecuación (4.20) obtenemos

$$\dot{\tilde{v}} = c\mu - d v^2 - (\dot{v}_d + d v_d^2 + \zeta_2 \tilde{v}) + d v_d^2 \quad (4.22)$$

$$\dot{\tilde{v}} = c\mu - d v^2 - \dot{v}_d - \zeta_2 \tilde{v} \quad (4.23)$$

Por lo tanto la función (4.19) se puede escribir como

$$\dot{W} = -\zeta_1 \tilde{s}^2 - \zeta_2 \tilde{v}^2 + (c\mu - d v^2 - \dot{v}_d) \tilde{v} \quad (4.24)$$

$$= -\zeta_1 \tilde{s}^2 - \zeta_2 \tilde{v}^2 + (\dot{v} - \dot{v}_d) \tilde{v} \quad (4.25)$$

Como el coeficiente de fricción, la velocidad longitudinal y la aceleración son funciones acotadas entonces $(\dot{v} - \dot{v}_d)$ es también una función acotada que cumple con la siguiente condición

$$|\dot{v} - \dot{v}_d| \leq k_1$$

Si escogemos a la ganancia como el valor mínimo entre ζ_1 y ζ_2 es decir

$$\zeta = \frac{1}{2} \min(\zeta_1, \zeta_2) \quad (4.26)$$

La ecuación (4.25) queda definida por

$$\dot{W} \leq -\zeta \tilde{s}^2 - \zeta \tilde{v}^2 + k_1 |\tilde{v}| \quad (4.27)$$

$$\leq -\zeta(\tilde{v}^2 + \tilde{s}^2) + k_1 |\tilde{v}| \quad (4.28)$$

$$\leq -\zeta W + k_1 |\tilde{v}| \quad (4.29)$$

Como W es una función positiva definida y $\zeta > 0$ el primer término de la ecuación (4.29) es siempre menor o igual que cero. Al desear que la derivada temporal de la función candidata a Lyapunov sea negativa definida o semidefinida se introdujo el valor absoluto del error de seguimiento en velocidad, debido a que se está analizando el caso extremo en el que el segundo término de la ecuación es positivo. Esto implica que no se puede

garantizar que \dot{W} sea negativa semidefinida. Para analizar entonces estabilidad considere que si W es una función positiva definida entonces, el término positivo de su raíz cuadrada, $W^{\frac{1}{2}}$, también es una función positiva definida. Examinemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \text{De} \quad W &= \frac{1}{2}\tilde{s}^2 + \frac{1}{2}\tilde{v}^2 \\ \text{se sigue que} \quad \frac{1}{2}\tilde{v}^2 &= W - \frac{1}{2}\tilde{s}^2 \leq W \\ \text{y por tanto} \quad \frac{1}{2}\tilde{v}^2 &\leq W \Rightarrow |\tilde{v}| \leq \sqrt{2W} \end{aligned}$$

La derivada temporal de $W^{\frac{1}{2}}$ es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}W^{-\frac{1}{2}}\dot{W} \\ &\leq \frac{1}{2}W^{-\frac{1}{2}}(-\zeta W + k_1\sqrt{2W}) \\ &\leq -\frac{1}{2}\zeta W^{\frac{1}{2}} + \frac{k_1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Con lo cual hacemos a (4.30) independiente de la función $f = \tilde{v}(\dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{v}}_d)$ cambiándola por la constante $k_1/\sqrt{2}$.

Para que la función (4.30) sea negativa semidefinida requerimos que el primer término de la ecuación domine al segundo, el límite se alcanza cuando ambos miembros son iguales, es decir :

$$W^{\frac{1}{2}} = \frac{2k_1}{\zeta\sqrt{2}}$$

Como $|\tilde{v}| \leq \sqrt{2W}^{\frac{1}{2}}$ entonces

$$|\tilde{v}| \leq \frac{2k_1}{\zeta}$$

Esta expresión indica que el error de seguimiento en velocidad longitudinal está acotado por k_1 y ζ . Lo mismo sucede con el error de seguimiento en velocidad relativa

$$|\tilde{s}| \leq \frac{2k_1}{\zeta}$$

Con la selección de ζ_1 y ζ_2 se puede garantizar que $|\tilde{v}| < \epsilon$ y $|\tilde{s}| < \epsilon$, donde $\epsilon = 2k_1/\zeta$ y por tanto la estabilidad de $\tilde{v} = 0$ y $\tilde{s} = 0$.

El esquema de operación del control se muestra en la figura 4.1.

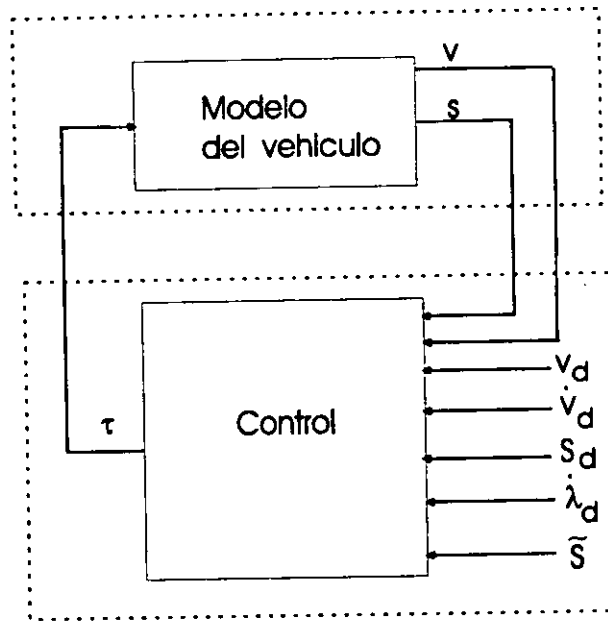


Figura 4.1: Esquema de operación del control.

4.3 Resultado de Simulaciones

A continuación se muestran los resultados obtenidos acerca del comportamiento paramétrico y la dinámica del vehículo. Para iniciar la estimación de parámetros se propuso el siguiente vector

$$\hat{\Theta} = [2.8, 2.95, 2.8, 1.21, 0.0115]^T$$

El cual presenta un error porcentual hacia Θ_0

$$\%e = [11.3924, 10.6061, 6.0606, 19.8020, 15.00]^T$$

cuyo módulo es 29.9353

Las ganancias utilizadas fueron

$$\zeta_1 = 20$$

$$\zeta_2 = 0.08$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 9.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.036 \end{pmatrix}$$

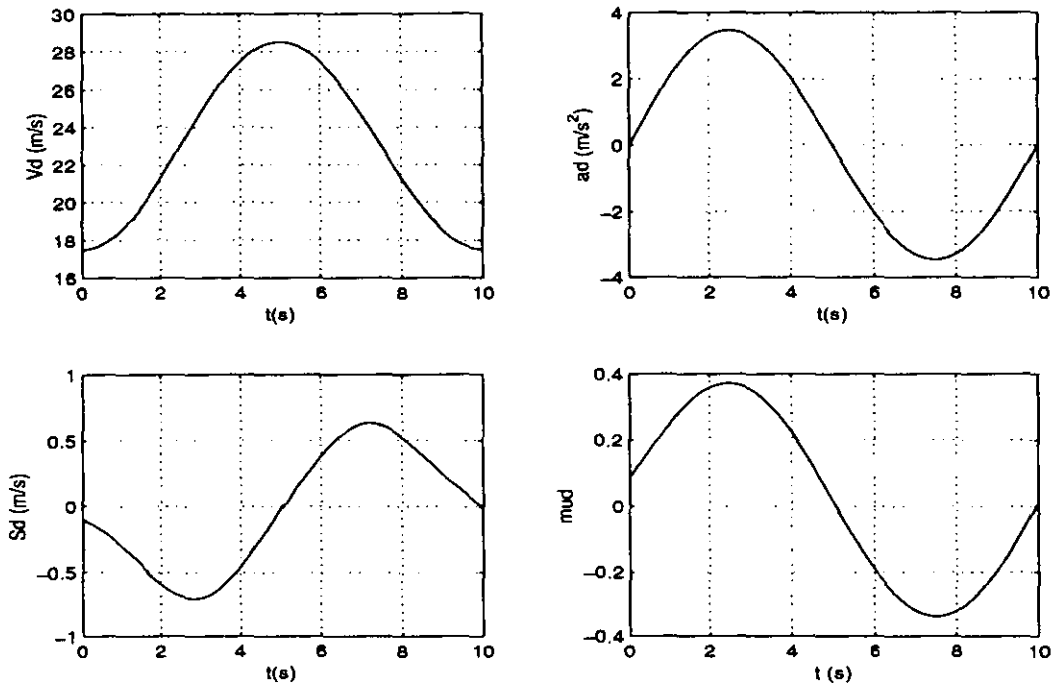


Figura 4.2: Variables de referencia o “deseadas”.

Se realizaron varios experimentos variando la amplitud de la velocidad de referencia así como su periodo y se observó el desempeño en la adaptación de parámetros. Al estabilizarse los parámetros se obtiene su error porcentual respecto a los parámetros nominales obtenidos en el capítulo anterior, posteriormente se obtiene el módulo del vector de errores porcentuales consiguiendo así el error cuadrático que se muestra en las gráficas 4.7 y 4.8.

$$\%e = \left| \frac{\hat{\Theta} - \Theta_0}{\Theta_0} \right| \times 100 \quad (4.31)$$

$$\text{error cuadrático} = \|\%e\| \quad (4.32)$$

Donde la división de la ecuación (4.31) consiste en dividir cada componente del vector del numerador entre cada componente del vector del denominador. En las figuras B.1 y B.2

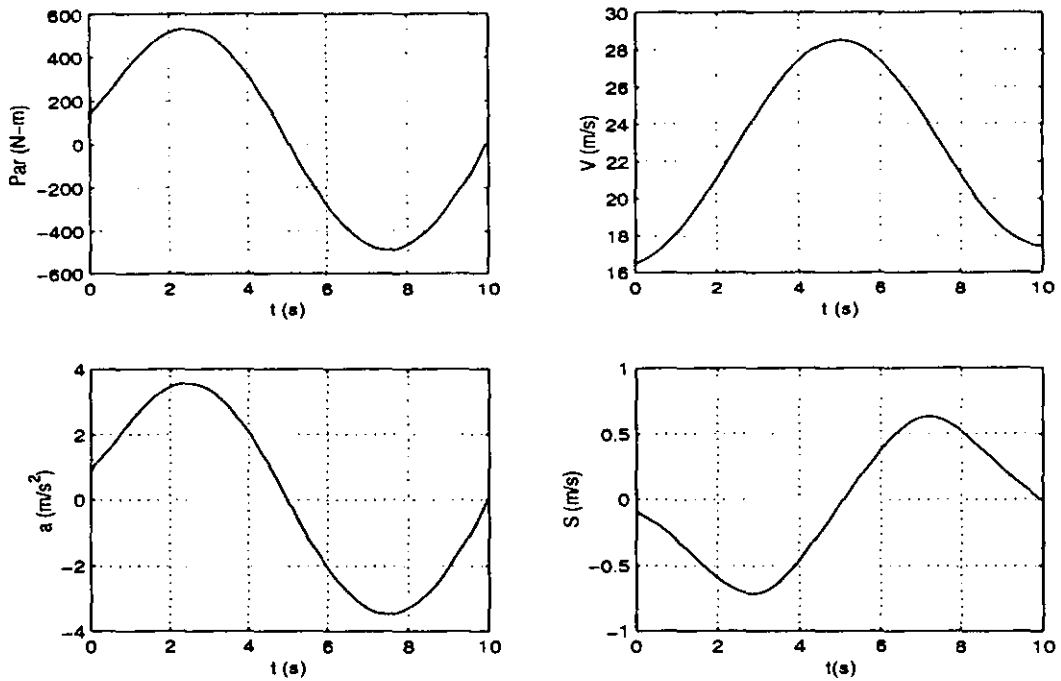


Figura 4.3: Par y comportamiento del vehículo.

que se encuentran en el apéndice B se muestran los resultados obtenidos para diversas amplitudes y periodos de excitación.

4.4 Análisis de Resultados

En la figura 4.2 mostramos el comportamiento deseado o de referencia del vehículo. Para este caso la señal de velocidad tiene un periodo de 10 segundos, una velocidad media de 23 (m/s) y una amplitud de 5.5 (m/s). A partir de ésta señal se obtiene la aceleración del centro de gravedad, velocidad relativa y el coeficiente de fricción deseado. Posteriormente en la figura 4.3 observamos el par de control que propicia un comportamiento similar, dicho comportamiento lo observamos en la gráfica de velocidad del centro de gravedad en la misma figura así como su aceleración y velocidad relativa del vehículo.

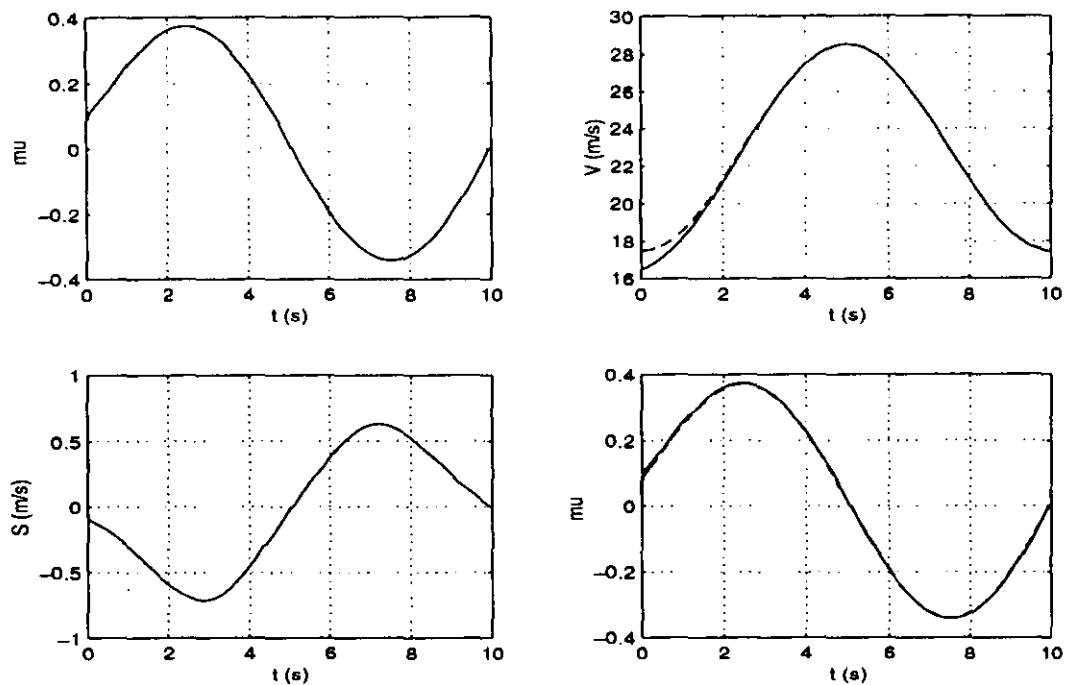


Figura 4.4: Comportamiento del vehículo y seguimiento de señales, la referencia dibujada con línea discontinua.

4.4.1 Del Control

Los resultados del control que observamos presentan un buen desempeño, pues el comportamiento dinámico, se aproxima a las referencias propuestas como lo observamos en las gráficas de la figura 4.4, donde se encuentran empalmadas las señales de referencia y el comportamiento real del vehículo.

Al examinar la figura de error en estimación del coeficiente de fricción (y tilde vs. tiempo fig. 4.5), observamos que se presenta una discontinuidad a los 5 segundos. Esta discontinuidad surge cuando el deslizamiento se encuentra en valores cercanos a cero, pues al estar presente en los elementos tercero y cuarto del regresor dichos elementos del vector se hacen relativamente grandes.

En la gráfica de error en velocidad lineal (\dot{v} vs. tiempo fig. 4.5) se presenta un seguimiento adecuado hacia la referencia propuesta para todas las simulaciones, obte-

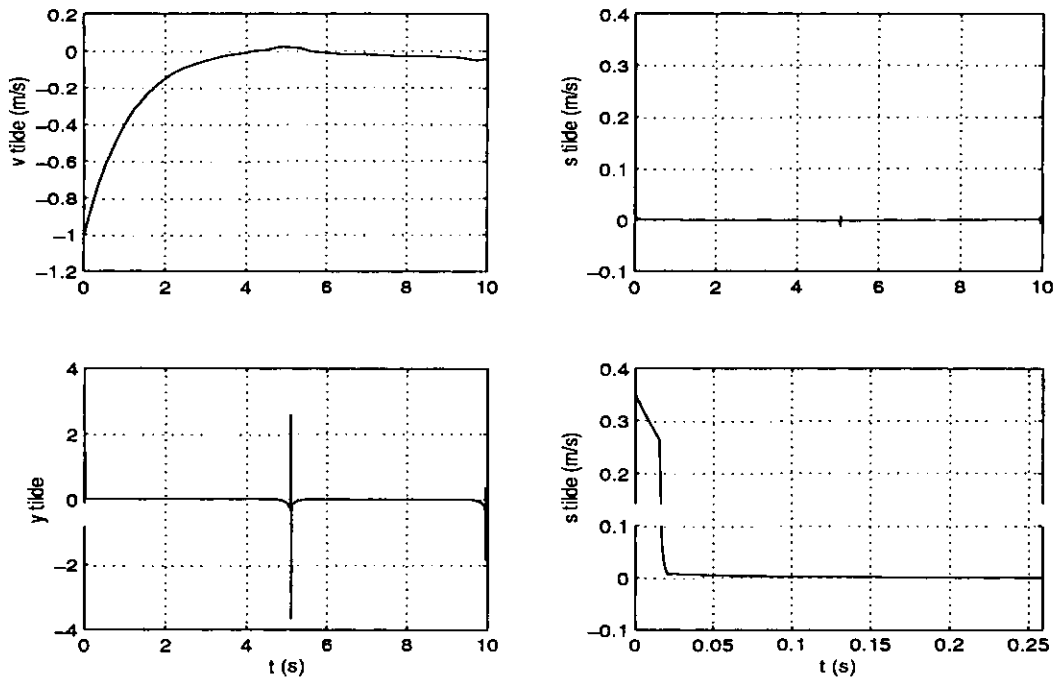


Figura 4.5: Gráficas de señales de error. La gráfica inferior de s_{tilde} corresponde a una ampliación de la gráfica superior.

niendo la igualación de ambas velocidades en un tiempo de 3 segundos aproximadamente. El error en seguimiento de velocidad relativa (s_{tilde} vs. tiempo) tiende a cero en tiempos muy pequeños para todos los casos probados.

4.4.2 Convergencia Paramétrica

Al sistema se le añadió un componente de excitación de ruido blanco en el coeficiente de fricción deseado, con el objetivo de lograr una mejor adaptación en los parámetros. En el apéndice se muestran dos tablas de resultados (figs. B.1 y B.2) las cuales muestran el comportamiento de los parámetros con varias amplitudes de excitación y periodo. En la figura 4.7 se observa que el control obtiene resultados con mayor precisión si la velocidad oscila entre 3 y 8 (m/s), obteniendo el mínimo de error a los 5.5 (m/s) lo cual representa que si el automóvil se encuentra en un rango de velocidades entre 10.8 y 28.8 (km/h) alrededor de su velocidad media el sistema obtendrá una buena adaptabilidad. En la

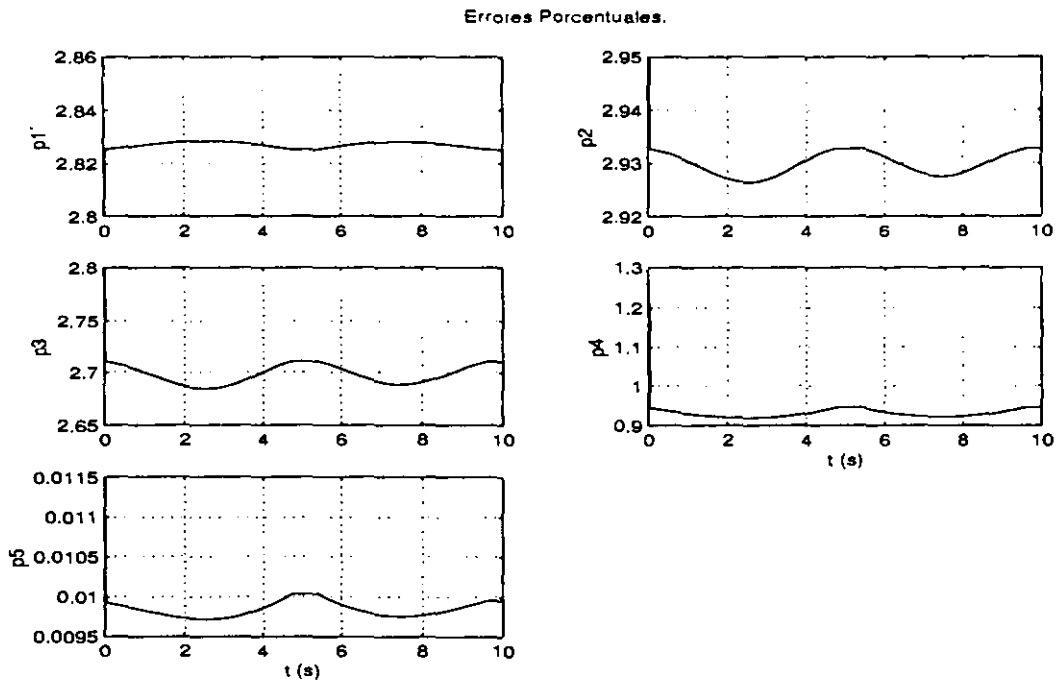


Figura 4.6: Evolución del error porcentual.

figura 4.8 la curva presenta un mínimo absoluto con un periodo de 40 segundos lo cual no es determinante para evaluar la adaptabilidad del sistema ya que la variación del error a lo largo de la curva es muy pequeña obteniendo así una diferencia de 0.2% entre el valor mínimo y el máximo. La estabilización del error porcentual en los parámetros se logra en tiempos pequeños. Esto podemos observarlo en la figura 4.6, donde los errores de los parámetros se estabilizan en los siguientes valores:

p_1'	p_2	p_3	p_4	p_5
2.825	2.93	2.7	0.9	0.00975

4.4.3 Rango

Para todas las simulaciones se obtuvo el rango de la matriz $\Phi(t)$ la cual está conformada en sus renglones por el vector regresor

$$\Phi(t) = (U(1), U(2), U(3), \dots, U(t))^T$$

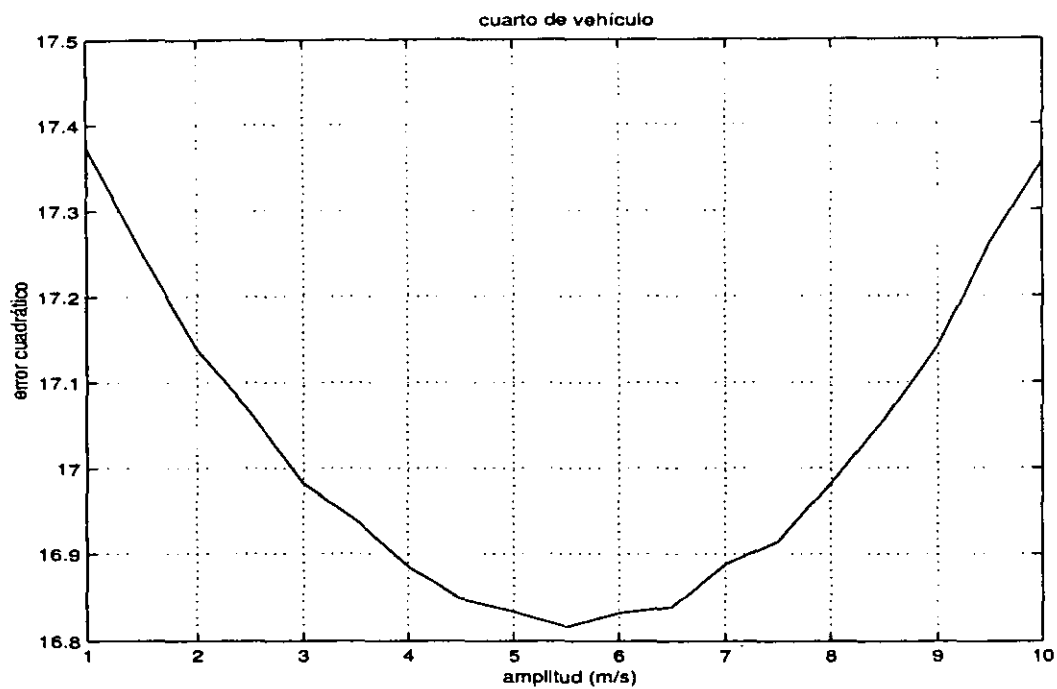


Figura 4.7: Amplitud de excitación vs. error cuadrático del vector de errores.

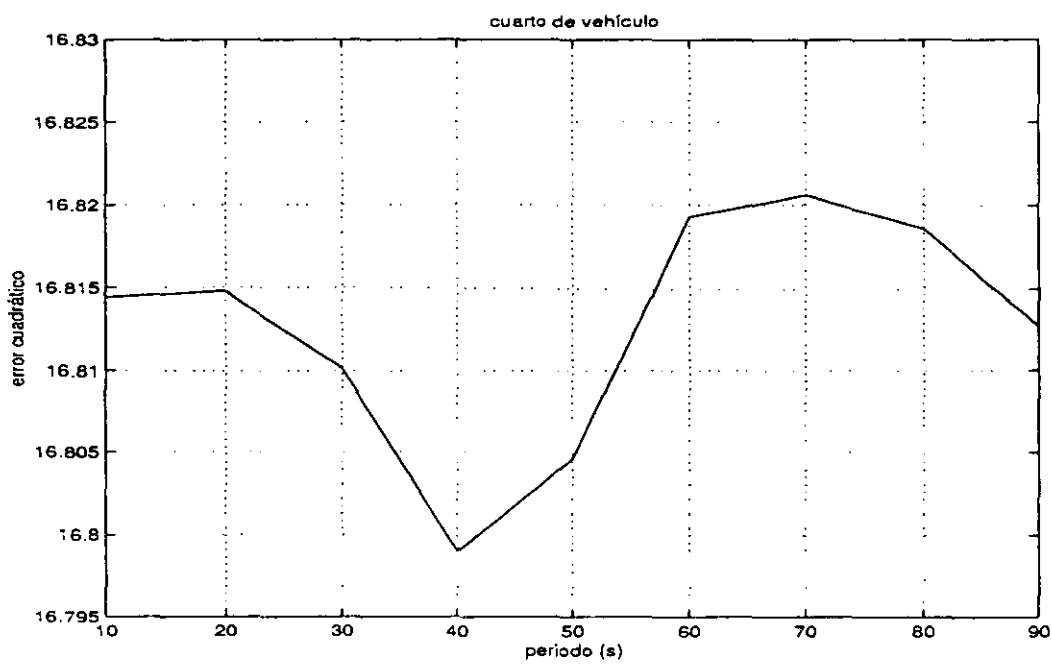


Figura 4.8: Periodo de excitación vs. error cuadrático del vector de errores.

El resultado obtenido fue de cinco para todos los casos, valor equivalente al número de parámetros estimados lo cual nos permite excitación persistente [3].

Capítulo 5

Propuesta de Modelado Bidimensional de un Automóvil en Condiciones de Tracción y Frenado “Modelo Bicicleta”.

Este capítulo tiene por objetivo desarrollar un modelo matemático que permita relacionar la aceleración, velocidad, fuerzas normales de un vehículo y el coeficiente de fricción entre la llanta y el camino. El modelado se realizará en dos secciones, en la primera se tratará el caso tractivo y en la segunda se analizará el caso de frenado. Con el modelo desarrollado se observará el efecto causado por las fuerzas normales que actúan sobre los neumáticos en el comportamiento de parámetros adaptados y se comparará con el modelo propuesto en el capítulo anterior.

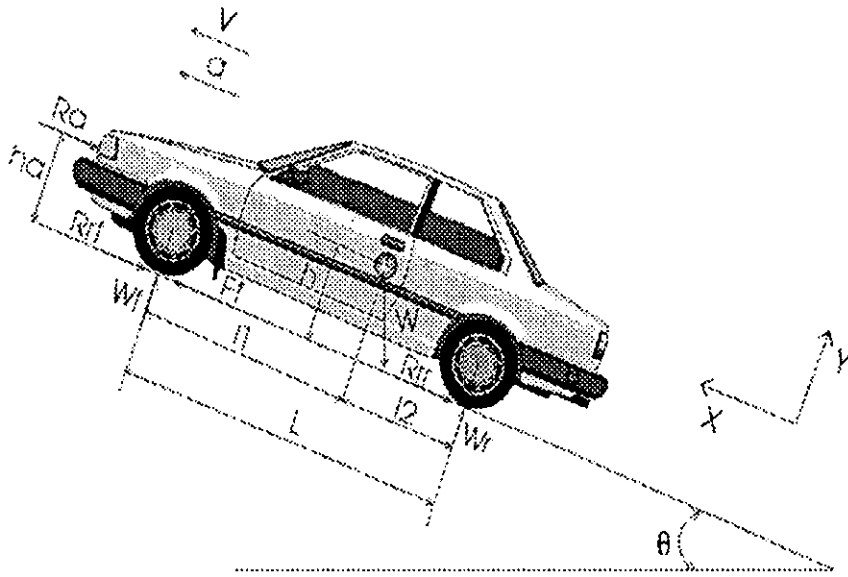


Figura 5.1: Diagrama de cuerpo libre para el caso tractivo.

R_a -Fuerza aerodinámica

W_f, W_r -Fuerzas normales sobre las llantas frontales y traseras respectivamente

F_f -Fuerza de tracción sobre las llantas delanteras

$R_{rf} R_{rr}$ -Fuerza de resistencia de rodadura en las llantas delanteras y traseras

h_a -Altura de aplicación de la fuerza aerodinámica

h -Altura del centro de gravedad

L -Distancia entre los ejes delantero y trasero

5.1 Caso Tractivo

El diagrama de cuerpo libre de un automóvil con tracción delantera se muestra en la figura 5.1. Y una vista tridimensional del mismo se muestra en la figura 5.2.

La segunda ley de Newton establece que

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (5.1)$$

Si al sistema de fuerzas que actúan sobre el auto le adicionamos un vector $-m\vec{a}$ tal que m

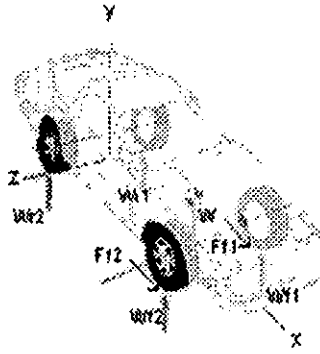


Figura 5.2: Diagrama de cuerpo libre del automóvil.

sea la masa del auto en tanto que \vec{a} es la aceleración del mismo se obtiene como resultado en cualquier instante un conjunto de vectores en equilibrio. Si en ambos miembros de la ecuación de Newton adicionamos el vector $-m\vec{a}$ obtenemos

$$\sum \vec{F} + (-m\vec{a}) = m\vec{a} - m\vec{a} = \vec{0} \quad (5.2)$$

Desarrollando esta ecuación con base al diagrama de cuerpo libre (fig. 5.1) y haciendo $a = \dot{v}$ obtenemos

$$F_{f1} + F_{f2} - R_a - R_{rf1} - R_{rf2} - R_{rr1} - R_{rr2} - W \operatorname{sen}(\theta) - m\dot{v} = 0 \quad (5.3)$$

Donde $\vec{a} = \dot{v}\hat{i}$

El principio de D'Alembert establece que

$$\sum \vec{M}_o + [\vec{r} \times (-m\vec{a})] + (-I\vec{\alpha}) = \vec{0} \quad (5.4)$$

Como la suma de momentos debidos a fuerzas y pares externos sobre cualquier línea de un objeto que se encuentre en equilibrio es igual a cero entonces la suma de momentos respecto al eje trasero se calcula mediante

$$-W_{f1}L - W_{f2}L - R_a h_a + W \cos(\theta) l_2 - W \operatorname{sen}(\theta) h - m\dot{v}h = 0 \quad (5.5)$$

Despejando la suma de fuerzas normales obtenemos

$$W_{f1} + W_{f2} = \frac{W \cos(\theta) l_2 - W \operatorname{sen}(\theta) h - R_a h_a - m\dot{v}h}{L} \quad (5.6)$$

Definamos las siguientes ecuaciones

$$F_f = F_{f1} + F_{f2} \quad (5.7)$$

$$R_r = R_{rf1} + R_{rf2} + R_{rr1} + R_{rr2} \quad (5.8)$$

$$W_f = W_{f1} + W_{f2} \quad (5.9)$$

$$W_r = W_{r1} + W_{r2} \quad (5.10)$$

Despejando la aceleración de la ecuación (5.3) y sustituyéndola en la ecuación (5.6) obtenemos

$$W_f = \frac{l_2}{L} W \cos(\theta) - \frac{h}{L} (F_f - R_r) - \frac{(h_a - h)}{L} R_a \quad (5.11)$$

Para encontrar las fuerzas normales que actúan en las llantas traseras, realizamos del mismo modo una suma de momentos respecto al eje frontal obteniendo así

$$-R_a h_a - W \sin(\theta) h - W \cos(\theta) l_1 + W_{r1} L + W_{r2} L - m \dot{v} h = 0 \quad (5.12)$$

Despejando las fuerzas normales obtenemos

$$W_{r1} + W_{r2} = \frac{R_a h_a + W \sin(\theta) h + W \cos(\theta) l_1 + m \dot{v} h}{L} \quad (5.13)$$

Despejando la aceleración de la ecuación (5.3) y sustituyéndola en la ecuación (5.13) podemos escribirla

$$W_r = \frac{l_1}{L} W \cos(\theta) + \frac{h}{L} (F_f - R_r) - \frac{(h_a - h)}{L} R_a \quad (5.14)$$

La fuerza total de resistencia a la rodadura ($R_{rr1} + R_{rr2} + R_{rf1} + R_{rf2}$) se modela como

$$R_r = W \cos(\theta) f_r \quad (5.15)$$

Donde f_r representa el coeficiente de resistencia a la rodadura y varía en función de la velocidad. De acuerdo con [5] el coeficiente de resistencia a la rodadura se modela como

$$f_r = 0.0136 + 0.4 \times 10^{-7} v^2 \quad (5.16)$$

La fuerza de arrastre se modela como lo indica la ecuación (3.6) y su línea de acción coincide con el centroide de volumen del automóvil.

Recordando que la fuerza de fricción se expresa como

$$F_f = \mu N = \mu W_f \tag{5.17}$$

Donde μ representa el coeficiente de fricción y N la fuerza normal, bajo esta definición la fuerza de fricción podemos escribirla como

$$F_f = \frac{\frac{\mu}{L} [(l_2 + hf_r)W \cos(\theta) - (h_a - h)R_a]}{1 + \frac{h}{L}\mu} \tag{5.18}$$

Si sustituimos la expresión anterior en la ecuación (5.3) y despejando el coeficiente de fricción obtenemos

$$\mu = \frac{L(\dot{v} + \frac{R_a}{m} + g \cos(\theta)f_r + g \operatorname{sen}(\theta))}{l_2 g \cos(\theta) - h_a \frac{R_a}{m} - h(\dot{v} + g \operatorname{sen}(\theta))} \tag{5.19}$$

Esta ecuación nos permite conocer el coeficiente de fricción a partir de la aceleración y velocidad del automóvil.

La velocidad relativa del centro de gravedad del automóvil respecto de la velocidad tangencial de la llanta es

$$s = v - R\omega \tag{5.20}$$

Derivando la ecuación anterior respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{s} = \dot{v} - R\dot{\omega} \tag{5.21}$$

El diagrama de cuerpo libre de la llanta delantera para el caso tractivo se muestra en la figura (5.3). La dinámica de rotación de la llanta delantera se modela mediante la ley de

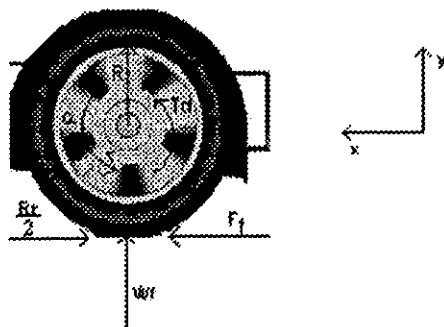


Figura 5.3: Diagrama de cuerpo libre de la llanta delantera.

Euler

$$\sum \vec{\tau}_0 = I_0 \vec{\alpha} \quad (5.22)$$

Desarrollando la ecuación con base en el diagrama de cuerpo libre obtenemos

$$\tau_d - F_f R + \frac{R_r R}{2} = I \dot{\omega} \quad (5.23)$$

La aceleración se puede calcular a partir de la ecuación (5.3) mediante, la sustitución de los valores de cada fuerza

$$\dot{v} = \frac{\frac{\mu}{L} [(l_2 + h f_r) g \cos(\theta) - (h_a - h) \frac{R_a}{m}] - \frac{R_a}{m} - g \cos(\theta) f_r - g \sin(\theta)}{1 + \frac{h}{L} \mu} \quad (5.24)$$

Sustituyendo la aceleración lineal y angular en la ecuación (5.21) obtenemos

$$\dot{s} = \frac{\frac{\mu}{L} [(l_2 + h f_r) g \cos(\theta) - (h_a - h) \frac{R_a}{m}] - \frac{R_a}{m} - g \cos(\theta) f_r - g \sin(\theta) - \frac{R}{I} (\tau_d - F_f R + \frac{R_r R}{2})}{1 + \frac{h}{L} \mu} \quad (5.25)$$

Las ecuaciones (5.24) y (5.25) modelan la dinámica del automóvil y su relación con el movimiento de la llanta para el caso tractivo. Para conocer la velocidad lineal y angular requerimos integrar ambas ecuaciones en el tiempo, si podemos medir la velocidad lineal y angular todos los elementos de las ecuaciones excepto el par serán conocidos. El par es una variable que queremos controlar, su método de su obtención se explica en la siguiente sección.

Las ecuaciones (5.25) y (5.24) serán resueltas como ecuaciones en diferencias, conociendo el valor en tiempo t podemos conocer el valor en $t + \Delta t$ mediante incrementos de tiempo pequeños para aproximar las derivadas:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \frac{df}{dt} \Delta t$$

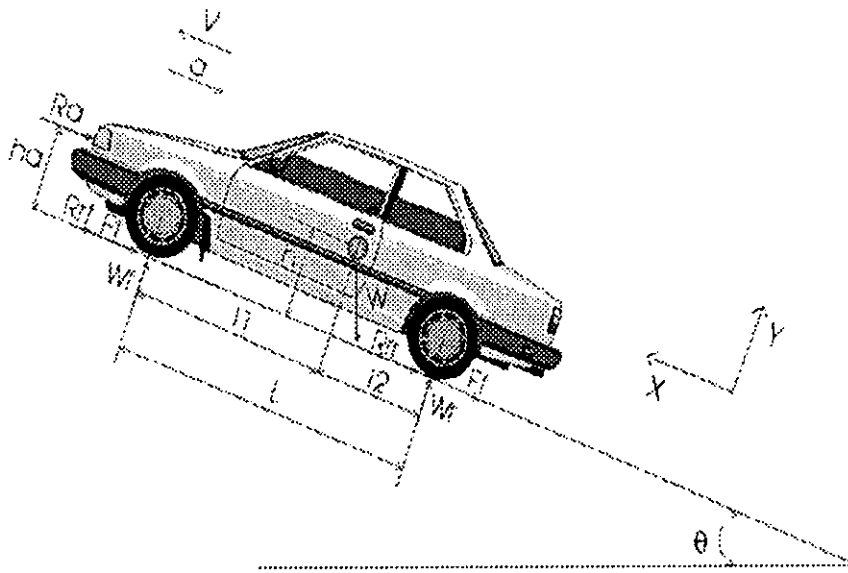


Figura 5.4: diagrama de cuerpo libre para el caso de frenado.

5.2 Caso de Frenado

El diagrama de cuerpo libre del automóvil se muestra en la figura 5.4 Donde $\vec{a} = -\dot{v}\hat{i}$. Desarrollando la ecuación (5.2) de acuerdo al diagrama de cuerpo libre obtenemos

$$-F_{bf1} - F_{bf2} - F_{br1} - F_{br2} - R_r - W \sin(\theta) - R_a + m\dot{v} = 0 \quad (5.26)$$

Realizando un balance de momentos respecto al eje trasero y despejando la suma de fuerzas normales obtenemos

$$W_{f1} + W_{f2} = \frac{-R_a h_a - W \sin(\theta) h + W \cos(\theta) l_2 + m\dot{v} h}{L} \quad (5.27)$$

Si en la ecuación anterior sustituimos la aceleración despejada de la ecuación (5.26) y definiendo del mismo modo

$$W_f = W_{f1} + W_{f2}$$

$$F_{br} = F_{br1} + F_{br2}$$

$$F_{bf} = F_{bf1} + F_{bf2}$$

se obtiene

$$W_f = \frac{l_2}{L} W \cos(\theta) + \frac{h}{L} (F_{br} + F_{bf} + R_r) - \frac{(h_a - h)}{L} R_a \quad (5.28)$$

Análogamente realizando el balance de momentos respecto al eje delantero y despejando la suma de fuerzas normales (W_r) obtenemos

$$W_r = \frac{l_1}{L} W \cos(\theta) - \frac{h}{L} (F_{br} + F_{bf} + R_r) + \frac{(h_a - h)}{L} R_a \quad (5.29)$$

Recordando que $F = \mu N$, de este modo

$$F_{bf} = \mu_f W_f \quad (5.30)$$

$$F_{br} = \mu_r W_r \quad (5.31)$$

Sustituyendo la ecuación (5.28) en (5.30) obtenemos

$$F_{bf} = \mu_f \left(\frac{l_2}{L} W \cos(\theta) + \frac{h}{L} (F_{br} + F_{bf} + R_r) - \frac{(h_a - h)}{L} R_a \right) \quad (5.32)$$

Recordar que $R_r = W \cos(\theta) f_r$

Así mismo sustituyendo la ecuación (5.29) en (5.31) tenemos que

$$F_{br} = \mu_r \left(\frac{l_1}{L} W \cos(\theta) - \frac{h}{L} (F_{br} + F_{bf} + R_r) + \frac{(h_a - h)}{L} R_a \right) \quad (5.33)$$

Despejando F_{bf} de la ecuación (5.32) obtenemos

$$F_{bf} = \frac{\mu_f \frac{l_2}{L} W \cos(\theta) + \mu_f \frac{h}{L} (F_{br} + W \cos(\theta) f_r) - \mu_f \frac{(h_a - h)}{L} R_a}{1 - \mu_f \frac{h}{L}} \quad (5.34)$$

Y despejando F_{br} de la ecuación (5.33) obtenemos

$$F_{br} = \frac{\mu_r \frac{l_1}{L} W \cos(\theta) - \mu_r \frac{h}{L} (F_{bf} + W \cos(\theta) f_r) + \mu_r \frac{(h_a - h)}{L} R_a}{1 + \mu_r \frac{h}{L}} \quad (5.35)$$

Con ello conseguimos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es la siguiente

$$F_{bf} = \frac{\mu_f (h L R_a - h_a L R_a + f_r h L W \cos(\theta) + L l_2 W \cos(\theta) + h l_1 \mu_r W \cos(\theta) + h l_2 \mu_r W \cos(\theta))}{L (L - h \mu_f + h \mu_r)} \quad (5.36)$$

$$F_{br} = \frac{\mu_r (h L R_a - h_a L R_a + f_r h L W \cos(\theta) - L l_1 W \cos(\theta) + h l_1 \mu_f W \cos(\theta) + h l_2 \mu_f W \cos(\theta))}{L (-L + h \mu_f - h \mu_r)} \quad (5.37)$$

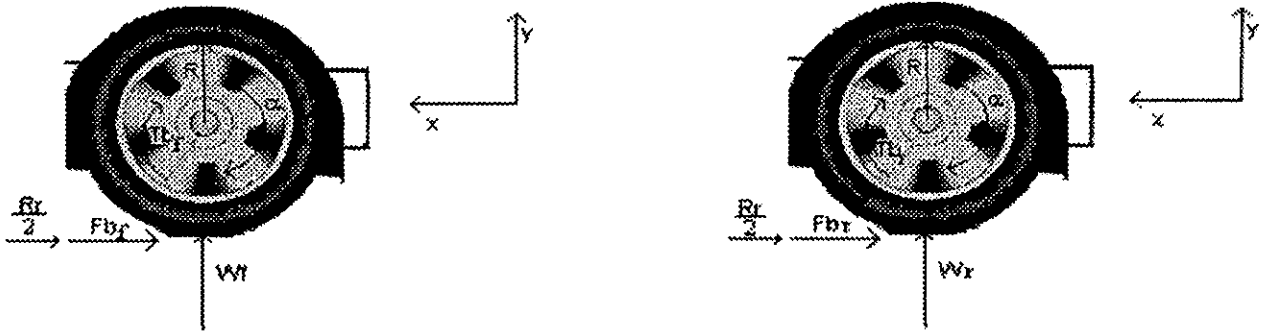


Figura 5.5: Diagramas de cuerpo libre de las llantas para el caso de frenado.

Sumando ambas fuerzas se obtiene la fuerza total de frenado

$$F_{tot} = (\mu_r l_1 W \cos(\theta) - \mu_r h W \cos(\theta) f_r + \mu_r R_a h_a - \mu_r R_a h + \mu_f l_2 W \cos(\theta) + \mu_f h W \cos(\theta) f_r - \mu_f R_a h_a + \mu_f R_a h) / (L + \mu_r h - \mu_f h)$$

Si sustituimos esta expresión en la ecuación (5.26) y despejamos el coeficiente de fricción delantero obtenemos

$$\mu_f = (-\dot{v} m L - \dot{v} m \mu_r h + \mu_r l_1 W \cos(\theta) + \mu_r R_a h_a + L W \cos(\theta) f_r + W \sin(\theta) L + W \sin(\theta) \mu_r h + L R_a) / (-\dot{v} m h - l_2 W \cos(\theta) + R_a h_a + W \sin(\theta) h)$$

Suponiendo una relación directamente proporcional entre los coeficientes de fricción delantero y trasero [5], es decir, $\mu_r = k\mu_f$ ¹ la ecuación anterior se expresa como

$$\mu_f = \frac{-L(-\dot{v} m + W \cos(\theta) f_r + W \sin(\theta) + R_a)}{\dot{v} m h + l_2 W \cos(\theta) - R_a h_a - W \sin(\theta) h - \dot{v} m k h + k l_1 W \cos(\theta) + k R_a h_a + W \sin(\theta) k h} \quad (5.38)$$

Expresión similar a la ecuación (5.19) en la cual requerimos conocer la velocidad y la aceleración del automóvil para obtener el coeficiente de fricción instantáneo.

El diagrama de cuerpo libre de las llantas delantera y trasera se muestran en la figura 5.5. Desarrollando la ley de Euler con base en el diagrama de cuerpo libre obtenemos

$$-\tau_{bf} + F_{bf} R + \frac{R_r R}{2} = I \dot{\omega}_f \quad (5.39)$$

$$-\tau_{br} + F_{br} R + \frac{R_r R}{2} = I \dot{\omega}_r \quad (5.40)$$

¹Para frenado $k < 1$, lo cual indica que el coeficiente de fricción delantero es mayor que el trasero debido a la inercia del automóvil, provocando que éste tienda a girar alrededor del eje frontal.

Donde el momento de inercia es el doble del momento de inercia de una llanta. Despejando las aceleraciones angulares de las ecuaciones anteriores y sustituyendo la aceleración del automóvil en la ecuación (5.21) se obtienen las ecuaciones de movimiento para el caso de frenado.

Módulo de la desaceleración:

$$\| \dot{v} \| = (L R_a - h_a \mu_f R_a + h_a \mu_r R_a + f_r g L m \cos(\theta) + g l_2 m \mu_f \cos(\theta) + g l_1 m \mu_r \cos(\theta) - g L m \sin(\theta) - g h m \mu_f \sin(\theta) + g h m \mu_r \sin(\theta)) / (m (L - h \mu_f + h \mu_r))$$

Como: $\ddot{v} = -\dot{v} \hat{i}$

$$\dot{v} = -(L R_a - h_a \mu_f R_a + h_a \mu_r R_a + f_r g L m \cos(\theta) + g l_2 m \mu_f \cos(\theta) + g l_1 m \mu_r \cos(\theta) + g L m \sin(\theta) - g h m \mu_f \sin(\theta) + g h m \mu_r \sin(\theta)) / (m (L - h \mu_f + h \mu_r)) \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_f = & -(L R_a - h_a \mu_f R_a + h_a \mu_r R_a + f_r g L m \cos(\theta) + g l_2 m \mu_f \cos(\theta) + g l_1 m \mu_r \cos(\theta) + \\ & g L m \sin(\theta) - g h m \mu_f \sin(\theta) + g h m \mu_r \sin(\theta)) / (m (L - h \mu_f + h \mu_r)) - \\ & \frac{R}{I} (-\tau_{bf} + F_{bf} R + \frac{R_r R}{2}) \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_r = & -(L R_a - h_a \mu_f R_a + h_a \mu_r R_a + f_r g L m \cos(\theta) + g l_2 m \mu_f \cos(\theta) + g l_1 m \mu_r \cos(\theta) + \\ & g L m \sin(\theta) - g h m \mu_f \sin(\theta) + g h m \mu_r \sin(\theta)) / (m (L - h \mu_f + h \mu_r)) - \\ & \frac{R}{I} (-\tau_{br} + F_{br} R + \frac{R_r R}{2}) \end{aligned} \quad (5.43)$$

5.3 Diseño del Control

Como se mencionó, en esta sección se diseña el control sobre el par, con ello se conseguirá que el vehículo siga la señales de velocidad de centro de gravedad y relativa propuestas. Se analizará el control para el caso de aceleración y frenado.

5.3.1 Caso Tractivo

Nuestro problema consiste en obtener un control que dirija el movimiento del automóvil hacia a un comportamiento propuesto de velocidad, aceleración (del centro de gravedad y relativa) y en consecuencia de coeficiente de fricción. Por ello, dicho control actúa sobre el par en condiciones tractivas y de frenado para lograr el seguimiento de la señal de referencia propuesta y así observar el comportamiento de parámetros en el tiempo. Al igual que en el modelo de un cuarto de vehículo, los errores de seguimiento se definen como

$$\tilde{s} = s - s_d \quad (5.44)$$

$$\tilde{v} = v - v_d \quad (5.45)$$

donde $s_d = v_d \lambda_d$.

El deslizamiento deseado se obtiene mediante el mapeo inverso de la función paramétrica que relaciona el coeficiente de fricción con el deslizamiento.

$$\lambda_d = \hat{f}^{-1}(\mu_d, \hat{\Theta}, v_d) \quad (5.46)$$

Donde el coeficiente de fricción deseado (μ_d) debe cumplir análogamente con la ecuación (5.19)

$$\mu_d = \frac{L(\dot{v}_d + \frac{R_a}{m} + g \cos(\theta) f_r + g \operatorname{sen}(\theta))}{l_2 g \cos(\theta) - h_a \frac{R_a}{m} - h(\dot{v}_d + g \operatorname{sen}(\theta))} \quad (5.47)$$

Sea la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$W = \frac{1}{2} \tilde{s}^2 + \frac{1}{2} \tilde{v}^2 \quad (5.48)$$

Derivando respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{W} = \tilde{s} \dot{\tilde{s}} + \tilde{v} \dot{\tilde{v}} \quad (5.49)$$

Desarrollando la ecuación (5.49), tenemos

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \tilde{s} \left[\frac{\frac{\mu}{L} \left[(l_2 + h f_r) g \cos(\theta) - (h_a - h) \frac{R_a}{m} \right]}{1 + \frac{h}{L} \mu} - \frac{R_a}{m} - g \cos(\theta) f_r - g \operatorname{sen}(\theta) \right. \\ & \left. - \frac{R}{I} (\tau_d - F_f R + \frac{Rr R}{2}) - \lambda_d \dot{v}_d - \dot{\lambda}_d v_d \right] \end{aligned}$$

Escogiendo al par de la siguiente forma

$$\tau_d = \frac{I}{R} \left(-\frac{R_a}{m} - g \cos(\theta) f_r - g \operatorname{sen}(\theta) + \frac{\mu \left[(l_2 + h f_r) g \cos(\theta) - (h_a - h) \frac{R_a}{m} \right]}{1 + \frac{h}{L} \mu} \right) + F_f R - \frac{R_r R}{2} - \frac{\lambda_d \dot{v}_d}{R/I} - \frac{\dot{\lambda}_d v_d}{R/I} + \zeta_3 \bar{s}$$

obtenemos

$$\dot{W} = -\frac{R}{I} \zeta_3 \bar{s}^2 + \bar{v} \dot{\bar{v}}$$

Si $\zeta_3 > 0$ el primer miembro de la ecuación es una función negativa definida, lo cual indica que el error en seguimiento de velocidad relativa tiende a cero conforme pase el tiempo. El que $\bar{s} \rightarrow 0$, implica que el error en seguimiento de aceleración también tiende a cero, lo cual se demuestra en las siguientes relaciones

Si $\bar{s} = 0$ entonces $s = s_d$, por lo tanto sus derivadas también son iguales: $\dot{s} = \dot{s}_d$. Esta ecuación la podemos expresar como

$$\begin{aligned} \dot{v} - R\dot{\omega} &= \dot{v}_d - R\dot{\omega}_d \\ \dot{v} - \dot{v}_d - R(\dot{\omega} - \dot{\omega}_d) &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación anterior presenta dos posibles soluciones

1. $\dot{v} = \dot{v}_d$ y $\dot{\omega} = \dot{\omega}_d$
2. $\dot{v} - \dot{v}_d = R(\dot{\omega} - \dot{\omega}_d)$

De acuerdo con la segunda solución, un cambio en aceleración lineal implica un cambio en la aceleración angular proporcional al radio de la llanta

$$\Delta \dot{v} = R \Delta \dot{\omega}$$

El algoritmo que plantea este trabajo para obtener la velocidad angular, es el siguiente

$$v_d \rightarrow \dot{v}_d \rightarrow \mu_d \rightarrow \lambda_d \rightarrow s_d \rightarrow \omega_d$$

Con base en esta relación podemos plantear una función entre la aceleración angular y la aceleración y velocidad lineal de la siguiente forma

$$\dot{\omega} = f(v, \dot{v}, \mu, \lambda)$$

Al observar las gráficas que relacionan el coeficiente de fricción con el deslizamiento se muestra un comportamiento no lineal, por lo que un cambio en aceleración lineal implica un cambio en aceleración angular de tipo no lineal.

$$\dot{\omega} = f(v, \dot{v}, \mu, \lambda) \neq R\dot{v}$$

Por ello para satisfacer $\dot{s} = \dot{s}_d$ sólo es posible que se presente la solución número uno. El lograr igualdad en velocidades relativas implica obtener igualdad en aceleraciones lineales, más no implica igualar velocidades lineales por lo cual es necesario agregar un término correctivo en el coeficiente de fricción, que dependa del error de velocidad y con ello lograr la siguiente relación

$$\dot{\tilde{v}} = \dot{v} - (\dot{v}_d + \zeta\tilde{v})$$

$$\ddot{\tilde{v}} = (\dot{v} - \zeta\tilde{v}) - \dot{v}_d$$

La cual indica que, aunque se logre que $\dot{v} \rightarrow \dot{v}_d$, si existe error en la velocidad, el control proporcionará aceleración al vehículo. El término correctivo puede ser introducido en el coeficiente de fricción que influirá directamente en el par de control a través del deslizamiento y la aceleración deseada.

Analizando la fuerza de fricción por orden de magnitudes podemos obtener las siguientes aproximaciones

$$F_f = \frac{\frac{\mu}{L} [(l_2 + hf_r)W \cos(\theta) - (h_a - h)R_a]}{1 + \frac{h}{L}\mu}$$

$$f_r h + l_2 \approx l_2 \quad \text{Debido a que: } f_r \approx 0$$

$$L(1 + \frac{h}{L}\mu) \approx L \quad \text{Debido a que: } h \ll L \quad \text{y} \quad \mu \in [0, 1]$$

Si al coeficiente de fricción deseado le agregamos el término $\zeta_5 \tilde{v}$ (término correctivo de velocidad lineal) la ecuación (5.49) puede escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \dot{W} &= -\frac{R}{I} \zeta_3 \tilde{s}^2 + \tilde{v} \left[\dot{v} - \left((\mu_d + \zeta_5 \tilde{v}) \frac{-(h_a - h) \frac{R_{ad}}{m} + l_2 g \cos(\theta)}{L} - \frac{R_{ad}}{m} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - g \cos(\theta) f_{rd} - g \sin(\theta) \right) \right] \\
 &= -\zeta_4 \tilde{s}^2 + \tilde{v} \left[\dot{v} - \left(\dot{v}_d + \zeta_5 \frac{-(h_a - h) \frac{R_{ad}}{m} + l_2 g \cos(\theta)}{L} \tilde{v} \right) \right] \\
 &= -\zeta_4 \tilde{s}^2 + \tilde{v} (\dot{v} - \dot{v}_d) - \zeta_5 \frac{-(h_a - h) \frac{R_{ad}}{m} + l_2 g \cos(\theta)}{L} \tilde{v}^2 \\
 &= -\zeta_4 \tilde{s}^2 + \tilde{v} (\dot{v} - \dot{v}_d) - \zeta_6 \tilde{v}^2
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Expresión idéntica a la ecuación (4.25) del capítulo anterior, a partir de la cual se demuestra la acotación de los errores de seguimiento.

5.3.2 Caso Frenado

Para este caso es necesario definir dos errores de seguimiento debido al comportamiento distinto que tienen las llantas delanteras como las traseras, es decir

$$\tilde{s}_f = s_f - s_{df} \tag{5.51}$$

$$\tilde{s}_r = s_r - s_{dr} \tag{5.52}$$

Probando la misma candidata a función de Lyapunov del caso tractivo

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{1}{2} \tilde{s}_f^2 + \frac{1}{2} \tilde{v}^2 & W_2 &= \frac{1}{2} \tilde{s}_r^2 + \frac{1}{2} \tilde{v}^2 \\
 \dot{W}_1 &= \tilde{s}_f \dot{\tilde{s}}_f + \tilde{v} \dot{\tilde{v}} & \dot{W}_2 &= \tilde{s}_r \dot{\tilde{s}}_r + \tilde{v} \dot{\tilde{v}} \\
 \dot{W}_1 &= \tilde{s}_f \dot{\tilde{s}}_f + \tilde{v} (\dot{v} - \dot{v}_d) & \dot{W}_2 &= \tilde{s}_f \dot{\tilde{s}}_f + \tilde{v} (\dot{v} - \dot{v}_d)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas respecto al tiempo de las funciones de error en velocidad relativa se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \dot{W}_1 &= \tilde{s}_f \left[- (L R_a - h_a \mu_f R_a + h_a \mu_r R_a + f_r g L m \cos(\theta) + g l_2 m \mu_f \cos(\theta) + g l_1 m \mu_r \cos(\theta) + \right. \\
 &\quad \left. g L m \sin(\theta) - g h m \mu_f \sin(\theta) + g h m \mu_r \sin(\theta)) / (m (L - h \mu_f + h \mu_r)) - \right. \\
 &\quad \left. \frac{R}{I} (-\tau_{bf} + F_{bf} R + \frac{R_r R}{2}) - \lambda_{df} \dot{v}_d - v_d \lambda_{df} \right] + \tilde{v} \dot{v}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 = & \tilde{s}_r \left[- (L R_a - h_a \mu_f R_a + h_a \mu_r R_a + f_r g L m \cos(\theta) + g l_2 m \mu_f \cos(\theta) + g l_1 m \mu_r \cos(\theta) + \right. \\ & \left. g L m \sin(\theta) - g h m \mu_f \sin(\theta) + g h m \mu_r \sin(\theta)) / (m (L - h \mu_f + h \mu_r)) - \right. \\ & \left. \frac{R}{I} (-\tau_{br} + F_{br} R + \frac{R_r R}{2}) - \lambda_{dr} \dot{v}_d - v_d \dot{\lambda}_{dr} \right] + \tilde{v} \dot{v} \end{aligned}$$

Eligiendo al par delantero de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tau_{bf} = & \frac{I}{R} \left[- (L R_a - h_a \mu_f R_a + h_a \mu_r R_a + f_r g L m \cos(\theta) + g l_2 m \mu_f \cos(\theta) + g l_1 m \mu_r \cos(\theta) + \right. \\ & \left. g L m \sin(\theta) - g h m \mu_f \sin(\theta) + g h m \mu_r \sin(\theta)) / (m (L - h \mu_f + h \mu_r)) + \right. \\ & \left. \frac{R}{I} (F_{bf} R + \frac{R_r R}{2}) + \lambda_{df} \dot{v}_d + v_d \dot{\lambda}_{df} - \zeta_7 \tilde{s}_f \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

obtenemos

$$\dot{W}_1 = -\zeta_7 \tilde{s}_f^2 + \tilde{v} \dot{v} \quad (5.54)$$

La ecuación (5.41) puede ser escrita de la siguiente forma

$$\dot{v} = - \frac{(L - h_a \mu_f + h_a \mu_r) \frac{R_a}{m} + (f_r L + l_2 \mu_f + l_1 \mu_r) g \cos(\theta) + (L - h \mu_f + h \mu_r) g \sin(\theta)}{L - h \mu_f + h \mu_r} \quad (5.55)$$

Por lo tanto, la aceleración deseada debe cumplir con la siguiente ecuación

$$\dot{v}_d = - \frac{(L - h_a \mu_{fd} + h_a \mu_{rd}) \frac{R_{ad}}{m} + (f_{rd} L + l_2 \mu_{fd} + l_1 \mu_{rd}) g \cos(\theta) + (L - h \mu_{fd} + h \mu_{rd}) g \sin(\theta)}{L - h \mu_{fd} + h \mu_{rd}} \quad (5.56)$$

Analizando la ecuación anterior por orden de magnitudes podemos hacer las siguientes aproximaciones

$$\begin{aligned} (L - h_a \mu_{fd} + h_a \mu_{rd}) \frac{R_{ad}}{m} & \approx L \frac{R_{ad}}{m} \quad \text{Debido a: } \mu_{fd} \approx \mu_{rd} \\ (f_{rd} L + l_2 \mu_{fd} + l_1 \mu_{rd}) g \cos(\theta) & \approx (l_2 \mu_{fd} + l_1 \mu_{rd}) g \cos(\theta) \quad \text{Debido a: } f_{rd} \approx 0 \\ (L - h \mu_{fd} + h \mu_{rd}) g \sin(\theta) & \approx L \sin(\theta) \\ L - h \mu_f + h \mu_r & \approx L \end{aligned}$$

Eligiendo a los coeficientes de fricción deseados de la siguiente manera

$$\mu_{fd} = \mu_{fd} + \zeta_8 \tilde{v}$$

$$\mu_{rd} = k \mu_{fd}$$

Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación (5.56) y utilizando las aproximaciones se obtiene

$$\dot{v}_d \approx -\frac{L\frac{R_{nd}}{m} + [l_2(\mu_{fd} + \zeta_8\tilde{v}) + l_1k(\mu_{fd} + \zeta_8\tilde{v})]g\cos(\theta) + Lg\sin(\theta)}{L} \quad (5.57)$$

Como $\vec{a} = -\dot{v}\hat{i}$ y $\vec{a}_d = -\dot{v}_d\hat{i}$

$$\begin{aligned} \dot{v} - \dot{v}_d &= -\vec{a} - (-\vec{a}_d) \\ &= -\vec{a} + \vec{a}_d \end{aligned}$$

la ecuación (5.54) se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= -\zeta_7 s_f^2 + \tilde{v} \left[\dot{v} - \frac{L\frac{R_{nd}}{m} + [l_2(\mu_{fd} + \zeta_8\tilde{v}) + l_1k(\mu_{fd} + \zeta_8\tilde{v})]g\cos(\theta) + Lg\sin(\theta)}{L} \right] \\ &= -\zeta_7 s_f^2 + \tilde{v}\dot{v} - \tilde{v} \left[\frac{L\frac{R_{nd}}{m} + l_2g\cos(\theta)\mu_{fd} + l_1g\cos(\theta)k\mu_{fd} + Lg\sin(\theta)}{L} \right] - \zeta_8\tilde{v}^2 \\ &= -\zeta_7 s_f^2 + \tilde{v}\dot{v} - \tilde{v}\dot{v}_d - \zeta_8\tilde{v}^2 \\ &= -\zeta_7 s_f^2 + \tilde{v}(\dot{v} - \dot{v}_d) - \zeta_8\tilde{v}^2 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Expresión idéntica a la obtenida en el modelo de un cuarto de vehículo (ec. 4.25), a partir de ésta se demuestra la acotación de los errores de seguimiento como se hizo en el capítulo anterior.

Por lo tanto el par del eje trasero es

$$\begin{aligned} \tau_{br} &= \frac{I}{R} \left[- (L R_a - h_a \mu_f R_a + h_a \mu_r R_a + f_r g L m \cos(\theta) + g l_2 m \mu_f \cos(\theta) + g l_1 m \mu_r \cos(\theta) + \right. \\ &\quad \left. g L m \sin(\theta) - g h m \mu_f \sin(\theta) + g h m \mu_r \sin(\theta)) / (m (L - h \mu_f + h \mu_r)) + \right. \\ &\quad \left. \frac{R}{I} (F_{br} R + \frac{R_r R}{2}) + \lambda_{dr} \dot{v}_d + v_d \dot{\lambda}_{dr} - \zeta_9 \tilde{s}_r \right] \end{aligned} \quad (5.59)$$

Con ello se logra

$$\dot{W}_2 = -\frac{R}{I} \zeta_9 \tilde{s}_r^2 + \tilde{v}\dot{v} \quad (5.60)$$

Y se realiza un procedimiento similar para el eje trasero.

F_{bf} y F_{br} se obtienen a partir de las ecuaciones (5.36) y (5.37) respectivamente.

5.4 Resultado de Simulaciones

A continuación se muestran los resultados obtenidos acerca del comportamiento paramétrico y la dinámica del vehículo. Igualmente se realizaron experimentos variando la amplitud de la velocidad de referencia así como su periodo y se observó el desempeño en la adaptación de parámetros. En el apéndice B (figuras B.3 y B.4) se presentan las tablas de resultados para diversas amplitudes y periodos de excitación. Las ganancias utilizadas fueron

Caso tractivo:

$$\zeta_3 = 30 \quad \zeta_5 = 0.1$$

Caso frenado:

$$\zeta_7 = 20 \quad \zeta_8 = 0.1 \quad \zeta_9 = 20 \quad \zeta_{10} = 0.07$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 9.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.036 \end{pmatrix}$$

5.5 Análisis de Resultados

En las figuras 5.6 y 5.7 mostramos el comportamiento deseado del vehículo. La señal de velocidad de referencia es idéntica a la propuesta para el modelo de un cuarto de vehículo con un periodo de diez segundos, una velocidad media de 23 (m/s) y una amplitud de 5.5 (m/s). A partir de ésta señal se obtiene la aceleración del centro de gravedad, velocidades relativas y los coeficientes de fricción deseados para el caso de aceleración

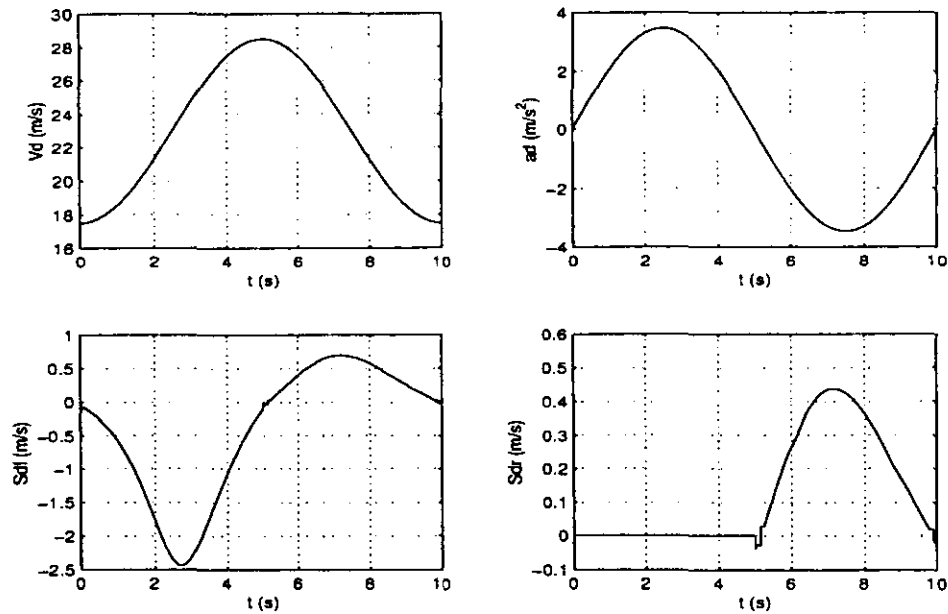


Figura 5.6: Variables de referencia o “deseadas”.

y frenado. Posteriormente en la figura 5.8 observamos el par de control que propicia un comportamiento similar a las referencias, dicho comportamiento lo observamos en la gráfica de velocidad del centro de gravedad en la misma figura. La aceleración, velocidades relativas y coeficientes de fricción reales se muestran en las figuras 5.9 y 5.10.

5.5.1 Del Control

Para este modelo en los resultados del control observamos que también presenta un buen desempeño aproximando el comportamiento dinámico hacia las señales propuestas. Las figuras 5.11 y 5.12 muestran empalmadas las señales de referencia y el comportamiento del vehículo.

La figura 5.14 de error en estimación del coeficiente de fricción también presenta una discontinuidad a los 5 segundos la cual surge por las mismas razones citadas en el análisis del modelo cuarto de vehículo.

En la figura de error de velocidad del centro de gravedad (fig. 5.13) se presentó un buen

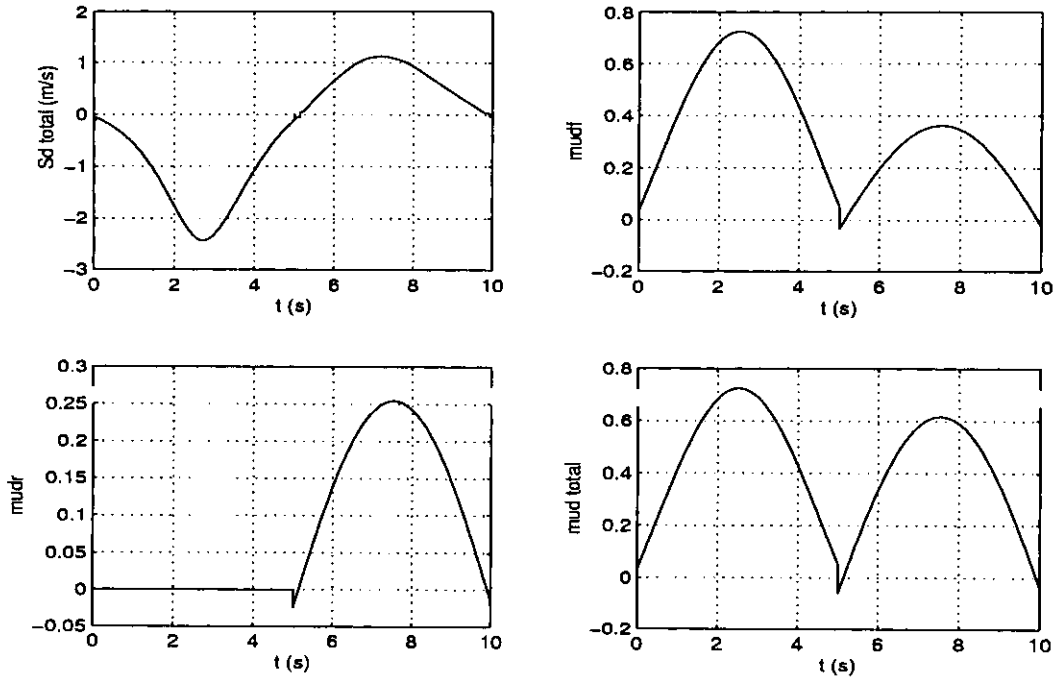


Figura 5.7: Variables de referencia o "deseadas".

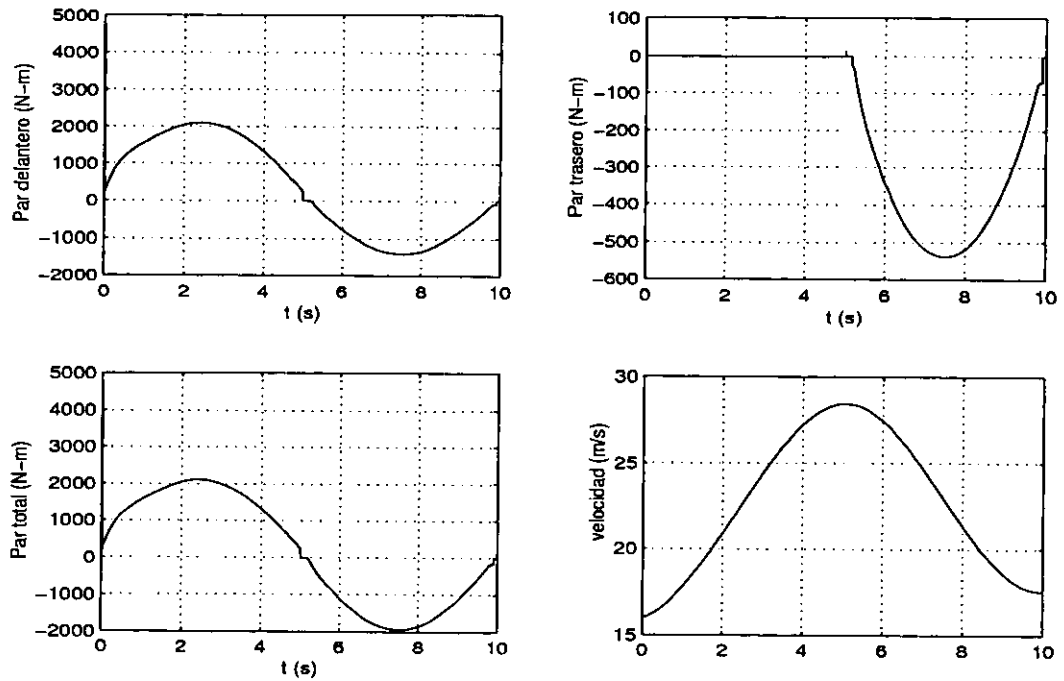


Figura 5.8: Par y comportamiento del vehículo.

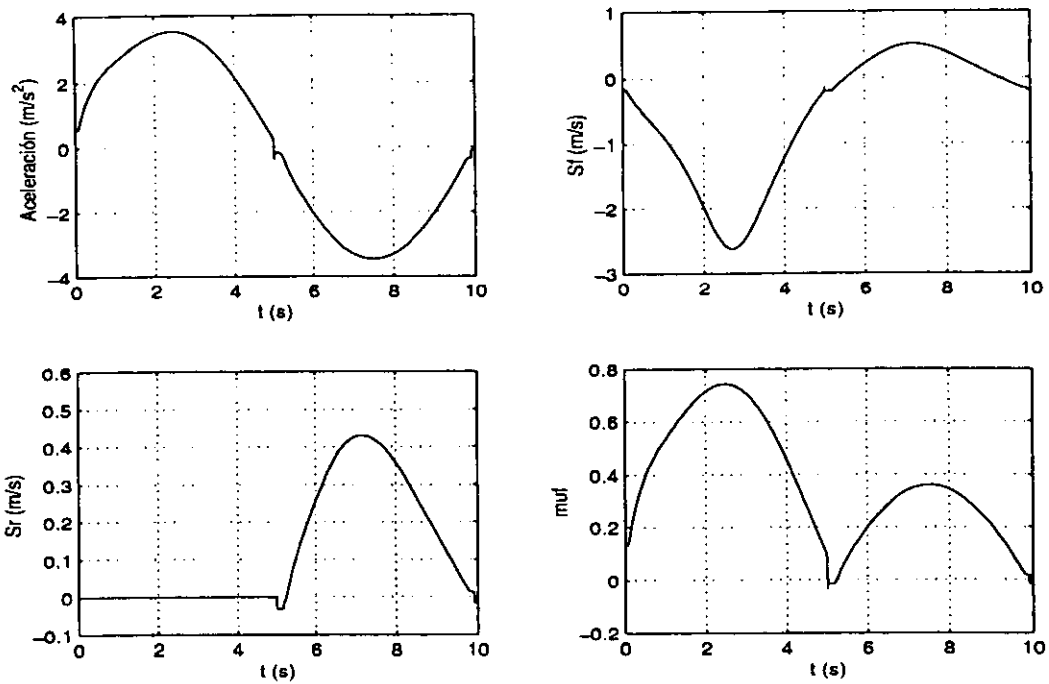


Figura 5.9: Par y comportamiento del vehículo.

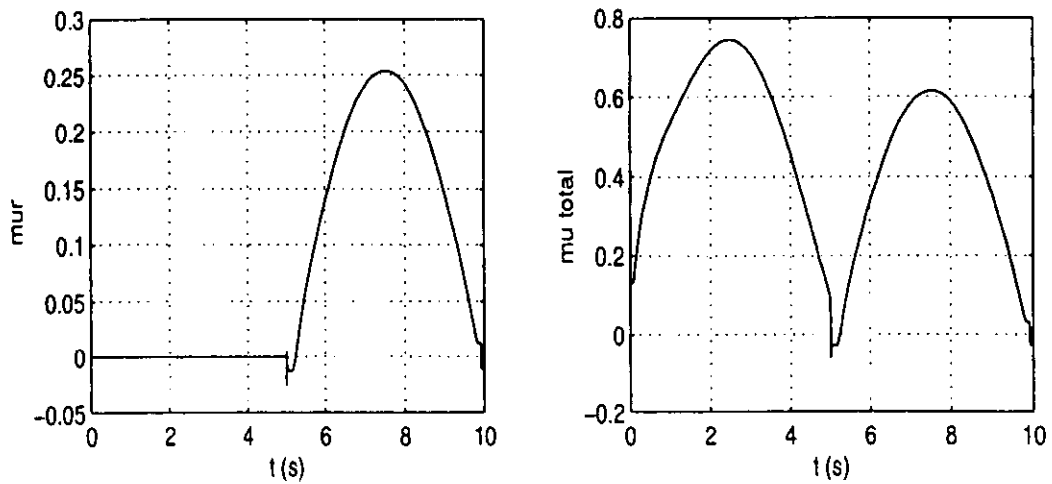


Figura 5.10: Coeficientes de fricción.

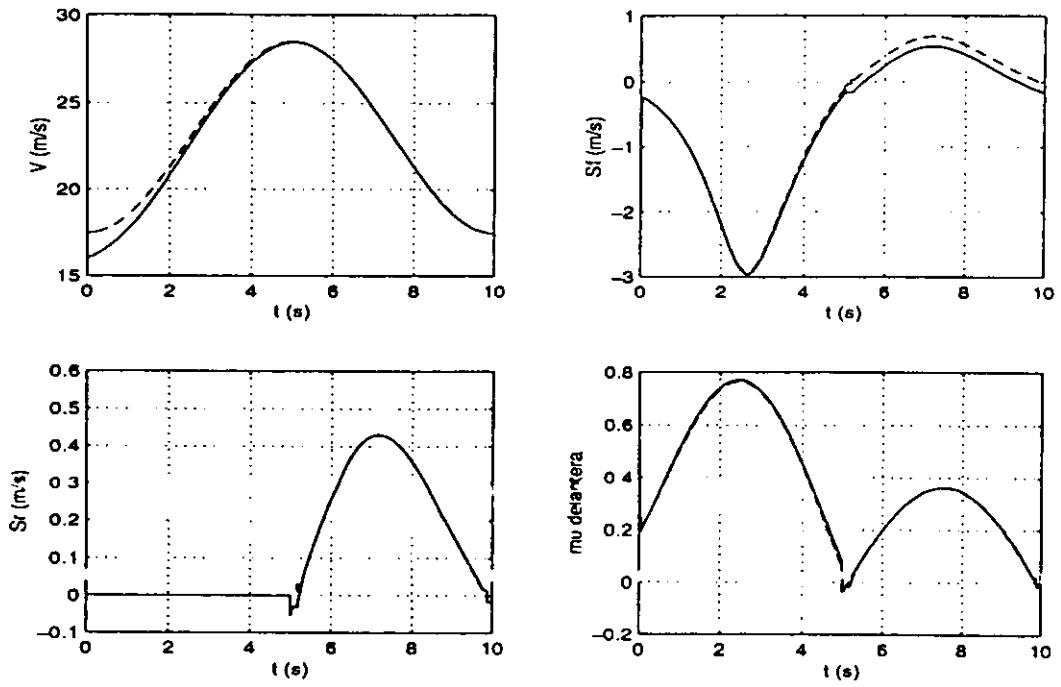


Figura 5.11: Seguimiento de señales.

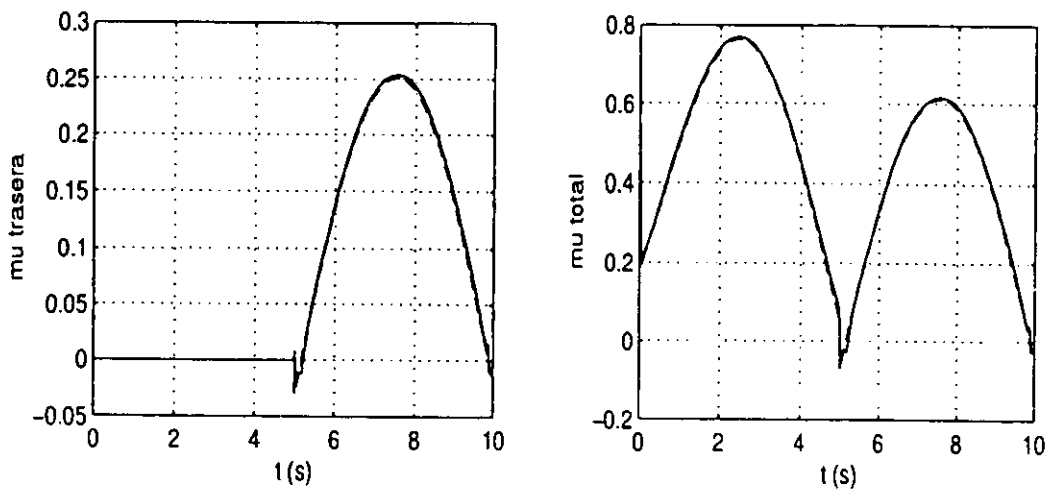


Figura 5.12: Seguimiento de señales.

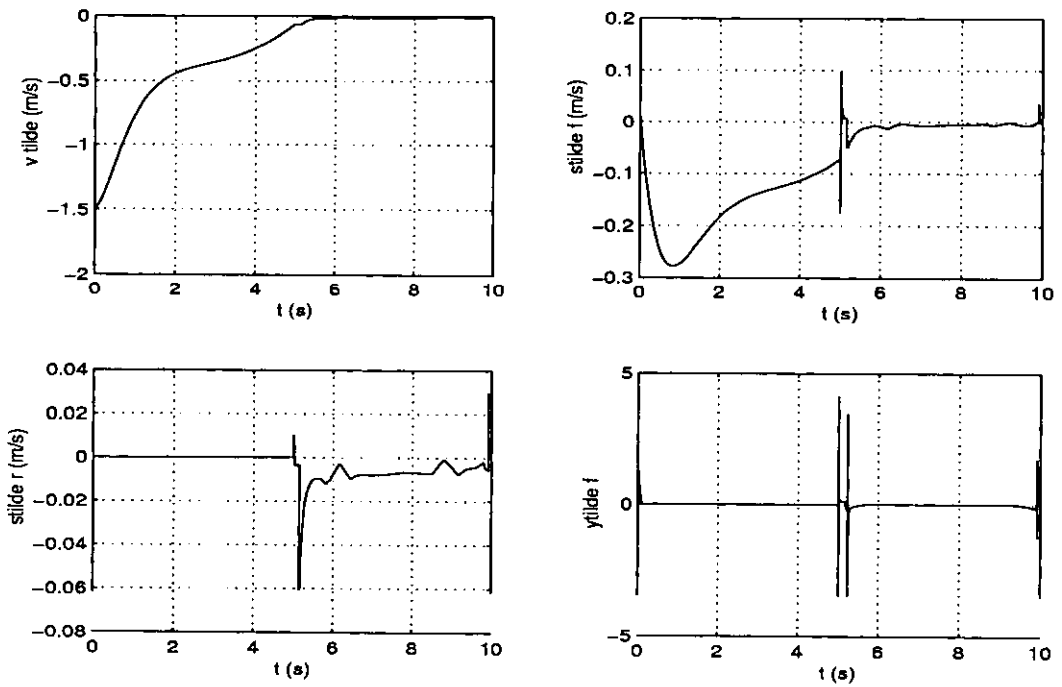


Figura 5.13: Señales de error.

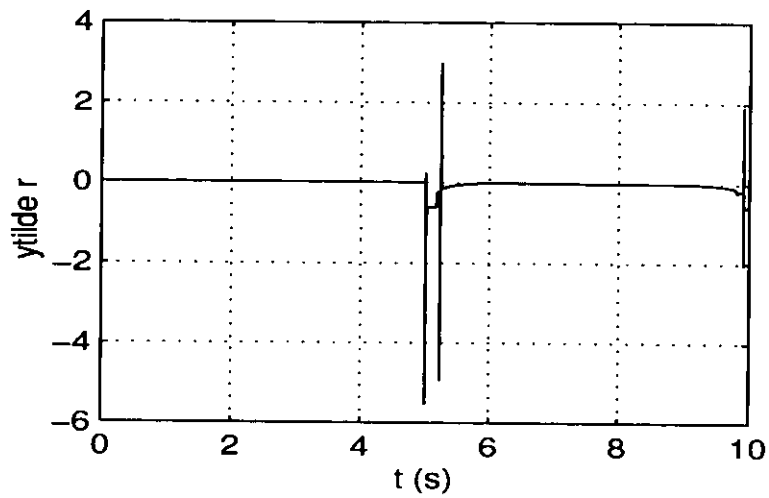


Figura 5.14: Señales de error.

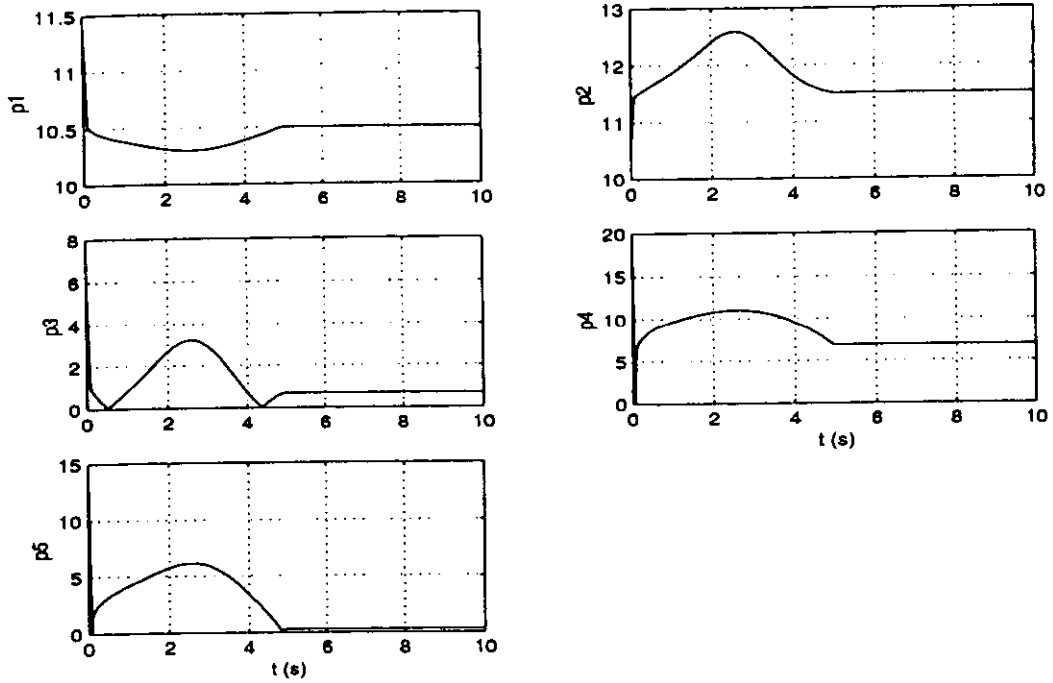


Figura 5.15: Evolución del error porcentual.

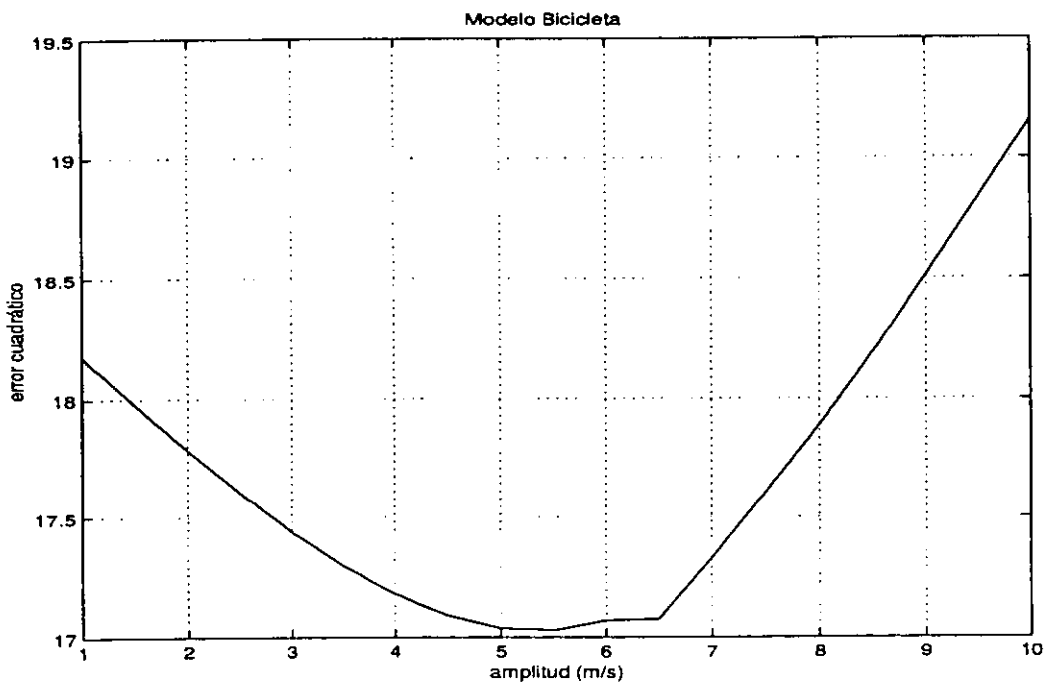


Figura 5.16: Amplitud de excitación vs. error cuadrático del vector de errores.

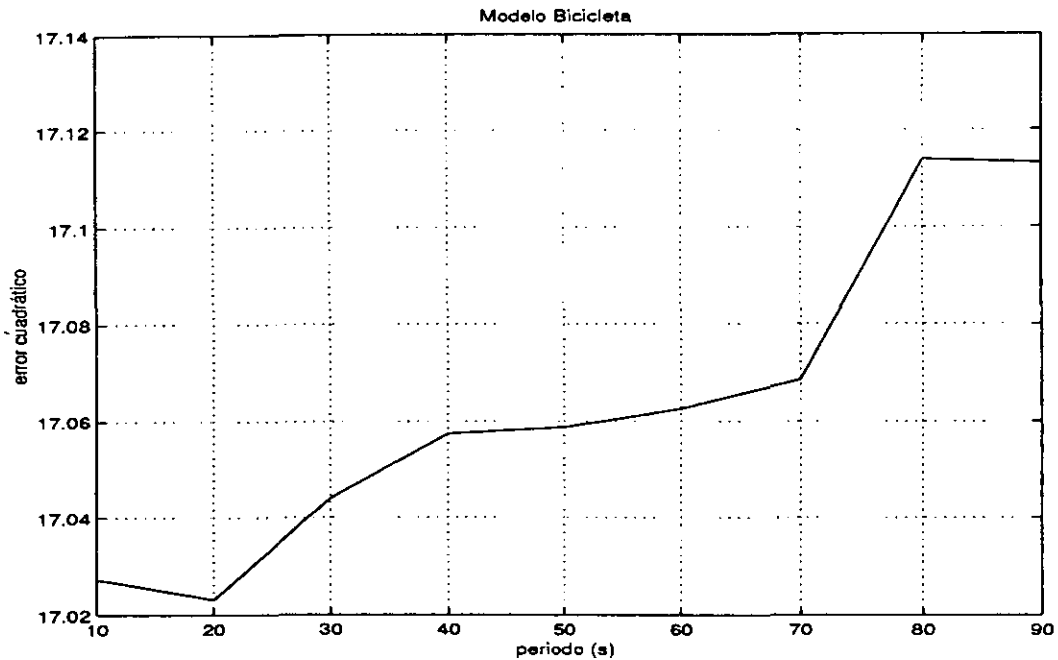


Figura 5.17: Periodo de excitación vs. error cuadrático del vector de errores.

seguimiento hacia la referencia para todas las simulaciones. El error en seguimiento para ambas velocidades relativas se mantienen alrededor del punto de equilibrio logrando su estabilización a partir de los 5 segundos.

5.5.2 Convergencia Paramétrica

Al sistema se le añadió un componente de excitación de ruido blanco con el objetivo de lograr una mejor adaptabilidad en los parámetros. En el apéndice B se proporcionan dos tablas de resultados (fig. B.3 y fig. B.4) las cuales muestran el comportamiento de los parámetros con varias amplitudes de excitación y de periodo. En la gráfica 5.16 se observa que el control obtiene resultados con mayor precisión si la velocidad oscila entre 3 y 7 (m/s), obteniendo el mínimo de error a los 5.5 (m/s) lo cual representa que si el automóvil se encuentra en un rango de velocidades entre 10.8 y 25.2 (km/h) alrededor de su velocidad media el sistema obtendrá una buena adaptabilidad. En la gráfica 5.17 observamos que la tendencia del error cuadrático es ascendente conforme se incrementa

el periodo de la señal de excitación, pero en términos generales éste permanece invariante en el tiempo ya que la diferencia máxima en errores es de 0.1 % por lo cual concluimos que la adaptabilidad no depende del periodo de la señal. El error porcentual para todos los casos se estabiliza a los 5 segundos como lo muestra la figura 5.15

5.5.3 Rango

Para todas las simulaciones se calculó el rango de la matriz $\Phi(t)$ obteniendo un resultado igual a cinco lo cual al igual que el modelo del capítulo anterior permite condición de excitación persistente [3].

Capítulo 6

Conclusiones

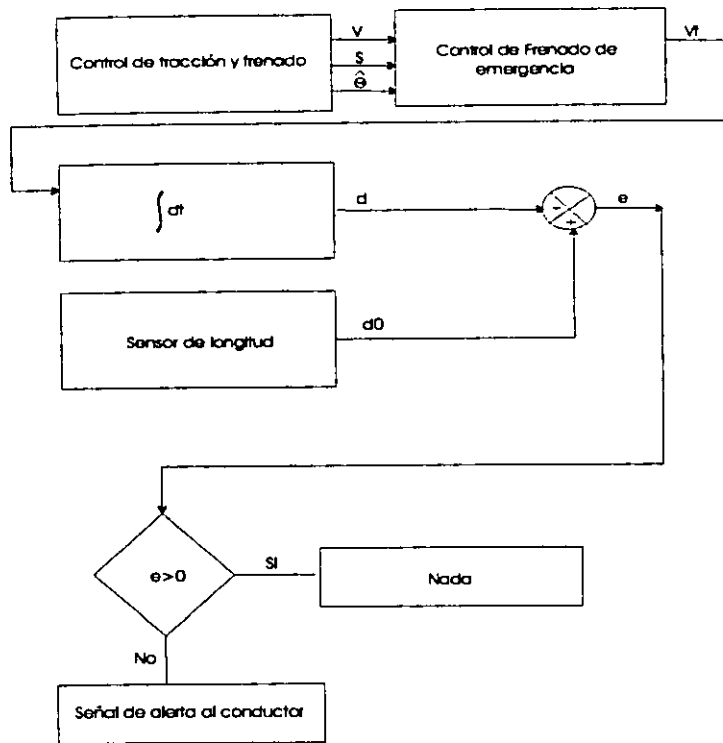
En este trabajo hemos desarrollado un control de tracción y frenado vehicular que explota el conocimiento del coeficiente de fricción entre la llanta/camino, obteniendo con ello una mejor precisión en el conocimiento de las variables dinámicas del sistema, información que puede ser utilizada para predecir la distancia que sería recorrida en una acción de frenado de emergencia, lo cual influye directamente en la seguridad del pasajero en autopistas.

Se estudió el desempeño del control para dos modelos de vehículo: el primero llamado “cuarto de vehículo” y el segundo llamado “modelo bicicleta”. Los resultados para cada caso muestran coincidir con la teoría planteada y prueban la estabilidad del control alrededor del punto de equilibrio $\bar{s} = 0$ y $\bar{v} = 0$. Ambos diseños logran buenos resultados en su desempeño aunque no logren convergencia paramétrica para todas las señales de excitación. Observamos una buena aproximación en el modelo de un cuarto de vehículo al modelo bicicleta. Podemos observar en las gráfica 4.3 el par aplicado a cada llanta, el cual, multiplicado por las cuatro llantas proporciona el par total requerido para mover el automóvil hacia las señales de referencia propuestas. Para el periodo de aceleración en el modelo de un cuarto de vehículo se obtiene un par máximo de 500 (N-m) por llanta el cual, multiplicado por el total de llantas proporciona un par total de 2000 (N-m), cantidad equivalente al par obtenido para el modelo bicicleta, sólo que en este modelo el par se

encuentra distribuido en 2 llantas (tracción delantera). Para el periodo de frenado, las gráficas obtenidas son idénticas para ambos modelos de automóviles coincidiendo con las hipótesis planteadas de que las cuatro llantas contribuyen al frenado en ambos modelos. Es claro que, para el caso tractivo, el comportamiento del coeficiente de fricción sea distinto para ambos modelos debido a la distribución de fuerzas de fricción. Para el modelo de un cuarto de vehículo existen cuatro fuerzas de fricción en cada llanta mientras que en el modelo bicicleta la fuerza tractiva se obtiene a partir de dos llantas lo cual conlleva a que este sea mayor para dicho modelo por lo tanto las variables que dependen directamente del coeficiente de fricción como lo son el deslizamiento y la velocidad relativa también son mayores para el modelo bicicleta. Observamos que el modelo de un cuarto de vehículo proporciona una adecuada aproximación al modelo bicicleta de algunas variables como el par, velocidad del centro de gravedad del vehículo, aceleración y coeficiente de fricción; con la ventaja de ser un modelo simétrico, lo cual ayuda a evitar discontinuidades en la transición de comportamiento tractivo hacia comportamiento de frenado. Las variables en las cuales no se obtiene una adecuada aproximación son aquellas que son obtenidas con base en el coeficiente de fricción (deslizamiento y velocidad relativa) debido a que no existe una relación 'lineal' entre estas por lo que para este caso es necesario utilizar el modelo bicicleta.

Ambos modelos muestran la mejor convergencia paramétrica hacia los valores nominales cuando la señal de excitación posee una amplitud de 5.5 (m/s), mientras que la convergencia paramétrica es independiente de la variación del periodo de excitación para ambos modelos de vehículo, aunque la tendencia del error cuadrático es ascendente la variación es muy pequeña.

La aplicación directa del seguimiento de señales para contribuir a mejorar la seguridad de los pasajeros se muestra en el siguiente diagrama:



La investigación queda abierta para tratar los siguientes puntos:

1. Probar el desempeño del control para diferentes pendientes y coeficientes de arrastre.
2. Disminuir la información sensada del sistema mediante la estimación de velocidad y aceleración del centro de gravedad del vehículo.
3. Probar la adaptación de parámetros para diversos tipos de camino como asfalto mojado, hielo, terracería, etc.
4. Probar el desempeño del control y adaptación de parámetros simulando el tránsito de un camino a otro.
5. Diseñar un simulador de frenado de emergencia que trabaje con el modelo bicicleta.
6. Tomar este trabajo como base para diseñar un sistema que proporcione señales de alerta al conductor en autopistas.

Apéndice A

Características del Automóvil.

En las simulaciones llevadas acabo en este trabajo se consideró un automóvil con las siguientes características :

$$m=1701 \text{ (Kg)}$$

$$R=0.323 \text{ (m)}$$

$$I=2.603 \text{ (Kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$g=9.8 \text{ (m/s}^2)$$

$$l_1=1.2 \text{ (m)}$$

$$l_2=1.8 \text{ (m)}$$

$$L=3 \text{ (m)}$$

$$h_a=0.80 \text{ (m)}$$

$$h=0.65 \text{ (m)}$$

$$\theta=0^\circ$$

$$k=0.7$$

Vehículo	Cd	Cd × A (m ²)
VW Golf	0.37	0.636
Ford Escort	0.36	0.662
BMW 520i	0.31	0.649
Mercedes 300 SE	0.36	0.785

Tabla A.1: Coeficientes de arrastre para diversos vehículos.

El coeficiente C_{ax} utilizado en la expresión (3.6) se obtuvo de la siguiente forma:

Empleando la ecuación de gas ideal :

$$PV = mRT \quad (\text{A.1})$$

$$P = \rho RT \quad (\text{A.2})$$

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (\text{A.3})$$

La presión y temperatura atmosférica promedio en la ciudad de México es de 78 (KPa) y 20 °C respectivamente. Por lo que la densidad del aire queda dada por:

$$\rho = \frac{78(\text{KPa})}{0.287 \left(\frac{\text{KJ}}{\text{KgK}} \right) \times (20 + 273.15) \text{K}} = 0.9270 \left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right) \quad (\text{A.4})$$

En la tabla A.1 se muestran diversos coeficientes de arrastre para distintos automóviles, en este trabajo se empleó un promedio del producto del coeficiente de arrastre por el área proyectada siendo igual a: $C_d \times A = 0.683$, por lo que $C_{ax} = \frac{1}{2} \rho C_d A = 0.3165 \text{ (Kg/m)}$

Apéndice B

Tablas de Resultados.

Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos en las simulaciones correspondientes al error de convergencia en los parámetros.

Así mismo la gráfica B.5 muestra diversas curvas de coeficiente de fricción vs. deslizamiento a una velocidad de 15 (m/s) para diversos tipos de camino. Los vectores de parámetros aproximados son los siguientes:

Asfalto mojado: $\hat{\Theta} \approx [2.8, 2.0, 1.3, 0.5, 0.095]$

Hielo: $\hat{\Theta} \approx [1.3, 2.2, 1.4, 0.7, 0.06]$

Grava: $\hat{\Theta} \approx [3.16, 3.9, 2.64, 1.05, 0.01]$

Amplitud (m/s)	Error Porcentual de Convergencia					Error Cuadrático
	p1'	p2	p3	p4	p5	
10.000	10.592	11.148	2.644	6.440	4.034	17.355
9.500	10.595	11.132	2.717	6.444	3.584	17.260
9.000	10.595	11.132	2.701	6.388	3.086	17.140
8.500	10.597	11.120	2.750	6.363	2.630	17.056
8.000	10.595	11.123	2.721	6.372	2.100	16.982
7.500	10.595	11.123	2.711	6.340	1.605	16.915
7.000	10.595	11.118	2.730	6.378	1.101	16.888
6.500	10.596	11.117	2.734	6.310	0.638	16.839
6.000	10.596	11.114	2.743	6.323	0.145	16.832
5.500	10.596	11.117	2.727	6.274	0.343	16.816
5.000	10.596	11.117	2.724	6.277	0.841	16.834
4.500	10.597	11.116	2.728	6.233	1.310	16.848
4.000	10.597	11.117	2.719	6.212	1.802	16.865
3.500	10.600	11.104	2.791	6.211	2.220	16.940
3.000	10.603	11.101	2.809	6.149	2.656	16.982
2.500	10.603	11.100	2.815	6.148	3.140	17.065
2.000	10.604	11.103	2.803	6.093	3.608	17.138
1.500	10.603	11.108	2.774	6.086	4.131	17.252
1.000	10.602	11.114	2.743	6.060	4.655	17.374

Figura B.1: Error en convergencia para el modelo cuarto de vehículo variando amplitud.

Periodo (s)	Error Porcentual de convergencia					Error Cuadrático
	p1'	p2	p3	p4	p5	
10.000	10.596	11.118	2.723	6.270	0.345	16.814
20.000	10.600	11.098	2.822	6.254	0.367	16.815
30.000	10.605	11.082	2.913	6.224	0.281	16.810
40.000	10.606	11.083	2.908	6.192	0.296	16.799
50.000	10.605	11.086	2.891	6.206	0.374	16.805
60.000	10.604	11.088	2.880	6.247	0.431	16.819
70.000	10.602	11.093	2.853	6.255	0.460	16.821
80.000	10.603	11.090	2.868	6.247	0.442	16.819
90.000	10.603	11.092	2.861	6.232	0.441	16.813

Figura B.2: Error en convergencia para el modelo cuarto de vehículo variando periodo.

Amplitud (m/s)	Error Porcentual de Convergencia					Error Cuadrático
	p1'	p2	p3	p4	p5	
10.000	10.331	11.853	2.329	10.665	0.698	19.154
9.500	10.361	11.732	1.777	10.313	0.674	18.835
9.000	10.373	11.604	1.229	9.912	0.726	18.509
8.500	10.397	11.502	0.734	9.452	0.815	18.192
8.000	10.421	11.427	0.301	8.937	0.922	17.888
7.500	10.446	11.379	0.090	8.375	1.050	17.602
7.000	10.471	11.352	0.393	7.767	1.138	17.328
6.500	10.494	11.357	0.609	7.122	1.153	17.074
6.000	10.502	11.530	0.668	6.884	0.553	17.069
5.500	10.505	11.502	0.757	6.828	0.334	17.028
5.000	10.508	11.486	0.813	6.771	1.188	17.037
4.500	10.510	11.475	0.857	6.722	2.002	17.090
4.000	10.512	11.469	0.878	6.675	2.784	17.179
3.500	10.514	11.466	0.896	6.631	3.522	17.297
3.000	10.515	11.465	0.899	6.590	4.231	17.440
2.500	10.516	11.468	0.888	6.551	4.911	17.604
2.000	10.516	11.471	0.875	6.512	5.556	17.782
1.500	10.517	11.475	0.859	6.479	6.173	17.975
1.000	10.517	11.479	0.838	6.450	6.762	18.177

Figura B.3: Error en convergencia para el modelo bicicleta variando amplitud.

Periodo (s)	Error Porcentual de Convergencia					Error Cuadrático
	p1'	p2	p3	p4	p5	
10.000	10.505	11.503	0.753	6.825	0.335	17.027
20.000	10.513	11.459	0.928	6.705	1.466	17.023
30.000	10.514	11.456	0.944	6.675	1.808	17.044
40.000	10.515	11.456	0.941	6.661	1.973	17.057
50.000	10.515	11.455	0.947	6.641	2.049	17.059
60.000	10.515	11.456	0.946	6.634	2.101	17.063
70.000	10.515	11.456	0.947	6.639	2.135	17.069
80.000	10.512	11.460	0.922	6.726	2.227	17.114
90.000	10.512	11.458	0.932	6.728	2.221	17.113

Figura B.4: Error en convergencia para el modelo bicicleta variando periodo.

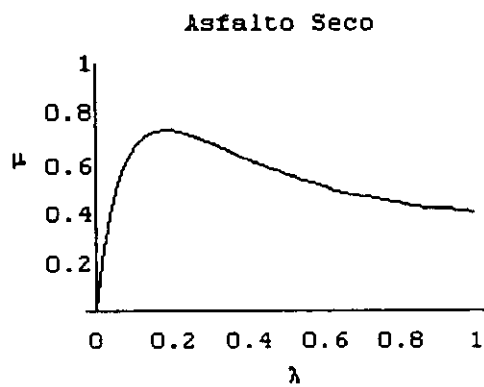
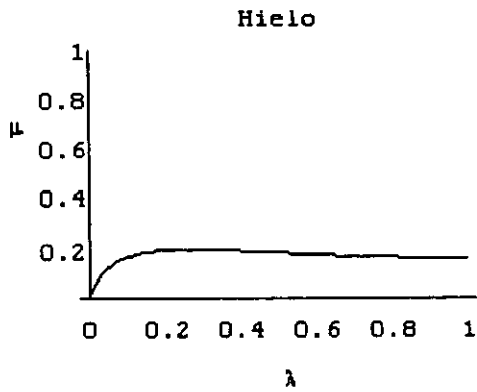
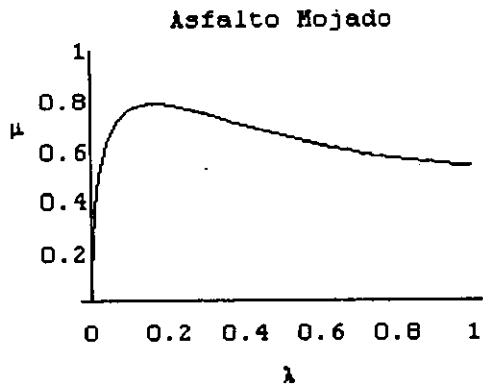


Figura B.5: Diversas curvas del coeficiente de fricción para diversos caminos

Bibliografía

- [1] Carlos Canudas de Wit, Panagiotis Tsiotras. DYNAMIC TIRE FRICTION MODELS FOR VEHICLE TRACTION CONTROL. Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control, Phoenix, Arizona USA - December 1999. p. 3746-3747
- [2] Luis Alvarez, Jingang Yi. ADAPTIVE EMERGENCY BRAKING CONTROL IN AUTOMATED HIGHWAY SYSTEMS. Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona USA- December 1999. pp. 3740-3745
- [3] J.J Slotine and W. Li . APPLIED NON LINEAR CONTROL. USA:Prentice Hall 1991.
- [4] M. Buckhardt. FAHRWERKTECHNIK: RADSCLUPFREGELSYSTEME. Germany Vogel-Verlag, 1993.
- [5] J.Y Wong THEORY OF GROUND VEHICLES. (Second edition) New York, NY:John Wiley & sons, 1993.
- [6] Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr. DINÁMICA. (5ª edición) Edit. Mc. Graw Hill. México 1990. p. 314
- [7] Dragos Bodgan Maciucă. NONLINEAR ROBUST AND ADAPTIVE WITH APPLICATION TO BRAKE CONTROL FOR AUTOMATED HIGHWAY SYSTEMS. Thesis University of California, Berkeley, 1997.
- [8] Faires Virgil. DISEÑO DE ELEMENTOS DE MÁQUINAS. (6ª edición) Edit. Limusa. México 1997