UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL CURSO DE MATEMATICAS III Y ALGUNAS ESTRATEGIAS DIDACTICAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

MARIA ANGELICA PADILLA SOSA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTORA DE TESIS: M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"El curso de matemáticas III y algunas estrategias didácticas"

realizado por Padilla Sosa María Angélica

con número de cuenta 07331587-0 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza	E. de Oteyza
Propietario	M. en C. Emma Lam Osnaya	Emma Lam O.
Propietario	Dr. Carlos Hernández Garciadiego	
Suplente	M. en C. Araceli Bernabe Rocha	
Suplente	M. en C. Alejandro Bravo Mojica	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

prefacio

En las primeras unidades de este trabajo se presentan algunos problemas para la materia de Matemáticas III del C. C. H. Se pretende que este material sea para nuestros alumnos accesible e interesante, que puedan manejarlo fácilmente de tal manera que les resulte atractivo.
En los primeros capítulos se señalan los principales resultados teóricos que todo profesor debe recordar al impartir estos temas de tal manera que se prevean las dificultades o errores de interpretación que nuestros alumnos presentan
En los programas se sugiere también el método de enseñanza constructivista. En la última unidad de este trabajo con un cordel, un rollo de papel y un cuadrado articulado en sus vértices se construyen las funciones de segundo grado, de la recta y del seno respectivamente. Esta última unidad se basa en los trabajos de la profesora francesa Annie Berté.
En su obra la profesora Berté pretende la interacción entre la investigación, la formación y la práctica de la enseñanza, porque discute conceptos didácticos, situaciones problemáticas para los alumnos, reflexiones acerca de la enseñanza de las matemáticas, así también señala errores, dificultades, evolución de representaciones y observaciones a considerar. Este material se presenta mediante prácticas que permiten una interacción entre maestro-alumnos, un análisis didáctico y sugiere situaciones no tradicionales para el salón de clases.
"Annie Berté tiene la preocupación constante de hacer vivir las matemáticas, de hacer funcionar la teoría de problemas y contribuye a la integración de la teoría y la práctica." [1]

[1] Jean Pierre Gaborieau, Director de IUFM de Bretagne.

Otro propósito de este trabajo es contribuir con un granito de arena a nuestro Colegio; que este trabajo "sirva" para introducir este programa.

Otro propósito de este trabajo es contribuir con un granito de arena a nuestro Colegio; que este trabajo "sirva" para introducir este programa.

contenido

1

introducción

Resolución de problemas.

Los maestros nos hacemos muchas preguntas pero lo importante es que debemos tomar decisiones para el salón de clases. La forma en que un estudiante aprende o adquiere las habilidades y la información está determinada por el maestro, como él enseña matemática.

El aprendizaje de la matemática involucra la composición de conceptos la adquisición de algoritmos así como la habilidad para resolver problemas.

"La instrucción matemática debe tener objetivos amplios, debe dar experiencias que motiven y les permitan a los estudiantes valorar la matemática, aumentar la confianza en su propia habilidad y así se consideren capaces de resolver problemas, comunicándose matemáticamente y razonando"[1]

Las habilidades cognoscitivas son un conjunto de habilidades que pueden extenderse conforme más se apliquen y se practiquen. Es el proceso de enseñanza-aprendizaje la manera de proporcionar el crecimiento mental y facilitar el desarrollo para la solución de problemas.

"La comprensión para la resolución de problemas sirve para mejorar las habilidades de pensamiento analítico de los estudiantes. Hace a los estudiantes conscientes de sus hábitos de pensamiento, relaciona los errores comunes en el razonamiento y las líneas generales de las mejores técnicas de la resolución de problemas. Schoenfeld enfatiza la importancia del análisis de metas en la resolución de problemas matemáticos"[2]

Los estudiantes normalmente hablan de que las clases son interesantes o aburridas y la resolución de problemas puede causar que los estudiantes tengan reacciones muy positivas.

Si los estudiantes aprenden activamente las matemáticas resolviendo problemas no rutinarios esto provoca que los alumnos adquieran un interés al observar la utilidad de las matemáticas

[1] Stiff y Johnson, Research Ideas for the classroom, High School Matematics.
[2] Ibid.,id.

Si los estudiantes son capaces de resolver un problema y hallan la solución, esto lo transforman en una experiencia y una reacción muy positiva. Si los estudiantes no son exitosos en los problemas su reacción es negativa, automática y estable.

El profesor la mayoría de las veces resuelve los problemas de la clase en algunos minutos. Él puede ayudar a los estudiantes comentando el tiempo que puede tomar cada problema cuando les asigna una tarea, que completarán en algunas horas en vez de minutos.

"Los obstáculos son parte inevitable en el aprendizaje de las matemáticas, en la resolución de problemas, los estudiantes tienen emociones positivas y negativas al aprender"[3].

Una estructura muy útil del pensamiento acerca del proceso en la resolución de problemas son los pasos planteados por Polya, estas etapas son: Entendimiento del problema, elaboración del plan, ejecución del plan y revisión.

Reitman definió un problema como una situación en la cual se ha dado una descripción de algo pero no se ha dado la descripción satisfactoria. Él describió la solución de un problema, como una persona percibiendo y aceptando un objetivo sin que este sea inmediato de alcanzar Henderson y Pingry escribieron que para resolver un problema debe haber un obstáculo para el individuo.

Brown y Walter aportaron un trabajo en la formulación y planteamiento de la solución de problemas. Una estructura con un ciclo dinámico para solucionar un problema. Un estudiante puede comenzar con un problema y comprometerse en pensamiento y actividad para entenderlo. Los estudiantes requieren planear y en el proceso pueden descubrir una necesidad de entender mejor el problema y cuando el plan ha sido formulado el estudiante podrá

---

[3] Mc Leod y Ortega, Reserch Ideas for the classroom.

ejecutarlo. La siguiente actividad podría ser regresar a desarrollar un nuevo entendimiento del problema.

"Muchas suposiciones han sido erróneas, sin embargo son útiles en conducir a uno a ser mejor." Polya.

"En la solución de problemas matemáticos hay una motivación intrínseca. Se debe incluir en las escuelas la resolución de problemas porque esto genera el interés y el entusiasmo de los estudiantes. La solución de problemas es recreativa. Muchos de nosotros hemos continuado resolviendo problemas matemáticos sólo por la satisfacción de hacerlos".[4]

La solución de problemas puede ser un método de enseñanza para introducir conceptos a través de exposiciones involucrando exploración y descubrimiento. Esta actividad de resolver problemas puede también proporcionar práctica en habilidades de cómputo, en el uso de fórmulas, de algoritmos y para el desarrollo conceptual de relaciones como área y perímetro.

"La solución de problemas matemáticos es un arte. Este arte es esencial para el entendimiento y apreciación de las matemáticas y puede ser una meta para la enseñanza aprendizaje"[5]

Las opiniones de los estudiantes señalan que la resolución de problemas les ayudaron a pensar claramente, que podían ser creativos y que aprendieron mejor matemáticas de esta forma que por memorización.

"Él primero en el salón de clases que debe llegar a ser bueno para resolver problemas debe ser el profesor".[6]

"El profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si él llena su tiempo con ejercicios repetitivos, matará el interés de sus estudiantes poniendo trabas en su desarrollo intelectual y desaprovechará su oportunidad. Pero si él fomenta la curiosidad de sus estudiantes dejándoles problemas estimulará sus conocimientos y les ayudará a resolver los problemas con preguntas estimulantes, él les dará una prueba de pensamiento significativo e independiente". Polya.

---

[4] Wilson, Fernández y Hadaway, Research Ideas for the classroom.
[5] Ibid., id.
[6] Ibid., id.

Constructivismo.

El aprendizaje es el proceso por el cual la nueva información y experiencias son colocadas en la estructura cognoscitiva del estudiante y el establecimiento de este aprendizaje es producto de una reestructuración de ese esquema cognoscitivo.

Piaget subraya la importancia de la interacción humana y la manipulación física en la adquisición del conocimiento. Los estudiantes deben manipular los objetos para así hacer sus propias conexiones matemáticas.

Los maestros deben proporcionar experiencias concretas para vincular conocimiento, habilidades y pruebas. La teoría constructivista declara que debe darse a los estudiantes la oportunidad de construir su propia representación de conceptos matemáticos, reglas y relaciones.

Los maestros no podemos transferir simplemente conceptos matemáticos y relaciones a las mentes de los estudiantes diciéndoles lo que nosotros sabemos. Los enfoques constructivistas dicen que nos volvamos facilitadores del aprendizaje. Los estudiantes categorizan y recategorizan el conocimiento según los requerimientos que ellos ven. Los estudiantes pueden construir reglas no enseñadas basadas en similitudes o diferencias.

En la perspectiva del constructivismo, el aprendizaje puede ser involucrado activamente. La construcción de los conocimientos no necesariamente se recibirá en forma pasiva.

Es responsabilidad del profesor arreglar las situaciones y el contexto dentro de las cuales el estudiante construya conocimientos propios.

El constructivismo también es congruente con la teoría cognoscitiva de la resolución de problemas porque involucra la exploración del pensamiento matemático.

Funciones.

Dos conceptos algebraicos muy investigados son las ecuaciones y las funciones.

En una ecuación con una variable la solución representa uno, dos o tres números dependiendo del grado de la ecuación; es decir, en una ecuación de grado n hay a lo más n números que son solución. En una ecuación con dos variables a la variable independiente se le puede asignar, bajo ciertas condiciones un número infinito de valores y en una función de dos variables se pueden asignar muchos valores de manera infinita y están relacionadas una con otra.

El concepto de función es central en la enseñanza de las matemáticas. El término función se originó del cambio que depende de otros cambios, después adquirió el significado de una expresión con valor numérico, su definición moderna es que una función es un subconjunto especial de un producto cartesiano. El concepto de función es fundamental y muy complejo para los estudiantes.

"El papel de las funciones en el mundo de las matemáticas es tan extenso que es casi imposible dar un resumen breve y adecuado. No existe ninguna rama de las matemáticas cuyo desarrollo desde 1800 pueda estudiarse sin haber antes entendido el concepto general de función"[7].

Los dos problemas, dada una función encontrar su gráfica y dada una gráfica encontrar su función son difíciles para los estudiantes. Los datos algebraicos y gráficos los consideran independientes porque los métodos que utilizan para cada uno son diferentes.

Los investigadores han notado que los estudiantes interpretan las funciones punto por punto y no en forma global. Para remediar esta situación el maestro

---

7 Mundy y Lauten. Research Ideas for the classroom.

debe preparar actividades para que los estudiantes interpreten las gráficas cualitativamente y de esta manera vean una función de manera global. Además en la actualidad con los paquetes de computación como el Derive, Maple, Mathematica, el maestro puede ayudar a los estudiantes a desarrollar el entendimiento intuitivo y formal de las funciones.

2

sistemas de ecuaciones

Solución Numérica de Sistema de Ecuaciones Lineales.

El objetivo de este tema es resolver sistemas de ecuaciones lineales con los métodos de sustitución, regla de Cramer y método de eliminación de Gauss.
También es necesario ver que estos métodos se pueden utilizar para resolver sistemas de ecuaciones lineales de *n* ecuaciones con *n* variables.
Se plantearán situaciones problemáticas de tal manera que al resolver se tenga que emplear estas herramientas matemáticas.
Desde la antigua álgebra griega se resolvían sistemas de ecuaciones. Algunos de ellos aparecen en el Palatino o Antología Griega, que es un documento de cuarenta y seis problemas numéricos escritos en forma epigramática, coleccionados por Metrodóro cerca del año 500 d.C. Algunos se supone los elaboró él , pero hay evidencias de que otros son de origen más antiguo. Muchos fueron hechos para la recreación mental y se asemejan a los mencionados por Platón, algunos aparecen en el papiro de Rhind.
En la antigüedad además de la teoría geométrica de ecuaciones basada en longitudes, áreas y volúmenes, y no generalizable a ecuaciones de grado mayor a tres, también existía una teoría puramente aritmético-algebraica que floreció en la Mesopotamia del segundo milenio a.C. y consideraba las ecuaciones como relaciones entre números.
Diofanto fue un matemático de nacionalidad y fecha de nacimiento desconocidos con exactitud pero los historiadores lo colocan en el siglo tres de nuestra era en Alejandría se tienen algunas evidencias de que fue contemporáneo de Herón de Alejandría . En la antología griega hay algunos datos de su vida.
Diofanto escribió: Aritmética , por muchos considerado como el primer texto de álgebra; el Porisma, que se ha extraviado, y los números poligonales de los que existe sólo una parte.
"Ejemplos de las ecuaciones de la Aritmética de Diofanto traducidas a nuestro lenguaje algebraico serían:

$$x^3 - 5x^2 + 8x = 1,$$

$$\frac{x^5 + 3x - 10}{5x - 2} = 24x^6 + 18.$$

De los trece libros que componen su Aritmética en seis de ellos exponen 189 problemas. Un ejemplo de estos problemas es: Encontrar cuatro números tales que la suma de tres cualesquiera excede al cuarto en un número dado; sean 20, 30, 40, y 50 los números dados.

Traducido a nuestro lenguaje algebraico se expresa como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$w + x + y = z + 20$$
$$w + x + z = y + 30$$
$$w + y + z = x + 40$$
$$x + y + z = w + 50.$$

Cuya solución es: 10, 15, 20, y 25". [1]

Se empieza el tema de sistemas de ecuaciones con un juego de rompecabezas luego se sigue con un problema·

[1] Alanis, Cuevas y Menchaca; Historia del álgebra...UACPyP, UNAM.

Rompecabezas de ecuaciones.

Objetivo: El alumno recordará la solución de sistemas de ecuaciones.

Requisitos: Métodos de solución de sistemas de dos ecuaciones con dos variables: Suma y resta, sustitución, igualación y determinantes.

El profesor puede obsequiar medio punto para este tema a cada uno de los integrantes del equipo que termine en primer lugar.

Bases

El juego puede ser individual o por equipos.

1. Se reparten las nueve cartas del rompecabezas.
2. La carta que tiene una estrella, se ubica en el centro.
3. Se busca la solución del sistema de ecuaciones que esta en la parte superior de la estrella.
4. La carta que tiene esta solución se coloca arriba del sistema de ecuaciones, de tal manera que estén juntas sistema de ecuaciones y solución.
5. Se busca la solución del sistema de ecuaciones que esta en la parte inferior de la estrella y se coloca la carta que tiene esta solución en la parte de abajo, etc.
6. El juego termina hasta que se colocan las nueve piezas.

$-8x+12x=21$
$3x-4x=-1$
$6a-4b=10$
$9a+13b=5$
$x=42,\ y=0$
$3x+y=21$
$-3x+y=-15$

$15+6x=15$
$x+y=42$
$-2x-y=-84$
$3x+6y=-3$
$3x+8y=7$
$x=8,\ y=5$

$13-y=13$
$13-x=-4$
$x=-11,\ y=5$
$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{0}{91}$
$x+y=-2$
$x+3y=12$

$x=6,\ y=3$
$4-2y=14$
$3x-2=15$
$5x+3y=-30$
$4x-5y=13$
$x=4,\ y=1$

$x+2y=18$
$x-y=3$
$x=-3,\ y=-5$
$x=\frac{1}{5},\ y=\frac{7}{5}$
$8x-y=-9$
$6x-y=4$

$x=-9,\ y=7$
$-x+3y=4$
$-2x+y=1$
$x=5$
$2-y=7$
$x=-5,\ y=-\frac{19}{2}$

$8x-12y=20$
$-6x+7y=-17$
$-3a-2b=5$
$7a+8b=3$
no tiene solucion
$6x-7x=-17$
$-8x+12x=20$

$x=-\frac{13}{2},\ y=-43$
$4x-y=-10$
$4x-y=8$
$10x+16y=-38$
$5x-8y=19$
$-\frac{11}{2}+x=-\frac{13}{2}$
$-\frac{86}{3}+y=43$

$6x-4y=8$
$-7x+4y=-3$
tiene un infinito
de soluciones
$17-x=-2$
$17-y=17$
$5+2x=5$
$10+4y=10$

“El primer día de clases”

En la papelería "La goma" Pepito y sus amigos se preparan para el primer día de clases. Pepito compra dos lápices, dos cuadernos y una goma, y paga $19.00. Juanito compra dos cuadernos, un lápiz y tres gomas y gasta también $19.00. Mary queriendo ganarles compra tres cuadernos, tres lápices y cuatro gomas, y paga $31.00.

El padre de Pepito se pregunta: ¿cuánto costo cada artículo? (los artículos adquiridos por los niños son de la misma marca y del mismo precio).
Resolución del problema:

¿Cómo se resuelve?

Primero observando lo que se tiene: Se pueden organizar los datos de la siguiente manera.

	No. Cuadernos	No. Lápices	No. Gomas	Costo
Pepito	2	2	1	19
Juanito	2	1	3	19
Mary	3	3	4	31

¿Qué es lo que se quiere?
Se quiere conocer el precio de cada artículo. Estas serían las variables.
Entonces se puede designar:

Precio de un cuaderno: x

De la misma forma se tiene otra variable que es:

Precio de un lápiz : y

Y una última variable:

Precio de una goma: z

Ahora ¿cómo se expresaría algebraicamente la compra de Pepito?

$$2x+2y+z = 19$$

¿La compra de Juanito cómo se escribiría?

$$2x+y+3z = 19$$

Y la de Mary resultaría como sigue:

$$3x+3y+4z = 31$$

Ahora se tiene lo que se llama un sistema de ecuaciones, tres ecuaciones lineales con tres variables, como enseguida se anota:

$$2x + 2y + z = 19 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$2x + y + 3z = 19 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

$$3x + 3y + 4z = 31 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

Usando el **Método de Sustitución.**

Se despeja z en la ecuación (I), obteniéndose lo siguiente:

$$z = 19 - 2x - 2y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

Esta variable *z* se substituye en (II) con lo que se obtiene

$$2x + y + 3(19-2x-2y) = 19$$

multiplicando y sumando términos semejantes resulta

$$-4x - 5y = -38$$

De la misma forma se substituye z en (III) como sigue.

$$3x + 3y + 4 (19 - 2x +2y) = 31$$

multiplicando y sumando términos semejantes se obtiene:

$$-5x - 5y = -45$$

Lo que procede ahora es resolver el sistema de dos ecuaciones con dos variables que son:

$$-4x -5y = -38$$
$$-5x -5y = -45$$

Resolviendo el sistema por suma o resta, se resta la segunda ecuación de la primera ecuación y se obtiene x =7. Sustituyendo este valor x =7 en cualquiera de las anteriores ecuaciones se obtiene: y = 2. Ahora sustituimos los valores x =7, y=2 en la ecuación (IV) para obtener el valor de z:

$$z = 19 -2(7) - 2(2) = 19 -14 - 4 = 1$$

Por tanto el precio de los cuadernos es siete pesos porque x = 7. ¿Cuál es el precio de los lápices? Como y =2 es de dos pesos y el precio de las gomas; es de un peso, dado que $z = 1$.

Entonces la solución del problema es la terna ordenada (7, 2, 1).

A continuación se presenta un problema que se resolverá por otro método, la regla de Cramer.

" La mochila"

Felipe, Susanita y Mafalda se irán de excursión con los scouts el próximo fin de semana. Los scouts les recomendaron llevar poco peso en sus mochilas y principalmente tres provisiones que son: chocolates, latas de atún y botellas de un litro de agua. Felipe decidió llevar 4 chocolates, 6 latas de atún y 3 litros de agua por lo que su mochila pesa 7kg. Susanita va a llevar 12 chocolates, 4 latas de atún y 5 litros de agua con lo que su mochila pesa 10kg. Mafalda no encontró chocolates por lo que llevará sólo 8 latas de atún y 4 botellas de agua con lo que su mochila pesa 8kg.

¿Cuánto pesará cada articulo si son de la misma marca y del mismo tamaño?

Nuevamente se pueden organizar los datos constantes de la siguiente manera:

	Chocolates	Atún	Agua	Peso
Felipe	4	6	3	7kg
Susanita	12	4	5	10kg
Mafalda	0	8	4	8kg

Los datos variables son entonces:

Peso de los chocolates: x

Peso de las latas de atún: y

Peso de las botellas de agua: z

Por lo tanto, el peso de la mochila de Felipe se expresaría algebraicamente con la siguiente ecuación: $4x + 6y + 3z = 7$.

La ecuación que expresa el peso de la mochila de Susanita se puede escribir:

$$12x + 4y + 5z = 10.$$

Así también el peso de la mochila de Mafalda se puede escribir:

$$8y + 4z = 8.$$

El modelo matemático de este problema resulta también un sistema de ecuaciones. Es decir, se tienen tres ecuaciones con tres variables como sigue:

$$4x + 6y + 3z = 7$$
$$12x + 4y + 5z = 1$$
$$8y + 4z = 8$$

Se resolverá este problema por la regla de Cramer.

Regla de Cramer.

Para resolver un sistema de ecuaciones esta regla utiliza matrices y determinantes de una matriz.

Una matriz es un arreglo rectangular que se obtiene a partir de un sistema de ecuaciones lineales en la forma de renglones y columnas; los renglones corresponden a las ecuaciones y las columnas corresponden a cada una de las variables de tal manera que ya no se escriben las variables sino sólo sus coeficientes.

En general la matriz de coeficientes correspondiente al sistema·

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

es $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ y la matriz aumentada es $A|B = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right]$

Un determinante es un número asociado a una matriz cuadrada; para la matriz A su determinante se denota como det A o $|A|$. Una matriz cuadrada es un arreglo con el mismo número de renglones y de columnas.

Recuérdese que el renglón de una matriz consiste en los números colocados en una línea horizontal de esta distribución y la columna de una matriz consiste en los números colocados en una línea vertical. En esta parte es conveniente utilizar una notación de doble subíndice para identificar los elementos individuales de cada renglón y columna. El símbolo a_{ij} representa el elemento en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna.

Por lo tanto, para una matriz de orden uno el determinante es:

$$A = [a_{11}], \quad \det A = a_{11}$$

Para una matriz cuadrada de orden dos el determinante es.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Para definir un determinante de tercer orden, se requieren los conceptos de: menor y cofactor del elemento de un determinante.

Sea $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

El menor M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante que se obtiene eliminando el i-ésimo renglón y la j-esima columna de A. El cofactor del elemento a_{ij} esta definido por $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

El valor del det A se puede definir en términos de los elementos del primer renglón y sus cofactores.

Definición: Sea A una matriz cuadrada, el número det A es la suma de los productos formados al multiplicar cada elemento del primer renglón de A por su cofactor, así pues

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Ejemplo. Evaluando el siguiente determinante, por la definición anterior:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 12 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = (4)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - (6)\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = (4)(-24) - (6)(48) + (3)(96) = -96$$

Obsérvese que un determinante de tercer orden se define en términos de un determinante de segundo orden. Un determinante de cuarto orden puede definirse en términos de un determinante de tercer orden. En general, un determinante de n-ésimo orden puede definirse en términos de un determinante de orden n-1

Dado un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= c_3 \end{aligned}$$

se utilizan los coeficientes de x, y, z para escribir el determinante:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

éste determinante, D, se denomina "determinante del sistema". Otros determinantes son necesarios para utilizar la regla de Cramer. Se denotará D_x al determinante formado a partir de D al sustituir los coeficientes de x por los valores c_i's correspondientes, así también D_y, D_z denotarán a los determinantes obtenidos a partir de D al sustituir los coeficientes de y y z, respectivamente por los valores c_i's correspondientes. Los determinantes son:

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

Con los determinantes anteriores se enuncia a continuación el método que se quiere.

Regla de Cramer.

Si $D\neq 0$ entonces el sistema tiene solución única y se calcula haciendo los cocientes:

$$x=\frac{D_x}{D},\ y=\frac{D_y}{D},\ z=\frac{D_z}{D}.$$

Ahora, usando este método se continua con la resolución del problema de la mochila.

1. Se obtiene el determinante del sistema (se calculó en el ejemplo):

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 12 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -96$$

Como el determinante del sistema resultó distinto de cero la solución es única y se puede continuar.

2. Ahora se calculan los determinantes para cada incógnita.

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 10 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -24$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 12 & 10 & 5 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -48$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 12 & 4 & 10 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix} = -96$$

3.- Para obtener los resultados se hacen los siguientes cocientes:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-24}{-96} = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-48}{-96} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{-96}{-96} = 1$$

Por lo tanto la solución única del problema es la terna ordenada $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Es decir, los chocolates pesan $\frac{1}{4}kg$ o sea 250 gr.; las latas de atún pesan $\frac{1}{2}kg$ o sea 500 gr y las botellas de agua pesan 1kg; es decir, 1000 gr.

Ahora se presenta el siguiente problema para resolverlo por otro método; por el método de Gauss.

"El problema de la Dieta"

El Sr. Gordillo esta muy propenso a la diabetes, por lo que le dieron una dieta que se restrinja principalmente a los alimentos como vegetales, cereales, huevo y carne magra. Los contenidos alimenticios para una taza de vegetales son: 100 calorías, 2 mg de potasio, 5 mg de proteínas y 3 mg de fósforo. Los contenidos para una taza de cereales son: 200 calorías, 2 mg de potasio, 3 mg de proteínas, y 1 mg de fósforo. El contenido de una ración de carne es 100 calorías, 6 mg de proteínas y 4 mg de fósforo, no contiene potasio. Y una pieza de huevo tiene 300 calorías, 1 mg de potasio y 3 mg de proteínas, no contiene fósforo

Los requerimientos diarios para que el Sr. Gordillo no presente problemas de salud son: 1500 calorías, 15 mg de potasio, 44 mg de proteínas y 23 mg de fósforo. ¿Cuánto tiene que consumir de cada alimento el Sr. Gordillo?

Organizando los datos constantes como en los problemas anteriores se tiene.

	Calorías	Potasio	Proteínas	Fósforo
Vegetales	100	2	5	3
Cereales	200	2	3	1
Carne	100	0	6	4
Huevo	300	1	3	0
Requerimiento	1500	15	44	23

Lo que se quiere conocer es la cantidad de alimento que debe consumir diariamente; estas serían las cantidades variables que se pueden escribir:

¿Cuántas raciones de vegetales al día?: w

¿Cuántas raciones de cereales?: x

¿Cuántas raciones de carne?: y

¿Cuántas piezas de huevo?: z

Se puede escribir el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

Ecuación que indica cuantas calorías debe consumir:

$$100w + 200x + 100y + 300z = 1500$$

Ecuación que indica cuanto potasio necesita:

$$2w + 2x + z = 15$$

Ecuación para el requerimiento de proteínas:

$$5w + 3x + 6y + 3z = 44$$

Ecuación para el requerimiento de fósforo:

$$3w + x + 4y = 23$$

Por lo tanto el sistema que se tiene se anota abajo:

$$\begin{aligned} 100w + 200x + 100y + 300z &= 1500 \\ 2w + 2x + z &= 15 \\ 5w + 3x + 6y + 3z &= 44 \\ 3w + x + 4y &= 23 \end{aligned}$$

Resolviendo por Gauss se tiene lo siguiente:

Método de Gauss-Jordan.

Este método utiliza las operaciones elementales. Dada una matriz de un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene una matriz de un sistema equivalente.

Operaciones elementales:

a) Intercambio de dos renglones cualesquiera.
b) Multiplicación de cada elemento en un renglón por un número diferente de cero.
c) Se suma un múltiplo constante de un renglón a otro renglón.

Ahora se procede con los siguientes pasos.

1.- Se construye la matriz aumentada asociada al sistema de ecuaciones lineales. Véase la pagina 21.

2.- Se escalona la matriz aumentada. Se hacen ceros los coeficientes por debajo de la diagonal y por encima mediante las operaciones elementales con los renglones.

3.- Con los elementos de la matriz escalonada se reconstruye el nuevo sistema de ecuaciones.

4.- Se le da solución al nuevo sistema cuya solución es la misma que la del sistema original, esto es debido a que al realizar las operaciones elementales con los renglones, el sistema de ecuaciones que se obtiene es equivalente.

Resolución del problema:

Iníciese escribiendo la matriz aumentada (matriz de coeficientes y de términos independientes) se tiene:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 100 & 200 & 100 & 300 & 1500 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 15 \\ 5 & 3 & 6 & 3 & 44 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 23 \end{array}\right]$$

a) Continuando, se sustituye el renglón 1 por el resultado de multiplicar el renglón 1 por $\left(\frac{1}{100}\right)$ que se simboliza por: $R_1 \leftarrow \left(\frac{1}{100}\right) R_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 15 \\ 5 & 3 & 6 & 3 & 44 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 23 \end{array}\right]$$

b) Multiplicando el renglón 1 por (-2) y sumando el renglón 2 , se obtiene el nuevo valor del renglón 2, representado por:

$$R_2 \leftarrow (-2)R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & -15 \\ 5 & 3 & 6 & 3 & 44 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 23 \end{array}\right]$$

c) Multiplicando el renglón 1 por (-5) y sumando el renglón 3 se sustituye el renglón 3:

$$R_3 \leftarrow (-5)R_1 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & -15 \\ 0 & -7 & 1 & -12 & -31 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 23 \end{array}\right]$$

d) Multiplicando el renglón 1 por (-3) y sumando el renglón 4 se sustituye el renglón 4.

$$R_4 \leftarrow (-3)R_1 + R_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & -15 \\ 0 & -7 & 1 & -12 & -31 \\ 0 & -5 & 1 & -9 & -22 \end{array}\right]$$

e) Multiplicando el renglón 2 por $\left(-\frac{1}{2}\right)$ se sustituye el renglón 2:

$$R_2 \leftarrow \left(\frac{1}{2}\right) R_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & -7 & 1 & -12 & -31 \\ 0 & -5 & 1 & -9 & -22 \end{array}\right]$$

f) Multiplicando el renglón 2 por (7) y sumando el renglón 3 se sustituye el renglón 3:

$$R_3 \leftarrow (7) R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 8 & \frac{11}{2} & \frac{43}{2} \\ 0 & -5 & 1 & -9 & -22 \end{array}\right]$$

g) Multiplicando el renglón 2 por (5) y sumando el renglón 4 se sustituye el renglón 4:

$$R_4 \leftarrow (5) R_2 + R_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 8 & \frac{11}{2} & \frac{43}{2} \\ 0 & 0 & 6 & \frac{7}{2} & \frac{31}{2} \end{array}\right]$$

h) Multiplicando el renglón 3 por $\left(\frac{1}{8}\right)$ se sustituye el renglón 3:

$$R_3 \leftarrow \left(\frac{1}{8}\right)R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 5/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/16 & 43/16 \\ 0 & 0 & 6 & 7/2 & 31/2 \end{array}\right]$$

i) Multiplicando el renglón 3 por (-6) y sumando el renglón 4 se sustituye el renglón 4:

$$R_4 \leftarrow (-6)R_3 + R_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 5/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/16 & 43/16 \\ 0 & 0 & 0 & -5/8 & -5/8 \end{array}\right]$$

j) Multiplicando el renglón 4 por $\left(-\frac{8}{5}\right)$ se sustituye el renglón 4:

$$R_4 \leftarrow \left(-\frac{8}{5}\right)R_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 5/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/16 & 43/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

k) Multiplicando el renglón 2 por (-2) y sumándoselo al renglón 1 se sustituye el renglón 1·

$$R_1 \leftarrow (-2)R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/16 & 43/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

l) Sumando el renglón 1 con el renglón 3 se sustituye el renglón 1

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -21/16 & 43/16 \\ 0 & 1 & 1 & 5/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/16 & 43/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

m) Multiplicando el renglón 3 por $\left(\frac{21}{16}\right)$ y sumándolo al renglón 1 se sustituye el renglón 1·

$$R_1 \leftarrow \left(\frac{21}{16}\right)R_3 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/16 & 43/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

n) Restándole al renglón 2 el renglón 3, se sustituye el renglón 2:

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 29/16 & 77/16 \\ 0 & 0 & 1 & 11/16 & 43/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

p) Multiplicando el renglón 4 por $\left(-\frac{29}{16}\right)$ y sumándolo con el renglón 2, se sustituye el renglón 2:

$$R_2 \leftarrow \left(-\frac{29}{16}\right) R_4 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 11/16 & 43/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

q) Multiplicando el renglón 4 por $\left(-\frac{11}{16}\right)$ y sumándolo con el renglón 3, se sustituye el renglón 3:

$$R_3 \leftarrow \left(-\frac{11}{16}\right) R_4 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Esta última matriz proporciona la solución del sistema (4,3,2,1).

Como la solución del sistema es (4,3,2,1), entonces lo que el Sr. Gordillo debe consumir para estar saludable es: 4 tazas de vegetales, 3 tazas de cereales, 2 porciones de carne y un huevo.

Comprobando que la solución satisface el sistema original se tiene para la primera ecuación:

$$100(4) + 200(3) + 100(2) + 300(1) = 1500$$
$$400 + 600 + 200 + 300 = 1500$$

Comprobando en la segunda ecuación:

$$2(4) + 2(3) + 1 = 15$$
$$8 + 6 + 1 = 15$$

Sustituyendo la solución en la tercera ecuación:

$$5(4) + 3(3) + 6(2) + 3(1) = 44$$
$$20 + 9 + 12 + 3 = 44$$

Por ultimo comprobando en la cuarta ecuación:

$$3(4) + 3 + 4(2) = 23$$
$$12 + 3 + 8 = 23$$

Con esto queda demostrado que la solución dada (4,3,2,1) es correcta.

RESUMEN DE RESULTADOS IMPORTANTES PARA ESTE TEMA.

Interpretación Geométrica.

Es necesario establecer la relación entre sistemas de ecuaciones y su representación gráfica, puesto que resolver un sistema de ecuaciones equivale a encontrar el punto de intersección de dos rectas.

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables, no tendrá soluciones enteras necesariamente por lo que se recomienda un método algebraico y no un método gráfico con el que se pueden tener solo aproximaciones.

Los sistemas de ecuaciones con solución única se les llama sistemas de ecuaciones determinados. En un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables, las ecuaciones pueden representar rectas paralelas, en este caso el sistema no tiene solución, fig.(1). También puede resultar que las ecuaciones son una sola recta entonces existe un número infinito de soluciones, ya que tienen tantas soluciones como puntos tiene una recta, fig. (2)

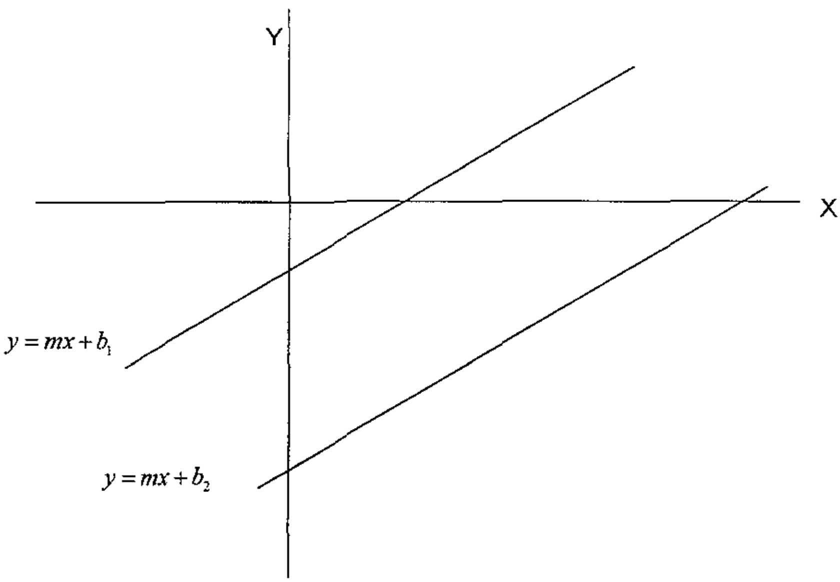
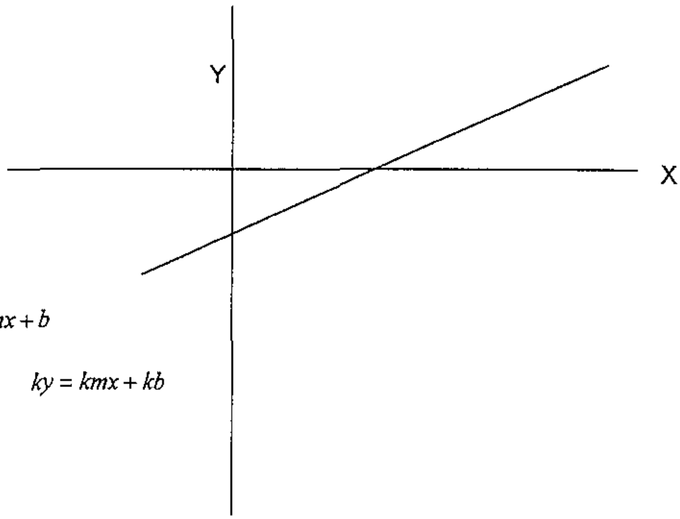


fig. (1) misma m, misma pendiente o inclinación.



$$y = mx + b$$

$$ky = kmx + kb$$

fig (2) La ecuación esta multiplicada por un número de tal manera que resulta la misma recta.

Enseguida se anota el método más importante para resolver sistemas de ecuaciones.

Método de Suma y Resta.

El método de suma y resta consiste en:

1.- Multiplicar una o ambas ecuaciones por constantes de tal forma que los coeficientes de alguna de las variables se igualen excepto quizás por el signo.

2.- Se suman o se restan las ecuaciones para tener una sola ecuación con una sola variable.

3.- Resolver la ecuación, sustituir el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones del sistema y obtener el valor de la otra variable.

Este método contiene los pasos importantes para utilizar cualquiera de los otros métodos, en particular Sustitución, Regla de Cramer y Gauss.
Véase en la regla de Cramer para ecuaciones de 2X2.
Por el método de Suma o Resta se observa lo siguiente:
Se tiene el sistema de ecuaciones:

$$ax + by = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$dx + ey = f \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

multiplicando la ec. (1) por d y multiplicando la ec. (2) por a se obtienen:

$$adx + bdy = cd \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$adx + aey = af \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Restándole a la ec. (4) la ec (3) se tiene.

$$aey - bdy = af - cd$$

que se puede factorizar como

$$(ae - bd)y = af - cd$$

despejando y, se obtiene:

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

de manera similar se puede obtener x.
Multiplicando la ec. (1) por e y la ec. (2) por b se obtienen:

$$aex + bey = ce \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$bdx + bey = bf \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Restándole a la ec. (5) la ec. (6) se tiene:

c) Multiplicando el renglón 1 por $-d$ y sumando el renglón 2 se sustituye el renglón 2:

$$R_2 \leftarrow (-d)R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & b/a & c/a \\ 0 & e-\left(bd/a\right) & f-\left(cd/a\right) \end{array}\right]$$

La matriz anterior también se puede escribir:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & b/a & c/a \\ 0 & (ae-bd)/a & (af-cd)/a \end{array}\right]$$

d) Multiplicando el renglón 2 por $\left(\frac{a}{ae-bd}\right)$ se sustituye el renglón 2:

$$R_2 \leftarrow \left(\frac{a}{ae-bd}\right)R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & b/a & c/a \\ 0 & 1 & (af-cd)/(ae-bd) \end{array}\right]$$

e) Si se multiplica el renglón 2 por $-\frac{b}{a}$ y se suma al renglón 1 se sustituye el renglón 1 y se obtiene la solución:

$$R_1 \leftarrow \left(-\frac{b}{a}\right)R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & ce-bf/ae-bd \\ 0 & 1 & af-cd/ae-bd \end{array}\right]$$

ya que

$$\left(\frac{af-cd}{ae-bd}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a}=\frac{-abf+bcd+ace-bcd}{a(ae-bd)}=\frac{a(-bf+ce)}{a(ae-bd)}$$

por lo tanto el valor de:

$$x=\frac{ce-bf}{ae-bd}.$$

Entonces el resultado es:

$$(x,y)=\left(\frac{ce-bf}{ae-bd},\frac{af-cd}{ae-bd}\right)$$

Con esto se muestra que el método de Gauss también es equivalente al método de Suma o Resta puesto que se han obtenido los mismos valores para (x,y).
El método de Suma y Resta es muy importante porque en Gauss se observa como se puede generalizar para muchas ecuaciones con muchas variables. Como sólo se utilizan multiplicaciones y sumas existen programas de computadora que resuelven problemas grandes rápidamente.

3

álgebra de los números complejos

ÁLGEBRA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

El propósito de este tema, permite cubrir las interrogantes de dar solución siempre a una ecuación de segundo grado o cuadrática. Es decir, todas las ecuaciones cuadráticas tienen solución en el conjunto de los números complejos, entonces estos números permiten una ampliación del sistema de los números reales.

Las ecuaciones $x^2 - a = 0,\ a > 0$ tienen solución en $\mathbb{R}$; así también las ecuaciones $x^2 + a = 0,\ a > 0$ tienen solución en el conjunto de los números complejos.
Cada número real se puede localizar en la recta real, de la misma manera se puede localizar cada número complejo en el plano complejo, con el eje horizontal real y con el eje vertical imaginario.

Este tema se inicia recordando las ecuaciones de segundo grado, después se estudia qué es un número complejo y sus operaciones fundamentales, con algunos ejercicios y juegos.

Karl Friedrich Gauss, matemático, físico y astrónomo alemán nació en la ciudad de Brunswick en 1777 y murió en el año de 1855. (Sus trabajos fueron notables, sus obras recopiladas en 14 volúmenes están casi todas escritas en latín.) Fue el primero en crear para los números complejos una base matemática sólida y en su tesis de doctorado, estableció la primera demostración del Teorema Fundamental del Álgebra. Gauss tenía sólo 21 o 22 años de edad cuando resolvió este problema.

Teorema Fundamental del Álgebra
Toda ecuación polinomial, tiene por lo menos una raíz en el conjunto de los números complejos.

A continuación se inicia con las ecuaciones de segundo grado:

Ecuaciones de Segundo Grado.

El problema que se considera es encontrar las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-1=0$ b) $x^2-10x+21=0$ c) $x^2+1=0$

Para resolver la primera ecuación $x^2-1=0$ se observa que se puede factorizar como:

$$(x+1)(x-1)=0$$

por lo que las raíces de la ecuación son:

$$x_1=-1,\ x_2=1.$$

Ahora se pueden hacer las siguientes preguntas; ¿cuál es el lugar geométrico? O ¿qué curva representa la ecuación $y=x^2-1$?

La gráfica de esta ecuación corresponde a una parábola de tal manera que cuando se hace $y=0$ se determinan los puntos por donde la parábola cruza al eje X.

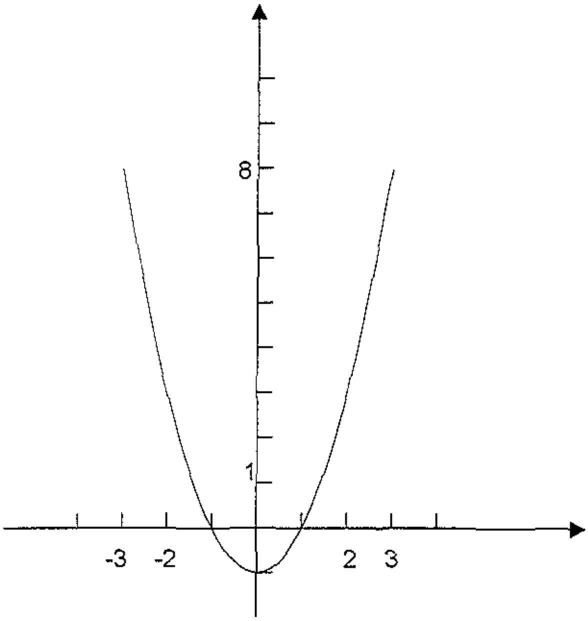
¿Cuáles son estos puntos?

Las abscisas son precisamente $x_1=-1,\ x_2=1$, entonces los puntos son: $(-1,0)$, $(1,0)$. Como x^2 tiene signo positivo la parábola se abre hacia arriba y pasa por los puntos antes mencionados.

Para encontrar la intersección con el eje Y se hace $x=0$ en $y=x^2-1$ de donde se obtiene $y=-1$.

Por tanto, la intersección resulta $(0,-1)$ que, en este caso, es el vértice de la parábola.

Véase la siguiente figura:



Ahora resolviendo la ecuación del inciso b) $x^2-10x+21=0$ que también se puede factorizar, se tiene:

$$(x-7)(x-3)=0$$

entonces las raíces de la ecuación serán

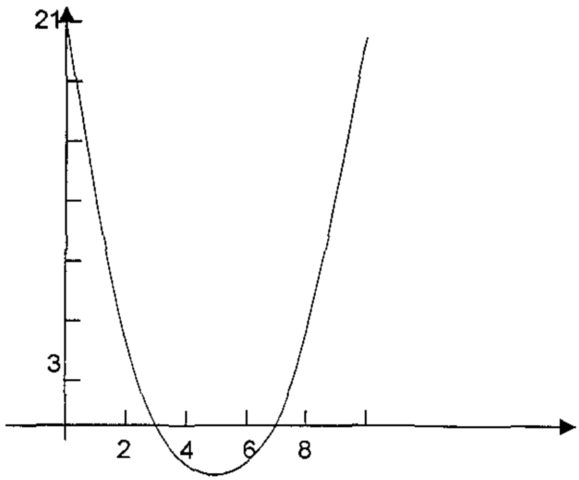
$$x_1=7,\ x_2=3.$$

Para la ecuación $y=(x-7)(x-3)$ se obtienen los puntos $(7,0),(3,0)$ que representan las intersecciones de la curva con el eje X.

Dibujando la gráfica de esta ecuación $y=(x-7)(x-3)$ ¿De qué curva se trata?

Nuevamente es una parábola, como el signo de x^2 es positivo, entonces la parábola se abre hacia arriba.

¿Cómo se puede hacer la gráfica de la parábola? Si se hace $x=0$ entonces resulta $y=21$, por lo que se tienen los puntos (0,21), (7,0) y (3,0). Ver la siguiente figura:



Para valores menores de $x=3$ la gráfica es positiva porque en $y=(x-7)(x-3)$ el primer factor $(x-7)$ es negativo y al igual que $(x-3)$. (Recuérdese que el producto de dos números negativos resulta positivo) Para valores entre tres y siete; es decir, para $3<x<7$ la gráfica es negativa porque uno de los factores es positivo y el otro es negativo, y para valores mayores de siete la gráfica nuevamente es positiva.

Continuando con el problema, para resolver el inciso c) $x^2+1=0$, se procede de la misma manera: ¿Pero qué pasa cuando se buscan sus raíces?

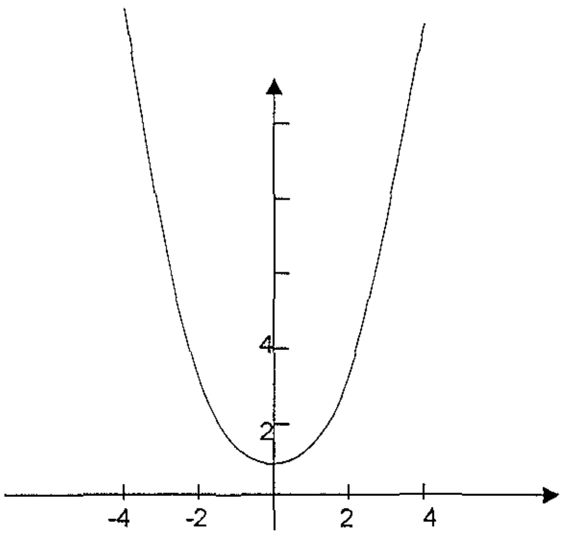
Se tiene $x^2=-1$

Como cualquier número real elevado al cuadrado es mayor o igual a cero entonces no tiene solución en $\mathbb{R}$.

Su solución no es una solución real. Pero al igual que en los casos anteriores se puede preguntar: ¿Qué curva representa la ecuación $y=x^2+1$? Lógicamente resulta una parábola puesto que la ecuación tiene la misma forma: $y-k=4p(x-h)^2$.

Como se anotaba las raíces no son reales y su interpretación geométrica es que la parábola que representa la ecuación no corta el eje de las abscisas; entonces la parábola esta por arriba o por abajo del eje X, en este caso su vértice está una unidad arriba del origen.

Haciendo la gráfica de $y = x^2 + 1$ se tiene la siguiente figura:



En una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ si el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo, no hay raíces reales se tiene que la solución son dos números complejos.

Para reafirmar los ejemplos anteriores se proporciona el siguiente juego, para luego continuar con la definición de números complejos.

Escaleras de ecuaciones.

Objetivo del juego: El alumno repasará como se resuelve una ecuación de segundo grado.

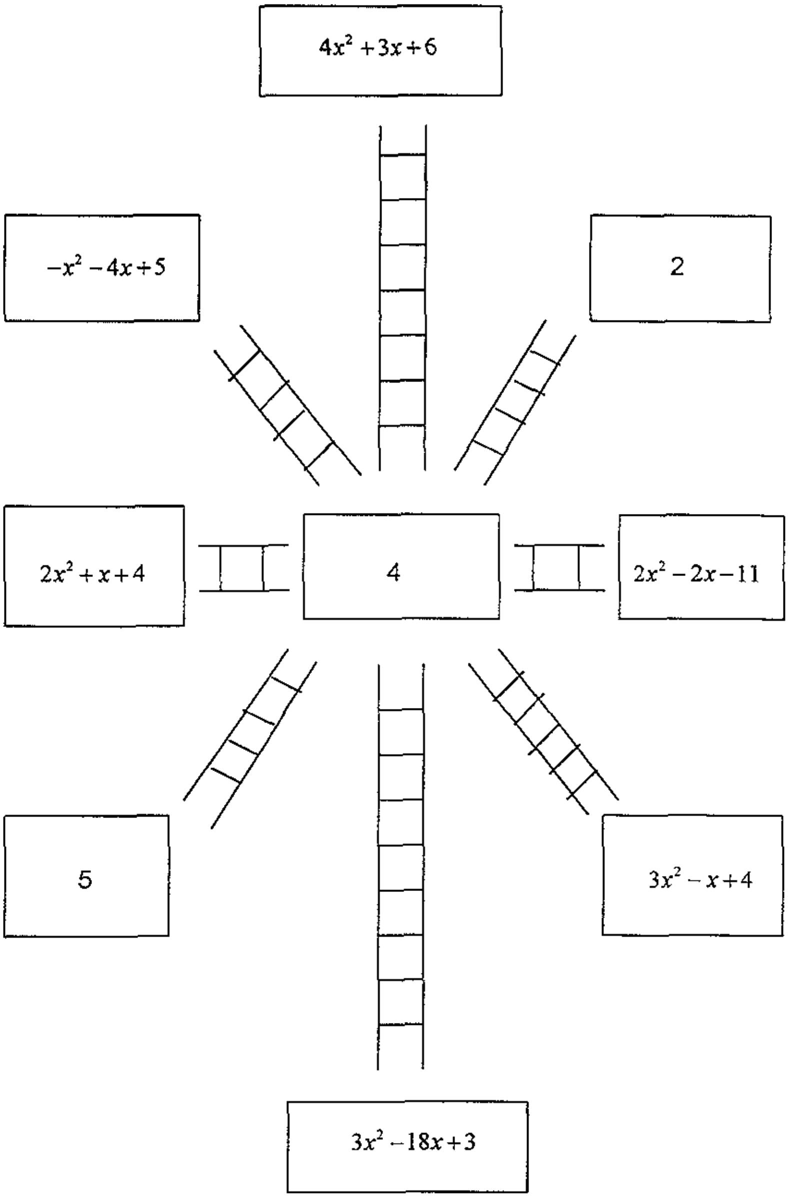
Requisitos: Factorización de polinomios y fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado

Premio: El profesor podría obsequiar medio punto para este tema a cada uno de los integrantes del equipo que termine en primer lugar.

Bases

El juego puede ser individual o por equipos.

1. Se reparte la planilla.
2. Se suma la escalera que tiene solamente números.
3. Las otras escaleras diagonales, horizontales o verticales deben sumar lo mismo.
4. El juego se termina cuando se obtienen las raíces para cada escalera. Sólo hay una solución común.


$4x^2+3x+6$
$-x^2-4x+5$
2
$2x^2+x+4$
4
$2x^2-2x-11$
5
$3x^2-x+4$
$3x^2-18x+3$

Ecuaciones sin solución en $\mathbb{R}$.

Como se había anotado, dada la ecuación $x^2 = -1$ la x no es ningún número real; porque para todo número real x su cuadrado es positivo, es decir, $x^2 \geq 0$.

Entonces, si r es un número positivo $-r$ es negativo y la ecuación:

$$x^2 = -r$$

no tiene solución en los números reales.

Por tanto, las ecuaciones $x^2 = -r$ son casos particulares de las ecuaciones de segundo grado en una variable con coeficientes reales, estas ecuaciones son de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Es por esto que los números reales resultan insuficientes para dar solución a las ecuaciones $x^2 = -r$, donde r es un real positivo. Sin embargo en el sistema de los números complejos sí tienen solución, este sistema se denota por $\mathbb{C}$ y se tiene que, los reales están contenidos en los complejos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

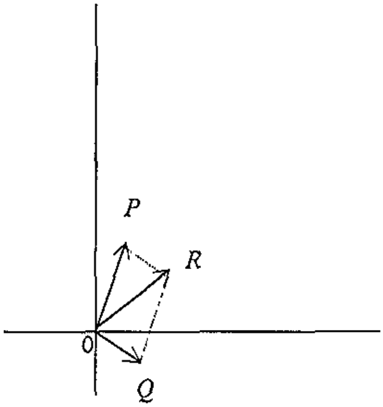
Y cumplen con:

Teorema Fundamental del álgebra. Cualquier polinomio con coeficientes complejos y de grado mayor o igual que uno tiene al menos una raíz ya sea real o compleja.

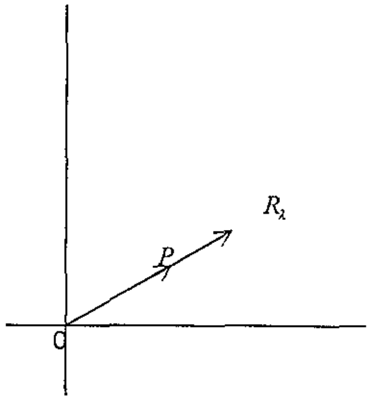
Definición del sistema de los números complejos.

Considerando el plano cartesiano denotado por, $\mathbb{R}^2$ se definen dos operaciones que se llaman vectoriales o lineales: la suma y la multiplicación por un real. Entonces si se tienen dos vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y λ un real, las operaciones suma y producto por un real se representan gráficamente como sigue:

Véase las siguientes figuras:



$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$



$\lambda\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OR_\lambda}=-\overrightarrow{OR_\lambda}$

Ahora se define un producto entre las parejas, de $\mathbb{R}^2$, de tal manera que a partir de este cambio se da un nuevo nombre a las parejas, se les llama números complejos o imaginarios. Por tanto, un número complejo es una pareja ordenada de números reales que se escribe $z=(x,y)$.

En los números complejos se definen las siguientes operaciones de suma y producto como sigue:

- La suma

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2).$$

- La multiplicación

$$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2).$$

También se tiene, la multiplicación de un número complejo $z=(x_1,y_1)$ por un número real λ, pero esto se puede considerar como un caso especial del producto de complejos. Ya que el número real λ se puede escribir como el número complejo $(\lambda,0)$.

Por tanto resulta: $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.

El número i.

Como se vio, no se tiene un número real que al cuadrado sea igual a -1. Pero ¿Cuál es la solución de la ecuación $z^2 = -1$?

La solución es el número complejo $(0,1)$ y se simboliza por la letra i, es decir, $i = (0,1)$ y satisface que $i^2 = 1$. Haciendo la comprobación

$$i^2 = (0,1)(0,1) = ((0)(0) - (1)(1), (0)(1) + (0)(1)).$$

Por tanto,

$$i^2 = (-1,0) = -1.$$

Entonces se puede escribir un número complejo de la siguiente forma:

$$z = (x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + yi$$

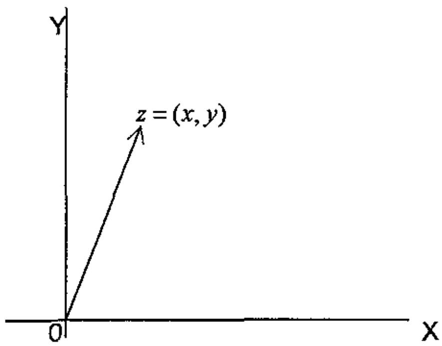
A esta forma de escribir un complejo z se le llama forma rectangular, y es la que más se utiliza. En la expresión $z = x + yi$ al número x se le llama la parte real y, y es la parte imaginaria.

Cuando la parte real de un número complejo es cero, se le llama número imaginario puro.

El plano complejo.

El módulo y el conjugado de un complejo.

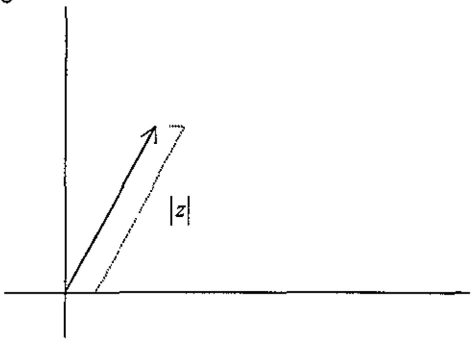
En el plano cartesiano si se tiene una pareja ordenada (x,y) le corresponde un único punto. Así también en un sistema XY, a cada número complejo $z = (x,y) = x + yi$ se le asocia un punto en el plano complejo; a este punto y al vector de posición correspondiente se le llama z. Donde a X se le llama eje real y a Y el eje imaginario. Véase la siguiente figura.



Esta representación permite definir para cada complejo $z = x + yi$ su "longitud" o distancia al origen como $\sqrt{x^2 + y^2}$ también llamada módulo de z. Esta distancia es un número real y se denota por $|z|$. Por tanto

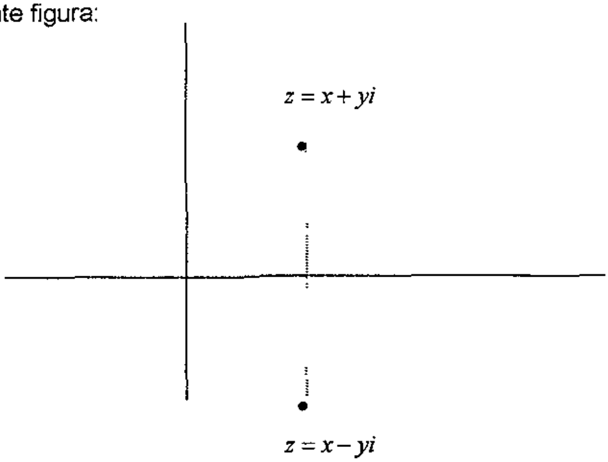
$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Véase la siguiente figura.



Al conjugado de z se le denota por $\bar{z}$ y es igual a: $\bar{z} = x + (-1)yi = x - yi$

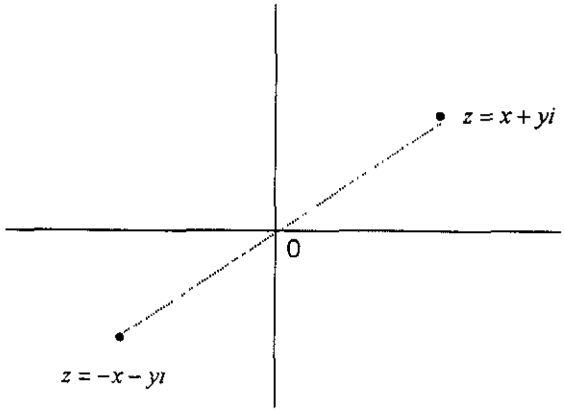
El conjugado resulta ser simétrico de z con respecto al eje real X. Obsérvese la siguiente figura:



Otro número simétrico de z es:

$$-z = -x - yi.$$

Este número resulta simétrico a z pero con respecto al origen. Observe la siguiente figura.



Por tanto se cumple que los módulos de z, $\bar{z}$ y -z son iguales:

$$|z| = |\bar{z}| \quad \text{y} \quad |z| = |-z|.$$

Propiedades del conjugado.

Para cualesquiera números complejos z, z_1, z_2 se cumplen las siguientes igualdades:

1. $z\bar{z} = |z|^2$ que es lo mismo que $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
4. $\bar{\bar{z}} = z$. Donde $\bar{\bar{z}}$ es el conjugado de $\bar{z}$
5. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$. (parte real)
6. $i\,\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$. (parte imaginaria)

Enseguida se presenta un juego de cartas para reafirmar los conocimientos anteriores.

Sobre el módulo de un número.

Simplificar la siguiente operación y encontrar su módulo.

$$(1+i)+\left(\frac{1}{1+i}\right)$$

Sumando ambos números se busca el común denominador y se tiene

$$\frac{(1+i)(1+i)+1}{1+i}$$

haciendo la multiplicación en el numerador se obtiene

$$\frac{1+2i}{1+i}$$

observe que es un cociente, para hacer la división se multiplica por uno, en este caso por $\left(\frac{1-i}{1-i}\right)$. Entonces se tiene:

$$\left(\frac{1+2i}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right)$$

que resulta

$$\frac{3+i}{2}$$

¿Qué es lo que se quiere? Encontrar el módulo de la expresión original que resultó como se anota abajo:

$$\left|1+i+\frac{1}{1+i}\right|=\left|\frac{3+i}{2}\right|$$

Entonces calculando este módulo se tiene

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

que resulta $\frac{\sqrt{10}}{2}$ que es aproximadamente 1.5811.

Cadena de Complejos 1.

Objetivo del Juego: El alumno reafirmará algunas propiedades de los números complejos.

Requisitos: Definición, suma, multiplicación, conjugado y simétrico de un número complejo.

Premio: El profesor podría obsequiar medio punto para este tema a cada uno de los integrantes del equipo que termine en primer lugar.

Bases

El juego se recomienda para equipos de tres personas.

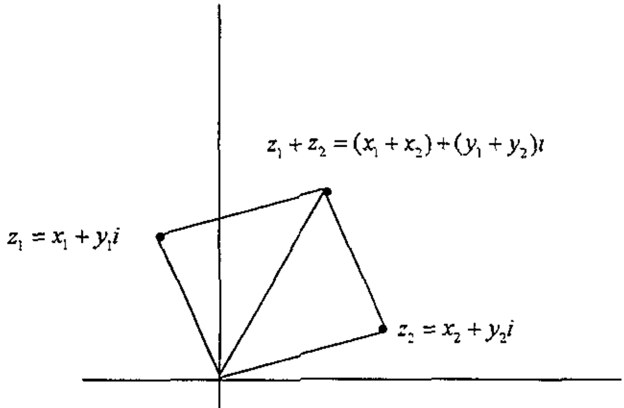
1. Se reparten las cartas entre los jugadores.
2. Cualquiera de los jugadores puede hacer la primera pregunta.
3. El que tenga la respuesta a la primera pregunta; hace la segunda pregunta el que tenga la respuesta de la segunda pregunta hace la tercera pregunta y así sucesivamente.
4. El juego se termina al colocar toda la cadena de 21 tarjetas sobre la mesa.

$\sqrt{-1}$	-1
i^2	$x-iy$
El conjugado de $x+iy$	$\mathbb{C}$
Los $\mathbb{R}$ **están contenidos en**	$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)$ $=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
Suma de complejos	$(x_1+y_1)(x_2+y_2)$ $=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)$
Multiplicación de Complejos	$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$
Multiplicación de un complejo por un real	$(-1,0)$

-1 se puede escribir como:	$x+yi$
Forma rectangular del número z	$\|a+bi\|=\sqrt{a^2+b^2}$
El modulo de $(a+bi)$	$-x-yi$
Simétrico de $x+yi$	$\|z\|$ ó $\|-z\|$
El modulo de z es igual a:	z
El conjugado del conjugado de z es igual a:	$\overline{z_1}+\overline{z_2}$
El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a:	$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

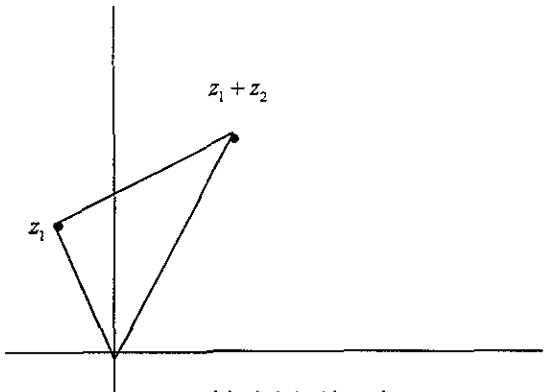
Interpretación geométrica de la suma y el producto de números complejos.

Con la definición del plano complejo se puede interpretar geométricamente la suma de números complejos, como la suma de vectores: (figura siguiente)



Suma de dos números complejos.

Entonces, al sumar dos números complejos geométricamente se tiene un triángulo con vértices en O, z_1 y z_2; cuyos lados miden $|z_1|$, $|z_2|$ y $|z_1 + z_2|$ respectivamente. Ver figura siguiente.



Desigualdad del triángulo.

Como en todo triángulo la longitud de cualquiera de sus lados es menor o igual que la suma de las longitudes de sus otros dos lados. Entonces, el módulo cumple con la siguiente propiedad:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Para cualesquiera dos números complejos z_1 y z_2, esta propiedad se conoce como desigualdad del triángulo.

Con respecto a la multiplicación de dos números complejos $(z_1)(z_2)$. ¿Qué resulta geométricamente? Se traza a través de O y z_2 un par de rectas cuya intersección es C de tal manera que se cumplen:

$$\angle z_2 OC = \angle UO z_1 \quad \text{y} \quad \angle O z_2 C = \angle OU z_1,$$

donde U es el punto que corresponde a 1. La justificación se verá en la sección de representación polar.

Obsérvese que los $\Delta OU z_1$ y $\Delta O z_2 C$ son triángulos semejantes, los ángulos de uno coinciden con los del otro por construcción. Entonces se tiene que los lados son proporcionales y cumplen con:

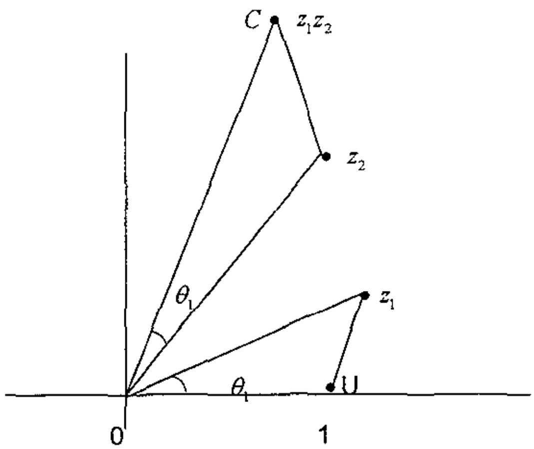
$$\frac{|\overline{OC}|}{|z_1|} = \frac{|z_2|}{1}$$

por tanto se tiene:

$$|\overline{OC}| = |z_1||z_2|.$$

Pero además obsérvese que los ángulos cumplen con:

$$\angle UOC = \angle UO z_1 + \angle UO z_2 \quad \text{(obsérvese siguiente figura)}$$



Multiplicación de números complejos.[1]

[1] Oteyza, Lam, Hernandez, Carrillo; Temas Selectos de Matemáticas, Prentice Hall.

Con respecto al producto, se cumple que para cualesquiera dos complejos z_1 y z_2 se tiene la siguiente igualdad:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

Demostración:

Del producto de conjugados resulta $z\bar{z} = |z|^2$. Haciendo $z = z_1 z_2$ se puede escribir:

$$z_1 z_2 \left(\overline{z_1 z_2}\right) = |z_1 z_2|^2$$

También del producto de conjugados se tiene: $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ entonces sustituyendo se puede escribir:

$$z_1 z_2 \left(\bar{z}_1 \bar{z}_2\right) = |z_1 z_2|^2$$

permutando y asociando se tiene:

$$\left(z_1 \bar{z}_1\right)\left(z_2 \bar{z}_2\right) = |z_1 z_2|^2$$

que resulta

$$|z_1|^2 |z_2|^2 = |z_1 z_2|^2$$

aplicando la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad se concluye que:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

La división en los números complejos.

La división es la operación inversa de la multiplicación, entonces se puede definir la división del número complejo z_1 entre el número complejo $z_2 \neq 0$ como:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}.$$

Así, se puede formular la siguiente pregunta: ¿Se podrá encontrar un número $\frac{1}{z}$, ($z \neq 0$) tal que al multiplicarlo por z resulte 1? Es decir, $z\frac{1}{z} = 1$.

Supóngase que el número z es de la forma:

$$z = a + bi \neq 0$$

entonces, $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Por tanto, la suma de los cuadrados será: $a^2 + b^2 > 0$.

Pero el número complejo $\frac{1}{z}$ también se puede escribir de la forma:

$$\frac{1}{z} = x + yi$$

entonces se puede resolver la ecuación planteada sustituyendo z y $\frac{1}{z}$.

La ecuación $$z\frac{1}{z} = 1$$

se transforma en: $$(a+bi)(x+yi) = 1$$

efectuando la multiplicación se obtiene:

$$ax - by + (ay + bx)i = 1.$$

Ahora se puede igualar parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria y se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$ax - by = 1$$
$$bx + ay = 0$$

resolviendo el sistema se encuentran:

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Que son la parte real e imaginaria del número complejo $\frac{1}{z}$, es decir,

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i = \frac{1}{a^2+b^2}(a-bi).$$

Por tanto:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}.$$

Propiedades de la suma y el producto de números complejos.

Para cualesquiera tres números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i,\ z_3 = x_3 + y_3 i$ se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades básicas para la suma:

S1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (La suma es conmutativa).

S2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (La suma es asociativa).

S3. $z_1 + 0 = z_1$ (Existe el neutro aditivo).

S4. $z_1 + (-1)z_1 = 0$ (Existe el inverso aditivo para cada número complejo).

Propiedades básicas para la multiplicación.

M1. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (La multiplicación es conmutativa)

M2. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (La multiplicación es asociativa).

M3. $z_1(1) = z_1$ (Existe el neutro multiplicativo).

M4. $z_1\left(\dfrac{\bar{z}_1}{|z_1^2|}\right) = 1, z_1 \neq 0$ (Existe el inverso multiplicativo para cada número complejo).

Propiedad distributiva:

$z_1(z_2 + z_3) = (z_1 z_2) + (z_1 z_3)$ (La multiplicación distribuye a la suma).

Observaciones.

1. $(-1)z_1$ coincide con $-z_1$, el simétrico de z_1.
2. $\dfrac{\bar{z}_1}{|z_1|^2}$ se le llama $\dfrac{1}{z_1}$.
3. Los números 0,1, z_1 y $\dfrac{1}{z_1}$ son los únicos complejos que cumplen las propiedades S3, M3, S4 y M4, respectivamente.

Las propiedades anteriores son verdaderas en base a los siguientes resultados:

- Propiedades similares se cumplen en $\mathbb{R}$.
- La suma y el producto de complejos se realizan operando con las partes reales e imaginarias, las cuales son números reales.

Ahora estamos en posibilidad de aplicar las operaciones de números complejos y sus propiedades a la resolución de los siguientes problemas:

Ecuación de segundo grado con discriminante negativo.

Para hacer la gráfica de la siguiente ecuación de segundo grado

$$15x^2+6x+3=y.$$

Se hace $y=0$, se obtiene:

$$15x^2+6x+3=0$$

Para resolver por la fórmula general, los coeficientes son: $a=15, b=6, c=3$.

Sustituyendo se tiene:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4(15)(3)}}{2(15)}$$

haciendo las operaciones resulta

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{-144}}{30}$$

que se puede escribir

$$x=\frac{-6\pm 12i}{30}$$

así las raíces que se obtienen son:

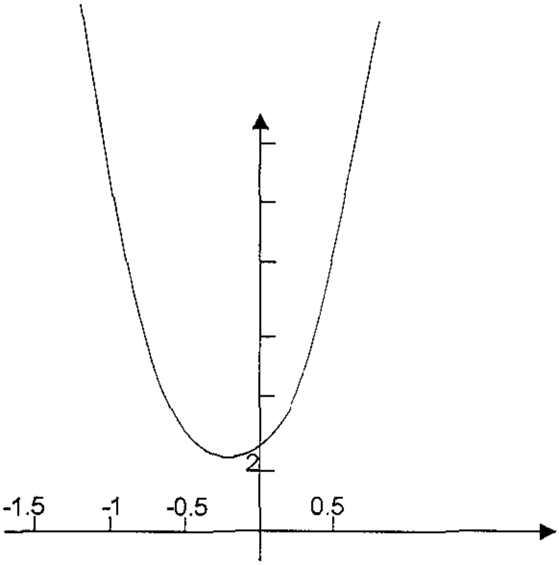
$$x_1=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

$$x_2=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

Por tanto x_1, x_2 son números complejos y además conjugados porque difieren en el signo de la parte imaginaria.

Para hacer la gráfica: si se hace $x=0$ entonces $y=3$; si se calculan valores para x_s que sean positivos, la y resultará positiva. En $x=-1$ se tiene $y=12$: si se calculan valores para x menores de -1 también resulta y un número positivo porque el primer sumando es positivo y siempre va ha ser mayor que el segundo, que puede ser negativo, por tanto, el valor de y siempre es positivo para esta ecuación.

Así se confirma lo que se había obtenido, que las raíces son complejas y entonces la ecuación $y = 15x^2 + 6x + 3$ no corta al eje de las X, la parábola se encuentra en el cuadrante I y II. Ver la figura siguiente·



Ahora se continuará con un problema con un poco más de dificultad.

Diferencia de cubos.

¿Cómo se resolvería la siguiente ecuación?

$$x^3 - k^3 = 0, \quad k > 0$$

Resolviendo. Como es una diferencia de cubos se puede factorizar así:

$$(x-k)(x^2 + kx + k^2) = 0$$

Uno de los dos factores debe ser cero. Si $x - k = 0$ entonces la primera solución es $x = k$. Pero si $x^2 + kx + k^2 = 0$ se resuelve por la fórmula general con coeficientes: $a = 1,\ b = k,\ c = k^2$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula general se tiene:

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4(1)(k^2)}}{2(1)}$$

que resulta $$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4k^2}}{2}$$

Entonces las raíces son: $$x=\frac{-k\pm ki\sqrt{3}}{2}$$

Concluyendo las raíces cubicas de x^3 son:

$$x=k,\ x_1=\frac{-k+ki\sqrt{3}}{2},\ x_2\frac{-k-ki\sqrt{3}}{2}$$

Se puede realizar la comprobación con cada una de las soluciones Por ejemplo con x_1 se tiene:

$$x_1=\frac{-k+ki\sqrt{3}}{2}$$

Multiplicando primero $(x_1)(x_1)$ se tiene:

$$\left(\frac{-k+ik\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-k+ik\sqrt{3}}{2}\right)$$

que se puede escribir

$$\left(-\frac{k}{2}+\frac{k\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{k}{2}+\frac{k\sqrt{3}}{2}i\right)$$

haciendo la multiplicación se tiene:

$$\frac{k^2}{4}-\frac{k^2\sqrt{3}}{2}i+\frac{3k^2}{4}i^2$$

como $i^2=-1$ entonces resulta

$$-\frac{k^2}{2}-\frac{k^2\sqrt{3}}{2}i$$

este resultado se multiplica nuevamente por x_1 de la siguiente manera:

$$\left(-\frac{k^2}{2}-\frac{k^2\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{k}{2}+\frac{k\sqrt{3}}{2}i\right)$$

haciendo la multiplicación se tiene que:

$$\frac{k^3}{4}-\frac{k^3\sqrt{3}}{4}i+\frac{k^3\sqrt{3}}{4}i-\frac{3k^3}{4}i^2$$

y como $i^2=-1$

$$\frac{k^3}{4}+\frac{3k^3}{4}=k^3$$

por tanto.

$$(x_1)^3=k^3 \quad \text{y} \quad (x_1)^3-k^3=0$$

Con esto queda comprobado que la diferencia de cubos es cero.

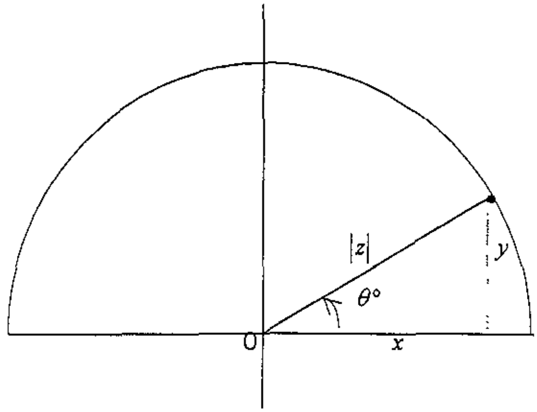
Representación polar de los números complejos.

Si se tiene en el primer cuadrante del plano complejo un número z distinto del origen y que forma un ángulo θ con el semieje real positivo OX entonces el complejo $z = x + yi$ debe satisfacer las siguientes ecuaciones ya que tiene modulo y amplitud:

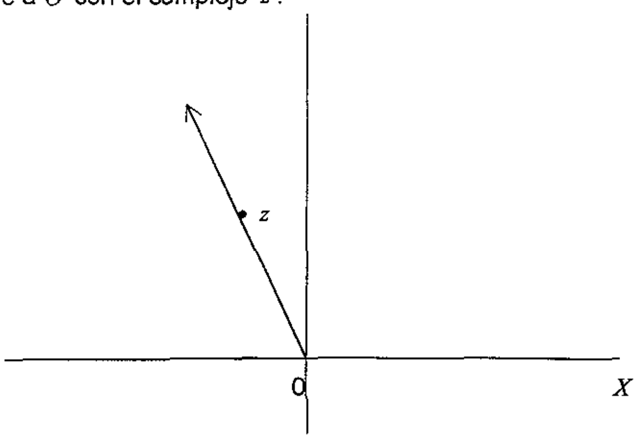
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|}$$

Obsérvese la siguiente figura:

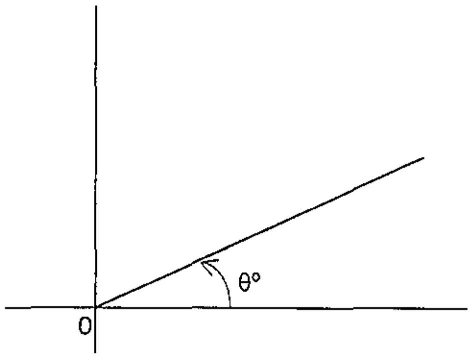


En este tema se usa la medida de los ángulos en radianes: 1 grado equivale a $\frac{\pi}{180}$ radianes. Por tanto el ángulo de un número complejo $z \neq 0$ (el concepto no se define para $z = 0$) es el ángulo que forma el semieje positivo $\overline{OX}$ con el rayo que une a O con el complejo z.

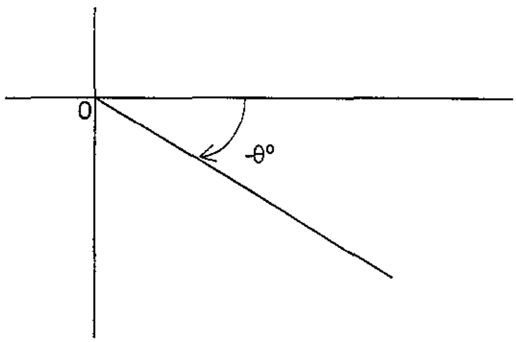


Sea $\theta°$ una medida de la amplitud de z, y si z se encuentra en el rayo $\overrightarrow{OX}_{\theta°}$, que se obtiene al girar al semieje positivo $\overrightarrow{OX}$ de acuerdo a lo siguiente:

- Si $\theta \geq 0$, el giro es de $\theta°$ en el sentido contrario al avance de las manecillas del reloj a este sentido se le llama positivo.



- Si $\theta < 0$, el giro es de $(-\theta)°$ en el sentido de avance de las manecillas del reloj, a este sentido de giro se le llama negativo.



Obsérvese que en las dos figuras anteriores sólo cambió el sentido del giro porque la magnitud del giro en ambas es la misma $|\theta°|$.

Para los casos donde $\overrightarrow{OX}_{0°} = \overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OX}_{90°} = \overrightarrow{OY}$, es decir, los complejos que forman un ángulo de 0° con el semieje $\overrightarrow{OX}$ son los del propio semieje $\overrightarrow{OX}$; Así también los que forman un ángulo recto con $\overrightarrow{OX}$ son los del semieje $\overrightarrow{OY}$; en ambos casos excluyendo al origen.

Por ejemplo, $\overrightarrow{OX}_{(-60)°}$ se obtiene al girar 60° al semieje $\overrightarrow{OX}$ en el sentido negativo. Es decir, $\overrightarrow{OX}_{(-60)°}$ está en el cuarto cuadrante.

Para los giros de una o varias vueltas completas, ya sea en sentido positivo o negativo como:

$\pm 360°$; $\pm(2 \times 360)° = \pm 720°$; $\pm(3 \times 360)° = \pm 1080°$; ...

se tiene que

$$\overline{OX}_{\theta°} = \overline{OX}_{(\theta \pm (360k))°}, \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

donde k indica el número de vueltas.

Por ejemplo, $\overline{OX}_{120°} = \overline{OX}_{840°}$, ya que $840 = 120 + (2 \times 360)$, y por tanto el rayo $\overline{OX}_{840°}$ se obtiene al hacer girar a $\overline{OX}$ dos vueltas completas ($2 \times 360° = 720°$), en sentido positivo y al dar después el giro de 120° también en sentido positivo. E inversamente, a partir de un rayo y mediante giros se puede regresar a éste con vueltas completas. Sea $\overline{OX}_{\theta°} = \overline{OX}_{\alpha°}$, hay un entero $k \geq 0$ para el cual $\alpha° = \theta° \pm (360° k)$.

Resumiendo: Hay muchas medidas para el ángulo de un complejo $z \neq 0$. Si $\theta°$ es una amplitud de z entonces para cualquier $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ se tiene que:

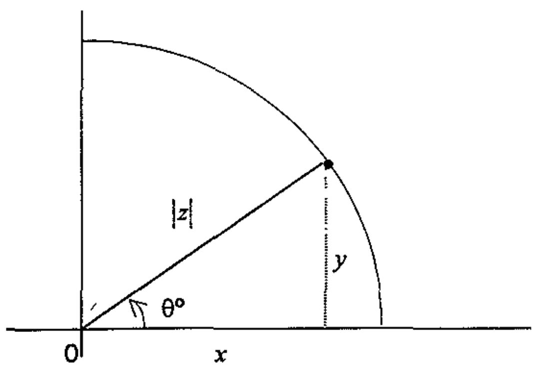
$$\theta \pm (360° k)$$

es también una amplitud de z.

Por las propiedades del seno y el coseno de un ángulo, si $z \neq 0$ un complejo que dista del origen en r unidades $(|z| = r)$ y tiene una amplitud de $\theta°$, entonces $\operatorname{Re}(z) = r \cos \theta°$ y $\operatorname{Im}(z) = r \operatorname{sen} \theta°$

Por tanto se puede escribir z de la siguiente forma: (Fig. siguiente)

$$z = r(\cos \theta° + i \operatorname{sen} \theta°).$$



A esta forma se le conoce como forma polar del complejo z.

Inversamente si se tiene

$$z = r(\cos\theta^\circ + i \operatorname{sen} \theta^\circ); \qquad r > 0,$$

entonces $|z| = r$ y θ° es una amplitud de z.

Ejemplo.

Encontrar la forma polar del producto $z_1 z_2$ sí:

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta^\circ_1 + i \operatorname{sen} \theta^\circ_1) \text{ y } z_2 = |z_2|(\cos\theta^\circ_2 + i \operatorname{sen} \theta^\circ_2).$$

¿Cuál es la medida del ángulo que forma el producto $z_1 z_2$ con $\overrightarrow{OX}$? [2]

Haciendo la multiplicación de $z_1 z_2$ se tiene:

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\theta^\circ_1 + i \operatorname{sen} \theta^\circ_1) \times |z_2|(\cos\theta^\circ_2 + i \operatorname{sen} \theta^\circ_2)$$

que se puede escribir

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos\theta^\circ_1 + i \operatorname{sen} \theta^\circ_1)(\cos\theta^\circ_2 + i \operatorname{sen} \theta^\circ_2)$$

haciendo el producto se obtiene:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos\theta^\circ_1 \cos\theta^\circ_2 - \operatorname{sen} \theta^\circ_1 \operatorname{sen} \theta^\circ_2) + (\operatorname{sen} \theta^\circ_1 \cos\theta^\circ_2 + \cos\theta^\circ_1 \operatorname{sen} \theta^\circ_2) i.$$

Y de las fórmulas para el seno y el coseno de una suma: se obtiene que la forma polar del producto $z_1 z_2$ es.

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos(\theta^\circ_1 + \theta^\circ_2) + i \operatorname{sen}(\theta^\circ_1 + \theta^\circ_2)\right).$$

Por tanto la medida del ángulo de $z_1 z_2$ es $\theta°_1 + \theta°_2$. Esto justifica la gráfica del producto que se dió en la interpretación geométrica

En donde el producto de dos números complejos $z_1 z_2$ se construye con un rayo $\overline{OC}$ que forme con el semieje $\overline{OX}$ un ángulo igual a la suma de los ángulos de z_1 y z_2, y escogiendo un punto en ese rayo cuya distancia al origen sea $|z_1||z_2|$. (Véase la pagina 55).

[2] Oteyza, Lam. Hernández, Carrillo; Temas Selectos de Matemáticas, Prentice Hall.

Potencias.

Recordando que una potencia es una multiplicación. Para calcular una potencia en los números complejos se procede como en los reales:

$$z^n = (x+yi)^n = (x+yi)(x+yi)...(x+yi)$$

pero tomando en cuenta las potencias de i:

$$\begin{array}{lllllll} i^1 & = & i & \qquad & i^5 & = & i \\ i^2 & = & -1 & & i^6 & = & -1 \\ i^3 & = & -i & & i^7 & = & -i \\ i^4 & = & 1 & & i^8 & = & 1 \end{array} \quad \cdots$$

Ejemplo: Calcular $(3-i)^3$.

$$(3-i)^2 = (3-i)(3-i) = 9-1+(-3-3)i = 8-6i.$$

Por tanto

$$(3-i)^3 = (3-i)^2(3-i) = (8-6i)(3-i) = 18-26i$$

Obsérvese que si se aplica el teorema del binomio se obtiene lo mismo, tomando en cuenta las potencias de i.

$$(3-i)^3 = 3^3 - 3(3^2 i) + 3(3i^2) - i^3,$$

o sea,

$$(3-i)^3 = 27-27i-9+i = 18-26i$$

Ejemplo: Calcular i^{23}.

Según la tabla de potencias de i los resultados se repiten en bloques de cuatro potencias, la potencia i^{23} sería:

$$i^{23} = i^{4(5)} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i,$$

con esto se puede anotar que si se tiene una potencia de i entonces

$$i^n = i^{4c} \cdot i^r = 1 \cdot i^r,$$

en donde c es el cociente de dividir n entre 4 y r es el residuo.

Formula de Moivre.

Si el complejo z se escribe en su forma polar; calcular $(\cos\theta° + i \operatorname{sen}\theta°)^3$.

Se tiene primeramente

$$(\cos\theta° + i \operatorname{sen}\theta°)^2 = (\cos\theta° + i \operatorname{sen}\theta°)(\cos\theta° + i \operatorname{sen}\theta°)$$

que es

$$\cos(\theta° + \theta°) + i \operatorname{sen}(\theta° + \theta°) = (\cos 2\theta° + i \operatorname{sen} 2\theta°).$$

Por tanto

$$(\cos\theta° + i \operatorname{sen}\theta°)^3 = (\cos 2\theta° + i \operatorname{sen} 2\theta°)(\cos\theta° + i \operatorname{sen}\theta°)$$

Usando de nuevo la forma polar del producto se tiene:

$$(\cos 2\theta° + i \text{ sen } 2\theta°)(\cos\theta° + i \text{ sen } \theta°) = \cos(2\theta° + \theta°) + i \text{ sen }(2\theta° + \theta°).$$

Es decir,

$$(\cos\theta° + \text{sen } \theta°)^3 = \cos 3\theta° + \text{sen } 3\theta°.$$

Una potencia de un número complejo en su forma polar se puede calcular con la formula de Moivre.

Si $z = r(\cos\theta° + i \text{ sen } \theta°)$ donde $r > 0$, entonces:

$$z^n = r^n(\cos\theta° + i \text{ sen } \theta°)^n = r^n(\cos n\theta° + i \text{ sen } n\theta°), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ .$$

Raíces de números complejos.

¿Cómo se encuentran las raíces de un número complejo? Por ejemplo, ¿cómo encontrar las raíces cuadradas del número: $4+3i$?

Supóngase que $a+bi$ es solución de $\sqrt[2]{4+3i}$

entonces

$$(a+bi)^2 = 4+3i.$$

Es decir,

$$a^2 - b^2 + 2abi = 4+3i.$$

Al comparar las partes reales y las imaginarias, se tiene un sistema de dos ecuaciones:

$$a^2 - b^2 = 4$$

$$2ab = 3 \qquad (1)$$

Elevando al cuadrado el sistema se tiene:

$$(a^2 - b^2)^2 = 16$$

$$(2ab)^2 = 9.$$

desarrollando los cuadrados se tiene.

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = 16$$

$$4a^2b^2 = 9$$

sumando las ecuaciones se obtiene:

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 25.$$

O sea

$$(a^2 + b^2)^2 = 25.$$

Sacando raíz cuadrada

$$a^2 + b^2 = 5$$

Sumando las expresiones $a^2 - b^2 = 4$ y $a^2 + b^2 = 5$ se tiene:

$$2a^2 = 9,\ a^2 = \frac{9}{2}$$

Y al restar $a^2 - b^2 = 4$, $a^2 + b^2 = 5$ se tiene:

$$2b^2 = 1,\ b^2 = \frac{1}{2}.$$

Por tanto se tiene:

$$a = \pm\frac{3}{\sqrt{2}},\ b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como la ecuación (1) es positiva entonces a y b tienen el mismo signo pues su producto es 3. Por tanto $a_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ y $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ o bien $a_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ y $b_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ son las dos soluciones.

Comprobación con a_1, b_1.

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 = \frac{9}{2} + 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) - \frac{1}{2} = 4 + 3i$$

Comprobación con a_2, b_2

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 = \frac{9}{2} + 2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} = 4 + 3i.$$

Enseguida se presenta otro juego de cartas donde se repasa el tema completo de números complejos.

Cadena de Complejos 2.

Objetivo del Juego: El alumno reafirmará algunas propiedades de los números complejos.

Requisitos: Teoría de los números complejos.

Premio: El profesor podría obsequiar medio punto para este tema a cada uno de los integrantes del equipo que termine en primer lugar.

Bases

El juego se recomienda para equipos de cuatro personas.

1. Se reparten las cartas entre los jugadores.
2. Cualquiera de los jugadores puede hacer la primera pregunta.
3. El que tenga la respuesta a la primera pregunta; hace la segunda pregunta el que tenga la respuesta de la segunda pregunta hace la tercera pregunta y así sucesivamente.
4. El juego se termina al colocar toda la cadena de 28 tarjetas sobre la mesa.

Un grado.	$0 \leq \theta \leq 360°$
Amplitud de un complejo.	**Amplitud 10°**
Si z **tiene un ángulo de 730°.**	$r(\cos\theta° + \text{sen } \theta°)$
Forma polar de z**.**	**La unidad.**
$\cos^2\theta° + sen^2\theta°$	$\sqrt{2}$
Modulo de $-1+i$	$\lvert z\rvert \text{sen}\,\theta°$
Parte imaginaria de z**.**	**90°**

Medida en grados del ángulo i.	$-270°$
Amplitud negativa de i.	$r_1 = r_2$ $\theta_1^{\circ} = \theta_2^{\circ}(\pm k \times 360°)$
Igualdad de complejos en su forma polar.	$\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert\left(\cos\left(\theta_1^{\circ}+\theta_2^{\circ}\right)+i\left(\operatorname{sen}\left(\theta_1^{\circ}+\theta_2^{\circ}\right)\right)\right)$
Forma polar de $z_1 z_2$	$-i$
La potencia séptima de i.	$(x+yi)^n$
La potencia n-esima de z	$\pm i\sqrt{r}$
Raíces cuadradas de $-r$	(x_1+x_2, y_1+y_2)

Suma de dos complejos.	$\left(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2\right)$
Multiplicación de dos complejos.	**Una pareja ordenada de números reales.**
Es un número complejo.	$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$
Un real por un complejo.	$\sqrt{x^2 + y^2}$
El modulo de $x + yi$**.**	$x - yi$
Conjugado de $x + yi$	$z^n = r^n\left(\cos n\theta° + isenn\theta°\right)$
Formula de Moivre.	$-x - yi$

Simétrico de $x+yi$.	$\overline{z_1}+\overline{z_2}$
El conjugado de la suma de dos números.	z
El conjugado del conjugado.	**Es menor o igual que** $\lvert z_1\rvert+\lvert z_2\rvert$.
El modulo de la suma de dos números.	**Es un número real y positivo.**
Producto de conjugados.	**0**
$z+(-1)z$	$z_1\left(z_2+z_3\right)=z_1z_2+z_1z_3$
Propiedad distributiva.	$\frac{\pi}{180}$

4

ecuación cartesiana de la recta

Ecuación Cartesiana de la Recta.

Este tema solo se refiere a la recta y su ecuación en sus diferentes formas. Aquí se proponen algunos problemas con solución analítica y se observan sus lugares geométricos.

"Pensar un problema, hacerse preguntas y pensar en los porqués, es todavía más difícil que saberlos resolver, y es más bello"[1]

En Geometría Analítica es muy importante recurrir a las gráficas siempre que se pueda.

"Las descripciones deben preceder a las definiciones. Si cualquier cosa está clara para mí, esto no significa que yo pueda definirla, sino que sólo puedo describirla; puedo decir con precisión cómo esta hecha, pero no qué cosa es".[2]

¿Por qué se hablará de la Geometría Analítica como una síntesis del Algebra y la Geometría?

"...la idea cartesiana exige un esfuerzo de abstracción, debiéndose reconocer la igualdad en cosas y hechos aparentemente desiguales..."
"...desde los griegos, donde el número era la esencia de todas las cosas, se sintió la necesidad de referirlo a la figura para después pedir a ella una inspiración en el descubrimiento de leyes generales. Pero es sobre todo a partir de la época cartesiana que, con la creación de la geometría analítica, la colaboración se hace más estrecha hasta llevar a una unificación del lenguaje; el punto se vuelve número, la curva se llama ecuación, relaciones algebraicas traducen particulares posiciones de rectas y de planos, y la variación de un término de una ecuación tiene el poder de hacer cambiar la curva a una superficie, transformándola ante nuestros ojos".[3]

Se inicia este tema con el siguiente problema.

---

[1] Castelnuovo Emma, Didáctica de la Matemática Moderna. Edit. Trillas.
[2] Pestalozzi, Como enseña a sus hijos Gertrudiz. Fernández, México13 D:F:
[3] Castelnuovo, obra citada.

Uvas y galletas.

Lili es una chica de 17 años, le falta un poco de peso y el médico le recomendó que además de sus alimentos acostumbrados, consumiera galletas de soya que contienen 18 calorías cada una y uvas que contienen 5 calorías cada una. También le señaló que de estos alimentos debe consumir sólo 135 calorías diariamente. ¿Cuánto debe consumir de galletas y uvas?

Resolviendo:

La expresión algebraica para el número de galletas que debe consumir es x.

La expresión algebraica para el número de uvas que debe consumir es y.

La expresión algebraica para 18 calorías por cada galleta más 5 calorías por cada uva deberá ser igual a un total de 135 calorías, es decir:

$$18x + 5y = 135 \qquad (1)$$

¿Cuántas uvas deberá comer Lili si no tiene galletas?

De la ecuación (1), si se hace $x = 0$, suponiendo que no hay galletas se tiene:

$$18(0) + 5y = 135$$

o bien

$$5y = 135$$

despejando y de esta última ecuación se tiene:

$$\left(\frac{1}{5}\right)5y = 135\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\left(\frac{5}{5}\right)y = \frac{135}{5}$$

$$y = 27$$

El resultado encontrado es que si Lili no tiene galletas se tendrá que comer 27 uvas.

El resultado representa el punto $(0,27)$ en el plano cartesiano.

¿Cuántas galletas se tendrá que comer Lili si no tiene uvas?

Entonces en la ecuación (1) se hace $y=0$ y se tiene:

$$18x+5(0)=135$$

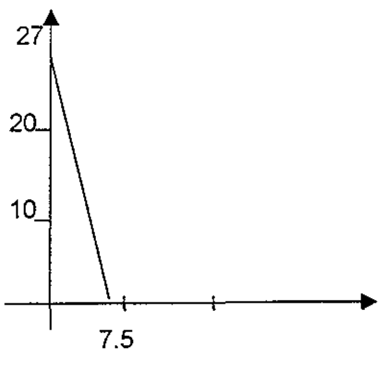
o bien

$$18x=135$$

despejando x se obtiene

$$\left(\frac{1}{18}\right)18x=135\left(\frac{1}{18}\right)$$
$$\left(\frac{18}{18}\right)x=\frac{135}{18}$$
$$x=7.5$$

Es decir, que si Lili no tiene uvas se deberá comer siete y media galletas. Geométricamente corresponde al punto $(7.5,0)$. Ahora sí se unen los puntos $(0,27),(7.5,0)$ se obtiene una línea recta, como se ve en la siguiente figura



¿Dónde corta la recta a los ejes? La recta corta en los puntos trazados $(0,27)$, $(7.5,0)$ determinados a partir de hacer $x=0$, $y=0$ respectivamente.

Una característica muy importante en las rectas es su pendiente o el ángulo de inclinación de una recta con respecto al eje X positivo. Esta pendiente se puede calcular con dos puntos cualesquiera de la recta como se señala:

Sean dos puntos: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ entonces $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

¿Cuál es la pendiente de la recta en este caso? Sustituyendo los puntos señalados $(0,27)$, $(7.5,0)$ se tiene: $m = \frac{27-0}{0-7.5} = -\frac{18}{5}$.

Pero también para responder a esta pregunta se puede hacer lo siguiente:
De la ecuación (1) se despeja y, se obtiene:

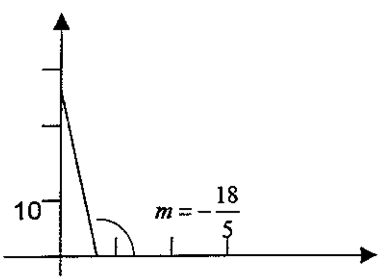
$$5y = -18x + 135$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)5y = (-18x + 135)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$y = -\frac{18}{5}x + 27 \qquad (2)$$

Esta última ecuación tiene la forma $y = mx + b$. Esta ecuación de la recta se le llama: pendiente-ordenada en el origen. Precisamente porque señala estas propiedades tan importantes de la recta.
Por tanto se tiene que la pendiente de la línea recta es el coeficiente de la variable x, que es $-\frac{18}{5}$, y otra cosa importante sería:

¿Cuál es la ordenada en el origen o el punto donde la recta corta al eje Y?
Como ya se mencionó la respuesta es el punto $(0,27)$ que también esta señalado en la ecuación anterior, cuando se hizo $x = 0$.
Ahora, si se dan valores a la variable x y se hace la gráfica se obtiene la misma recta, véase la siguiente figura:



¿Cuántas soluciones tiene la ecuación (1) o la (2)? Ambas son la misma ecuación sólo que están escritas en diferentes formas.

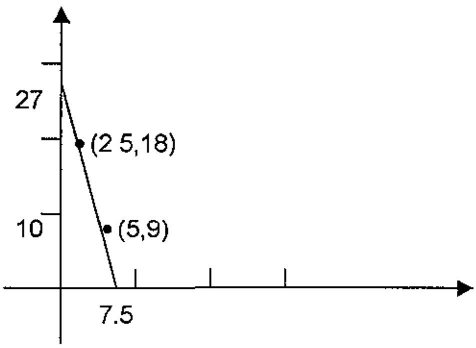
Lili puede comer (0 galletas, 27 uvas). Es decir, Lili se puede comer $(0,27)$.

Pero también se puede comer (7.5 galletas, 0 uvas), o sea $(7.5,0)$, o también (5 galletas,9 uvas) o bien (2.5 gallètas, 18 uvas).

Todos los puntos anteriores son soluciones de la ecuación, son puntos que pertenecen a la recta.

La pregunta anterior puede formularse de la siguiente manera. ¿Cuántas soluciones tiene una recta? Tiene una infinidad de soluciones.

En la siguiente gráfica se observan algunos puntos pertenecientes a la recta: $(7.5,0),(5,9),(2.5,18),(0,27)$.



Álgebraicamente se puede ver que el punto C(5,9) es solución de la ecuación (1). Pues sustituyendo en esta se tiene:

$$18(5)+5(9)=135$$
$$90+45=135$$

Por tanto el punto C(5,9) es solución de la ecuación y pertenece a la recta.

A continuación se presenta el siguiente problema que también se refiere a la ecuación cartesiana de una recta.

¿Y ahora como se encuentra la pendiente? O ¿Cuál es el ángulo de inclinación de esta recta? Utilizando la fórmula de la pendiente y dos puntos de los anteriores $(1,6),(8,48)$ se tiene:

$$m=\frac{48-6}{8-1}=6$$

También se puede proceder como en el problema anterior, se despeja la variable y; y el coeficiente de la variable x es el número que se busca. En el presente caso no es necesario despejar puesto que ya se tiene esto:

$$y=6x$$

Nuevamente esta ecuación es de la forma $y=mx+b$ de donde se ve que la pendiente es 6 y que la recta corta al eje Y en el origen.

¿Cuánto ganará el Sr. Rafaelo en la venta de 15 rebanadas de pastel?

Ahora se tiene que $x=15$, que sustituyendo en la ecuación resulta:

$$y=6(15)=90.$$

Por tanto gana $90.

¿Cuántos rebanadas de pastel tendrá que vender para tener una ganancia de $450? Utilizando la ecuación $y=6x$ que como se señaló y es la ganancia, por lo que se expresaría:

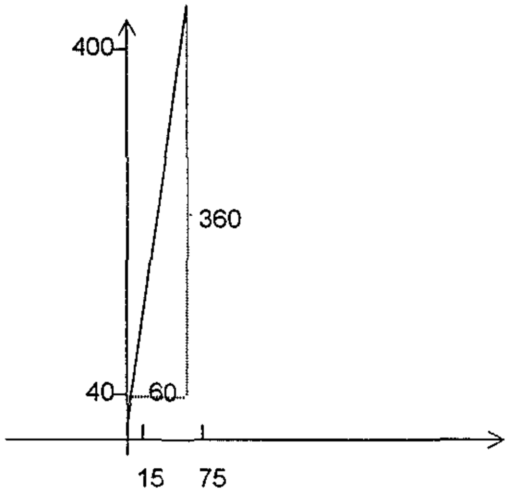
$$6x=450$$

de donde se despeja x y se obtiene:

$$x=\frac{450}{6}=75$$

Entonces necesita vender 75 rebanadas de pastel para tener una ganancia de $450.

Por otro lado si se hace la gráfica de los puntos (15,90),(75,450) que son dos soluciones de la ecuación se obtiene la misma recta:



Si trazamos las rectas paralelas a los ejes que pasan por estos dos puntos, *como se observa en la gráfica, se obtiene un triángulo rectángulo.* Como se sabe, la tangente es la razón entre cateto opuesto y cateto adyacente. El cateto opuesto sería la diferencia entre las ordenadas de los dos puntos 450-90 y el cateto adyacente se calcula haciendo la diferencia de las abscisas 75-15, es decir:

$$\tan\alpha = \frac{450-90}{75-15} = 6$$

Otra vez se confirma lo que se había señalado que la pendiente de esta recta es $m = 6$.

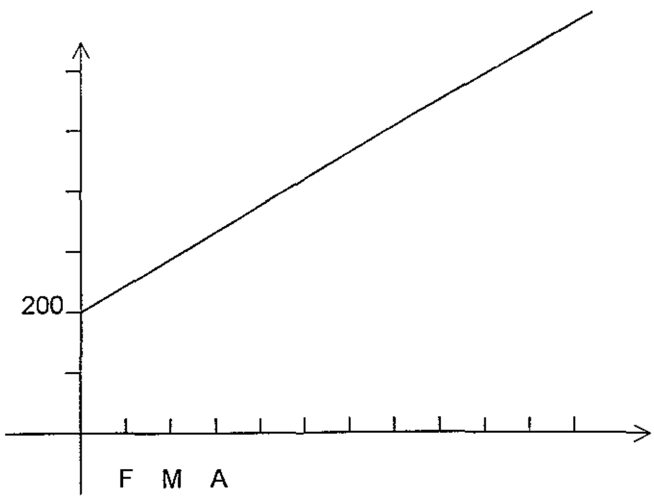
Continuando con este tema se resolverá el siguiente problema.

El problema de desnutrición en Reforma, Chiapas.

A lo largo del año 1999, al final de cada mes se registró el número de niños con desnutrición en la ciudad de Reforma, Chiapas. Los datos son los siguientes:

Meses	No de enfermos	Meses	No de enfermos
Enero	200	Febrero	250
Marzo	300	Abril	350
Mayo	400	Junio	450
Julio	500	Agosto	550
Septiembre	600	Octubre	650
Noviembre	700	Diciembre	750

Para analizar este problema se hace la gráfica de los datos anteriores fig. siguiente:



Sea x la variable que representa al número de mes, donde enero es el origen.
Sea y el número de enfermos en los últimos días de cada mes.
¿Cuál fue el número de enfermos en enero?

Según los datos de la tabla, el resultado es 200 y aumenta 50 enfermos por cada mes que transcurre.

La ordenada en el origen es: $y=200$, y como aumentan los enfermos en 50 por cada mes, la regla de correspondencia para cada abscisa se puede escribir:

$$y=200+50x$$

¿Cuál será la ordenada en el origen de esta línea recta?

Tomando la ecuación anterior y haciendo $x=0$ se obtiene $y=200$. Por lo tanto la intersección de la recta con el eje Y es el punto (0,200).

¿Cuál será la inclinación de esta línea recta?

Nuevamente se toma la ecuación $y=50x+200$ y el coeficiente de la variable x corresponde a la pendiente o inclinación·

$$m=50$$

¿En qué mes la cifra llegará a 1100 niños enfermos?

La ecuación anterior se iguala a 1100:

$$200+50x=1100$$

se obtiene el resultado despejando la variable x.

$$x=18.$$

Por tanto en el mes número dieciocho la cifra de niños enfermos será de 1100, si no se ataca el problema de desnutrición. ¿Cuál será el número de niños enfermos para el comienzo del año 2002 en esa población?

Una cuestión fundamental en las matemáticas y en cualquier ciencia es la predicción. Si el origen es el mes de enero de 1999, en el mes de enero del 2002, $x=37$.

Calculando:

Si $x=37$, entonces

$$y=200+50(37)=2050.$$

Este resultado señala que al empezar el año 2002 en esta población los niños desnutridos alcanzaran la cifra de 2050.

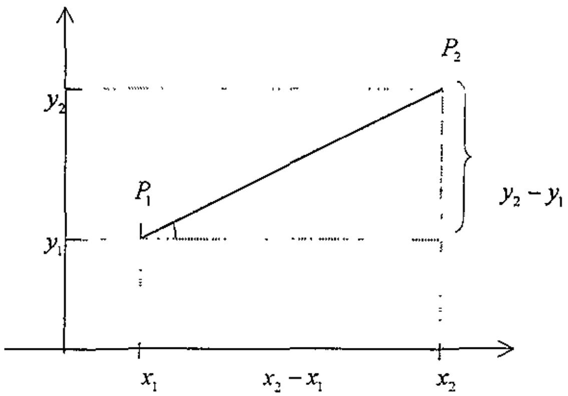
RESULTADOS IMPORTANTES PARA ESTE TEMA.

A continuación se formalizan algunos resultados que se usaron en los problemas anteriores.

Definición de pendiente. Sea l una recta no paralela al eje Y, y sean $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ puntos distintos en l. La pendiente m de la recta l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si l es paralela al eje Y, entonces la pendiente de l no esta definida.



El numerador $y_2 - y_1$, de la formula de m es el cambio vertical en el sentido de $\overline{P_1P_2}$ sobre una recta l y puede ser positivo negativo o cero. El denominador es el cambio horizontal y puede ser positivo o negativo pero no puede ser cero, porque no es paralela al eje Y, si existe inclinación. Como se muestra en la figura anterior.

La definición de pendiente no depende de los puntos que se seleccionen en l. Si se usan otros puntos en l el triángulo que se forma trazando las paralelas a los ejes que pasa por dichos puntos es semejante al triángulo formado por P_1, P_2 y las rectas paralelas a los ejes.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\quad x_1\neq x_2$$

Observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (5,-2) y (1,6).

$$m=\frac{6-(-2)}{1-5}=\frac{8}{-4}=-2$$

y para encontrar el valor del ángulo se hace $\alpha=\arctan(-2)=116°34'$.

Con los elementos anteriormente enunciados, se puede definir la ecuación de la línea recta.

Definición de la línea recta.

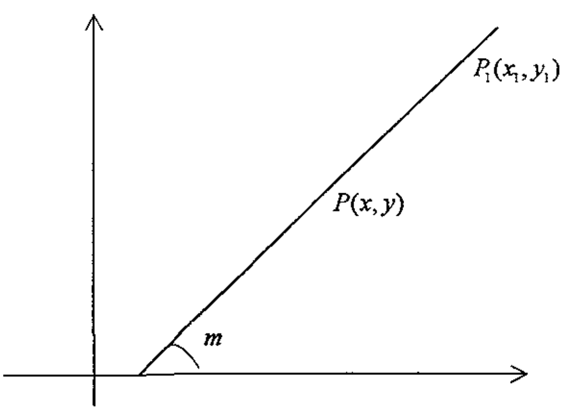
Es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que siempre mantiene la misma pendiente con respecto a un punto fijo dado.

Se obtendrá la ecuación de la recta en su forma punto–pendiente mediante el siguiente problema:

Problema 1.

Encontrar la ecuación de la recta con pendiente m y que pasa por el punto $P_1(x_1,y_1)$.

i) Dibujando la gráfica:



ii) Identificando los datos:

variable: $P(x,y)$ (punto que se mueve)

constante: $P_1(x_1,y_1)$

pendiente = m

iii) Utilizando la ecuación de la pendiente:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

iv) Sustituyendo los datos $P(x,y),P_1(x_1,y_1),m$ en la ecuación de la pendiente

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Despejando la diferencia de las ordenadas se tiene la ecuación de la recta en su forma punto–pendiente:

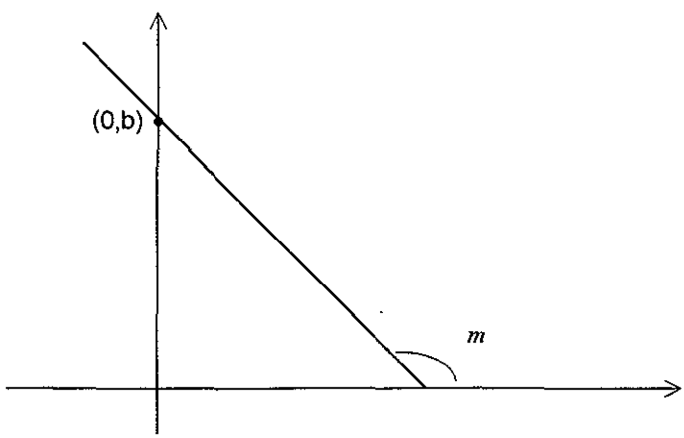
$$y-y_1=m(x-x_1).$$

Otra forma de la ecuación de la recta se obtendrá con el siguiente problema.

Problema 2.

Obtener la ecuación de la recta dada su pendiente m y la ordenada en el origen $(0,b)$.

i)Dibujando la gráfica:



ii) Identificando los datos:

variable: $P(x,y)$ (punto que se mueve)

constante: $P_1(0,b)$

pendiente = m

iii) Utilizando la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

iv) Sustituyendo los datos $P(x,y)$, $P_1(0,b), m$:

$$y - b = m(x - 0)$$

Haciendo el producto y despejando y se obtiene lo que se buscaba la ecuación pendiente-ordenada en el origen:

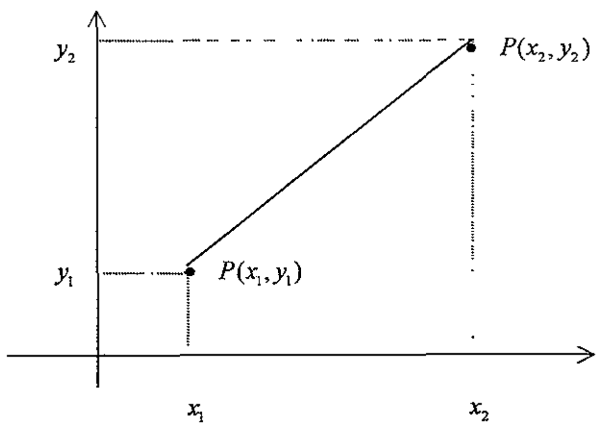
$$y = mx + b.$$

A continuación se obtiene la forma de la ecuación de la recta llamada dos puntos dados, con el siguiente problema:

Problema 3.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$.

i) Dibujando la gráfica:



ii) Identificando los datos:

variable: $P(x,y)$ (punto que se mueve)

constantes: $P(x_1,y_1)$, $P(x_2,y_2)$

iii) Usando la ecuación de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

iv) Sustituyendo los datos y la pendiente m *en la ecuación punto- pendiente,*

se obtiene: $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

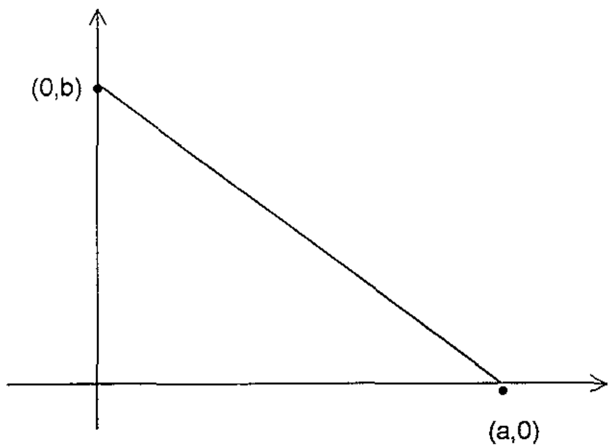
De esta manera se ha obtenido la forma de la ecuación de la recta dados dos puntos

Enseguida se propone un problema más para obtener la forma simétrica de la ecuación de la recta.

Problema 4.

Encontrar la ecuación de la recta que corta al eje X en el punto (a,0) y corta al eje Y en el punto (0,b)

i) Se hace la gráfica·



ii) Identificando los datos:

variable: $P(x,y)$ (punto que se mueve)

constantes: $P_1(a,0)$, $P_2(0,b)$

iii) Usando la ecuación de la recta dados dos puntos y sustituyendo los datos se obtiene:

$$y-0=\frac{0-b}{a-0}(x-a)$$

haciendo las operaciones se tiene.

$$y=-\frac{bx}{a}+\frac{ab}{a}$$

Pasando las variables al primer miembro y multiplicando la ecuación por $\left(\frac{1}{b}\right)$ se tiene la ecuación de la recta en su forma simétrica:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Dadas cualesquiera de las ecuaciones antes mencionadas, estas se pueden expresar de la siguiente forma:

$$Ax+By+C=0$$

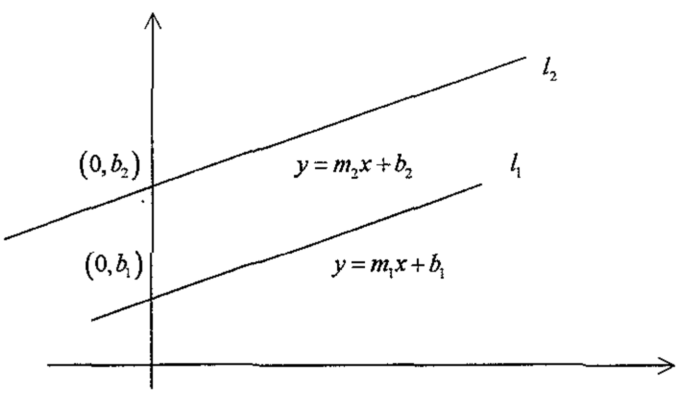
que es la ecuación general de la recta.

Ahora se anotan dos importantes teoremas.

Teorema de la pendiente de rectas paralelas. Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Demostración: Sean l_1, l_2 rectas distintas, con pendientes m_1, m_2 respectivamente. Si sus ordenadas en el origen son b_1 y b_2 (obsérvese la siguiente figura) las ecuaciones de las rectas son:

$$y=m_1x+b_1 \quad \text{y} \quad y=m_2x+b_2$$



Las rectas se cortan en algún punto (x,y) si y sólo si los valores de y son iguales para alguna x, por tanto

$$m_1x+b_1=m_2x+b_2$$

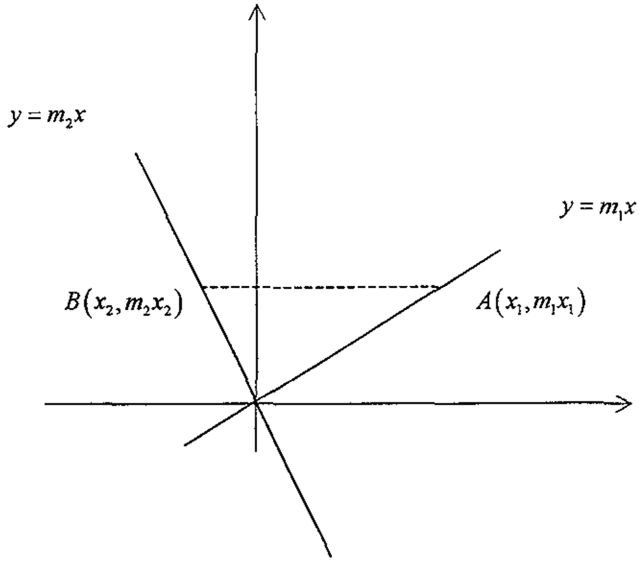
que se puede escribir

$$(m_1-m_2)x=b_2-b_1 .$$

Pero x se puede despejar de esta ecuación solamente si $m_1-m_2\neq 0$. Por tanto l_1,l_2 no se cortan, son paralelas si y sólo si $m_1=m_2$.

Teorema de las pendientes de rectas perpendiculares. Dos rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2=-1$.

Demostración: Sean dos rectas que pasan por el origen entonces sus ecuaciones son $y=m_1x,\quad y=m_2x$ y sean los puntos $A(x_1,m_1x_1),\quad B(x_2,m_2x_2)$ distintos de 0 sobre las rectas (obsérvese la siguiente figura) .



Estas rectas serán perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es recto, por tanto por el teorema de Pitágoras se tiene que:

5

gráficas de funciones

Gráficas de Funciones.

Este tema tiene como propósito ver las gráficas de funciones, pero se tiene el inconveniente de que a la mayoría de los alumnos les es completamente ajeno el concepto de función por lo que se presentan a continuación algunos ejemplos muy simples de funciones.

Desde la escuela primaria se presentan los conceptos ya dados por ejemplo, el concepto de área o la fórmula ya dada de $A = \frac{bh}{2}$.

El concepto de función es tratado de la siguiente forma, primero se expone su definición formal: una función f es una relación, tal que no existen dos pares ordenados diferentes que tengan el mismo primer componente. Luego se procede a dar varias listas de pares ordenados que cumplan con esta condición y se hacen las gráficas, de esta forma se supone que los alumnos asimilaron completamente el concepto y no es cierto. Lo que se consiguió es despojar al concepto de función, este concepto tan importante en la matemática de su principal característica, el cambio.

"No se entiende que en la matemática se tienen conceptos como el de función cuyo contenido especial es el cambio. Comprender la dinámica de una fórmula es entrar de lleno en el concepto de función"[1]

En la mayoría de los temas se recurre a lo simple, en este caso, se recurre a establecer la regla de correspondencia entre los conjuntos dominio e imagen; también con la explicación simple de: "los alumnos no entenderían un fenómeno natural, un experimento físico". Recurrir a una acción, observar un fenómeno que considera al objeto y operar, es decir, experimentar sobre el objeto; todo esto es muy complicado para el alumno, esta es la disculpa.

"Se pensaba hace pocos años que el concepto de función llevando el pensamiento sobre aquello que cambia, sobre el estudio de las operaciones y transformaciones, pudiese turbar la conciencia del joven al cual se prefería presentar un mundo

[1] Castelnuovo, Emma Didáctica de la Matemática Moderna Edit. Trillas México.

platónico, perfecto e inmutable. Esto debe cambiar si se desea una estrecha colaboración entre el curso de matemáticas y el de observaciones científicas que lleva un juicio tanto cualitativo como cuantitativo de los fenómenos de la naturaleza, en los cuales no hay modo evidente de detener ciclos o cambios, sujetando la vida a un sistema de esquemas fijos".[2]

Enseguida se presentan tres situaciones problemáticas que se utilizan para la construcción de tres funciones basadas en los trabajos de la profesora francesa Anne Berté.

[2] Idem Castelnuovo, Emma.

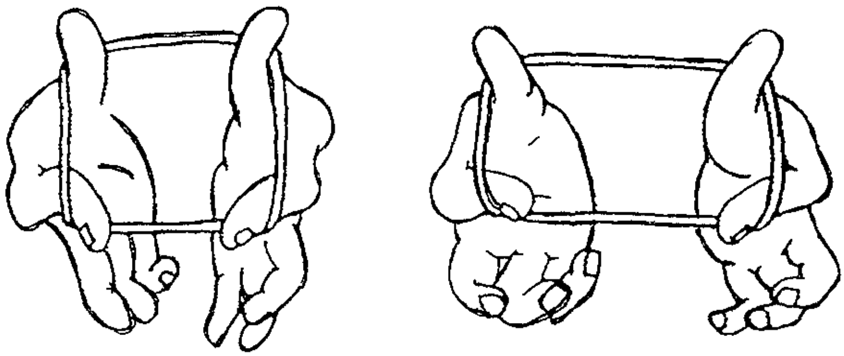
Qué se necesita

Materiales.

Objeto: Un cordel de 40cm amarrado.

Movimiento: Con el cordel entre los dedos, acercar o separar los dedos como se muestra en la siguiente figura:

Investigación: Definiciones de experimento, hipótesis, función, ecuación, área y perímetro.



Cómo se hace

OBSERVA

Para observar un cambio es necesario que transcurra determinado tiempo.

Un experimento es la repetición de un fenómeno, de tal manera que hay que realizarlo varias veces.

EXPERIMENTA

Repite cuantas veces sea necesario el movimiento que se indicó.

¿Qué figura o figuras obtienes con el cordel?

Hacer preguntas conduce a adquirir conocimientos. Se hacen preguntas por necesidad, curiosidad, por avanzar en la solución de problemas.

Escribe preguntas.

Escribe que sucedió.

¿Qué ocurrió?

¿Cambia el perímetro? ______________________

¿Por qué?

____

¿Cambia el área? ______________________

¿Por qué?

____

¿Cómo cambia?

¿Cúal crees que sea la causa?

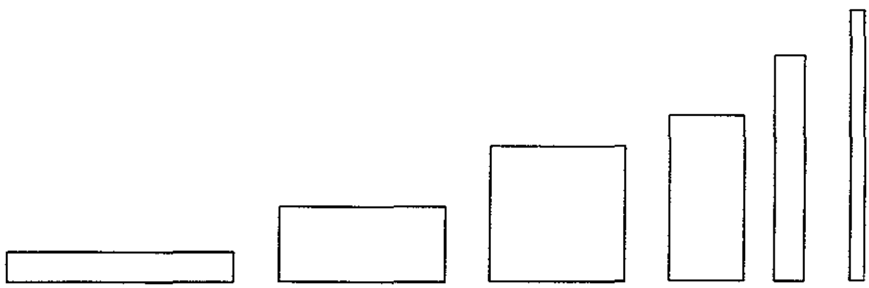
Describe verbalmente el proceso.

____

¿Conseguiste el cambio?

¿Cuántos rectángulos distintos obtienes? Obsérvese la siguiente figura:

____



¿Cómo hacelo? Fijarse en una dimensión, por ejemplo la horizontal.

¿Para un cierto valor de la dimensión horizontal siempre se obtiene un rectángulo?

____

REFLEXIONA (Búsqueda de las causas)

¿Cuándo abres los dedos, que ocurre?

El área aumenta o disminuye.______________________________

Análisis Numérico

Dale valores a la dimensión horizontal, por ejemplo, cuando mide 5.

La otra dimensión mide:________________________________

El área de un rectángulo es el producto de.______________________

Entonces el área resulta:________________________________

¿Si aumenta la dimensión horizontal, siempre aumenta el área?

¿Si disminuye la dimensión horizontal, siempre disminuye el área?

EXPLICA

Formula hipótesis.

Hipótesis suposición de una cosa posible, de la que se saca una consecuencia.

¿Cuáles son tus suposiciones? ¿Por qué?

Hay que hacer el proceso anterior variando la dimensión horizontal.

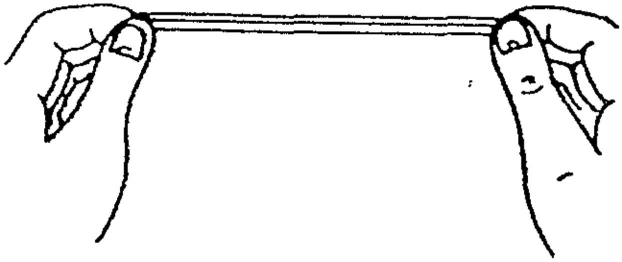
¿Cuándo se consigue el área máxima?________________________

¿Por qué?_______________________________________

¿Cuál es el máximo valor que se le puede asignar a la dimensión horizontal?

____

Fíjate en la siguiente figura.



¿Con este valor el área resulta?:______________________________

¿Cuál es el valor más pequeño que se le puede asignar a la dimensión horizontal?______________________________

¿Con ese valor el área resulta?______________________________

Y si le das los siguientes valores: 19, 19.5, 19.9, 19.99, 19.999.

¿Cuándo nos aproximamos a 20 qué sucede con la función? Anota los valores correspondientes y escribe qué observas:

____

¿Y si le das los siguientes valores? 1, 0.5, 0.1, 0.11, 0.111

¿Cuándo nos aproximamos a 0, que sucede con la función? Anota los valores correspondientes y escribe que observas:

____

¿Se le puede asignar cualquier valor a esta dimensión?______________________

Anota los resultados correspondientes en la siguiente tabla:

Dimensión Horizontal	Área	Dimensión Horizontal	Área
0		10	
1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	

¿Cómo resultan los valores respectivos de la área, cuando la dimensión horizontal es 5 y cuando es 15?

____

¿Cómo se origina una ecuación?
¿Puedes inventar una ecuación?
¿Para qué sirve una ecuación?
¿Significa algo una ecuación?

¿Qué observas con la suma de las dimensiones horizontal y vertical? Anota la suma correspondiente:

1 + 19 =	11 + 9 =
2 + 18 =	12 + 8 =
3 + 17 =	13 + 7 =
4 + 16 =	14 + 6 =
5 + 15 =	15 + 5 =

La suma de las dimensiones siempre resulta:________________________

Y el semiperímetro es:____________________________________

Por tanto la suma de las dos dimensiones es igual al__________________

Análisis Algebraico.

Regresando al problema. Si se le asigna a la dimensión horizontal el valor x

¿Cuál es el valor de la otra dimensión? Recuerda que esta dimensión debe estar en términos de la dimensión horizontal y además deben de sumar ambas el semiperímetro.______________________________________

Si se sustituye en la fórmula de área estas dimensiones. ¿Qué obtienes?____

Efectúa el producto en la ecuación anterior y escribe como resulta.____

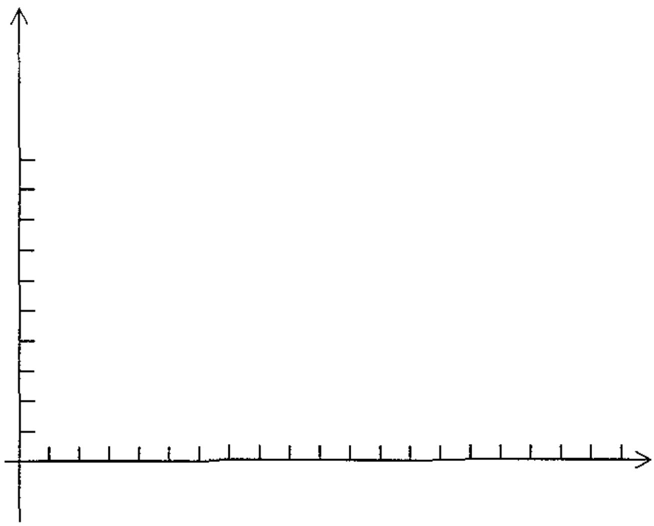
Ahora se tiene una función de 2º grado. Vuelve a calcular con la función los valores numéricos antes calculados. Completa nuevamente la siguiente tabla y comprueba que la función escrita es correcta.

x	$A(x)$	x	$A(x)$
0		10	
1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	

Los resultados de las dos tablas,¿ cómo son?____________________________

Análisis Geométrico.

Con la tabla anterior dibuja la gráfica correspondiente en el siguiente plano.



¿Cómo se hace un informe?

¿Cómo se hace un reporte?

Las gráficas facilitan el manejo de información

Análisis de resultados.

Nuevamente describe verbalmente el comportamiento del área._______________

____

____

¿Cómo resultaron los valores respectivos de la función para $x=9, x=11$?______

____

¿Cómo resultaron los valores respectivos de la función para $x=3, x=17$?______

____

Si se puede cambiar la variable x por $-x$ y la función no se altera; se dice que la función es:____

¿Cuál es el valor máximo del área?______________________________________

____

¿De qué curva se trata?____

¿La curva tiene algún "hoyo o salto" ?____________________________________

¿Hay algún valor en el intervalo $[0,20]$ que no pueda ser asignado a la variable x ?____

Conclusiones

Se cumplieron los objetivos, ¿cuáles?______________________________

____

¿Se tiene alguna otra pregunta?______________________________

¿Qué se concluye del análisis numérico?______________________________

¿Qué se concluye del análisis algebraico?______________________________

¿Qué se puede decir de la gráfica de la curva?______________________________

¿Cómo resultaron las hipótesis planteadas?______________________________

¿Habrá otro punto de vista?______________________________

____

Verificar estas conclusiones consultando bibliografía.______________________________

____

CONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA.

Con un objeto en movimiento las palabras, "progresivamente", "continua", "aproximarse", "tiende a", toman sentido.

"El estado más común de los cuerpos es el movimiento"

Galileo.

Práctica No 2.

Para desarrollar la práctica contesta detenidamente las preguntas y sigue las indicaciones.

Para qué se hace

Objetivos:

1. El alumno comprobará que manipulando un objeto puede obtener una función.
2. Observará que una dimensión es fija y que la otra dimensión esta cambiando.
3. El alumno trabajará con la definición de rectángulo. Se observa que las palabras "longitud" y "ancho" son un obstáculo, ya que con el material propuesto, progresivamente la longitud puede hacerse igual o más pequeña que el ancho, y sigue siendo un rectángulo.
4. Representará el fenómeno de calcular el perímetro como una función lineal.
5. Observará que si cambia la dimensión variable se produce un cambio en él perímetro.
6. Comprobará que se trata de una función lineal. Porque se tienen los puntos alineados, ya que existe una relación entre las coordenadas.
7. Se introduce la noción de función y el límite de esta función en cero. ¿Qué pasa con él perímetro de un rectángulo del que una de sus dimensiones

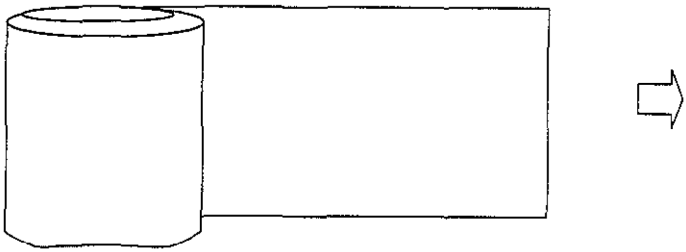
tiende a cero? La dificultad surge con el perímetro, que permite distinguir entre el problema material, que es tan importante y él límite de la función abstracta dado por una fórmula.

Qué se necesita

Materiales:

Objeto: Una tira de papel de 3 pulgadas por 3 pies.

Movimiento: Enrollar y desenrollar la tira de papel como se muestra en la siguiente figura.



Investigación: Definiciones de observación, experimentación, función, función lineal, perímetro y área.

El experimento se sigue observando la parte desenrollada.

Cómo se hace

OBSERVA

Si desenrollas un poco ¿qué obtienes?, desenrollas más ¿qué obtienes?

¿Cuál es la diferencia entre la observación y la experimentación?

> No es suficiente advertir los hechos tal como se presentan sino que es necesario realizar observaciones más cuidadosas y críticas e incluso, cambiar de manera sistemática y controlada las condiciones del sistema. Galileo

¿Qué ocurrió?

EXPERIMENTA

Enrolla y desenrolla el papel, fíjate en las dimensiones, en el perímetro de la figura, en cada momento.

¿Cuántos rectángulos obtienes?

____

¿En todos estos rectángulos qué es lo que tienen fijo y que es lo que varía?

____

Análisis Numérico

Como la cantidad fija son 3 pulgadas, a la otra dimensión le puedes dar un valor cualquiera, anota un valor:______________________________

Anota la fórmula para calcular el perímetro:______________________

Calcula el perímetro del rectángulo con la cantidad fija y con la cantidad que anotaste:____

Enrolla o desenrolla y asígnale otro valor a la cantidad que cambia :

____

____

Calcula nuevamente el perímetro con esta cantidad

____

Asígnale otros tres valores distintos y calcula su perímetro correspondiente, los valores son:______________,__________________y__________________;

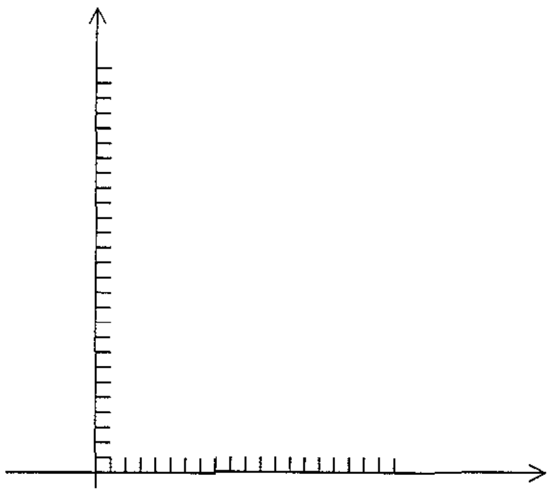
sus perímetros correspondientes son

__________________,__________________y__________________.

Los resultados son varios pares ordenados en la siguiente tabla anótalos:

Cantidad	Perímetro

En la siguiente gráfica señala los puntos:



Describe verbalmente lo que esta ocurriendo:________________________________

____

"La validez de las hipótesis sólo puede confirmarse si se confrontan con los resultados experimentales. Si las hipótesis son válidas pueden utilizarse, si son falsas, se han de modificar a la luz de los experimentos"

Galileo

Como observas los anteriores puntos:______________________________________

¿Cómo le asignaste valores a la dimensión que cambia, los valores son mayores (menores) que tres?________________________________

¿Resultan rectángulos?____________________________________

¿Y si le asignas valores menores (mayores) que tres?
¿Resultan rectángulos?____________________________________

Asígnale tres valores menores (mayores) que tres:____________________

Calcula sus respectivos perímetros______________________________
Señala en la gráfica anterior estos nuevos puntos.
¿Se puede suponer que la longitud de tu material es muy grande?

<u>EXPLICA</u>

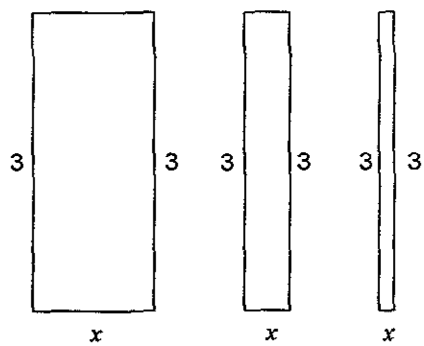
Anota tus observaciones:____________________________________

¿Si aumenta la dimensión, el perímetro aumenta?____________________

¿Y si disminuye?

Análisis Algebraico

Fíjate en la siguiente figura:



A la dimensión que cambia le puedes dar el valor.____________________

¿La fórmula de perímetro como se escribe al sustituir la dimensión variable por x?____

¿Cuáles son los valores más pequeños que le puedes asignar a la variable x?

Anota tres distintos valores pequeños: x = _____ , x =_______ , x =_______
Anota sus perímetros____________________________________

¿Qué valores grandes le puedes dar?
Anota tres valores grandes que le puedes dar a la variable x:____________.

Observa que la dimensión variable denotada por x, y el perímetro denotado $P(x)$; están relacionados por lo que se dice que el perímetro $P(x)$ esta en función de x.

¿Están alineados los puntos en la gráfica?________________________

Cada vez que se aumenta la dimensión x en 1, el perímetro aumenta en:___
____

Es decir, si se incrementa la x en 1 la y se incrementa en 2. Por tanto, denotando al incremento de x por Δx y al incremento de y por Δy. Se puede hacer la razón de los incrementos que resulta: $\frac{\Delta x}{\Delta y}$=_______.

Este cociente, ¿que te recuerda de la unidad anterior?__________________

Observa nuevamente la función del perímetro, es una función de 1° grado. Vuelve a calcular con la función los valores numéricos que calculaste antes. Verifica que resultan los mismos valores y por tanto la función corresponde al experimento. Completa la siguiente tabla:

x	$P(x)$

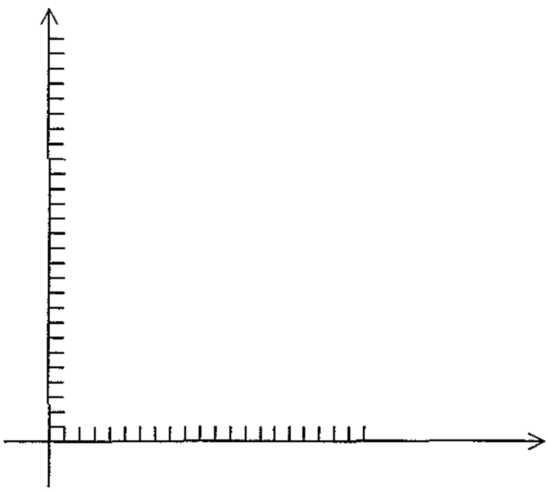
¿Sólo se pueden escoger los valores enteros para la variable x?

Si escogemos para x los valores 4.5, 5.1. ¿Sus perímetros también están alineados?____

Hacer medidas precisas y anotar los datos obtenidos conduce a obtener conclusiones.

Análisis Geométrico.

Con la tabla anterior dibuja la gráfica correspondiente en el siguiente plano:



Describe el experimento verbalmente en base a la gráfica:________________

____

CONCLUSIONES

La fórmula que anotaste del perímetro es:______________________________

Esta fórmula es de una ecuación de primer grado con dos variables y tiene la forma:____

Como ya se afirmó anteriormente si se hacen los cocientes de los incrementos esto resulta:____

Esto nos recuerda la definición de la recta que dice:_____________________

____

¿Se cumplieron los objetivos?_______________________________________

¿Qué se concluye del análisis numérico?_____________________________

Ejercicio: Hacer el mismo experimento del rollo de papel pero calculando su área.

CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN SENO MEDIANTE UN CUADRADO ARTICULADO.

Las experiencias tienen la misión de conducirnos de un modo ameno de lo particular a lo general haciendo mucho más comprensible la geometría y las matemáticas.

"La enseñanza debe ser tal que pueda recibirse como un regalo, no como una amarga obligación"

Einstein

Práctica No 3.

Para desarrollar esta práctica contesta las preguntas que se piden y sigue las indicaciones.

Para qué se hace

Objetivos:

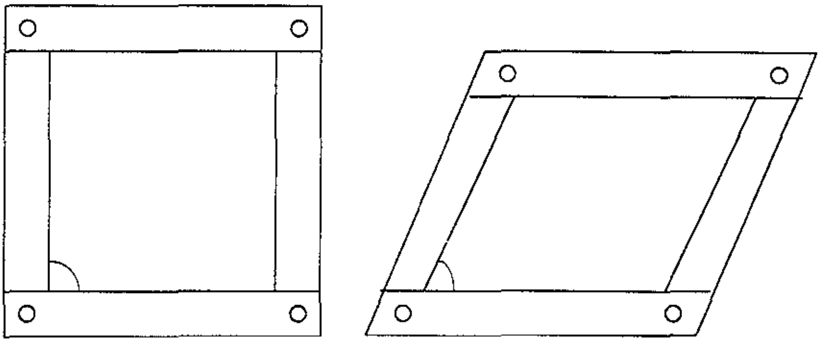
1. El alumno comprobará que manipulando un objeto puede producir una función.
2. El alumno observará que el perímetro es fijo.
3. El alumno comprobará que la variación del área del paralelogramo causa una variación de la altura del paralelogramo.
4. El alumno comprobará que la variación de la área del paralelogramo corresponde a la función seno de 0º a 180º.
5. El alumno señalara las características de la función seno, intersecciones con los ejes, periodicidad, etc.

Qué se necesita

Materiales:

Objeto: Un cuadrado de lados rígidos y articulado en sus cuatro vértices.

Movimiento: Hacer que se cierre y se abra, como se observa en el siguiente dibujo, fijándose en un ángulo como se hace agudo, recto , obtuso.



Investigación: Definición de cuadrado, rombo, paralelogramo, ángulo, ángulo recto, ángulo agudo, ángulo obtuso, teorema de Pitágoras, funciones trigonométricas: seno, coseno.

Cómo se hace

OBSERVA

Fíjate en un ángulo por ejemplo el inferior izquierdo, si abres y cierras este ángulo la figura que se obtiene se llama:______________________________

¿Qué pasa con el perímetro del cuadrado cuando se deforma?_____________

____

Explica verbalmente lo que esta pasando

____

Recuerda que el cuadrado tiene sus cuatro lados iguales. ¿Cuál es la fórmula de su área?______________________________________

¿Cuándo se deforma el cuadrado obtienes un rombo o un paralelogramo?

____

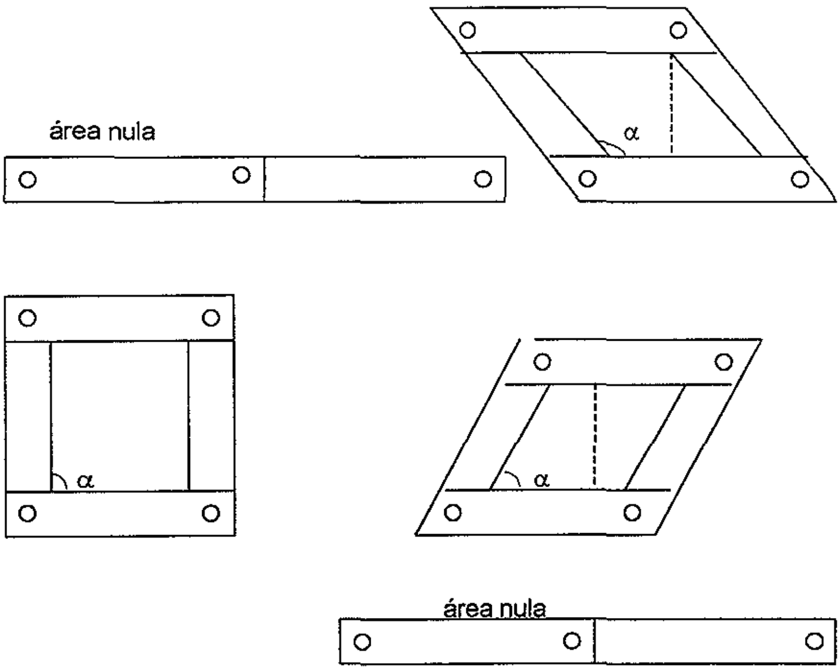
¿Qué piensas del área del cuadrado y del cuadrilátero, será la misma?

____

¿Si continuas el movimiento cerrando el ángulo señalado, qué pasa con el área?______________________________________

Describe verbalmente el fenómeno fíjate en la siguiente figura:______________

____



¿Qué ocurrió?

REFLEXIONA

¿Se podrá hacer una gráfica con la variación del área?

¿El área representará una función?

¿Qué se puede tomar como variable?

¿Cuál dimensión cambia en el área del cuadrilátero, la horizontal o la altura?

El área del cuadrilátero es área = (base) (altura). Para simplificar se puede elegir la unidad como la longitud del lado del cuadrado articulado. Entonces el Área sería:____

¿La medida del área en unidades de área es el mismo número que la medida de la altura en unidades de:_________________________________

Por tanto, la variación del área será la misma que la variación de la medida de la:____

¿Habrá otra dimensión o medida que cambia?

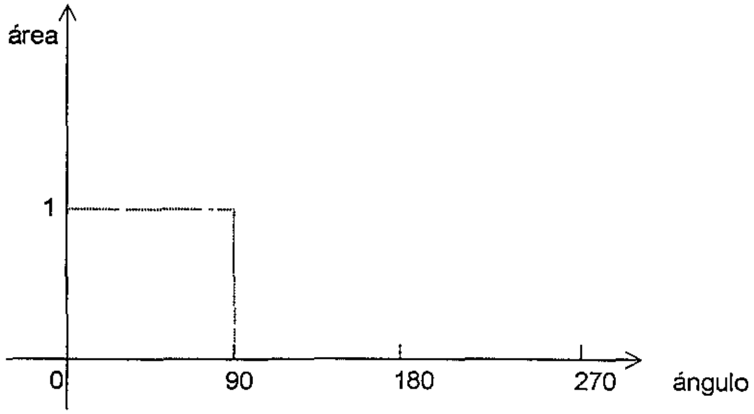
¿Se obtendrá la misma función?

¿Por ejemplo la longitud de la diagonal esta cambiando?

¿La variable podría ser el ángulo que se abre y ser cierra?

¿La variable es el ángulo que hacemos agudo, recto u obtuso?

Escribe de donde a donde varía este ángulo observa la siguiente figura:____

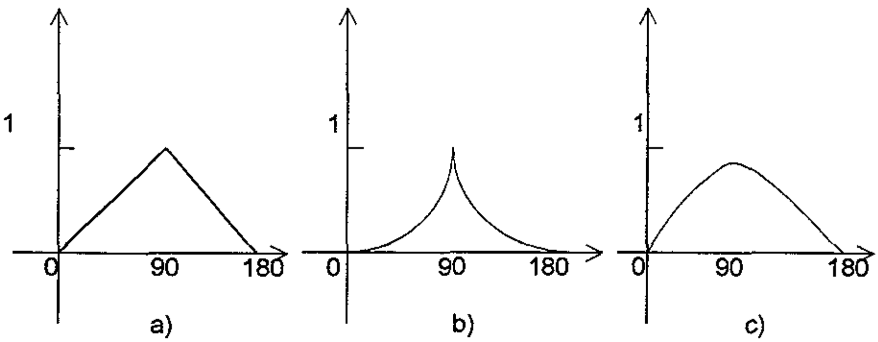


Análisis Numérico

En el cuadrado el ángulo inferior izquierdo sería igual a:____________________

Haciendo una gráfica de la variación de la área en función del ángulo con los valores 0, 90, 180. ¿Qué tipo de gráfica representa a esta función? Completa la tabla y observa la siguiente figura:____________________________________

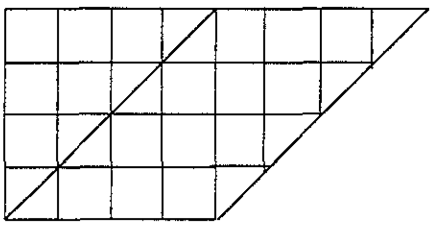
Ángulo	Área
0°	
90°	
180°	



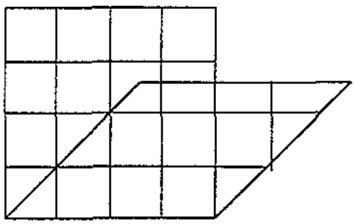
Ahora si se toma por ejemplo el ángulo de 45°. ¿Cuál sería la altura? Observa la figura anterior en a) se obtiene altura $\frac{1}{2}$, en b) se obtiene altura menor de $\frac{1}{2}$ y en c) la altura seria:____

La gráfica correcta sospechamos que es la del inciso:____________________

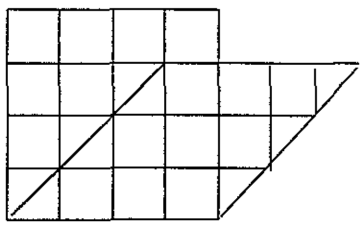
Si se dibuja el cuadrado con una cuadricula y se dibuja un rombo a 45° por ejemplo:



a)



b)



c)

En el inciso a) ¿Cómo son la altura y el área?_____________________________

Entonces la altura es mayor o menor de $\frac{1}{2}$:______________________________

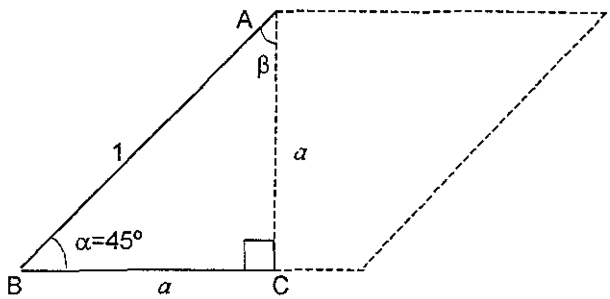
¿Cuándo el ángulo es igual a 90° la altura es 1, cuando el ángulo es 45° la altura es de $\frac{1}{2}$?____

¿La altura es proporcional al ángulo?______________________________

¿Entonces la altura es mayor de $\frac{1}{2}$ como en b) o es de $\frac{3}{4}$, tres cuadros sobre cuatro como en el inciso c)?______________________________

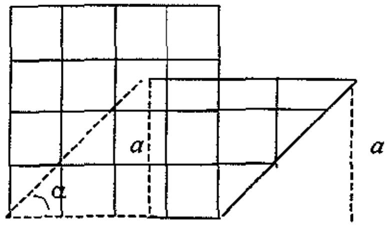
¿Cuál es el valor exacto de esta altura?______________________________

Los dibujos pueden fallar no son exactos. Para encontrar el valor exacto nos fijamos en el triángulo ABC que se forma con el ángulo de 45° y con la altura a. Por tanto se tienen ángulos de 45° y 90°, hipotenusa 1 como sigue:



El otro ángulo β necesariamente debe medir:______________________________

Entonces el triángulo ABC resulta _________ porque tiene dos lados iguales. Obsérvese el movimiento en la figura siguiente:



Por tanto la altura sería el lado a. Calculando el cateto a por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + a^2 = 1^2$$

Completa las siguientes igualdades para despejar a

$$2a^2 = \_\_\_\_\_$$

$$a^2 = \_\_\_\_\_$$

$$\therefore a = \_\_\_\_\_$$

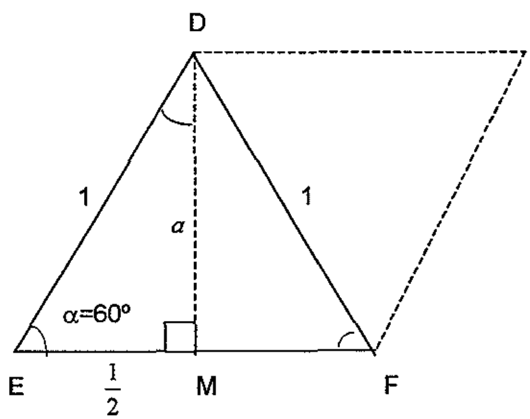
Racionalizando se tiene: $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Haciendo la división se tiene que a mide aproximadamente:______________

Entonces calculando el área del cuadrilátero cuando se tiene un ángulo de 45°.
El área resulta:____

A continuación se mueve el cuadrado articulado de tal manera que se forme un ángulo de 60°. Ahora se tiene un triángulo con α= 60° ambos lados adyacentes a este ángulo deben medir :____

Obsérvese el triángulo DEF con lados 1 y 1, ¿cuánto mide el lado y los ángulos que faltan? ____



Si trazo la altura DM de dicho triángulo esta altura corresponde a la altura del:

____

Al trazar la altura. ¿Cuál es la medida de los ángulos que se forman en el triángulo DEM? ________________________________

¿Cuánto mide esta altura a?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^2 = 1^2$$

Completa los pasos siguientes para encontrar la altura:

$$a^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a^2 = \_\_\_\_\_\_$$

$$a = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

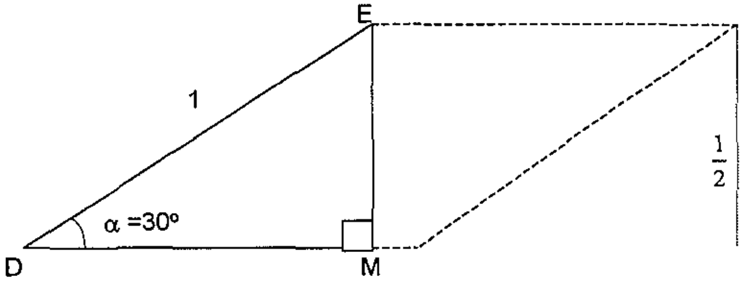
Con $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ el ángulo es 60°, ¿cuál es el área del paralelogramo?

____

Ahora si movemos nuevamente el cuadrado articulado de tal manera que el ángulo α mida 30°. ¿Cómo se calcula la altura? Describe verbalmente:

____

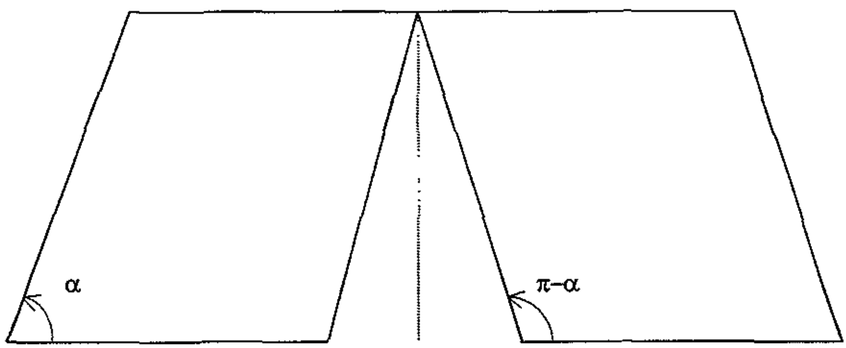
En este caso se vuelve a tomar el triángulo rectángulo DEM de la siguiente manera para observar el paralelogramo:



En este caso la altura ya se conocía, la altura del paralelogramo es EM que se tenía en el caso anterior y es igual a:__________________________________

¿Cuando mide ahora el área del paralelogramo?_________________________

Obsérvese que las alturas calculadas en el paralelogramo para 30°, 45°, 60° son las mismas que para 150°, 135° y 120° respectivamente. Porque el ángulo α sería obtuso pero le correspondería la misma altura que su suplementario.(Observe la siguiente figura)

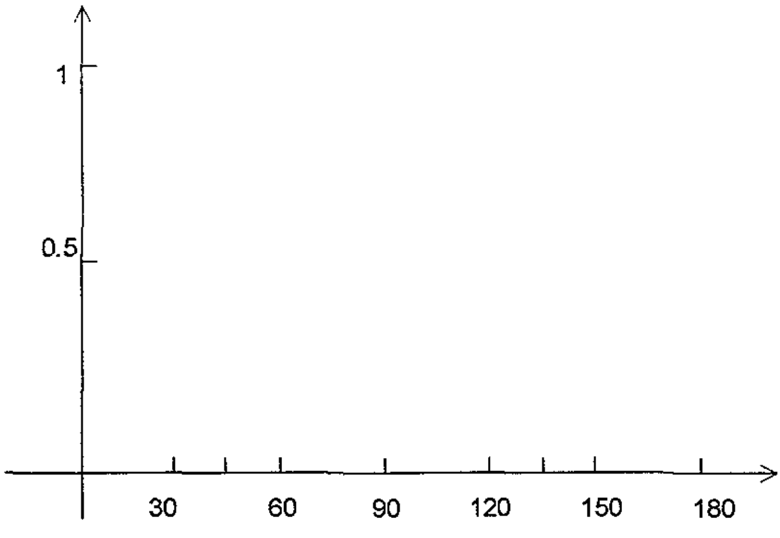


Análisis Geométrico.

Resumiendo los anteriores resultados, completa la siguiente tabla:

α	senoα
30°	
45°	
60°	
120°	
150°	
180°	

Con las dos tablas que se tienen trazar la gráfica de la función seno en el siguiente plano.



Ejercicios:

1. Compruebe que la curva anterior no es una parábola.
2. Complete utilizando el circulo unitario la función seno hasta 360°.

bibliografía

Alanis, Cuevas y Menchaca, Historia del Algebra; Grecia, India, Arabia ... UACPyP, UNAM.

Berté, Annie, Mathématique Dynamique, París. Editorial Nathan, 1993.

Berté, Annie, Mathématique Du Collége au Lycée, París. Editorial Nathan, 1996.

Britton, Jack R., Algebra y trigonometría contemporánea. Harla.

Castelnuovo, Emma, Didáctica de la matemática moderna. Trillas, México.

Oteyza, Hernández, Lam; Algebra. Editorial Prentice Hall.

Oteyza, Lam, Hernández; Temas selectos de matemáticas. Editorial Prentice Hall.

Swokowski, Cole. Algebra y trigonometría. Editorial Iberoamericana

Stewart, James. Calculo Diferencial e Integral. Editorial Thomson.

Valdés, Cervantes, Cataño; Química 1, Universidad Tecnológica de México.

Wilson y Wagner, Research Ideas for the Classroom High School Mathematics. Mc millan Publishing Company, 1993