

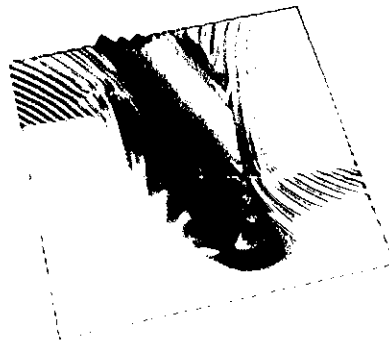
00382



TESIS DOCTORAL

(4)

Dispersión Cuántica Caótica en Herraduras de Smale Incompletas



por

Carlos R. Mejía Monasterio

Centro de Ciencias Físicas
Universidad Nacional Autónoma de México

dirigida por:
Prof. Christof Jung Kohl
Prof. Thomas H. Seligman Schurch

Cuernavaca, México Julio del 2001

pcf

posgrado en ciencias físicas
u n a m



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



posgrado en ciencias físicas
u n a m

OFICIO: PCF/104/2001
ASUNTO: Designación de jurado

ING. LEOPOLDO SILVA GUTIÉRREZ
DIRECTOR GENERAL DE LA ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
P R E S E N T E

At'n: Biol. Francisco Javier Incera Ugalde
Jefe de la Unidad de Administración del Posgrado

El Comité Académico del Posgrado en Ciencias Físicas en su sesión del 23 de marzo del presente ha designado como Jurado del alumno **MEJIA MONASTERIO CARLOS ROBERTO** con número de cuenta **9052333-5** y número de expediente **3951095**, para dictaminar sí el trabajo desarrollado como tesis titulado: "*Dispersión cuántica caótica en herraduras de Smale incompletas*", co-dirigida por el Dr. Christof Jung Kohl. y el Dr. Thomas Seligman Schurch, tiene los méritos para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA) conforme al plan de estudios 582.

PRESIDENTE:	Dr. Pier Achille Mello Picco
SECRETARIO:	Dr. Hernán Larralde Ridaura
VOCAL:	Dr. Christof Jung Kohl
VOCAL:	Dr. Thomas Seligman Schurch
VOCAL:	Dr. Germán Luna Acosta
SUPLENTE:	Dr. Luis Mochán Backal
SUPLENTE:	Dr. Thomas Gorin

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 23 de marzo de 2001.
La Coordinadora del Posgrado en Ciencias Físicas

Dra. Rocío Jáuregui Renaud

RJR/yhq

c. c. p.- Cada miembro del sínodo
c. c. p.- Interesado.
c. c. p.- Expediente.

Resumen

En esta Tesis se exploran algunos aspectos del problema inverso de la dispersión en mecánica clásica y mecánica cuántica, para sistemas Hamiltonianos de dispersión clásicamente descritos por una herradura binaria o ternaria poco desarrolladas. En mecánica clásica el decaimiento de la región de interacción es algebraico mientras que en mecánica cuántica el decaimiento es exponencial debido a la existencia de tunelaje dinámico. En ambos casos, la característica más sobresaliente es la aparición de ecos en el decaimiento cuando la órbita periódica interior es estable. El período de los ecos de dispersión coincide con el período promedio con el cual las trayectorias de dispersión rotan alrededor de la órbita estable. Se muestra que este período de rotación, el cual llamamos período orbital, está directamente relacionado al grado de desarrollo de la herradura subyacente. Como resultado, es posible obtener el grado de desarrollo de la herradura del sistema a partir de la medición asintótica del período de los ecos de dispersión. La herradura a su vez, representa la componente hiperbólica del conjunto invariante acotado del sistema, que caracteriza globalmente la dinámica de dispersión. Los resultados obtenidos son verificados numéricamente para un modelo de dispersión unidimensional con dependencia periódica en el tiempo.

Abstract

In this Thesis, some aspects of the inverse scattering problem are explored in classical and quantum mechanics for scattering Hamiltonian systems classically described by low developed binary and ternary horseshoes. In classical mechanics, the decaying from the interaction region is algebraic while in quantum mechanics the decaying is exponential due to the appearance of dynamical tunneling. In both cases, the most surprising effect is the appearance of echoes in the decaying when the inner periodic orbit is stable. The period of the scattering echoes coincides with the mean period by which the scattering trajectories rotate around the stable orbit. It is shown that the period of rotation, which we call orbital period, is directly related to the development stage of the underlying horseshoe. As a result, it is possible to obtain the stage of development of the horseshoe of the system from the asymptotic observation of the period of the scattering echoes. The horseshoe reproduces the hyperbolic component of the invariant chaotic set of the system which in turn, characterizes the global dynamics of the scattering. The results are numerically verified for a periodically time-dependent one dimensional scattering model.

Agradecimientos

Esta Tesis es la suma del esfuerzo compartido de un gran número de personas e instituciones que directa o indirectamente me han ofrecido su invaluable apoyo y/o entrañable amistad.

Ante todo me siento orgulloso de mencionar a mis papas Norma y Federico a quienes debo todos mis logros. Junto con ellos, mis tres hermanos han sido siempre una fuente inagotable de inspiración. Gracias.

A los miembros del jurado, Thomas Gorin, Christof Jung, Hernán Laralde, Germán Luna, Pier Mello, Luis Mochán y Thomas Seligman, les quiero agradecer todo el tiempo que desinteresadamente dedicaron a la revisión de esta Tesis. Sus comentarios y observaciones enriquecieron sustancialmente el contenido de ésta así como mi habilidad para expresar y entender la Física.

En especial, quiero agradecer a mi asesor Thomas Seligman de quien a lo largo de estos años he recibido su amistad e invaluable apoyo. Gracias Thomas.

A Christof Jung quiero agradecer su apoyo incondicional. De él, he disfrutado de repetidas lecciones, que junto con una gran cantidad de papel me enseñaron finalmente a dibujar correctamente las herraduras.

En especial, quiero agradecer a Hernán por su invaluable amistad y por todas esas tardes frente al pizarrón en las que siempre aprendo algo nuevo. Gracias Hernán.

También, a Francois Leyvraz y Gustavo Matinez-Mekler les quiero agradecer su apoyo y los buenos ratos que he disfrutado con ellos.

A todos mis amigos, en especial los "amigos universitarios del grupo Otomí-Guanajuato", a mis compañeros de grupo y compañeros de carrera, gracias a todos ellos por su gran amistad. En especial, quiero agradecer a Luis Benet con quien comparto más que sólo la Física. Gracias Luis.

Agradezco a mi Universidad todo el apoyo que a través de la Dirección General de Estudios de Posgrado he recibido de ella, pero sobre todo por la invaluable experiencia que implica el estudiar en ella.

También, agradezco todo el apoyo que durante mi carrera recibí de la Facultad de Ciencias, el Instituto de Física y el Posgrado en Ciencias Físicas. Al Centro de Ciencias Físicas, en particular a Jorge Flores por su apoyo e interés en mi trabajo y formación.

Finalmente, quiero expresar mi gratitud y felicidad a quien ha compartido junto conmigo esta etapa de mi vida. Gracias Elo por tu apoyo que me sostiene, tus sonrisas que me alimentan y por tu amor que es mi vida.

Contenido

Introducción	1
I Fundamentos Teóricos	9
1 Definición de la Herradura	11
1.1 El Mapeo de Smale	11
1.1.1 Silla Caótica	13
1.1.2 Mapeo del <i>shift</i> y Dinámica Simbólica	15
1.2 Herraduras en Sistemas Dinámicos	17
1.3 Herraduras Incompletas	22
1.3.1 El Parámetro Formal de Desarrollo	23
1.3.2 Tangencias Homoclínicas	27
2 Definición del Modelo	29
2.1 El Hamiltoniano	29
2.2 El Mapeo de Poincaré	32
2.3 El Mapeo Cuántico	34
3 La Dispersión y el Período Orbital	37
3.1 Período Orbital	37
3.2 Desarrollo de la Herradura	42
3.3 Aspectos Cuánticos de la Dispersión	50
3.4 Teoría de Floquet	52

II	Discusión de los Resultados Numéricos	57
4	Análisis Numérico Preliminar	59
4.1	Dispersión Clásica	59
4.1.1	Retrato Fase	60
4.1.2	Tiempo de Retardo	62
4.1.3	Entropía Topológica	64
4.1.4	Probabilidad de Permanencia	66
4.2	Comportamiento Anómalo	68
4.3	Período Orbital	72
4.4	Dispersión Cuántica	74
4.4.1	Dispersión de Paquetes de Onda	74
4.4.2	Decaimiento Cuántico	77
5	Ecos Clásicos	79
5.1	Distribución de Densidad Clásica	79
5.2	Intensidad Clásica de Dispersión	82
5.3	Período de los Ecos Clásicos	84
5.4	Distribución de Tiempos de Retardo	86
6	Ecos Cuánticos	89
6.1	Pulsos Cortos	89
6.1.1	Distribución de Husimi	90
6.1.2	Período de los Ecos Cuánticos	93
6.2	Pulsos Largos	98
6.2.1	Matriz S	99
6.2.2	Probabilidad en el Pozo	103
6.3	Más allá de la Mecánica Clásica	109
7	Ecos en Otros Potenciales	111
7.1	Pared Exponencial	111
7.2	Pared Cuártica	113
7.3	Dispersión en Dos Canales	114
	Conclusiones	121
	Apéndices	123

CONTENIDO

iii

A Variedades Invariantes

123

B Formalismo Termodinámico

125

C Estabilidad Lineal

129

Referencias

131

Introducción

La Teoría de Dispersión consiste en el estudio de la evolución de sistemas de dispersión. En un experimento de dispersión se estudia la relación que guardan las trayectorias que son dispersadas por un blanco con las trayectorias de incidencia sobre las cuales se tiene control. El blanco consiste típicamente de un conjunto de átomos o moléculas de cuyo potencial de interacción se tiene a lo más un conocimiento parcial.

La teoría de dispersión estudia colisiones, es decir, interacciones que ocurren en una región localizada del espacio. Esto quiere decir que la influencia del potencial de interacción del blanco debe decaer rápidamente, de tal manera que las trayectorias lejanas al blanco correspondan al movimiento libre. En la Fig. 1 se muestra esquemáticamente el proceso de dispersión de una trayectoria típica.

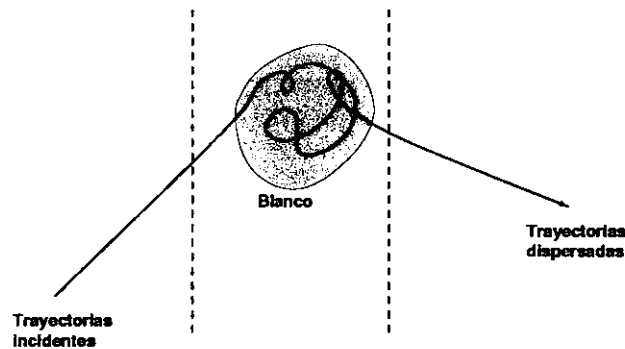


Figura 1: Representación pictórica del proceso de dispersión de una trayectoria típica.

La trayectoria puede ser dividida en tres partes: 1) La trayectoria incidente se aproxima al blanco en un estado de partícula libre. 2) Cuando la

trayectoria siente la interacción del blanco su evolución puede ser extremadamente complicada. La interacción de la trayectoria con el blanco ocurre en un intervalo de tiempo que depende de sus condiciones iniciales. 3) La trayectoria se aleja del blanco en algún estado de partícula libre. El blanco en sí mismo, define lo que llamamos la región de interacción, mientras que las regiones 1) y 3) corresponden a la región asintótica en donde las trayectorias se mueven en línea recta. A estas trayectorias se les llama trayectoria asintótica incidente ϕ_{in} y trayectoria asintótica dispersada ϕ_{dis} . La hipótesis fundamental de la teoría de dispersión establece que el conocimiento de ambas trayectorias asintóticas determina completamente toda la trayectoria de dispersión.

En mecánica cuántica, la función de onda $\psi(t)$ determina el estado del sistema, el cual evoluciona en el tiempo conforme a la ec. de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = H\psi(t) , \quad (1)$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema que se supone conocido.

Dado que los estados asintóticos definidos por

$$\begin{aligned} \psi(t) &\rightarrow \phi_{in}(t) , & t &\rightarrow -\infty \\ \psi(t) &\rightarrow \phi_{dis}(t) , & t &\rightarrow +\infty , \end{aligned} \quad (2)$$

son estados de partícula libre, es decir, ondas planas, el estudio del proceso de dispersión suele concentrarse en obtener las solución estacionaria de la ec. 1. Para ello, la matriz de dispersión o matriz S, que relaciona los estados asintóticos de la dispersión

$$\phi_{out}(t) = S\phi_{in}(t) , \quad (3)$$

juega un papel relevante en la teoría de dispersión [1, 2].

En los casos en los que el Hamiltoniano del sistema es desconocido, el Problema Inverso de la Dispersión (PID) consiste en obtener información de la interacción producida por el blanco en términos de las trayectorias asintóticas. Cuando el potencial de interacción del blanco es suficientemente regular tal que, la dinámica en la región de interacción puede ser considerada como integrable, el PID consiste en obtener una buena representación del potencial de dispersión. Sin embargo, si la dinámica en la región de interacción es extremadamente complicada (caótica), el problema debe ser tratado de manera distinta.

Para sistemas caóticos, el PID consiste en obtener al menos, un entendimiento estructural de la dinámica de dispersión, es decir, obtener la estructura del conjunto invariante acotado del sistema, también llamado silla caótica [3, 4].

La aparición de caos en sistemas de dispersión se debe a la existencia de intersecciones homoclínicas o heteroclínicas entre las variedades invariantes de las órbitas periódicas inestables del sistema [5]. La dispersión caótica es un ejemplo particular de caos topológico derivado de la existencia de una maraña homoclínica, cuya topología jerárquica tiene efectos dramáticos en la dispersión. En el proceso de dispersión, el flujo Hamiltoniano se enreda en la maraña homoclínica, dando lugar al atrapamiento prolongado de trayectorias de dispersión en la región de interacción. Esto a su vez, produce grandes fluctuaciones de las funciones de dispersión a todas las escalas, las cuales forman un conjunto no numerable de singularidades sobre un subconjunto fractal de su dominio [6, 7, 8].

La teoría de dispersión para sistemas caóticos ha sido objeto de un gran interés pues, la presencia de caos ha sido observada aún en los sistemas de dispersión más simples como por ejemplo: en modelos clásicos de reacciones moleculares [9, 10, 11], mecánica celeste [12], dispersión de vórtices en hidrodinámica [13], dispersión de solitones [14] y en varios modelos clásicos de dispersión por un potencial [8, 15, 16, 17]. Estos trabajos dieron un gran impulso al establecimiento de la teoría de dispersión caótica e hicieron evidente el hecho de que en la naturaleza, la dispersión caótica es la regla y no la excepción.

Simultáneo a los avances en mecánica clásica se han estudiado las implicaciones que la existencia de la dispersión caótica tiene en mecánica cuántica [18, 19].

En mecánica cuántica, la teoría de la dispersión caótica consiste en estudiar los atributos cuánticos que surgen cuando un sistema clásico que presenta dispersión caótica es cuantizado.

Quizás la primera insinuación de la relación que guarda la dinámica caótica en la región de interacción con el proceso de dispersión en sistemas complejos sea la que Niels Bohr expuso en su famoso artículo de 1936. En él, Bohr ejemplifica la hipótesis de núcleo compuesto para reacciones nucleares inducidas por interacción nucleón-nucleón, con un modelo "clásico" de billar caótico, Fig. 2.

En [19], se encontró que la existencia de una maraña homoclínica en sistemas hiperbólicos, implica fluctuaciones de Ericson en las secciones transver-

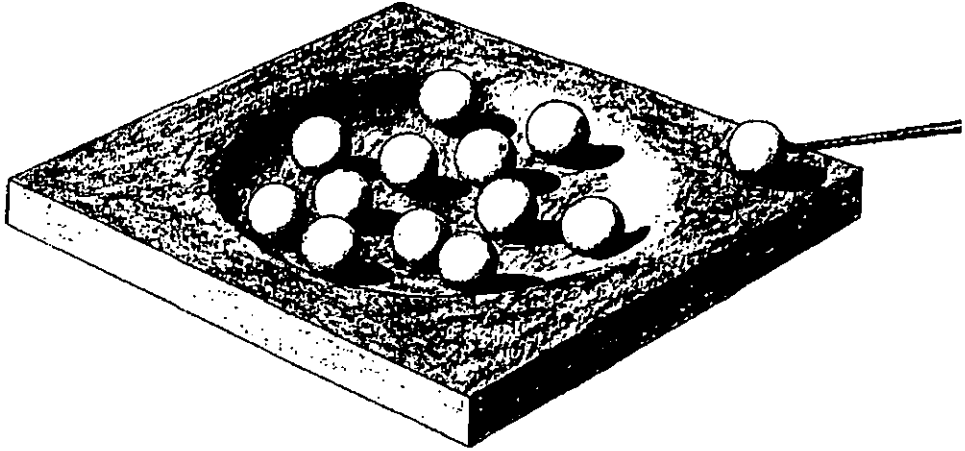


Figura 2: Representación pictórica del modelo de Niels Bohr para dispersión en núcleos compuestos. Tomado de la Ref. [20].

sales de dispersión cuánticas, fenómeno que había sido observado con anterioridad en las secciones eficaces de dispersión de sistemas nucleares. A partir de entonces, las resonancias de Ericson han sido interpretadas como un indicio de caos. En el caso de sistemas no hiperbólicos, en donde la dinámica clásica es dominada por islas de estabilidad, tales fluctuaciones desaparecen en favor de resonancias angostas, producto del tunelaje cuántico entre regiones de estabilidad y regiones caóticas del espacio fase [21, 22].

En mecánica clásica, la construcción de la herradura de Smale [23], ha demostrado ser una herramienta clave para el entendimiento de sistemas de dispersión caótica [3, 24]. La herradura de Smale describe, cualitativamente, la topología de la silla caótica de sistemas hiperbólicos. Para un sistema hiperbólico la silla caótica, corresponde a un conjunto de Cantor que en dos dimensiones tiene la forma de una herradura de Smale. La dinámica restringida al conjunto invariante acotado es caótica; todas las órbitas periódicas son inestables. En este caso, la dinámica simbólica constituye el marco ideal para obtener un entendimiento estructural de la dinámica de los sistemas de dispersión [24].

Sin embargo, los sistemas Hamiltonianos caóticos genéricos no son ni completamente integrables ni hiperbólicos. La mayoría de los sistemas o al menos los más interesantes, son sistemas no hiperbólicos. Un sistema

no hiperbólico se caracteriza por un espacio fase mixto en el cual conviven regiones regulares y caóticas. En este caso, la herradura es incompleta, es decir, la silla caótica no forma un conjunto de Cantor por lo que la obtención de una dinámica simbólica exacta es extremadamente difícil.

Para sistemas no hiperbólicos es posible obtener, bajo ciertas restricciones, una descripción simbólica aproximada que captura el comportamiento dinámico sobre intervalos de tiempo en un rango finito [25]. Sin embargo, este tipo de aproximación no es única y su obtención es generalmente complicada y un tanto arbitraria [26, 27, 28]. La dinámica simbólica aproximada se obtiene a partir de la componente hiperbólica de la silla caótica, pues es la componente hiperbólica la que domina el comportamiento dinámico de las trayectorias de dispersión. Como resultado de esto, la estructura del conjunto de singularidades presentes en las funciones de dispersión es equivalente a la estructura topológica de la herradura del sistema [29].

A pesar de todo esto, el estudio de la importancia de la construcción de la herradura en mecánica cuántica no se ha explorado, con contadas excepciones [30].

En esta Tesis se estudian algunos aspectos del problema inverso de la dispersión en mecánica clásica y mecánica cuántica en términos de la etapa de desarrollo de la herradura para sistemas Hamiltonianos de dispersión de dos grados de libertad. También se estudia la posibilidad de obtener el grado de desarrollo de la herradura a partir de información exclusivamente asintótica.

La Introducción de esta Tesis se extiende al Capítulo 1 en donde se introduce de manera formal, la construcción de la herradura de Smale así como otros conceptos básicos que serán utilizados a lo largo de la Tesis. En la segunda parte de este Capítulo nos concentraremos en el estudio y clasificación de las herraduras incompletas en términos del parámetro formal de desarrollo [29].

Para estudiar el proceso de dispersión en términos de la herradura, se emplea un sistema de dispersión unidimensional con dependencia periódica en el tiempo. La herradura de este sistema es binaria, siendo las características encontradas comparativamente simples. Este modelo se introduce en el Capítulo 2, en donde también se presenta la solución clásica y cuántica de su dinámica.

En el capítulo 3 se propone explorar los sistemas de dispersión, correspondientes a una herradura de orden bajo, con experimentos de dispersión clásicos y cuánticos mediante la observación del decaimiento en pulsos a

los que hemos llamado *ecos*. Para ello, primero se analiza la dispersión en mecánica clásica. En este Capítulo se muestra que el desarrollo de la herradura está directamente relacionado con el periodo de los ecos de dispersión. El modelo clásico sirve de guía para el entendimiento del proceso cuántico de dispersión. El método propuesto funciona para situaciones en las cuales, el grado de desarrollo de la herradura es pequeño, de manera tal que, en el espacio fase exista una isla central de estabilidad.

Para sistemas clásicos de dispersión, existen otros métodos para analizar el problema inverso de la dispersión. En [31] se extrae el orden jerárquico de la silla caótica a partir de la estructura fractal de las funciones de dispersión. En [32], el periodo y estabilidad de las órbitas periódicas más cortas se obtienen a partir de un análisis de la jerarquía de los intervalos de continuidad en las funciones de dispersión. Sin embargo, la extensión de estos resultados al estudio de sistemas cuánticos no es obvia. El método introducido en esta Tesis permite por primera vez, la posibilidad de obtener el grado de desarrollo de la herradura en sistemas de dispersión cuántica. Esto vislumbra la posibilidad de extender a la mecánica cuántica los resultados conocidos para el problema inverso de la dispersión en mecánica clásica en términos de la topología de la herradura.

La principal contribución de esta Tesis consiste en la relación encontrada entre el periodo de los ecos de dispersión y el grado de desarrollo de la herradura. Esta relación permite obtener el grado de desarrollo de la herradura a partir de la observación asintótica de los ecos y con ello, una representación de la topología de la componente hiperbólica de la silla caótica. Esta es una contribución al problema inverso de la dispersión en situaciones en las que el grado de desarrollo de la herradura es pequeño.

El éxito del método planteado depende de la posibilidad de observar el periodo de los ecos de dispersión en la región asintótica, que es la única accesible en experimentos reales. Para mostrar la viabilidad de tales observaciones, en la segunda parte de esta tesis se analiza numéricamente el modelo introducido en el Capítulo 2.

En el Capítulo 4 se presentan algunos resultados generales del proceso de dispersión. y se establece el intervalo de parámetros del sistema en la cual su comportamiento es no hiperbólico. En el Capítulo 5 se presenta la observación numérica de los ecos de dispersión para la solución clásica. Aquí se discute el procedimiento, así como las cantidades físicas adecuadas para su observación. El problema inverso de la dispersión se analiza en términos del periodo de los ecos. En el Capítulo 6 se presenta evidencia numérica

que soporta la posibilidad de la observación de los ecos de dispersión para el sistema cuántico. Finalmente, en el Capítulo 7 se muestra la generalidad de nuestros resultados analizando la aparición de los ecos de dispersión en otros modelos. Un análisis final de nuestros resultados es presentada en las Conclusiones.

Parte I
Fundamentos Teóricos

Capítulo 1

Definición de la Herradura

En este Capítulo se introduce el mapeo de la Herradura de Smale [23]. Este mapeo es de gran importancia en el estudio de sistemas dinámicos pues reproduce la topología de la silla caótica del sistema. En la Sección 1.1 se define el mapeo de Smale así como su conjunto invariante y descripción simbólica. Como se verá en la Sección 1.2 la aparición de herraduras en sistemas dinámicos es típica. En el caso mas general en el que el espacio fase contiene islas de estabilidad, las herraduras son incompletas. La definición y clasificación de una herradura incompleta, así como sus consecuencias en la dinámica forma el contenido de la Sección 1.3.

1.1 El Mapeo de Smale

El mapeo de Smale [23], es un modelo geométrico simple que reproduce la dinámica que resulta de la presencia de una maraña homoclínica. En la Sección 1.2 se define la maraña homoclínica y se discute su aparición en sistemas dinámicos y su relación con las herraduras de Smale. En esta Sección se introduce una versión simplificada del mapeo de Smale, poniendo mayor énfasis en las propiedades y características que se usarán a lo largo de esta tesis. Un estudio amplio y detallado de este mapeo se puede encontrar en [33, 5, 34].

Consideremos un mapeo en el plano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Una representación pictórica de la acción de f sobre el rectángulo unitario $S = [0, 1] \times [0, 1]$

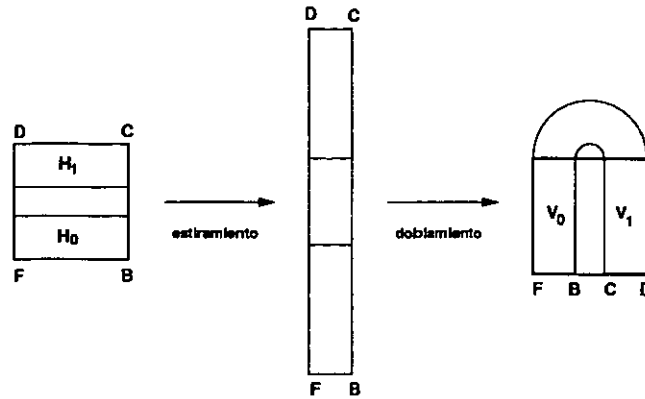


Figura 1.1: Representación pictórica del mapeo de la herradura de Smale f . El rectángulo unitario S , etiquetado por sus vértices $FBCD$ es estirado y doblado sobre el mismo en forma de herradura.

se muestra en la Fig. 1.1. El mapeo consiste en una expansión vertical y una contracción horizontal lineales de S . Si los coeficientes de expansión y contracción son mutuamente recíprocos el área se preserva. El rectángulo obtenido es doblado sobre S de tal manera que la región sobre la cual el rectángulo se dobla termina afuera de S . Así, el mapeo es lineal en el dominio $f^{-1}(S \cap f(S)) = H_0 \cup H_1$. Si se restringe el mapeo a S , el cuadrado unitario es mapeado en dos rectángulos verticales V_0 y V_1 , cuyas preimágenes corresponden a los rectángulos horizontales H_0 y H_1 respectivamente.

Restringido a S , el mapeo de Smale es un difeomorfismo. La acción de f^{-1} sobre S se muestra en la Fig. 1.2. f^{-1} toma los dos rectángulos verticales V_0 y V_1 de vuelta en los rectángulos horizontales H_0 y H_1 .

La acción de f y f^{-1} sobre las esquinas del cuadrado unitario $FBCD$, se indica en la Fig. 1.1 y Fig. 1.2 respectivamente. Podemos observar que el punto F es un punto fijo del mapeo. Mas aún, F es hiperbólico. Su variedad estable está orientada en la dirección de la contracción. Cualquier punto sobre el segmento FB es atraído al punto F bajo la acción del mapeo. En su variedad inestable (en la dirección de expansión FD), los puntos se alejan de F .

Adicionalmente, todo punto en S pero no en $f^{-1}(S \cap f(S))$ es mapeado por f afuera de S . Similarmente, f^{-1} mapea todos los puntos en S no contenidos en $f(S \cap f^{-1}(S))$ afuera de S .

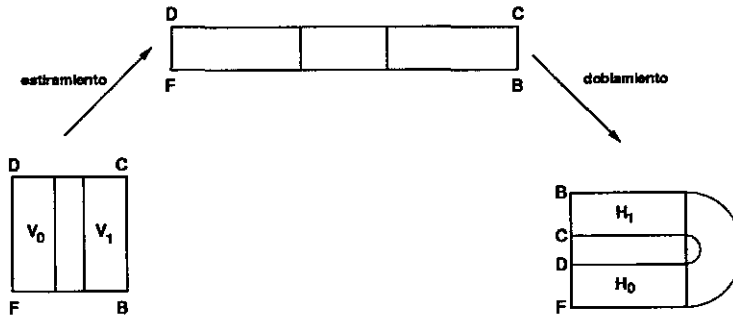


Figura 1.2: Acción de la inversa del mapeo de Smale f^{-1} .

1.1.1 Silla Caótica

En la Fig. 1.3 se representa la segunda iteración de f sobre S . La imagen de $S \cap f(S)$ bajo f que permanece en S consiste ahora en cuatro rectángulos verticales.

Ayudados por la acción recurrente de f sobre S podemos obtener una imagen mental de la topología del conjunto de puntos que permanece en S bajo la aplicación repetida de $f^{\pm 1}$. El conjunto de puntos que permanece en S después de una iteración de f^{-1} es simplemente

$$V^1 = f(f^{-1}(S) \cap S) \equiv S \cap f(S) = V_0 \cup V_1 . \quad (1.1)$$

Una vez que un punto inicialmente contenido en S es mapeado por f^{-1} afuera de S , nunca regresa. En la Sección 1.2 veremos que estas órbitas corresponden a las trayectorias asintóticas del proceso de dispersión. El conjunto de puntos en S que permanece en S después de dos iteraciones de f^{-1} es

$$V^2 = f^2(f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S) \equiv S \cap f(S) \cap f^2(S) = \bigcup_{i,j=0,1} V_{ij} , \quad (1.2)$$

donde V_{ij} son los rectángulos verticales que se muestran en la Fig. 1.3. Sus índices se eligieron de manera tal que $V_{ij} \subset V_j$. Se puede mostrar por inducción que el conjunto de puntos contenidos en S que permanecen en S bajo la acción de f^{-n} es

$$V^n = f^n(f^{-n}(S) \cap \dots \cap S) \equiv S \cap f(S) \cap \dots \cap f^n(S) = \bigcup_{i_1, \dots, i_n=0,1} V_{i_1 \dots i_n} . \quad (1.3)$$

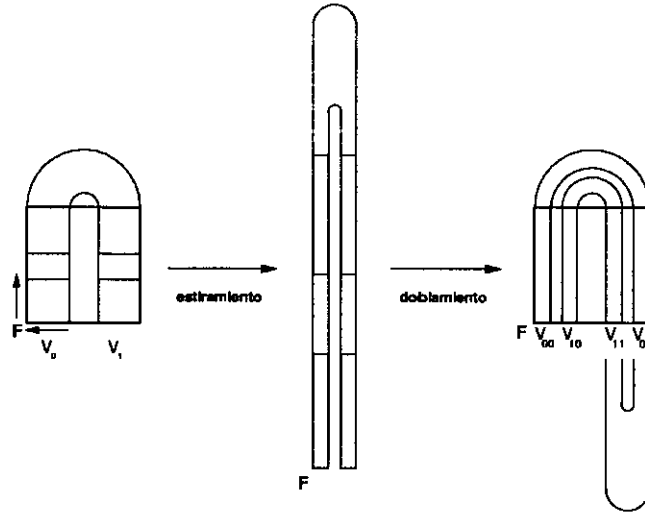


Figura 1.3: Representación pictórica de $f^2(S)$.

De esta manera, estos conjuntos forman una secuencia anidada de conjuntos cerrados no vacíos

$$V^1 \supset V^2 \supset \dots \supset V^n \supset \dots, \quad (1.4)$$

y por lo tanto su intersección, que llamaremos V^∞ , es no vacía [35]. Similarmente, el conjunto H^∞ de puntos en S que permanecen en S bajo la acción de f es un conjunto no vacío.

Llamemos $\Lambda_n \subset S$ el conjunto de puntos en S que permanece en S bajo la acción de f^n o f^{-n} . En términos de lo anterior, Λ_n estará dado por

$$\Lambda_n = V^n \cap H^n. \quad (1.5)$$

Al conjunto de puntos en S

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n, \quad (1.6)$$

que permanecen en S por siempre se le llama conjunto invariante acotado o *silla caótica*, del mapeo. El conjunto invariante acotado Λ , de medida cero en S es, al igual que V^∞ y H^∞ , un conjunto de Cantor¹

¹El conjunto de Cantor es un conjunto compacto perfecto y totalmente desconexo. (Un conjunto es *totalmente desconexo* si la componente conexa de cada punto en el conjunto es el punto mismo. Un conjunto cerrado es *perfecto* si cada punto en el conjunto es un punto límite.)

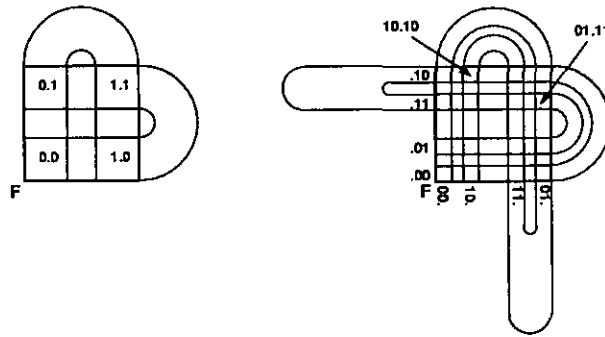


Figura 1.4: Representación de los conjuntos Λ_1 (izquierda) y Λ_2 (derecha). Las distintas regiones de estos conjuntos han sido etiquetadas de acuerdo a las reglas de su dinámica simbólica. El punto decimal en las secuencias separa el pasado del futuro.

En la Fig. 1.4 se muestra el conjunto Λ_n para $n = 1$ y $n = 2$. La estructura de Cantor que se genera es evidente. Después de una iteración, Λ_1 está formado por cuatro rectángulos. Todos los puntos en S , no contenidos en Λ_1 serán mapeados por f ó f^{-1} en puntos afuera de S . De igual manera, cualquier punto en S pero no en Λ_2 será mapeado, por f^2 ó f^{-2} , afuera de S y así sucesivamente. Los conjuntos V^n y H^n consisten en 2^n rectángulos verticales y horizontales respectivamente. Así, Λ_n estará formado por 2^{2n} rectángulos. La estructura de Cantor de la silla caótica del mapeo de Smale es un caso particular de una partición de Markov; su existencia en sistemas continuamente hiperbólicos ha sido rigurosamente demostrada [36].

1.1.2 Mapeo del *shift* y Dinámica Simbólica

En los casos en los que la silla caótica forma una partición de Markov, es posible asignar secuencias simbólicas a cada trayectoria ² y así construir una dinámica simbólica [5, 37].

El objetivo de una dinámica simbólica es establecer una correspondencia uno a uno entre las trayectorias del sistema y secuencias de símbolos tomados de un alfabeto compuesto por un número finito, o al menos numerable, de

²En este contexto, una trayectoria corresponde a la secuencia de puntos en S que se obtiene de la aplicación repetida del mapeo f .

símbolos o entre secuencias simbólicas y los elementos de la partición del espacio fase generada por la dinámica.

En 1967 Smale [23] demostró que, restringido a Λ , el mapeo (de Smale) f conmuta (en el sentido de la ec. 1.10 con el mapeo del *shift* sobre el conjunto de secuencias binarias bi-infinitas de ceros y unos. En consecuencia, la dinámica sobre el conjunto de la silla caótica del mapeo de Smale puede ser descrita por una dinámica simbólica binaria.

Sea x un punto en Λ y sea $D = \{0, 1\}$, un conjunto de símbolos. Denotemos por d_k uno de los dos elementos de D , es decir, $d_k \in D$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Es posible asociar al punto x con una secuencia infinita de símbolos $d^{(+)} = \{d_k\}_{k=0}^{\infty}$, tal que

$$d_k = \begin{cases} 0 & , \quad f^k(x) \in V_0 \\ 1 & , \quad f^k(x) \in V_1 \end{cases} . \quad (1.7)$$

De esta forma, la secuencia $d^{(+)}$ nos dice cual de los dos rectángulos V_0 ó V_1 , visita el punto x bajo cada aplicación del mapeo. Esta secuencia corresponde a la evolución futura de x .

De la misma manera es posible asociar a cada punto $x \in \Lambda$ una secuencia infinita de símbolos $d^{(-)} = \{d_k\}_{k=-\infty}^{-1}$ tal que

$$d_k = \begin{cases} 0 & , \quad f^{-k}(x) \in H_0 \\ 1 & , \quad f^{-k}(x) \in H_1 \end{cases} . \quad (1.8)$$

La secuencia $d^{(-)}$ corresponde a la historia pasada del punto x .

Dado que la herradura es un difeomorfismo, cada punto de la silla caótica estará asociado a una secuencia bi-infinita de símbolos compuesta por $d = d^{(-)}.d^{(+)}$. El punto decimal en la secuencia denota la separación entre el pasado y el futuro del punto x . En la Fig. 1.4 se muestran algunos ejemplos de estas secuencias simbólicas para los elementos de los conjuntos Λ_1 y Λ_2 .

Para obtener una dinámica simbólica es necesario obtener una dinámica sobre el conjunto de todas las secuencias binarias bi-infinitas Δ que esté en correspondencia con la dinámica sobre Λ .

Sea $d \in \Delta$ la secuencia simbólica de un punto $x \in \Lambda$. La secuencia simbólica asociada a $f^k(x)$ es aquella que se obtiene de recorrer el punto decimal en la secuencia d , k lugares a la derecha, o k lugares a la izquierda si k es negativo. Se puede definir un mapeo sobre el conjunto de todas las secuencias binarias bi-infinitas

$$\sigma : \Delta \rightarrow \Delta , \quad (1.9)$$

tal que para $a, b \in \Delta$, $\sigma(a) = b$ con $b_i = a_{i+1}$. El mapeo σ , llamado *shift*, toma una secuencia bi-infinita dada y recorre el punto decimal un lugar hacia la derecha.

El pasado y futuro de todo punto $x \in \Lambda$ está completamente determinado por su secuencia asociada d y su dinámica en Λ está descrita por el *shift* σ . Smale demostró que existe un homeomorfismo $\phi : \Delta \rightarrow \Lambda$ tal que

$$f|_{\Lambda} \circ \phi = \phi \circ \sigma \quad (1.10)$$

La conjugación topológica entre $f|_{\Lambda}$ y σ implica una relación uno a uno entre sus órbitas [23, 33]. En otras palabras, la ec. 1.10 garantiza la posibilidad de estudiar la dinámica de f sobre la silla caótica en términos de la dinámica simbólica de σ . La ventaja de esto radica en el hecho de que la estructura de las órbitas de σ es, si no simple, fácil de clasificar.

Finalmente, todos los resultados aquí expuestos pueden ser extendidos al caso de herraduras de orden mayor. El orden de la herradura para un sistema dado estará determinado por el número n de órbitas periódicas de período uno. Así, la silla caótica estará descrita de manera análoga por una herradura n -aria y la dinámica del mapeo de Smale, restringido al conjunto de la silla caótica será topológicamente conjugado a la dinámica del *shift* sobre secuencias bi-infinitas construidas a partir de n símbolos.

1.2 Herraduras en Sistemas Dinámicos

En la Sección anterior hemos descrito la estructura de la silla caótica Λ del mapeo de Smale. La dinámica en Λ es conjugada a la dinámica generada por un *shift* sobre el conjunto de secuencias binarias bi-infinitas. Un *shift* es un ejemplo de sistema de Bernoulli o sistema B que también es sistema K , *mixing* y ergódico [38]. De aquí que al conjunto Λ se le llame caótico.

Este grado de caoticidad es, a grandes rasgos, una consecuencia del estiramiento y doblamiento del espacio fase creado por el mapeo en todas las escalas, además de que este proceso crea una partición. En el caso de la herradura de Smale, la partición del espacio fase posee una estructura de Cantor. En tal situación, la dinámica en Λ es hiperbólica y la herradura de Smale es *completa* como se muestra en la Fig. 1.5 en el sentido en que los tentáculos de la primera iteración (tentáculos de primer nivel), tanto de la variedad estable t_{1s} , como de la variedad inestable t_{1u} , han atravesado completamente el

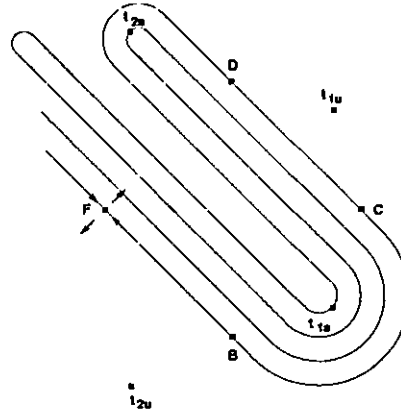


Figura 1.5: Herradura de Smale completa. El rectángulo fundamental formado por los vértices $FBCD$ es atravesado completamente por las variedades estable, (en azul) e inestable, (en rojo).

rectángulo fundamental formado por los vértices $FBCD$ ³. En el Apéndice A se definen las variedades invariantes de un punto fijo hiperbólico y sus intersecciones llamadas *puntos homoclínicos* o *heteroclínicos*. El rectángulo fundamental se define de la siguiente manera:

Si se sigue el flujo sobre las variedades invariantes estable e inestable del punto fijo hiperbólico F hacia atrás y adelante en el tiempo respectivamente (vease la Fig. 1.5), ambas variedades se intersectan por vez primera en el punto homoclínico C . A este punto se le llama *intersección primaria*. Las segundas intersecciones homoclínicas (secundarias), ocurren en los puntos B y D . El rectángulo fundamental se forma con los segmentos de las variedades invariantes que unen al punto fijo con las intersecciones secundarias y a estas con la intersección primaria; por los segmentos BF y DC de la variedad estable y los segmentos FD y BC de la variedad inestable en la Fig. 1.5.

Si continuamos el flujo de las variedades invariantes de F , la estructura de las intersecciones homoclínicas entre ellas se hace cada vez más intrincada; ésta puede ser descrita en términos de los tentáculos de la herradura. Después de la intersección secundaria B las variedades de la herradura entran y salen del rectángulo fundamental indefinidamente. Al segmento de

³A Partir de ahora nos referiremos al rectángulo unitario S de la Sección anterior como rectángulo fundamental.

la variedad inestable que entra al rectángulo fundamental por primera vez después de la intersección B se le llama tentáculo de nivel 1 de la variedad inestable, independientemente de si el tentáculo atraviesa completamente o no al rectángulo fundamental. Denotamos a la punta de este tentáculo como t_{1u} . De igual manera pero con $t \rightarrow -\infty$, t_{1s} corresponde a la punta del tentáculo de nivel 1 de la variedad estable⁴. La imagen del tentáculo de nivel 1 de la variedad inestable bajo el mapeo de Smale constituye el tentáculo de nivel 2 de la variedad inestable. En particular, t_{2u} es la imagen de t_{1u} y así sucesivamente. Siguiendo con esta notación, el tentáculo de nivel $k + 1$ de la variedad inestable es la imagen bajo el mapeo del tentáculo de nivel k de la misma variedad y de manera análoga, el tentáculo $k + 1$ de la variedad estable es la preimagen del tentáculo k de la variedad estable.

Debido a la invariancia de las variedades del punto hiperbólico, la existencia de un punto homoclínico implica la existencia de un infinito de ellos (véase el Apéndice A).

A la estructura de las variedades invariantes de un punto fijo hiperbólico con sus infinitas intersecciones homoclínicas se le llama *maraña homoclínica* (del inglés *homoclinic tangle*). Su nombre sugiere el hecho que en la maraña homoclínica, el flujo Hamiltoniano se enreda. La existencia de una maraña homoclínica es característica del movimiento caótico.

En el siguiente Capítulo veremos que el espacio fase de un sistema hiperbólico se ve completamente caótico. Este está caracterizado por la inestabilidad de todas sus órbitas periódicas. Sin embargo, típicamente, el espacio fase de los sistemas físicos es *mixto* en el sentido en que en él conviven zonas caóticas y zonas dominadas por islas de estabilidad sobre las cuales la dinámica es regular. En este caso, el sistema es no hiperbólico.

En sistemas no hiperbólicos, la herradura de Smale es incompleta, es decir, los tentáculos de primer nivel no alcanzan a cruzar el rectángulo fundamental, dando como resultado que la partición del espacio fase generada por la herradura deja de ser disconexa. Las consecuencias de esto se discuten en la siguiente Sección.

Aún en el caso de herraduras incompletas, la existencia de conexiones homoclínicas y heteroclínicas transversales entre sus variedades estable e inestable, garantiza la existencia de una silla caótica [39, 33, 41]:

⁴Esta notación será usada a lo largo de toda la Tesis. Con t_k nos referiremos a la punta del tentáculo de nivel k o al tentáculo mismo de alguna de las variedades de la herradura indistintamente.

Teorema de Smale-Birkhoff. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo con un punto fijo hiperbólico p y sea $q \neq p$ un punto homoclínico en el que las variedades invariantes de p se intersectan transversalmente. Entonces, f posee una silla caótica Λ sobre la cual f es topológicamente equivalente a un *shift* finito.

En palabras llanas, este teorema dice que f contiene herraduras de Smale en su dinámica, (una demostración de él puede encontrarse en [5]).

La aparición de herraduras en sistemas dinámicos no se limita a las variedades invariantes de puntos fijos hiperbólicos. En el caso de un punto fijo elíptico la existencia de intersecciones homoclínicas y por ende de herraduras, también es típica [40]:

Teorema de Zehnder. Sea ϕ un mapeo real y analítico que preserva área con un punto fijo elíptico \bar{q} . Entonces cualquier vecindad de ϕ contiene un mapeo que preserva área ψ con las siguientes propiedades: i) \bar{q} es un punto fijo elíptico. ii) Toda vecindad de \bar{q} posee un punto homoclínico.

En el Teorema anterior, el mapeo ψ es una perturbación al mapeo ϕ en el espacio de los mapeos que preservan área. Este teorema establece que todo mapeo bajo cualquier perturbación produce marañas homoclínicas que se encuentran tan cerca como uno desee de el o los puntos fijos elípticos.

Entonces, la aparición de una maraña homoclínica es el caso típico en sistemas dinámicos no lineales. Como un ejemplo ilustrativo de la aparición de herraduras en sistemas dinámicos consideremos un sistema Hamiltoniano de un grado de libertad como es el caso del péndulo simple. La estructura del espacio fase del péndulo está soportado sobre sus dos únicos puntos fijos. El punto fijo elíptico genera un movimiento oscilatorio alrededor de la posición de equilibrio estable del péndulo. Este tipo de movimiento existe hasta que la energía del péndulo es suficiente para alcanzar su posición de equilibrio inestable. Las curvas que corresponden a esta energía son llamadas curvas *separatrices* pues separan el movimiento de libración del movimiento de rotación que se obtiene para energías mayores. Las separatrices forman las variedades invariantes, estable e inestable del punto fijo hiperbólico.

Ahora, supongamos que el péndulo es sometido a un forzamiento externo tal, que su dinámica se vuelve caótica. En esta situación, la curva separatriz se deforma como se muestra en la Fig. 1.6. La separatriz deja de unir a los puntos inestables de manera suave y comienza a oscilar violentamente. Estas oscilaciones hacen que las variedades estable e inestable se

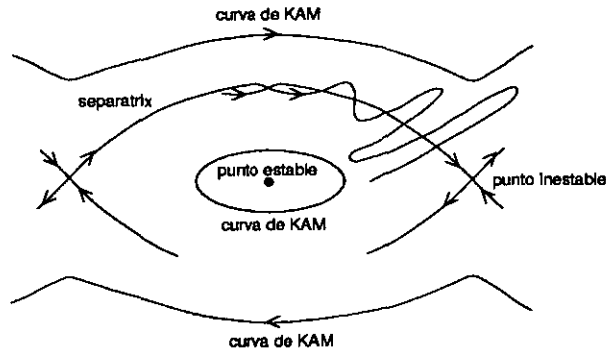


Figura 1.6: Esquema del espacio fase de un péndulo simple unidimensional. Cuando el péndulo es forzado de tal manera que su dinámica se vuelve caótica, la curva separatrix se deforma, oscilando violentamente.

intersecten transversalmente en puntos homoclinicos, los cuales forman un conjunto denso en la vecindad del punto hiperbólico [39]. Así, el caos y la maraña homoclinica aparecen como consecuencia el uno del otro, y esta última es topológicamente equivalente a una herradura de Smale [23, 39].

En sistemas cerrados, como en el ejemplo anterior, la partición generada por la herradura se destruye parcialmente debido a que el espacio fase es compacto [42]. Los elementos de la partición se superponen y la relación entre secuencias simbólicas y trayectorias deja de ser globalmente uno a uno. Una situación similar ocurre en billares hiperbólicos cerrados [43].

En sistemas abiertos, la dinámica de dispersión es dominada por la maraña homoclinica de los puntos hiperbólicos exteriores, es decir, aquellos que están entre la maraña homoclinica y la región abierta. En el proceso de dispersión, trayectorias asintóticas se aproximan a lo largo de la variedad estable de la herradura. Cuando las trayectorias alcanzan el rectángulo fundamental, su dinámica es dominada por la compleja jerarquía de la maraña homoclinica. El tiempo de permanencia en el rectángulo fundamental está relacionado con qué tan profundo penetre la trayectoria en esta jerarquía. Después de un tiempo finito, todas las trayectorias (excepto un conjunto de medida cero), dejan el rectángulo fundamental, alejándose por la variedad inestable de la herradura.

Se dice que el proceso de dispersión es caótico si existe una silla caótica. La dispersión caótica es un caso particular de caos topológico derivado de la

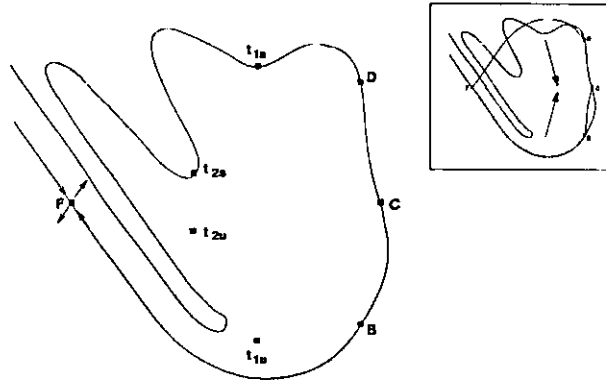


Figura 1.7: Herradura de Smale incompleta en donde los tentáculos de nivel uno de la variedad estable t_{1s} (en azul) y de la variedad inestable t_{1u} (en rojo), no alcanzan a atravesar el rectángulo fundamental (véase Fig. 1.5). También se muestran los tentáculos de nivel dos. Para una herradura incompleta, el rectángulo fundamental es formado por segmentos de las variedades estable e inestable como se muestra en el recuadro (línea verde). Aquí las flechas indican la dirección en que los tentáculos se desarrollan.

existencia de una maraña homoclínica [24]. Como consecuencia, las funciones de dispersión presentan un conjunto no numerable de singularidades que viven sobre un subconjunto fractal del dominio. La estructura topológica del conjunto de singularidades es equivalente a la estructura topológica de la herradura del sistema. Así, el conocimiento de la topología de la herradura es equivalente al conocimiento del proceso de dispersión mismo. En efecto, si la herradura es completa, el conjunto de singularidades en las funciones de dispersión son un conjunto de Cantor. En el caso típico en el que la herradura es incompleta, el estudio de la topología de la herradura en términos de su desarrollo (comparado con el caso completo) es de gran utilidad.

1.3 Herraduras Incompletas

Cuando la herradura de Smale es completa, la silla caótica posee una estructura relativamente simple. En este caso, el espacio fase es completamente hiperbólico; en otras palabras, todas las órbitas periódicas son inestables [5].

Una herradura incompleta es aquella para la cual el conjunto de la silla

caótica no es un conjunto de Cantor. En la Fig. 1.7 se muestra un ejemplo de una herradura incompleta. En ella, los tentáculos de nivel uno no alcanzan a cruzar el rectángulo fundamental. Regiones cercanas del conjunto de Cantor original son ahora mezcladas y algunas otras se pierden. Este constituye el caso más general para sistemas físicos reales en los que se encuentra un espacio fase mixto donde regiones de movimiento regular, dominado por órbitas estables, se mezclan con regiones caóticas en las que la dinámica es complicada. En el caso de herraduras incompletas, el rectángulo fundamental se define en analogía al caso completo. Los vértices de éste son como anteriormente, el punto fijo F y las intersecciones primaria C y secundarias B y D . Así, el rectángulo fundamental se forma con los segmentos de las variedades estable e inestable que unen a estos vértices (compare las Figs. 1.5 y 1.7).

En sistemas abiertos, la maraña homoclínica caracteriza la dinámica sobre la capa de dispersión⁵ que conecta las regiones de interacción y asintótica. Cuando la herradura es incompleta, en la capa de dispersión existen generalmente, islas de estabilidad secundarias cuya influencia produce una dinámica no hiperbólica⁶.

Como consecuencia de una herradura incompleta, la dinámica simbólica no es única y su obtención es generalmente complicada y un tanto arbitraria [26, 27, 28]. Aun así, la dinámica simbólica es una buena aproximación de la dinámica generada por la componente hiperbólica de la variedad invariante. Los efectos no hiperbólicos aparecen generalmente a tiempos muy largos y a escalas muy pequeñas cuya observación requiere de una resolución muy fina [29]. Si éste es el caso, muchas de las propiedades de dispersión del sistema a tiempos cortos son dominadas por la componente hiperbólica del conjunto invariante⁷. En este sentido, una herradura incompleta puede ser descrita por un subconjunto de la dinámica simbólica de la correspondiente herradura completa.

1.3.1 El Parámetro Formal de Desarrollo

En sistemas caóticos de dispersión es usual encontrar que, en función de sus parámetros, el comportamiento dinámico del sistema cambia de no hiperbólico

⁵En el Capítulo 3 estudiaremos la dinámica sobre la capa de dispersión.

⁶En una herradura incompleta suficientemente desarrollada, es posible sin embargo, obtener una dinámica hiperbólica; Sección 1.3.2.

⁷La existencia de puntos parabólicos puede también producir efectos a tiempos cortos en las propiedades de dispersión.

a hiperbólico. En términos de herraduras de Smale esto quiere decir que la herradura asociada se desarrolla desde etapas incompletas hasta formar una herradura completa. El objetivo de esta Sección es clasificar cualitativamente la topología de la herradura incompleta en términos de su desarrollo comparado con el caso completo. Como hemos visto en el ejemplo del péndulo perturbado en la Sección 1.2, cuando la perturbación es cero la variedad invariante es la curva separatriz. Conforme se aumenta la perturbación, la amplitud de las oscilaciones de las variedades invariantes también aumenta; su estructura corresponde a una herradura incompleta. Es de esperarse que para algún valor de la perturbación, la amplitud de las oscilaciones será tal que la herradura será completa.

Así, es posible parametrizar el desarrollo de la herradura incompleta en términos del valor de la perturbación. Claramente, una desventaja de esta parametrización es que depende del sistema mismo. Una parametrización alternativa para el desarrollo de las herraduras incompletas fue introducida por Jung en 1994 [29, 44]. Para esta parametrización se introduce un parámetro formal con valores entre $\alpha \in [0, 1]$. El desarrollo descrito en términos de α describe la parte universal de la herradura, es decir, su componente hiperbólica [29].

En el caso de una herradura completa como la mostrada en la Fig. 1.5, el rectángulo fundamental es seccionado completamente por el tentáculo de nivel 1 de la variedad inestable t_{1u} dividiéndolo en dos partes⁸. En este caso, el parámetro formal es $\alpha = 1$. En el caso de herraduras incompletas como la mostrada en la Fig. 1.7, t_{1u} no alcanza el lado opuesto del rectángulo fundamental. Como función de los parámetros del sistema, la longitud del tentáculo t_{1u} aumenta como se ejemplifica en el recuadro de la Fig. 1.7. En este caso, el valor del parámetro formal se determina a partir de la longitud relativa del tentáculo t_{1u} respecto al caso completo.

A continuación se describe el procedimiento para encontrar el valor del parámetro formal a partir de la estructura de la herradura incompleta.

La idea fundamental en la parametrización de Jung es comparar la estructura de la herradura incompleta con la herradura completa misma. Dado que en el caso completo los tentáculos de cada nivel generan intervalos disconexos (y agujeros), es posible utilizar la posición de éstos como una regla

⁸En herraduras construidas sobre superficies de sección adaptadas a una simetría temporal, la variedad estable se desarrolla igual a la variedad inestable. Una es la reflexión en el tiempo de la otra, por lo que por simplicidad nos referiremos sólo a los tentáculos de la variedad inestable.

para medir la penetración del tentáculo t_{1u} de la herradura incompleta en el rectángulo fundamental. Los agujeros creados por una herradura completa aparecen jerárquicamente. Por ejemplo, en la Fig. 1.3 en el primer nivel de la herradura ($f(S)$), el rectángulo fundamental es dividido en los intervalos V_0 y V_1 ; el intervalo entre ellos es el agujero de nivel 1. En el segundo nivel de la herradura se crean dos agujeros más, entre V_{00} y V_{10} y entre V_{11} y V_{01} . En general, el nivel n de la herradura tendrá $2^n - 1$ agujeros y la medida α debe tomar en cuenta esta jerarquía.

Por razones de simplicidad, estudiaremos el caso de una herradura binaria sin embargo, se pueden usar los mismos razonamientos para herraduras de orden mayor. En el caso de una herradura binaria, el sistema correspondiente posee dos órbitas periódicas fundamentales donde al menos una de las dos órbitas es inestable. En un retrato fase del sistema⁹ la órbita inestable aparece como un punto fijo hiperbólico y sus variedades invariantes forman la herradura.

En la Fig. 1.8 se muestra esquemáticamente el procedimiento para la obtención del parámetro de desarrollo. En esta figura, los agujeros de la variedad estable cortan el rectángulo fundamental horizontalmente. En la columna de la izquierda se indica el nivel de jerarquía de los agujeros, es decir, el nivel en el que cada agujero en particular es creado. En la columna de la derecha se cuentan los agujeros creados hasta el nivel $k = 2$ y hasta el nivel $k = 3$ empezando por el agujero más cercano al punto fijo F .

Consideremos los agujeros de la variedad estable de nivel $l \leq k$. Si el tentáculo de nivel 1 de la variedad inestable t_{1u} termina en el r -ésimo agujero, entonces el parámetro formal está dado por

$$\alpha = r2^{-k} . \quad (1.11)$$

En el ejemplo de la Fig. 1.8 si consideramos los agujeros hasta el nivel $l \leq k = 2$, entonces t_{1u} termina en el tercer agujero, dando el parámetro formal $\alpha = 3/4$. Si consideramos los agujeros hasta el nivel $k = 3$ entonces t_{1u} termina en el sexto agujero y $\alpha = 6/8$. En efecto, la ec. 1.11 contiene implícitamente la construcción jerárquica de la herradura por lo que el valor del parámetro formal no depende del nivel k hasta el cual se consideren los agujeros de la herradura completa, siempre y cuando estos se cuenten correctamente. En general, éste será el mínimo necesario para obtener α .

⁹El mapeo de Poincaré y el retrato fase sobre una sección de Poincaré se definen en el Capítulo 2.

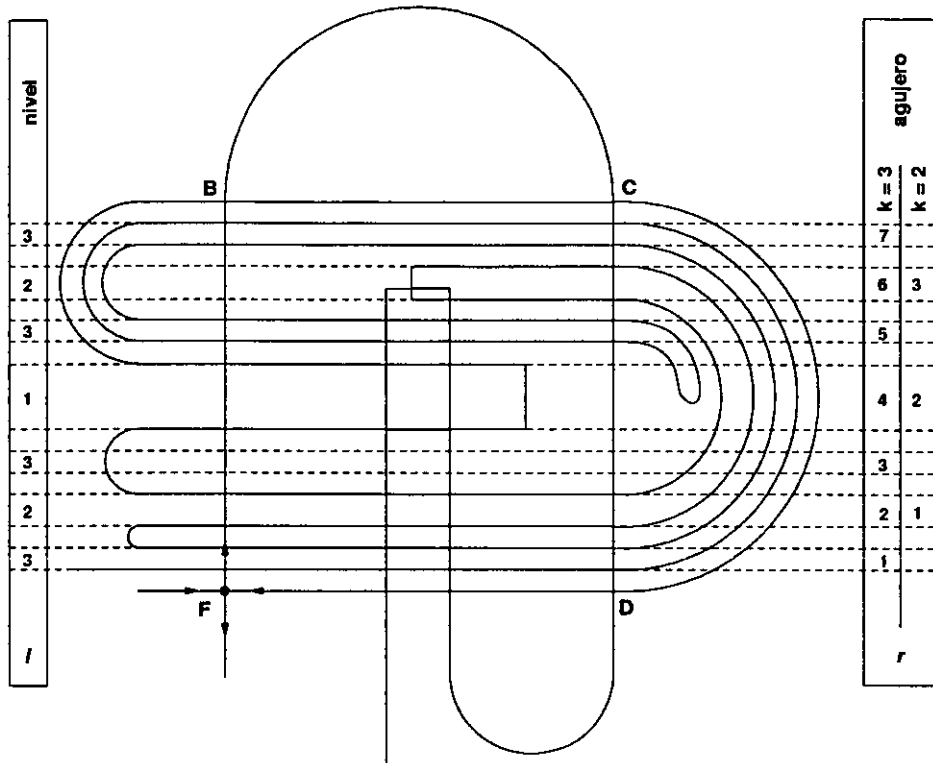


Figura 1.8: Representación esquemática de una herradura binaria incompleta con un parámetro formal $\alpha = 3/4$. El cuadrado fundamental está formado por el punto fijo exterior F y los vértices B , C y D . El nivel de jerarquía de los agujeros formados por la variedad estable se indica en la columna de la izquierda. En la columna de la derecha, los agujeros son numerados a partir del punto fijo para el nivel de desarrollo $k = 2$ y $k = 3$. Los rectángulos en gris corresponden a los agujeros que atraviesa el tentáculo inestable de nivel 1.

En el caso de una herradura ternaria incompleta, el parámetro formal se define análogamente al caso binario por [31]

$$\gamma = r3^{-k}, \quad (1.12)$$

donde r y k tienen el mismo significado que antes. La diferencia esencial entre el caso binario y el ternario es que en el último, el número de agujeros creados hasta el nivel n es ahora $3^n - 1$. Las herraduras ternarias son el caso

típico encontrado en billares bidimensionales con dos canales de salida, donde el decaimiento por los canales se lleva a cabo sobre las variedades invariantes de órbitas inestables.

En términos del parámetro formal, el desarrollo de la herradura es monótono¹⁰ y su descripción es universal. Así, dado un valor del parámetro formal se obtiene el desarrollo de la herradura y con ella la estructura de la silla caótica del sistema. Si además se estudia la estructura jerárquica de alguna función de dispersión del sistema, es posible construir una dinámica simbólica al menos aproximada. Una vez que se tiene una dinámica simbólica, se puede usar el formalismo termodinámico [24] para obtener las propiedades dinámicas del sistema como la velocidad de escape y el exponente de Lyapunov (de la variedad inestable) [42], la entropía topológica y la dimensión de información [45]. En el Apéndice B se describe brevemente este formalismo.

1.3.2 Tangencias Homoclínicas

La construcción de una dinámica simbólica aproximada para un sistema en el cual la herradura de Smale es incompleta, aunque formalmente posible, es un problema extremadamente difícil [46, 47]. En este caso, el espacio fase es generalmente mixto y la presencia de islas de estabilidad complica considerablemente la dinámica en la región de dispersión. La desaparición (aparición) de islas equivale a prohibir (permitir) un infinito de órbitas homoclínicas, complicando con ello una descripción lógica de la topología de la silla caótica [24]. A este fenómeno se le conoce en inglés como *pruning*.

En el contexto de la herradura de Smale, tal complicación se debe a la existencia de intersecciones tangentes entre las variedades estable e inestable de la herradura llamadas *tangencias homoclínicas*. Cuando una tangencia homoclínica ocurre, se crean un infinito de órbitas periódicas. En este sentido, las tangencias homoclínicas son puntos de acumulación para órbitas periódicas [5], un infinito de las cuales son estables y otro tanto inestables.

Cabe señalar que, por construcción, todas las intersecciones entre las variedades invariantes de la herradura ocurren dentro del rectángulo fundamental. Así, en una herradura completa, todas las intersecciones entre las variedades estable e inestable son transversales y por ende todas las órbitas periódicas son inestables. Para una herradura incompleta el espacio fase es

¹⁰Como se verá en la Sección 4.2, la parametrización del desarrollo de la herradura en términos de los parámetros del sistema, no garantiza la monotoneidad del desarrollo.

generalmente mixto, lo cual es consecuencia de la existencia de tangencias homoclínicas entre las variedades de la herradura. Y decimos “generalmente” porque para ciertos valores del desarrollo $\alpha < 1$, pueden existir situaciones en las que todas los puntos homoclínicos son intersecciones transversales y por ende la dinámica es hiperbólica. Por ejemplo, en una herradura con desarrollo $\alpha = 7/8$, el tentáculo de nivel uno de la variedad inestable termina en el último agujero de la variedad estable (séptimo hasta el nivel $k = 3$) y todos los tentáculos de nivel superior caen afuera del rectángulo fundamental. En esta situación, no existen tangencias homoclínicas [29]. En general estos desarrollos ocurren en herraduras bien desarrolladas.

Para herraduras poco desarrolladas, es decir, $\alpha < 1/2$, la dinámica es no hiperbólica. Los efectos no hiperbólicos en la dispersión aparecen tarde o temprano dependiendo de el nivel de jerarquía en el que ocurren tangencias homoclínicas. En este caso, la dinámica a tiempos cortos puede ser aproximada por la componente hiperbólica de la herradura [29], lo cual es aún, extremadamente útil para la descripción de las propiedades genéricas de la dinámica del sistema. Para esto, la obtención del desarrollo de la herradura constituye el primer paso.

Capítulo 2

Definición del Modelo

La pared no se mueve!

Thomas Seligman.

En este Capítulo se define el potencial modelo utilizado en esta Tesis para estudiar el problema inverso de la dispersión. La solución numérica de la dinámica clásica y cuántica de este modelo se discute en las Secciones 2.2 y 2.3 respectivamente.

2.1 El Hamiltoniano

El objetivo de esta Tesis es explorar la dispersión clásica y cuántica en términos de la topología y desarrollo de la herradura de Smale. Todo sistema de dispersión caótica de dos grados de libertad o de un grado de libertad dependiente del tiempo, se puede estudiar en términos de la herradura de Smale. Para este tipo de sistemas, el interés principal es obtener un entendimiento global de su dinámica. Para ello, las características particulares de cada sistema, las cuales sólo se ven reflejadas en su dinámica local, no son relevantes. Un interés adicional es explorar, en términos de los resultados en la mecánica clásica, la dinámica del sistema análogo cuántico.

Para el análisis del proceso de dispersión, se eligió un modelo Hamiltoniano con una herradura binaria, para el cual, las características encontradas son comparativamente simples. El modelo está dado por el Hamiltoniano

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} + A V(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n), \quad (2.1)$$

donde q es la coordenada de posición, p es la coordenada de momento, A es un parámetro libre, t es el tiempo y n un índice entero. La dependencia en el tiempo consiste en un tren infinito y periódico de pulsos delta que golpean al potencial con período 1. El parámetro A determina la fuerza del potencial dado por

$$V(q) = \begin{cases} \frac{q^2}{2} + 1 & , \quad q < 0 \\ e^{-q}(q^2 + q + 1) & , \quad q \geq 0 \end{cases}. \quad (2.2)$$

En este potencial, una partícula de masa uno se mueve libremente excepto cada período 1 de tiempo en el que siente la presencia del potencial. Diremos metafóricamente, que a estos tiempos el potencial "patea" a la partícula. La amplitud de las patada depende de su posición de acuerdo con el potencial, eq. 2.2. En la región asintótica $q \rightarrow \infty$, el potencial decae exponencialmente y la partícula se mueve libremente. Este Hamiltoniano es por lo tanto un modelo de dispersión.

Formalmente, este modelo unidimensional dependiente del tiempo es equivalente a un sistema Hamiltoniano autónomo de dos grados de libertad. Esto se puede mostrar extendiendo el espacio fase en un grado de libertad, que considera al tiempo como una nueva coordenada canónica, conjugada a la energía [48].

El potencial tiene un mínimo en $q = 0$ y un máximo local en $q = 1$, que definen los dos puntos fijos del modelo

$$\begin{aligned} x_0 = (q_0, p_0) &= (1, 0) \\ x_1 = (q_1, p_1) &= (0, 0) \end{aligned}. \quad (2.3)$$

Ellos representan las órbitas periódicas fundamentales que determinan el orden binario de la herradura y describen la topología del flujo Hamiltoniano del sistema. Variando el parámetro A , se obtiene un desarrollo suave de la herradura y una transformación del espacio fase, de regular a hiperbólico.

En la Fig. 2.1 se muestra la forma del potencial junto con la posición de sus dos puntos fijos.

En la literatura se han empleado formas similares a la del potencial 2.2. En [29] Ruckerl *et al*, emplearon el potencial

$$V(q) = e^{-q}(q^2 + q + 1) \quad (2.4)$$

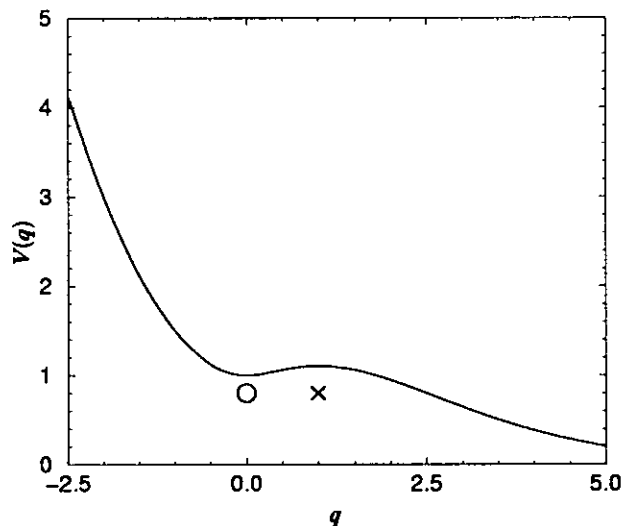


Figura 2.1: Perfil de la forma del potencial eq. 2.2. Los símbolos indican la posición de las órbitas estable (O) e inestable (x).

para estudiar el problema inverso de la dispersión en mecánica clásica en situaciones en las que la herradura es incompleta. Comparando la topología de la herradura y la estructura de las singularidades en las funciones de dispersión, se obtuvo una dinámica simbólica aproximada para el intervalo de desarrollo $\alpha = 1/2$. En [54], Rice estudió las resonancias clásicas del potencial 2.4 asociadas a los números de rotación $1/4, 1/3, 1/2$ para los cuales, el área de la parte regular del espacio fase tiende abruptamente a cero [49]. [11, 50, 51] se estudiaron reacciones unimoleculares en las que se usó este potencial como modelo para el efecto dinámico de un potencial de Van der Waals. También, en [52], el potencial

$$V(q) = e^{-q}(cq^2 + bq + a) \quad (2.5)$$

con $a, c > 0$, se usó como modelo para la foto disociación de HgI_2 observada en experimentos con láseres de femto segundos[53].

2.2 El Mapeo de Poincaré

El estudio del flujo Hamiltoniano en el espacio fase se reduce frecuentemente al estudio de un mapeo discreto. Este procedimiento proviene de los estudios pioneros de H. Poincaré [55] quién, estudiando el problema de los tres cuerpos en mecánica celeste, creó toda la base formal para la teoría de sistemas dinámicos. La idea consiste en definir una superficie $\mathcal{P}(x) = 0$ en el espacio fase de manera tal que todas las trayectorias intersectan \mathcal{P} transversalmente. Dado que el flujo es determinista, cada punto de intersección de una trayectoria está unívocamente determinado por su intersección previa, definiendo así el mapeo de Poincaré. La estructura de las intersecciones con la superficie de sección \mathcal{P} constituye el espacio fase reducido del sistema Hamiltoniano original, llamado *retrato fase*. Todas las propiedades dinámicas observadas en el espacio fase son heredadas por el retrato fase, con la ventaja obvia de la reducción de la dimensionalidad [42, 48].

Dada la periodicidad en el tiempo del modelo Hamiltoniano eq. 2.1, el mapeo estroboscópico es un mapeo de Poincaré adecuado [33]. De esta forma, representaremos la solución clásica de la dinámica del modelo con un mapeo estroboscópico tomado a tiempos $t = n + 1/2$ de la forma

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - AV'(q_n + p_n/2) \\ q_{n+1} &= q_n + p_n - AV'(q_n + p_n/2)/2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Este mapeo da como resultado la evolución de una trayectoria clásica del tiempo $n - 1/2$ al tiempo $n + 1/2$. La fase elegida, es decir, la observación a precisamente estos tiempos, garantiza que la dinámica obtenida sea simétrica ante inversión temporal. En esta situación, la variedad estable de la herradura coincide con la variedad inestable, tomando $p \rightarrow -p$. En la Fig. 2.2 se muestra el retrato fase del sistema calculado únicamente para aquellas trayectorias que permanecen un tiempo largo en la región del pozo del potencial¹, para distintos valores del parámetro A . También, en cada gráfica se muestran las variedades estable e inestable de la herradura correspondiente.

La herradura está soportada por el punto fijo exterior x_0 , el cual es hiperbólico² para todo $A > 0$. La estabilidad del punto fijo interior x_1 ,

¹El retrato fase que se muestra en la Fig. 2.2 corresponde aproximadamente a los puntos del conjunto Λ_n de la ec. 1.5 para algún n grande.

²Cabe señalar que, como la existencia de caos requiere de la existencia de una maraña homoclínica, un potencial caótico necesariamente tendrá un punto fijo hiperbólico cuyas variedades forman la herradura.

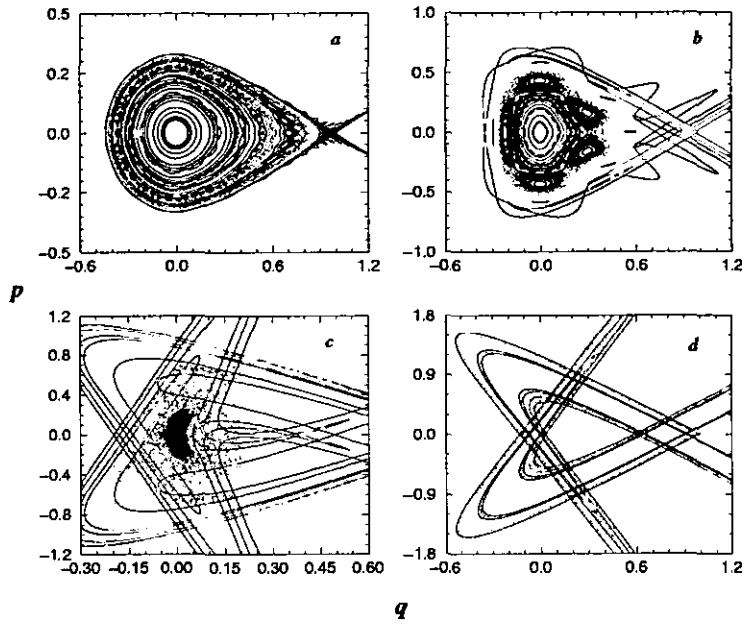


Figura 2.2: Retrato fase del mapeo estroboscópico, eq. 2.6, para distintos valores del parámetro de fuerza A : a) $A = 0.5$, b) $A = 2.0$, c) $A = 1.0$ y d) $A = 6.5$. La herradura correspondiente también se dibuja. Note las distintas escalas en las figuras.

cambia de acuerdo al parámetro de fuerza A de la siguiente manera: para $A < 4$, x_1 es elíptico. En este caso, el retrato fase presenta una isla estable, rodeada por un número no numerable de KAM-toros³, mismos que garantizan su estabilidad, Fig. 2.2-a,b. En $A = 4$, el punto fijo interior sufre una bifurcación de doblamiento de período. Así, para $A > 4$, x_1 cambia su estabilidad a inverso-hiperbólico, Fig. 2.2-c. Sucesivos doblamientos de período terminan por destruir la isla central, pero muchas islas secundarias aún existen. En la Fig. 2.2, excepto en el caso d donde todas las islas de estabilidad se han desintegrado, existen un número infinito de islas secundarias. Algunas de ellas se encuentran afuera de la superficie de KAM más externa, cerca de la maraña homoclínica, rodeadas por las órbitas de las trayectorias asintóticas. En este “mar caótico”, órbitas estables e inestables se mezclan.

³Un KAM-toro es una superficie invariante en el espacio fase. Este recibe su nombre de su topología toroidal [48].

En el caso clásico, el proceso de dispersión se lleva acabo aquí, mientras que para el caso cuántico, paquetes de onda pueden, en principio, atravesar las superficies de KAM hacia las regiones internas clásicamente prohibidas.

La presencia de islas de estabilidad embebidas en el mar caótico son una muestra de la no hiperbolicidad del sistema. Su presencia se debe a la existencia de tangencias homoclínicas entre las variedades estables e inestables de la herradura [5]. Para este modelo⁴, la última tangencia homoclínica ocurre para $A \sim 6.25$. Después de esto, la herradura es completa, Fig. 2.2-d, y el sistema se vuelve hiperbólico.

De esta manera, el retrato fase de nuestro modelo muestra un escenario genérico en el cual, el sistema se transforma de no hiperbólico en hiperbólico, en función del parámetro A . De igual forma, la herradura se desarrolla de incompleta a completa. Como se discutió en el Capítulo anterior, este desarrollo puede ser descrito en términos del parámetro formal α . En la Sección 4.2 veremos que el desarrollo monótono de la herradura, es decir, que para valores mayores del parámetro la herradura esté más desarrollada, no está garantizado si en lugar del parámetro formal se usa el parámetro físico, A .

2.3 El Mapeo Cuántico

En mecánica cuántica nuestro objetivo es explorar la dispersión de paquetes de onda en términos del desarrollo y estructura de la herradura clásica. La evolución de estos paquetes de onda se obtiene a partir del operador de evolución U que para modelos pateados, como el del Hamiltoniano 2.1, es relativamente sencillo.

El mapeo estroboscópico, eq. 2.6, se puede descomponer en tres transformaciones independientes

$$L_1 : \begin{cases} p_{n'} = p_n \\ q_{n'} = q_n + p_n/2 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$P_2 : \begin{cases} p_{n''} = p_{n'} - AV'(q_{n'}) \\ q_{n''} = q_{n'} \end{cases} \quad (2.8)$$

⁴Este valor se obtiene numéricamente cuando el tentáculo de nivel 1 de la variedad inestable (estable) de la herradura intersecta tangencialmente a la variedad estable (inestable).

$$L_3 : \begin{cases} p_{n+1} = p_{n''} \\ q_{n+1} = q_{n''} + p_{n''}/2, \end{cases} \quad (2.9)$$

en términos de las cuales, la evolución del tiempo $t = n - 1/2$ al tiempo $t = n + 1/2$ se obtiene de la transformación

$$L_3 \circ P_2 \circ L_1. \quad (2.10)$$

La segunda transformación P_2 es una transformación puntual que corresponde al cambio en el momento debido a la patada al tiempo $t = n$, mientras que L_1 y L_3 son transformaciones lineales correspondientes a la evolución libre durante un tiempo $t = 1/2$, antes y después de la patada respectivamente. La ec. 2.10 se puede cuantizar directamente [56], dando como resultado el operador cuántico de evolución⁵

$$U = \exp \left[-\frac{i}{4\hbar} p^2 \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} AV(q) \right] \exp \left[-\frac{i}{4\hbar} p^2 \right]. \quad (2.11)$$

De esta manera, el estado del sistema al tiempo $t = n + 1/2$ se obtiene de su estado al tiempo $t = n - 1/2$ como

$$|\Psi_{n+1/2}\rangle = U |\Psi_{n-1/2}\rangle. \quad (2.12)$$

La solución a esta ecuación es trivial. Los operadores que aparecen como primer y tercer factor a la derecha de la ec. 2.11 son diagonales en la base del momento mientras que el segundo factor es diagonal en la base de la posición. La aplicación de U consiste entonces en la multiplicación por tres fases intercaladas por transformaciones de Fourier \mathcal{F} que nos llevan del espacio de posición al espacio de momento. En la base del momento

$$U(p', p) = e^{-\frac{i}{4\hbar} p'^2} \mathcal{F} e^{-\frac{i}{\hbar} AV(q)} \mathcal{F}^{-1} e^{-\frac{i}{4\hbar} p^2}. \quad (2.13)$$

Con la aplicación repetida de U se obtiene el estado del sistema a cualquier tiempo discreto como

$$|\Psi_{n+1/2}\rangle = U^n |\Psi_{1/2}\rangle. \quad (2.14)$$

Así, la evaluación numérica de la evolución cuántica es muy simple pues involucra solamente transformadas de Fourier y multiplicación por fases.

⁵En el contexto de sistemas perturbados periódicamente en el tiempo, como es el caso del modelo ec. 2.1, al operador de evolución también se le llama *operador de Floquet*.

También es muy eficiente si en la evaluación se usan buenos códigos de transformadas rápidas de Fourier (FFT) [57]. Por otra lado, dada la forma del potencial ec. 2.2, la solución analítica a la ec. 2.14 es extremadamente complicada por lo que restringimos nuestro estudio a su análisis numérico.

Para analizar el proceso de dispersión, los estados cuánticos iniciales se preparan como paquetes de onda Gaussianos de mínima incertidumbre dados por

$$\Psi(q, 0) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sigma^{1/2}} \exp \left[-\frac{(q - q_{in})^2}{2\sigma^2} + \frac{i}{\hbar} p_{in} q \right]. \quad (2.15)$$

A diferencia del problema clásico que depende de un solo parámetro, A , la mecánica cuántica introduce a la constante de Planck \hbar como parámetro adicional cuyo valor determina la distancia del límite clásico $\hbar \rightarrow 0$.

Para un momento inicial dado, p_{in} , σ determina la duración del pulso. Como se discute en la Sección 3.3, un pulso corto implica una resolución pobre en la energía, mientras que un pulso largo puede tener una energía bien definida. Así, el proceso de dispersión se puede estudiar de dos maneras distintas: usando pulsos cortos se puede estudiar la evolución en el tiempo de los paquetes de onda en el espacio de configuración o en el espacio fase. Si se usan pulsos largos se puede estudiar alguna observable conveniente como función de la energía.

Capítulo 3

La Dispersión y el Período Orbital

En este Capítulo se estudia el proceso de dispersión caótica para sistemas abiertos en situaciones en las que la herradura es poco desarrollada. El sistema debe poseer, a lo mas, tres órbitas periódicas fundamentales, siendo estable la órbita interior. Adicionalmente se requiere que la isla de estabilidad central (asociada a la órbita interior) y la capa de dispersión estén bien desarrolladas. Primero se discute el proceso de dispersión en mecánica clásica en términos del desarrollo de la herradura para después explorar, en base a esto, la dispersión en mecánica cuántica. En la Sección 3.1 se describe el procedimiento para extraer de mediciones asintóticas, el valor del número de rotación de la isla central. En la Sección 3.2 se explica cómo obtener el desarrollo de la herradura de Smale a partir del número de rotación. El problema inverso en el problema cuántico se discute en la Sección 3.3. Para el caso de sistemas periódicos en el tiempo, en la Sección 3.4 se introduce el formalismo de Floquet.

3.1 Período Orbital

En esta Sección se estudia el proceso de dispersión en sistemas Hamiltonianos de dos grados de libertad o de un grado de libertad dependiente del tiempo, como por ejemplo, en la dispersión de ondas en cavidades electromagnéticas planas o en potenciales unidimensionales perturbados externamente por campos dependientes del tiempo. Para situar la discusión supondremos que existe

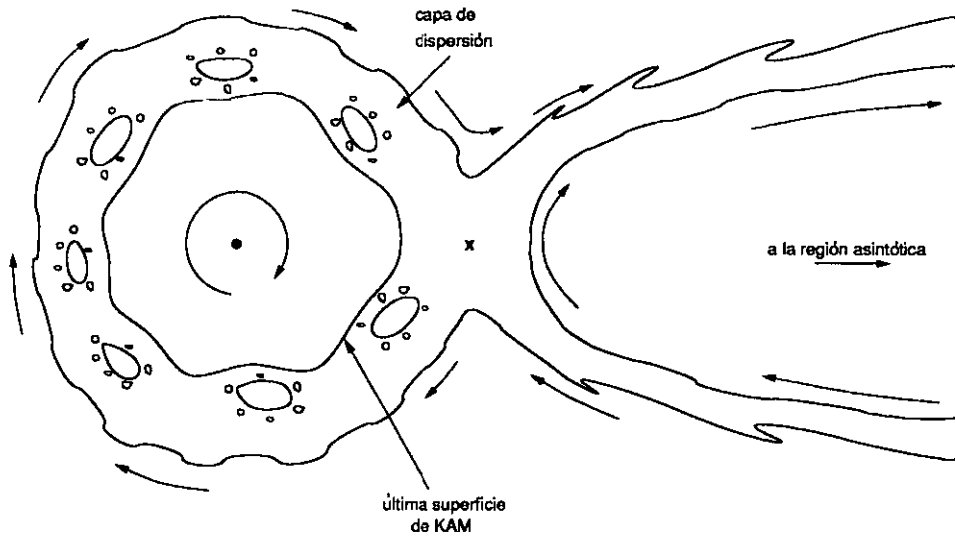


Figura 3.1: Esquema del retrato fase de un sistema con una herradura binaria. El proceso de dispersión se lleva a cabo sobre la capa de dispersión. El conjunto de flechas rojas indican la dirección de la evolución, sobre la superficie de sección en la vecindad del punto hiperbólico.

una constante de movimiento. En esta situación el espacio fase de un sistema tal es tridimensional. Entonces es posible estudiar el flujo Hamiltoniano con el mapeo de Poincaré sobre una superficie de sección como se describió en la Sección 2.2.

En el retrato fase del sistema, las órbitas periódicas fundamentales aparecen como puntos fijos del mapeo de Poincaré. El flujo en la vecindad del punto fijo está determinado por su estabilidad lineal, como se discute en el Apéndice C. Una órbita estable corresponde a un punto fijo elíptico¹. La dinámica local alrededor de un punto elíptico es una rotación. Si la órbita es inestable el punto fijo es hiperbólico, en cuyo caso, puntos cercanos se aproximan a él en una dirección y se alejan en otra dirección, determinadas por las variedades invariantes del punto fijo que forman la herradura (véase el Apéndice A).

La rotación alrededor de un punto elíptico puede ser caracterizada por

¹De aquí en adelante nos referiremos al punto fijo elíptico indistintamente como punto fijo interior, centro o isla.

el *número de rotación* del centro de la isla ω , ec. C.7. Éste se define como el ángulo que en promedio recorre un punto en su rotación después de una iteración del mapeo de Poincaré, en unidades de 2π , (véase la ec. C.5). Su inverso, $\tau = 1/\omega$, es entonces el número promedio de iteraciones que son necesarias para que un punto alrededor de la isla complete una rotación. Llamaremos a τ *período orbital*.

En general, el período orbital de un punto en la superficie de sección es función de su distancia al centro de la isla. La forma en la que τ depende de esta distancia es particular a cada sistema. Sin embargo, para sistemas Hamiltonianos el período orbital típicamente aumenta con la distancia. Una manera de entender ésto es la siguiente: cuando el sistema es regular, (las variedades invariantes del punto hiperbólico forman una separatriz), cada una de las superficies de KAM que rodean al punto elíptico están caracterizadas por un número de rotación finito [48]. Dado que el número de rotación de la separatriz es cero es de esperarse que el número de rotación de las superficies de KAM disminuya conforme éstas se encuentren más cercanas a la separatriz. En un escenario de KAM, cuando el sistema es perturbado, la separatriz se deforma en una herradura y los KAM-toros comienzan a desintegrarse conforme la amplitud de la perturbación aumenta. Sin embargo, el número de rotación de cada toro se mantiene constante [48], por lo que aún en presencia de caos la situación típica corresponde a aquella en la que el período orbital aumenta con la distancia al centro de la isla.

Sin perder generalidad analizaremos el proceso de dispersión en un sistema Hamiltoniano con una herradura binaria. En la Fig. 3.1 se muestra esquemáticamente el retrato fase típico de estos sistemas, como por ejemplo el de la eq. 2.1. En estos sistemas, el retrato fase presenta dos puntos fijos, uno elíptico (cuando la herradura es poco desarrollada) y otro hiperbólico. El punto elíptico está rodeado por KAM-toros. Mas allá de la superficie de KAM más externa se encuentra la región en la que ocurre el proceso de dispersión, es decir, la región accesible a trayectorias asintóticas. Nos referiremos a esta región como la *capa de dispersión* cuya estructura fractal está relacionada con la estructura jerárquica de la maraña homoclínica².

Cuando trayectorias asintóticas se aproximan a la región de interacción, algunas de ellas son rebotadas por el punto hiperbólico de vuelta a la zona asintótica, mientras que algunas otras lo rodean y entran a la capa de dis-

²También se puede definir a la capa de dispersión como el área en la región de interacción sobre la cual se concentra la maraña homoclínica.

persión. En la capa de dispersión, las trayectorias se mueven alrededor de la isla central. Al completar una rotación las trayectorias tienen la posibilidad de salir de la capa de dispersión a lo largo de la variedad inestable del punto hiperbólico o continuar rotando.

Entonces, podemos decir que la vecindad del punto hiperbólico es una zona de decisión [38]. En ella, cada trayectoria debe “decidir” entre entrar o no a la capa de dispersión y una vez adentro, entre salir o continuar rotando alrededor de la isla. Para las trayectorias que entran a la capa de dispersión la decisión de salir o no es tomada a intervalos de tiempo determinados por el período orbital “promedio” característico de la capa de dispersión, el cual llamaremos³ $\bar{\tau}_d$.

Supongamos entonces el siguiente experimento: un observador en la región asintótica lanza trayectorias hacia la región de interacción con condiciones iniciales en algún intervalo de posición Δq y momento Δp . Al mismo tiempo, el observador lleva un registro del tiempo t en el que cada trayectoria (q_i, p_i) regresa a la región asintótica en (q_f, p_f) . Con estos datos, el observador calcula el tiempo

$$t_d = t - \left| \frac{q_i}{p_i} \right| - \left| \frac{q_f}{p_f} \right|. \quad (3.1)$$

Este es el tiempo efectivo que la trayectoria permanece en la región de interacción. Si q_i y q_f se miden muy lejos en la región asintótica, el tiempo t_d , llamado *tiempo de retardo*, es función solamente del momento inicial p_i .

Como las trayectorias que rotan en la capa de dispersión pueden salir de ella sólo a intervalos de tiempo $\bar{\tau}_d$, el flujo de trayectorias dispersadas aumentará para los tiempos de retardo que sean, aproximadamente, múltiplos del período orbital característico de la capa de dispersión. Éstas diferencias de flujo podrían ser observadas en la distribución de tiempos de retardo $P(t_d)$ y así obtener a partir de ésta, un valor para el período orbital promedio $\bar{\tau}_d$ de la capa de dispersión. En analogía a la señal que envía un radar, llamaremos a los incrementos de flujo en la dispersión *ecos*.

Hasta ahora hemos identificado al período orbital con un tiempo, sin embargo, esto no es estrictamente correcto. Hemos estudiado la dispersión en términos de la dinámica sobre la superficie de sección. En el flujo Hamiltoniano, al tiempo entre intersecciones sucesivas de una trayectoria particular con la superficie de sección se le llama *tiempo de retorno*. Este tiempo es ca-

³La barra sobre τ_d indica que esta cantidad es un promedio sobre distintas trayectorias caracterizadas por su distancia al centro de la isla.

racterístico de la región del espacio fase en la que la trayectoria se encuentra, por lo que en general, cada trayectoria tiene un tiempo de retorno distinto y su valor varía con el tiempo. El período orbital es el número de iteraciones del mapeo de Poincaré (es decir, el número de intersecciones con la superficie de sección), necesarias para completar una rotación alrededor de la isla. Entonces, si para alguna trayectoria llamamos $t_r(i)$ al tiempo de retorno entre la intersección i y la $i - 1$ el tiempo t_d que la trayectoria con período orbital τ_d requiere para completar una rotación será

$$t_d = \sum_{i=1}^{\tau_d} t_r(i) . \quad (3.2)$$

Para sistemas periódicamente dependientes del tiempo (como el del modelo 2.1), el tiempo de retorno es constante y el mismo en todo el flujo Hamiltoniano, por lo que sólo para estos sistemas, el período orbital es un tiempo medido en unidades del período del sistema.

En general, los tiempos de retorno $t_r(i)$ en la ec. 3.2 no se pueden obtener a menos que se tenga conocimiento del Hamiltoniano, procedimiento que es inútil en un experimento real en donde el objetivo es precisamente caracterizar el potencial.

Para sistemas de dispersión la situación es más favorable. En la región de interacción, la dinámica de las trayectorias de dispersión se lleva a cabo sobre la capa de dispersión. Como se ha mencionado, por definición toda la estructura de la maraña homoclínica del punto hiperbólico se encuentra precisamente sobre la capa de dispersión⁴. Debido a ésto, en valor típico para los tiempos de retorno sobre la capa de dispersión es el tiempo de retorno de la órbita que corresponde al punto fijo hiperbólico [31] y la ec. 3.2 se vuelve

$$t_d = \bar{\tau}_d t_r^* , \quad (3.3)$$

donde t_r^* es el tiempo de retorno del punto hiperbólico y $\bar{\tau}_d$ es el promedio sobre la capa de dispersión. En otras palabras, el periodo orbital promedio característico de la capa de dispersión $\bar{\tau}_d$, es un tiempo medido en unidades del tiempo de retorno típico de las trayectorias de dispersión del sistema.

Así, en sistemas Hamiltonianos de dispersión es posible obtener $\bar{\tau}_d$ a partir de mediciones asintóticas como por ejemplo en la distribución de tiempos de

⁴En la siguiente Sección usaremos este hecho para relacionar la rotación de las trayectorias con la rotación de los tentáculos de la herradura.

retardo $P(t_d)$. Esta observación es de gran importancia pues como veremos en la siguiente Sección, $\bar{\tau}_d$ está relacionado con el desarrollo de la herradura del sistema.

3.2 Desarrollo de la Herradura

En esta Sección demostraremos que el período orbital promedio característico de la capa de dispersión $\bar{\tau}_d$ está relacionado con el desarrollo de la herradura medido en términos del parámetro formal α . Esta relación constituye la contribución más importante de esta Tesis pues permite, mediante la observación del período de los ecos de dispersión obtener el desarrollo de la herradura y con éste, la caracterización de la dinámica global en la región de interacción.

La rotación de las trayectorias en la capa de dispersión está íntimamente relacionada con la topología de la maraña homoclínica. De hecho, la rotación alrededor de la isla es consecuencia de la rotación de los tentáculos de la herradura que a su vez, es consecuencia de su estructura jerárquica.

En la Fig. 3.2 se muestra esquemáticamente una herradura binaria con desarrollo $\alpha = 1/8$. Para este desarrollo el tentáculo de nivel 3 de la variedad estable (en verde) t_{3s} , intersecta al tentáculo de nivel 1 de la variedad inestable (en rojo) t_{1u} .

Como se discute en el Apéndice A, la imagen de toda intersección homoclínica entre las variedades de la herradura es una intersección homoclínica. Además, la jerarquía de la herradura se hereda, por así decirlo, a los puntos homoclínicos: denotemos como $(i : j)$ al punto homoclínico producto de una intersección entre el tentáculo de nivel i de la variedad estable con el tentáculo de nivel j de la variedad inestable. Como la variedad inestable se desarrolla en el tiempo $t \rightarrow \infty$ mientras que la estable lo hace en $t \rightarrow -\infty$ las imágenes de (i, j) son los puntos homoclínicos $(i - 1 : j + 1)$, $(i - 2 : j + 2)$, $(i - 3 : j + 3)$ y así sucesivamente. Este arreglo jerárquico permite dibujar la estructura de la herradura de cualquier desarrollo en una forma relativamente simple.

Esta jerarquía se mantiene para regiones completas sobre la superficie de sección por lo que la imagen de una región cercana al punto homoclínico $(i : j)$ estará cerca de $(i - 1 : j + 1)$.

En particular, en la Fig. 3.2 el extremo del tentáculo de nivel 1 de la variedad inestable t_{1u} se encuentra en el agujero del tentáculo t_{3s} . Como la imagen de $t_{j,u}$ es $t_{j+1,u}$, tenemos entonces que t_{2u} se encuentra en el agujero

del tentáculo t_{2s} y t_{3u} en el agujero de t_{1s} y así sucesivamente. Como consecuencia de esta jerarquía, los tentáculos de la herradura rotan alrededor del centro de la isla. En la Fig. 3.2 se indica la dirección de la rotación de los tentáculos de la variedad inestable cuyos extremos se indican como puntos azules. El tentáculo t_{5u} , el cual se encuentra en el agujero de t_{-1s} , casi ha completado una rotación respecto al centro empezando en t_{1u} , mientras que t_{6u} ha completado un poco más que una rotación.

En la Sección anterior hemos visto que todas las trayectorias en la capa de dispersión regresan a la vecindad del punto fijo F y para nuestros propósitos, el tiempo promedio en el cual éstas completan una revolución es esencial. Este es el tiempo $\bar{\tau}_d$ que corresponde al período orbital de las trayectorias que transitan cerca de la superficie de la isla, es decir, cerca de la última superficie de KAM. La superficie de la isla es una región en donde las trayectorias asintóticas permanecen por tiempos muy largos, atrapadas en la estructura fractal que es producto de la jerarquía homoclínica [58, 59]. Por lo tanto, el período orbital promedio sobre la superficie de la isla es el que determina el intervalo de tiempo entre ecos sucesivos y éste coincide con el período de rotación de los tentáculos de la herradura como se explica a continuación:

Tomemos una herradura con desarrollo $\alpha = 2^{-n}$. Fijemos nuestra atención en los extremos de los tentáculos de la herradura y localicemos por ejemplo el tentáculo de nivel k de la variedad inestable para algún k cualquiera⁵. Entonces, el tentáculo de nivel $k + n + 1$ ($t_{k+n+1,u}$), regresa cerca del tentáculo $t_{k,u}$ después de casi haber completado una revolución adicional alrededor de la isla comparado con el tentáculo $t_{k,u}$. El tentáculo $t_{k+n+2,u}$ va un poco más allá de $t_{k,u}$ y completa un poco más que una revolución. Considerando que $t_{k+n+1,u}$ es la $(n + 1)$ -ésima imagen de t_k vemos que, sobre la superficie de la isla, el número de iteraciones necesario para completar una revolución es entre $n + 1$ y $n + 2$, o en promedio, $n + 3/2$. Como hemos dicho, la capa de dispersión rota junto con la dinámica sobre la maraña homoclínica, es decir, con los tentáculos de la herradura. Por lo tanto, el período orbital promedio de la capa de dispersión es $\bar{\tau}_d = n + 3/2$ si $\alpha = 2^{-n}$. Este resultado es consecuencia directa de la topología jerárquica de la herradura y puede ser escrito como

$$\bar{\tau}_d = -\log_2 \alpha + \frac{3}{2}. \quad (3.4)$$

Por ejemplo en la herradura de la Fig. 3.2 $\alpha = 2^{-3}$ y el número de

⁵Se pueden usar los mismos argumentos con la variedad estable.

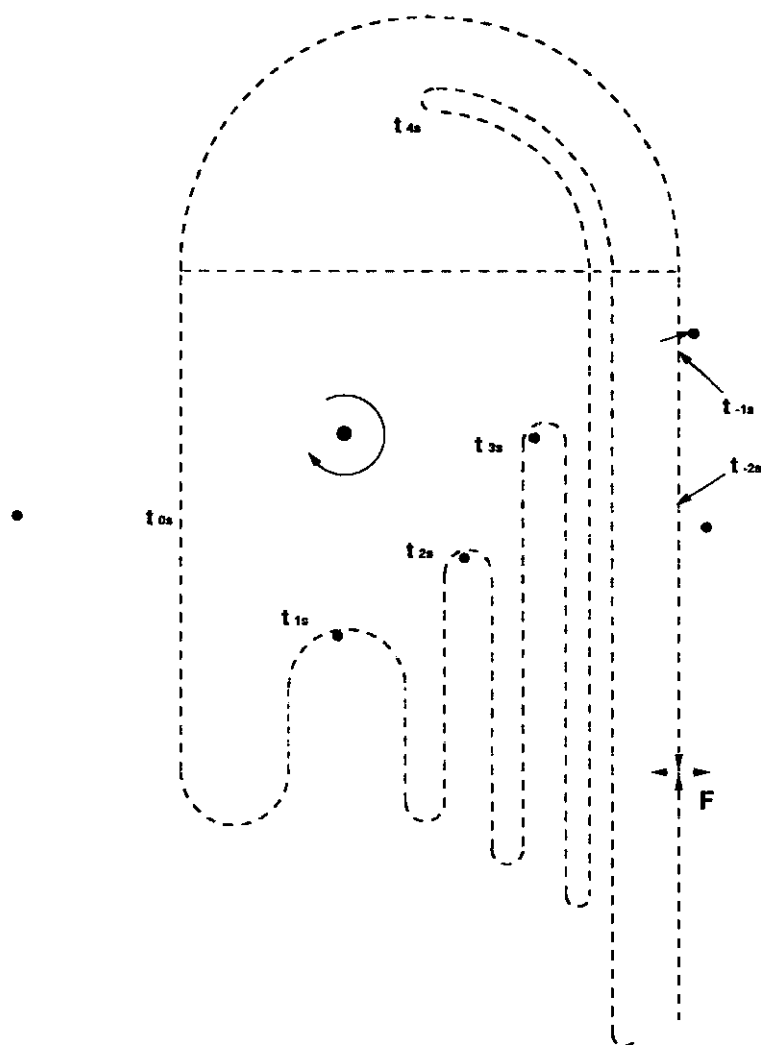


Figura 3.2: Figura esquemática de una herradura con desarrollo $\alpha = 1/8$. Los tentáculos de la variedad inestable t_{ju} (en rojo) y de la variedad estable t_{js} (en verde) han sido etiquetados conforme a su nivel j . Los extremos de los tentáculos de la variedad inestable se indican con los puntos azules.

iteraciones necesarias para que los tentáculos completen una revolución es entre 4 y 5, o en promedio, 4.5, valor que coincide con nuestro resultado general de la ec. 3.4.

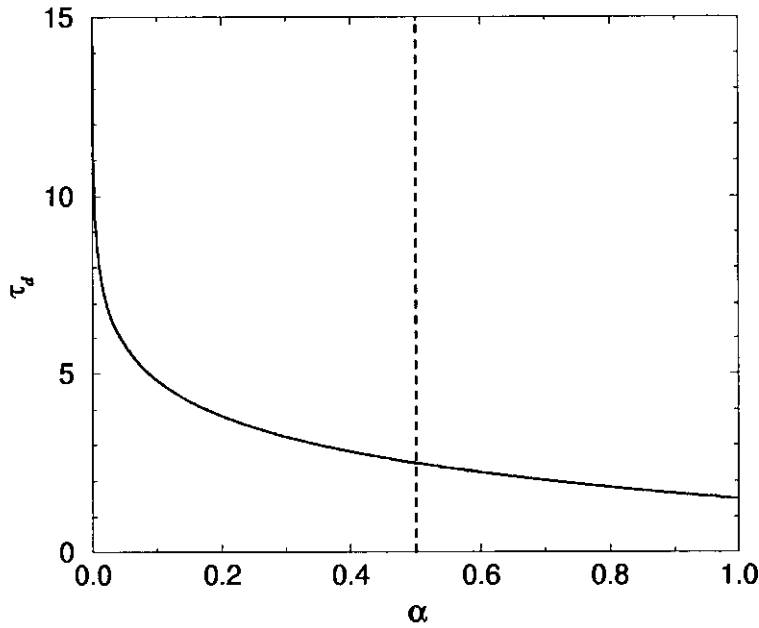


Figura 3.3: Período orbital promedio $\bar{\tau}_d$ como función del parámetro de desarrollo α dado por la ec. 3.4. La línea segmentada indica el valor de $\alpha = 1/2$. La ec. 3.4 es válida sólo para $\alpha < 1/2$.

Invirtiendo la ec. 3.4 obtenemos el resultado que buscamos

$$\alpha = 2^{3/2 - \bar{\tau}_d} \quad , \quad \bar{\tau}_d > 3/2 . \quad (3.5)$$

Dado que $\alpha \in [0, 1]$, el rango de valores para $\bar{\tau}_d$ está limitado a $\bar{\tau}_d > 3/2$ como se indica en la ec. 3.5.

Así, si podemos obtener el valor del período orbital $\bar{\tau}_d$ a partir del período de los ecos de dispersión, con la ec. 3.5 obtenemos el desarrollo de la herradura.

La rotación de las trayectorias sobre la capa de dispersión sólo tiene sentido si existe un centro de rotación, por lo que la validez de la ec. 3.4 y la ec. 3.5 está limitada a la existencia de una isla central.

Para el desarrollo $\alpha = 1/2$ la isla central se ha bifurcado por doblamiento de período convirtiéndose en un punto fijo hiperbólico. Cuando esto ocurre la isla bifurcada generalmente aún se encuentra rodeada por superficies de

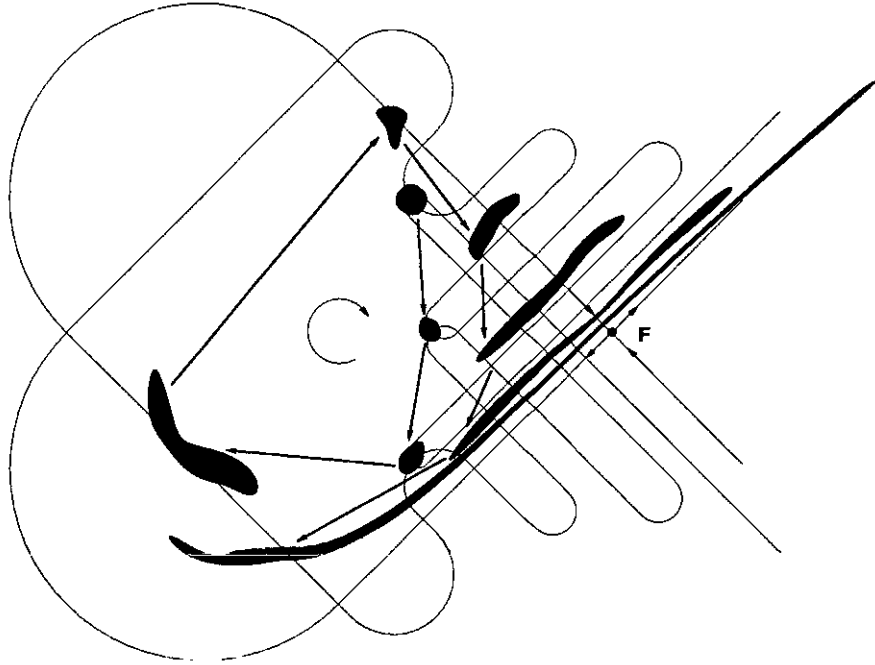


Figura 3.4: En esta figura se muestra la evolución de una nube de trayectorias (en color turquesa) puesta inicialmente sobre el extremo del tentáculo t_{1u} de una herradura con desarrollo $\alpha = 1/8$. En su evolución la nube de trayectorias se deforma.

KAM, por lo que incluso para desarrollos $\alpha > 1/2$ podemos decir que las trayectorias en la capa de dispersión rotan alrededor del centro.

Sin embargo, a partir de la ec. 3.4, el valor de $\bar{\tau}_d$ para $\alpha = 1/2$ es 2 y como veremos en la segunda parte de esta Tesis, en la práctica no es posible extraer valores tan pequeños del periodo orbital debido al ancho propio de los ecos. Es en este sentido que nuestro método funciona para herraduras poco desarrolladas $\alpha < 1/2$ en donde la isla central aún existe.

En la Fig. 3.3 se muestra el período orbital $\bar{\tau}_d$ como función de α . El período orbital aumenta con $\alpha \rightarrow 0$. En particular para $\alpha = 0$ las variedades invariantes de la herradura se colapsan en una separatriz para la cual $\bar{\tau}_d = \infty$. En esta Figura se indica el valor de $\alpha = 1/2$ que constituye el límite superior para la extracción del periodo orbital en la capa de dispersión a partir de la observación de los ecos.

Los argumentos que llevaron al resultado de la ec. 3.4 se basan en la rotación de la maraña homoclínica, es decir, en la rotación de los puntos homoclínicos alrededor del centro de la isla. Pero, los puntos homoclínicos no rotan para siempre; cada uno de éstos realiza un cierto número de revoluciones antes de converger, finalmente al punto fijo hiperbólico F (véase la Sección 1.1.2). Sin embargo, toda la estructura homoclínica continua rotando con el mismo período y con ella toda la capa de dispersión. Esto se ejemplifica en la Fig. 3.4 para una herradura con el mismo desarrollo $\alpha = 2^{-3}$ y en la Fig. 3.5 para $\alpha = 2^{-4}$. En ambas figuras se muestra la evolución de una nube de trayectorias que se pone inicialmente sobre el extremo del tentáculo t_{1u} . La nube de trayectorias rota junto con la maraña homoclínica. En su rotación ésta se deforma conforme al estiramiento y doblamiento de la herradura misma. Al completar una revolución, las trayectorias que inicialmente se encontraban en el agujero del tentáculo t_{1u} dejan el rectángulo fundamental y se alejan a lo largo de la variedad inestable de la herradura. Aquellas que se encontraban al interior continúan rotando hasta un tiempo $t < \infty$ en el que todas las trayectorias, excepto un conjunto de medida cero, dejan el rectángulo fundamental. Este conjunto consiste en las trayectorias que inicialmente pertenecen a la variedad estable de la herradura y por ende, convergen al punto fijo F en $t \rightarrow \infty$, sin embargo, este conjunto es inaccesible para las órbitas de dispersión.

Adicionalmente, para la herradura de la Fig. 3.5 con desarrollo $\alpha = 2^{-4}$, el período orbital de la nube de trayectorias es ~ 5.5 , de nuevo en acuerdo a la ec. 3.4.

Para sistemas con tres órbitas periódicas fundamentales la herradura es ternaria. Si el potencial es simétrico, es decir, $V(q) = V(-q)$ la herradura es simétrica como la que se muestra en la Fig. 3.6 para un desarrollo $\gamma = 3^{-3}$. La herradura ternaria está soportada sobre los dos puntos fijos hiperbólicos F_1 y F_2 . En una herradura simétrica, las variedades invariantes de los dos puntos fijos se desarrollan igual, por lo que un sólo parámetro γ es suficiente para caracterizar el desarrollo de la herradura completa.

Usando el mismo razonamiento que para una herradura binaria encontramos que, para una herradura ternaria simétrica con desarrollo $\gamma = 3^{-n}$ el período orbital sobre la superficie de la isla está dado por

$$\bar{\tau}_d = -2 \log_3 \gamma + 3/2 . \quad (3.6)$$

Esta igualdad es similar a la ec. 3.4 excepto por el factor 2 enfrente del logaritmo el cual, es consecuencia de que ahora existen dos puntos fijos

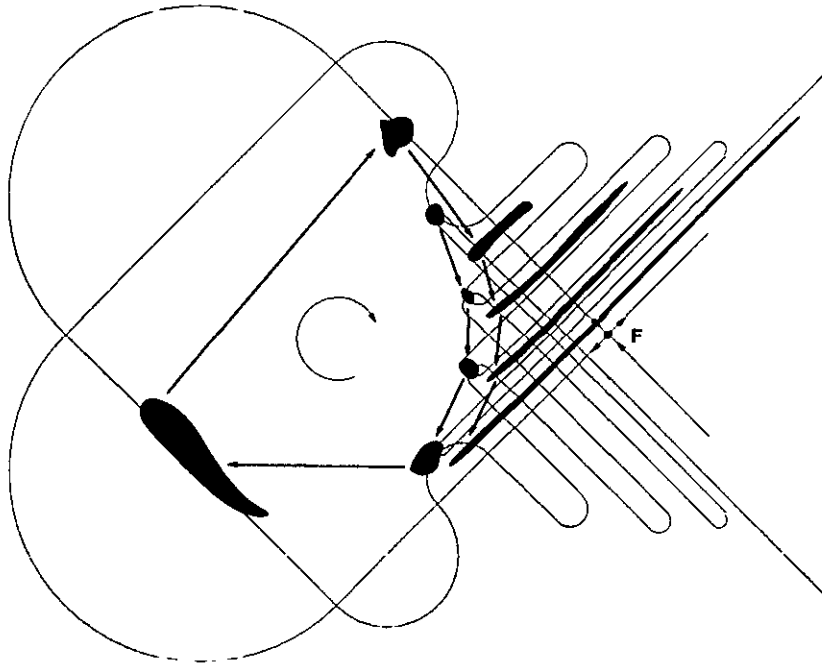


Figura 3.5: Igual que la Fig. 3.4 para una herradura con desarrollo $\alpha = 1/16$.

hiperbólicos. Invirtiendo la ec. 3.6 obtenemos el desarrollo de la herradura γ como función del período de los ecos:

$$\gamma = 3^{(3/2 - \bar{\tau}_d)/2} \quad , \quad \bar{\tau}_d > 3/2 . \quad (3.7)$$

Nuevamente, el período orbital está limitado a valores $\bar{\tau}_d > 3/2$ para ser consistente con el rango del parámetro de desarrollo $\gamma \in [0, 1]$.

Para un sistema con una herradura ternaria, el período orbital $\bar{\tau}_d$ en las ecs. 3.6 y 3.7 debe ser medido a partir de los ecos de dispersión en alguna de los dos direcciones de salida.

En resumen, el período orbital promedio en la capa de dispersión es una característica genérica directamente relacionada con el grado de desarrollo de la herradura subyacente. Así, mediante las ecs. 3.5, 3.7 es posible obtener el grado de desarrollo de la herradura a partir de la observación asintótica de los ecos.

Este método funciona para herraduras poco desarrolladas (típicamente $\alpha < 1/2$ para herraduras binarias y $\gamma < 1/3$ para herraduras ternarias),

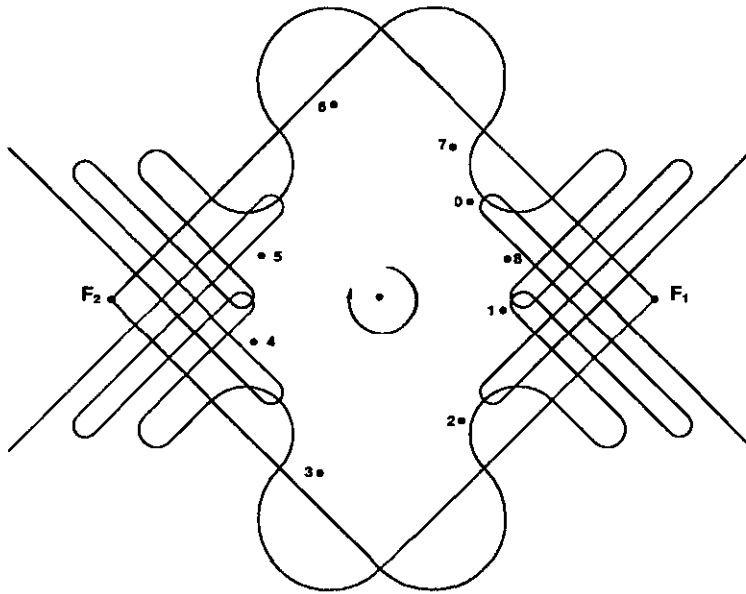


Figura 3.6: Herradura ternaria simétrica con desarrollo $\gamma = 3^{-3}$. Los puntos enumerados muestran una trayectoria típica sobre la capa de dispersión.

tal que exista una isla de estabilidad central. En contraste, algunos otros métodos [31, 32] desarrollados, requieren generalmente de una herradura bien desarrollada ($\alpha > 1/2$). En [31] el orden jerárquico es extraído de la estructura fractal de las funciones de dispersión, sin embargo, este método requiere de un conocimiento preciso del tiempo de retorno a la superficie de sección. En [32], el período y estabilidad de las órbitas periódicas más cortas son extraídos a partir de un análisis jerárquico de los intervalos de continuidad en las funciones de dispersión. Este método también es aplicable al caso de herraduras poco desarrolladas. Sin embargo, no da ninguna información acerca de la isla.

Comparado con estos métodos, el procedimiento basado en la observación del período de los ecos de dispersión explora regiones del espacio de parámetros inaccesibles para los métodos existentes. Además, la aplicabilidad de nuestro método es mayor pues el número de requerimientos impuestos al sistema es pequeño y éstos son satisfechos por la mayoría de los sistemas físicos de dispersión.

Mas aún, como se discute en la siguiente Sección, el método introducido

en esta Tesis abre por primera vez la posibilidad de explorar el proceso de dispersión en sistemas cuánticos análogos en términos del desarrollo de la herradura. Este es sin lugar a dudas el resultado más sobresaliente de esta Tesis.

3.3 Aspectos Cuánticos de la Dispersión

Para estudiar el proceso de dispersión en sistemas cuánticos se analiza la evolución de paquetes de onda que son dispersados por un potencial unidimensional con dependencia periódica en el tiempo, eq. 2.2. En general, los requerimientos en el Hamiltoniano cuántico para la aplicabilidad de nuestros resultados son los mismos que en el caso clásico.

Como se discutió en el Capítulo anterior, el operador cuántico de evolución introduce al modelo dos nuevos parámetros: la constante de Planck \hbar como un parámetro puramente cuántico y la duración del paquete de ondas σ eq. 2.15, como un parámetro inicial. Aún cuando nuestros resultados no dependen de la duración del paquete inicial, veremos que el valor inicial de σ determinará el tipo de experimento que deberemos realizar para obtener el período de los ecos de dispersión.

En el límite semiclásico, $\hbar \rightarrow 0$, se espera que la dispersión de paquetes de onda muestre el mismo comportamiento que la dispersión clásica de una nube de condiciones iniciales.

La diferencia esencial entre el comportamiento del sistema clásico y su análogo cuántico es la existencia de tunelaje dinámico [61, 62], entre capa de dispersión y el interior de la isla. Cuando parte de la probabilidad cuántica del paquete incidente tunelea⁶ a través de las barreras clásicas (superficies de KAM), existe una tendencia a que ésta permanezca localizada sobre los toros invariantes de KAM al interior de la isla [63].

En esta situación, la probabilidad del paquete incidente que tunelea al interior de la isla rotará alrededor del centro de la isla al igual que las trayectorias clásicas, con un período orbital igual al período característico de la región en la que la probabilidad se localiza. La probabilidad atrapada también tunelea del interior de la isla hacia la capa de dispersión. De esta manera, cuando en su rotación el centroide de la distribución de probabilidad pasa cerca de la vecindad del punto hiperbólico una parte de ella tiene

⁶Cuando hablamos de tunelaje a través de superficies de KAM nos referimos a una densidad de probabilidad definida sobre el espacio fase.

la oportunidad de tunelear hacia el canal de salida. Análogamente al caso clásico, el decaimiento de probabilidad hacia la variedad inestable ocurre a intervalos de tiempo iguales al período orbital de la probabilidad atrapada, misma que puede observarse como *ecos* en la región asintótica. La intensidad de los ecos decae exponencialmente en el tiempo como es típico del tunelaje [64].

El valor de \hbar determina la resolución con la que la probabilidad cuántica puede discernir la estructura del espacio fase. De esta manera, la probabilidad también puede localizarse sobre las islas de estabilidad secundarias que existen en la capa de dispersión.

En otro contexto, la localización de probabilidad cuántica sobre estructuras clásicas del espacio fase, puede ser interpretada como debida al acoplamiento del paquete de ondas con energía de incidencia E_{in} , con los estados cuasiligados del potencial efectivo, dando lugar a la aparición de resonancias, mismas que pueden ser observadas en cualquier observable que sea función de la energía [21].

La observación del período orbital en los ecos depende de la duración del pulso con el que se realiza la dispersión. En el caso de pulsos cortos, la energía inicial del pulso no está bien definida pues en este caso, el ancho del paquete de ondas en el espacio de momento es grande y por ende, la medición de cualquier observable como función de la energía será infructuosa. En este caso, es preferible observar los ecos de dispersión en la variación en el tiempo de observables como por ejemplo, el flujo de dispersión. Por el contrario, para pulsos largos se tiene buen control de la resolución en la energía y en este caso, cantidades como la matriz S como función de la energía pueden ser utilizadas. En la siguiente Sección se discute la obtención del período orbital para pulsos largos.

Para la dispersión con pulsos cortos, podemos estudiar la evolución temporal del paquete de ondas en el espacio fase o en el espacio de posición. Es posible observar la evolución cuántica en el espacio fase usando una densidad de distribución conocida como distribución de Husimi [65] definida por

$$\rho_H(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle \varphi_{qp} | \Psi \rangle|^2, \quad (3.8)$$

donde $|\Psi \rangle$ es la función de onda del pulso,

$$\langle q' | \varphi_{qp} \rangle = (2\pi\Delta^2)^{-1/4} e^{\frac{i}{\hbar}pq' - \frac{(q'-q)^2}{2\Delta^2}}$$

$$y \Delta = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}.$$

La función de Husimi es un promedio sobre el espacio fase con resolución Δ cuyo límite semiclassical corresponde a la densidad de distribución clásica [66]. De esta manera, es posible estudiar los efectos que sobre la dinámica cuántica tienen las distintas estructuras clásicas del espacio fase.

En este caso, es posible obtener el período de los ecos en la dispersión cuántica midiendo la evolución en el tiempo de alguna observable como por ejemplo, la amplitud de probabilidad observada en algún intervalo de la posición de longitud Δ alrededor de alguna posición q en la región asintótica

$$I_{\Delta}(t) = \int_{q-\Delta/2}^{q+\Delta/2} |\Psi(q, t)|^2 dq. \quad (3.9)$$

De manera análoga a la observación clásica, $I_{\Delta}(q, t)$ oscilará con un período igual al período orbital de la probabilidad atrapada. Sin embargo, como se discutió en la Sección 3.1, el período orbital típicamente aumenta con la distancia al centro de la isla. Debido a ésto y a la tendencia de la probabilidad cuántica de poblar regiones más internas, es decir, más cercanas al centro de la isla que las regiones visitadas por las trayectorias clásicas, es de esperarse que el período orbital clásico será una cota superior para el período orbital cuántico

$$\overline{\tau}_q \leq \overline{\tau}_c. \quad (3.10)$$

La igualdad en la ecuación anterior se da con seguridad sólo para $\hbar = 0$.

3.4 Teoría de Floquet

La teoría de Floquet es un formalismo apropiado para resolver la ecuación de Schrödinger de sistemas cuyo Hamiltoniano es periódico en el tiempo [67]. Hamiltonianos del tipo de la ec. 2.1 se pueden expresar en forma general como

$$H(q, p; t) = H_0(p) + V(q)\Xi(t), \quad (3.11)$$

donde $\Xi(t)$ es una función periódica en el tiempo de período τ

$$\Xi(t) = \Xi(t + \tau). \quad (3.12)$$

La evolución temporal del estado del sistema $\Psi(q, t)$ es descrita por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H|\Psi\rangle. \quad (3.13)$$

Dado que el Hamiltoniano depende explícitamente del tiempo, la energía del sistema no se conserva por lo que la ecuación de Schrödinger no puede resolverse mediante la separación de variables usual.

Sin embargo, debido a su periodicidad el Hamiltoniano es invariante ante traslaciones temporales discretas, $H(t) = H(t + \tau)$. Esto quiere decir que es posible encontrar soluciones $\chi(q, t)$ a la eq. 3.13, que sean eigenfunciones simultáneas del operador de traslación temporal \mathcal{T} .

De acuerdo al teorema de Floquet [68], las soluciones a ecuaciones del tipo 3.13 existen y son de la forma⁷

$$|\chi_\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\Theta_\alpha t}|\Phi_\alpha(t)\rangle \quad (3.14)$$

donde $|\Phi_\alpha(t)\rangle = |\Phi_\alpha(t + \tau)\rangle$ y Θ_α es un parámetro definido hasta múltiplos de $\hbar\omega$, con $\omega = 2\pi/\tau$ el inverso del período del sistema. A Θ_α se le llama *cuasienergía* en analogía con el formalismo de Bloch, usado para Hamiltonianos espacialmente periódicos [69].

Si definimos un nuevo Hamiltoniano $K(t)$ como

$$K(t) = H(t) - i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (3.15)$$

y sustituimos la solución de Floquet ec. 3.14, obtenemos una ecuación de eigenvalores para la cuasienergía como

$$K(t)|\Phi_\alpha(t)\rangle = \Theta_\alpha|\Phi_\alpha(t)\rangle . \quad (3.16)$$

Suponiendo que los estados de Floquet $|\Phi_\alpha\rangle$ forman una base ortonormal y completa para el espacio de Hilbert $H_0 \otimes \mathcal{T}$ [70], podemos expandir el estado del sistema como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}\Theta_{\alpha} t} |\Phi_{\alpha}(t)\rangle \quad (3.17)$$

en donde los coeficientes c_{α} son determinados para el estado inicial, es decir,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}\Theta_{\alpha} t} |\Phi_{\alpha}(t)\rangle \langle \Phi_{\alpha}(0) | \Psi(0) \rangle . \quad (3.18)$$

⁷En donde sea posible sin crear confusión, omitiremos la dependencia en posición y momento de los operadores y funciones.

Utilizando la periodicidad de los estados de Floquet podemos escribir el estado del sistema al tiempo $t = \tau$, es decir, después de un período como

$$|\Psi(\tau)\rangle = \sum_{\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}\Theta_{\alpha}\tau} |\Phi_{\alpha}(0)\rangle \langle \Phi_{\alpha}(0)|\Psi(0)\rangle . \quad (3.19)$$

Esto quiere decir que si nos limitamos a observar el sistema a intervalos de tiempo que sean múltiplos del período τ entonces

$$|\Psi(n\tau)\rangle = (U_{\tau})^n |\Psi(0)\rangle \quad (3.20)$$

en donde

$$U_{\tau} = \sum_{\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}\Theta_{\alpha}\tau} |\Psi_{\alpha}(0)\rangle \langle \Psi_{\alpha}(0)| \quad (3.21)$$

es el operador de evolución al tiempo $t = \tau$. Así, el operador U_{τ} , conocido como operador de Floquet, puede ser calculado a partir del estado del sistema al tiempo $t = \tau$.

Como consecuencia de la periodicidad en el tiempo el modo de Floquet

$$|\Psi_{\alpha'}(t)\rangle = e^{in\omega t} |\Psi_{\alpha}(t)\rangle \equiv |\Psi_{\alpha n}(t)\rangle \quad (3.22)$$

con $n = 0 + \pm 1 + \pm 2 + \dots$, conduce a exactamente la misma solución en la ec. 3.14 con un corrimiento en la cuasienergía

$$\Theta_{\alpha'} = \Theta_{\alpha} + n\hbar\omega . \quad (3.23)$$

El índice α corresponde entonces a toda una clase completa de soluciones organizadas por $\alpha' = (\alpha, n)$ y por lo tanto, los eigenvalores $\{\Theta_{\alpha}\}$ pueden ser mapeados a la primera zona de Brillouin $\hbar\omega/2 \leq \Theta < \hbar\omega/2$.

Cuando la dependencia del sistema en el tiempo desaparece adiabáticamente los modos de Floquet y las cuasienergías convergen a [71]

$$|\Psi_{\alpha n}\rangle \rightarrow |\psi_{\alpha}\rangle e^{in\omega t} \quad (3.24)$$

y

$$\Theta_{\alpha} \rightarrow E_{\alpha} + n\hbar\omega \quad (3.25)$$

donde $\{\psi_{\alpha}, E_{\alpha}\}$ y son las eigenfunciones y eigenvalores del Hamiltoniano libre H_0 .

En otras palabras, en un problema de dispersión, las cuasienergías están relacionadas con la energía asintótica,

$$\Theta_\alpha = E_{out}^{in} + \frac{2\pi\hbar n}{\tau}, \quad (3.26)$$

con $n = 0 + \pm 1 + \pm 2 + \dots$, por lo que la energía en el proceso de dispersión sólo puede variar en múltiplos de $\hbar\omega$. En la Sección 6.2.1, usaremos esta relación para calcular la matriz S de dispersión.

Las cuasienergías obtenidas de la solución a la ec. 3.16 pueden ser interpretadas como las energías de estados de resonancia del potencial efectivo $V(q, t)$ [72]. Como en la ec. 3.26 una resonancia con energía E^* tendrá un infinito de réplicas a energías $E = E^* + n\hbar\omega$. El número de resonancias encontradas en un intervalo de energía de longitud $\hbar\omega$ es una característica del potencial mismo. Así, la separación media entre resonancias $\overline{\Delta E}$ determina una escala de energía intrínseca del sistema que varía con la perturbación externa, es decir, en el caso del modelo de la ec. 2.1, con el valor del parámetro A . Mientras que $\hbar\omega$ corresponde al período del sistema, nuestra conjetura es que $\overline{\Delta E}$ corresponde a la otra escala temporal del modelo ec. 2.1, es decir, al período de los ecos de dispersión.

Si en la dispersión de paquetes de onda se usan pulsos largos su energía de incidencia está bien definida, por lo que en este caso será posible extraer el período orbital de la capa de dispersión y por ende el desarrollo de la herradura, a partir de la separación media entre las resonancias de cualquier observable que sea función de la energía como por ejemplo, la matriz S de dispersión.

En regiones del espacio de parámetros del sistema para las cuales no existe una isla de estabilidad central bien desarrollada, las resonancias tienden a superponerse por lo que nuevamente, la extracción del período de los ecos es posible sólo en el caso de herraduras poco desarrolladas. Este fenómeno es bien conocido y da lugar a la aparición de oscilaciones en la matriz S como función de la energía con una autocorrelación que decae de forma Lorentziana [19]. Este fenómeno conocido como *fluctuaciones de Ericson* [75], fué observado con anterioridad en la sección eficaz de sistemas nucleares de dispersión. Su importancia radica en el hecho de que a partir del decaimiento de la autocorrelación (en este caso de la sección eficaz como función de la energía), se puede obtener el tiempo de vida de la reacción. En el contexto del caos cuántico las fluctuaciones de Ericson han sido interpretadas como un indicio de la aparición del caos en la dispersión [19] al mostrarse que este fenómeno

es descrito por la teoría de matrices aleatorias (TMA). El comportamiento descrito por la TMA tiene distintas consecuencias dependiendo de si la caoticidad del sistema es encontrada en el flujo Hamiltoniano o en el mapeo de dispersión. La estadística de las eigenfases de la matriz S depende principalmente de la caoticidad del mapeo de dispersión, mientras que el comportamiento de las eigenfunciones o de cualquier otra cantidad que dependa de la base esta descrito por la TMA cuando existe caos topológico [76].

Parte II

**Discusión de los Resultados
Numéricos**

Capítulo 4

Análisis Numérico Preliminar

En este capítulo se analiza el proceso de dispersión clásico y cuántico para el modelo introducido en el capítulo 2. Algunos de los resultados conocidos en la teoría de dispersión caótica son corroborados.

4.1 Dispersión Clásica

En esta Sección se estudia el proceso de dispersión clásica para el potencial de la ec. 2.2. Este potencial consiste en una pared infinita por un lado y un decaimiento exponencial por el otro, lo que determina que la dispersión se lleve a cabo a través de un solo canal. El pozo de potencial alrededor de $q = 0$ es inaccesible a partículas con energías menores¹ a $\approx 3A/e$.

Para estudiar el proceso de dispersión en mecánica clásica se eligen partículas en la región asintótica, que inciden sobre la región de interacción. Las condiciones iniciales de las partículas (q_i, p_i) se eligen sobre la superficie de sección y sirven para etiquetar su trayectoria. La trayectoria de las partículas se obtiene a partir del mapeo clásico, ec. 2.6. Después de permanecer por un tiempo en la región de interacción todas las partículas regresan a la región asintótica en $(q_f(t), p_f(t))$.

¹Para sistemas pateados en el tiempo, una partícula clásica con una fase adecuada puede atravesar la barrera de potencial aun cuando ésta tenga una energía menor a la del máximo de la barrera.

4.1.1 Retrato Fase

Como se mencionó en el Capítulo 2, el retrato fase del mapeo estroboscópico ec. 2.6 muestra un escenario genérico para el desarrollo de la herradura. En función del parámetro A la herradura alcanza un desarrollo completo para $A \gtrsim 6.25$. En $A = 4$ el punto fijo interior cambia su estabilidad debido a una bifurcación de doblamiento de período.

En el Capítulo 3 se discutió cómo obtener el desarrollo de la herradura del sistema en términos del período orbital de la capa de dispersión el cual, puede ser obtenido a partir del período de los ecos de dispersión. Este método requiere de la existencia de una isla central bien desarrollada. Para el modelo de la ec. 2.2 esto se satisface para valores del parámetro formal $\alpha < 1/2$ o en términos del parámetro físico, para A aproximadamente menor a 4.17. Como veremos en el siguiente Capítulo, para valores de $A \sim 3$ el período de los ecos ya es difícil de medir debido a que la magnitud del ancho de los ecos es comparable a su período.

En la Fig. 4.1 se muestra el retrato fase del modelo para $A = 0.967$, compuesto por las trayectorias que pertenecen al conjunto invariante del sistema y por las trayectorias de dispersión que inician en la región asintótica. En esta figura, las trayectorias de dispersión mostradas corresponden a momentos iniciales en el intervalo $(-1.48, -1.46)$. Este intervalo de momento corresponde al intervalo que ocupa la variedad estable de la herradura en la región asintótica y por ende, las trayectorias con un momento de incidencia en esta región observan un comportamiento complicado. Para momento mayores en valor absoluto a 1.48, todas las trayectorias entran y salen de la capa de dispersión después de completar una rotación, mientras que para momentos menores a 1.46 todas las trayectorias rebotan en la barrera de potencial. Es solamente para momentos de incidencia en el intervalo de momento que ocupa la variedad estable de la herradura que las trayectorias pueden permanecer un gran número de vueltas en la capa de dispersión antes de regresar a la región asintótica. Así, es sólo sobre este intervalo de momento sobre el cual la dinámica de la trayectorias es interesante. La longitud de este intervalo define el ancho de las variedades de la herradura en la región asintótica, mismo que depende de los parámetros del sistema.

La estructura del retrato fase para $A = 0.967$ es interesante. Primero que nada, tanto la isla central como la capa de dispersión están bien desarrolladas. En la capa de dispersión se puede observar una cadena de islas secundarias con un período orbital de $\tau = 9$. Exterior a ellas existe una cadena de

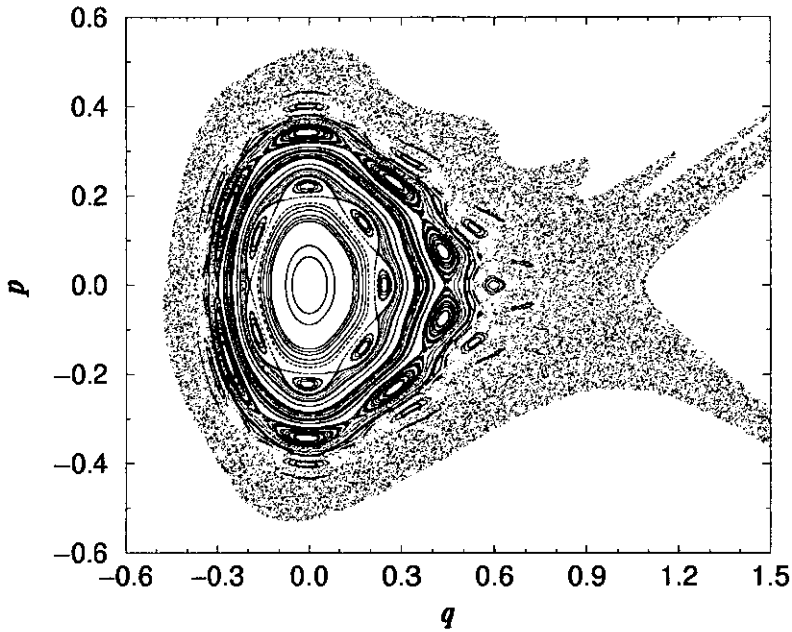


Figura 4.1: Retrato fase para el mapeo estroboscópico, ec 2.6 para $A = 0.967$. Junto con las trayectorias acotadas se muestran trayectorias asintóticas con $p_i \in (-1.48, -1.46)$. La curva roja corresponde a la última superficie de KAM.

islas con $\tau = 10$ en la que cada isla se ha roto en dos por una bifurcación de doblamiento de período. Junto con ésta, un infinito de islas secundarias menores se encuentran inmersas en la capa de dispersión.

En la Fig. 4.2 se muestra un acercamiento a la vecindad de la superficie de KAM mas externa (curva roja) la cual constituye la frontera interior de la capa de dispersión. Interior a la cadena de islas con $\tau = 9$, existen algunos can-toros² y otras cadenas de islas que rodean a la última superficie de KAM. Esta superficie de KAM es la única que rodea a una cadena de período $\tau = 8$ formada por grandes islas secundarias. Para algún valor entre $A = 0.967$ y $A = 1$, esta superficie de KAM se rompe convirtiéndose en un can-toro. Cuando esto sucede, las trayectorias de dispersión pueden acceder a esta

²Un KAM-toro puede ser destruido por las resonancias asociadas a las órbitas periódicas cercanas a él. Así, el KAM-toro deja de ser una barrera continua para convertirse en un conjunto de Cantor [77, 78] y recibe entonces el nombre de *can-toro*.

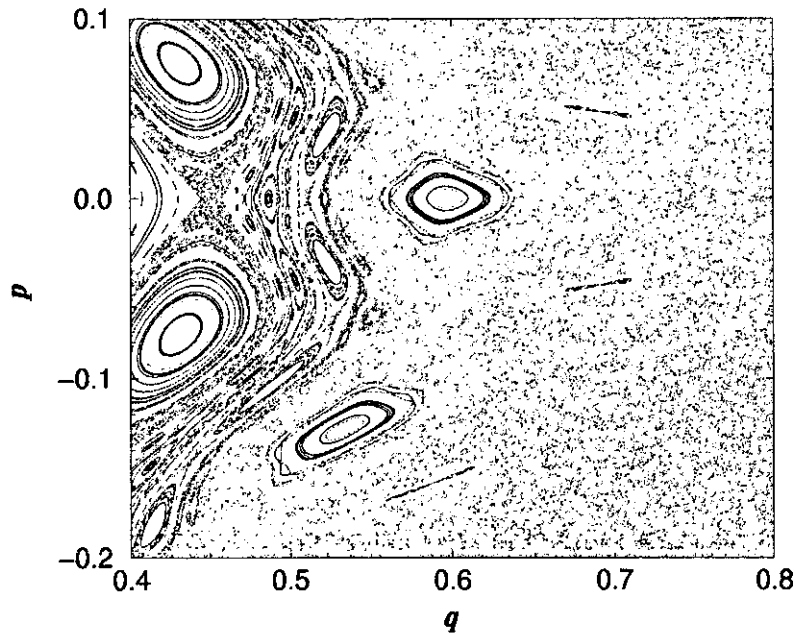


Figura 4.2: Acercamiento de la Fig. 4.1 en la vecindad de la última superficie de KAM.

zona. Así, será interesante comparar la dinámica clásica con la cuántica para el parámetro $A = 0.967$ para el cual una importante cadena de islas secundarias es protegida del exterior solamente por una curva de KAM.

4.1.2 Tiempo de Retardo

A toda función que relaciona el estado final de una trayectoria de dispersión con su estado inicial se le llama *función de dispersión*. El estudio de una función de dispersión permite obtener información del potencial de dispersión a partir de la observación asintótica de las trayectorias dispersadas, en función de algún parámetro inicial como por ejemplo, el parámetro de impacto, la energía inicial o el ángulo de incidencia.

El tiempo de retardo t_d , definido en la Sección 3.1, es un ejemplo de una función de dispersión. Este corresponde al tiempo que una trayectoria permanece en la región de interacción. Para un sistema de dispersión caótica, es decir, cuando existe una maraña homoclínica, el tiempo de retardo presenta

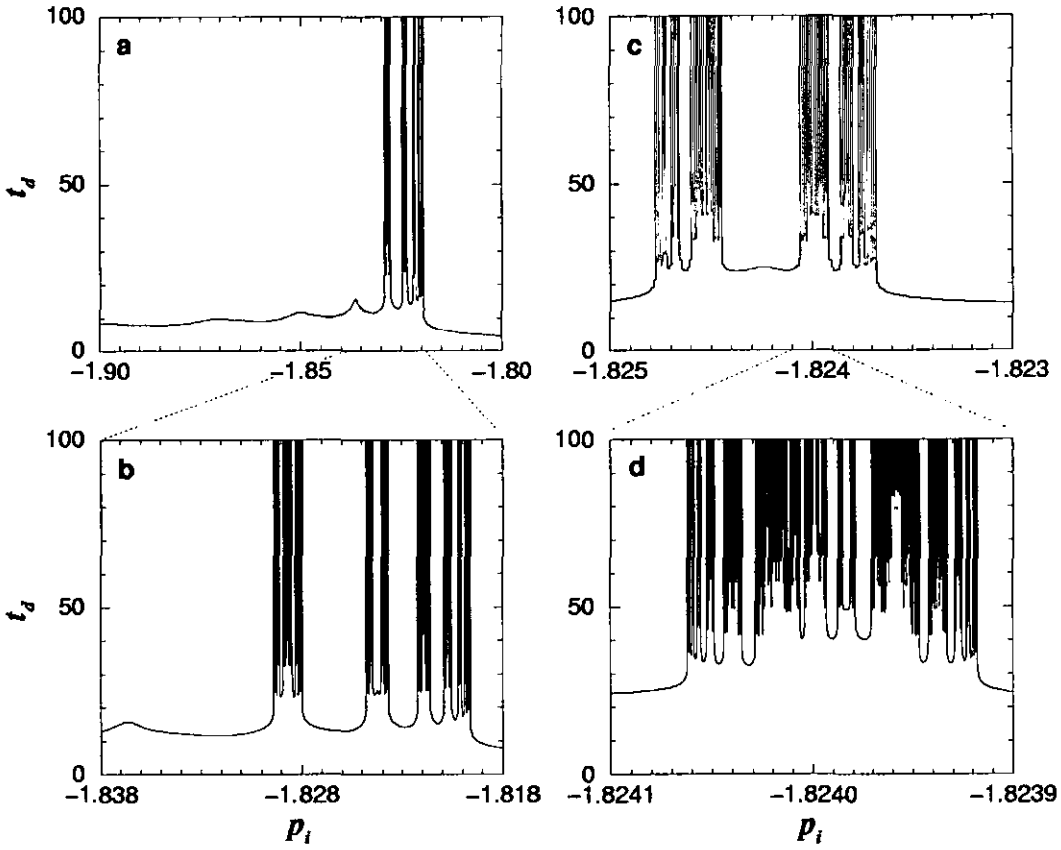


Figura 4.3: Tiempo de retardo $t_d(p_i)$ como función del momento de incidencia p_i para $A = 1.5$.

un número infinito de singularidades. Éstas corresponden a las trayectorias cuyas condiciones iniciales pertenecen a la variedad estable de la herradura y convergen en $t \rightarrow \infty$ al punto fijo hiperbólico que soporta la herradura. Las singularidades forman un conjunto no numerable sobre un dominio fractal [29].

En la Fig 4.3 se muestran varios acercamientos para el tiempo de retardo calculado para el modelo de la ec. 2.2 como función del momento inicial p_i para $A = 1.5$. La posición inicial de las trayectorias se eligió como $q_i = 100$, mientras que la posición y momento finales (q_f, p_f) se midieron cuando $q_f \geq q_i$. En la Fig 4.3-a se puede observar que el conjunto de sin-

gularidades se encuentra en cierto intervalo de momento. Este intervalo corresponde al intervalo de momento ocupado por la variedad estable de la herradura en la región asintótica como se discutió en la Sección anterior. Los sucesivos acercamientos en la Fig 4.3 sugieren una estructura auto similar de la función de dispersión, típica de un fractal. La fractalidad de las funciones de dispersión es una prueba formal de la existencia de caos topológico, sin embargo, en un experimento real la resolución limitada puede llevar a conclusiones erróneas sobre la dinámica de dispersión [79].

La estructura de las funciones de dispersión se puede estudiar en términos de la estructura de sus *intervalos de continuidad*. Estos son los intervalos de momento sobre los cuales no existe ninguna singularidad. El número de ellos depende del valor del t_d que se observe. Por ejemplo, si en la Fig 4.3-b se traza una línea horizontal en $t_d = 10$ el número de intervalos de continuidad es cero, pero si la línea se traza en $t_d = 18$, el número de éstos es cuatro. Para valores mayores de t_d aparecen más intervalos de continuidad definiendo una jerarquía. Se puede mostrar [29], que el arreglo jerárquico de los intervalos de continuidad es equivalente al arreglo jerárquico de los intervalos generados por los tentáculos de una de las variedades de la herradura sobre algún segmento de la otra variedad. En [31, 32] se usa esta equivalencia para obtener el desarrollo de la herradura.

4.1.3 Entropía Topológica

Una descripción cuantitativa del tipo de dinámica de dispersión puede ser obtenida a partir de la entropía topológica κ_0 . Cuando κ_0 de un sistema dinámico es positiva, el conjunto invariante contiene un número infinito de posibles trayectorias, o en otras palabras, un infinito de secuencias simbólicas posibles. Un subconjunto del conjunto invariante acotado que contenga solamente un número finito de secuencias simbólicas permitidas tendrá $\kappa_0 = 0$ [42].

En términos de la entropía topológica podemos decir que la dinámica del conjunto invariante de un sistema presenta caos topológico si κ_0 es positiva. κ_0 determina la tasa de crecimiento del número de secuencias simbólicas con su longitud o equivalentemente, la tasa de crecimiento del número de órbitas periódicas $\mathcal{N}(l)$ con su longitud l . Para un sistema caótico, este crecimiento es exponencial por lo que la entropía topológica se define como [80]

$$\mathcal{N}(l) = e^{\kappa_0 l} . \quad (4.1)$$

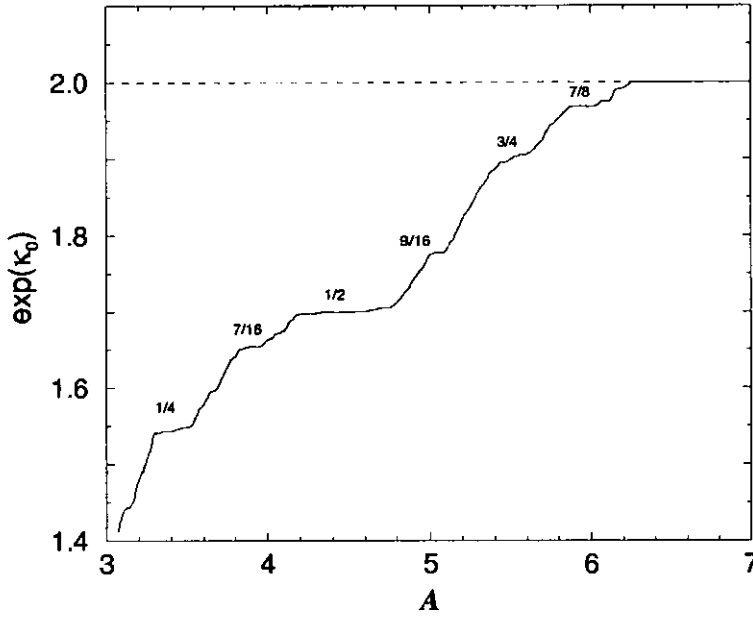


Figura 4.4: Tasa de ramificación $\exp(\kappa_0)$ para el potencial de la ec. 2.2 como función del parámetro físico A .

Así, el caos topológico se caracteriza por una proliferación exponencial de órbitas periódicas con su longitud [29].

En la Fig. 4.4 se muestra la entropía topológica para el potencial de la ec. 2.2 calculada a partir de la herradura³, como función del parámetro A . κ_0 crece monótonamente con A y es positiva, siendo cero sólo para $A = 0$. Así, la dinámica de dispersión para este potencial presenta caos topológico para toda $A > 0$. Más interesante es el hecho de que para ciertos intervalos de valores de A la entropía topológica se mantiene aproximadamente constante. En estos intervalos, el número de órbitas periódicas del sistema se mantiene aproximadamente constante y pueden ser clasificados en términos parámetro formal α . En la Fig. 4.4 se han etiquetado algunos de estos intervalos con el valor del parámetro α correspondiente.

³El cálculo consiste en medir el número de intersecciones de una de las variedades de la herradura con un segmento de la otra variedad como función del nivel de la herradura. El número de estas intersecciones crece con la misma tasa que el número de órbitas periódicas [29].

Estos intervalos corresponden a situaciones en las que no o casi no existen tangencias homoclínicas entre las variedades de la herradura, en particular, en la Fig. 4.4 se muestra el intervalo de $\alpha = 7/8$ discutido en la Sección 1.3.2. En ellos, los efectos no hiperbólicos en la dinámica aparecen a tiempos largos, por lo que la aproximación dada por una dinámica simbólica obtenida a partir de la componente hiperbólica del conjunto invariante acotado es mejor sobre estos intervalos que para valores de A donde la pendiente de κ_0 es mayor [29].

De la Fig. 4.4 también podemos extraer el valor de A a partir del cual la herradura es completa, que corresponde a $\kappa_0 = \ln 2$ para una herradura binaria [80].

4.1.4 Probabilidad de Permanencia

Los sistemas Hamiltonianos genéricos no son ni integrables ni completamente hiperbólicos si no que mas bien exhiben un espacio fase mixto en el que regiones regulares y regiones caóticas coexisten. Cada isla de estabilidad en el espacio fase se encuentra rodeada por un infinito de cadenas de islas de menor tamaño. Como consecuencia de esto, el espacio fase adquiere una estructura jerárquica extremadamente complicada [48, 81].

Las propiedades de la dinámica sobre las regiones caóticas en un espacio fase mixto son fundamentalmente distintas que aquellas que se encuentran para un sistema hiperbólico. Estas diferencias se manifiestan de manera dramática en el comportamiento de la probabilidad de permanencia $P(t)$ definida como la probabilidad de que una trayectoria dada permanezca en la región de interacción por un tiempo mayor que t . En términos de herraduras, el comportamiento de $P(t)$ es radicalmente distinto dependiendo de si la herradura del sistema es completa o incompleta.

En el caso de una herradura completa, la probabilidad de permanencia decae exponencialmente en el tiempo como [80]

$$P(t) = e^{-\gamma t} . \quad (4.2)$$

La tasa de decaimiento γ (en inglés *escape rate*), está relacionada con el exponente de Lyapunov de la órbita periódica fundamental exterior [82].

Para el caso de una herradura incompleta, la probabilidad de permanencia decae algebraicamente [58, 59]

$$P(t) = t^{-\nu} . \quad (4.3)$$

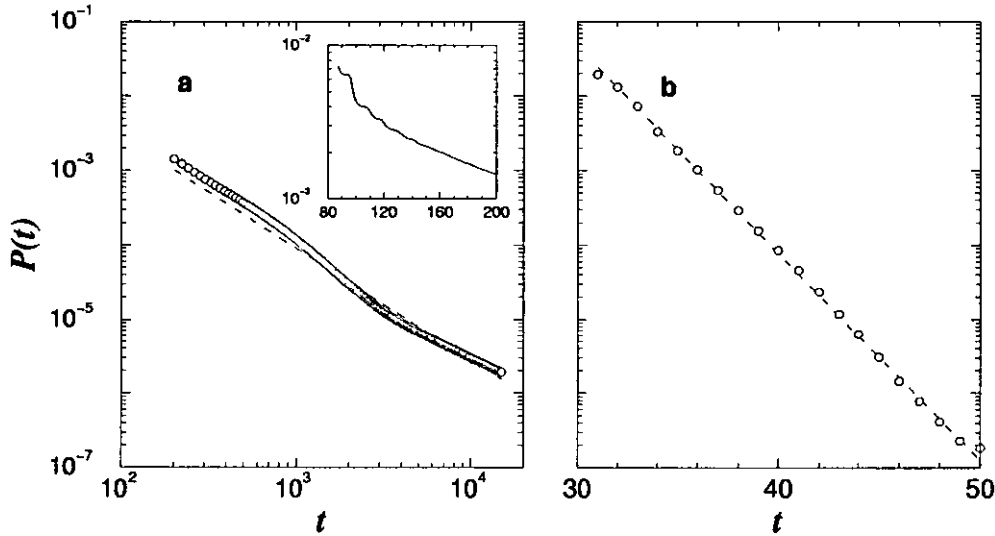


Figura 4.5: Probabilidad de permanencia $P(t)$ para el modelo de la ec. 2.1 para a) $A = 1.0$ y b) $A = 6.50$. En a) la línea segmentada es un ajuste de ley de potencias para $P(t)$ calculado a tiempos largos $t > 200$. En el acercamiento se muestra $P(t)$ a tiempos cortos. En b) la línea segmentada es un ajuste exponencial.

En sistemas no hiperbólicos la presencia de islas de estabilidad en el espacio fase cambia radicalmente la dinámica en la región de interacción. Esto se debe a la jerarquía de las estructuras cercanas a la superficie de las islas. Una trayectoria que pase cerca de las islas puede ser atrapada en esta jerarquía por tiempos sustancialmente mayores que en el caso de un sistema hiperbólico, por lo que se suele decir que para la dinámica las islas son “pegajosas” [59]. El decaimiento algebraico tiene consecuencias dramáticas en las propiedades de transporte [83] y sus efectos también pueden ser observados en mecánica cuántica [84].

En la Fig. 4.5 se muestra la distribución $P(t)$ para a) una herradura incompleta ($A = 1$) y b) con una herradura completa ($A = 6.5$). En la Fig. 4.5-a, el decaimiento es algebraico con exponente $\nu = 1.506 \pm 0.007$. El valor de $\nu = 3/2$ es el valor que se encuentra típicamente en sistemas cuyo espacio fase es mixto [58, 59]. Sin embargo, actualmente se discute si el comportamiento asintótico del decaimiento algebraico es universal o no [85].

En la Fig. 4.5-b, el decaimiento es exponencial, en acuerdo con la ec. 4.2. De un ajuste exponencial, se obtuvo un valor para la tasa de decaimiento de $\gamma = 0.641 \pm 0.005$.

Finalmente, en el acercamiento de la Fig. 4.5-a, se muestra un acercamiento de $P(t)$ a tiempos cortos. En ella se puede observar que el decaimiento algebraico muestra oscilaciones cuyos máximos ocurren a intervalos de tiempo aproximadamente constantes. Esta es la primera evidencia de la aparición de ecos en la dispersión clásica. En el siguiente Capítulo 5, se estudiarán en detalle varias cantidades clásicas que permiten la observación de estos ecos en la región asintótica.

4.2 Comportamiento Anómalo

En esta Sección se discute cierto comportamiento anómalo que presenta el potencial de la ec. 2.2. Dicha anomalía está relacionada con el comportamiento de las variedades invariantes de la herradura en la vecindad de la intersección primaria (véase la Sección 1.2).

La intersección primaria (vértice C en la Fig. 1.7), corresponde a la primera intersección entre las variedades estable e inestable de la herradura. Junto con ésta las intersecciones secundarias y el punto fijo definen los vértices del rectángulo fundamental.

En una herradura completa, la orientación que guardan las variedades al encontrarse en la intersección primaria es viniendo de afuera hacia adentro respecto al rectángulo fundamental. Para una herradura incompleta típicamente se encuentra que la orientación de sus variedades en la intersección primaria coincide con el caso completo para cualquier valor del desarrollo α .

Sin embargo, para el potencial de la ec. 2.2 la orientación de las variedades en la intersección primaria oscila continuamente como función A , entre la situación normal (de afuera hacia adentro) y una situación anormal (de adentro hacia afuera). Este comportamiento se puede observar en la Fig. 4.6, en donde se muestra el ángulo Φ entre las variedades estable e inestable de la herradura en la intersección primaria como función del parámetro A .

La recta en rojo ($\Phi = \pi$) corresponde a una situación de tangencia entre las variedades de la herradura. Alrededor de ésta, la orientación de las variedades oscila entre la situación normal y la anormal hasta $A \approx 2.4$ en donde la última tangencia ocurre. Para $A > 2.4$, la orientación de las variedades se

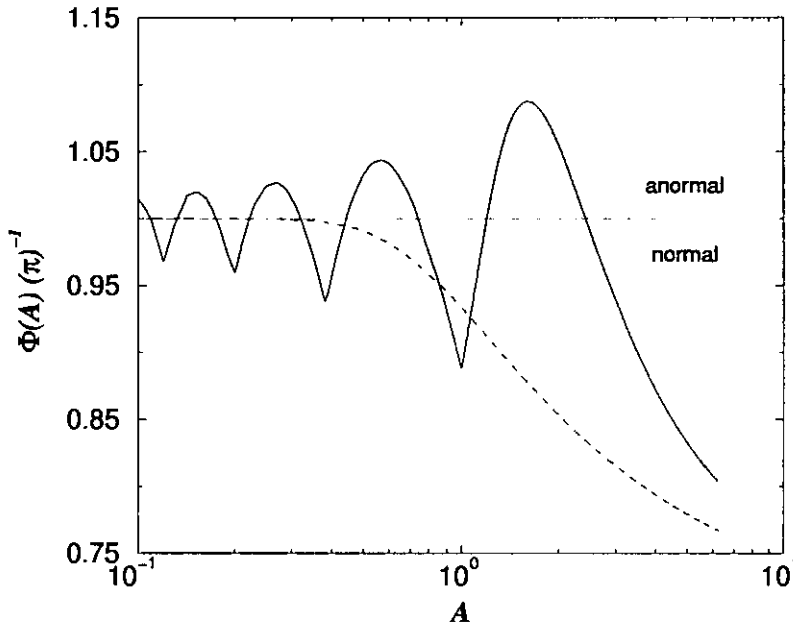


Figura 4.6: Ángulo entre las variedades estable e inestable de la herradura en la intersección primaria como función del parámetro A (línea azul). La recta roja punteada, corresponde al ángulo $\Phi = \pi$ cuando las variedades se intersectan tangencialmente. Para $\Phi > \pi$ la orientación de las variedades es anormal y normal en el caso contrario. Por razones de comparación la línea azul segmentada corresponde a $\Phi(A)$ para el potencial de la ec. 2.4 el cual muestra el comportamiento típico.

mantiene normal. Como consecuencia de esto, la relación entre el parámetro formal α y el parámetro físico A no es monótona.

El desarrollo de la herradura en términos del parámetro formal, descrito en la Sección 1.3.1, se define convencionalmente para la orientación normal. Cuando la orientación de las variedades en la intersección primaria es anormal es necesario redefinir la intersección primaria y con ella toda la numeración de los tentáculos de la herradura. Para ello se toma como intersección primaria alguna de las dos intersecciones secundarias (vértices B ó D en la Fig. 1.7). El rectángulo fundamental se redefine a partir de la nueva intersección primaria y la numeración de todos los tentáculos subsecuentes se recorre.

Una consecuencia del comportamiento anómalo de este potencial es que

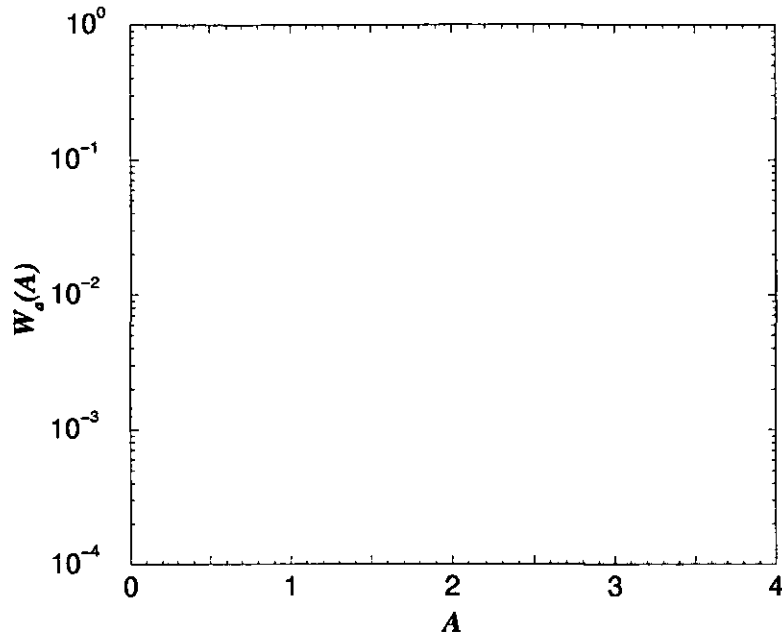


Figura 4.7: Longitud del intervalo de momentos W_a que ocupan las variedades invariantes de la herradura en la región asintótica (en $q = 100$), como función del parámetro A .

el grado de caoticidad⁴ del sistema oscila con el valor del parámetro A . Esta situación ha sido raramente observada en otro tipo de sistemas [86].

Para efectos de comparación, en la Fig. 4.6, la línea azul segmentada fue calculada para el potencial de la eq. 2.4 el cual muestra el comportamiento típicamente encontrado. La razón por la cual en esta Tesis se prefirió usar el potencial 2.2 a pesar de su comportamiento anómalo es debido a su sencillez y al hecho de que, a diferencia del potencial 2.4, la convergencia de la solución de la dinámica cuántica es satisfactoria. La única es, como hemos visto, en que el desarrollo de la herradura como función del parámetro A no es monótono. Sin embargo, nuestros resultados dependen del valor del parámetro formal α en términos del cual el desarrollo de la herradura es, por definición, monótono. Así, las consecuencias de tal comportamiento no

⁴El grado de caoticidad se refiere al valor del área ocupada en el espacio fase por las islas de estabilidad.

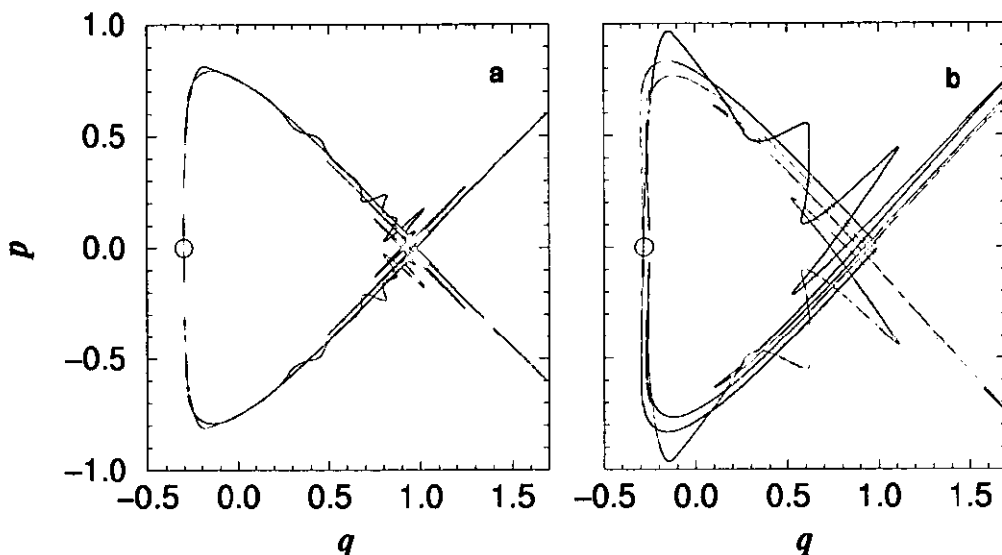


Figura 4.8: Comportamiento anómalo de la herradura para el potencial 2.2, para: a) $A = 2.4$ y b) $A = 2.6$. El círculo indica la posición de la intersección primaria.

afectan nuestras conclusiones.

En la siguiente Sección veremos que debido a este comportamiento anómalo, la dependencia del período orbital en la capa de dispersión $\bar{\tau}_d$ respecto del parámetro A no es monótona. Para los valores de A para los cuales las variedades de la herradura se intersectan tangencialmente en C , $\bar{\tau}_d$ presenta un máximo. Este efecto puede ser explicado en términos de la estructura local de las variedades de la herradura en la vecindad del punto fijo hiperbólico.

En la Fig. 4.7 se muestra la longitud del intervalo de valores del momento que ocupan las variedades invariantes de la herradura en la región asintótica W_a , como función de A . Este corresponde al intervalo de momentos en el cual se encuentran todas las singularidades en la función de dispersión, Fig. 4.3.

Para los valores de A en los cuales las variedades de la herradura se intersectan tangencialmente, W_a decrece, por lo que las variedades se contraen. Como consecuencia de ello, en la capa de dispersión, las trayectorias se acercan más al punto fijo hiperbólico. Esto se puede observar en la Fig. 4.8 en la cual, se muestra la herradura para a) $A = 2.4$ correspondiente a la última

tangencia de sus variedades en la intersección primaria y para b) $A = 2.6$ en donde la orientación de las variedades es normal. En esta figura es evidente la contracción del ancho de las variedades de la herradura. Esta contracción también ocurre adentro del rectángulo fundamental, dando por resultado que en promedio las trayectorias que rotan en la capa de dispersión se acerquen mucho más al punto hiperbólico. Como la velocidad de las trayectorias cerca del punto decrece, el período orbital aumenta, dando como resultado un máximo de $\bar{\tau}_d$ para los valores de A en donde ocurren las tangencias.

4.3 Período Orbital

En la Capítulo 3, hemos discutido la rotación de las trayectorias de dispersión alrededor de la isla central. Al tiempo promedio que le toma a una trayectoria típica para completar una rotación alrededor de la isla lo hemos llamado período orbital promedio $\bar{\tau}_d$. Para las trayectorias clásicas de dispersión este es el período orbital característico de la capa de dispersión.

En la Fig. 4.9 se muestra $\bar{\tau}_d$ como función del parámetro A (línea roja). $\bar{\tau}_d$ se obtuvo promediando el período orbital de una nube de trayectorias clásicas con condiciones iniciales elegidas sobre la variedad estable de la herradura en la región asintótica.

Como hemos discutido en la Sección 4.2, el valor del período orbital es sensible al comportamiento anómalo que presenta nuestro modelo. Así, para los valores de A en los que las variedades de la herradura se cruzan tangencialmente en la intersección primaria el período orbital presenta un máximo. Sin embargo, esto es resultado de la no monotoneidad de la relación entre el parámetro formal y el parámetro físico del sistema.

Supongamos por un momento que la ec. 3.4 es correcta. De esta ecuación se obtiene el valor del período orbital de la capa de dispersión en función del parámetro de desarrollo, $\bar{\tau}_d(\alpha)$. Entonces podemos utilizar el resultado para $\bar{\tau}_d(A)$ de la Fig. 4.9 para obtener el parámetro de desarrollo en función del parámetro físico, $\alpha(A)$.

En la Fig. 4.10 se muestra en verde α como función de A . Observamos que en efecto $\alpha(A)$ no es una función monótona. Sus mínimos locales corresponden a los máximos observados en $\bar{\tau}_d(A)$ de la Fig. 4.9. En la Fig. 4.10, la recta roja punteada corresponde a un desarrollo de $\alpha = 1/8$ de cuya intersección con la curva para $\alpha(A)$ obtenemos un valor para el parámetro físico de $A = 2.74$. Por otro lado, en el acercamiento de la Fig. 4.10 se muestra

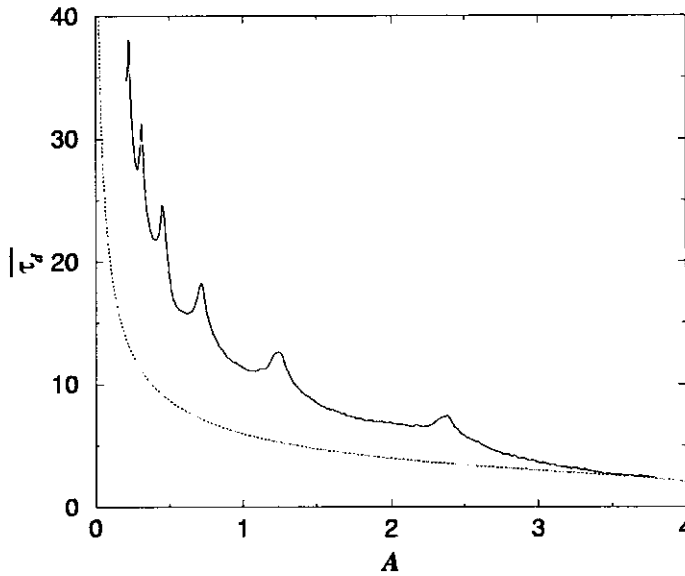


Figura 4.9: Período orbital promedio en la capa de dispersión $\overline{\tau_d}$ como función del parámetro A calculado a partir de trayectorias de dispersión con condiciones iniciales elegidas sobre la variedad estable de la herradura en la región asintótica. La línea azul segmentada corresponde al período orbital del centro de la isla, ec. 4.4 (véase la discusión en el texto).

la herradura para el potencial de la ec. 2.2 para $A = 2.77$ que corresponde al inicio del desarrollo de $\alpha = 1/8$. El acuerdo entre ambos valores del parámetro físico es una primera evidencia de la validez de la ec. 3.4. En el siguiente Capítulo mostraremos con más detalle la validez de dicha ecuación para la dispersión en mecánica clásica.

Como hemos mencionado en la Sección 3.3 el período orbital depende de la distancia al centro de la isla de la región en la que se mide. En el caso del problema cuántico, la el paquete de ondas que incide sobre el potencial puede tunear hacia regiones internas de la isla, por lo que su período orbital dependerá de la región que la probabilidad ocupe en su rotación. Aún así, el período orbital tiene una cota inferior dada por el período orbital del centro de la isla τ_i el cual, está determinado por los eigenvalores del punto fijo estable

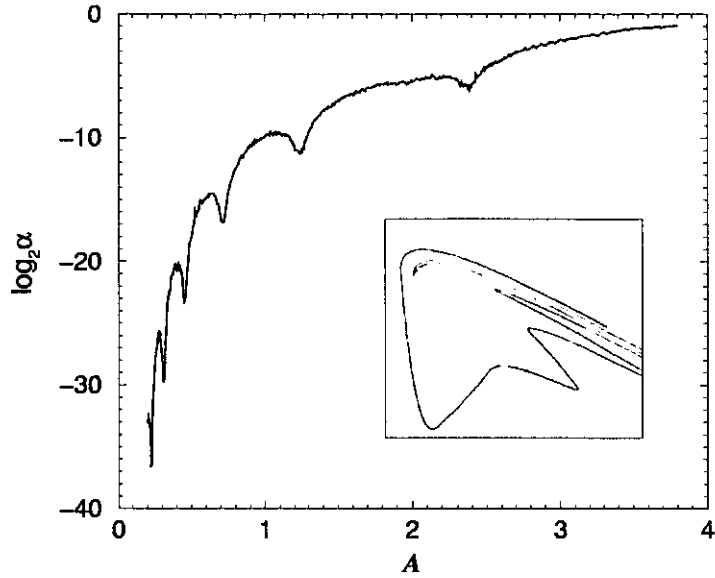


Figura 4.10: Logaritmo del parámetro de desarrollo $\log_2 \alpha$ como función del parámetro físico A , obtenido a partir de la ec. 3.4 y de los datos mostrados en la Fig. 4.9. La línea roja corresponde al desarrollo $\alpha = 1/8$ de cuya intersección con $\alpha(A)$ se obtiene el valor para $A = 2.74$. En el acercamiento se muestra la herradura para $A = 2.77$ que corresponde al inicio del desarrollo $\alpha = 1/8$.

como se discute en el Apéndice C, obteniéndose

$$\tau_i = \frac{1}{\cos^{-1}(1 - A/2)} \quad (4.4)$$

En la Fig. 4.9 la línea azul corresponde a $\tau_i(A)$ el cual se muestra como referencia.

4.4 Dispersión Cuántica

4.4.1 Dispersión de Paquetes de Onda

El proceso de la dispersión en mecánica cuántica es analizado en términos de la dinámica de paquetes de onda Gaussianos de mínima incertidumbre,

ec. 2.15. Para ello, preparamos un paquete de onda en la región asintótica con condiciones iniciales $(q_i, p_i; \sigma)$ y fijamos los parámetros del sistema A y \hbar . La evolución del paquete de ondas se resuelve con el operador de evolución, ec. 2.11.

Como se mencionó en la Sección 2.3, la aplicación del operador de evolución involucra el uso de transformadas de Fourier, lo cual implica, en la solución numérica, una discretización tanto del espacio de la posición como del espacio de momento. El número de puntos n que se usan en esta discretización depende de cuestiones técnicas como la memoria disponible y el tiempo de cálculo.

El número de puntos n y la longitud del espacio de posición $L_q = q_{max} - q_{min}$, definen la resolución $\Delta q = L_q/n$ con la cual el paquete de ondas es construido. La longitud del espacio de momento es determinada por L_q como $L_p = n\pi\hbar/2L_q$ [57], dando como resultado una resolución $\Delta_p = \pi\hbar/2n\Delta q$ para el espacio de momentos. Así, un aumento del espacio de posición implica una disminución del espacio de momentos, esto es, acota los valores del momento que pueden ser medidos. Es claro que una mejor resolución en la posición implica una resolución peor para el momento. El compromiso entre ambas resoluciones y longitudes de los espacios q y p , dependerá del tipo de medición que se necesite realizar en la simulación.

El uso de transformadas de Fourier discretas en la solución numérica también implica condiciones periódicas en la frontera de los espacios q y p , por lo que para simular la dispersión de paquetes de onda, es necesario introducir un potencial de absorción. Para tal efecto hemos utilizado como potencial de absorción una pared cuadrática compleja dada por

$$V_{ab}(q) = -ib(q - q_0)^2 \quad , \quad q > q_0 \quad (4.5)$$

donde q_0 es la posición de la pared la cual se elige convenientemente en la región asintótica y b es un parámetro de ajuste que depende de la velocidad de los paquetes a ser absorbidos. Para las simulaciones realizadas, el valor $b = 0.001$ dio buenos resultados en el sentido en que la reflexión originada en la pared de absorción fue despreciable para los valores de momento utilizados. De esta forma, el potencial utilizado en la solución numérica de la dispersión cuántica es la suma del potencial de dispersión más el potencial de absorción multiplicados por tren de funciones delta en el tiempo como en la ec. 2.1.

En la Fig. 4.11, se muestra una secuencia de gráficas que muestra la evolución de la amplitud de probabilidad en la posición de un paquete de

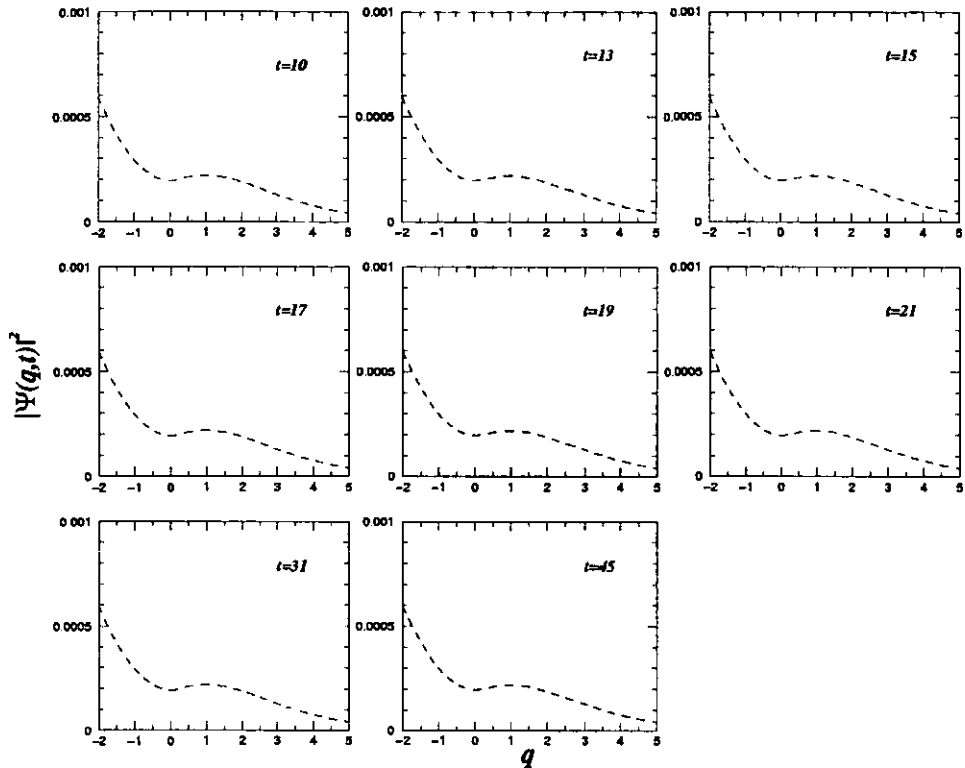


Figura 4.11: Evolución de un paquete de ondas típico a partir del mapeo cuántico, ec. 2.14.

ondas con condiciones iniciales $(q_i = 20, p_i = -1.485)$ con $A = 1$, $\hbar = 0.01$ y $\sigma = 1$. La línea negra representa el perfil del potencial rescalado adecuadamente y se muestra como referencia. Al tiempo $t = 10$ el paquete de ondas llega a la región de interacción. En $t = 13$, la velocidad del paquete ha disminuido, frenado por la barrera de potencial. Para estas condiciones iniciales, el paquete logra entrar a la región del pozo del potencial. Para $t = 19$ el paquete ha rebotado en la pared cuadrática infinita y al tiempo $t = 21$, la mayor parte del paquete sale del pozo hacia la región asintótica. A tiempos posteriores podemos observar que parte de la probabilidad del paquete inicial permanece en el pozo del cual decae lentamente.

En analogía al proceso de dispersión clásica, la probabilidad que permanece en el pozo juega el mismo papel que las trayectorias clásicas que

permanecen tiempos largos en la capa de dispersión rotando alrededor de la isla. A diferencia de las trayectorias clásicas que decaen algebraicamente en el tiempo, en la siguiente Sección veremos que la probabilidad cuántica que es atrapada en el pozo decae exponencialmente. Más interesante será la observación de que este decaimiento exponencial envuelve a una modulación característica de un decaimiento en ecos.

4.4.2 Decaimiento Cuántico

Con el fin de analizar el decaimiento de la probabilidad que permanece atrapada en el pozo del potencial, calculamos la amplitud de probabilidad en la región del pozo como función del tiempo como

$$I_w(t) = \int_{-\infty}^1 |\Psi(q, t)|^2 dq. \quad (4.6)$$

En la Fig. 4.12 se muestra $I_w(t)$ para un paquete de ondas con condiciones iniciales ($q_i = 100, p_i = -1.48$) para $A = 0.967, \hbar = 0.01$ y $\sigma = 2.5$. Este es el análogo a la probabilidad de permanencia clásica $P(t)$ discutida en la Sección 4.1.4. A diferencia de la dispersión clásica en el que para este valor de A , el decaimiento de $P(t)$ es algebraico, el decaimiento de la probabilidad atrapada en el pozo es exponencial.

El decaimiento exponencial es típico de los procesos que involucran tunelaje. Sin embargo, como veremos en el Capítulo 6, para ciertas energías de incidencia, la probabilidad atrapada en el pozo vive enteramente sobre la capa de dispersión y aun así, el decaimiento es exponencial. La probabilidad atrapada decae directamente de la capa de dispersión en donde se encuentra lejos de las superficies de KAM. El decaimiento exponencial en estos casos se debe a la resolución limitada que impone el valor de la constante de Planck. La probabilidad cuántica solo puede resolver los detalles del espacio fase clásico con área mayor a \hbar^2 . Típicamente para este modelo, el área de la estructura fina que acompaña a las islas de estabilidad embebidas en la capa de dispersión es $\sim 10^{-5}$, menor que el área de la celda de Planck para $\hbar = 0.01$. Estas estructuras son las responsables de fomentar el decaimiento clásico. Así, para este valor de \hbar , la probabilidad cuántica no es capaz de resolver estas estructuras y su decaimiento es exponencial como el observado clásicamente en ausencia de islas estables.

Más interesante es observar en el acercamiento de la Fig. 4.12 que el decaimiento exponencial envuelve un decaimiento oscilatorio con un período

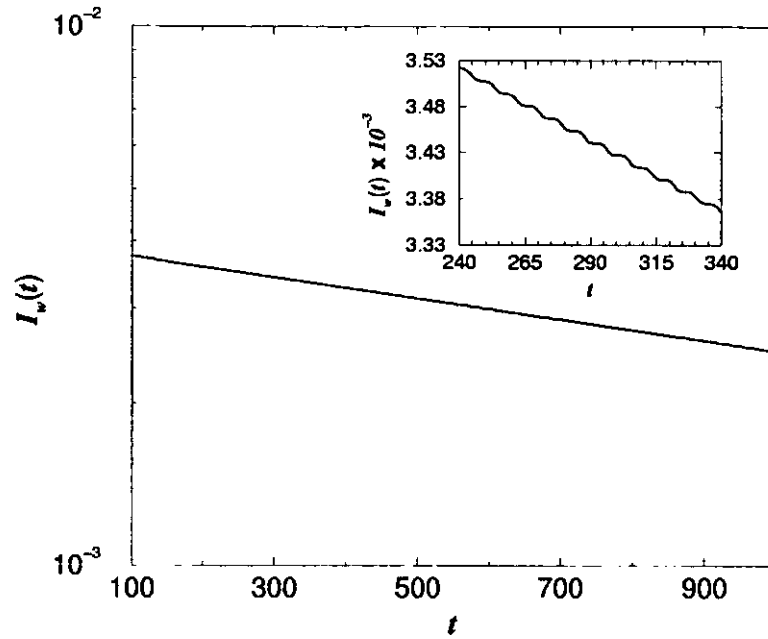


Figura 4.12: Probabilidad de decaimiento $I_w(t)$ como función del tiempo para $A = 0.967$, $\hbar = 0.01$ y $\sigma = 2.5$ y un paquete incidente con $(q_i = 100, p_i = -1.48)$. En el recuadro se muestra un acercamiento en escala lineal de $I_w(t)$.

aproximadamente constante. Esta es una primera evidencia de la observación de ecos en la dispersión cuántica tal y como hemos predicho en el análisis del Capítulo 3. La relación entre el período de los ecos y el período orbital será estudiada en detalle en los siguientes Capítulos.

Capítulo 5

Ecós Clásicos

Los resultados numéricos concernientes al proceso de dispersión en *ecos* ha sido dividido en dos Capítulos. En este Capítulo se estudia la aparición de los ecos en el proceso de dispersión clásica y se proponen algunas cantidades observables a partir de las cuales es posible obtener el período de los ecos en la región asintótica.

5.1 Distribución de Densidad Clásica

La distribución de densidad clásica $\rho_{cl}(q, t)$, corresponde al valor de la densidad de partículas clásicas en la vecindad de la posición q , al tiempo t . Esta cantidad nos permite estudiar la forma en la que los ecos son emitidos de la región de interacción. De igual manera, nos permite obtener el período de los ecos en la región asintótica como se discute en la siguiente Sección.

Para construir $\rho_{cl}(q, t)$ preparamos una distribución de trayectorias clásicas con condiciones iniciales dadas por

$$\begin{aligned} p_i &= P(A) \\ q_i &= q_0 - Q(p_i) \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $P(A)$ es una distribución uniforme en un intervalo de momento $\Delta p = (p_i^{(min)}(A), p_i^{(max)}(A))$ el cual cubre el intervalo de momento ocupado por la variedad estable en la región asintótica alrededor de q_0 . La longitud de este intervalo W_a como función del parámetro A se muestra en la Fig. 4.7. A su vez, $Q(p_i)$ es una distribución uniforme en un intervalo de posición dado por $\Delta q = (q_0 + p_i, q_0)$.

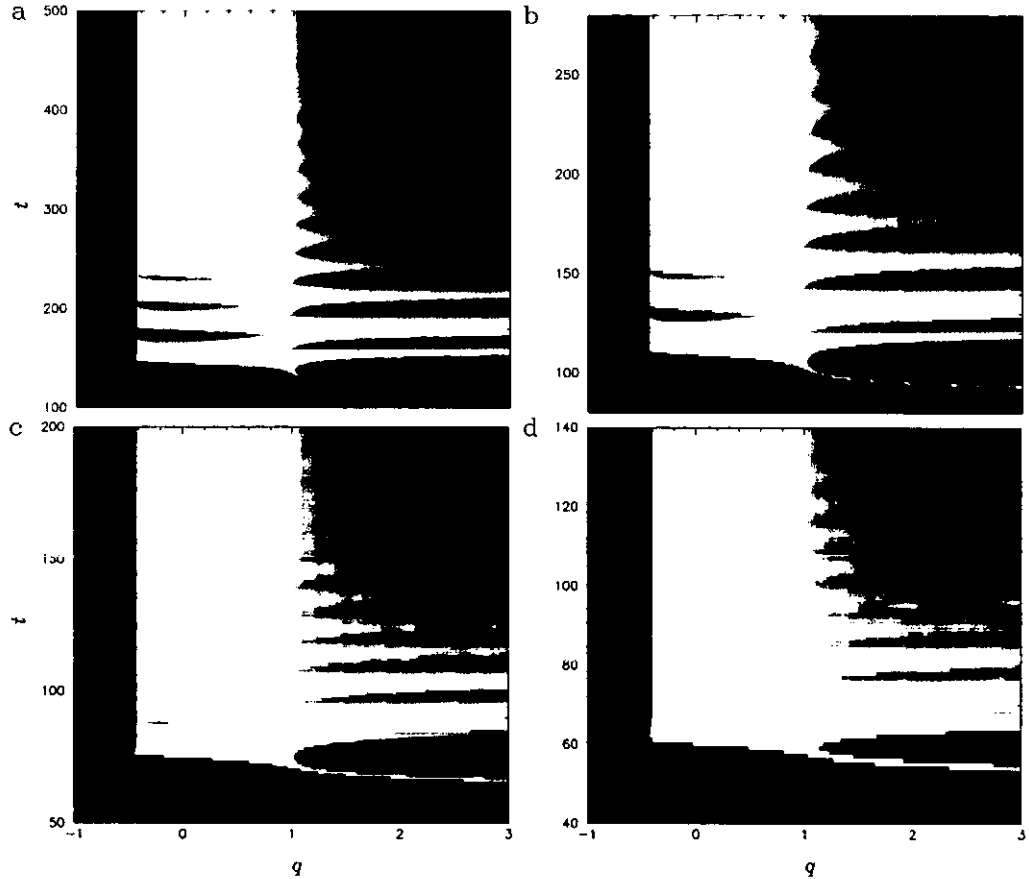


Figura 5.1: Distribución de densidad clásica $\rho_{cl}(q, t)$ para: a) $A = 0.3$, b) $A = 0.5$, c) $A = 1.0$ y d) $A = 1.5$ en una escala logarítmica de colores del rojo al azul, donde el rojo corresponde a una densidad alta.

La distribución de densidad se calcula numéricamente midiendo la fracción de trayectorias que pasan por la posición q al tiempo t .

En la Figs. 5.1 y 5.2 se muestra $\rho_{cl}(q, t)$ en un intervalo $\Delta q = (-1.0, 3.0)$ sobre la región del pozo del potencial, para distintos valores del parámetro A . En ellas, es posible observar el proceso completo de la dispersión. La dispersión inicia con la nube de trayectorias clásicas acercándose a la región de interacción. Las trayectorias con energías menores a $\approx 3A/e$ son rebotadas por la barrera de potencial de vuelta a la región asintótica. El resto de las trayectorias entran a la región del pozo y dan una vuelta alrededor de la isla

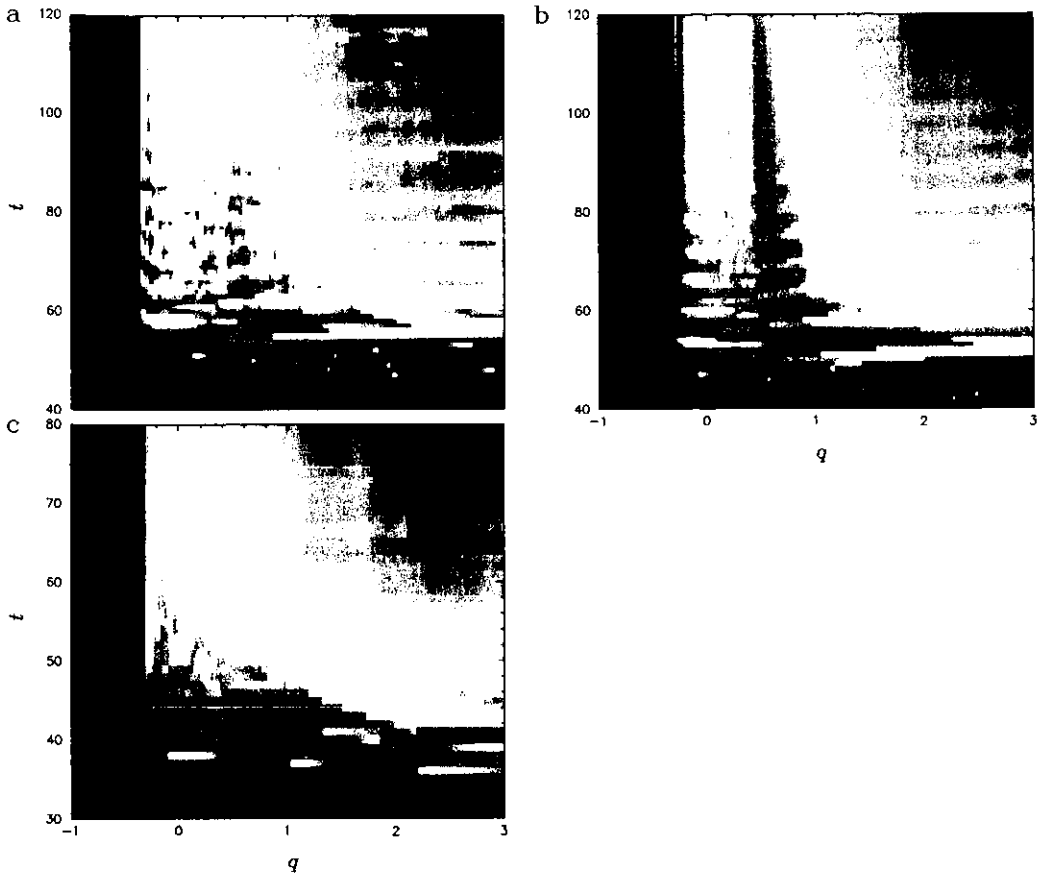


Figura 5.2: Distribución de densidad clásica $\rho_{cl}(q, t)$ para: a) $A = 2.0$, b) $A = 2.5$ y c) $A = 3.0$ en una escala logarítmica de colores del rojo al azul, donde el rojo corresponde a una densidad alta.

sobre la capa de dispersión. Cuando las trayectorias completan una vuelta, algunas de ellas salen de la región del pozo mientras que el resto continúa en la capa de dispersión y dan una vuelta más. Este proceso continúa en el tiempo y el flujo de partículas dispersadas del pozo después de cada vuelta alrededor de la isla corresponden al fenómeno que hemos llamado ecos de dispersión. Los ecos son claramente visibles, excepto para $A = 3$ en donde la resolución es pobre debido al tamaño tan pequeño de la isla central.

Como se discutió en el Capítulo 3 el período de tiempo entre ecos sucesivos corresponde al período orbital característico de la capa de dispersión $\bar{\tau}_d$. Esta observación es importante pues nos da la posibilidad de obtener $\bar{\tau}_d$ a partir

de la observación en la región asintótica del período de los ecos.

5.2 Intensidad Clásica de Dispersión

Nuestro objetivo es obtener el período orbital promedio $\overline{\tau_d}$ a partir de la observación asintótica de los ecos. Para ello, una posibilidad es medir la intensidad de las trayectorias clásicas que cruzan alguna zona en la región asintótica como función del tiempo y que llamaremos $I_{cl}(t)$. En términos de la distribución de densidad $\rho_{cl}(q, t)$, podemos escribir $I_{cl}(t)$ como

$$I_{cl}(t) = \int_{q^* - \Delta/2}^{q^* + \Delta/2} \rho_{cl}(q, t) dq . \quad (5.2)$$

donde q^* es alguna posición en la región asintótica alrededor de la cual se mide el flujo de dispersión. Dado que numéricamente la intensidad del flujo de trayectorias se mide estroboscópicamente, es importante que la longitud del intervalo Δ alrededor de q^* sea igual a la distancia que la trayectoria recorre entre patada y patada. Como q^* se encuentra en la región asintótica y que el período del sistema es 1, entonces Δ es igual al momento de la trayectoria.

En las Figs. 5.3 y 5.4, se muestran los resultados obtenidos para $I_{cl}(t)$ para distintos valores del parámetro A . Para los valores de A considerados, el retrato fase es mixto, por lo que la intensidad del flujo de dispersión decae algebraicamente como en la ec. 4.3. El paso de los ecos por la vecindad de q^* se ve reflejado en un aumento en el flujo observado, por lo que el decaimiento es oscilatorio. Para extraer el período de los ecos¹ τ_c en las Figs. 5.3 y 5.4 hemos removido de $I_{cl}(t)$ la envolvente algebraica. Así, el cálculo del período de tiempo que transcurre entre los ecos es más preciso. También, para algunos valores de A , hemos interpolado los puntos de la oscilación con un spline cúbico [57].

En la Fig. 5.4 se observa que para valores del parámetro $A > 2$, es difícil extraer el período de los ecos a partir de la intensidad $I_{cl}(t)$. Como hemos visto en la Sección 4.3, el período orbital para el modelo de la ec. 2.2 decrece con el valor del parámetro A y para valores de $A > 2$ la separación entre ecos es menor a 7 en unidades de tiempo. Debido a que sobre la capa de

¹Llamamos τ_c al período de los ecos de dispersión, mas, como mostraremos en la siguiente Sección τ_c coincide con el período orbital en la capa de dispersión $\overline{\tau_d}$.

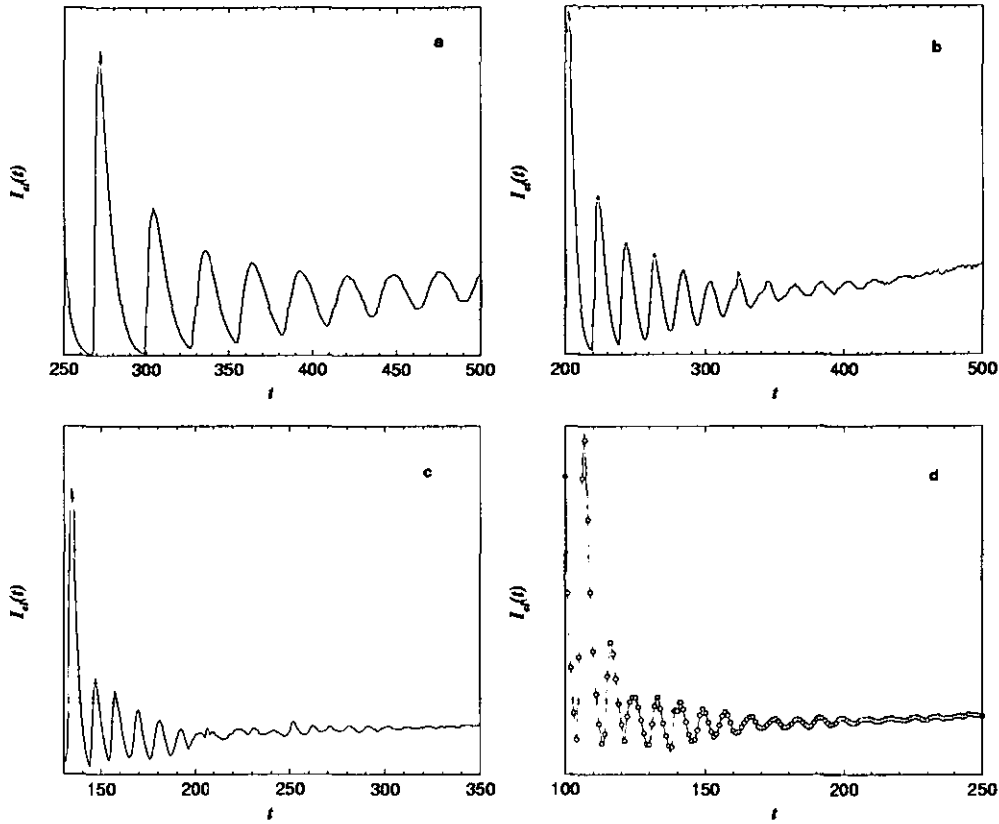


Figura 5.3: Intensidad clásica en la región asintótica $I_d(t)$ como función del tiempo para: a) $A = 0.3$, b) $A = 0.5$, c) $A = 1.0$ y d) $A = 1.5$. El decaimiento algebraico de $I_d(t)$ se ha removido.

dispersión la dinámica clásica es difusiva [81], los ecos de dispersión adquieren un ancho. Para $A > 2$ el ancho de los ecos resulta ser del mismo orden que la separación entre ellos por lo que los ecos se superponen. En estos casos, es posible mejorar la calidad de las oscilaciones removiendo para cada trayectoria el tiempo de vuelo libre como en la ec. 3.1.

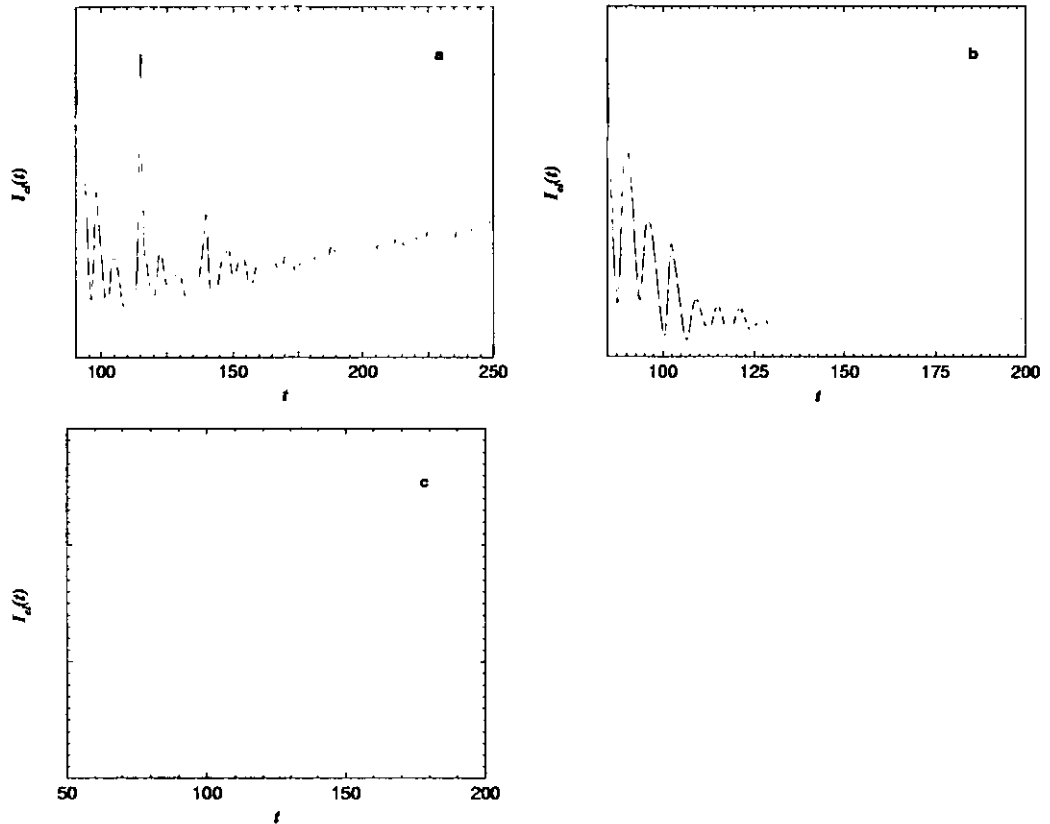


Figura 5.4: Igual que la Fig. 5.3 para a) $A = 2.0$, b) $A = 2.5$ y c) $A = 3.0$.

5.3 Período de los Ecos Clásicos

A partir de los resultados obtenidos en la Sección anterior, es posible obtener el período de los ecos observados en la intensidad del flujo de dispersión.

En la Fig. 5.5 se muestra con símbolos en verde los valores obtenidos para τ_c a partir $I_d(t)$ para los distintos valores del parámetro A . Éstos se comparan con el período orbital promedio sobre la capa de dispersión, Fig. 4.9. El acuerdo entre ambos valores confirma la igualdad de $\overline{\tau_d} = \tau_c$.

Hasta ahora hemos descrito el procedimiento para obtener, a partir de mediciones asintóticas, el período orbital promedio característico de la capa de dispersión $\overline{\tau_d}$. En el Capítulo 3 se ha discutido la posibilidad de obtener el desarrollo de la herradura a partir de $\overline{\tau_d}$. Para el potencial eq. 2.2, la herradura es binaria por lo que la relación entre $\overline{\tau_d}$ y el parámetro formal de

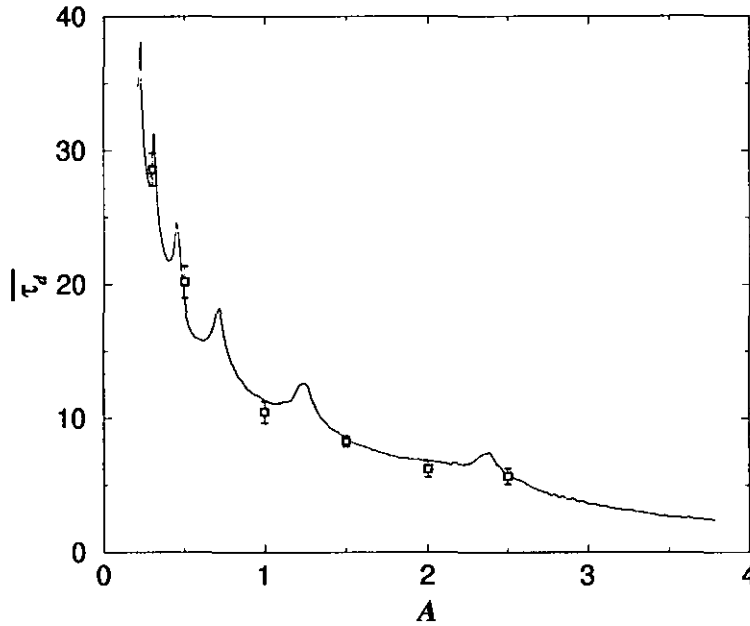


Figura 5.5: Comparación entre el período orbital $\bar{\tau}_d$ (curva roja) mostrado en la Fig. 4.9 y los valores obtenidos para el período de los ecos clásicos τ_c (símbolos en verde) para distintos valores de A .

desarrollo α esta dado por la ec. 3.4.

Para mostrar la validez de la ec. 3.4 en la Tabla 5.1 se comparan los valores obtenidos para el período orbital $\bar{\tau}_d$ a partir de los ecos de dispersión con los valores obtenidos a partir de la ec. 3.4 $\bar{\tau}_d(\alpha)$. Para obtener $\bar{\tau}_d(\alpha)$ fue necesario calcular la herradura para los distintos valores del parámetro A y medir el parámetro de desarrollo α como se explicó en la Sección 1.3.1. En todos los casos sólo fue posible obtener los valores de $1/2^n$ entre los cuales se encuentra el desarrollo de la herradura. Esto da lugar a la incertidumbre de 0.5 que se reporta en la Tabla 5.1 para los valores de $\bar{\tau}_d(\alpha)$.

El acuerdo entre los valores encontrados confirma la validez, dentro de la precisión numérica, de la ec. 3.4. Con ello también se confirma la validez del procedimiento descrito en la Sección 3.2 como una posible solución al problema inverso de la dispersión en mecánica clásica.

Cabe recordar que este método funciona para sistemas con una herradura poco desarrollada. Para nuestro modelo hemos encontrado, por ejemplo, que

A	$-\log_2 \alpha$	$\bar{\tau}_d(\alpha)$	$\bar{\tau}_d$ (ecos)
0.3	(26, 27)	28 ± 0.5	28.6 ± 1.0
0.5	(17, 18)	19 ± 0.5	20.2 ± 1.2
1.0	(9, 10)	11 ± 0.5	10.5 ± 0.8
1.5	(7, 8)	9 ± 0.5	8.3 ± 0.6
2.0	(5, 6)	7 ± 0.5	6.2 ± 0.6
2.5	(3, 4)	5 ± 0.5	5.7 ± 0.6
3.0	(2, 3)	4 ± 0.5	—

Tabla 5.1: Comparación entre los valores del período orbital promedio de la capa de dispersión obtenidos a partir de la ec. 3.4, $\bar{\tau}_d(\alpha)$ y los obtenidos a partir del período de los ecos para distintos valores del parámetro A . Como referencia, también se muestra el valor del logaritmo del parámetro de desarrollo $-\log_2 \alpha$ obtenido a partir de la herradura.

para $A > 2$, los ecos en la región asintótica se superponen, por lo que no es posible obtener su período.

5.4 Distribución de Tiempos de Retardo

En la Sección anterior hemos calculado el período de los ecos a partir de la intensidad del flujo de dispersión. Sin embargo, existen otras cantidades sensibles a los ecos, cuya medición podría ser mas conveniente en una realización experimental. Una de estas cantidades es la distribución de tiempos de retardo $P(t_d)$.

En la Fig 5.6 se muestra $P(t_d)$ para distintos valores del parámetro A . La separación entre los máximos en la distribución $P(t_d)$ corresponden aproximadamente, a múltiplos del período orbital.

Los valores de τ_c , obtenidos para cada caso son: a) 19.6 ± 1.3 para $A = 0.5$, b) 10.8 ± 1.2 para $A = 1$ y c) 8.4 ± 0.5 para $A = 1.5$, en acuerdo con los valores obtenidos de I_d .

De esta manera, en una realización experimental se puede disponer de varias cantidades medibles, a partir de las cuales se puede obtener el período de los ecos de dispersión clásicos.

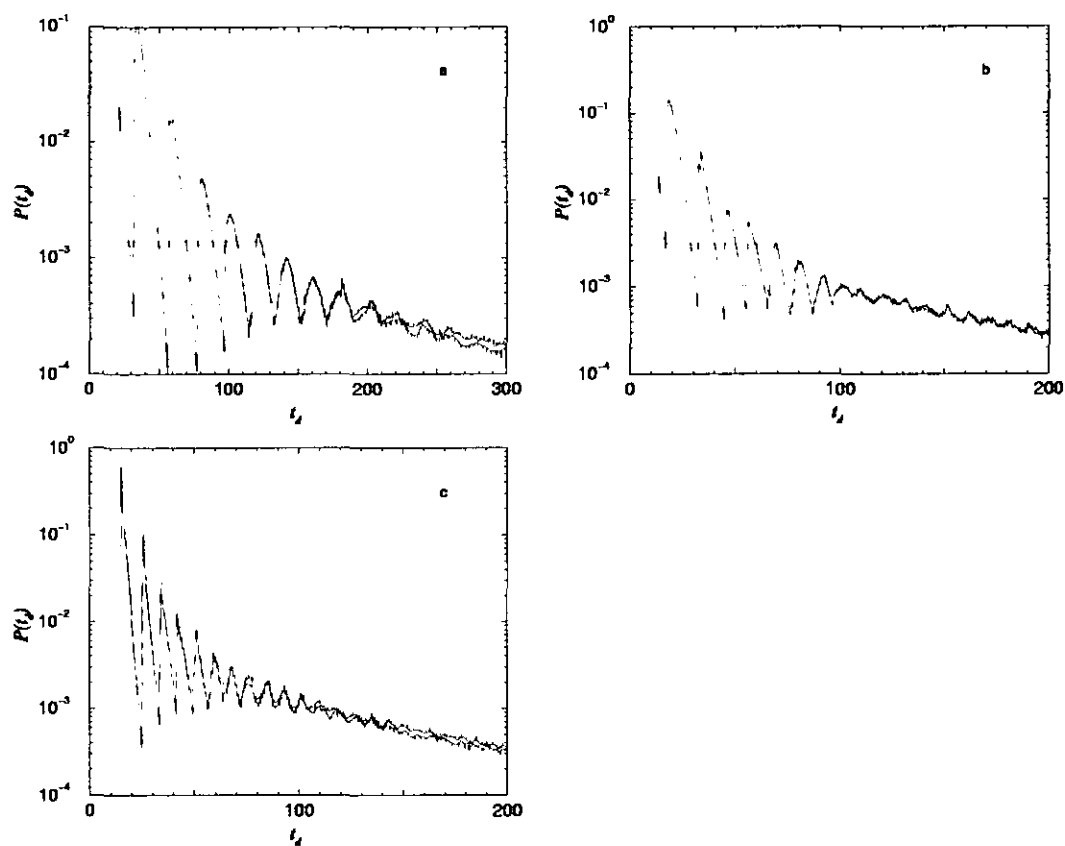


Figura 5.6: Distribución del tiempo de retardo $P(t_d)$ para a) $A = 0.5$, b) $A = 1.0$ y c) $A = 1.5$. Las condiciones iniciales de las trayectorias fueron elegidas sobre la variedad estable en la región asintótica.

Capítulo 6

Ecos Cuánticos

En este Capítulo se explora el proceso de dispersión del problema cuántico. Nuestro objetivo es mostrar que para valores de \hbar suficientemente pequeños, los resultados obtenidos en el Capítulo anterior para los ecos clásicos también son válidos para el problema cuántico. Para ello, es necesario encontrar observables cuánticas, que sean no sólo medibles en la región asintótica sino también sensibles a la dispersión en ecos. Como veremos, las cantidades observables adecuadas dependerán del tipo de pulsos utilizados en la dispersión. En la Sección 6.2 se analizan los resultados numéricos para la dispersión cuántica de pulsos cortos y en la Sección 6.2 para pulsos largos. Mas aún, como discutiremos en la Sección 6.3, la observación de los ecos en la mecánica cuántica permite estudiar, a partir de observaciones asintóticas, la dinámica en el interior de la isla de estabilidad, información que es inaccesible en el experimento clásico.

6.1 Pulsos Cortos

En esta Sección estudiaremos el proceso de dispersión para el problema cuántico mediante paquetes de onda de corta duración¹. La duración típica de los pulsos que se usaron en los cálculos numéricos fue de $\sigma = 2.5$. También se usaron valores menores, sin embargo, en estos casos, la dispersión intrínseca

¹En este Capítulo nos referiremos frecuentemente a la duración del pulso. Diremos que un pulso es corto si su ancho inicial en la base de la posición, el cual es determinado por el valor de σ , es pequeño comparado con la longitud de la capa de dispersión y diremos que el pulso es largo en el caso contrario.

de los paquetes de onda dificulta la observación de los ecos.

6.1.1 Distribución de Husimi

En esta Sección, estudiaremos la evolución en el tiempo de paquetes de onda en el modelo de dispersión de la ec. 2.2. De aquí en adelante nos referiremos al estado cuántico como paquete de ondas o pulso indistintamente.

Para estudiar el proceso de dispersión, se prepararon paquetes de onda en alguna posición q_{in} en la región asintótica con algún momento p_{in} . Generalmente y para comparar con los cálculos clásicos, el momento incidente se elige de tal manera que el paquete de ondas cubra completamente la variedad estable de la herradura clásica en la vecindad de q_{in} .

En el tiempo, el pulso se mueve libremente hacia el pozo del potencial hasta alcanzar la región de interacción en donde los efectos debidos al potencial se hacen apreciables. Entonces, el pulso comienza a ser frenado. Dependiendo del valor del momento de incidencia, el pulso podrá entrar en el pozo del potencial.

Si el pulso entra a la región del pozo del potencial, éste se moverá sobre la capa de dispersión que rodea a la isla central de la misma manera en la que la nube de trayectorias clásicas evoluciona. Después de que el centroide de la probabilidad del paquete de ondas completa una revolución alrededor de la isla, la mayor parte del pulso saldrá de la región de interacción a lo largo de la variedad inestable de la herradura clásica.

Este proceso puede observarse en la Fig. 6.1 en donde se muestra la distribución de Husimi a distintos tiempos para el caso específico de un pulso con condiciones iniciales ($q_{in} = 100, p_{in} = -1.48$), con $A = 0.967, \hbar = 0.01$ y $\sigma = 2.5$. Al tiempo $t = 68$, el pulso alcanza la región de interacción. Más tarde, al tiempo $t = 73$ el pulso entra a la región del pozo del potencial extendiéndose a lo largo de la capa de dispersión. En general, parte del pulso puede rebotar en la barrera de potencial y no entrar a la capa de dispersión. Para el pulso de la Fig. 6.1 éste no es el caso.

Al tiempo $t = 78$ el pulso completa una revolución alrededor de la isla. Para el tiempo $t = 86$, la mayor parte del pulso ha salido de la región del pozo a lo largo de la variedad inestable de la herradura. La pequeña parte del pulso que permanece en el pozo continua rotando y como se puede observar, parte de él ha tuneleado a través de superficies de KAM hacia las regiones internas de la isla, $t = 88$ y $t = 90$. Un acercamiento del retrato fase y de la superficie de KAM mas externa se muestra para el mismo valor del

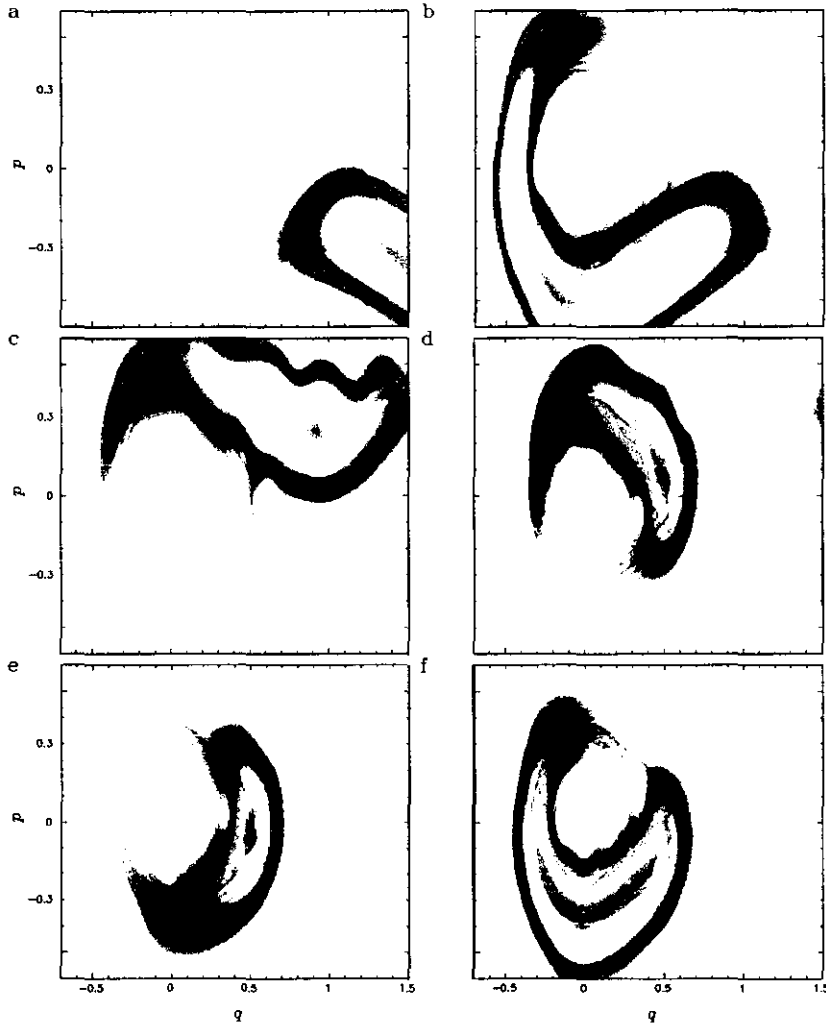


Figura 6.1: Distribución de Husimi para un paquete de ondas con condiciones iniciales ($q_i = 100, p_i = -1.48$) para $A = 0.967, \hbar = 0.01$ y $\sigma = 2.5$ al tiempo: a) $t = 68$, b) $t = 73$, c) $t = 78$, d) $t = 86$, e) $t = 88$ y f) $t = 90$. En la escala de colores del rojo al azul, el rojo indica los valores máximos de la distribución. Por razones de presentación, el rango para la escala de colores varía en cada figura; en particular, la escala en las figuras *d*, *e* y *f* es mucho menor que las del resto. El retrato fase clásico se muestra como referencia en escala de tonos de grises.

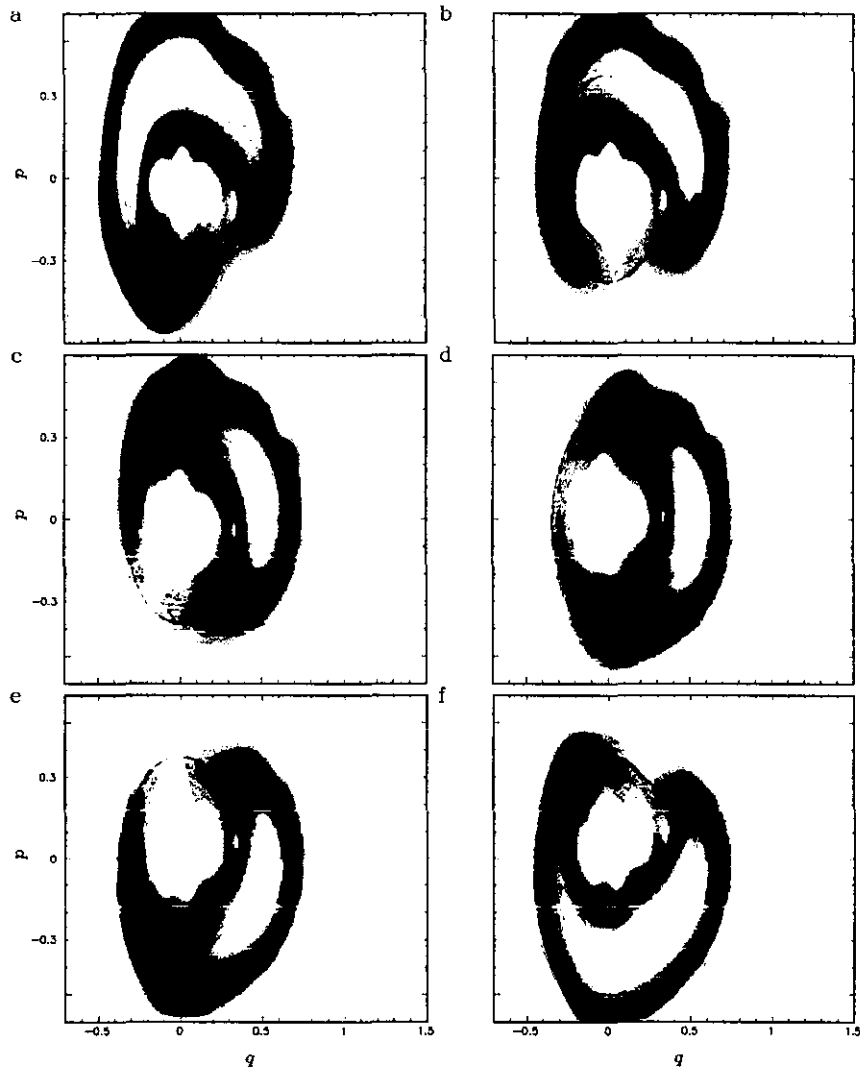


Figura 6.2: Igual que la Fig. 6.1 para los tiempos: a) $t = 93$, b) $t = 94$, c) $t = 95$, d) $t = 96$, e) $t = 97$ y f) $t = 98$.

parámetro A en las Figs. 4.1 y 4.2.

La probabilidad atrapada en el interior del pozo del potencial continua rotando alrededor de la isla. Como se mostró en la Sección 4.4.2, en el transcurso de estas revoluciones la probabilidad en el pozo decae exponencialmente. En la Fig. 6.2 se muestra la distribución de Husimi de la prob-

abilidad atrapada en el pozo a tiempos posteriores. Cada vez que el pulso atrapado en el pozo completa una rotación parte del pulso es dispersado del pozo sobre la barrera de potencial en $q = 1$ hacia la región asintótica.

El proceso de dispersión en la región de interacción es similar al observado en la dispersión clásica. El decaimiento exponencial es oscilatorio debido a que el pulso que permanece en el pozo de potencial emite pulsos a un cierto período de tiempo que claramente corresponde a su período orbital.

Finalmente cabe recordar que para $A = 1$ la superficie de KAM más externa, mostrada en la Fig. 4.2, se rompe en un can-toro clásicamente penetrable. A pesar de que las trayectorias clásicas cambian su período orbital, la probabilidad cuántica rota en exactamente la misma región que para $A = 0.967$. Esto nos indica que para los valores de \hbar utilizados, la difusión se puede despreciar en favor del tunelaje.

6.1.2 Período de los Ecos Cuánticos

En esta Sección se muestra la evolución en el tiempo de la densidad de probabilidad del paquete de ondas en el espacio de la posición $\rho_q(q, t) = |\Psi(q, t)|^2$.

Nuestro objetivo es observar la emisión de los ecos en el proceso de dispersión cuántica de igual manera que en la dispersión clásica para $\rho_{cl}(q, t)$. En base a las observaciones de la Sección anterior, la duración de los pulsos utilizados en la dispersión debe de ser corta pues es necesario que la probabilidad atrapada en el pozo del potencial no esté completamente distribuida alrededor de la isla. Por otra parte, si los pulsos incidentes son angostos en la posición, la resolución para el momento de incidencia es mala. En estas condiciones, el pulso incidente no es capaz de resolver la estructura fina de la variedad estable de la herradura en la región asintótica.

En las Figs. 6.3 y 6.4 se muestra la densidad de probabilidad $\rho_q(q, t)$ como función del tiempo sobre la región del pozo del potencial, para distintos valores del parámetro A . En ellas es posible observar el proceso completo de la dispersión el cual, resulta ser análogo al clásico. A tiempos cortos se distingue la parte del pulso que rebota en la barrera de potencial y aquella que después de una rotación alrededor de la isla rebota en la pared cuadrática del pozo. Esta dispersión directa corresponde al proceso mostrado en la Fig. 6.1. A tiempos posteriores se observa la probabilidad atrapada que oscila en el pozo y emite un eco después de cada oscilación. Los ecos emitidos son claramente visibles excepto para $A = 3$ Fig. 6.4-c. Presumiblemente, para

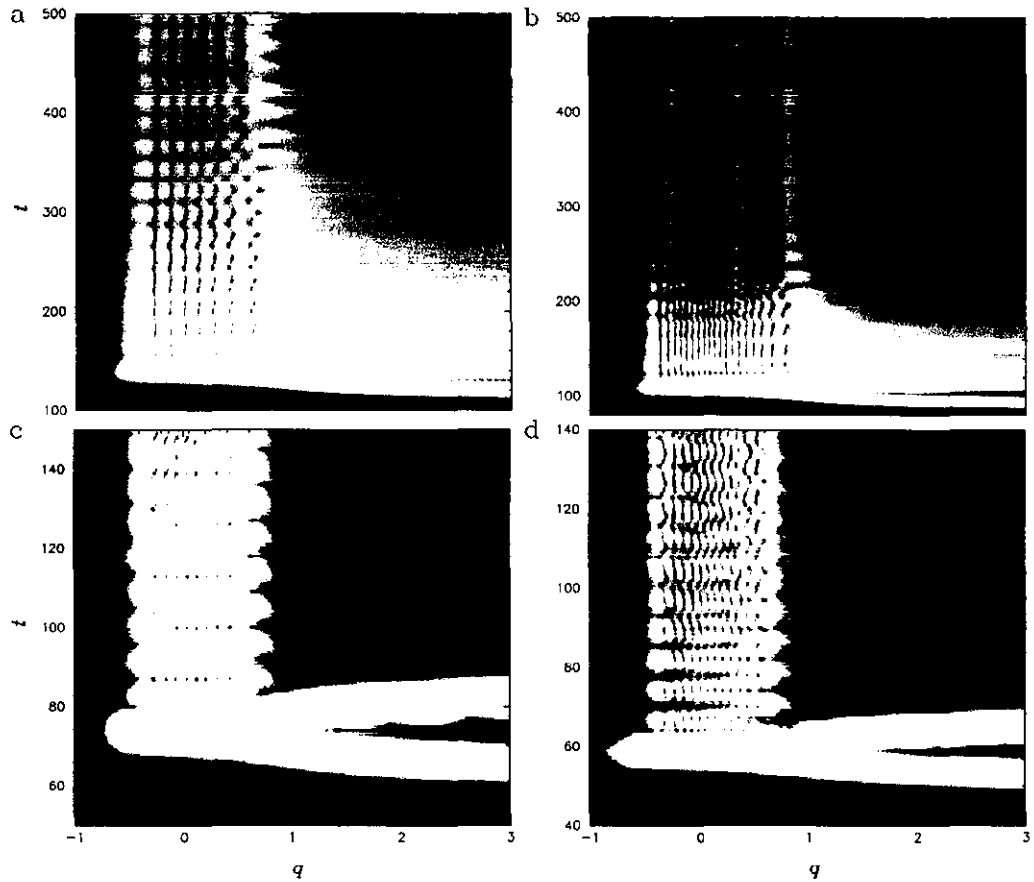


Figura 6.3: Distribución de probabilidad en el espacio de configuración como función del tiempo para $\sigma = 2.5$ y a) $A = 0.3$ y $\hbar = 0.005$, b) $A = 0.5$ y $\hbar = 0.005$, c) $A = 1.0$ y $\hbar = 0.01$ y d) $A = 1.5$ en una escala de color logarítmica. En estas figuras $\hbar = 0.01$.

este caso, la tasa de difusión en la capa de dispersión es comparable a la del tunelaje, por lo que si se incrementa el valor de \hbar los ecos se observan nuevamente como se muestra en la Fig. 6.4-d.

Al igual que en el problema clásico, nuestro objetivo es encontrar una cantidad observable que sea medible en la región asintótica y de la cual sea posible extraer el período de los ecos cuánticos. Para ello calculamos la amplitud de probabilidad atrapada en el pozo como función del tiempo

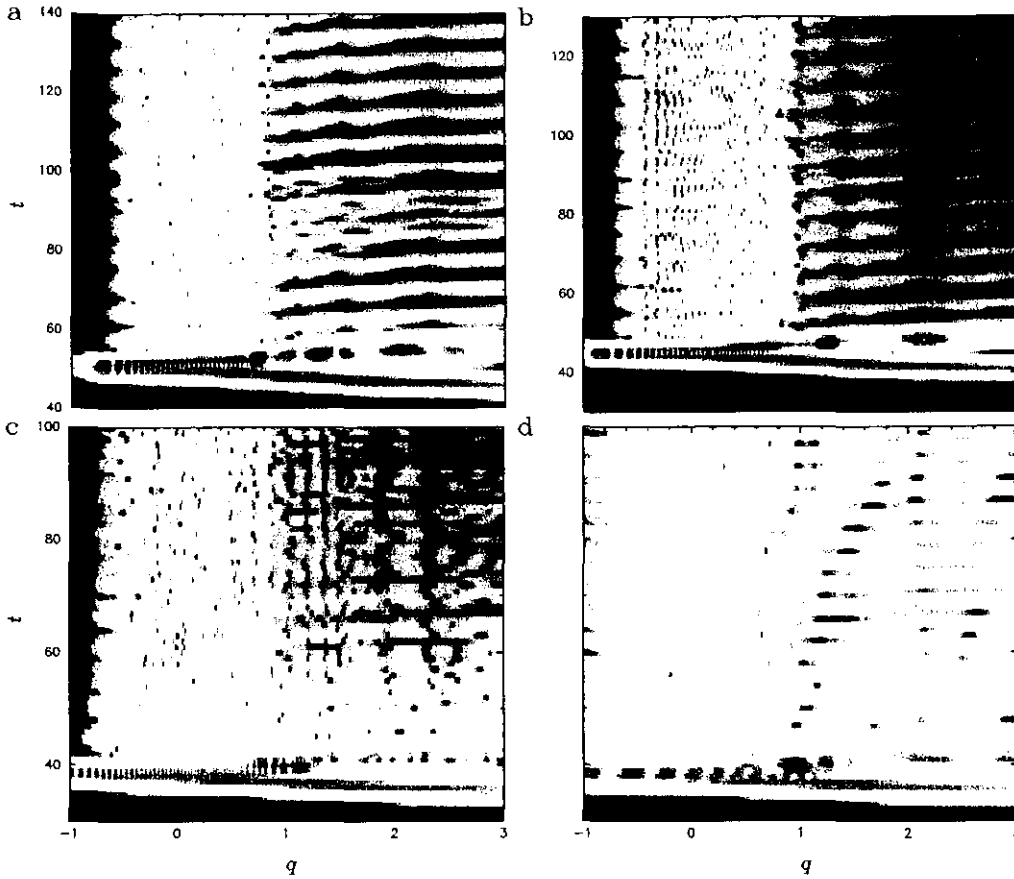


Figura 6.4: Igual que la Fig. 6.3 para $\sigma = 2.5$ y a) $A = 2.0$, b) $A = 2.5$, c) $A = 3.0$ y $\hbar = 0.01$ y para d) $A = 3.0$ y $\hbar = 0.07$.

definida como

$$I_w(t) = \int_{-\infty}^1 \rho_q(q, t) dq . \tag{6.1}$$

En las Figs. 6.5 y 6.6 se muestran los resultados obtenidos para $I_w(t)$ para los distintos valores de A . En estas figuras, el decaimiento exponencial se ha removido de los valores originales de $I_w(t)$

El pulso incidente fue elegido de tal manera que su centroide correspondiera a un momento inicial mayor en valor absoluto al intervalo de momento que ocupa la variedad estable de la herradura en la región asintótica. Las razones para esta elección serán clarificadas en la siguiente Sección.

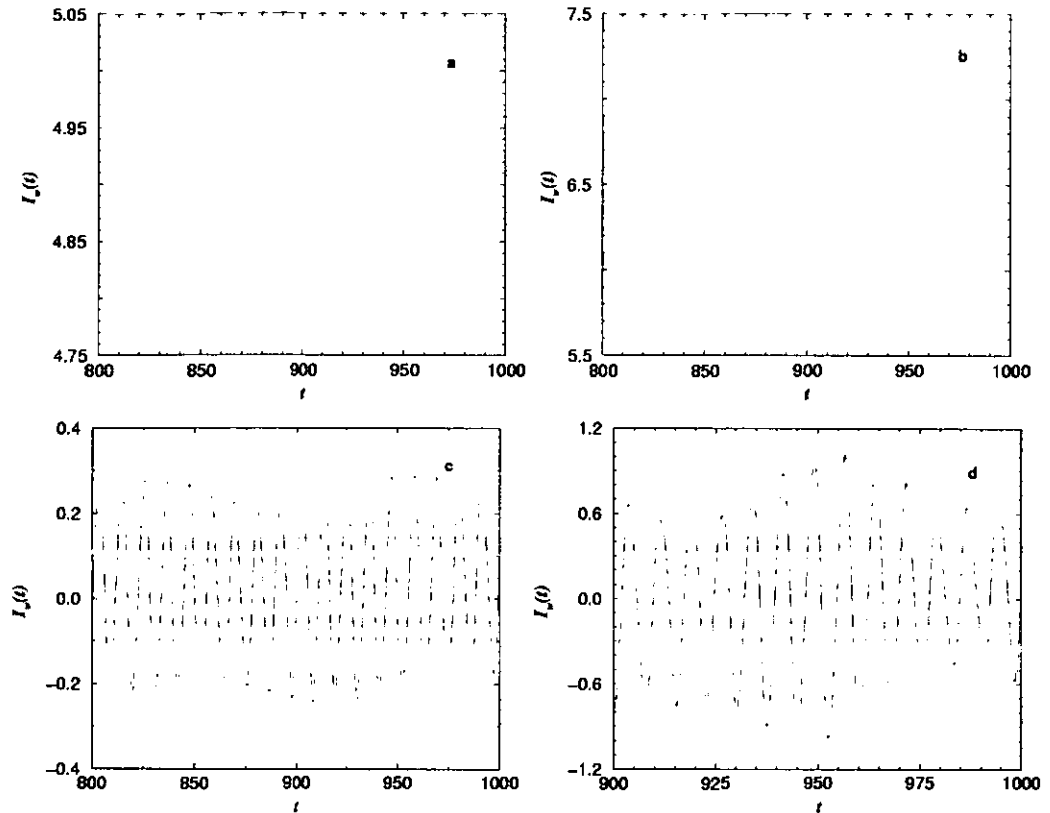


Figura 6.5: Amplitud de probabilidad en la región del pozo $I_w(t)$ como función del tiempo para $\hbar = 0.01$, $\sigma = 2.5$ y a) $A = 0.3$, b) $A = 0.5$, c) $A = 1.0$ y d) $A = 1.5$. La línea verde corresponde a una interpolación con un spline cúbico.

La medición del período de los ecos cuánticos τ_q a partir de $I_w(t)$ requiere de algunas precisiones. En el caso general, el pulso atrapado en el pozo se establece tanto en la capa de dispersión, como en regiones internas de la isla a las cuales ha tuneado. La parte del pulso que rota sobre la capa de dispersión decae más rápido que la parte que tunea hacia el interior de la isla. Este hecho tiene la siguiente consecuencia:

El período de los ecos cuánticos corresponde al período orbital *promedio* del pulso atrapado. En otras palabras, el período de los ecos es igual al período orbital característico del centroide del pulso. Como la parte del

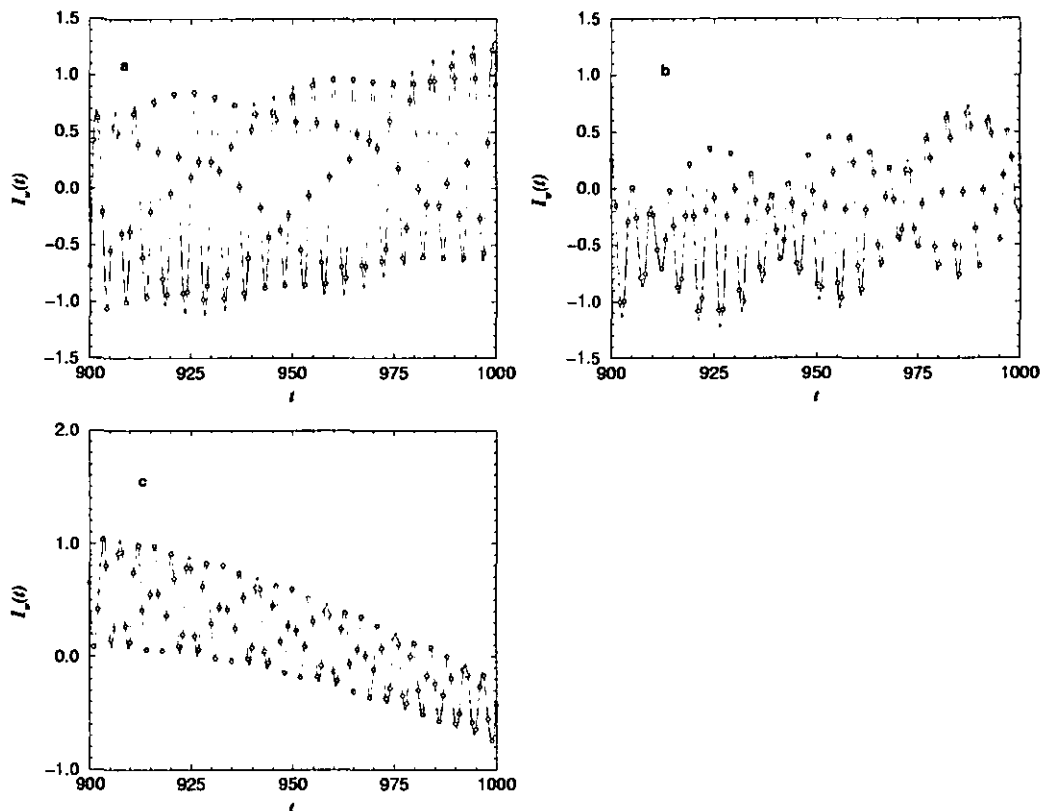


Figura 6.6: Igual que la Fig. 6.5 para: a) $A = 2.0$, b) $A = 2.5$ y c) $A = 3.0$.

pulso sobre la capa de dispersión decae más rápido que la parte en el interior de la isla, su centroide cambia con el tiempo y por consecuencia, el período de los ecos. Mas aún, el tiempo en el cual la parte externa del pulso decae dependerá generalmente del momento de incidencia de este. Para evitar esta arbitrariedad en el valor del período de los ecos cuánticos, hemos elegido medir τ_q a tiempos suficientemente largos en donde hemos verificado que su valor no varía. De esta manera, el período de los ecos cuánticos que reportamos a continuación corresponderán en todo caso, al período orbital característico de las regiones internas a la superficie de la isla.

En la Tabla 6.1 se presentan los valores obtenidos para τ_q para distintos valores de A y se comparan con el período de los ecos clásicos obtenidos en el Capítulo anterior.

Los valores que se obtienen para τ_q son sistemáticamente menores a los

A	τ_q	τ_c
0.3	22.3 ± 1.0	28.6 ± 1.0
0.5	17.4 ± 0.4	20.2 ± 1.2
1.0	11.0 ± 0.6	10.5 ± 0.8
1.5	7.6 ± 0.4	8.3 ± 0.6
2.0	4.9 ± 0.3	6.2 ± 0.6
2.5	4.9 ± 0.4	5.7 ± 0.6
3.0	4.2 ± 0.3	—

Tabla 6.1: Comparación entre el período de los ecos cuánticos τ_q y el de los ecos clásicos τ_c para los distintos valores de A .

valores del período de los ecos clásicos τ_c , en acuerdo a la discusión de la Sección 3.3.

De igual manera, en la Fig. 6.7 se compara el período de los ecos cuánticos para los distintos valores de A con el período orbital promedio de la capa de dispersión.

El período de los ecos cuánticos es consistentemente menor que el período orbital $\bar{\tau}_d$ en la capa de dispersión, excepto para $A = 3$. Sin embargo, el comportamiento de τ_q como función de A es el mismo. De esta manera podemos decir que, la ec. 3.4 describe satisfactoriamente el período de los ecos de dispersión cuántica hasta un factor de proporcionalidad que es función de \hbar .

Así, por primera vez, se ha obtenido un procedimiento para obtener, con las reservas que hemos discutido, el desarrollo de la herradura clásica a partir de la dispersión cuántica de pulsos. Esto vislumbra la posibilidad de extender el tratamiento del problema inverso de la dispersión en términos del desarrollo de la herradura clásica a la mecánica cuántica. Como veremos en la siguiente Sección, la extracción del período de los ecos cuánticos no se limita a experimentos de dispersión realizados con pulsos cortos.

6.2 Pulsos Largos

En esta Sección se describe el procedimiento para obtener el período de los ecos cuánticos en experimentos de dispersión de pulsos largos. Los valores encontrados sugieren sin embargo, que los experimentos con pulsos cortos

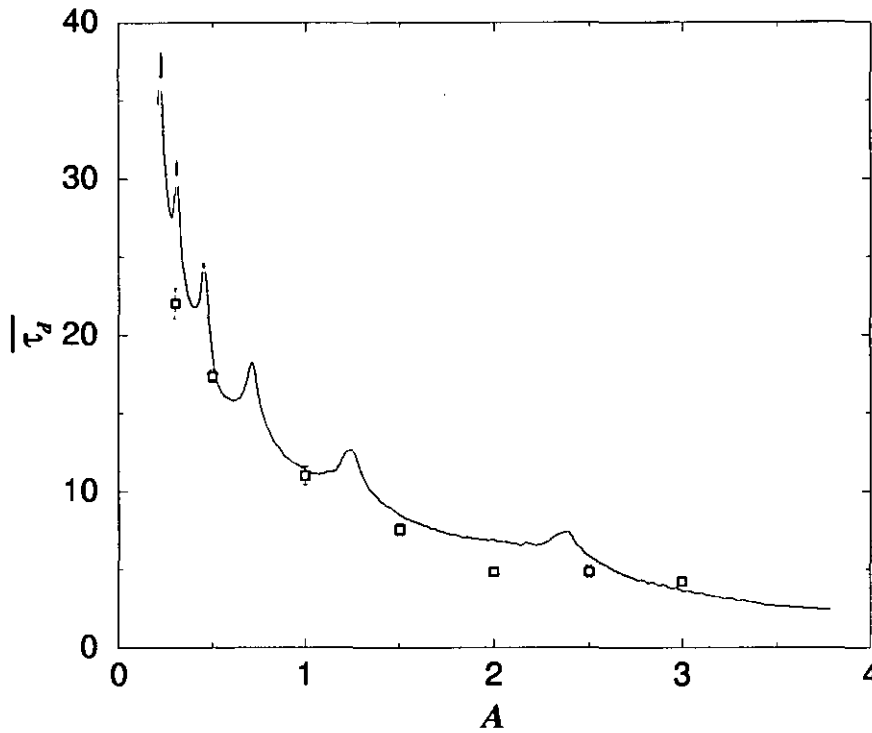


Figura 6.7: Comparación entre el período orbital promedio $\bar{\tau}_d$, Fig. 4.9 y los valores obtenidos para el período de los ecos cuánticos, τ_q para distintos valores del parámetro A .

coinciden mejor con el comportamiento esperado para valores del parámetro $A > 2$.

6.2.1 Matriz S

Para un potencial con dependencia periódica en el tiempo, es posible construir un análogo a la matriz S . De igual manera que para el caso estático, la matriz S para un potencial periódico en el tiempo relaciona el estado asintótico incidente con el estado dispersado como

$$|\Psi\rangle = S|\Psi_{in}\rangle. \quad (6.2)$$

En la representación de Schrödinger, los estados son referidos al tiempo inicial $t_0 = 0$. La evolución de los estados asintóticos está gobernada por el operador

de evolución libre

$$U_0(t) = \exp\left(-i\frac{H_0 t}{\hbar}\right) \quad (6.3)$$

donde H_0 Hamiltoniano libre que se supone independiente del tiempo. La matriz S por el contrario, depende del Hamiltoniano completo $H(t)$ por lo que en general, S no conmuta con el operador $U_0(t)$, es decir, la matriz

$$\tilde{S} = U_0(t) S U_0^\dagger(t) \quad (6.4)$$

es en general, una matriz S distinta.

Como hemos visto en la Sección 3.4, para tiempos que son múltiplos del período τ del sistema $U_0(n\tau) = u_0^n$ donde $u_0 = U_0(\tau)$ es el operador de evolución después de un período del sistema. Dado que para un sistema periódico en el tiempo la cuasienergía se conserva [70], es decir, $[S, u_0] = 0$, entonces se sigue de la ec. 6.4 que para los tiempos $t = n\tau$, $\tilde{S} = S$. Dado que ambas matrices están relacionadas a través de una transformación unitaria, \tilde{S} y S son operadores isoenergéticos. Ésto es, ambos operadores poseen los mismos polos y por lo tanto presentan las mismas resonancias.

De esta manera, para sistemas unidimensionales de dispersión periódicos en el tiempo, las probabilidades de reflexión y transmisión se pueden escribir como generalizaciones directas de las probabilidades correspondientes en sistemas independientes del tiempo [71].

En una base de ondas planas

$$\langle q | \psi_{\Theta, n}^{0\pm} \rangle \sim e^{\pm i k_n(\Theta) q} \quad (6.5)$$

en donde ahora, como en la ec. 3.26, el vector de onda depende de la cuasienergía Θ como $k_n(\Theta) = \sqrt{2m(\Theta + n\hbar\omega)}/\hbar$, con ω el inverso del período del sistema, la matriz S está dada por

$$\langle \psi_{\Theta, n}^{0\pm} | S | \psi_{\Theta', n'}^{0\mp} \rangle = S_{n, n'}^{\pm\mp}(\Theta) \delta(\Theta - \Theta') . \quad (6.6)$$

Los signos \pm corresponden a la doble degeneración de los estados asintóticos y $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ está relacionada con la cuasienergía como en la ec. 3.26.

También, es posible calcular la matriz $S(\Theta)$ como función de la cuasienergía utilizando paquetes de onda si la energía incidente de éstos se elige como $E_{in} = \Theta + n\hbar\omega$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Como en el proceso de dispersión la cuasienergía se conserva, de la ec. 3.26 tendremos que

$$E_{out} - E_{in} = \hbar\omega(n - m) \quad (6.7)$$

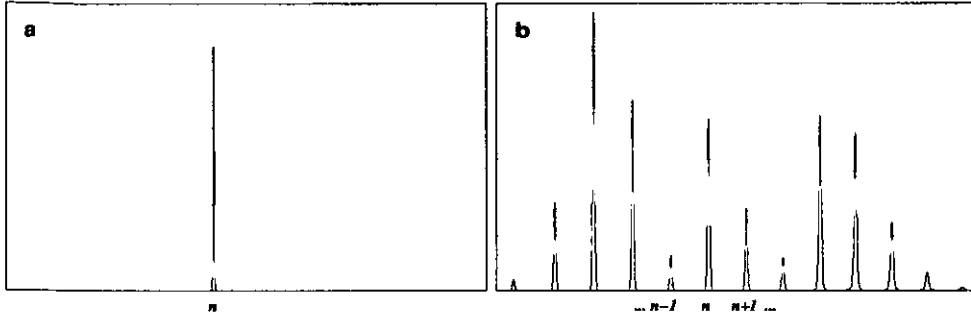


Figura 6.8: Amplitud de Probabilidad de un pulso antes y después de la dispersión. a) Pulso inicial con energía incidente $E = \Theta + n\hbar\omega$ en el n -ésimo modo de Floquet. b) Después de que el pulso dispersado regresa a la región asintótica, la amplitud de probabilidad se distribuye alrededor del estado inicial en los distintos modos de Floquet.

donde n y m son enteros. Así, la energía en el proceso de dispersión sólo puede cambiar en múltiplos de $\hbar\omega$. En la Fig. 6.8-a se muestra un pulso incidente, preparado en el n -ésimo modo de Floquet con cuasienergía Θ , $E = \Theta + n\hbar\omega$. Cuando el pulso dispersado regresa a la región asintótica, Fig. 6.8-b, la amplitud de probabilidad es distribuida en pequeños pulsos alrededor del modo de Floquet inicial con energías que difieren como en la ec. 6.7.

De esta manera, repitiendo el experimento de la Fig. 6.8 con paquetes de onda centrados alrededor distintos modos de Floquet podemos calcular numéricamente la matriz $S(\Theta)$, donde el valor de la cuasienergía corresponde a la energía de incidencia para el modo de Floquet $n = 0$

En realidad, con este procedimiento la matriz S no es estrictamente unitaria debido a que, como hemos visto a lo largo de este Capítulo, típicamente parte de la probabilidad del pulso incidente es atrapada en el pozo del potencial en donde rota alrededor de la isla y del cual decae exponencialmente². El cálculo de la matriz S requiere entonces que la energía de incidencia del pulso sea tal que, para tiempos razonablemente cortos, la probabilidad del pulso que permanece en el pozo del potencial sea despreciable.

Típicamente, el número de modos o *canales* de Floquet que se acoplan

²Lo que en realidad calculamos es una aproximación a la matriz S como el operador de evolución de la ec 2.11 calculado a un tiempo largo pero finito.

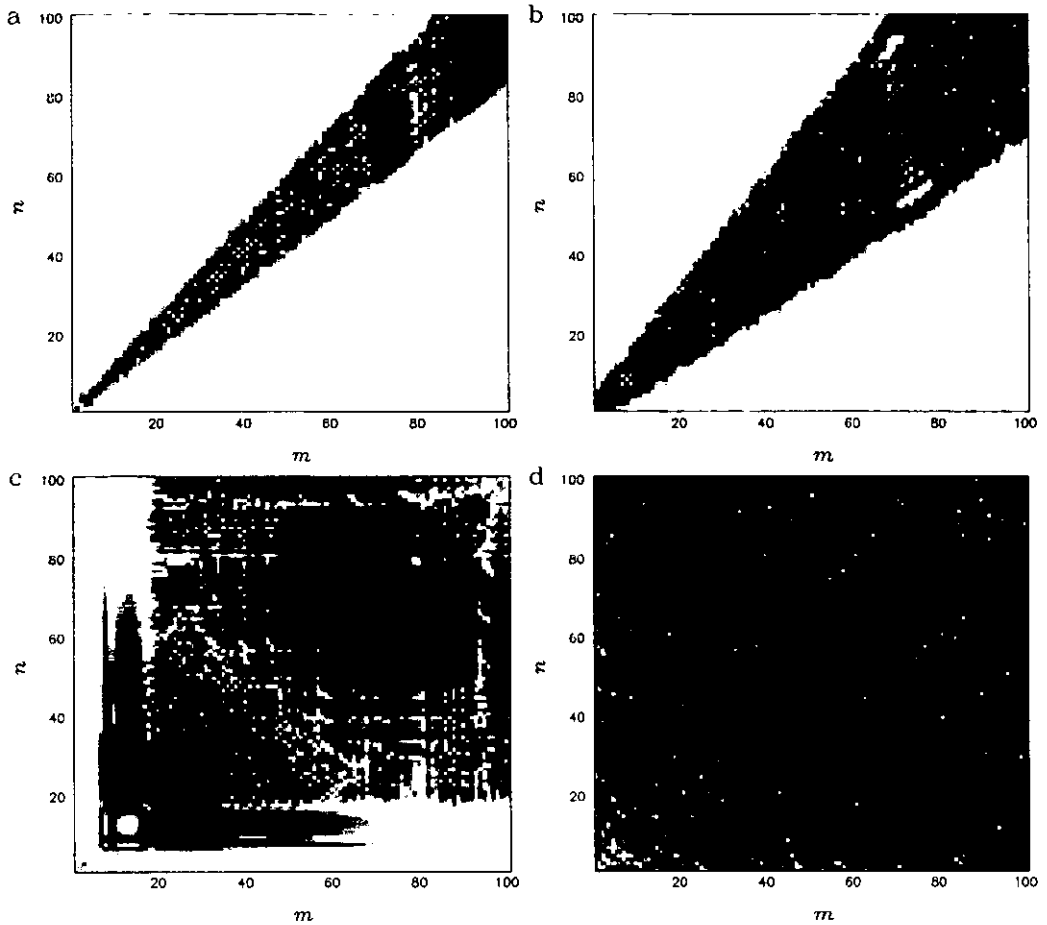


Figura 6.9: Valor absoluto de la matriz S para $\hbar = 0.01$ y a) $A = 1$, b) $A = 2$, c) $A = 4$ y d) $A = 6.25$. La duración de los pulsos usados en la dispersión fue $\sigma = 10$.

en el proceso de dispersión, depende del grado de caoticidad del sistema. En la Fig. 6.9 se muestra este fenómeno. La matriz S fue calculada para los 100 primeros canales alrededor del canal de entrada para distintos valores del parámetro A . Para $A = 1$, donde el área de las estructuras regulares en el retrato fase clásico es muy importante, la dispersión acopla al modo inicial con sólo algunos pocos modos vecinos. En este sentido, se dice que el acoplamiento es débil. Cuando se aumenta el valor de A , las regiones regulares disminuyen y por ende la caoticidad aumenta. Cabe señalar que cuando

hablamos de caoticidad en este contexto, nos referimos exclusivamente a la disminución del área de las estructuras regulares en el retrato fase, pues como se ha descrito en el Capítulo 1, la dinámica solo es caótica sobre el conjunto invariante acotado.

Así para $A = 4$ el modo inicial se acopla con casi todos modos alrededor del modo inicial, sin embargo, la contribución dada por el acoplamiento sigue siendo mayor cerca la diagonal, mientras que para $A = 6.25$, cuando el sistema se vuelve hiperbólico, prácticamente todos los modos se acoplan uniformemente. El acoplamiento entre modos observado en la matriz S es de gran relevancia en el estudio de las consecuencias de la ergodicidad clásica para las propiedades de localización de los estados cuánticos en el límite semiclásico [87].

Para el caso de un acoplamiento débil como el de la Fig. 6.9-a, la amplitud de la matriz S como función de la cuasienergía muestra resonancias angostas aisladas. Estas resonancias pueden ser interpretadas como debidas al acoplamiento entre los estados cuasiligados del potencial con el continuo [21]. Como veremos en la siguiente Sección, el espaciamiento promedio entre estas resonancias está determinado por el período de los ecos cuánticos observados en la dispersión con pulsos cortos. Cuando el acoplamiento es fuerte, las resonancias se ensanchan y traslapan. En este caso la amplitud de la matriz S como función de la cuasienergía presenta fluctuaciones que son descritas por la Teoría de Matrices Aleatorias [19].

6.2.2 Probabilidad en el Pozo

En esta Sección se analiza la amplitud de probabilidad del pulso que permanece en el pozo del potencial, ec. 6.1, a un tiempo dado como función de la energía de incidencia

$$I_w^{(t)}(E_{in}) = \int_{-\infty}^1 |\Psi_{E_{in}}(q, t)|^2 dq . \quad (6.8)$$

En sistemas sometidos a un forzamiento periódico en el tiempo, pueden crearse estados cuasiligados. Dependiendo de la amplitud del forzamiento éstos pueden o no tener relación con los estados ligados propios del sistema sin forzamiento. Para el modelo de la ec. 2.1, el Hamiltoniano sin forzamiento es el Hamiltoniano libre, por lo que todos los estados cuasiligados serán estados de resonancia.

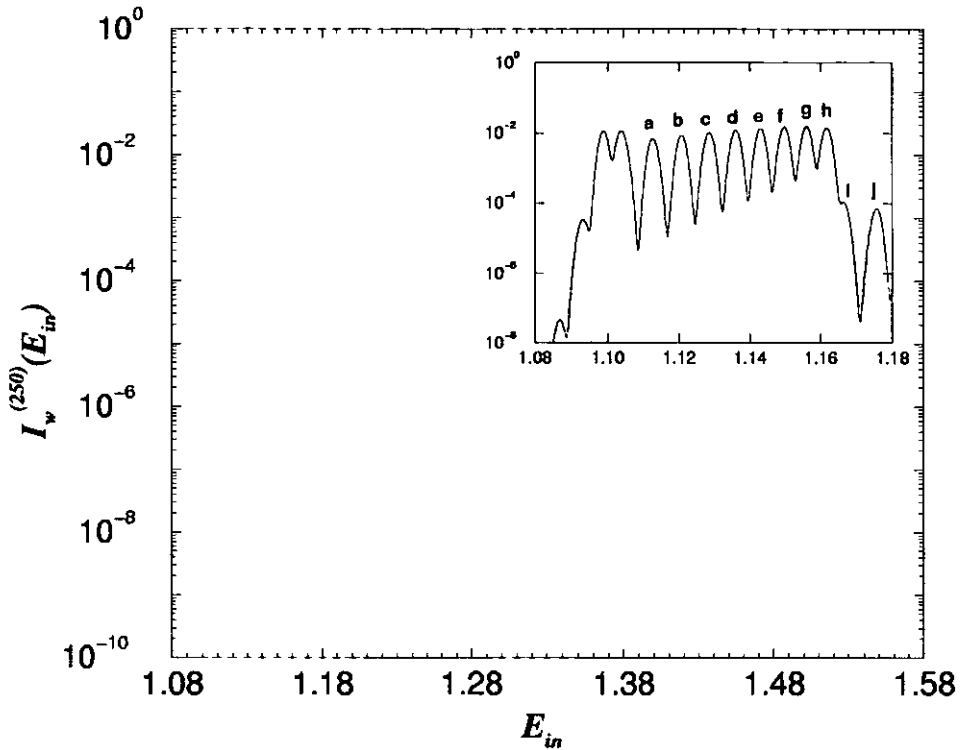


Figura 6.10: Amplitud de probabilidad del pulso incidente que permanece en el pozo del potencial al tiempo $t = 250$ como función de la energía de incidencia, para un pulso largo con $\sigma = 10$, $A = 1$ y $\hbar = 0.01$. En esta figura se observa un conjunto de resonancias que se repite periódicamente en la energía. En el recuadro se muestra un acercamiento de las resonancias del primer grupo etiquetadas consecutivamente.

El cálculo numérico de la matriz S como función de la cuasienergía requiere grandes recursos de memoria y tiempo de cálculo. La probabilidad en el pozo eq. 6.1 como función de la energía de incidencia presenta exactamente las mismas resonancias que la matriz S , y su obtención numérica es mucho más rápida, por lo que hemos preferido estudiar la relación entre las resonancias de la matriz S y el período de los ecos cuánticos en términos de I_w .

En la Fig. 6.10 se muestra $I_w^{(t)}(E_{in})$ como función de la energía de incidencia E_{in} al tiempo $t = 250$ para $A = 1$ y $\hbar = 0.01$. La duración del

pulso incidente fue $\sigma = 10$. En ella podemos observar que las resonancias se agrupan en familias que se repiten con una intensidad que decae exponencialmente. En el recuadro se muestra un acercamiento del primer grupo de resonancias y que hemos etiquetado de la a a la i . La resonancia etiquetada como j corresponde a la primera resonancia del segundo grupo. En la Tabla 6.2 se resumen las energías de las resonancias del grupo uno y las primeras resonancias del grupo dos, obtenidas a partir del espectro de I_w .

peak	E_{in}	ΔE_{in}
a	1.1128	
b	1.1208	0.0080
c	1.1285	0.0077
d	1.1359	0.0074
e	1.1430	0.0071
f	1.1497	0.0067
g	1.1560	0.0063
h	1.1617	0.0057
i	1.1665	0.0048
j	1.1756	0.0091
k	1.1836	0.0080
l	1.1914	0.0078
m	1.1988	0.0074
n	1.2059	0.0071

Tabla 6.2: Energía de las resonancias del grupo uno y las primeras resonancias del grupo dos de la Fig. 6.10. También se muestra en la columna tres, el espaciamiento de energía entre las resonancias. La incertidumbre numérica es de $\pm 1.6 \times 10^{-4}$.

Las resonancias que se observan para energías menores que la de la resonancia a , tienen un carácter distinto a las anteriores. Sus energías corresponden al intervalo de energía que cubre a la variedad estable de la herradura clásica en la región asintótica. En consecuencia, estas resonancias corresponden al retardo que sufren las trayectorias clásicas debido a la estructura fractal en la capa de dispersión y no al acoplamiento con estados cuánticos cuasiligados.

El intervalo de energías que ocupa cada grupo de resonancias se puede obtener de los datos en la Tab. 6.2 como $E_j - E_a = 0.0628$, el cual es igual

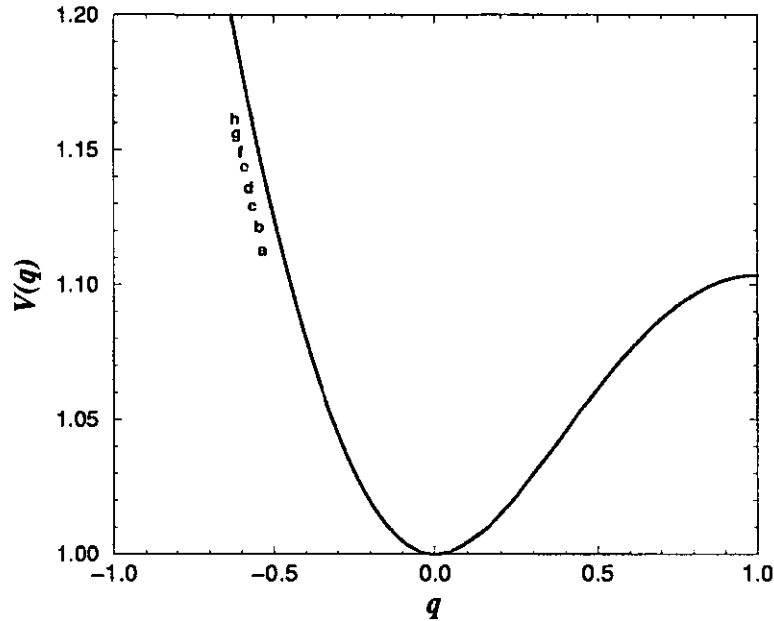


Figura 6.11: Energía de las resonancias de I_w en la familia uno, comparada con el perfil del potencial. Todas las resonancias debidas al acoplamiento entre los estados cuasiligados y el continuo tienen energías arriba del intervalo que cubre a la variedad estable de la herradura clásica en la región de dispersión, representado por la región en gris.

a $2\pi\hbar$. Como hemos visto, el modelo de dispersión de la ec. 2.1 tiene dos escalas de tiempo: la primera de ellas corresponde al período de las patadas el cual, hemos elegido como $\tau = 1$. La segunda escala de tiempo corresponde al período de los ecos, que depende del parámetro de desarrollo de la herradura clásica. Es de esperarse que las mediciones hechas en la energía contengan también dos escalas características. Una de ellas es el tamaño en energía de los grupos de resonancias observados en la Fig. 6.10. La segunda escala de energía es entonces, el espaciamiento promedio entre las resonancias de cada grupo.

El ancho de los grupos de resonancias en energía, que llamaremos ΔE_{ext} corresponde al período externo, es decir, al período del sistema como $\Delta E_{ext} = \hbar\omega_{ext}$ o simplemente $t_{ext} = 2\pi\hbar/\Delta E_{ext}$. El valor que medimos para el ancho de los grupos de resonancias es $\Delta E_{ext} = 0.0628$ que coincide exactamente

con el período externo $t_{ext} = \tau = 1$.

Las resonancias en cada grupo no se encuentran equiespaciadas. El espaciamiento entre ellas depende cuadráticamente de su energía. Nuestra conjetura es que el espaciamiento promedio entre las resonancias de un grupo, al que llamaremos ΔE_{int} corresponde de igual manera, a la escala interna de tiempo del sistema, es decir, al período de los ecos de dispersión $\Delta E_{int} = \hbar\omega_{int}$, donde ahora $\omega_{int} = 2\pi/t_{int}$ es el inverso del período de los ecos.

Antes de obtener los valores para el período de los ecos a partir de las resonancias, analicemos la probabilidad del pulso que permanece en el pozo del potencial para las energías de incidencia de las resonancias.

Como hemos mencionado, las energías de resonancia corresponden a las energías de los estados cuasiligados que aparecen debido al forzamiento externo del sistema. En la Fig. 6.12 se muestra la distribución de Husimi de la probabilidad del pulso que permanece en el pozo del potencial cuando la energía de incidencia de éste es igual a la energía de algunas de las resonancias mostradas en la Fig. 6.10.

La probabilidad atrapada en el pozo para las energías de resonancias se establecen sobre los estados cuasiligados del sistema. Para la resonancia a , el estado cuasiligado se encuentra en las regiones internas de la isla. Para la resonancia c , el estado puebla regiones exteriores y se establece sobre una cadena importante de islas secundarias. Para resonancias con energías mayores, el estado cuasiligado es cada vez mas abierto. Después de la resonancia e todos se encuentran sobre la capa de dispersión. Para la resonancia i , que es la última de la familia uno, la probabilidad atrapada se encuentra concentrada muy cerca del punto hiperbólico lo cual explica su diferencia en amplitud respecto a las demás resonancias. Es claro que un estado mas extendido que aquél para la resonancia i decaerá inmediatamente dada su cercanía al punto hiperbólico. Así, el número de estados cuasiligados depende enteramente de la estructura del espacio fase clásico del sistema. Para una energía incidente igual al de la resonancia j , el estado cuasiligado es el mismo que el de la resonancia a , lo que corrobora que j es una réplica de a .

Finalmente, en la Tabla 6.3 se resumen los valores de t_{int} obtenidos a partir del espaciamiento promedio entre las resonancias de I_w para distintos valores del parámetro A .

El espaciamiento entre las resonancias de cada grupo decrece cuadráticamente con la energía, por lo que el error de medición es varias veces mayor que el obtenido para los ecos cuánticos a partir de la dispersión de pulsos

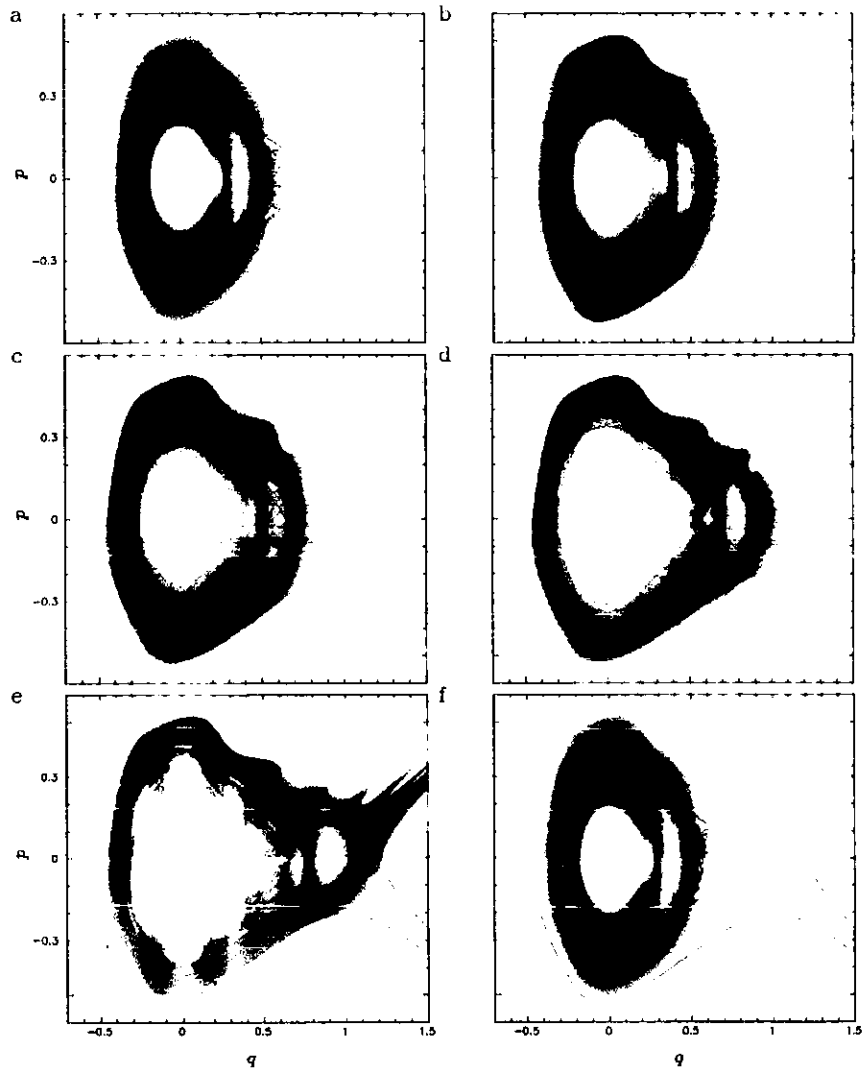


Figura 6.12: Distribución de Husimi de los estados cuasiligados a) a , b) c , c) e , d) h , e) i y f) j , para $A=1$ y $\hbar = 0.01$.

cortos. Dentro de estos intervalos de error, t_{int} es consistente con el valor de τ_q , excepto quizás para valores del parámetro $A > 2$, donde el valor para el tiempo t_{int} aparentemente se satura.

A	t_{int}	τ_q
0.500	13.4 ± 3.8	17.4 ± 0.4
1.000	9.4 ± 1.4	11.0 ± 0.6
1.196	8.5 ± 0.8	—
1.500	8.2 ± 1.2	7.6 ± 0.4
2.000	7.2 ± 0.9	4.9 ± 0.3
2.425	6.6 ± 0.6	—
2.500	6.3 ± 0.5	4.9 ± 0.4

Tabla 6.3: Escala interna de tiempo t_{int} correspondiente al espaciamiento entre las resonancias de I_w para distintos valores del parámetro A , comparada con el período de los ecos cuánticos τ_q obtenidos a partir de la dispersión con pulsos cortos.

6.3 Mas allá de la Mecánica Clásica

En el presente Capítulo mostramos que los ecos de dispersión se pueden observar en mecánica cuántica en experimentos de dispersión de pulsos y que su interpretación es la misma que en mecánica clásica. Así, la extracción del período de los ecos a partir de mediciones asintóticas abre, por primera vez, la posibilidad de analizar experimentos cuánticos de dispersión en términos del desarrollo de la herradura.

La diferencia fundamental entre el comportamiento clásico y cuántico es la existencia, en el último, de tunelaje. Así, hemos encontrado que parte de la probabilidad del pulso, que permanece rotando alrededor de la isla de estabilidad, se establece en regiones inaccesibles para las trayectorias clásicas. Consistente con esta observación, hemos encontrado que el período de los ecos cuánticos es sistemáticamente menor que el de sus análogos clásicos.

Más allá del estudio de la dispersión cuántica en sí, su análisis en términos de los ecos de dispersión, ofrece, adicionalmente, la posibilidad de estudiar el interior de la isla de estabilidad, inaccesible para el experimento clásico. En este sentido, la mecánica cuántica puede servir como un microscopio para la mecánica clásica.

Capítulo 7

Ecos en Otros Potenciales

En los Capítulos anteriores se mostró evidencia numérica de la aparición de ecos en la dispersión clásica y cuántica del modelo eq. 2.2. El propósito de este Capítulo es mostrar que la aparición de los ecos de dispersión es genérica en sistemas Hamiltonianos de dispersión de dos grados de libertad descritos por una herradura de orden binario o ternario. La única condición necesaria para la observación de los ecos es la existencia, en la superficie de sección, de una isla de estabilidad bien desarrollada o equivalentemente, que la herradura del sistema esté poco desarrollada, $\alpha < 1/2$ para una herradura binaria o $\gamma < 1/3$ para una herradura ternaria, como se discutió en el Capítulo 3. En las Secciones 7.1 y 7.2 se muestra que la observación de los ecos de dispersión no depende de la forma del pozo potencial en sistemas pateados. En la Sección 7.3 se discute la observación de los ecos en billares.

7.1 Pared Exponencial

En esta Sección se considera el potencial de la ec. 2.4 con dependencia periódica en el tiempo

$$V(q) = Ae^{-q}(q^2 + q + 1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) . \quad (7.1)$$

Como se discutió en el Capítulo 2, este potencial es muy similar al que hemos usado en esta Tesis, en donde la pared cuadrática para valores negativos de la posición, es sustituido por una pared exponencial. A diferencia del potencial de la ec. 2.2, en la Fig. 4.6 se mostró que la herradura de este

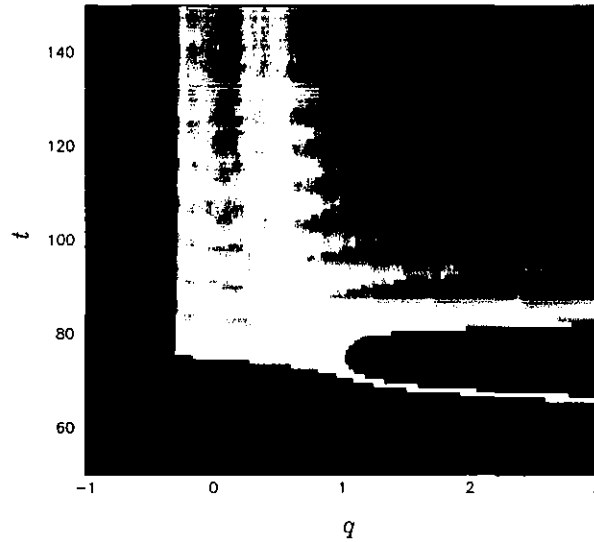


Figura 7.1: Ecos clásicos de dispersión para el potencial eq. 2.4, para $A = 1$ en una escala de color logarítmica. Las condiciones iniciales fueron elegidas sobre la variedad estable de la herradura en la región asintótica.

potencial no presenta un comportamiento anómalo. La orientación de las variedades estable e inestable de su herradura es normal para cualquier valor del parámetro $A > 0$.

Sin embargo, debido a la dureza de la pared exponencial, el análisis numérico de este potencial está limitado al estudio de la dispersión clásica debido a que la convergencia de los resultados cuánticos es extremadamente lenta. En la Fig. 7.1 se muestra la distribución de densidad clásica $\rho_c(q, t)$ como función del tiempo y la posición. En el decaimiento de las trayectorias que giran alrededor de la isla se pueden observar los ecos de dispersión.

Aún cuando para este potencial no es posible calcular la dispersión en mecánica cuántica, la aparición de los ecos en la dispersión clásica es una fuerte evidencia de su existencia en la dispersión cuántica. Obviamente, esta limitación numérica no existe en un experimento real.

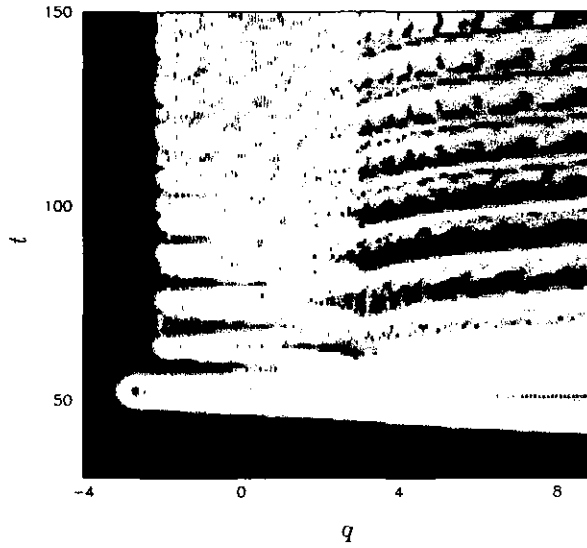


Figura 7.2: Distribución de probabilidad en el espacio de configuración como función del tiempo para el potencial de la ec. 7.2, en una escala de color logarítmica. Los parámetros utilizados son $A = 0.173$, $\hbar = 0.03$ y $\sigma = 2.5$ para un pulso con momento de incidencia $p_0 = -2.05$.

7.2 Pared Cuártica

Como un segundo ejemplo de un potencial pateado consideramos nuevamente un potencial similar al de la eq. 2.2 en el que la pared cuadrática es ahora una pared cuártica:

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}q^4 + \frac{2}{3}q^3 + q^2 + 2 \right) & , \quad q < 0 \\ e^{-q}(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) & , \quad q \geq 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

Los coeficientes de los términos en el polinomio son tales que $V(q)$ es continuo con derivadas primera y segunda continuas.

En este caso, la pared cuártica es suficientemente suave para permitir calcular la dispersión de pulsos cuánticos. En la Fig. 7.2 se muestra la distribución de probabilidad en el espacio de configuración $|\Psi(q, t)|^2$ como función del tiempo. El pozo del potencial es más ancho que el del potencial ec. 2.2. En el decaimiento de la parte de la probabilidad que permanece rotando alrededor de la isla se pueden observar los ecos de dispersión.

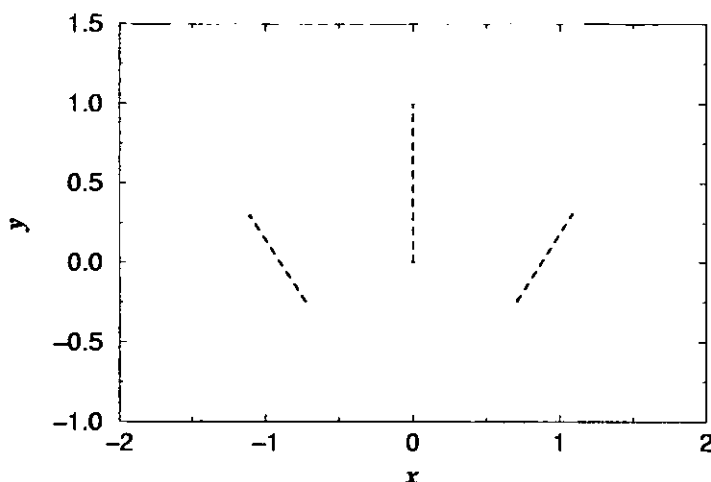


Figura 7.3: Billar con dos canales de dispersión. La frontera superior corresponde a la función $\exp(-ax^2)$ y la frontera inferior a una parábola $c-bx^2$ para $a = c = 0$ y $b = 0.48$. Este billar tiene tres órbitas periódicas fundamentales mostradas como líneas segmentadas en azul.

7.3 Dispersión en Dos Canales

Un ejemplo típico para sistemas Hamiltonianos de dispersión de dos grados de libertad es un billar. Un billar de dispersión consiste en una frontera de paredes duras en las cuales las trayectorias son reflejadas especularmente. El billar se conecta con la región asintótica a través de un cierto número de canales físicos.

El orden de la herradura asociada al billar está determinado por el número de órbitas periódicas fundamentales, las cuales aparecen como puntos fijos en alguna superficie de sección. Un ejemplo de un billar de dispersión se muestra en la Fig. 7.3. Este billar está formado por una frontera Gaussiana $y = \exp(-ax^2)$ y una frontera parabólica $y = c - bx^2$. Este billar tiene tres órbitas periódicas fundamentales mostradas como líneas segmentadas en azul. La estabilidad de estas órbitas depende de la razón entre la curvatura local de las dos fronteras. Las órbitas periódicas exteriores son inestables mientras que la estabilidad de la órbita periódica interior cambia dependiendo del valor de los parámetros a , b y c . En este caso, la herradura es ternaria y está formada por las variedades invariantes de las órbitas exteriores. Este tipo de

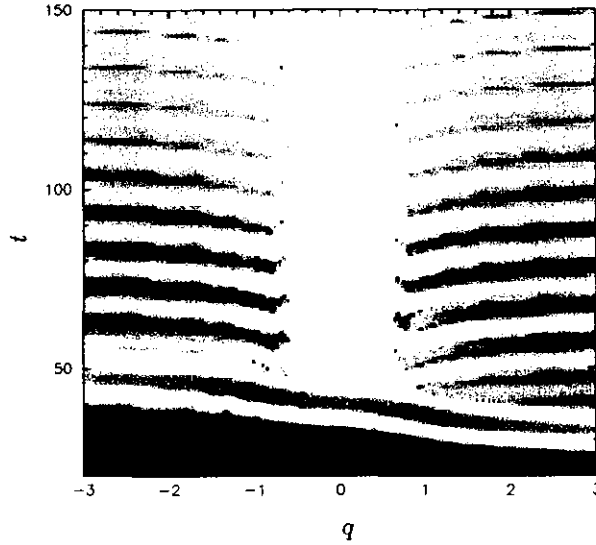


Figura 7.4: Distribución de probabilidad en el espacio de configuración como función del tiempo para el potencial de la ec. 7.3 en una escala de color logarítmica. Los parámetros utilizados son $A = 1$, $\hbar = 0.01$ y $\sigma = 2.5$ para un pulso con momento de incidencia $p_0 = -1.5$.

billares pueden ser realizados experimentalmente en cavidades de microondas o cavidades mesoscópicas.

También es posible obtener herraduras ternarias usando potenciales unidimensionales pateados en el tiempo como por ejemplo

$$V(q) = Ae^{-|q|}(q^2 + |q| + 1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n). \quad (7.3)$$

Este potencial tiene dos órbitas periódicas inestables exteriores y una órbita periódica interior que es estable para $A < 4$. En la Fig. 7.4 se muestra para este potencial, la distribución de probabilidad en el espacio de configuración $|\Psi(q, t)|^2$ como función del tiempo. Cuando el pulso incidente por la derecha alcanza la región del pozo, parte es reflejado y parte transmitido. La probabilidad del pulso incidente que permanece oscilando en el pozo del potencial tiene dos canales de salida, a través de los cuales decae exponencialmente en ecos. Así, el período orbital puede ser medido tanto en la reflexión como en la transmisión en términos del cual, el desarrollo de la herradura

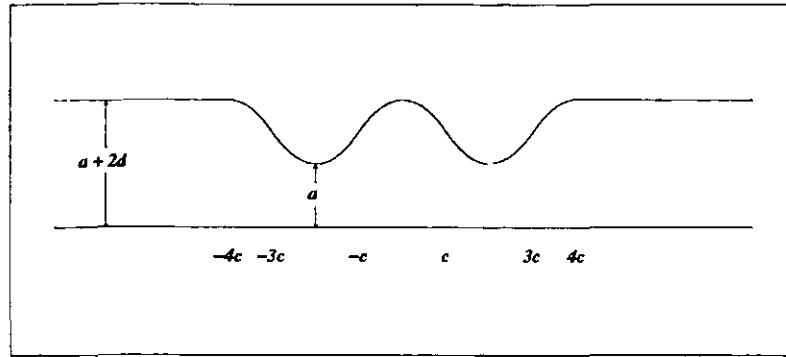


Figura 7.5: Billar de dispersión formado por segmentos de parábolas como en la ec. 7.4 para $a/d = 2$.

ternaria puede ser obtenido a partir de la ec. 3.6.

Para mostrar la validez de la ec. 3.6 en billares analizaremos el billar de dispersión mostrado en la Fig. 7.5 Este billar esta formado por una frontera recta $y(x) = 0$ y por una curva C^1 que consiste en segmentos de parábola dados por

$$y(x) = \begin{cases} a + 2d & , < x \leq -4c \\ a + 2d - d(x + 4)^2 & , -4c < x \leq -3c \\ a + d(x + 2)^2 & , -3c < x \leq -c \\ a + d(2 - x^2) & , -c < x \leq c \\ a + d(x - 2)^2 & , c < x \leq 3c \\ a + 2d - d(x - 4)^2 & , 3c < x \leq 4c \\ a + 2d & , 4c < x \leq \end{cases} \quad (7.4)$$

El parámetro a corresponde al ancho del billar en $|x| = 2c$ y d al ancho de las parábolas. El parámetro c fija nuestra escala de longitud.

Este billar posee tres órbitas periódicas fundamentales: dos órbitas inestables que corresponden a las trayectorias verticales en $x = -2c$ y $x = 2c$ y una órbita interior en $x = 0$ cuya estabilidad depende de los valores de a y d .

Para observar los ecos de dispersión podemos elegir como superficie de sección la frontera inferior del billar¹. El mapeo de Poincaré se evalúa sobre esta superficie en las siguientes variables: x como la posición a lo largo del

¹Vale la pena recordar que aún cuando es numéricamente conveniente, la observación

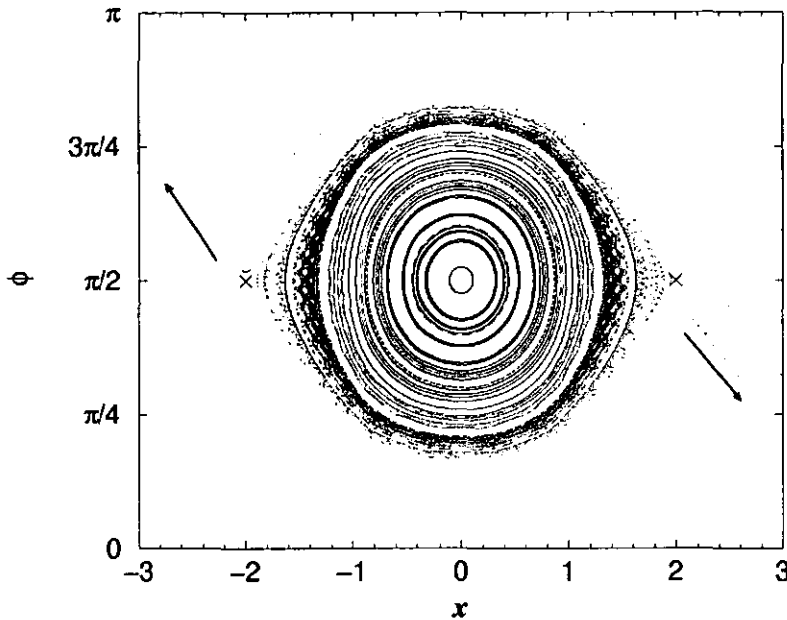


Figura 7.6: Retrato fase del billar de segmentos parabólicos en las variables (x, ϕ) para $a = 0.1$ y $d = 0.05$. La posición de los puntos fijos inestables se indica con las cruces rojas. Las flechas azules indican las direcciones de los canales de salida.

eje x , de la trayectoria al chocar con $y(x) = 0$ y ϕ como el ángulo de la trayectoria reflejada medido a partir del eje x positivo.

En la Fig. 7.6 se muestra el retrato fase de este billar para $a = 0.1$ y $d = 0.05$. Para estos valores de los parámetros, el retrato fase contiene una isla estable bien desarrollada. Los canales de dispersión sobre la superficie de sección ocurren a lo largo de las variedades inestables de los puntos fijos inestables, los cuales se indican por las flechas azules en la Fig. 7.6.

Como en los ejemplos anteriores, los ecos de dispersión tienen su origen en el decaimiento de las trayectorias que rotan alrededor de la isla sobre la capa de dispersión. Para este billar la herradura es ternaria. Un ejemplo de la estructura de la herradura se muestra en la Fig. 7.7 para $a = 0.15$ y $d = 0.165$.

de los ecos de dispersión no está limitada a una superficie de sección. En un experimento real los ecos pueden ser igualmente medidos en el espectro de transmisión o reflexión.

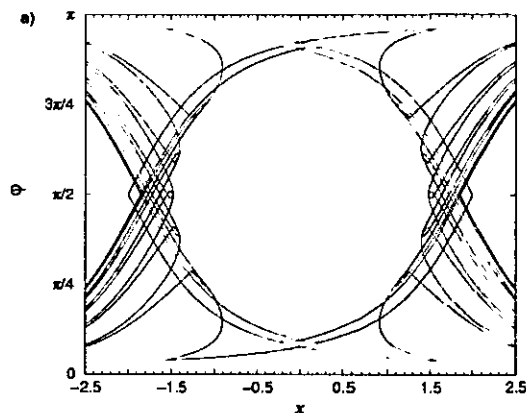


Figura 7.7: Herradura ternaria del billar de segmentos parabólicos para $a = 0.15$ y $d = 0.165$. El valor del parámetro formal es en este caso $\gamma = 3^{-5}$.

La herradura asociada a billares puede presentar anomalías debidas a la discontinuidad en la dirección de las trayectorias que aparece cuando éstas son tangentes a las fronteras del billar. Sin embargo, en un cierto rango de valores de los parámetros, es posible obtener el parámetro de desarrollo

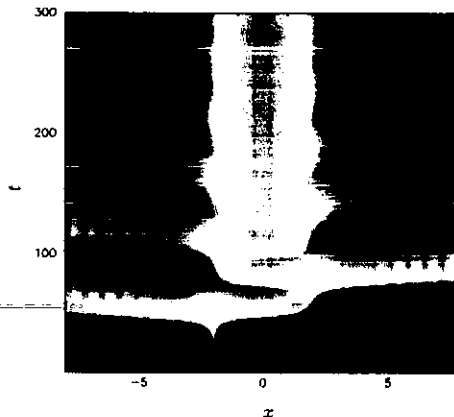


Figura 7.8: Distribución de densidad clásica $\rho_d(x, t)$ en escala de colores logarítmica para $a = 0.1$ y $d = 0.05$. Las trayectorias incidentes se eligieron sobre $x = 2$ con un ángulo ϕ uniformemente distribuido en $[0.555\pi, 0.557\pi]$.

	γ	$\tau(\gamma)$	τ_{echoes}
a)	3^{-5}	11.5	10 ± 1.1
b)	3^{-15}	31.5	30 ± 1.5
c)	$3^{-25} < \beta < 3^{-24}$	49.5, 51.5	45 ± 5.2

Tabla 7.1: Comparación entre el valor del período orbital calculado a partir de la ec. 3.6 y el período de los ecos de dispersión obtenidos a partir de las mediciones de $\rho_{cl}(x, t)$.

formal de la herradura.

Como hicimos en el Capítulo 4, en la superficie de sección podemos calcular la distribución de densidad clásica $\rho_{cl}(x, t)$ como función del tiempo. En la Fig. 7.8 se muestra $\rho_{cl}(x, t)$ para los parámetros $a = 0.1$ y $d = 0.05$. Al igual que para el potencial de la ec. 7.3, los ecos de dispersión pueden ser observados en la transmisión o la reflexión.

A partir de $\rho_{cl}(x, t)$ es posible obtener el período de los ecos clásicos de dispersión para distintos valores de los parámetros a y d . En la Tabla 7.1 se muestra una comparación entre estos valores y los valores del período orbital obtenido del desarrollo de la herradura correspondiente a partir de la ec.3.6. El acuerdo entre ambos valores corrobora numéricamente la validez de nuestro argumentos del Capítulo 3.

Conclusiones

En esta Tesis hemos explorado el problema inverso de la dispersión para sistemas de dispersión caótica en mecánica clásica y mecánica cuántica en términos del grado de desarrollo de la herradura del sistema. Los resultados obtenidos son aplicables a sistemas Hamiltonianos de dos grados de libertad o de un grado de libertad con dependencia periódica en el tiempo, en situaciones en las que el grado de desarrollo de la herradura es pequeño. En mecánica cuántica hemos encontrado que el proceso de dispersión reproduce el comportamiento de las trayectorias clásicas para valores de \hbar suficientemente pequeños.

En mecánica clásica, las trayectorias clásicas sobre la capa de dispersión decaen algebraicamente en forma de ecos, cuyo período mostramos que está relacionado con el grado de desarrollo de la herradura. El período de los ecos corresponde al período orbital promedio característico de la capa de dispersión. En la región asintótica es posible observar los ecos mediante la medición del flujo de las trayectorias dispersadas como función del tiempo. De esta manera, es posible obtener el desarrollo de la herradura del sistema a partir de mediciones asintóticas. La relación entre el período de los ecos de dispersión y el grado de desarrollo de la herradura fue verificada numéricamente. Ésto constituye la principal contribución de esta Tesis.

En mecánica cuántica la probabilidad decae exponencialmente en ecos. El estudio de la dispersión cuántica se llevó a cabo mediante el análisis de la dispersión de paquetes de onda. En el límite semiclásico, los sistemas cuánticos reproducen el comportamiento clásico. El efecto cuántico más notable es la existencia de tunelaje, a través de superficies de KAM, hacia el interior de la isla de estabilidad. Consistente a ésto, el período de los ecos observados en el problema cuántico es sistemáticamente menor al clásico. El comportamiento del período de los ecos como función del parámetro del sistema, reproduce el comportamiento clásico. Ésto permite por primera vez, la posibilidad de

obtener el grado de desarrollo de la herradura en sistemas cuánticos de dispersión y la posibilidad de extender a la mecánica cuántica los resultados conocidos para el problema inverso de la dispersión en mecánica clásica en términos de la topología de la herradura.

Experimentalmente es posible observar los ecos de dispersión en sistemas con Hamiltonianos dependientes del tiempo (similares al modelo utilizado en esta Tesis), en experimentos de dispersión de átomos en superficies [88] en el límite clásico y semiclásico. Experimentos correspondientes en cavidades electromagnéticas apropiadas [89], así como en cavidades mesoscópicas también son posibles. Desde el punto de vista teórico, es interesante que experimentos realizados en esta línea, sean sensibles al grado de desarrollo de la herradura correspondiente, ofreciendo así, una herramienta poderosa para el estudio del proceso de dispersión en herraduras poco desarrolladas.

Apéndice A

Variedades Invariantes

Una variedad invariante es una superficie contenida en el espacio fase de un sistema dinámico con la propiedad de que cualquier órbita x que comience sobre la superficie permanece en ella bajo la acción de la dinámica del flujo. En otras palabras, una variedad invariante es un conjunto de órbitas que forman una superficie [33].

Adicionalmente, el conjunto de órbitas que converge o diverge de una variedad invariante asintóticamente en el tiempo son también, bajo ciertas condiciones, variedades invariantes.

Consideremos un mapeo f

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1})$$

y supongamos que:

- a) f es un difeomorfismo en \mathbb{R}^n
- b) f tiene un punto fijo en x^* , i.e., $f(x^*) = x^*$ tal que
- c) la matriz de estabilidad para x^* tiene $n - k$ eigenvalores con módulo $|\lambda| > 1$ y k eigenvalores con módulo $|\lambda| < 1$.

En tal situación, el punto fijo x^* es hiperbólico. En la vecindad de x^* , el subespacio generado por los eigenvectores correspondientes a eigenvalores con $|\lambda| < 1$ forman una superficie diferenciable llamada *variedad estable local* de x^* . De igual manera, al subespacio generado por los eigenvectores correspondientes a eigenvalores con $|\lambda| > 1$ se le llama *variedad inestable local* de x^* .

Es posible definir una variedad estable global de x^* como

$$W_s(x^*) = \{x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*\}. \quad (\text{A.2})$$

Este es el conjunto de todos los puntos x del espacio fase que convergen al punto fijo x^* bajo la acción de f . De manera análoga, la variedad inestable global de x^* es el conjunto de puntos del espacio fase que convergen a x^* bajo la acción de f^{-1}

$$W_u(x^*) = \{x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) = x^*\}. \quad (\text{A.3})$$

Las variedades globales o simplemente variedades estable e inestable del punto fijo x^* son invariantes. Para mapeos bidimensionales, las variedades invariantes de un punto fijo como x^* son simplemente líneas que se doblan y acumulan en el espacio fase de manera complicada. La topología de éstas, es descrita por el mapeo de la herradura de Smale.

Típicamente, las variedades invariantes $W_s(x^*)$ y $W_u(x^*)$ pueden intersectarse:

Sean a y b dos puntos fijos distintos del mapeo f y sea $r \neq a, b$ tal que $r \in W_u(a)$ y $r \in W_s(b)$. Entonces a r se le llama *punto heteroclínico*. Un punto heteroclínico es la intersección entre la variedad estable de un punto fijo y la variedad inestable de otro punto fijo. Si en cambio la intersección ocurre entre las variedades estable e inestable de el mismo punto fijo, es decir, si $a = b$ entonces a r se le llama *punto homoclínico*.

Por definición de la invariancia de las variedades de un punto fijo inestable, si r es un punto homoclínico, entonces $f^k(r)$ también es un punto homoclínico para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, la existencia de un punto homoclínico implica la existencia de un infinito de ellos. Lo mismo sucede para los puntos heteroclínicos.

La existencia de puntos homoclínicos es un criterio para la existencia de movimiento fuertemente caótico. En particular, si en todos los puntos homoclínicos, las variedades invariantes de los puntos fijos de un sistema en cualquier superficie de sección se intersectan transversalmente, se dice que el sistema es *hiperbólico*.

Apéndice B

Formalismo Termodinámico

Para un sistema dinámico de dispersión su herradura representa la estructura de la componente hiperbólica del conjunto invariante acotado o silla caótica. Como consecuencia de la estructura fractal de la silla caótica la dispersión es irregular: las funciones de dispersión presentan una estructura jerárquica con un conjunto no numerable de singularidades sobre un dominio fractal.

También, la jerarquía fractal de la silla caótica determina la dinámica caótica en la región de interacción así como el decaimiento de las trayectorias de dispersión.

Dado que la dinámica caótica ocurre sólo dentro de la región de interacción, la dispersión de sistemas que poseen una silla caótica son un ejemplo particular del fenómeno conocido como *caos transiente*, es decir, de sistemas cuyas trayectorias se comportan de manera caótica en escalas de tiempo finitas [24].

En la Fig. B.1 se muestra una parte de la función de tiempo de retardo mostrada en la Fig. 4.3 en donde se puede apreciar su estructura jerárquica en todas las escalas. Esta jerarquía puede ser organizada con la ayuda de los intervalos de continuidad que separan regiones del dominio en donde ocurren las singularidades.

Como hemos dicho, esta jerarquía es producto de la estructura fractal de la silla caótica del sistema. El problema inverso consiste entonces en obtener información sobre la estructura de la silla caótica a partir de la jerarquía en las funciones de dispersión, misma que es equivalente a la jerarquía de la herradura del sistema.

Una vez que se tiene información sobre la estructura de la silla caótica es posible obtener medidas cuantitativas de la dinámica de dispersión como la

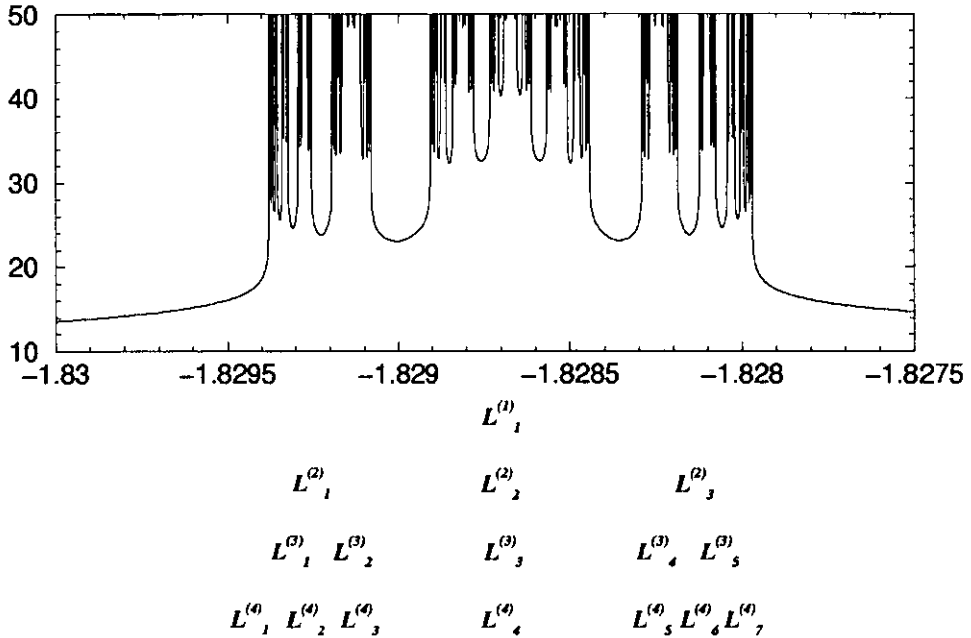


Figura B.1: Jerarquía de las funciones de dispersión. Los segmentos en rojo corresponden a las longitudes de los intervalos que contienen a las singularidades en la función de dispersión en los distintos niveles de jerarquía.

velocidad de escape o el exponente de Lyapunov.

El formalismo termodinámico consiste en un procedimiento para obtener estas medidas cuantitativas a partir de la jerarquía fractal de la herradura o de las funciones de dispersión. En la Fig. B.1 los intervalos en rojo ejemplifican como se extrae la jerarquía fractal a partir de la función de dispersión. Éstos corresponden a los intervalos del dominio sobre los cuales se encuentran las singularidades. El primer nivel de jerarquía $L^{(1)}$ conforma el dominio total sobre el cual se encuentran todas las singularidades en la función de dispersión. En un segunda nivel las singularidades ocurren sobre tres intervalos distintos separados por intervalos de continuidad. Los intervalos en el segundo nivel de jerarquía $L_i^{(2)}$ se enumeran con el índice i . En un siguiente nivel de jerarquía, estos intervalos son sucesivamente seccionados por más intervalos de continuidad.

Cada uno de los intervalos $L_i^{(n)}$ en el nivel n -ésimo se puede asociar con

una secuencia simbólica. Para un sistema hiperbólico, el número de símbolos necesarios es dos. En el ejemplo de la Fig. B.1 el sistema es no hiperbólico. Así vemos que en el segundo nivel de jerarquía aparecen tres intervalos para los cuales serían necesario tres símbolos. Para sistemas no hiperbólicos el formalismo termodinámico no es aplicable. Sin embargo, a partir de observaciones numéricas se sabe que para ciertos valores del desarrollo de la herradura [29], los efectos no hiperbólicos a parecen en niveles de jerarquía altos, siendo aún posible utilizar el formalismo termodinámico.

Suponiendo que el formalismo termodinámico es aplicable, es posible asociar una única secuencia simbólica binaria para cada intervalo $L_i^{(n)}$. La observación clave de este procedimiento es la conexión entre secuencias simbólicas binarias y los micro estados de cadenas lineales de espines cuánticos. De tal manera, uno puede interpretar los símbolos 0 o 1 como un espín en el estado *down* o *up*. En este caso, la interacción apropiada entre los espines consiste en que el logaritmo de las longitudes de los intervalos $L_i^{(n)}$ sea proporcional a la energía interna por espín $E(S_j)$ del micro estado dado [60, 90, 91, 92]

$$E(S_j) = -\frac{1}{n} \ln L_j^{(n)} . \quad (\text{B.1})$$

La idea ahora es obtener la distribución de las longitudes de los intervalos $L_i^{(n)}$, imponiendo que esta longitud escala como una ley de potencias con exponente β . La ventaja de la analogía termodinámica consiste en que $L_i^{(n)\beta}$ es en este sentido el factor de Boltzmann con temperatura $1/\beta$ y la suma de este sobre todas las configuraciones es la función de partición. Dado que la energía libre es extensiva, el escalamiento de la función de partición con β debe ser exponencial en el límite de n grande:

$$\sum_i (L_i^{(n)})^\beta \sim \exp(n\beta\mathcal{F}(\beta)) . \quad (\text{B.2})$$

La función $\mathcal{F}(\beta)$ es la energía libre por espín o simplemente *energía libre* en el contexto dinámico¹.

A partir de la función $\beta\mathcal{F}(\beta)$ es posible obtener cuantitativamente, las características dinámicas del sistema de la siguiente manera: Si se grafica la función $\beta\mathcal{F}(\beta)$ como función de β , su valor en $\beta = 1$ corresponde a la *velocidad de escape* del conjunto invariante. Su intersección con el eje β determina la *dimensión fractal* parcial. Su valor en $\beta = 0$ es el negativo

¹En la literatura matemática, $\beta\mathcal{F}(\beta)$ es llamada *entropía topológica*.

de la *entropía topológica*. La pendiente de la línea tangente a la función en $\beta = 1$ es el *exponente de Lyapunov*, su intersección con el eje β determina la *dimensión de información* y su valor en $\beta = 0$ el negativo de la *entropía métrica*.

Como hemos mencionado, las longitudes $L_i^{(n)}$ pueden también ser obtenidas a partir de las intersecciones de la variedad inestable de la herradura con el nivel -1 de su variedad estable. En el caso particular de sistemas periódicos en el tiempo la jerarquía generada por la herradura del sistema es equivalente a la información contenida en las funciones de dispersión. Sin embargo, en el caso general, la función de dispersión será necesaria para organizar la jerarquía en la estructura de la herradura.

Apéndice C

Estabilidad Lineal

La evolución de todo sistema dinámico está determinada por la estabilidad de sus órbitas periódicas y en particular, por su estabilidad lineal que determina la manera en la que perturbaciones infinitesimales se desarrollan en el tiempo.

Sea $x^* = (p, q)$ un punto fijo del mapeo de Poincaré P de un sistema Hamiltoniano de dos grados de libertad sobre alguna superficie de sección, es decir, $P(x^*) = x^*$. La dinámica local en la vecindad del punto fijo está determinada por la su estabilidad lineal.

El procedimiento para obtener la estabilidad lineal de un punto fijo consiste en expandir $x = x^* + \Delta x$, conservando términos hasta de orden lineal. Haciendo esto, se obtiene una ecuación de la forma

$$\Delta x_{n+1} = L\Delta x_n \quad (\text{C.1})$$

donde L , llamada matriz de estabilidad, es independiente de Δx y está dada por

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Entonces, los eigenvalores de L

$$\det(L - \lambda 1) = 0, \quad (\text{C.3})$$

determinan la estabilidad lineal del punto fijo.

Las soluciones a la eq. C.3

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}L}{2} \pm \left[\left(\frac{\text{Tr}L}{2} \right)^2 - \det L \right]^{1/2} \quad (\text{C.4})$$

son tales que $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ y $\lambda_1 + \lambda_2$ es un número real con tres posibles soluciones. Para un mapeo que preserva área ($\det L = 1$) se tiene lo siguiente:

$|\text{Tr} L| < 2$) Los eigenvalores son complejos conjugados sobre el círculo unitario

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i 2\pi\omega} \quad (\text{C.5})$$

representando soluciones estables con

$$\text{Tr} L = 2 \cos \omega . \quad (\text{C.6})$$

Entonces, el punto fijo es elíptico con un número de rotación igual a ω dado por

$$\omega = \cos^{-1}(\text{Tr} L/2) . \quad (\text{C.7})$$

$|\text{Tr} L| > 2$) Los eigenvalores son reales recíprocos

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1} \quad (\text{C.8})$$

tales que

$$|\lambda_{1,2}| = e^{\pm\omega} \quad (\text{C.9})$$

y

$$\text{Tr} L = |2 \cosh \omega| . \quad (\text{C.10})$$

En este caso el punto fijo es hiperbólico si $\lambda_1 > 1$ o inverso hiperbólico si $\lambda_1 < -1$. λ_1 es el factor de contracción en dirección de la variedad estable y λ_2 el factor de expansión en la variedad inestable.

$|\text{Tr} L| = 2$) Los eigenvalores son iguales, tales que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1 . \quad (\text{C.11})$$

En este caso el punto fijo es parabólico y corresponde a una situación de estabilidad marginal.

Referencias

- [1] Taylor R., *Scattering Theory: The quantum theory of nonrelativistic collisions*, (J. Wiley) 1983
- [2] Newton R.G., *Scattering theory of waves and particles*, (Springer-Verlag) 1982
- [3] Eckhardt B., *Physica D*, **33** (1988) 89
- [4] in Pro. 1989 Les Houches Summer School Giannoni M.J., Voros A., Zinn-Justin J. Eds., *North-Holland*, (1989)
- [5] Guckenheimer J. y Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, (Springer-Verlag) 1983
- [6] Eckhardt B., *J. Phys. A*, **20** (1987) 5971
- [7] Jung C., *J. Phys. A*, **20** (1987) 1787
- [8] Jung C. y Scholz H-J, *J. Phys. A*, **20** (1987) 3607
- [9] Brumer P. y Shapiro M., *Adv. Chem. Phys.*, **70** (1988) 365
- [10] Rankin C.C. y Miller W.H., *J. Chem. Phys.*, **55** (1971) 3150
- [11] Noid D.W., Gray S.K. y Rice S.A., *J. Chem. Phys.*, **84** (1986) 2642
- [12] Petit J.M. y Henon M., *Icarus*, **66** (1986) 536
- [13] Eckhardt B. y Aref H., *Phil. Trans. R. Soc. A*, **326** (1988) 655
- [14] Campbell D.K., Peyrard M. y Sodano P., *Physica D*, **19** (1986) 165
- [15] Eckhardt B. y Jung C., *J. Phys. A*, **19** (1986) L829

- [53] Dantus M., Bowman R. M., Gruebele M. y Zewail A. H., *J. Chem. Phys.*, **91** (1989) 7437
- [54] Rice S. A., Gaspard P. y Nakamura K., *Adv. Class. Traj. Methods*, **1** (1992) 215
- [55] Poincaré H., *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste*, (Gauthier-Villars: Paris) 1899
- [56] Leyvraz F. y Seligman T.H., *J. Math. Phys.*, **30** (1989) 2512
- [57] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. y Flannery B.P., *Numerical Recipes in FORTRAN 77*, (Cambridge University Press) 1996
- [58] Karney C.F., *Physica D*, **8** (1983) 360
- [59] Chirikov B. y Shepelyansky D.L., *Physica D*, **13** (1984) 395
- [60] Ruelle D., *Thermodynamic Formalism*, in Vol. 5 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, (Addison-Wesley, Reading) 1978
- [61] Bohigas O., Tomsovic S. y Ullmo D., *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 1479
- [62] Leyvraz F. y Ullmo D., *J. Phys. A*, **29** (1996) 2529
- [63] Davies M.J. y Heller E.J., *J. Chem. Phys.*, **73** (1980) 4720
- [64] Heller E.J., *Phys. Rev. A*, **35** (1987) 1360
- [65] Husimi K., *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, **22** (1940) 264
- [66] Takahashi K., *Prog. Theo. Phys.*, **98** (1989) 109
- [67] Garrison J.C., *Am. J. Phys.*, **67** (1998) 196
-
- [68] Floquet G., *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, **12** (1883) 47
- [69] Kittel C., *Quantum Theory of Solids*, (Wiley, New York) 1963
- [70] Howland J.S., *Ind. Univ. Math. J.*, **28** (1979) 471
- [71] Hänggi P., in *Quantum Transport and Dissipation*, Dittrich T. et al. Eds., (Wiley-VCH, Weinheim) 1998

- [36] Bouwen R., *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphism, Lect. Notes in Math. Vol. 470.*, (Springer-Verlag) 1975
- [37] Smale S., *The Mathematics of Time*, (Springer-Verlag) 1980
- [38] Moser J., *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, (Annals of Mathematics Studies 77, Princeton University Press) 1973
- [39] Smale S., *Diffeomorphisms with Many Periodic Points in Differential and Combinatorial Topology*, Cairns S.S. Ed., (Princeton University Press) 1963
- [40] Zehnder E., *Comm. Pure Appl. Math.*, **26** (1973) 131
- [41] Berry M. V., in *Regular and Irregular Motion, AIP Conference Proceedings 46, Topics in nonlinear dynamics*, (AIP) 1978
- [42] Gaspard P., *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*, (Cambridge University Press) 1998
- [43] Sinai Ya. G., *Russian Math. Surveys*, **25** (1970) 137
- [44] Breyman W. y Jung C., *Europhys. Lett.*, **25** (1994) 509
- [45] Beck C. y Schlögl F., *Thermodynamics of Chaotic Systems*, (Cambridge University Press) 1997
- [46] Vollmer J. y Breyman W., *Helv. Phys. Acta*, **66** (1993) 91
- [47] Troll G., *Physica D*, **50** (1991) 276
- [48] Lichtenberg A. J. y Lieberman M. A., *Regular and Chaotic Dynamics*, (Springer-Verlag) 1991
- [49] Arnold V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, (Springer-Verlag New-York) 1978
- [50] Gray S. K., Rice S. A. y Noid D. W., *J. Phys. Chem.*, **81** (1986) 1083
- [51] Tersigni S. H., Gaspard P. y Rice S. A., *J. Chem. Phys.*, **92** (1990) 1775
- [52] Burghardt I. y Gaspard P., *J. Chem. Phys.*, **100** (1994) 6395

- [53] Dantus M., Bowman R. M., Gruebele M. y Zewail A. H., *J. Chem. Phys.*, **91** (1989) 7437
- [54] Rice S. A., Gaspard P. y Nakamura K., *Adv. Class. Traj. Methods*, **1** (1992) 215
- [55] Poincaré H., *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste*, (Gauthier-Villars: Paris) 1899
- [56] Leyvraz F. y Seligman T.H., *J. Math. Phys.*, **30** (1989) 2512
- [57] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. y Flannery B.P., *Numerical Recipes in FORTRAN 77*, (Cambridge University Press) 1996
- [58] Karney C.F., *Physica D*, **8** (1983) 360
- [59] Chirikov B. y Shepelyansky D.L., *Physica D*, **13** (1984) 395
- [60] Ruelle D., *Thermodynamic Formalism*, in Vol. 5 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, (Addison-Wesley, Reading) 1978
- [61] Bohigas O., Tomsovic S. y Ullmo D., *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 1479
- [62] Leyvraz F. y Ullmo D., *J. Phys. A*, **29** (1996) 2529
- [63] Davies M.J. y Heller E.J., *J. Chem. Phys.*, **73** (1980) 4720
- [64] Heller E.J., *Phys. Rev. A*, **35** (1987) 1360
- [65] Husimi K., *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, **22** (1940) 264
- [66] Takahashi K., *Prog. Theo. Phys.*, **98** (1989) 109
- [67] Garrison J.C., *Am. J. Phys.*, **67** (1998) 196
-
- [68] Floquet G., *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, **12** (1883) 47
- [69] Kittel C., *Quantum Theory of Solids*, (Wiley, New York) 1963
- [70] Howland J.S., *Ind. Univ. Math. J.*, **28** (1979) 471
- [71] Hänggi P., in *Quantum Transport and Dissipation*, Dittrich T. et al. Eds., (Wiley-VCH, Weinheim) 1998

- [72] Stöckmann H.-J., *Quantum Chaos an introduction*, (Cambridge University Press) 1999
- [73] Blumel R. y Smilansky U., *Physica D*, **36** (1989) 111
- [74] Blumel R. y Smilansky U., *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 241
- [75] Ericson T., *Phys. Rev. Lett.*, **5** (1960) 430
- [76] Jung C. y Seligman T.H., *Phys. Rep.*, **285** (1997) 77
- [77] Percival I. C., in *Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction* Month M. et al. Eds., (American Institute of Physics) 1980
- [78] Aubry S., in *Solitons and Condensed Matter* Bishop A. R. et al. Eds., (Springer-Verlag) 1978
- [79] Jung C., Mejia-Monasterio C. y Seligman T.H., *Phys. Lett. A*, **198** (1995) 306
- [80] Cvitanović P., Artuso R., Mainieri R., Tanner G. y Vattay G., *Classical and Quantum Chaos* www.nbi.dk/ChaosBook/, (Niels Bohr Institute, Copenhagen) 2001
- [81] Meiss J. D., *Rev. Mod. Phys.*, **64** (1992) 795
- [82] Jung C. y Tel T., *J. Phys. A*, **24** (1991) 2793
- [83] Geisel T., Zacherl A. y Radons G., *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 2503
- [84] Lai Y. C., Blümel R., Ott E. y Grebogi C., *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992) 3491
- [85] Weiss M., Hufnagel L. y Ketzmerick R., *arXiv:nlin.CD/0106021*, (2001)
- [86] Richter P. H., Scholz H.-J. y Wittek A., *Nonlinearity*, **3** (1990) 45
- [87] Kaplan L. y Heller E.J., *Physica D*, **121** (1998) 1
- [88] Raizen M., private communication
- [89] Richter A., private communication

- [90] Sinai Y.G., *Usp. Mat. Nauk.*, **27** (1972) 21
- [91] Bowen R., in *Lecture Notes in Mathematics* vol.**470**, (Springer-Verlag) 1975
- [92] Mayer D.H., in *Lecture Notes in Physics* vol.**123**, (Springer-Verlag) 1980