UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Discusión de la Ecuación de Schrödinger No Lineal utilizando Teoría de Dispersión y Teoría de Operadores."

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

FISICO

PRESENTA:

María de los Angeles Sandoval Romero

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RICARDO ALBERTO WEDER ZANINOVICH

2001

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

VERSIDAD NACIONAL
AVPNOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Discusión de la ecuación de Schrödinger no lineal utilizando teoría de dispersión y teoría de operadores".

realizado por Sandoval Romero María de los Angeles

con número de cuenta 9561761-7 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. RICARDO WEDER ZANINOVICH	
Propietario	DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ	F. MN
Propietario	DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ	
Suplente	DR. CHUMIN WANG CHEN	
Suplente	DR. JOSE LUIS MATEOS TRIGOS	

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

Dedicatoria

Este trabajo lo dedico a mi Madre, María de los Ángeles Romero B. y a mi Tomás.

Agradecimentos

Quiero manifestar mi mas profundo agradecimiento a mi profesor y director de tesis, el Dr. Ricardo Weder Z., por todo el apoyo y la paciencia que recibí de él a lo largo del desarrollo de este trabajo de tesis.
También quiero agradecer al Dr. Julio Herrera por la ayuda que me brindó durante la etapa de correcciones de esta tesis.

Introducción

El fenómeno del movimiento de las ondas en un medio es algo con lo que nos encontramos todos los días, así las cosas, es algo muy común, usar toda clase de ondas en nuestra vida diaria, por decir: ondas de radio, ondas de agua, microondas, ondas de luz, ondas de sonido, etc..., es en ello que radica la importancia física de poderlas describir de la manera mas precisa posible para poder hacer uso de ellas.

Se sabe actualmente que en general el movimiento de las ondas en un medio cumple con el principio de superposición, pero ello solo funciona cuando las ondas de las que estamos hablando tienen bajas amplitudes. En general los fenómenos reales que involucran el movimiento de las ondas y que actualmente se estudian, obedecen una dinámica no lineal. Así por ejemplo encontramos: las ondas de un rayo laser "fuerte" o las ondas en un plasma.

Una de las ecuaciones a las que se ha recurrido para describir este tipo de dinámica no lineal de las ondas, es la Ecuación de Schrödinger No lineal *"cúbica"*, que en el contexto en el que hablamos de la velocidad de grupo de las ondas en movimiento se puede ver como:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{d^2}{dx^2}\psi + g|\psi|^2\psi = 0 \quad g = \pm 1$$

Donde $\psi(x,t)$ es la función de onda. Debo mencionar que el nombre de ecuación de Schrödinger No lineal se debe a una analogía con el nombre de la ecuación de Schrödinger Lineal que se estudia en la Mecánica Cuántica, a saber:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{d^2}{dx^2}\psi = 0.$$

También en analogía a la interpretación de la ecuación de Schrödinger Lineal, en la ecuación No lineal "cúbica" se interpreta a la parte de $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ como la energía cinética del sistema y a la parte de $-g|\psi|^2$ como la energía potencial del sistema.

Una de las preguntas fundamentales para encontrar la solución de la ecuación de Schrödinger No Lineal "cubica" es saber si dichas soluciones son "estables" o no. Actualmente se sabe que cuando $g = -1$ dichas soluciones son estables y cuando $g = +1$ las soluciones son "modulacionalmente" inestables. Existen algunos autores que restringen a la inestabilidad "modulacional" cuando las perturbaciones de la onda son en la dirección de la propagación de la misma y dan el nombre de inestabilidad "filamental" cuando las perturbaciones son en las direcciones transversales a la propagación de la onda. Este tipo de inestablilidad tiene una interpretación física relevante dentro de la óptica no lineal.

Fue a finales del siglo XIX que se observó lo que despues sería (en los años 60) la primera solución exacta y analítica de la ecuación de Schrödinger No lineal cubica, dicha solución se conoce con el nombre de "solitones" (el nombre de solitón proviene del hecho de que se trata de una onda solitaria que emerge de la colision de dos ondas similares sin cambiar su forma y su velocidad) y es de la siguiente forma:

$$\psi(x,t) = \sqrt{\rho(x,t)}e^{i\sigma(x,t)} \quad .$$

Cuando $g > 0$ se tiene que:

$$\rho = \rho_0 sech^2(\sqrt{g\rho_0}x), \quad \sigma = \frac{g}{2}\rho_0 t,$$

y cuando $g < 0$ se tiene que:

$$\rho = \rho_0[1 - a^2(\sqrt{|g|\rho_0}ax],$$

$$\sigma = \frac{sin^{-1}(a\tanh(\sqrt{|g|\rho_0}ax)}{[1 - a^2 sech^2(\sqrt{|g|\rho_0}ax)]^{\frac{1}{2}} - \frac{|g|}{2}\rho_0(3 - a^2)t} \quad ,$$

donde a es una constante real y ρ_0 es la amplitud del solitón, cuando $g > 0$ a los solitones se les conoce como solitones claros (*"bright solitons"*) y cuando $g < 0$ se les conoce como solitones oscuros (*"dark solitons"*).

De este modo la importancia de la Ecuación de Schrödinger No Lineal "cubica" radica en que se utiliza en la descripción de la dinámica de ondas no lineales como por ejemplo: en la propagación de un rayo laser en un medio con un índice de refracción sensible a la amplitud de la onda, o por ejemplo ondas de agua propagándose en la superficie libre de un fluido ideal o en ondas en plasmas.

Todos estos casos se han estado trabajando, dada su relevancia física, derivado del problema en específico una Ecuación de Schrödinger No lineal "cubica" para la cual es posible encontrar una solución de forma explícita.

En este trabajo de tesis se pretende discutir la forma en que dicho problema es abordado para casos mas generales en los cuales la nolinealidad abarca más de un sólo término cúbico. En este caso no es posible presentar la solución de la ecuación de manera explícita, pero si es posible caracterizarla de manera asintótica y recuperar mediante un porcedimiento matemático los potenciales que nos determinan el carácter del sistema dispersivo, es decir, el potencial.

En términos generales dado que en esta tesis nos interesa abordar el problema desde el punto de vista matemático el grueso del trabajo está enfocado al estudio de ciertas disciplinas matemáticas que nos servirán para poder discutir la forma en que dichas herramientas nos sirven para resolver el problema en específico. Estas herramientas son lo que se conoce como Teoría de operadores y Teoría de dispersión.

De este modo en esta tesis se discutirá una aplicación de la Teoría de dispersión y Teoría de operadores para resolver la ecuación de Schrödinger con un término no lineal específico, dicha solución aparece en un artículo recientemente publicado.[1] El problema que se plantea en dicho artículo es el siguiente:

Dada la ecuación:

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -\frac{d^2}{dx^2}u(t,x) + V_0(x)u(t,x) + \sum_{j=1}^{\infty} V_j(x)|u|^{2(j_0+j)}u(t,x) \quad ,$$

donde j_o es un entero. $j_o \geq \frac{p-3}{2}$ para alguna $\sigma < p < \infty$ con $\sigma \approx 3.57$. Se probará que bajo ciertas condiciones, el límite para bajas amplitudes del operador de dispersión determina unívocamente las funciones $V_j, j = 0, 1, \cdots$. El método también sirve para reconstruir los potenciales $V_j, j = 0, 1, \cdots$

La lógica del planteamiento en el problema matemático nos obliga a desarrollar en los primeros dos capítulos de la tesis, la fundamentación de las herramientas matemáticas para una total comprensión del problema. Dichas herramientas forman parte de lo que sería un curso introductorio en las materias conocidas como Teoría de Dispersión y como Teoría de operadores. En el primer capítulo se desarrollan los espacios fundamentales para tener las bases matemáticas necesarias para la comprensión de estas teorías. Dichos espacios son conocidos como Espacios de Hilbert, Espacios L^p y Espacios de Sobolev.

En el segundo capítulo se definirán los conceptos básicos en la Teoría de Operadores.

[1] Weder, R.A *Inverse Scattering for the Nonlinear Schrödinger Equation. Reconstruction of the Potential and the Nonlinearity.* Matemathical Methods in the Applied Sciences. 24(2001), 245-254

En el tercer capítulo se entra de lleno a la parte física del problema y se da una introducción de lo que son los conceptos fundamentales para el desarrollo de la Teoría de Dispersión.

En el cuarto y último capítulo se presenta la discusión del artículo en el que se soluciona la ecuación de Schrödinger no lineal. La discusión se centra en el planteamiento del problema así como la complementación de algunos resultados.

Discusión de la Ecuación de Schrödinger No Lineal utilizando Teoría de Dispersión y Teoría de Operadores

María de los Ángeles Sandoval Romero

Índice General

1 Espacios Matemáticos Importantes **2**
1.1 Espacios de Hilbert. Conceptos Básicos 2
1.1.1 Ortogonalidad 2
1.1.2 Espacios Lineales Normados 4
1.1.3 Geometría de los Espacios de Hilbert 5
1.1.4 Espacios Lineales Normados y mapeos lineales 7
1.1.5 Bases Ortonormales 11
1.2 Espacios L^p. Conceptos Básicos 12
1.2.1 Introducción 12
1.2.2 Integrales de funciones medibles 13
1.2.3 *Funciones convexas y desigualdades* 16
1.2.4 Espacios $\mathcal{L}^p$ y L^p 18
1.3 Espacios de Sobolev. Conceptos Básicos 20
1.3.1 Funciones de prueba y Distribuciones 21
1.3.2 Definición de los espacios de Sobolev 22

2 Operadores lineales **25**
2.1 Resultados Preliminares 25
2.2 Operadores en espacios de Hilbert 26
2.3 Operadores en Espacios de Banach 29
2.4 Operadores Compactos. Aspectos Importantes 33
2.5 Operadores simétricos. Proyecciones 34
2.6 Grupos unitarios 37
2.7 Contracciones y puntos fijos 37

3 Teoría de la dispersión **39**
3.1 Introducción 39
3.1.1 Características físicas de los sistemas de dispersión 40
3.2 Descripción de los Sistemas Mecánico Cuánticos 40
3.3 Teoría de Dispersión Dependiente del Tiempo 43
3.3.1 La Condición Asintóntica 43

4 La ecuación de Schrödinger No lineal **52**
4.1 Discusión General del Artículo 52

Capítulo 1

Espacios Matemáticos Importantes

1.1 Espacios de Hilbert. Conceptos Básicos

Los espacios de Hilbert son una generalización natural de los espacios euclidianos R^n. Usualmente tienen dimensión infinita y aparecen como conjuntos en los que se trabajan muchos problemas de matemáticas y de física matemática Consideremos, primero un espacio vectorial V sobre un campo R (o C), que está equipado con un producto escalar (o interno) entre sus elementos. Para cualquiera pareja de vectores $x, y \in V$ se asociará en número (x, y) de manera que las siguientes propiedades se cumplan:

$$(x,x) \geq 0, (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$$

(θ es el cero en V)

$$(x, y+z) = (x,y) + (x,z) \forall x,y,z \in V. \tag{1.1.1a}$$

$$(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x,y) \forall x,y \in V, \forall \lambda \in K. \tag{1.1.1b}$$

(K= R o C)

$$(x,y) = \overline{(y,x)}.$$

Se puede notar que de las propiedades (1.1.1) se desprenden lo siguiente:

$$(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x,y) + \bar{\beta}(x,z) \forall x,y,z \in V, \alpha, \beta \in K \tag{1.1.2a}$$

$$(\lambda x, y) = \lambda(x,y) \forall x,y \in V, \lambda \in K. \tag{1.1.2b}$$

$$(x+y, z) = (x,z) + (y,z) \forall x,y,z \in V. \tag{1.1.2c}$$

1.1.1 Ortogonalidad

Decimos que dos elementos $x, y \in V$ son ortogonales si su producto interno es cero, entonces escribimos:

$$x \perp y \Leftrightarrow (x,y) = 0 \tag{1.1.1.1}$$

De este modo se pueden definir conjuntos ortonormales en V de la siguiente manera:
$A \subset V$ es ortonormal si $(x,y) = 0 \forall x, y \in A x \neq y$

$$(x,x) = 1 \forall x \in A. \tag{1.1.1.2}$$

La norma $||x||$ de un elemento de V está definida por:

$$(x,x)^{\frac{1}{2}} = ||x||. \tag{1.1.1.3}$$

Un importante resultado conocido como *Desigualdad de Bessel* puede ser establecido como sigue:

Proposición 1.1.1.1

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ un conjunto finito ortonormal de V. Entonces $\forall x \in V$ la siguente desigualdad se cumple:

$$\sum_{n=1}^{N} \mid (x, x_n) \mid^2 \leq \|x\|^2. \tag{1.1.1.4}$$

Demostración:

Empezemos observando que:

$$x = \sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n + \left(x - \sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\right) = y + (x-y) = y + z \tag{1.1.1.5}$$

Ahora notemos que:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n, x - \sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\right)\\
&= \left(\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n, x\right) - \left(\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n, \sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N}(x,x_n)(x_n,x) - \sum_{i,j=1}^{N}((x,x_i)x_i,(x,x_j)x_j)\\
&= \sum_{n=1}^{N}|(x,x_n)|^2 - \sum_{n=1}^{N}(x,x_i)\overline{(x,x_i)} = 0.
\end{aligned}$$

En ese caso tendremos que $\|z\|^2 + \|y\|^2 = \|y+z\|^2$ y así $\|y\|^2 \leq \|y+z\|^2 = \|x\|^2$ Y como:

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &= \left(\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n, \sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N}(x,x_n)\overline{(x,x_n)} = \sum_{n=1}^{N}|(x,x_n)|^2.
\end{aligned}$$

Se obtiene la desigualdad (1.1.1.4) $\diamondsuit$

Como corolario de este resultado se obtiene la siguiente desigualdad también muy importante y que es conocida como *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

Proposición 1.1.1.2

Para cualquiera par de elementos $x, y \in V$ la siguiente desigualdad se cumple:

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \tag{1.1.1.6}$$

Demostración:

Si $y = 0$, tenemos que $(x,y) = (x, y+y) = (x,y) + (x,y)$ por lo que $(x,y) = 0$. Además como $\|y\| = 0$ la ecuación (1.1.1.6) se cumple trivialmente. En caso de que $y \neq 0$ se tiene que, como el conjunto formado por $\left(\frac{y}{\|y\|}\right)$ es un conjunto ortonormal de un elemento, entonces se puede aplicar (1.1.1.4), y siendo así se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\left|\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right)\right|^2 \leq \|x\|^2\\
&= \frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2\\
&\Leftrightarrow |(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.
\end{aligned}$$

Lo cual nos da la desigualdad (1.1.1.6)$\diamondsuit$

Otra proposición interesante es la siguiente, en la que se establece una igualdad conocida como: *Ley del Paralegramo*

Proposición 1.1.1.3

Para cualesquiera $x, y \in V$ la siguiente desigualdad se cumple:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{1.1.1.7}$$

Demostración:

Tenemos que:

$$\|(x+y)\|^2 + \|(x-y)\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + (x,y) + (y,x) - (y,x) - (x,y) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

lo que nos da el resultado esperado. ◊

Definición 1.1.1.4

Un espacio lineal sobre C o R "equipado"de un producto escalar es llamado *ESPACIO PRE-HILBERT*.

1.1.2 Espacios Lineales Normados

Estos espacios son nuevamente espacios vectoriales definidos sobre un campo K (que puede ser C o R) pero ahora "equipados"con una función (*'norma'*) $V \to R$, denotada por: $x \in V \to \|x\| \in R$, tal que cumple con las siguientes propiedades:

(1)
$$\|x\| \geq 0 \forall x \in V, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(2)
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \forall \alpha \in K, x \in V \tag{1.1.2.1}$$

(3)
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in V$$

Proposición 1.1.2.1

Cualquier Espacio Pre-Hilbert se convierte en un espacio lineal normado con la definición (1 1 1.3)

$$(x,x)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$$

Demostración:

La primera de las ecuaciones (1.1.2 1) se cumple fácilmente de la definición de producto escalar. Ahora notemos que:

$$\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \alpha \cdot \bar{\alpha} \|x\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2$$

Además de que

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(x,y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|,$$

con lo que:

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2,$$

y por tanto se obtiene el resultado esperado. ◊

Mencionemos ahora la definición de espacio métrico.

Definición 1.1.2.2

Un mapeo $d : X \times X \to R_+$ es llamado *métrica* (o *distancia*) en el espacio X, si satisface las siguientes tres condiciones:

(1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Al par (X, d) se le conoce como *espacio métrico.*
Observación:
Cualquier espacio lineal normado V es también un espacio lineal métrico, donde la distancia (métrica) entre dos elementos $x, y \in V$ está definida por:

$$d(x,y) = \|x-y\|. \tag{1.1.2.2}$$

Consecuentemente, los conceptos de convergencia, sucesión de Cauchy, completez ("Cualquier sucesión de Cauchy es convergente si y sólo si tiene un límite") que son muy empleados en los espacios métricos, tienen su correspondiente significado en espacios normados lineales, así como en espacios Pre-Hilbert Por ello daremos la siguiente definición.

Definición 1.1.2.3
Cualquier espacio Pre-Hilbert que es completo es un espacio de Hilbert. Cualquier espacio normado lineal completo es un espacio de Banach. Todo espacio normado X puede ser un espacio de Banach o ser un subconjunto denso de un espacio de Banach Y $X \subset Y$ tal que la norma definida en X cumple con la siguiente igualdad:

$$\|x\|_X = \|x\|_Y \forall x \in X.$$

En ese caso al espacio Y se le conoce como el completamiento de X. Podemos ver que la norma en Y vista como un operador, en este caso, es una extensión de la norma de X (un operador lineal A' es llamado extensión de A si $D(A) \subseteq D(A')$ y si $A'f = Af, \forall f \in D(A)$).

Definición 1.1.2.4
Se dice que dos normas definidas en un espacio vectorial X son *equivalentes* si estas inducen la misma topología en X, esto es, si para alguna constante $c > 0$:

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{1}{c}\|x\|_1$$

para toda $x \in X$, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ son las dos normas

1.1.3 Geometría de los Espacios de Hilbert

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y M un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$ (Esto es, si $(x_n)_1^\infty$ es una sucesión de M y $x_n \to x_o \in \mathcal{H}$ entonces $x_o \in M$). Con el producto escalar inducido, M es un subespacio Pre-Hilbert de $\mathcal{H}$ que también será completo. (Si $(x_n)_1^\infty$ es una sucesión de Cauchy de M entonces converge a alguna $\bar{x} \in \mathcal{H}$ y como el conjunto es cerrado $\bar{x} \in M$ también.)
Definamos ahora en $\mathcal{H}$ el subconjunto $M^\perp$ (El complemento ortogonal de M) que está dado por.

$$M^\perp = \{h \in \mathcal{H} \backslash h \perp M\} = \{h \in H \backslash (h,m) = 0 \forall m \in M\} \tag{1.1.3.1}$$

Ahora el subconjunto $M^\perp$ es también un subespacio lineal cerrado; en efecto, si $h_n \in M^\perp$ y $h_n \to h_o$ se concluye que $(h_n, m) = 0 \forall m \in M, \forall n \in N$ y por lo tanto $(h_o, m) = 0 \forall m \in M$ Esto es fácilmente observable por que :

$$|(h_n,m) - (h_o,m)| = |(h_n - h_o, m)| \leq \|h_n - h_o\|\|m\| \to 0, n \to \infty.$$

Por lo que ahora tenemos dos subespacios de Hilbert de $\mathcal{H}$, M y $M^\perp$, notemos que $M \cap M^\perp = \{0\}$.
Un teorema fundamental en la teoría de los Espacios de Hilbert es el siguiente:

Teorema 1.1.3.1 (*Teorema de la Proyección*)
Sea M un subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Cualquier $h \in \mathcal{H}$ puede ser escrita de la forma: $h = k + l$ donde $k \in M$ y $l \in M^\perp$, los elementos k, l están determinados de manera única por h (Decimos que $\mathcal{H}$ es la suma directa de M y $M^\perp$).
Para la demostración presentaremos primero el siguente lema.

Lema 1.1.3.2
Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $K \subset \mathcal{H}$ un conjunto convexo cerrado. Denotaremos $d = inf\{\|x\|, x \in K\}$. Entonces, existe un único elemento $x_o \in K, \|x_o\| = d$
Demostración:
Notemos primero que $\forall n \in N \exists x_n \in K$ tal que:

$$d \leq \|x_n\| \leq d + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = d, \tag{1.1.3.2}$$

luego observaremos que la sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy. Usando la Ley del Paralelogramo tenemos la siguiente relación:

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\left(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2\right) - \|x_n +_m\|^2,$$

que también puede ser expresada como:

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2\right) - \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2. \qquad (1\ 1.3\ 3)$$

Por la convexidad del conjunto K tenemos que· $\frac{1}{2}((x_n + x_m) \in K$, por lo que, $\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\| \geq d$ con lo que. de acuerdo a la ecuación (1.1.3.3), tendremos la siguiente desigualdad·

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2\right) - d^2. \qquad (1.1.3.4)$$

Ahora de acuerdo con (1.1.3.2) tendremos que $\|x_n\|^2 \to d^2, \|x_m\|^2 \to d^2$; entonces, $\forall \epsilon > 0$, tendremos que $\|x_n\|^2 < d^2 + \epsilon^2, \|x_m\|^2 < d^2 + \epsilon^2$, si tomamos $n \geq \bar{n}(\epsilon), m \geq \bar{n}(\epsilon)$, tendremos que:

$$\|x_n - x_m\|^2 < 2\left(2d^2 + 2\epsilon^2\right) - 4d^2 = 4\epsilon^2, n, m \geq \bar{n}(\epsilon),$$

lo que significa que $(x_n)_1^\infty$ es una sucesión de Cauchy. Sea $x_o = \lim_{n\to\infty} x_n$, entonces $x_o \in K$ y $\|x_o\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = d$.
Finalmente, supongamos que $x_1 \in K$ y que $\|x_1\| = d$, entonces $\frac{1}{2}(x_o + x_1) \in K$ y:

$$0 \leq \left\|\frac{x_1 - x_o}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x_o\|^2 + \|x_1\|^2\right) - \left\|\frac{x_o + x_1}{2}\right\|^2 = d^2 - \left\|\frac{x_o + x_1}{2}\right\|^2 \leq 0.$$

Por lo que $\|x_0 - x_1\| = 0, x_1 = x_o$. ◊

Corolario 1.1.3.3

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y sea $x \in \mathcal{H}$. Entonces existe en M un único elemento z tal que:

$$\|z - x\| \leq \|y - x\|, \forall y \in M$$

Demostración:
Tomemos $K = x - M = \{x - m, m \in M\}$.Es facil ver que K es un conjunto convexo en $\mathcal{H}$. Entonces, $\exists! w \in K$, tal que

$$\|w\| = \inf_{m\in M}\{\|x - m\|\}$$

Ahora, $w \in K$ significa que $w = x - z$, para algún $z \in M$ Esto es:

$$\|x - z\| \leq \|x - y\|, \forall y \in M$$

Con lo que se concluye el resultado. ◊
Ahora podremos presentar la demostracíon del teorema 1.1 3.1.
Demostración del teorema 1.1.3.1:
Primeramente estableceremos la unicidad de la descomposición, para ello asumamos lo siguiente:

$$h = k_1 + l_1 = k_2 + l_2, k_i \in M, l_i \in M^\perp, i = 1, 2$$

Lo que origina que:

$$k_1 - k_2 = l_1 - l_2, k_1 - k_2 \perp l_1 - l_2$$

Siendo así: $k_1 = k_2, l_1 = l_2$.
Ahora se establecerá la existencia de la descomposición. Para $h \in \mathcal{H}$, consideremos (por el Corolario 1.1.3.2) el único elemento $z \in M$, tal que·

$$\|z - h\| \leq \|y - h\|, \forall y \in M. \qquad (1.1.3.5)$$

Ahora si escribimos $h = z + (h - z)$y denotamos $h - z = w$ (notemos que $\|w\| = \inf_{z\in M}\{\|h - z\|\}$). Parametrizando de manera real a $y = z + tu$ con $t \in R$ y $z, u \in M$ podremos derivar lo siguiente:

$$d = \|z - h\| \leq \|h - (z + tu)\|, \forall t \in R, \forall u \in M$$

ue es lo mismo que:

$$d^2 \leq \|w - tu\|^2 = \|w\|^2 - 2tRe\,(w,u) + t^2\|u\|^2 = d^2 - 2tRe\,(w,u) + t^2\|u\|^2,$$

ɔ que implica que:

$$0 \leq -2tRe\,(w,u) + t^2\|u\|^2, \forall t \in R$$
$$t\left(t\|u\|^2 - 2Re(w,u)\right) \geq 0, \forall t \in R. \qquad (1.1\,3.6)$$

\hora, si $Re(w,u) \neq 0$, la desigualdad (1.1.3.6) falla para $0 < t < \frac{2Re(w,u)}{\|u\|^2}$ o para $\frac{2Re(w,u)}{\|u\|^2} < t < 0$. Por lo que $?Re\,(w,u) = 0, \forall u \in M$. Y el teorema para espacios de Hilbert sobre R está demostrado. Para el caso de los espacios le Hilbert sobre C se procede de manera análoga sólo que la parametrización no se hace con t sino con $i\tau$, con $\tau \in R$ r se obtendrá $Im\,(w,u) = 0, \forall u \in M$. En cualquier caso se obtiene $(w,u) = 0 \forall u \in M, w \perp M$. $\diamondsuit$

Teorema 1.1.3.4

Sea $M \subset \mathcal{H}$ un subespacio (no necesariamente cerrado) del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $\overline{M}$ la cerradura de M. Entonces a siguiente igualdad se da:

$$\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{M}.$$

Demostración:

Primero demostraremos que $\overline{M} \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$, puesto que $h \in M, (h,x) = 0 \forall x \in M^{\perp}, h \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$, tomando las clausuras y considerando que el complemento ortonormal es un conjunto cerrado se tiene el resultado.

Ahora, demostraremos que $\overline{M} \supset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$, tomemos $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Se puede escribir $x = y + z$, donde $y \in \overline{M}, z \in \overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$. Dado que $x \perp M^{\perp}$, tenemos que $(x,z) = 0$. Esto es que $0 = (y+z,z) = (y,z) + \|z\|^2 = \|z\|^2$ lo que implica que $z = 0$ y por tanto $x = y \in \overline{M}$ $\diamondsuit$

1.1.4 Espacios Lineales Normados y mapeos lineales

Decimos que una sucesión $(x_n)_1^{\infty}$ en un espacio normado lineal E, es convergente al elemento $x_o \in E$ si y solo si $\|x_n - x_o\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. También decimos que una sucesión $(x_n)_1^{\infty}$ en E es de Cauchy si y sólo si $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{k} \in N$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$, para cualesquiera $m \geq \bar{k}, n \geq \bar{k}$.

En relación con lo dicho anteriormente con respecto a los espacios de Banach, decimos que un espacio E es de Banach si cada sucesión de Cauchy en E converge a un elemento de E (Recordemos que un espacio de Banach es un espacio normado completo).

Definiremos ahora lo que es una vecindad abierta y una vecindad cerrada en un espacio normado E

Una vecindad abierta $B\,(x_o, \rho)$ en E (con centro en x_o y radio ρ) está dada por la desigualdad:

$$B\,(x_o, \rho) = \{x \in E, \|x - x_o\| < \rho\} \qquad (1.1\,4.1)$$

Una vecindad cerrada $C\,(x_o, \rho)$ (nuevamente con centro x_o y radio ρ) será definida por la siguiente desigualdad:

$$C\,(x_o, \rho) = \{x \in E, \|x - x_o\| \leq \rho\} \qquad (1.1.4.2)$$

Con la definición de vecindad cerrada (o abierta) se puede decir lo que es un conjunto cerrado A en un espacio normado E con la siguiente definición:

$A \subset E$ es acotado si y sólo si $\exists$ una vecindad $B\,(0,\rho)$ tal que $x \in B\,(0,\rho) \forall x \in A$.

(O equivalentemente, si $\exists \rho > 0$ tal que $\|x\| < \rho, \forall x \in A$)

Consideremos ahora lo siguiente, para dar una introducción de la teoría de operadores. Sean E y F dos espacios normados. Luego consideremos a T, un mapeo lineal (función u operador) definido de E hacia F.

Antes de plantear un nuevo teorema, debemos de recordar que un mapeo T es lineal cuando:

$$T\,(\alpha x + \beta y) = \alpha T\,(x) + \beta T\,(y)\,, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in E. \qquad (1.1.4.3)$$

También debemos decir que T es un mapeo continuo (en E) si la siguiente propiedad se cumple:

$$\forall \{x_n\}_1^{\infty} \in E, x_n \to x_o \in E \Rightarrow Tx_n \to Tx_o \in F \qquad (1.1\,4.4)$$

Teorema 1.1.4.1

Cualquier mapeo lineal $T\,.\,E \to F$ es continuo si y sólo si, $\forall$ conjunto acotado $A \subset E$ la imagen $T(A)$ es acotada en F.

)emostración:
'rimero asumamos que T es continuo y que A es un conjunto acotado en E. Si consideramos que $T(A)$ no es acotado n F, podemos encontrar entonces $\forall n \in N$ elementos $x_n \in A$ tales que $\|Tx_n\|_F \geq n$. De esto se sigue que, mientras ue $\frac{x_n}{n} \to 0$ en E se tiene que $\|T(\frac{x_n}{n})\|_F = \frac{1}{n}\|Tx_n\|_F \geq 1$; lo que contradice el hecho de que T es continua en todo E.)e manera inversa notemos que si $\|x\|_E < C'$, entonces $\|Tx\|_F < C$ (Para algún $C > 0$). De esta manera $\forall x \in$ $\bar{z}, x \neq 0$ se tiene que $\|T(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F < C$, entonces $\|Tx\|_F < C\|x\|_E$ y por tanto $\|T(x-y)\|_F \leq C\|x-y\|_E, \forall x, y \in E$. .o que significa que el operador es Lipschitz continuo en E. ◇
Jna vez demostrado el teorema, se introducirá un caso particular de una clase de operadores, aquellos que envían . el espacio E en el espacio K que es un campo, y que por si mismo es espacio vectorial. Al conjunto de todos los peradores lineales de este tipo se le conoce como espacio dual $E' = \ell(E, K)$ de E.

Definiremos en el espacio dual E' la norma siguiente:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \mid f(x) \mid . \tag{1.1.4.5}$$

/las adelante observaremos que el espacio dual E' es un espacio normado completo, es decir un espacio de Banach.
\ continuación presentaremos el siguiente teorema conocido como el Teorema de la representación de Riesz.

[eorema 1.1.4.2

ea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{H}' = \ell(H, C)$ su espacio dual. Entonces para cada $F \in \mathcal{H}'$ existe un único elemento $y_F \in \mathcal{H}$, tal que la siguiente relación se da:

$$F(x) = (x, y_F) \forall x \in \mathcal{H}. \tag{1.1.4.6}$$

/ además se da la siguiente equivalencia de normas:

$$\|F\|_{\mathcal{H}'} = \|y_F\|_{\mathcal{H}}. \tag{1.1.4.7}$$

Vota:
Cualquier elemento $y \in \mathcal{H}$ determina un elemento $F_y \in \mathcal{H}'$ dado que:

$$F_y(x) = (x, y). \tag{1.1.4.8}$$

Demostración:
Consideremos primero el espacio nucleo o Kernel de F:

$$KerF = \{x \in \mathcal{H}, F(x) = 0\} \tag{1.1.4.9}$$

Se puede deducir que el $KerF$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, puesto que si sucede que $x_n \to x_o$ entonces tenemos que dado que $x_n \in KerF$, entonces $F(x_n) = 0$ lo cual a su vez implica (dado que F es continuo) $F(x_o) = 0$ o lo que es lo mismo $x_o \in KerF$.
Cuando suceda que $KerF = \mathcal{H}$ entonces solo basta tomar a $y_F = 0$ y el teorema está demostrado.
En otro caso el $KerF$ es un subespacio propio de $\mathcal{H}$. Podemos hallar entonces un $y_o \perp KerF$, puesto que si $KerF$ es un subespacio propio entonces $\exists x \in \mathcal{H}, x \notin KerF$, de este modo se puede tomar $x = x_1 + x_2$,por el teorema de la Proyección, donde $x_1 \in KerF$ y $x_2 \in KerF^{\perp}$. De este modo se toma $x_2 = y_o$ y podemos afirmar que $y_o \perp KerF$.
Ahora se demostrará que para algún $\alpha \in C$, se tiene:

$$F(x) = (x, \alpha y_o) \forall x \in H \tag{1.1.4.10}$$

Observemos que:

$$F(y_o) = \bar{\alpha}\|y_o\|^2, \bar{\alpha} = \frac{F(y_o)}{\|y_o\|^2}.$$

Y con ello hemos obtenido el α adecuado para la ecuación (1.1.4.10). Para ello, notemos que dado que $y_o \notin KerF$ entonces $F(y_o) \neq 0$. Siendo así podemos observar lo siguiente:

$$x = \frac{F(x)}{F(y_o)}y_o + \left(x - \frac{F(x)}{F(y_o)}y_o\right)$$

Donde:

$$\frac{F(x)}{F(y_o)}y_o \notin KerF, \left(x - \frac{F(x)}{F(y_o)}y_o\right) \in KerF$$

Podemos ver que, $F\left(x - \frac{F(x)}{F(y_o)}y_o\right) = 0$, es decir que, $x - \frac{F(x)}{F(y_o)}y_o \in KerF$. Por lo que:

$$(x, \alpha y_o) = \left(\frac{F(x)}{F(y_o)}y_o, \alpha y_o\right) = \bar{\alpha}\frac{F(x)}{F(y_o)}\|y_o\|^2 = F(x)$$

Lo cual prueba la existencia de y_F si tomamos $y_F = \alpha y_o$.
La unicidad de y_F se hace inmediata si observamos que $F(x) = (x, y_F^1) = (x, y_F^2) \forall x \in H$ Si tomamos $x = y_F^1 - y_F^2$ entonces obtendremos $\|y_F^1 - y_F^2\| = 0$ por lo que $y_F^1 = y_F^2$.
Finalmente, establezcamos la relación (1.1.4.7), para ello tomemos:

$$\|F\|_{H'} = \sup_{\|x\|\leq 1} |F(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |(x, y_F)| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} (\|x\|\|y_F\|) = \|y_F\|,$$

y luego tenemos que:

$$\|F\|_{H'} \geq |F(\frac{y_F}{\|y_F\|})| = \left(\frac{y_F}{\|y_F\|}, y_F\right) = \|y_F\|,$$

con ello queda establecido el teorema. ◇
A continuación presentaremos lo que se conoce cono una forma sesquilineal. Decimos que una función $(x, y) \to B(x, y)$ definida en $H \times H \to K$ es una forma sesquilineal si satisface las siguientes propiedades:

(i)
$$B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z), \forall \alpha, \beta, x, y, z \in H \tag{1.1.4.11}$$

(ii)
$$B(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} B(x, y) + \bar{\beta} B(x, z), \forall \alpha, \beta, x, y, z \in H \tag{1.1.4.12}$$

Y también se asumirá que se cumple la siguiente propiedad:

(iii)
$$|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \forall x, y \in \mathcal{H}, \tag{1.1.4.13}$$

lo que nos dice que B es acotada.

Siendo así establezcamos el siguiente teorema:

Teorema 1.1.4.3

Bajo las condiciones establecidas en (1.1.4.11)-(1.1.4.13) existe un único operador lineal continuo $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que:

$$B(x, y) = (Ax, y), \forall x, y \in \mathcal{H}. \tag{1.1.4.14}$$

Además se puede establecer la igualdad siguiente:

$$\tilde{C} = inf\{C > 0, |B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|, \forall x, y \in H\} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_H = \|A\|. \tag{1.1.4.15}$$

Con lo cual se define la norma del operador A.
Demostración:
Probaremos la unicidad de la representación 1.1.4.14, supondremos que $B(x, y) = (A_1 x, y) = (A_2 x, y), \forall x, y \in \mathcal{H}$, con lo cual $((A_1 - A_2)x, y) = 0 \forall x, y \in \mathcal{H}$. Tomando $y = (A_1 - A_2)x$ tenemos que $\|(A_1 - A_2)x\|^2 = 0$ por lo que $A_1 x = A_2 x, \forall x \in \mathcal{H}, A_1 = A_2$.
Ahora demostraremos primero la ecuación (1.1.4.15). De la relación (1.1 4.13) podemos ver que $|(Ax, y)| \leq C\|x\|\|y\|, \forall x, y \in \mathcal{H}$. Tomando $y = Ax$ se tiene que.

$$\|Ax\|^2 \leq C\|x\|\|Ax\|, \forall x \in \mathcal{H}, \|Ax\| \leq C\|x\|, \forall x \in \mathcal{H}. \tag{1.1.4.16}$$

De esto se puede deducir que: $\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq C \ \forall C > 0$, y por la definición de $\tilde{C}$, $\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \tilde{C}$.
Para obtener la otra desigualdad consideremos la definición de la norma del operador A, $\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$. Lo primero que obsevaremos será que, $\forall y \in \mathcal{H}, y \neq 0$, se tiene que la siguiente desigualdad se cumple:

$$\|Ay\| = \|A(\frac{y}{\|y\|})\|\|y\| \leq \|A\|\|y\| \tag{1.1.4.17}$$

.hora se puede deducir lo siguiente:

$$|B(x,y)| = |(Ax,y)| \leq \|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|x\|\|y\|, \forall x,y \in \mathcal{H},$$

.or lo que se puede deducir que $\bar{C} \leq \|A\|$ y por tanto $\bar{C} = \|A\|$, es decir la ecuación (1.1.4.15) se cumple.
'ara finalizar la demostración, verificaremos la existencia de la ecuación (1.1.4.14). Tomemos entonces una $x \in \mathcal{H}$ y onsideremos el siguiente mapeo·

$$y \in \mathcal{H} \to \overline{B(x,y)} \in C, (R)$$

ie puede observar que dicho mapeo es una funcional lineal y como $|B(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \forall x,y \in \mathcal{H}$ se puede deducir ue:

$$\overline{|B(x,y)|} \leq C\|x\|\|y\| \forall x,y \in \mathcal{H},$$

o que indica que la funcional aqui definida es acotada y por tanto continua en $\mathcal{H}$. Siendo así se puede aplicar el eorema (1.1.4.2) y así se puede hallar un elemento $\omega_x \in \mathcal{H}$ tal que·

$$\overline{|B(x,y)|} = (y, \omega_x) \forall y \in \mathcal{H}$$

$$B(x,y) = (\omega_x, y) \forall y \in \mathcal{H}.$$

ii tomamos $Ax = \omega_x$, entonces $B(x,y) = (Ax,y) \forall y \in \mathcal{H}$ Notemos que A es un operador lineal:

$$B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y) = (Ax_1, y) + (Ax_2, y) = (Ax_1 + Ax_2, y),$$

/ por otro lado tenemos que:

$$B(x_1 + x_2, y) = (A(x_1 + x_2), y),$$

oor lo que se obtiene a siguiente igualdad:

$$(Ax_1 + Ax_2, y) = (A(x_1 + x_2), y),$$

o que implica a su vez que:

$$Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2) \forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}.$$

Para obtener $A(\alpha x) = \alpha A(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in \mathcal{H}$ el procedimiento es análogo. Finalmente para obtener la continuidad del operador A se demostrará que es acotado, y para ello se observa la ecuación (1.1.4.16) la cual nos da la relación de acotamiento y por tanto A es continuo $\forall x \in \mathcal{H}$. $\Diamond$

Nota: La desigualdad 1.1.4.16 nos da la condición de acotamiento que define a un operador lineal acotado.

Teorema 1.1.4.4

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{H}'$ su espacio dual Entonces $\mathcal{H}'$ tiene estructura de un espacio de Hilbert y existe una mapeo conjugado-lineal suprayectivo, isométrico $\sigma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$.

Demostración:

Primero debemos de hacer notar que $\mathcal{H}'$ es el espacio de Banach $\ell(\mathcal{H}; K)$, donde $\|f\|_{\mathcal{H}'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ Ahora, por el teorema (1.1.4.2) se tiene que $\forall f \in \mathcal{H}', \exists! y_f \in \mathcal{H}$ tal que:

$$f(x) = (x, y_f) \forall x \in \mathcal{H}$$

Definiremos, ahora el siguiente producto escalar en $\mathcal{H}'$:

$$(f,g)_{\mathcal{H}'} = \overline{(y_f, y_g)}_{\mathcal{H}} \forall f, g \in \mathcal{H}'.$$

Demostraremos, primeramente, que efectivamente es un producto escalar:
Notemos que $(f,f)_{\mathcal{H}'} = \|y_f\|^2 \geq 0$, ahora que si $(f,f)_{\mathcal{H}'} = 0$, entonces $y_f = 0$ y por tanto $f = 0$ en $\mathcal{H}'$
Ahora veremos que, para $f, g_1, g_2 \in \mathcal{H}'$ tenemos que, $(f, g_1 + g_2)_{\mathcal{H}'} = \overline{(y_f, y_{g_1+g_2})}$. Así dado que:

$$(g_1 + g_2)(x) = g_1(x) + g_2(x);$$

$$(x, y_{g_1+g_2}) = (x, y_{g_1}) + (x, y_{g_2}) = (x, y_{g_1} + y_{g_2}), \forall x \in \mathcal{H}.$$

Y por tanto $y_{g_1+g_2} = y_{g_1} + y_{g_2}$. De esta manera:

$$(f, g_1 + g_2)_{\mathcal{H}'} = \overline{(y_f, y_{g_1+g_2})} = \overline{(y_f, y_{g_1})} + \overline{(y_f, y_{g_2})} = (f, g_1)_{\mathcal{H}'} + (f, g_2)_{\mathcal{H}'}.$$

Ahora demostraremos que $(f, \lambda g)_{\mathcal{H}'} = \bar{\lambda}(f, g)_{\mathcal{H}'}, \forall \lambda \in K, f, g \in \mathcal{H}'$.Tenemos que:

$$(f, \lambda g)_{\mathcal{H}'} = \overline{(y_f, y_{\lambda g})}_{\mathcal{H}'},$$

lo que implica que:

$$(\lambda g)(x) = (x, y_{\lambda g}) = \lambda g(x) = \lambda(x, y_g) = (x, \bar{\lambda} y_g), \forall x \in H,$$

por lo que se tiene que:

$$(f, \lambda g)_{\mathcal{H}'} = \overline{(y_f, \bar{\lambda} y_g)} = \bar{\lambda}\overline{(y_f, y_g)} = \bar{\lambda}(f, g)_{\mathcal{H}'}.$$

Y finalmente tenemos que:

$$(f, g)_{\mathcal{H}'} = \overline{(y_f, y_g)}_{\mathcal{H}} = (y_g, y_f)_{\mathcal{H}} = \overline{(g, f)}_{\mathcal{H}'},$$

por lo que, de todo esto podemos afirmar lo siguiente:

$$\|f\|_{\mathcal{H}'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |(x, y_f)| = \|y_f\|_{\mathcal{H}} = (f, f)^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}'}.$$

Dado que ya definimos el producto escalar en $\mathcal{H}' = \ell(\mathcal{H} : K)$ y como este espacio es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{H}'$ es un espacio de Hilbert. (La completitud de $\mathcal{H}'$ es consecuencia inmediata de que el mapeo definido es suprayecticvo e isométrico.)
Ahora definamos el mapeo lineal $\sigma : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ con la siguiente relación:

$$\sigma(f) = y_f, \forall f \in \mathcal{H}'.$$

Lo primero que notamos es lo siguiente:

$$\|\sigma(f)\|_{\mathcal{H}} = \|y_f\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_{\mathcal{H}'}, \forall f \in \mathcal{H}',$$

lo que nos dice que σ es una isometría. Además σ es un mapeo suprayectivo dado que: Si $y \in \mathcal{H}$, definimos f por $f(x) = (x, y)$ y entonces $\sigma(f) = y, \forall y \in \mathcal{H}$
Veamos, además, que se trata de un mapeo aditivo, puesto que:

$$\sigma(f_1 + f_2) = y_{f_1+f_2} = y_{f_1} + y_{f_2} = \sigma(f_1) + \sigma(f_2).$$

Por otro lado dado que $\sigma(\lambda f) = \bar{\lambda}\sigma(f)$ se dice que el mapeo es conjugado-lineal. Finalmente notemos que:

$$(\sigma(f), \sigma(g))_{\mathcal{H}} = (y_f, y_g)_{\mathcal{H}} = \overline{(f, g)}_{\mathcal{H}'} = (g, f)_{\mathcal{H}'},$$

con lo que se completa la demostración. ◇

1.1.5 Bases Ortonormales

Esta sección la comenzaremos con la definición de una base ortonormal.

Definición

Sea S un conjunto ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que no está completamente contenido en cualquier otro conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$. Decimos entonces que S es una base ortonormal o también que es un sistema ortonormal de $\mathcal{H}$.
Se mencionarán a continuación dos teoremas importantes que establecen la existencia de una base ortonormal en un espacio de Hilbert asi como algunas propiedades importantes. Se omitirán las demostraciones pues se considera que sólo es importante hacer la mención de los resultados.

Teorema 1.1.5.1

Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, con al menos un elemento distinto de cero, contiene una base ortonormal.

Teorema 1.1.5.2

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $S = \{x_\alpha\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:

1. (i) $\forall y \in \mathcal{H}$, tenemos que $(y, x_\alpha) = 0$ para todo conjunto contable $(\alpha_j)_1\infty$ que depende de y.

2. (ii) La fórmula de representación:

$$y = \sum_{j=1}^{\infty}(y, x_{\alpha_j})x_{\alpha_j}.$$

Es cierta en el sentido de que:

$$\lim_{N\to\infty} \|y - \sum_{j=1}^{\infty}(y, x_{\alpha_j})x_{\alpha_j}\| = 0. \quad (1.1.5.1)$$

3. (iii) La igualdad siguiente se cumple:

$$\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(y, x_{\alpha_j})|^2. \quad (1.1.5.2)$$

1.2 Espacios L^p. Conceptos Básicos

1.2.1 Introducción

La importancia de los espacios L^p es que para poder entender de que tipo de espacios estamos hablando debemos de definir los conceptos de espacio medible (equipado con una medida) y una vez definidos esos conceptos se puede construir una teoría de integración aplicable a cualquier función medible. Definamos entonces para iniciar esta sección los conceptos primordiales para la comprensión de los espacios L^p.

Primero empezemos con la definición de lo que es un espacio topológico.

Definición 1.2.1

Una colección de subconjuntos Γ de un conjunto X se llama topología en X, si Γ tiene las siguientes propiedades:

(1) X y $\emptyset$ pertentecen a Γ.

(2) Si $\{V_i \mid i \in I\}$ es una colección arbitraria de elementos de Γ, entonces $\cup_{i\in I}V_i$ pertenece a Γ.

(3) Si V_1 y V_2 pertenecen a Γ, entonces $V_1 \cap V_2$ está también en Γ

Al para ordenado (X, Γ) se le conoce como *espacio topológico*. Los elementos de Γ son conocidos como *conjuntos abiertos* en X. Al complemento de un conjunto abierto se le conoce como *conjunto cerrado*. Cualquier intersección de cerrados es cerrada; la unión de dos conjuntos cerrados es cerrada. Sea (X, Γ)un espacio topológico, un punto x es un punto límite (o punto de acumulación) de un conjunto $E \subset X$ si cada conjunto abierto que contenga a x contiene al menos, un punto de E distinto de x. Un conjunto cerrado contiene todos sus puntos de acumulación.

Ahora mencionemos los conceptos básicos para el desarrollo de teoría de la medida.

Definición 1.2.2

Una familia Λ de subconjuntos del conjunto X se dice que es una *σ- álgebra* (sigma-álgebra) de X si cumple las siguientes propiedades:

(1) X pertenece a Λ

(2) Cualquier unión contable de elementos de Λ, pertenece a Λ.

(3) El complemento de cualquier elemento de Λ. pertenece a Λ.

Definición 1.2.3

Sea Λ una *σ-álgebra* de un espacio X, entonces al par (X, Λ) se le conoce como espacio medible, y los elementos de Λ son llamados conjuntos medibles.

Definición 1.2.4

Sean (X, Λ) y (Y, Π) dos espacios medibles, cualquier mapeo $f : X \to Y$ se dice que es $\Lambda - \Pi -$ *medible* si para cada $B \in \Pi, f^{-1}(B)$ pertenece a Λ

Nota Importante:

Si f y g son dos funciones medibles definidas en X hacia R, entonces $\sup\{f, g\}, \inf\{f, g\}$ son medibles también. En particular si f es medible, $f^+ = \sup\{f, 0\}$ y $f^- = \inf\{f, 0\}$ son medibles también. f^+, f^- son respectivamente las partes positivas y negativas de f. Notemos que:

$$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ - f^-.$$

Definición 1.2.5
Sea ϕ una función medible definida de (X,Λ) a R; decimos que ϕ es una función simple si sólo toma un numero finito de valores distinos. Si ϕ es simple y sus valores son: $\alpha_1, ..., \alpha_n$, entonces $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ donde $A_i = \{x : \phi(x) = \alpha_i\}$
La suma, el producto, la diferencia de dos funciones simples es simple.
Definición 1.2.6
Sea (X,Λ) un espacio medible ; una *medida positiva* en $(X;\Lambda)$ es un mapeo $\mu : \Lambda \to \bar{R}^+$ tal que:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) Si (A_n) es una colección contable de elementos de Λ disjuntos a pares, entonces:

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$$

Siendo así (X,Λ,μ) es un espacio medible. De esta manera una medida, es una función definida en una $\sigma - algebra$ a $[0,\infty]$.

1.2.2 Integrales de funciones medibles

Consideremos primero la definición de integral de una función simple en un espacio medible (X,Λ,μ).
Definición 1.2.2.1
Sea ϕ una función simple positiva. Entonces definimos a:

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

Como la integral de ϕ con respecto a la medida μ.
Recordemos que las $\alpha_i, i = 1, ..., n$ son los valores que puede tomar la función positiva simple.
La integral de ϕ con respecto a μ es finita si y sólo si, la medida del conjunto $\{x/\phi(x) \neq 0\}$ es finita.
La integral de una función simple tiene las siguientes propiedades.
Teorema 1.2.2.2
Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos funciones simples positivas, y sea λ un número real positivo; entonces:

(1)
$$\int (\phi_1 + \phi_2) d\mu = \int \phi_1 d\mu + \int \phi_2 d\mu,$$

(2)
$$\int \lambda_1 d\mu = \lambda \int \phi_1 d\mu,$$

(3)
$$\int \phi_1 d\mu \leq \int \phi_2 d\mu, \quad \text{si} \quad \phi_1 \leq \phi_2.$$

Demostración:
Sean:

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \phi_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j},$$

entonces.

$$\phi_1 + \phi_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j},$$

y por lo tanto:

$$\int(\phi_1+\phi_2)d\mu=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{m}(\alpha_1+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{m}\alpha_1\mu(A_i\cap B_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{m}\beta_j\mu(A_i\cap B_j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(B_j)$$
$$=\int\phi_1 d\mu+\int\phi_2 d\mu.$$

ıas demostraciones de los incisos (2) y (3) son evidentes.◇
ıhora definamos la integral para una función medible cualquiera.

)efinición 1.2.2.3

;ea f una función medible positiva, entonces:

$$\int f d\mu = sup\int \phi\, d\mu.$$

)onde el supremo es tomado en todas las funciones ϕ tales que $\phi \leq f$. A esta integral se le concoce como la integral .e f con respecto a la medida μ. f se dice que es $\mu-$ *integrable* si la integral antes definida es finita.
'inalmete mencionaremos las definición de la integral de una función medible (real-valuada o compleja) con respecto . la medida μ.

)efinición 1.2.2.4

(1) Decimos que una función f *real valuada* es $\mu-$ *integrable* (o integrable con respecto a la medida μ) si f^+ y f^- son $\mu-$ *integrables* y la integral de f es:

$$\int f d\mu=\int f^+ d\mu-\int f^- d\mu.$$

(2) Se dice que una función *compleja-valuada* es $\mu-$ *integrable* (o integrable con respecto a la medida μ) si $\Re f$ y $\Im f$ son $\mu-$ *integrables* y la integral de f es:

$$\int f d\mu=\int \Re f d\mu+i\int \Im f d\mu.$$

Nota:

Si f=g en casi todo punto entonces $\int f d\mu = \int g d\mu$.

\hora mencionemos un teorema de utilidad en próximas secciones:

.ema 1.2.2.5 (Lema de Beppo-Levi)

;ea (f_n) una sucesión de funciones medibles positívas, tal que:

$$(\forall n\in N),(\forall x\in X)f_n(x)<f_{n+1}(x),$$

· además:

$$(\forall x\in X),\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

:ntonces se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu=\int f d\mu.$$

Teorema 1.2.2.6 (Lema de Fatou)

;ea (f_n) una sucesión de funciones medibles no-negativas definidas en un espacio medible (X,A,μ) entonces se tiene ue:

$$\int (\lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n d\mu.$$

Definamos ahora un teorema fundamental.

Teorema 1.2.2.7

El conjunto de todal las funciones $\mu - \textit{integrables}$ es un espacio vectorial. Este espacio está denotado por $\mathcal{L}_\mu^1$

Demostración:

Consideremos primero las siguientes desigualdades, consecuencia de las propiedades del ínfimo y del supremo.

$$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+, (f+g)^- \leq f^- + g^-,$$

por lo que se tiene que:

$$\int (f+g)^+ d\mu \leq \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu,$$

$$\int (f+g)^- d\mu \leq \int f^- d\mu + \int g^- d\mu,$$

y de esta manera se verifica que $(f+g)^+$ y $(f+g)^-$ son integrables, por lo que $f+g$ también lo es. Más aún, dado que:

$$(f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

se tiene que (si se hace la extensión del teorema (1.2.1.2) para funciones medibles.)

$$\int (f+g)d\mu = \int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^d \mu - = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu.$$

Para el caso de finciones a valores complejos es suficiente con considerar $\Re(f+g), \Im(f+g)$ y verificar que las anteriores relaciones se cumplen también en ese caso.

Consideremos ahora el caso cuando $\lambda \in R$, entonces tenemos que:

$$(\lambda f)^+ = \begin{cases} \lambda f^+, \lambda > 0 \\ -\lambda f^-, \lambda < 0 \end{cases}$$

$$(\lambda f)^+ = \begin{cases} \lambda f^-, \lambda > 0 \\ -\lambda - f^+, \lambda < 0 \end{cases}$$

De esta forma, si $\lambda > 0$, se tiene que:

$$\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f^+ d\mu - \lambda \int f^- d\mu = \lambda \int f d\mu.$$

Y si $\lambda < 0$, entonces se tiene que:

$$\int (\lambda f) d\mu = (-\lambda) \int f^- d\mu - (-\lambda) \int f^+ d\mu = \lambda \int f d\mu.$$

Por otro lado para el caso de funciones a valores complejos y considerando que, $\lambda \in C$ se tiene que observar que:

$$\lambda f = (\Re\lambda \Re f - \Im\lambda \Im f) + i(\Im\lambda \Re f + \Re\lambda \Im f),$$

de la que se deduce que:

$$\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f d\mu.$$

si se aplica el mismo razonamiento que para el caso real.◇

Ahora enunciemos otro teorema útil:

Teorema 1.2.2.8

Si f es $\mu - \textit{integrable}$, también lo es $|f|$, y se tiene además que:

$$\Big|\int f d\mu\Big| \leq \int |f| d\mu.$$

Demostración:
El resultado es evidente si se consideran las siguientes desigualdades:

$$|f| = f^+ + f^-,$$

si f es *real-valuada.* Y además:

$$|f| \leq |\Re f| + |\Im f|,$$

si f es *compleja-valuada.* $\diamondsuit$
Una función f es $\mu - integrable$, si y sólo si $|f|$ es $\mu - integrable$.

1.2.3 Funciones convexas y desigualdades

Dada la importancia de estos conceptos en el desarrollo de la construcción de los espacios L^p es necesario incluir estas desigualdades y la noción de convexidad en las funciones reales.

Definición 1.2.3.1
Una función real ϕ definida en un intervalo abierto (a, b) se dice que es *convexa* si la siguiente desigualdad se cumple:

$$\phi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\phi(x) + \lambda\phi(y)$$

Para cualesquiera $x \in (a, b), y \in (a, b)$ y para $\lambda \in [0, 1]$. Se dice que ϕ es *cóncava* si $-\phi$ es convexa.

Definición 1.2.3.2
Los dos números positivos p y q se dice que son exponentes conjugados si:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Otra manera de verlo es como $p + q = pq$.
Ahora definiremos dos desigualdades muy importantes en los espacios medibles.

Teorema 1.2.3.3 (Desigualdad de Hölder)
Sea (X, Λ, μ) un espacio medible y sea f, g dos funciones positivas $\mu - medibles$ definidas en X, entonces:

$$\int fg d\mu \leq \Big(\int f^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int g^p d\mu\Big)^{\frac{1}{q}},$$

Donde p, q son exponentes conjugados y $1 < p < \infty$.
Demostración:
Si resulta que uno de los términos de lado derecho es nulo la desigualdad es evidente; de esta manera consideremos que $0 < \int f^p d\mu < \infty$ y que $0 < \int g^q d\mu < \infty$, así las cosas, escribamos:

$$F = \frac{f}{\Big(\int f^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}}, \quad G = \frac{g}{\Big(\int g^q d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}}$$

De esta manera, se tiene que:

$$\int F^p d\mu = 1, \quad \int G^q d\mu = 1.$$

Ahora, si $x \in X$ es tal que:

$$0 < F(x) < \infty, \quad 0 < G(x) < \infty,$$

entonces existen dos números reales t, u tales que:

$$F(x) = \exp\frac{t}{p}, \quad G(x) = \exp\frac{u}{p}.$$

Dado que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, la convexidad de la función exponencial implica que.

$$\exp(\frac{t}{p}+\frac{u}{q}) \leq \frac{1}{p}\exp t + \frac{1}{q}\exp u.$$

Como $F(x)=\infty$, $G(x)=\infty$ solo en un conjunto de medida cero, puesto que:

$$\int F(x) < \infty, \quad \int G(x) < \infty,$$

se tiene que para casi toda $x \in X$:

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}(F(x))^p \frac{1}{q}(G(x))^q,$$

integrando con respecto a la medida μ se tiene que;

$$\int FGd\mu \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

si remplazamos a F y G por sus expresiones originales, la desigualdad de Hölder se obtiene.
Nota:
Más adelante daremos el significado a la desigualdad cuando $p=1$ y $p=\infty$.

Corolario 1.2.3.4 (Desigualdad de Minkowski)
Sea (X,Λ,μ) un espacio medible, y sean f,g dos funciones $\mu-medibles$ positivas definidas en X; entonces:

$$\Big(\int (f+g)^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int f^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int g^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}},$$

Donde $1 \leq p < \infty$.
Para el caso $p=1$ el resultado es evidente. Así que consideraremos el caso cuando $p>1$. Escribamos:

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1},$$

y si aplicamos la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\int f(f+g)^{p-1}d\mu \leq \Big(\int f^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int (f+g)^{(p-1)q}d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int g(f+g)^{p-1}d\mu \leq \Big(\int g^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int (f+g)^{(p-1)q}d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Dado que $(p-1)q=p$, la adición de estas desigualdades nos da:

$$\int (f+g)^p d\mu \leq \Big(\big(\int f^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\int g^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}}\Big)\Big(\int (f+g)^p d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Nota:
La desigualdad de Minkowski puede ser generalizada. Sea (X,Λ,μ) un espacio medible, y sea (f_n) una sucesión de funciones $\mu-medibles$ positivas definidas en X; entonces:

$$\Big(\int \big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\big)^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int f_n^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}},$$

Donde $1 \leq p < \infty$.
Demostración:
Si n es finita por la desigualdad de Minkowski se tiene que:

$$\Big(\int \big(\sum_{k=1}^{n} f_k\big)^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int \big(\sum_{k=1}^{n-1} f_k\big)^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int f_n^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}},$$

lo que si se aplica progresivamente n-veces la desigualdad de Minkowski se tiene que:

$$\Big(\int \big(\sum_{k=1}^{n} f_k\big)^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{k=1}^{n}\Big(\int f_k^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

La desigualdad de Minkowski generalizada es una consecuencia de aplicar el Lema de Beppo Levi (Lema 1.2.2.5).

1.2.4 Espacios $\mathcal{L}^p$ y L^p

Definición 1.2.3.1
Sea (X, Λ, μ) un espacio medible, es espacio vectorial de todas las funciones f $\mu - medibles$ definido en X a R (o C), tales que $|f|^p$ con $1 \leq p < \infty$ es integrable con respecto a la medida μ, se le conoce como espacio $\mathcal{L}^p_\mu(X)$.
En la anterior sección, en el teorema 1.2.2.6, se demostró que el espacio $\mathcal{L}^1_\mu(X)$ es un espacio vectorial Para demostrar que los espacios $\mathcal{L}^p_\mu(X)$ son espacios vectoriales basta con observar lo siguiente.
Si $f \in \mathcal{L}^p_\mu(X)$ es fácil ver que , para todo escalar λ, $\lambda f \in \mathcal{L}^p_\mu(X)$. Además si $f, g \in \mathcal{L}^p_\mu(X)$ entonces $f+g$ también pertenece a $\mathcal{L}^p_\mu(X)$,puesto que:

$$|f+g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p).$$

Que se puede deducir por la convexidad de la función $f(t) : t \to t^p$ con $\lambda = \frac{1}{2}$.
De aquí en adelante en lugar de $\mathcal{L}^p_\mu(X)$ utilizaremos únicamente $\mathcal{L}^p$.
Si $f \in \mathcal{L}^p$ entonces $\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ será denotado por $\|f\|_p$, Con esta notación se obtiene que:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

(Desigualdad de Hölder)

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

(Desigualdad de Minkowski)

Teorema 1.2.3.2
La función $f \to \|f\|_p$ definida de $\mathcal{L}^p$ a R_+ es una seminorma.
Demostración:
La demostración es sencilla pues; $\|f\| = 0$ implica que $f = 0$ en casi todo punto. Además de que $\|f\|_p > 0$ siempre que $f > 0$; por otro lado, la condición de que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ (λ escalar) es evidente; finalmente la desigualdad del triángulo es consecuencia de la desigualdad de Minkowski.$\diamondsuit$
Observemos que$\|f_1 - f_2\| = 0 \Rightarrow f_1 = f_2$ para casi todo punto. Por lo que se puede establecer una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^p$ que parte a $\mathcal{L}^p$ en clases de equivalencia.

Definición 1.2.3.3
Si ϱ denota lal relación de equivalencia :

$$(f_1 \in \mathcal{L}^p)(f_2 \in \mathcal{L}^p), f_1 \varrho f_2 \iff \|f_1 - f_2\|_p = 0.$$

Al espacio vectorial $\mathcal{L}^p/\varrho$ lo conoceremos como espacio L^p, ó $L^p_\mu(X)$ si queremos especificar el espacio X y la medida μ.
Los elementos de L^p son clases de funciones, no funciones. Si $f \in \mathcal{L}^p$, denotaremos a $\tilde{f}$ a la clase de funciones equivalentes a f y denotaremos $\|f\| = \|\tilde{f}\|$. De esta forma podemos ver que la función $f \to \|f\|$definida de L^p a R_+ es una norma.

Definición 1.2.3.4
Sea f una función real valuada medible definida en el espacio medible (X, Λ, μ), entonces $\inf\{M : f(x) \leq M a.e\}$ (a.e= casi todo punto) es llamado el *supremo esencial* de f y esta denotado por $ess\sup f$.

Definición 1.2.3.5
Sea (X, Λ, μ) un espacio medible, el espacio vectorial de las funciones f $\mu - medibles$ definidas en X hacia R (o C) tales que $ess\sup|f| < \infty$ se denota por $\mathcal{L}^\infty_\mu(X)$.
De manera sencilla se puede verificar que $\mathcal{L}^\infty_\mu(X)$ o $\mathcal{L}^\infty$ es un espacio vectorial. Cuando $|f| < \infty$ se dice que f es esencialmente acotada .
Si $f \in \mathcal{L}^\infty, ess\sup|f|$ está denotada por $\|f\|_\infty$. Esta última notación se justifica en la siguiente proposición:

Proposición 1.2.3.6
Si la medida μ es tal que $\mu(X) < \infty$, para cualquier función esencialmente acotada f se tiene que:

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p.$$

Demostración:
Dado que el conjunto $\{x \in X \mid |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ tiene medida cero, se tiene que para toda $p \in [1, \infty)$:

$$\|f\|_p = \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty \Big(\mu(X)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

y dado que $\mu(X) < \infty$:

$$\lim_{p\to\infty} \sup \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

De manera conversa, si $\alpha < \|f\|_\infty$, el conjunto $\{x \in X / f(x) > \alpha\}$ no tiene medida cero y se tiene que

$$\|f\|_p \geq \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \geq \alpha\Big(\mu(E)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

por lo que se tiene que:

$$\lim_{p\to\infty} \inf \|f\|_p \geq \alpha,$$

y como α es arbitrario, entonces se tiene que

$$\lim_{p\to\infty} \inf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty,$$

con lo que la proposición se demuestra.◇
Notemos que la desigualdad de Hölder se conserva para el caso de los exponentes conjugados $\{1, \infty\}$ y podemos escribir:

$$\|g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Para probar esto se tiene que considerar una función $h = g$ en casi todo punto, y tal que, $\forall x \in X, |h(x)| \leq \|g\|_\infty$. Entonces se tiene que:

$$\|fg\|_1 = \|fh\|_1 \leq \sup_{x\in X} |h(x)| \int |f| d\mu \leq \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

La desigualdad de Minkowski también se cumple en el caso que $p = \infty$, esto es:

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Para probarlo se debe de considerar a dos funciones f_1, g_1 iguales a f, g (respectivamente) en casi todo punto, y tales que $\forall x \in X, |f_1(x)| \leq \|f\|_\infty, |g_1(x)| \leq \|g\|_\infty$, entonces se tiene que:

$$|f(x) + g(x)| = |f_1(x) + g_1(x)| \quad \text{a.e} \quad \leq (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) \quad \text{a.e},$$

por lo que $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ es un supremo esencial de $|f + g|$, y el resultado está probado.
La desigualdad de Minskowki implica que el mapeo definido como $f \to \|f\|_\infty$ de $\mathcal{L}^\infty$ a R_+ es una seminorma dado que $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ a.e.; por lo que nuevamente es posible definir un espacio normado:

Definición 1.2.3.7

Si ϱ denota la relación de equivalencia siguiente:

$$(f_1 \in \mathcal{L}^\infty)(f_2 \in \mathcal{L}^\infty), \quad f_1 \varrho f_2 \Longleftrightarrow \|f_1 - f_2\|_\infty = 0,$$

Al espacio vectorial $\mathcal{L}^\infty/\varrho$ se le conoce como espacio L^∞ o $L^\infty_\mu(X)$ si se necesita especificar al espacio X y a la medida μ.
Nuevamente los elementos del espacio L^∞ son clases de funciones, y si $f \in \mathcal{L}^\infty$ denotaremos como $\bar{f}$ a la clase de funciones equivalentes a f y si además denotamos $\|\bar{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$, entonces el mapeo denotado como $f \to \|\bar{f}\|_\infty$ definido de L^∞ hacia R_+ es una norma.
Para terminar esta sección mencionaremos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.3.8

$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach si $1 \leq p \leq \infty$.
Demostración.

Primero asumamos que $1 \leq p < \infty$, t sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Entonces podemos encontrar una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$ tal que:

$$\|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_p \leq \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Tomemos $v_m(x) = \sum_{j=1}^{m}(u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x))$. Entonces:

$$\|v_m\|_p \leq \sum_{j=1}^{m}(\frac{1}{2^j}) < 1, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Si tomamos $v(x) = \lim_{m\to\infty} v_m(x)$, que puede ser infinita para alguna x, obtendremos aplicando el Lema de Fatou (1.2.2.4)

$$\int_\Omega |v(x)|^p dx \leq \lim_{m\to\infty} inf \int_\Omega |v_m(x)|^p dx \leq 1.$$

Por lo que $v(x) < \infty$ a.e. en Ω y las series:

$$u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty}(u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x))$$

convergen al límite $u(x) < \infty$ a.e. en Ω. Consideremos $u(x) = 0$ cuando el límite de la serie es ∞ se tiene que: $\lim_{m\to\infty} u_{n_m}(x) = u(x)$ a.e.

Ahora para cualquier $\epsilon > 0$ existe una N tal que si $n, m \geq N$ entonces $\|u_m - u_n\|_p < \epsilon$, entonces por el Lema de Fatou se tiene que:

$$\int_\Omega |u(x) - u_n(x)|^p dx = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} |u_{n_j}(x) - u_n(x)|^p dx$$
$$\leq \lim_{j\to\infty} inf \int_\Omega |u_{n_j}(x) - u_n(x)|^p dz \leq \epsilon^p.$$

Si $n \geq N$. Por lo que $u = (u - u_n) + u_n \in L^p(\Omega)$ y además $\|u - u_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ Por lo que $L^p(\Omega)$ es completo en $1 \leq p < \infty$.

Ahora consideremos $p = \infty$.

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\Omega)$, entonces existe un subconjunto $A \subset \Omega$ con medida cero tal que si $x \notin A$, se tiene que para cada $n, m = 1, 2, \ldots$:

$$|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty, |u_n(x) - u_m(x)| \leq \|u_n - u_m\|_\infty.$$

Dado que $\|u_n\|_\infty$ es acotado en R, u_n converge uniformemente en el complemento de A. Si consideramos $u(x) = 0$ para $x \in A$ entonces se tiene que $u \in L^\infty$ y además $\|u_n - u\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Lo que implica que L^∞ es completo.

1.3 Espacios de Sobolev. Conceptos Básicos

Los espacios de Sobolev fueron introducidos por Sobolev, junto con el estudio de otros epacios estudiados por numerosos escritores. La notacion de estos espacios es muy variada y la importancia de ellos, en este caso, radica que este tipo de espacios resultan estar encajados en los espacios L^p; algo que será de gran utilidad para la comprensión de las demostraciones del artículo presentado en el último capítulo de esta tesis.

Antes de iniciar la discusión de los aspectos básicos de los espacios de Sobolev, debemos introducir dos conceptos necesarios; el primero es el concepto de *distribución* y el otro es el concepto de *encajamiento* de un espacio normado en otro.

Empezaremos esta sección con una breve discusión sobre lo que son las distribuciones.

1.3.1 Funciones de prueba y Distribuciones

Consideremos antes que nada al espacio vectorial $C_c^\infty(R)$ que es el espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables y que tienen soporte compacto. (El soporte de una función ϕ definida en R y denotado por $supp\phi$, es la cerradura del conjunto $\{x \in R \mid \phi(x) \neq 0\}$). Usualmente en teoría de distribuciones este espacio se denota por $\mathcal{D}$. a los elementos de $\mathcal{D}$ se les conoce como *funciones de prueba.*

Definición 1.3.1

Una sucesión de funciones de prueba (ϕ_n) se dice que converge en $\mathcal{D}$ a otra función ϕ si:

(1) Todos los soportes de las funciones de la sucesión están contenidos en un subconjunto acotado de R;

(2) Para cualquier p entero positivo, la sucesión $(\phi_n^{(p)})$ de las derivadas de orden p convergen uniformemente a la derivada de orden p de ϕ.

El hecho de que el límite ϕ se encuentre ya en $\mathcal{D}$ proviene del hecho de que por (1) su soporte es acotado.

Definición 1.3.2

Cualquier elemento del espacio dual de $\mathcal{D}$, es decir cualquier funcional continua definida en $\mathcal{D}(R)$ se le llama distribución. Este espacio está denotado por $\mathcal{D}'$.
Si T es una distribución, la linealidad implica que:

$$T(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1 T(\phi_1) + \lambda_2 T(\phi_2),$$

Donde ϕ_1 y ϕ_2 pertenecen a $\mathcal{D}$, y λ_1, λ_2 son elementos de R, y por la continuidad se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} T(\phi_n) = T(\phi)$$

Donde (ϕ_n) es una sucesión de funciones de prueba que convergen a ϕ en $\mathcal{D}$.
$\mathcal{D}'$ es un espacio vectorial, es decir, para cualquier función ϕ en D se tiene que:

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(\phi) = \lambda_1 T_1(\phi) + \lambda_2 T_2(\phi),$$

Donde T_1 y T_2 pertenecen a $\mathcal{D}'$, y λ_1, λ_2 son elementos de R.
Definiremos ahora el concepto de derivación en la distribución.
Una propiedad muy importante de las distribuciones es la siguiente, las distribuciones son siempre diferenciables, y su derivada es siempre una distribución. Definiremos entonces el concepto de derivada de la distribución.

Definición 1.3.3

Sea T una distribución, su derivada T' es la distribución definida por:

$$T'(\varphi) = -T(\varphi)$$

Donde φ es una función de prueba.
Ahora si la distribución está definida en R^n, la derivada con respecto a x_i está dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) = -T(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$$

De esta manera se puede derivar de esta definición que:

$$\frac{\partial^p T}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_p}}(\varphi) = (-1)^p T(\frac{\partial^p \varphi}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdot\quad\partial x_{i_p}})$$

Donde p es cualquier número positivo.
Daremos como ejemplo un tipo de distribución muy común:
Ejemplo:
Sea f una función de R a R o a C que es *localmente integrable* (Una función localmente integrable es aquella que es integrable para cualquier conjunto acotado de R, y se denota usualmente por L^1_{loc}). Así definimos la siguiente funcional (forma lineal) T_f definida en D por:

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx \tag{1.3.1}$$

Y podemos demostrar *que se trata de una distribución puesto que es una funcional continua definida en* D.
Ahora que se han dado nociones básicas de distribuciones, prodeceremos a dar una definición de mucha importancia para el último capítulo de la tesis, la definicion de *encajamiento (embedding)*.

Definición 1.3.4
Decimos que un espacio normado X esta *encajado* en otro espacio normado Y, y lo denotamos como $X \to Y$, si se prueba que:

(i) X es un subespacio vectorial de Y

(ii) Si el operador identidad definido de X a Y por $Ix = x \forall x \in X$ es continuo. (Dado que I es un operador lineal esta condición es equivalente a afirmar la existencia de una constante M tal que $\|Ix\|_Y \leq M\|x\|_X, x \in X$)

Ahora si, procederemos a definir, los espacios de Sobolev.

1.3.2 Definición de los espacios de Sobolev

Definición 1.3.5
Sea $\|\cdot\|_{m,p}$ (Donde m es un entero no negativo y $1 \leq p \leq \infty$) una funcional definida como sigue:

$$\|u\|_{m,p} = \{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \}^{\frac{1}{p}} \tag{1.3.2}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty$$

Donde u es una función tal que el lado derecho de cada una de las ecuaciones (1.3.2), tenga sentido. Podemos notar además que las ecuaciones (1.3.2) definen una norma para funciones en las que el lado derecho de la igualdad toma valores finitos, ademas de que las funciones se hacen equivalentes si son iguales en casi todo punto. De esta forma podemos definir los siguientes espacios:

(i) $H^{m,p}(\Omega) \equiv$ el completamiento de $\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{m,p}$. ($\Omega \subset R^n$ abierto.)

(ii) $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para $1 \leq |\alpha| \leq m\}$. [1]

(iii) $\mathcal{W}_0^{m,p} \equiv$ la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en el espacio $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$.

(1.3.3)

Equipados con la norma adecuada definida en las ecuaciones (1.3.2), estos espacios son llamados espacios de Sobolev, sobre Ω. Se puede ver de manera clara que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Además tambien se pueden observar los siguientes encajamientos:

$$\mathcal{W}_0^{m,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

Existe un teorema que estabelece que $H^{m,p}(\Omega) = \mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ *para cualquier* Ω, [2] este resultado establece la relación entre dichos espacios. Lo que procederemos a hacer entonces será demostrar que el espacio $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ es completo.

Teorema 1.3.6
$\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración:
Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy definida en $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$, entonces $\{D^\alpha u\}$ es también una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$ para $0 \leq |\alpha| \leq m$. Dado que $L^p(\Omega)$ es completo entonces existen dos funciones u y $u_n, 0 \leq |\alpha| \leq m$, en $L^p(\Omega)$, tales

---

[1] debemos mencionar en este momento lo siguiente:
Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es una *n-upla* de números no negativos α_j, entonces decimos que α es un multi-índice y denotaremos por x^α al monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, que tiene orden $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$.
De manera similar si $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ para $1 \leq j \leq n$, entonces:

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

denota un operador diferencial de orden $|\alpha|$. $D^{(0,\dots,0)}u = u$.

[2] [1]Teorema 3.16

que $u_n \to u$ y $D^\alpha u \to u_\alpha$ en $L^p(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. Ahora dado que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ entonces u_n puede definir una distribución $T_{u_n} \in D'(\Omega)$ del tipo (1.3.1), de forma que, para cualquier $\phi \in D(\Omega)$:

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\phi(x)|dx \leq \|\phi\|_q \|u_n - u\|_p$$

Por la desigüaldad de Hölder, donde p,q son exponentes conjugados, es decir, $q = \frac{p}{p-1}$ (o $q = \infty$ si $p = 1$, o $p = \infty$ si $q = 1$.) De esta forma $T_{u_n}(\phi) \to T_u(\phi)$ para cualquier $\phi \in D(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. De manera similar se puede observar que $T_{D^\alpha u_n(\phi)} \to T_{u_\alpha}(\phi)$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. De este modo se sigue que:

$$T_{u_\alpha}(\phi) = \lim_{n\to\infty} T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \phi)$$

Para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Por tanto $u_\alpha = D^\alpha u$ en el sentido distribucional en Ω para $0 \leq |\alpha| \leq m$ y por consiguiente $u \in \mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$, Y dado que $\|u_n - u\|_{m,p} = 0, \mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$, es completo.
Finalizaremos este capítulo enunciando el resultado que más se utilizará para la demostración de algunos resultados del artículo (que se discutirá en el cuarto capítulo de esta tesis) y que es el *Teorema De Encajamiento de Sobolev* [3]

Teorema 1.3.7

Sea Ω un dominio de R^n y sea Ω^k es dominio de k-dimensiones que se obtiene por intersectar Ω con un plano k-dimensional en $R^n, 1 \leq k \leq n$ (de forma que $\Omega^n = \Omega$), además sean j, m dos enteros no negativos y sea p que satisface $1 \leq p < \infty$. Entonces:

Parte I

Si Ω cumple la propiedad de cono [4] entonces, los siguientes encajamientos se cumplen:

CASO A

Supóngase que $mp < n$ y que $n - mp < k \leq n$, entonces:

$$\mathcal{W}_{j+m,p}(\Omega) \to \mathcal{W}_{j,q}(\Omega^k), \tag{1.3.4}$$

con $p \leq q \leq \frac{kp}{n-mp}$, en particular:

$$\mathcal{W}_{j+m,p}(\Omega) \to \mathcal{W}_{j,q}(\Omega), \tag{1.3.5}$$

con $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$,

o

$$\mathcal{W}_{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega), \tag{1.3.6}$$

con $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$, mas aún, si $p = 1$ y por tanto $m < n$, el encajamiento (1.3.4) se cumple para el caso $k = n - m$.

CASO B

Supongamos que $mp = n$, entonces para cada $k, 1 \leq k \leq n$ se tiene que:

$$\mathcal{W}_{j+m,p}(\Omega) \to \mathcal{W}_{j,q}(\Omega^k), \tag{1.3.7}$$

con $p \leq q < \infty$, en particular:

$$\mathcal{W}_{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega), \tag{1.3.8}$$

con $p \leq q < \infty$. Mas aún si $p = 1$ y por tanto $m = n$, entonces los encajamientos (1.3.7) y (1.3.8) existen para el caso $q = \infty$ y además:

$$\mathcal{W}_{j+n,1}(\Omega) \to C^j_B(\Omega).^5 \tag{1.3.9}$$

CASO C

Supongamos que $mp > p$. entonces.

$$\mathcal{W}_{j+m,1}(\Omega) \to C^j_B(\Omega). \tag{1.3.10}$$

[3] [1] Teorema 5.4 p. 97

[4] La propiedad de cono de Ω se enuncia en (4.2) pp.66 de [1]

[5] $C^j_B(\Omega) = \{u \in C^j(\Omega) \cdot D^\alpha u$ es acotada en Ω para $|\alpha| \leq j\}$

PARTE II

Si Ω cumple la propiedad de Lipschitz fuerte y localmente [6] , entonces el Caso C de la Parte I se puede escribir como:

CASO C'

Supongamos que $mp > n > (m-1)p$. Entonces:

$$\mathcal{W}_{j+m,1}(\Omega) \to C^{j,\lambda}(\bar{\Omega})^7, \tag{1.3.11}$$

con $0 \le \lambda \le m - \frac{n}{p}$

CASO C"

supongamos que $n = (m-1)p$. Entonces:

$$\mathcal{W}_{j+m,1}(\Omega) \to C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}), \tag{1.3.12}$$

con $0 \le \lambda \le 1$. También si $n = m-1$ y $p = 1$ entonces (1.2.12) se cumple para $\lambda = 1$.

PARTE III

Todas las conclusiones de las partes I y II, son válidas para dominios arbitrarios, con lo que se puede reemplazar a los espacios $\mathcal{W}$ por los espacios $\mathcal{W}_0$.

[6] La propiedad Lipschitz fuerte se enuncia en (4 5) pp.66 de [1]

[7] Si $0 < \lambda \le 1$, definimos $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ como el subespacio de $C^m(\bar{\Omega})$ que contiene a todas las funciones ϕ que cumplen que, para $0 \le |\alpha| \le m$, $D^\alpha\phi$ satisface en Ω la condición de Hólder, esto es, que existe una constante K tal que

$$|D^\alpha\phi(x) - D^\alpha\phi(y)| \le K|x-y|^\lambda, x, y \in \Omega$$

Capítulo 2

Operadores lineales

2.1 Resultados Preliminares

Por lo que se ha podido observar con anterioridad, un operador lineal es un mapeo lineal entre elementos de dos espacios vectoriales. Un operador lineal A esta definido por su dominio, i.e. un campo lineal $D(A) \in \mathcal{H}$, y por un mapeo lineal A definido en $D(A)$. Recordemos que, linealidad significa que si $f, g \in D(A), \lambda \in K(R \text{ o } C)$, entonces $A(\lambda f + g) = \lambda A(f) + A(g)$. Si M es un subconjunto de $D(A)$, entonces $A(M)$ es el conjunto de vectores de $f \in \mathcal{H}$ tales que $f = Ag$ para algún $g \in M$. El conjunto $A(D(A))$ se conoce como el rango del operador A.
Para iniciar más a fondo el estudio de los operadores estableceremos primero algunos resultados que serán de importancia posteriormente:
Sean X, Y dos espacios lineales normados. Consideremos que $\ell(X, Y)$ es el conjunto de todos los mapeos continuos existentes de $X \to Y$. Definiremos así la siguiente función:

$$T \in \ell(X, Y) \to \|T\| \in [0, \infty),$$

por la siguiente relación:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \tag{2.1.1}$$

Notemos que si $X \in X, x \neq 0$ (el elemento cero de X), entonces $\frac{x}{\|x\|}$ tiene norma unitaria, por lo que se tendrá lo siguiente:

$$\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \|T\|, \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|, \forall x \in X. \tag{2.1.2}$$

Es evidente que si $T = 0$ (El operador nulo), entonces $\|T\| = 0$. De manera conversa si $\|T\|_{\ell(X,Y)} = 0$ entonces se sigue que $Tx = 0 \forall x \in X$ y por tanto $T = 0$. Más aún, si $\lambda \in K$, entonces para $T \in \ell(X, Y)$ tenemos que:

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda|\|Tx\| = |\lambda|\|T\|.$$

Y finalmente tendremos que para $T_1, T_2 \in \ell(X, Y)$:

$$\|(T_1 + T_2)x\| \leq \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|, \|x\| \leq 1,$$

por lo que podemos ver que la función (2.1.1) define una norma.
Estableceremos ahora un primer resultado:

Proposición 2.1.1

Para $T \in \ell(X, Y)$ tenemos que:

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{C > 0, \|Tx\| \leq C\|x\| \forall x \in X\} = \|T\|. \tag{2.1.3}$$

Demostración:
Usando (2.1.2) se tiene que si $x \neq 0$ entonces

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|,$$

y por tanto:

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leq \|T\|,$$

por otro lado, si $x \neq 0$ y $\|x\| \leq 1$, tenemos que:

$$\|Tx\| \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|};$$

siendo así que:

$$\|T\| \leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Consideremos ahora a $\tilde{C} = inf\{C > 0, \|Tx\| \leq C\|x\| \forall x \in X\}$. Dada la definición de $\tilde{C}$ se tiene que que $\|Tx\| \leq \tilde{C}\|x\| \forall x \in X$ entonces de tiene que $\sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\| \leq \tilde{C}$.Por lo que $\|T\| \leq \tilde{C}$. Asumamos ahora que $\|T\| < \tilde{C}$, entonces podemos decir que existe una $C < \tilde{C}$ tal que $\|T\| \leq C$ por lo que $\|Tx\| \leq C\|x\|$, y por lo tanto $\tilde{C}$ no será el ínfimo que se había afirmado. Por ello se debe de asumir que $\tilde{C} = \|T\|$.$\diamond$

El siguiente resultado es importante:

Teorema 2.1.2

Sea Y un espacio de Banach. Entonces el espacio $\ell(X,Y)$ es de Banach también. (Notemos que si $Y = K$ entonces obtendremos $\ell(X,K) = X'$ que es el espacio dual de X, y que como se vió antes es un espacio de Banach aún si X no es completo.)

Demostración:

Consideremos primero una sucesión de Cauchy en $\ell(X,Y) : (T_n)_n^{\infty}$. Entonces $\forall\epsilon > 0 \exists \bar{n}(\epsilon) \in N$,t al que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$, para $n, m \geq \bar{n}(\epsilon)$.Se sigue que $\forall x \in X$, la sucesión $(T_n x)$ es una sucesión de Cauchy en Y. Como Y es un espacio completo entonces $\lim_{n\to\infty} T_n x = y_x$ existe $\forall x \in X$.

Ahora definamos un operador $T, X \to Y$, con $Tx = y_x = \lim T_n x$. Podemos notar de este operador lo siguiente:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_{n\to\infty}[(\alpha T_n x_1 + \beta T_n x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$$

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x_1, x_2 \in X$$

Por lo que T es un operador lineal de $X \to Y$.

Notemos que $\|Tx\| = \lim_{n\to\infty}\|T_n x\|$. Y por otro lado notemos que: $|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\| < \epsilon$ si $n, m \geq \bar{n}(\epsilon)$, lo que significa que la suseción $(\|T_n\|)$ es también una sucesión de Cauchy, y por tanto es también una sucesión acotada: $\exists C > 0$ tal que $\|T_n\| \leq C \forall n \in N$: De acuerdo con esto entonces $\|T_n x\| \leq C\|x\|, \forall n \in N, \forall x \in X$, y además $\lim_{n\to\infty}\|T_n x\| \leq C\|x\|$. Esto por tanto implica que $\|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x \in X$, por lo que en operador T es continuo (De hecho tenemos lo siguiente $\|T_n x\| \leq \|T_n\|\|x\|$ y por tanto $\|Tx\| \leq (\lim_{n\to\infty}\|T_n\|)\|x\|$).

Finalmente notemos lo siguiente: $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \epsilon$ si $n, m \geq \bar{n}(\epsilon)$, y si $\|x\| \leq 1$. Entonces $\|T_n x - Tx\| = \lim_{m\to\infty}\|T_n x - T_m x\| \leq \epsilon$ si $n \geq \bar{n}(\epsilon), \|x\| \leq 1$. Entonces $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ para $n \geq \bar{n}(\epsilon)$, por lo que $T_n \to T \in \ell(X,Y)$. $\diamond$

2.2 Operadores en espacios de Hilbert

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Denotemos a $B(\mathcal{H})$ como el espacio de todos los operadores lineales acotados definidos de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$. Notemos primero lo siguiente:

Teorema 2.2.1

Sea $A \in B(\mathcal{H})$. Entonces existe un operador único $A^* \in B(\mathcal{H})$ tal que

$$(Ax, y)_F = (x, A^* y)_E \forall x, y \in \mathcal{H} \tag{2.2.1}$$

A^* es el *Operador Adjunto* de A. Por otro lado se puede ver que $A^{**} = A$ y $\|A^*\| = \|A\|$.

Demostración:

Sea un $y \in \mathcal{H}$. Dado que A es lineal y acotado, se puede definir una funcional acotada y lineal en $\mathcal{H}$ definida como:

$$\phi_y(x) = (Ax, y), \tag{2.2.2}$$

$\forall x \in \mathcal{H}$, el hecho de que ϕ_y sea acotada se deriva de la desigualdad de Cauchy-Shwarz:

$$|\phi_y(x)| = |(Tx, y)| \leq \|Tx\|\|y\| \leq \|T\|\|y\|\|x\|.$$

Ahora por el teorema de Representacion de Riesz (1.1.4.2) se tiene que $\exists! z \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\phi_y = (x, z), \tag{2.2.3}$$

$\forall x \in \mathcal{H}$, Dado que z depende sólamente de y, se puede definir un operador $A^* y = z$ que satisfaga:

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \tag{2.2.4}$$

Para ver que dicho operador, A^*, es lineal, tomemos $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in C$ y veamos que $\forall x \in \mathcal{H}$ se tiene que:

$$(x, A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)) = (Ax, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = (Ax, \lambda_1 y_1) + (Ax, \lambda_2 y_2) = \overline{\lambda_1}(Ax, y_1) + \overline{\lambda_2}(Ax, y_2) =$$

$$\overline{\lambda_1}(x, A^* y_1) + \overline{\lambda_2}(x, A^* y_2) = (x, \lambda_1 A^* y_1 + \lambda_2 A^* y_2),$$

lo que nos da la linealidad de A^*. Ahora notemos que $\forall x \in H$ se tiene que:

$$\|A^* x\|^2 = (A^* x, A^* x) = (AA^* x, x) \leq \|AA^* x\|\|x\| \leq \|A\|\|A^* x\|\|x\|$$

De esto se concluye que $\|A^* x\| \leq \|A\|\|x\|$, pues si $\|A^* x\| = 0$, el resultado es trivial. Esto nos muestra que $\|A^*\| \leq \|A\|$, y por lo tanto el operador A^* es acotado. Si ahora seguimos un procedimiento análogo y sustituimos A por A^*, se obtendrá que $\|A\| \leq \|A^*\|$, por lo que se concluye que $\|A^*\| = \|A\|$. ◇

Notemos que en esta demostración el factor primordial se debió al Teorema de Representación de Riesz que nos define una funcional $\phi_y = (Ax, y), \forall x, y \in \mathcal{H}$ *acotada* y esto determina la existencia (única) de una $z \in \mathcal{H}$ tal que $(Ax, y) = (x, z)$. En el caso en que el Operador A no sea acotado la existencia de dicha z no es clara y es por ello que se debe de definir al operador adjunto como sigue:

Lo primero que se tiene que asumir es que $D(A)$ es denso en $\mathcal{H}$ (i.e. $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$) y tomemos una $x \in D(A)$, si ahora asumimos que para cada $y \in \mathcal{H}$ existe una $z \in \mathcal{H}$ tal que tiene la propiedad de que $(Ax, y) = (x, z) \forall x \in D(A)$, entonces podremos ver que dicha z es única por la propiedad de densidad de $D(A)$. (Pues si $(x, z_1) = (x, z_2) \Rightarrow z_1 - z_2 \in D(A)^{\perp} = \{0\}$.) De este modo entonces se tiene que la pareja ordenada (y,z) pertenece a la gráfica de un operador que denotaremos por A^*. Y de esta forma se podrá definir al operador adjunto A^* de un operador A no acotado.

Proposición 2.2.2

Sea A un operador lineal con dominio $D(A)$ denso en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. El operador adjunto A^* de A está dado por:

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

Para $x \in D(A)$ y $y \in D(A^*)$, donde $D(A^*)$ es el subespacio de $\mathcal{H}$ para el cual existe una $z \in \mathcal{H}$ que satisfaga que $(Ax, y) = (x, z)$, para cualquier $y \in D(A^*)$ y $x \in D(A)$, y además se tiene que $A^* y = z$.

Nota:

El operador A^* es siempre un operador cerrado (lo que significa que: si (h_n) es una sucesión en $D(A^*)$ y pasa que $h_n \to h_o \in E$ y además $A^* h_n \to k_o \in E$ entonces tendremos que $h_o \in D(A^*)$ y además $A^* h_o = k_o$). Esto se observa de lo siguiente: $(Ax, h_n) = (x, A^* h_n) \forall x \in D(A), n = 1, 2.$. Cuando $n \to \infty$ tenemos que $(Ax, h_o) = (x, k_o), \forall x \in D(A)$, lo que significa que $h_o \in D(A^*), A^* h_o = k_o$.

Proposición 2.2.3

Sea $A, D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador simétrico ($(Ax, y) = (x, Ay) \forall x, y \in D(A)$) Asumiremos que $D(A)$ es denso en E. Entonces $A \subset A^*$ (Decimos que dos operadores lineales L_1, L_2 con dominios $D(L_1), D(L_2) \in \mathcal{H}$ tienen la siguiente relación $L_1 \subset L_2$, si y sólo si: $D(L_1) \subset D(L_2)$ y $L_2 = L_1$ en $D(L_1)$.) De manera conversa, si el operador A con dominio $D(A)$ denso, está contenido en su operador adjunto, entonces A es simétrico.

Demostración:

Si $(Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y \in D(A)$, vemos que $y \in D(A)$ pertenece a D^* y que $A^* y = Ay \forall y \in D(A)$ Por lo que $D(A) \subset D(A^*)$ y así $A \subset A^*$. De manera conversa , tomemos $A \subset A^*$, entonces $D(A) \subset D(A^*)$ y además $(Ax, y) = (x, A^* y), \forall x, y \in D(A)$,. Mas aún $A = A^*$ en $D(A)$, por lo que $(Ax, y) = (x, Ay) \forall x, y \in D(A)$.◇

Definición 2.2.4

Sea $A, D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal con dominio denso. Entonces si $A = A^*$ decimos que A es un operador *auto-adjunto*.

De esto podemos deducir que los operadores *auto-adjuntos* son operadores cerrados y simétricos.

Proposición 2.2.5
Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y sea A, B dos operadores lineales con la propiedad de que $A \subset B$ además de que $D(A)$ es denso en $\mathcal{H}$, entonces $B^* \subset A^*$
Demostración:
Dado que $D(B)$ contiene un conjunto $D(A)$ denso en $\mathcal{H}$ entonces, es también denso. Por lo que los operadores A^*, B^* están bien definidos. Ahora tomemos un $h \in D^*(B)$ y un $k \in D(A)$. Entonces tenemos que:

$$(Ak, h) = (Bk, h) = (k, B^*h), \tag{2.2.5}$$

puesto que $A \subset B$. Esta igualdad nos dice que $h \in D(A^*)$ y además $A^*h = B^*h$. Por lo que $D(B^*) \subset D(A^*)$ y $A^* = B^*$ en $D(B^*)$.◇
Proposición 2.2.6
Sea A un operador simétrico con dominio $D(A)$ denso en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el dominio A^* es también denso en $\mathcal{H}$ y $A \subset (A^*)^*$.
Demostración:
De la proposición (2.2.3) tenemos que $A \subset A^*$, o lo que es lo mismo $D(A^*) \supset D(A)$ ahora como $D(A)$ es denso esto implica que $D(A^*)$ es denso también y que $\overline{D(A^*)} = \mathcal{H}$. Lo que nos dice que el operador ***adjunto*** $(A^*)^* = A^{**}$ esta bien definido.
Ahora tomemos $h \in D(A)$ y $k \in D(A^*)$. De esto se tiene que:

$$(Ah, k) = (h, A^*k),$$

o que:

$$(A^*k, h) = (k, Ah) \quad \forall k \in D(A^*).$$

De estas igualdades se tiene que $h \in D(A^{**})$ y que $A^{**} = Ah$. Como originalmente $h \in D(A)$ entonces se concluye que $A \subset A^{**}$.◇
Notas:

1. Del hecho que $A \subset A^*$ y de la proposición (2.2.6) se deduce que $A^{**} \subset A^*$
2. El dominio $D(A^{**})$ contiene a $D(A)$, por lo que es denso en $\mathcal{H}$ Si A^* es simétrico se tiene que (por la prop. (2.2.6)): $A^* \subset (A^{**})^*$ y como $A^{**} \subset A^*$ entonces $A^{**} \subset (A^{**})^*$, si ahora se aplica la proposición (2.2.3) entonces se concluye que A^{**} es simétrico.

Ahora definamos la suma de dos operadores T_1, T_2 definidos en $D(T_1), D(T_2) \in \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. La suma sera un operador $T = T_1 + T_2$ definido en un dominio $D(T) = D(T_1) \cap D(T_2)$ como sigue:

$$Tx = T_1x + T_2x, \forall x \in D(T). \tag{2.2.6}$$

De esta forma podemos establecer las siguientes proposiciones:
Proposición 2.2.7
Sean T_1, T_2 dos operadores lineales en $\mathcal{H}$ con dominios densos $D(T_1), D(T_2)$, y asumamos también que $D(T_1) \cap D(T_2)$ es denso también. Entonces:

$$(T_1 + T_2)^* \supset T_1{}^* + T_2{}^*. \tag{2.2.7}$$

Demostración:
Por la definición de suma tenemos que $D(T_1{}^* + T_2{}^*) = D(T_1^*) \cap D(T_2^*)$, por lo que si tomamos una $x \in D(T_1{}^* + T_2{}^*)$ y una $y \in D(T_1) \cap D(T_2)$ tendremos:

$$(T_1y, x) = (y, T_1^*x), (T_2y, x) = ((y, T_2^*x),$$

y por lo tanto por adición:

$$((T_1 + T_2)y, x) = (y, T_1^*x + T_2^*x), \forall y \in D(T_1) \cap D(T_2) = D(T_1 + T_2),$$

lo cual prueba que $x \in D(T_1 + T_2)^*$ y que $(T_1 + T_2)^*x = T_1^*x + T_2^*x$, por lo que $(T_1 + T_2)^* \supset T_1{}^* + T_2{}^*$. ◇

Proposición 2.2.8
Sea T en operador lineal con dominio denso $D(T)$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y asumamos que $D(T^*)$ es también denso en $\mathcal{H}$, Entonces $T \subset (T^*)^*$. (Notemos que la proposición es muy parecida con la prop. (2.2.6) Además notemos que T^{**} aparece como una extensión lineal cerrada de T.)
Demostración:
Sea $x \in D(T), y \in D(T^*)$, entonces tenemos que:

$$(Tx, y) = (x, T^*y), (T^*y, x) = (y, Tx) \quad \forall y \in D(T^*),$$

por lo tanto $x \in D(T^{**})$ y $T^{**}x = Tx.\diamond$
Finalizaremos esta sección definiendo las nociones de convergencia para una sucesión de operadores lineales definidos en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Esto es si $\{A_n\}$ es una sucesión de operadores acotados con $D(A_n) = \mathcal{H}, \forall n$, decimos que el operador A es el ***límite fuerte*** de A_n si para cada $f \in \mathcal{H}$ la sucesión $\{A_n f\}$ converge fuertemente al vector Af, esto es:

$$\lim_{n\to\infty} \|Af - A_n f\| = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \tag{2.2.8}$$

entonces escribimos $A_n \to A$ o $A = s - \lim_{n\to\infty} A_n$. Por otro lado, decimos que A es el ***límite débil*** de $\{A_n\}$ si:

$$\lim_{n\to\infty} (f, A_n g) = (f, Ag) \quad \forall f, g \in \mathcal{H}, \tag{2.2.9}$$

y escribiremos $A = w - \lim_{n\to\infty} A_n$. Tenemos también un tercer tipo de convergencia en las sucesiones de operadores $\{A_n\}$, que se conoce como ***convergencia uniforme o convergencia en norma***, en este caso decimos que una sucesión de operadores $\{A_n\}$ converge en norma si:

$$\| A - A_n\| \to 0 \tag{2.2.10}$$

cuando $n \to \infty$. Este tipo de convergencia es equivalente, por la definición de norma de un operador, a pedir convergencia fuerte y uniforme en el conjunto $\{f \in \mathcal{H} : \|f\| = 1\}$. En este caso escribiremos $u - \lim_{n\to\infty} A_n = A$. Se puede ver que ***convergencia uniforme*** implica ***convergencia fuerte***, y a su vez ***convergencia fuerte*** implica ***convergencia débil***.

2.3 Operadores en Espacios de Banach

Iniciaremos mencionando algunos resultados importantes concernientes a las propiedades de operadores acotados (continuos). Recordemos que la definición de operadores acotados en espacios de Banach esta dada por la desigualdad 1.1.4.16.
Teorema 2.3.1
Sea A y B dos operadores acotados definidos en dos espacios de Banach, y sea λ un escalar; siendo así se sigue lo siguiente·

1. $$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|.$$
2. $$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$
3. $$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Demostración.
(1) es inmediato de la definición. (2) se sigue del hecho de que por la definición $\|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$ válido para todo $x \in D_{A\cap B}$. Para (3) basta con observar lo siguiente:

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|ABx\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|A\|\|Bx\| \leq \|A\| \sup_{\|x\|\leq 1} \|Bx\|.$$

$\diamond$
En este momento podremos afirmar que si E es un espacio de Banach entonces el conjunto de operadores acotados definidos en E es también un conjunto de Banach. Además podemos mencionar que un espacio vectorial en el cual la

operación de multiplicación ha sido definida se conoce como un *álgebra*. Si el espacio además es normado entonces se le conoce como *álgebra normada* y si además es completo y todos sus elementos satisfacen la condición (3) del teorema 2.3.1 entonces estamos hablando de un *álgebra de Banach*. De esto último podemos deducir que el conjunto de todos los operadores acotados con dominio E es un álgebra de Banach. Y la denotaremos como $B(E)$.
Ahora mencionaremos un teorema que será de utilidad.

Teorema 2.3.2

Sea E un espacio de Banach y sea A un operador lineal acotado definido en E tal que $\|A\| < 1$: entonces $I - A$ (I es el operador identidad) es invertible y acotado y tenemos que:

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n. \tag{2.3.1}$$

Demostración:
Sea $S_n = \sum_{k=o}^{n} A^n$. Probaremos primero que (S_n) es una sucesión de Cauchy. Para $p > q$ se tiene que:

$$\|S_p - S_q\| = \|A^{q+1} + A^{q+2} + ... + A^p\| \leq \|A^{q+1}\|(1 + \|A\| + \|A^2\| + ... + \|A\|^{p-q-1}\|).$$

Puesto que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ implica que $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, dado que $\|A\| < 1$, las series geométricas $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^k$ son convergentes y además se tiene que:

$$\|S_p - S_q\| \leq \|A\|^{q+1}(1 - \|A\|)^{-1}.$$

Además dado que $\|A\| < 1$, dado un $\epsilon > 0$, entonces existe un $n_0(\epsilon)$ tal que, para $p > q > n(\epsilon)$ el lado derecho de la ecuación es menor que ϵ, y por tanto $\{S_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Dado que el conjunto de operadores acotados definidos en E es un espacio (álgebra) de Banach podemos decir que esta sucesión de Cauchy converge a un operador lineal acotado. Finalmente podemos notar lo siguiente mediante la verificación directa.

$$(I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n (I-A) = I.$$

$\diamondsuit$

Luego definiremos lo que se conoce como la gráfica de un operador A (denotado por $G(A)$) definido en espacios de Banach.
La gráfica de un operador A, $G(A)$, está definida como el siguiente producto cartesiano $E \times F$:

$$G(A) = \{(u, Au)\}_{u \in D}. \tag{2.3.2}$$

El rango del operador A es el conjunto $R(A) = \{Au\}_{u \in D}$. Este conjunto es un subespacio lineal de F. El kernel de $A, KerA$, es el conjunto $\{u \in D, Au = 0\}$, que es un subconjunto lineal de D. Siendo así se puede establecer lo siguiente:

Definición 2.3.3

Se dice que el operador lineal $A, D(A) \subset E \to F$, es cerrado si $G(A)$ es un subconjunto cerrado de $E \times F$.
Debemos hacer notar que el espacio de Banach $E \times F$ tiene como norma definida en cualquiera de su elementos $\{(e, f)\}$ a $\|\{(e, f)\}\| = \|e\|_E + \|f\|_F$. Además debemos establecer la conección entre esta idea de cerradura y la idea de cerradura establecida en la nota de la proposición (2.2.2). Ello es lo que se establecerá en la siguiente proposición:

Proposición 2.3.4

El operador lineal $A, D(A) \subset E \to F$, es un operador cerrado si y sólo si, para todas las sucesiones $\{u_n\}_1^\infty$ en $D(A)$, tales que $u_n \to u_o$ en E, mientras que $Au_n \to v_o$ en F resulte que $u_o \in D(A)$ y que $Au_o = v_o$.
Demostración:
Asumamos primero que $G(A)$ es cerrado en $E \times F$, esto significa que si $\{(u_n, Au_n)\}_1^\infty$ es una sucesión de $G(A)$ que converge en $E \times F$ a $\{(u_o, v_o)\}$, entonces $\{(u_o, v_o)\}G(A)$
Ahora $\{(u_n, Au_n)\}$ es convergente a (u_o, v_o) es equivalente a $u_n \to u_o$ en E y $Au_n \to v_o$ donde $u_n \in D(A), \forall n \in N$.
La conclusión de que $\{(u_o, v_o)\} \in G(A)$ significa que $u_o \in D(A)$ y que $v_o = Au_o$.
Si ahora tomamos la conversa, asumimos que se tiene una sucesión $\{(u_n, v_n)\}$ en $G(A)$ tal que $\{(u_n, v_n)\} \to \{(u_o, v_o)\}$. Esto es equivalente a que su $u_n \in D(A), \forall n \in N, v_n = Au_n, u_n \to u_o, Au_n \to v_o$. Y por hipótesis se tiene que $u_o \in D(A)$ y además que $v_o = Au_o$ lo que significa que $\{(u_o, v_o)\} \in G(A)$.$\diamondsuit$
Remarquemos lo siguiente:

Si A es un operador lineal cerrado entonces $KerA$ e un subconjunto cerrado de E. Esto se observa del hecho de que, si se toma $u_n \in KerA, \forall n \in N$ con $u_n \to u_o \in E$,y como se tiene que $Au_n = 0$ y A es cerrado entonces se concluye que $u_o \in D(A)$ y que $Au_o = 0$ lo que significa que $u_o \in KerA$.
Sea D un subespacio lineal de E, y sea A un operador lineal continuo $A : D \to F$, entonces A es un operador cerrado. Esto se concluye de lo siguiente:
Sea $\{u_n\}_1^\infty$ una sucesión de D, tal que $u_n \to u_o$ y tal que $Au_n \to v_o$. Como D es cerrado en E se concluye que $u_o \in D$, y como A es continuo , se sigue que $Au_n \to Au_o$. Por lo que $v_o = Au_o$.
Ahora mencionaremos una clase de operadores de especial interés, los operadores cerrables.

Definición 2.3.5

El operador lineal $T, D(T) \subset E \to F$ se dice que es cerrable, si tiene una extensión cerrada. (Recordemos que una extensión cerrada de un operador T es un operador $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \subset E \to F$ que es cerrado y que $T \subset \tilde{T}$.)
Siendo así se puede establecer lo siguiente:

Proposición 2.3.6

Sea T un operador lineal $D(T) \subset E \to F$, donde E, F son espacios de Banach. Entonces T es cerrable si y sólo si $\forall$ las sucesiones $\{x_n\}$ en $D(T)$, tales que $x_n \to 0$ y $Tx_n \to y$, resulta que $y = 0$ (esto es $\{(0, y)\} \in \overline{G(T)} \Rightarrow y = 0$).
Demostración:
Primero asumamos que T es cerrable, y entonces sea $\tilde{T}$ su extensión cerrada. Dado esto se puede tomar una sucesión $\{x_n\}$ en $D(\tilde{T})$, tal que $x_n \to 0$ y $\tilde{T}x_n \to y$, lo que implica que $y = \tilde{T}(0) = 0$.
Ahora definiremos S de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} D(S) = \{x \in E \text{ tal que } \exists \text{ una sucesión } (x_n), \text{ en } D(T), \\ \text{donde } x_n \to x \text{ mientras que } Tx_n \to y\} \end{aligned}$$

y por tanto

$$Sx = y.$$

De esta manera podemos observar lo siguiente concerniente al operador S

1. S es un operador bien definido, y valuado de manera única, de hecho sea $\{x'_n\}$ otra sucesión, donde $x'_n \to x$ mientras que $Tx'_n \to y'$. De esta manera $(x_n - x'_n) \to 0$ y $T(x_n - x'_n) \to y - y'$, por lo que $y - y' = 0, y = y'$.

2. S es un operador lineal: Sean $x_1, x_2 \in D(S)$;entonces $\exists$ una sucesión $\{x_{1,n}\}$ en $D(T)$, donde $x_{1,n} \to x_1$, mientras que $Tx_{1,n} \to y_1 = Sx_1$; por otro lado $\exists$ una sucesión $\{x_{2,n}\}$ en $D(T)$, donde $x_{2,n} \to x_2$, mientras que $Tx_{2,n} \to y_2 = Sx_2$; ahora se puede ver que la sucesión $\{x_{1,n}, x_{2,n}\}$ que está en $D(T)$ converge a $x_1 + x_2$, mientras que $T(x_{1,n}+x_{2,n}) = T(x_{1,n})+T(x_{2,n})$ converge a y_1+y_2, esto es $x_1+x_2 \in D(S)$ y $S(x_1+x_2) = y_1+y_2 = Sx_1+Sx_2$. De manera similar se puede observar que:

$$S(\lambda x) = \lambda S(x) \quad \forall x \in D(S), \quad \forall \lambda \in K$$

3. El operador S es una extensión de T, puesto que si $x \in D(T)$, entonces si se toma la sucesión $\{x_n\}$ donde $x_n = x \forall n \in N$, podremos ver que $Tx_n = Tx \to Tx$, por lo que $x \in D(S)$ y $Sx = Tx$.

4. El operador S es un operador cerrado, de hecho , sea $\{w_n\}$ una sucesión de $D(S)$ donde $w_n \to w$, mientras que $Sw_n \to u$. De esto se sigue que existe al menos una sucesión $\{x_{n,p}\}_{p=1}^\infty$ en $D(T)$ tal que $x_{n,p} \to w_n$, (cuando $p \to \infty$) mientras que $Tx_{n,p} \to Sw_n$, de hecho se tiene que $\forall \epsilon > 0, \|x_{n,p} - w_n\| < \epsilon, \|Tx_{n,p} - Sw_m\| < \epsilon$ para $p \geq \bar{p}(\epsilon, n), \forall n = 1, 2, 3....$

   Si ahora se toma $\epsilon = \frac{1}{n}$ y $p_n = \bar{p}(\frac{1}{n}, n)$, obtendremos:

   $$\|x_{n,p_n} - w_n\| < \frac{1}{n}, \|Tx_{n,p_n} - Sw_m\| < \frac{1}{n} \forall n \in N.$$

   Podemos notar ahora que $x_{n,p_n} \in D(T), \forall n N$, y más aún:

   $$\|x_{n,p_n} - w\| < \|x_{n,p_n} - w_n\| + \|w_n - w\| < \frac{1}{n} + \|w_n - w\|,$$

   que tiende a cero conforme $n \to \infty$. También se puede notar lo siguiente.

   $$\|Tx_{n,p_n} - u\| < \|Tx_{n,p_n} - Sw_n\| + \|Sw_n - u\| < \frac{1}{n} + \|Sw_n - u\|,$$

   que también tiende a cero cuando $n \to \infty$.

De acuerdo a la definición de $D(S)$ y S esto quiere decir que $w \in D(S)$, mientras que $Sw = u$, por lo que T tiene una extensión cerrada y por tanto T es cerrable.◇
Ahora mencionemos lo siguiente:

(i) Podemos ver que la gráfica $G(S)$ es la clausura de $G(T), G(S) = \overline{G(T)}$, esto se observa pues $\overline{G(T)}$ está compuesta de los pares $\{(x,y)\} \in E \times F$ tal que , para alguna sucesión $\{(x_n, Tx_n)\}$ en $G(T)$, es verdad que $x_n \to x, x \in D(T)$ y $Tx_n \to y$,lo que significa que $\overline{G(T)} = G(S)$.

(ii) El operador S previamente construido es la mínima extensión cerrada que tiene el operador T,en el sentido de que si $\bar{T}$ es otra extensión cerrada entonces $S \subset \bar{T}$. esto es debido a que sea $x \in D(S)$, entonces $\exists$ una sucesión (x_n) en $D(T)$ y también en $D(\bar{T})$ tal que $x_n \to x$, mientras que $Tx_n \to y = Sx$, lo que prueba, como $\bar{T}$ es cerrado, que $x \in D(\bar{T})$ y que $\bar{T} = Sx$, por lo que $S \subset \bar{T}$

Por todo esto podemos observar que $S = \bar{T}$ y también denotaremos $G(\bar{T}) = \overline{G(T)}$.
Mencionaremos ahora dos resultados que nos ayudarán a la comprensión de la siguiente sección:

Teorema 2.3.7 (Teorema de la gráfica cerrada)
Sea T un operador cerrado, $T : E \to F$, donde E y F son espacios de Banach. Entonces T es un operador continuo.
Demostración:
La grafica de T, $G(T) = \{(x, Tx)\}_{x \in E}$ es un subespacio lineal cerrado del espacio de Banach $E \times F$. Por lo que $G(T)$ es un espacio de Banach también.
Ahora consideremos el siguiente mapeo U definido de $G(T) \to E$ cuya definición es:

$$U\{(x, Tx)\} = x$$

Se puede ver de manera rápida que U es un mapeo lineal, biyectivo y continuo:

$$U(\{(x_1, Tx_1)\} + \{(x_2, Tx_2)\}) = U\{(x_1 + x_2 Tx_1 + Tx_2)\} = x_1 + x_2 =$$

$$U\{(x_1, Tx_1)\} + U\{(x_2, Tx_2)\}$$

Además de que si $U\{(x, Tx)\} = 0$ entonces $x = 0$, por lo que $\{(x, Tx)\} = \{(0,0)\}$. Por otro lado $\forall x_0 \in E, U\{(x_0, Tx_0)\} = x_0$.
Finalmente tenemos que:

$$\|U\{(x, Tx)\}\|_E = \|x\|_e \leq \|x\|_E + \|Tx\|_F = \|\{(x, Tx)\}\|_{E \times F}$$

lo que prueba que U es continuo.
Ahora consideremos la siguiente transformación $V : G(T) \to R(T)$, definida por:

$$V\{(x, Tx)\} = Tx, \quad \forall x \in E$$

Entonces se tiene que:

$$\|V\{(x, Tx)\}\|_F = \|Tx\|_F \leq \|\{(x, Tx)\}\|_{E \times F} \tag{2 3.3}$$

Lo que implica que V es también un mapeo continuo.
Si ahora regresamos a nuestro mapeo lineal U, podemos ver que al tratarse de un mapeo biyectivo se tiene que existe $U^{-1} : E \to G(T)$ donde:

$$U^{-1}x = \{(x, Tx)\}, \quad \forall x \in E \tag{2.3.4}$$

De las ecuaciones (2.3.3) y (2.3.4) se obtiene que:

$$Tx = VU^{-1}x, \quad \forall x \in E.$$

Y para llegar al resultado esperado se tiene uno que auxiliar de un teorema en el que se establece que:
Sean X, Y dos espacios de Banach y sea T un mapeo lineal injectivo y suprayectivo $T : X \to Y$. Entonces T^{-1} es también un mapeo lineal continuo.
Dicho esto podemos ver que U^{-1} es continuo y al ser $T = VU^{-1}$ (producto de dos mapeos continuos) entonces T es un mapeo continuo.◇
Se concluirá la sección con la siguiente proposición:

Proposición 2.3.8
Sean E, F dos espacios de Banach, y sea $T, D(T) \subset E \to F$ un operador lineal cerrado inyectivo. Entonces $T^{-1} : R(T) \subset F \to D(T) \subset E$ es también un operador cerrado.
Demostración:
Tenemos que $G(T) = \{(x, Tx)\}_{x \in D(T)}; G(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y)\}_{y \in R(T)}$. Notemos que si $T^{-1}y = z \in D(T)$, entonces $y = Tz$,lo que puede ser escrito como:

$$G(T^{-1}) = \{(Tz, z)\}_{z \in D(T)}$$

Ahora se puede observar que $G(T) \subset E \times F$ y que $G(T^{-1}) \subset F \times E$. Notemos que el mapeo, $P : \{(x, y)\} \to \{(y, x)\}$ de $E \times F$ sobre $F \times E$ es un homeomorfismo (continuo y con inverso continuo), lo que implica que P mapea conjuntos cerrados de $E \times F$ en conjuntos cerrados de $F \times E$, como $G(T)$ es cerrado en $E \times F$ y como $G(T^{-1}) = PG(T)$ podemos ver que $G(T^{-1})$ es cerrado en $F \times E$ y por la definición (2.3.3) T^{-1} es cerrado.$\diamond$

2.4 Operadores Compactos. Aspectos Importantes

Esta clase de operadores es muy importante pues en ella se encuentran operadores muy importantes y necesarios para el desarrollo de posteriores teoremas mencionados en las siguientes secciones.
Una definición sencilla de lo que es un operador lineal compacto es la siguiente:

Definición 2.4.1
Sean E, F dos espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal, entonces decimos que T es un operador compacto si cumple con la siguiente propiedad, $\forall$ sucesión acotada $\{x_n\}_1^\infty$ en E, la sucesión $\{Tx_n\}_1^\infty$ tiene una subsucesión convergente en F.
Dada esta definición se puede establecer la siguiente proposición:

Proposición 2.4.2
Cualquier operador compacto T es un operador continuo.
Demostración:
Tenemos que si T no es continuo, entonces existe un conjunto acotado $A \subset E$, tal que $T(A)$, no es acotado en F, por lo tanto $\forall n \in N$, existe una $x_n \in A$, tal que $\|Tx_n\| \geq n$, lo que implica que,evidentemente, no existe una subsucesión acotada de $\{Tx_n\}_1^\infty$ que sea convergente.$\diamond$
Mencionaremos ahora un importante teorema.

Teorema 2.4.3
Sean E, F dos espacios de Banach. El conjunto de los operadores compactos de $\ell(E, F)$ (Espacio de los operadores lineales definidos de $E \to F$), es cerrado en $\ell(E, F)$ con respecto a la norma del operador.
Ahora mencionaremos un resultado concerniente a la suma de operadores compactos.

Proposición 2.4.4
Sean E, F dos espacios normados, y sean T_1, T_2 dos operadores compactos de $E \to F$. Entonces el operador $T_1 + T_2$ es también compacto.
Demostración:
Tomemos una sucesión $\{x_n\}_1^\infty$ acotada en E. Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_p}\}_1^\infty$ tal que $\lim_{p \to \infty} T_1 x_{n_p} = z_1$ existe en F. También existe una subsucesión $\{x_{n_{p_g}}\}_1^\infty$ tal que $\lim_{g \to \infty} T_2 x_{n_{p_g}} = z_2$ existe en F. De todo esto se concluye que $\lim_{g \to \infty} T_1 x_{n_{p_g}} = z_1$ y que $\lim_{g \to \infty} T_2 x_{n_{p_g}} = z_2$, por lo que $\lim_{g \to \infty} (T_1 + T_2) x_{n_{p_g}}$ existe y es igual a $z_1 + z_2 \in F$.$\diamond$
En la siguiente proposición mencionaremos una propiedad que tiene que ver con los productos (izquierdo y derecho) de operadores continuos con operadores compactos.

Proposición 2.4.5
Sea E un espacio normado y sea $T : E \to E$ un operador compacto. Asumamos además que tenemos un operador $A \in B(E)$. Entonces los operadores AT y TA son compactos.
Demostración:
Tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ acotada en E. Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_p}\}_{n=1}^\infty$ tal que $\lim_{p \to \infty} Tx_{n_p} = z$ existe en F, por tanto $\lim_{p \to \infty} ATx_{n_p} = Az$. Por lo tanto el operador AT es compacto.
Por otro lado si tomamos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ acotada en E, entonces la sucesión $\{Ax_n\}_{n=1}^\infty$ es también acotada en E, pero esto implica que dado que T es compacto debe de existir una subsucesión $\{Ax_{n_p}\}$ tal que $\lim_{p \to \infty} T(Ax_{n_p}) = z$, dado que $T(Ax_{n_p}) = (TA)(x_{n_p})$, esto implica que TA es compacto.$\diamond$
Mencionaremos ahora la siguiente propiedad importante respecto a operadores compactos definidos en espacios de Hilbert.

Proposición 2.4.6
Si consideramos un espacio de Hilbert H, y consideramos un operador compacto $T : H \to H$ y ademas tenemos a su operador adjunto, T^* (que recordaremos está dado por la igualdad $(Th, k) = (h, T^*k) \forall h, k \in H$) entonces podemos afirmar que T^* es también un operador compacto.
Demostración:
Primero tomemos $\{h_n\}_1^\infty$ una sucesión acotada en H. Ahora tenemos que, por la proposición (2.4.5), el operador $TT^* : H \to H$ es compacto, y asi podemos hallar una subsucesión $\{h_{n_p}\}$, tal que $\lim_{p\to\infty} TT^*h_{n_p} = z$. Pero dado esto podemos observar además que la sucesión $\{T^*h_{n_p}\}$ es una sucesión de Cauchy, con lo que la proposición estaría probada, para ello observemos lo siguiente:

$$\|T^*(h_{n_p} - h_{n_q})\|^2 = (h_{n_p} - h_{n_q}, TT^*(h_{n_p} - h_{n_q}))$$

$$\leq 2 \sup_{p\in N} \|h_{n_p}\| \|TT^*h_{n_p} - TT^*h_{n_q}\| < \epsilon, p, q \geq \bar{(}\epsilon)$$

Con este último resultado finalizamos la sección.◇

2.5 Operadores simétricos. Proyecciones

Unos operadores simétricos en espacios de Hilbert muy importantes por su utilidad en teoría espectral, son los operadores de proyección, o mejor conocidos como proyecciones o proyectores. (Recordemos que, un operador es simétrico en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ si $(Ah, k) = (h, Ak), \forall h, k \in \mathcal{H})$, a los operadores simétricos con dominio en $\mathcal{H}$ esto es, autoadjuntos, también se les conoce como operadores *Hermicianos*.
Ahora si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y M es un subespacio lineal cerrado, entonces, por lo establecido en el teorema de la Proyección (1.1.3.1), tenemos que, cada $x \in \mathcal{H}$ puede ser escrita de manera única como sigue: $x = y + z$, donde $y \in M$ y $z \in M^\perp$ Al vector y se le conoce como la proyección de x en M y al operador P que esta definido por $Px = y$ se le conoce como proyección en M, para una mejor notación se escribirá al operador P_M. Ahora podremos ver como es que un operador de este tipo es simétrico.
Sean $x, y \in H$, podemos entonces escribir $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$, donde $x_1, y_1 \in M$ y $x_2, y_2 \in M^\perp$ y así las cosas podremos observar que: $(Px, y) = (x_1, y_1 + y_2) = (x_1, y_1)$ y además $(x, Py) = (x_1 + x_2, y_1) = (x_1, y_1)$ lo que nos da la condición de simetría.
Mencionaremos ahora otras propiedades de las proyecciones:

(i) P es un operador lineal, en efecto sean $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in \mathcal{H}, \alpha\beta \in K$ (R o C) entonces se tiene que $P(\alpha x + \beta y) = P(\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2)) = P((\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)) = \alpha x_1 + \beta x_1 = \alpha P(x) + \beta P(y)$.

(ii) Tenemos que $P^2 = P$, esto se observa de lo siguiente: Sea $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in \mathcal{H}, \Rightarrow (P^2x, y) = (Px, Py) = (x_1, y_1) = (x_1, y_1, y_2) = (Px, y)$

(iii) Notemos que el operador $Q = I - P$ es la proyección al subespacio $M^\perp$.

(iv) Se puede obtener de manera fácil la siguiente estimación $\|P\|_{\ell(\mathcal{H})} \leq 1$, de la cual se infiere que las proyecciones son operadores continuos. Esta se obtiene de que $\forall x \in \mathcal{H}, \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ por lo que $\|Px\| \leq \|x\|$.

(v) Se obtienen la siguientes relaciones de orden; $\theta \leq P \leq I$, Donde θ es el operador nulo e I es el operador identidad, y esta se deriva de lo siguiente: $\forall x \in \mathcal{H}(Px, x) = (P^2x, x) = (Px, Px) \geq 0$ y de que: $\forall x \in \mathcal{H}(Px, x) = \|Px\|\|x\| \leq \|x\|^2 = (Ix, x)$

(vi) Notemos además que si $M = \mathcal{H}, P_M = I$ (Operador Identidad) y si $M = \{0\}, P_M = \theta$. Si $P \neq \theta$ entonces existe un punto $x \in M = P(\mathcal{H})$ donde $x \neq 0$, por lo que $\|Px\| = \|x\|$ de lo que se deriva que $\|P\| = 1$.

Ahora estableceremos el siguiente teorema que es importante.
Teorema 2.5.1
Sea P un operador lineal continuo y simétrico definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es decir autoadjunto, tal que $P^2 = P$. Entonces P es una proyección ortogonal en el espacio $P(\mathcal{H})$.
Demostración:
Ya habíamos notado que $M = P(\mathcal{H}) = \{Px, x \in \mathcal{H}\}$ es un espacio lineal de $\mathcal{H}$ Se puede observar además que se trata de un conjunto cerrado de H puesto que es el kernel del operador continuo $I - P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Ahora notemos que

$(x - Px, Py) = (Px - P^2x, y) = 0, \forall \in \mathcal{H}$, por lo que $x - Px \in M^{\perp}$. Así podemos afirmar que $x = Px + (x - Px)$ es la única descomposición de x como una suma $y + z$ con $y \in M$ y con $z \in M^{\perp}$. Lo que prueba que P es la proyección a M.$\diamond$

Debemos mencionar lo siguiente.

Definición 2.5.2

Dos proyecciones P_1, P_2 son ortogonales si y sólo si $P_1P_2 = 0$

También debemos mencionar el siguiente teorema:

Teorema 2.5.3

Dos proyecciones P_M, P_N son ortogonales si y sólo si $M \perp N$.

Demostración:

Dado que $M \perp N$ se tiene que $\forall x, y \in \mathcal{H}$ pasa que $0 = (P_Mx, P_Ny) = (x, P_MP_Ny)$, si tomamos $x = P_MP_N$ entonces podemos conluir que $P_MP_Ny = 0 \forall y \in H$, por lo que P_M, P_N son ortogonales.

Ahora enunciaremos una propiedad muy importante de los operadores Hermicianos.

Proposición 2.5.4

Sea A un operador lineal definido en $\mathcal{H}$, Entonces A es Hermiciano si y sólo si (Ax, x) es real $\forall x \in \mathcal{H}$.

Demostración

supongamos que (Ax, x) es real, entonces:

$$Im(Ax, x) = 0 \tag{2.5.1}$$

Ahora por otro lado tenemos lo siguiente:

$$(A(ix + y), ix + y) = (Ax, x) + i(Ax, y) - i(Ay, x) + (Ay, y).$$

Y tomando las partes imaginarias, y considerando (2.5.1) se tiene que:

$$Re(Ax, y) = Re(x, Ay). \tag{2.5.2}$$

Finalmente observemos que:

$$Im(Ax, y) = Im(-i)(Aix, y) = -Re(Aix, y) = -Re(ix, Ay)$$

$$= (-i)Re(x, Ay) = Im(x, Ay)$$

Con lo que junto con (2.5.2) se obtiene que A es simétrico. El regreso de la demostración es análogo.

Finalizaremos esta sección mencionando dos conceptos importantes: Los conceptos de Isometría Parcial y de Operador Unitario en un espacio de Hilbert.

Definición 2.5.5

Sea $U : H \to H$ un operador definido en un espacio de Hilbert H. Entonces decimos que U es *unitario* si cumple con las siguientes propiedades:

(i)
$$(Uf, Ug) = (f, g) \forall f, g \in H$$

(ii)
$$U^*U = UU^* = I$$

Cuando un operador sólo cumple con la primera propiedad se dice que el operador es una *isometría*. Observemos que (i) implica (ii).

Definición 2.5.6

Sea Ω un operador definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se dice que Ω es un *Isometría Parcial* si cumple con lo siguiente:

$$\Omega^*\Omega = E, \text{ donde } E \text{ es una proyección.}$$

De esto se concluye lo siguiente.

$$(\Omega f, \Omega g) = (f, \Omega^*\Omega g) = (f, Eg) = (Ef, Eg). \tag{2.5.3}$$

Por lo que si: $f, g \in E\mathcal{H}$ entonces se tiene que $(\Omega f, \Omega g) = (f, g)$. Lo que prueba que el operador es una isometría en cierto parte de $\mathcal{H}$, llamada $E\mathcal{H}$, esto quiere decir que la longitud de los vectores que estén en $E\mathcal{H}$ y los ángulos entre dichos vectores se conservarán bajo Ω. Es por ello que se le da el nombre de *Isometría parcial*

De la ecuación (2.5.3) también podemos concluir que Ω es cero en el complemento ortogonal de $E\mathcal{H}$; esto es, si $f \in (E\mathcal{H})^{\perp}$ entonces, $\|\Omega f\|^2 = \|Ef\|^2 = 0$ por lo que $\Omega f = \theta$, o lo que es lo mismo:

$$\Omega(I - E)f = \theta \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{2.5.4}$$

Otra manera, por tanto de definir una isometría parcial será mediante la siguiente proposición.

Proposición 2.5.7

Si Ω es un operador lineal con $D(\Omega) = \mathcal{H}$ y E es una proyección tal que $\|\Omega f\| = \|Ef\| \forall f \in \mathcal{H}$, entonces $\Omega^*\Omega = E$.

Demostración:

Dado que $\|\Omega f\| = \|Ef\| \forall f \in \mathcal{H}$, se tiene entonces que $\|\Omega\| = \|E\|$, o lo que es lo mismo $\|\Omega\| = 1$ a menos que $E = 0$. Por otro lado es fácil ver que de esto se tiene que $\|\Omega^*\| = \|E\|$ y que Ω^* está definido en cualquier punto de $\mathcal{H}$. (esto se conluye del hecho que dado un operador acotado A definido en $\mathcal{H}$, entonces se tiene que A^* es acotado también, $D(A^*) = \mathcal{H}$ y que $\|A^*\| = \|A\|$.) Ahora por la identidad de polarización [1] se puede deducir que:

$$(\Omega^*\Omega f, g) = (\Omega f, \Omega g) =$$
$$\frac{1}{4}(\Omega(f+g), \Omega(f+g)) - (\Omega(f-g), \Omega(f-g)) - i(\Omega(f+ig), \Omega(f+ig)) + i(\Omega(f-ig), \Omega(f-ig)) =$$
$$\frac{1}{4}(E(f+g), E(f+g)) - (E(f-g), E(f-g)) - i(E(f+ig), E(f+ig)) + i(E(f-ig), E(f-ig)) =$$
$$(Ef, Eg) = (Ef, g).$$

Por lo tanto $\Omega^*\Omega f - Ef$ es ortogonal a cualquier $g \in \mathcal{H}$ y por tanto $\Omega^*\Omega f = Ef \forall f \in \mathcal{H}$.

El operador adjunto Ω^* de la isometría parcial Ω es también una isometría parcial. Esto se observa del hecho que si definimos $F = \Omega\Omega^*$ entonces podremos que $F^2 = \Omega\Omega^*\Omega\Omega^* = \Omega E \Omega^* = \Omega\Omega *= F$ y que $F^* = (\Omega\Omega^*)^* = \Omega^{**}\Omega^* = F$.

Mencionaremos ahora un resultado (que será de mucha utilidad en en tercer capítulo puesto que nos servirá para describir de manera matemática un sistema de dispersión dependiente del tiempo).

Proposición 2.5.8

Sea Ω una isometría parcial, y definamos a $\Omega^*\Omega = E$ y $\Omega\Omega^* = F$. Entonces se tiene que:

(a) $\|\Omega\| = \|\Omega^*\| = 1$ a menos que $E = 0$

(b) $\Omega E = \Omega, E\Omega^* = \Omega^*$
$F\Omega = \Omega, \Omega^* F = \Omega^*$

(c) El rango de Ω es un subespacio, y F es la proyección ortogonal en ese subespacio. Esto es $F\mathcal{H} = R(\Omega)$

(d) La restricción [2] de Ω al subespacio $E\mathcal{H}$ es invertible y dicha inversa está dada por Ω^* (De forma más precisa por la restricción de Ω^* en $F\mathcal{H}$). Esto es $\Omega^{-1}f = \Omega^* f \forall f \in F\mathcal{H}$.

Demostración:

El inciso (a) se demostró ya en la proposición anterior (2.5.7), la primera igualdad del insciso (b) es una consecuencia inmediata de la ecuación (2.5.4). Ahora dado que $E\Omega^* = E^*\Omega^* = (\Omega E)^* = \Omega^*$ la segunda igualdad se cumple. Para la siguiente se tiene que observar que $F\Omega = \Omega\Omega^*\Omega = \Omega E = \Omega$. Finalmente para probar la última desigualdad se tiene que $\Omega^* F = \Omega^*\Omega\Omega^* = E\Omega^* = \Omega^*$.

Para la demostracion del inciso (c) se tiene que por la definición de F el rango de este está contenido en el rango de Ω, esto es puesto que si $f \in \mathcal{H}$ y si además $f = Fg$ entonces se tiene que, $f = \Omega(\Omega^* g)$ lo que implica que $fR(\Omega)$. Por lo que $F\mathcal{H} \subset \Omega\mathcal{H}$, por otro lado si $f \in \Omega\mathcal{H}$ entonces $f = \Omega g$ y como $F\Omega = \Omega$ entonces $f = F(\Omega g)$ por lo que $f \in F\mathcal{H}$ y por ello se concluye que $\Omega\mathcal{H} = F\mathcal{H}$.

Finalmente para la demostración de (d) supongamos que $f \in E\mathcal{H}$ y que $\Omega f = \theta$ entonces de la ecuación (2.5.3) se tiene que $\|f\|^2 = \|\Omega f\|^2 = 0$ por lo que $f = \theta$ Por lo tanto la restricción de Ω en $E\mathcal{H}$ es invertible, dado que $\Omega^*\Omega f = f \forall f \in E\mathcal{H}$, entonces es claro que la inversa de la resttricción de Ω en $E\mathcal{H}$ esta dada por ls restricción de Ω^* en $F\mathcal{H} = \Omega\mathcal{H}$. $\diamond$

Para una isometría parcial Ω, las proyecciones E sobre el subespacio (llamado *espacio inicial*) $E\mathcal{H}$ y F sobre el subespacio $F\mathcal{H}$ (llamado *espacio final*) que es el rango de Ω son diferentes del operador identidad Cuando existe una isometría se tiene que $E = I$ pero F puede no serlo. En el caso de un espacio de Hilbert de dimensión finita se tiene que el rango de la isometría es el espacio de Hilbert completo, esto es $F = I$.

[1] $4(f,g) = \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 - i\|f+ig\|^2 + i\|f-ig\|^2 . \forall f, g \in \mathcal{H}$

[2] Recordemos que dos operadores $A \subset B$ cuando $D(A) \subset D(B)$ y además $Af = Bf \forall f \in D(A)$. En este caso se dice que A es la *restricción* de B a D(A) y que B es la *extensión* de A a $D(B)$

2.6 Grupos unitarios

Ya en la sección anterior definimos lo que es un operador unitario. Ahora definiremos lo que es un grupo unitario a un parámetro, que desempeña un papel fundamental en la mecánica cuántica.

Definición 2.6.1

Un grupo unitario uniparametral fuertemente (por convergencia fuerte entendemos que si $\{f_n\}$ es una sucesión de vectores, entonces decimos que $\{f_n\}$ converge fuertemente al vector f si $\|f - f_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$,con una norma definida en el espacio; este tipo de convergencia se denota como $s - \lim_{n\to\infty} f_n = f$) está definido como un mapeo U con dominio en la recta real y rango en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (El conjunto de todos los operadores acotados definidos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$) y que cumplen con las siguientes propiedades:

(i) Continuidad Fuerte: $s - \lim_{\tau\to 0}(U_{t+\tau} - U_t) = 0 \quad \forall t \in R$

(ii) Unitariedad: $U_t^* = U_t^{-1} \quad \forall t \in R$

(iii) Propiedad de Grupo: $U_tU_s = U_sU_t = U_{t+s}, \quad t, s \in R \quad$ y $\quad U_o = 1$

Un importante teorema que mas adelantes será utilizado es el que se conoce como *Teorema de Stone* en el que se *establece que cualquier operador auto-adjunto genera un grupo unitario uniparametral fuertemente continuo.*

Teorema 2.6.2 (Teorema de Stone)

Sea $\{U_t\}, -\infty < t < \infty$, un grupo unitario uniparametral fuertemente continuo. Definimos un operador lineal A (que será llamado en lo sucesivo el *generador infinitesimal* de $\{U_t\}$) como sigue:

$$D(A) = \{f \mid s - \lim_{\tau\to 0} i\tau^{-1}(U_\tau - I)f \text{ existe } \}$$

$$Af = s - \lim_{\tau\to 0} i\tau^{-1}(U_\tau - I)f \quad \forall f \in D(A)$$

Entonces se tiene que $D(A)$ es denso y que A es un operador lineal auto-adjunto.

2.7 Contracciones y puntos fijos

Mencionaremos para terminar el capítulo dos definiciones útiles en un futuro que dan pie a un teorema de ulilidad: El teorema de la contracción. Dicho resultado es muy utilizado para la resolución de ecuaciones integrales. Definamos entonces primero que es un punto fijo.

Definición 2.7.1

Sea $T : X \to X$ un mapeo en un conjunto X. Decimos que $x \in X$ es un *punto fijo* de T si $Tx = x$

Ahora definamos lo que es una contracción.

Definición 2.7.2

Sea (X, d) un espacio métrico. Un mapeo $T : X \to X$ tal que $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ es llamado *contracción*. Si existe un $K < 1$ tal que $d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y)$ entonces se trata de una *contracción estricta*.

Mencionemos ahora el teorema que será de nuestra utilidad.

Teorema 2.7.3 *(Teorema de la Contracción)*

Una contracción estricta en un espacio métrico completo tiene un único punto fijo.

Demostración:

Primero se establece la unicidad. Si $Tx = x, Ty = y$, entonces $d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y)$ dado que $K < 1$ y que $d(x, y) \geq 0$ entonces se tiene que $d(x, y) = 0$ y por tanto $x = y$. Para probar la existencia , primero debemos de notar que la continuidad de T es imediata puesto que si $d(x, y) < K^{-1}\epsilon$ entonces se tiene que $d(Tx, Ty) < \epsilon$. tomemos entonces x_0 como un punto arbitrario y sea $T^n x_0 = x_n$, podemos probar que $\{x_n\}$ es de Cauchy por el siguiente razonamiento: Primero observemos que:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq Kd(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq K^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \cdots \leq K^{n-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

por ello se tiene que si $n > m$, entonces.

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=m+1}^{n} d(x_j, x_{j-1}) \leq K^m \sum_{j=m+1}^{n} K^{j-2-m} d(x_0, x_1)$$

$$\leq K^m \sum_{l=-1}^{n} K^l d(x_0, x_1) \leq K^{m-1} \sum_{p=0}^{n} K^p d(x_0, x_1)$$

$$\leq K^m (1+K)^{-1} d(x_0, x_1) \to 0, m \to \infty$$

por lo que se tiene que $\{x_n\}$ es de Cauchy y por tanto $x_n \to x$ para algún x y dado que T es continuo entonces $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$ lo que prueba el resultado

Capítulo 3

Teoría de la dispersión

3.1 Introducción

A lo largo del desarrollo de la física, se ha visto que una pregunta ha sido fundamental en su historia, la pregunta es la de conocer las leyes que gobiernan el comportamiento de los fenómenos físicos. Durante el desarrollo de las ciencias físicas se han venido realizando experimentos que se fundamentan en un fenómeno físico conocido con el nombre de *dispersión* y que han otorgado muchas respuestas para poder dar a conocer al mundo algunas de las leyes que actualmente rigen en el mundo atómico; por mencionar algunos de los experimentos que se desarrollan actualmente bajo este principio estan: los experimentos de espectroscopía, los experimentos de difracción, los experimentos que se encargan de conocer la forma que constituye al átomo, así como los experimentos involucrados con partículas elementales en los aceleradores de partículas que actualmente existen.

En esta parte introductoria se pretende adentrar al lector dentro de lo que es un fenómeno de dispersión a rasgos generales para despues dar el tratamiento matemático necesario para la total comprensión del problema.

La Teoría de Dispersión es una herramienta que sirve para explicar algunos de los fenómenos del mundo atómico, forma una parte importante de la gran teoría de la física que se conoce como Mecánica Cuántica. En teoría de la dispersión se involucran sistemas que se encuentran en ciertos estados que son conocidos como estados de dispersión. Existen muchas variedades de experimentos de dispersión, pero en general dichos experimentos constan de cuatro partes esenciales que son:

(i) *La fuente* que es un aparato que producirá las partículas que han de interactuar con las que se encuentran en el *Blanco*. Aquí es importante mencionar que la fuente debe de producir las partículas de manera repetida, continua y bajo prácticamente las mismas condiciones, esto es por que todos los experimentos de dispersión involucran mediciones repetidas para sistemas que son idénticos.

(ii) *Un aparato* "preparador" (que puede ser por ejemplo· un colimador, el rayo de un espectrómetro o un polarizador) y que sirve para definir las condiciones iniciales de las partículas idénticas que van incidiendo en él

(iii) *El blanco* que contiene a las partículas que interactuarán con las partículas incidentes. Las condiciones en que se encuentre el blanco influirán mucho en las mediciones, por lo que deben de conocerse para poder dar la interpretación correcta. Por ejemplo si el blanco es grueso entonces será posible observar *dispersión múltiple*, y si por ejemplo el blanco tiene estructura cristalina entonces será posible observar un patrón de difracción. Por otro lado si se trata de un blanco móvil (por ejemplo un gas) entonces este efecto también será reflejado en las mediciones que se realizen. La interpretación mas sencilla de los resultados se encuentra cuando el blanco es muy fino y contiene una distribución aleatoria de partículas en reposo.

(iv) *El detector* que es un aparato que se encarga de registrar los resultados y que usualmente se encuentra en un lugar en el que sea posible detectar únicamente las partículas dispersadas, dicho de otra forma si el blanco se retira del arreglo experimental entonces el detector no puede registrar nada. En la práctica esta condición no es tan fácil de llevar a cabo pues no siempre es posible tener un rayo lo suficientemente bien colimado, o por que existen residuos de dispersión en el material debido a otras interacciones (es por ello la importancia de la buena calibración del detector). También es muy importante situar al detector lo suficientemente lejos del blanco para que no detecte las interacciones entre las partículas dispersadas y las partículas del blanco. En casi todos los casos el detector tiene un ángulo finito de resolución, lo mejor que se puede hacer es que dicho ángulo sea lo suficientemente pequeño para tener mejores mediciones, pero también es cierto que existen ciertas limitaciones físicas que no permiten hacer la resolución muy precisa, y este mismo problema sucede con el aparato "preparador".

3.1.1 Características físicas de los sistemas de dispersión

Las características físicas esenciales de un sistema de dispersión son las siguientes:
En un proceso de dispersión debemos distinguir tres momentos en la evolución temporal del sistema. En el primer momento el estado del sistema se encuentra en el pasado remoto. Durante este momento la partícula incidente y la partícula del blanco se encuentran lo suficientemente lejanas como para poder despreciar la interacción entre ellas, en términos de teoría de dispersión clásica las partículas incidentes se comportan como ***partículas libres***. De esta forma se espera que el estado del sistema evolucione en este primer momento obedeciendo las leyes que rigen el comportamiento de las partículas libres.
Durante el segundo momento las partículas interaccionan mutuamente y la evolución del sistema es gobernada por una ecuación de movimiento para la cual el término de interacción desempeña un papel fundamental. Es en el momento de la interacción que la dispersión ocurre.
Durante el tercer momento uno se encuentra en una situación análoga que en el primer momento. De hecho en el momento en el que el fenómeno de dispersión ha ocurrido las partículas se han alejado de tal forma que la interacción mutua es nuevamente despreciable y no tiene efecto en el futuro de la evolución del sistema. En el futuro del sistema, el detector, observa el nuevo estado de las partículas ocasionado por el proceso de dispersión.
La condición de que los estados que describen los fenómenos de dispersión deban de ser caracterizables en el tiempo remotamente pasado ($-\infty$) y en el tiempo remotamente lejano ($+\infty$) por cantidades que conciernen a la dinámica de partículas libres, se conoce como ***la condición asintótica***. Para poder describir dicha condición en términos matemáticos es necesario estudiar la descripción de la evolución en el tiempo de sistemas mecánico cuánticos y también es necesario introducir una topología (una noción de convergencia) que servirá para expresar la diferencia entre el sistema actual y el sistema libre (en el pasado remoto y el futuro lejano). En la próxima sección se entrará de lleno a este planteamiento.

3.2 Descripción de los Sistemas Mecánico Cuánticos

La descripción de los sistemas cuánticos necesita de la definición de dos conceptos principales; uno de ellos es la definición de los ***estados*** mecánico cuánticos y el otro es la definición de las ***observables*** del sistema.
Un ***estado*** de un sistema mecánico cuántico está representado por un operador positivo [1] de clase traza ρ definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y se le conoce con el nombre de ***operador de densidad***. Además dicho operador satisface el hecho de que $Tr\rho = 1$. Lo que quiere decir todo esto es que el espectro puntual de ρ que consiste en todos los eigenvalores positivos λ_i, satisacen que: $\sum_i \lambda_i = 1$, donde λ_i se repite según el grado de degeneración que tenga. [2] En el caso de que $\rho^2 = \rho, \rho$ es una proyección ortogonal con rango unidimensional; en este caso el estado es llamado ***puro***.
Si consideramos el siguiente subespacio unidimensional, $M = \{\alpha f \mid \alpha \in C\}$, donde f es un vector unitario definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces podemos denotar a F_f como la correspondiente proyección ortogonal en dicho espacio y que opera de la siguiente manera:

$$F_f g = (f, g)f \quad \forall g \in \mathcal{H}$$

Se puede establecer una relación entre F_f (visto como un estado puro) y un rayo unitario en $\mathcal{H}$ y que se define como $\{\alpha f \mid |\alpha| = 1\}$. La correspondencia entre los estados puros y los rayo unitarios es uno a uno, uno puede identificar a un estado puro mediante un vector unitario que pertenezca a su rango.
Las ***observables*** de un sistema están representadas por operadores auto-adjuntos definidos en $\mathcal{H}$. Debemos entonces identificar a una observable física con un respectivo operador auto-adjunto A definido en $\mathcal{H}$.
El ***el valor de expectación*** de una observable A en un estado puro f está definido como:

$$Exp_f(A) = (f, Af).$$

[1] Un operador lineal se dice que es positivo , y se escribe $A \geq 0$, si $(f, Af) \geq 0 \forall f \in D(A)$

[2] Consideremos un operador T definido en un espacio de Banach X que a su vez está definido sobre un campo K (R o C). El espectro puntual de T esta compuesto por los eigenvalores de T; este conjunto es denotado por $\sigma_p(T)$ y está definido por.

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in K / \exists x \in X, x \neq 0, Tx = \lambda x\}.$$

Si la dimensión del espacio vectorial $E_\lambda = ker(\lambda I - T)$ es mayor que uno, entonces decimos que el eigenvalor esta ***degenerado***, y la dimensión de E_λ será el ***grado de degeneración*** del eigenvalor.

Cuando este existe.
Dado que las observables de un sistema físico están determinadas por operadores auto-adjuntos, nos interesa conocer un resultado en el que se afirma que cada operador auto-adjunto A admite una descomposición espectral. En el siguiente teorema se establece este concepto.

Teorema 3.2.1 *(Teorema Espectral para operadores Auto-adjuntos)*
Sea A un operador auto-adjunto definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces dicho operador admite una descomposición espectral, es decir, existe una única familia de proyecciones $\{E_\lambda\}$ definidos en $\mathcal{H}$, que tienen las siguientes propiedades:

(i) $E_\lambda = E_{\lambda+0} = s - \lim_{\eta\to+0} E_{\lambda+\eta}$

(ii) $s - \lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0$, $s - \lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda = I$

(iii) Si $\lambda \leq \mu$, entonces $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$

(iv) Un vector f pertenece a $D(A)$ si y sólo si:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(f, E_\lambda f) < \infty,$$

además para una f dada y para cualquier $g \in H$, se tiene que:

$$(g, Af) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(g, E_\lambda f).$$

La familia $\{E_\lambda\}$ se le llama familia espectral del operador auto-adjunto A. Con la ayuda de la familia espectral $\{E_\lambda\}$ es posible definir una medida de probalididad $p^A_{(a,b],f}$ en R como sigue:

$$p^A_{(a,b],f} = \int_a^b d(f, E_\lambda f),$$

Donde $-\infty < a < b < \infty, f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1$. El hecho de que sea una medida de probalilidad proviene de la misma definición, de la cual se deriva que:

$$p^A_{(-\infty,\infty],f} = \int_{-\infty}^{\infty} d(f, E_\lambda f) = \|f\|^2 = 1.$$

Uno puede interpretar que $p^A_{(a,b],f}$ es la probalilidad de que la medida de una observable A del sistema en el estado f tome algún valor en el intervalo $(a, b]$.
Para un vector de estado $f \in D(A)$, el valor de expectación de la observable A en el estado f, está dado por:

$$Exp_f(A) \equiv (f, Af) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(f, E_\lambda f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda p^A_{(d\lambda),f}$$

La evolución en el tiempo de un sistema mecánico cuántico está dada por un grupo unitario. Sea $\{U_t\}$ dicho grupo. Si el vector f representa al estado en el tiempo $t = 0$ entonces f_t representa al estado en el tiempo t y esta dado por:

$$f_t = U_t f. \tag{3.2.1}$$

Por la unicidad del grupo $\{U_t\}$ es claro que $\|f_t\| = \|f\| = 1$. Un requerimiento natural es el esperar que el valor de expectación para cualquier observable en un estado f al tiempo t sea una función continua de t. Esto significa que $Exp_{f_t}(A) = (f_t, Af_t)$ es continuo.
Por el Teorema de Stone (2.6.2) se deriva que existe un operador auto-adjunto (en general no acotado) H que esta dado por:

$$Hg = s - \lim_{t\to 0} i\hbar t^{-1}(U_t - I)g$$

con $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Este operador desempeña el mismo papel que la función Hamiltoniana desempeña en mecánica clásica es por ello que a este operador se le conoce como operador Hamiltoniano.

Sea $f \in D(H)$, entonces $f_t = U_t f \in D(T)$ de este modo la ecuación (3.2.1) se puede ver como:

$$\frac{d}{dt} f_t = -i\hbar^{-1} H f_t \tag{3.2.2}$$

En donde entenderemos que la derivada es un límite fuerte. Esta ecuación (3.2.2) es conocida en la literatura como la ecuación de Shrödinger lineal en su forma diferencial (la forma integral es la ecuación (3.2.1)).
Esta ecuación desempeña un papel parecido al papel que desempeñan las ecuaciones de Hamilton en mecánica clásica. La ecuación de Schrödinger es una ecuación de primer orden (definida en un espacio de Hilbert) cuyas soluciones son trayectorias (estados puros). El grupo $\{U_t\}$ puede ser escrito en términos de su generador infinitesimal puesto que:

$$U_t = e^{\frac{-2iHt}{\hbar}}$$

Si f un eigenvector de H, es decir $Hf = \hbar\lambda f$ para alguna $\lambda \in R$. Entonces $U_t f = \exp(-it\lambda)$. Esto implica que f y $U_t f$ difieren sólo por un factor de fase y por lo tanto definen el mismo rayo y estado. En otras palabras, el valor de expectación para cada observable A en el estado f_t es el mismo en todos los tiempos, esto es:

$$Exp_{f_t}(A) = (U_t f, AU_t f) = (f, Af) = Exp_f(A),$$

por lo que se dice que f es un *estado estacionario*. De manera inversa también se puede verificar que si se tiene un estado estacionario entonces el estado es un eigenestado de la observable con un eigenvalor λ. Esto se puede deducir de manera sencilla pero primero se debe de observar que cualquier grupo unitario de un parametro a valores complejos $\alpha(t)$ acepta una única representación del tipo $e^{\beta t}$ donde β es un número complejo. Esto se deduce de la siguiente propiedad que se cumple para todo $\alpha(t)$:

$$\int_t^{t+\tau} \alpha(s)ds = \alpha(t) \int_0^{\tau} \alpha(s)ds$$

Puesto que si esto pasa entonces dado que $\alpha(0) = 1$ y dado que $\tau << 1$ entonces se tiene que·

$$\alpha(t) = [\int_0^{\tau} \alpha(s)ds]^{-1} \int_t^{t+\tau} \alpha(s)ds$$

Por lo que:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = [\int_0^{\tau} \alpha(s)ds]^{-1}[\alpha(\tau) - 1]\alpha(t)$$

Si ahora definimos a $\beta = [\int_0^{\tau} \alpha(s)ds]^{-1}[\alpha(\tau) - 1]$ entonces $\beta \in C$ pues el grupo toma valores complejos. Y así:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \beta\alpha(t)$$

Por lo que:

$$\alpha(t) = e^{\beta t}$$

Una vez demostrado esto entonces se procede a utilizar este resultado para demostrar la inversa de la proposición. Siendo así se supone que $Exp_{f_t}(A) = (U_t f, AU_t f) = Exp_f(A) = (f, Af)$ para cada observable, entonces si tomamos $A = F_g$, (aquí $A = F_g$ es un operador de proyección, el efecto que produce dicho proyector en un vector $f \in \mathcal{H}$se puede ver como:

$$Af = F_g f = (g, f)g$$

donde g es un vector unitario de $\mathcal{H}$), se tiene que $(f_t, Af_t) = (U_t f, AU_t f) = \overline{(g, U_t f)}(U_t f, g) = |(U_t f, g)|^2$ y que $(f, Af) = \overline{(g, f)}(f, g) = |(f, g)|^2$ por lo que $|(U_t f, g)|^2 = |(f, g)|^2$. Entonces si tomamos g de tal modo que $(f, g) = 0$ entonces $(U_t f, g) = 0$ y por tanto (por el teorema de la proyección) $U_t f$ pertenece al subespacio unidimensional generado por f, esto es $U_t f = \alpha(t) f$, donde $\alpha(t)$ es un grupo unitario uniparametral a valores complejos. y como ya se demostró antes esto quiere decir que el grupo acepta una única representación exponencial; mas aún dado que $|\alpha(t)| = 1$ entonces se tiene que $\alpha(t) = e^{-it\lambda}$ con $\lambda \in R$. Por todo esto entonces se tiene que $U_t f = e^{-it\lambda} f$, se puede ver que el lado derecho de la igualdad acepta la derivada (límite fuerte) al tiempo $t = 0$ y dada la ecuación de Scrhödinger en su forma diferencial se concluye que $Hf = \hbar\lambda f$ por lo que f es un eigenvector de H con eigenvalor $\hbar\lambda$.
Llamaremos a una observable A *constante de movimiento* si $Exp_{f_t}(F_\lambda) = Exp_f(F_\lambda)$para todo $f \in H$ y para todo real λ, t, donde $\{F_\lambda\}$ es la familia espectral de A.

Se puede deducir además lo siguiente:

$$U_t^{-1} F_\lambda U_t = F_\lambda, \forall \lambda, t \in R$$

Esto se deduce del hecho que dada una observable A con familia espectral $\{F_\lambda\}$ es fácil ver que bajo condiciones favorables que definan el dominio y tomando una t fija entonces $\{U_t^* F_\lambda U_t\}$ es la familia espectral del operador auto-adjunto $A_t = U_t^* A U_t$ y con esto si además se tiene que $Exp_{f_t}(F_\lambda) = Exp_f(F_\lambda)\ \forall f \in \mathcal{H}$ y $\lambda, t \in R$ entonces se puede concluir que $U_t^* F_\lambda U_t = F_\lambda$. Esto último se observa de lo siguiente:

$$(f_t, F_\lambda f_t) = (U_t f, F_\lambda U_t f) = (f, U_t^* F_\lambda U_t f) = (f, F_\lambda f) \forall f \in \mathcal{H}$$

Y dado que se tiene la identidad de polarización [3] se puede deducir que:

$$\begin{aligned} &4(f, U_t^* F_\lambda U_t g) = \\ &(f+g, F_\lambda(f+g)) - (f-g, F_\lambda(f-g)) - i(f+ig, F_\lambda(f+ig)) + i(f-ig, F_\lambda(f-ig)) \\ &= 4(f, F_\lambda g) \end{aligned}$$

por lo que se tiene que:

$$(f, U_t^* F_\lambda U_t g) = (f, F_\lambda g) \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$$

esto es:

$$U_t^* F_\lambda U_t = F_\lambda$$

3.3 Teoría de Dispersión Dependiente del Tiempo

En mecánica cuántica el sistema de dispersión (dependiente del tiempo) más simple con el que se puede trabajar puede ser descrito por dos grupos unitarios $\{U_t\}$ y $\{V_t\}$ que actúan sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que está formado por todos los estados posibles (puros) del sistema físico en consideración. El grupo $\{U_t\}$ se encargará de describir la evolución en el tiempo del sistema en ausencia de una perturbación o de una interacción entre los elementos constituyentes del mismo. A este grupo por ello se le llamará el ***grupo de evolución sin perturbación o libre.*** El otro grupo unitario $\{V_t\}$ se asumirá que representará la evolución en el tiempo del sistema considerando la interacción que se de y será llamado el ***grupo de evolución total o perturbado*** del sistema. El objetivo fundamental de esta sección será la de presentar la condición asintótica de un sistema de dispersión como el que se acaba de describir.

3.3.1 La Condición Asintóntica

Matemáticamente la condición asintótica puede ser planteada en términos de los parámetros $\{U_t\}$ y $\{V_t\}$ que se mencionaron con anterioridad. Como se vió en la sección 3.1.2 se puede escribir a estos grupos en términos de sus generadores infinitesimales que están determinados de manera única. Dichos generadores estarán denotados por H_o y H respectivamente, es decir que los grupos pueden expresarse como:

$$U_t = \exp(-iH_o t), V_t = \exp(-iHt). \tag{3.3.1}$$

H_o es interpretado como el operador en la ausencia de interacción y se le llama el *Hamiltoniano libre*, por otro lado a H se le conoce como el *Hamiltoniano Total* y es la suma entre H_o y el Hamiltoniano de interacción V, esto es, $H = H_o + V$. En muchos de los casos H_o y V son operadores auto-adjuntos no acotados y es por ello que la suma $H_o + V$ definida en $\mathcal{D} \equiv D(H_o) \cap D(V)$ no es necesariamente un operador auto-adjunto. En este caso entonces se define a H como una extensión auto-adjunta de $H_o + V$.

En presencia de la interacción la evolución en el tiempo de un estado $g \in \mathcal{H}$ está gobernada por el grupo $\{V_t\}$, esto es, el correspondiente estado al tiempo t será $V_t g$. Como se mencionó en la sección 3.1.1, en un sistema de dispersión lo que se espera de la evolución total del sistema es que esta se aproxime a la evolución de un sistema libre cuando $t \to \pm\infty$. Esta condición se puede expresar en términos matemáticos si se supone que, dado un $g \in \mathcal{H}$, entonces existen dos estados $f_\pm$ tales que $V_t g$ converge fuertemente a $U_t f_\pm$ cuando $t \to \pm\infty$, respectivamente. Esto es:

$$\lim_{t \to -\infty} \|V_t g - U_t f_-\| = 0, \lim_{t \to +\infty} \|V_t g - U_t f_+\| = 0. \tag{3.3.2}$$

[3] $4(f, g) = \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 - i\|f+ig\|^2 + i\|f-ig\|^2. \forall f, g \in \mathcal{H}$

Lo que esta aseveración implica es que los estados $V_t g$ y $U_t f_{\pm}$son indistinguibles en el pasado remoto $(-\infty)$ del sistema y en el futuro lejano $(+\infty)$. El hecho de que los grupos $\{U_t\}$ y $\{V_t\}$ cumplan la condición (3.3.2) representa una restricción fundamental y es en dicha restricción que se encuentra el carácter dispersivo de la dinámica del sistema.En la figura (3.1) se puede observar la representación gráfica de la condición asintótica, en dicha representación se debe de considerar que los puntos en el plano son vectores del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, que las lineas rectas describen el sistema sin perturbación y que la línea curva representa al sistema perturbado.

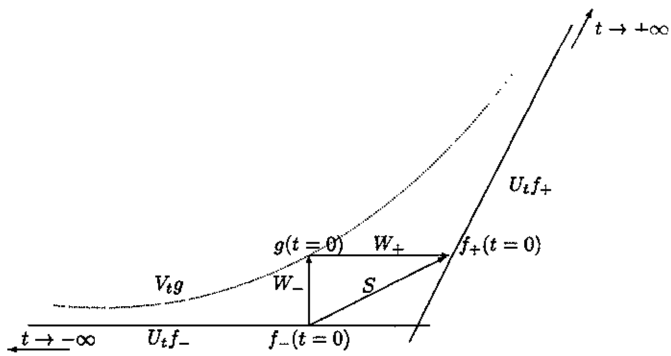

Figura 3.1: Representación gráfica de la condición asintótica.

Las ecuaciónes (3.3.2) implican que para cualquier proyección ortogonal F se tiene que:

$$\lim_{t\to\pm\infty}\{\|FV_tg\|^2 - \|FU_tf_{\pm}\|^2\} = 0. \tag{3.3.3}$$

Esto se puede ver de las siguientes desigualdades:

$$\lim_{t\to-\infty}[\|FV_tg\|^2 + \|FU_tf_-\|^2] = \lim_{t\to-\infty}[\|F(V_tg - U_tf_-) + FU_tf_-\|^2 - \|FU_tf_-\|^2]$$

$$= \lim_{t\to-\infty}[\|F(V_tg - U_tf_-)\|^2 + (F(V_tg - U_tf_-), FU_tf_-) + (FU_tf_-, F(V_tg - U_tf_-))]$$

$$\leq \lim_{t\to-\infty}[\|F(V_tg - U_tf_-)\|^2 + 2\|F(V_tg - U_tf_-)\|\|FU_tf_-\|$$

$$\leq \lim_{t\to-\infty}[\|F(V_tg - U_tf_-)\|^2 + 2\|F(V_tg - U_tf_-)\|\|f_-\| = 0$$

Algo que hay que observar es el conjunto de vectores $g \in \mathcal{H}$ que cumplen la condición asintótica, a dichos estados se les llamará ***estados de dispersión*** del operador H. Una condición que debe ser inherente también para los sistemas de dispersión, es que cualquier estado que se maneja bajo evolución libre $\{U_t\}$ debe de mantenerse lejos del centro de dispersión cuando se trate de tiempos muy remotos o muy lejanos.

Ahora si $g \in \mathcal{H}$ es un eigenvector de H entonces $V_tg = \exp(i\lambda t)g$ por lo que el vector de estado del sistema al tiempo t será sólo un multiplo de g y por tanto no podrá cumplir con la condición asintótica y no será un estado de dispersión. Es por este motivo que los estados de dispersión en el sistema están asociados al espectro continuo y no al espectro puntual del Hamiltoniano H.

De esta manera se asumirá que para cada Hamiltoniano H se puede asociar un conjunto de estados de dispersión $M_\infty(H)$ que tienen las siguientes propiedades:

(i) $M_\infty(H)$ es un subespacio de $\mathcal{H}$.

(3.3.4)

(ii) $M_\infty(H)$ es invariante bajo el grupo $\{\exp(-iHt)\}$, esto es: si $g \in M_\infty(H)$ entonces, $\exp(-iHt)g \in M_\infty(H) \quad \forall t \in R$.

El hecho que $M_\infty(H)$ sea un subespacio de $\mathcal{H}$ quiere decir que en este conjunto se define una topología fuerte Lo que quiere decir esto también es que dado un estado de dispersión se le asocia una observable, $E_\infty(H)$ que es la proyección ortogonal autoadjunta cuyo rango es $M_\infty(H)$. Por otro lado la condición (ii) de (3.2.4)puede ser escrita como:

$$E_\infty(H)\exp(-iHt) = \exp(-iHt)E_\infty(H). \tag{3.3.5}$$

Esto último se deriva del siguiente razonamiento:
Si $g \in M_\infty(H)$ entonces $E_\infty(H)g \in M_\infty(H)$ y por tanto $e^{-itH}E_\infty(H)g \in M_\infty(H)$ siendo así se tiene que:

$$e^{-itH}E_\infty(H)g = E_\infty(H)e^{-itH}E_\infty(H)g = E_\infty(H)e^{-itH}g$$

Ahora si $g \in M_\infty^\perp(H)$ entonces se tiene que $e^{-itH}g \in M_\infty^\perp(H)$. (Esto se debe a que: $(e^{-itH}g, f) = (g, e^{-itH}f) = 0 \forall f \in M_\infty(H), \forall g \in M_\infty^\perp)$. De esta manera la ecuación (3.3.5) se cumple trivialmente.
Para poder precisar mas en términos matemáticos la condición asintótica, se debe considerar primero que en un sistema de dispersión, se parte de un estado de dispersión al tiempo $t = 0$ el cual será gobernado por el grupo de evolución libre de perturbación. Este estado es el que hemos llamado f_- y que se observa en las ecuaciones (3.3.2). De esta manera el estado preparado al tiempo t negativo será $U_t f_-$, de este modo f_- deberá pertenecer a $M_\infty(H_o)$. Una vez dado este estado preparado la primera parte de la condición asintótica implica que deberá de existir un $g \in M_\infty(H)$ tal que la primera ecuación de las ecuaciones (3.3.2) se cumpla. La segunda parte de la condición asintótica implica que debe de existir un vector $f_+ \in M_\infty(H_o)$ tal que verifique la segunda ecuación de las (3.3.2), en donde g es el vector que se obtuvo de verificar la primera parte de la condición asintótica.
Lo que quiere decir todo esto es que el efecto de dispersión en esta descripción estará determinado de manera fundamental con la asociación que se pueda dar de un estado inicial $f_- \in M_\infty(H_o)$ con un estado final $f_+ \in M_\infty(H_o)$. Ambos deberán ser interpretados como estados al tiempo $t = 0$. De las ecuaciones (3.3.2) se puede ver que cuando no hay interacción, esto es, cuando $U_t = V_t$, se tiene que $f_- = f_+$. Podremos ver mas adelante que la relación de correspondencia que relaciona a los estados $f_- \to f_+$ define un operador en el subespacio $M_\infty(H_o)$. A este operador se le conocerá como *Operador de Dispersión* y se le denotará con la letra S. La diferencia que existe entre este operador y el operador identidad estará directamente relacionada con el efecto de dispersión.
Dado que V_t es unitario, uno puede utilizar dicha propiedad para ver que la primera ecuacion (3.3.2) puede ser escrita como:

$$\lim_{t\to-\infty} \|V_t g - U_t f_-\| = \lim_{t\to-\infty} \|g - V_t^* U_t f_-\| = 0. \tag{3.3.6}$$

De esto se puede ver que si queremos que esta condición se cumpla entonces para cada $f_- \in M_\infty(H_o)$ debe de existir un vector g tal que la ecuación (3.3.6) se cumpla. En ese caso esta condición es equivalente a pedir que exista el límite (fuerte) de $V_t^* U_t$ cuando $t \to -\infty$, en el subespacio $M_\infty(H_o)$. Este límite fuerte sera llamado *operador de onda* W_-:

$$W_- \equiv s - \lim_{t\to-\infty} V_t^* U_t E_\infty(H_o). \tag{3.3.7}$$

De acuerdo a esta definición se puede ver que W_- está definido para todo $f \in \mathcal{H}$, para hacer acorde la definición basta con tomar $W_- f = \theta \forall f \in (M_\infty(H_o))^\perp$.
De manera simétrica para la segunda parte de la condición asintóntica se define el operador de onda W_+, como sigue:

$$W_+ \equiv s - \lim_{t\to+\infty} V_t^* U_t E_\infty(H_o) \tag{3.3.8}$$

Cuando dicho límite existe. Es entonces que decimos que la condición asintótica se cumple si (3.3.7-3.3.8) se cumplen. Se puede ver que $g = s - \lim_{t\to\infty} V_t^* U_t f$ si y sólo si $f = s - \lim_{t\to\infty} V_t^* U_t g$, de esto se puede concluir que la segunda parte de la condición asintótica, en la que se pide la existencia de un vector f_+ estará determinada por la existencia de g y como g debe de estar contenido en el rango de W_- esto quiere decir que, para garantizar que $g \in W_-\mathcal{H}$,se debe de pedir que el rango de W_- debe de estar contenido en el rango de W_+.
Veremos mas adelante que los operadores de onda son isometrías parciales (tal y como se definieron en el capítulo anterior) y es por ello que se procede a definir los siguientes proyectores.

$$F_\pm \equiv W_\pm W_\pm^*. \tag{3.3.9}$$

De todo esto podemos concluir que la *Formulación de la condición asintótica* esta dada por las siguientes condiciones:

(CA1) La existencia de los límites:

$$W_\pm \equiv s - \lim_{t\to\pm\infty} V_t^* U_t E_\infty(H_o).$$

CA2)

$$F_-\mathcal{H} \subseteq F_+\mathcal{H}.$$

Los subespacios $F_\pm$ deben de estar contenidos en el subespacio $M_\infty(H)$. El caso mas simple se da cuando:

CA3) $F_+\mathcal{H} = F_-\mathcal{H} = M_\infty(H)$.

Si la condición (CA3) se cumple entonces se dice que la teoría es *asintóticamente completa*, esto se debe al hecho de que cualquier estado evolutivo $V_t g, g \in \mathcal{H}$ se podrá describir de manera asintótica por un estado libremente evolutivo, como lo indican las ecuaciones (3.3.2). Este tipo de sistemas son por tanto los sistemas mas sencillos de describir. De esta forma al sistema que cumpla con las tres condiciones se le llamara *sistema de dispersión simple.*
Demostraremos ahora, para que todo sea acorde, que los operadores de onda son isometrías parciales y daremos la definición del operador de dispersión.

Proposición 3.3.1
Los operadores de onda son isometrías parciales cuyo conjunto inicial es $M_\infty(H_o)$.
Demostración:(Para W_-)
De la definición de W_- se tiene que $D(W_-) = \mathcal{H}$. Ahora se puede ver que:

$$\|W_- f\| = \lim_{t\to-\infty} \|V_t^* U_t E_\infty(H_o) f\| = \|E_\infty(H_o) f\|,$$

pues U_t y V_t son operadores unitarios. Lo que implica esta última igualdad es que W_- es una isometría parcial, por la proposición (2.5.7).
Ahora definamos lo operadores de onda adjuntos.

Proposición 3.3.2
Los operadores de onda adjuntos, $W_\pm^*$, están dados por:

$$W_\pm^* = s - \lim_{t\to\pm\infty} U_t^* V_t F_\pm. \tag{3.3.10}$$

Demostración:(para W_-)
Se tiene que:

$$\lim_{t\to-\infty} \|U_t^* V_t W_- f - E_\infty(H_o) f\| = \lim_{t\to-\infty} \|W_- f - U_t^* V_t E_\infty(H_o) f\| = 0,$$

lo que es lo mismo:

$$s - \lim_{t\to-\infty} U_t^* V_t W_- = E_\infty(H_o).$$

Ahora si multiplicamos esta última igualdad por W_-^* por el lado derecho , utilizamos (3.3.9) y el resultado (b) de la proposición (2.5.8) se tiene que:

$$s \lim_{t\to-\infty} U_t^* V_t F_- = W_-^*.$$

◊

Proposición 3.3.3
Si $W_\pm$ existen, entonces para cualquier $\tau \in R$ se cumple que:

$$V_\tau W_\pm = W_\pm U_\tau \tag{3.3.11}$$

$$U_\tau W_\pm^* = W_\pm^* V_\tau. \tag{3.3.12}$$

Lo que nos dicen estas igualdades es que los operadores de onda guardan cierta relación con los grupos de evolución libre y perturbada. A estas igualdades se les conoce como *relaciones de entrelazamiento.*
Demostración:(Para W_-)
Debemos de tener en cuanta en esta demostración la definición de grupo unitario, la ecuación (3.3.5) y la condición (CA1). Siendo así se tiene que:

$$V_\tau W_- = V_\tau s - \lim_{t\to-\infty} V_t^* U_t E_\infty(H_o) = s - \lim_{t\to-\infty} V_\tau V_t^* U_t E_\infty(H_o) =$$

$$s - \lim_{t'\to-\infty} V_{t'}^* U_{t'+\tau} E_\infty(H_o) = s - \lim_{t'\to-\infty} V_{t'}^* U_{t'} E_\infty(H_o) U_\tau = W_- U_\tau,$$

la desigualdad (3.3.12) se obtiene de tomar el adjunto de (3.3 11) y considerando que $U_\tau^* = U_{-\tau}$

Proposición 3.3.4

(a) Si $f \in D(H_o)$, entonces $W_{\pm}f \in D(H)$ y $HW_{\pm}f = W_{\pm}H_o f$.

(b) Si $g \in D(H)$, entonces $W_{\pm}^* g \in D(H_o)$ y $H_o W_{\pm}^* f = W_{\pm}^* Hg$.

Demostración:
Sea W cualquiera de los operadores de onda. Entonces se tiene que:

$$\|i\tau^{-1}W(U_\tau - I)f - WH_o f\| \leq \|W\| \|i\tau^{-1}(U_\tau - I)f - H_o f\|,$$

que converge a cero cuando $\tau \to 0$ por el Teorema de Stone. Por lo que $i\frac{d}{d\tau}WU_\tau f = WH_o f$. Ahora de las relaciones de entrelazamiento se tiene que:

$$i\frac{d}{d\tau}V_\tau W f = i\frac{d}{d\tau}WU_\tau f = WH_o f.$$

Ahora dado que $i\frac{d}{d\tau}V_\tau Wf = HWf$ (Por el Teorema de Stone, nuevamente) se tiene que $Wf \in D(H)$ y que $HWf = WH_o f$. Lo que prueba (a), para la prueba de (b) se utiliza la segunda relación de entrelazamiento, la ecuación (3.3.12) siguiendo un razonamiento análogo.◇

Proposición 3.3.5
Si (CA1) se cumple entonces se tiene que, para toda $\tau \in R$:

$$F_{\pm}V_\tau = V_\tau F_{\pm}. \tag{3.3.13}$$

Debemos observar que si la condición (CA3) se cumple entonces este resultado es el mismo que el resultado expresado en la ecuación (3.3.5).
Demostración:
Podemos observar de la definicición de $F_{\pm}$ y de las relaciones de entrelazamiento que·

$$F_{\pm}V_\tau = W_{\pm}W_{\pm}^* V_\tau = W_{\pm}U_\tau W_{\pm}^* = V_\tau W_{\pm}W_{\pm}^* = V_\tau F_{\pm}.$$

◇
Ahora definamos lo que se conoce como el operador de Dispersión:

$$S = W_+^{-1}W_-,$$

ver figura (3.1).
La definición tiene sentido si se cumple la segunda condición de la formulación de la condición asintótica. Dado que se necesita que el rango de W_- este contenido en el rango de W_+ y ademas se sabe que W_+ es invertible por lo dicho en la proposición (2.5.8) y es también por esta proposición que la inversa W_+^{-1} puede ser reemplazada por W_+^*. Es por ello que se adopta la siguiente definición como la definición del operador de dispersión:

$$S = W_+^* W_-. \tag{3.3.14}$$

Proposición 3.3.6
S es una isometría parcial con conjunto inicial $M_\infty(H_o)$ esto es:

$$S^* S = E_\infty(H_o)$$

El rango de S es un subespacio de $M_\infty(H_o)$ invariante bajo $\{U_t\}$.
Demostración:
Dado que $D(W_-) = D(W_+) = \mathcal{H}$, se tiene que $D(S) = H$. Por otro lado por la definición de S y de $F_{\pm}$ se tiene que $S^*S = W_-^* W_+ W_+^* W_- = W_-^* F_+ W_-$. Dado que el rango de W_- está contenido en el rango de W_+ se tiene que por la definición de F_+ que $F_+ W_- = W_-$ Por tanto se tiene que $S^*S = W_-^* W_- = E_\infty(H_o)$, lo que prueba que S es una isometría parcial.
El rango de S es subespacio del rango de W_+^* . (Esto se puede ver pues por la definición de S se tiene que el rango de S es un subconjunto de W_+^* y como S es una isometría parcial el subconjunto es cerrado y por tanto un subespacio) Ahora como el rango de W_1^* es $M_\infty(H_o)$ entonces se tiene que, por la proposición 2.5.8, el rango de S es un subespacio de $M_\infty(H_o)$. La invariancia de S frente al grupo $\{U_t\}$ se demostrará en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.7

(a) Para cualquier $\tau \in \mathcal{R}$ se tiene que:
$$SU_\tau = U_\tau S. \tag{3.3.15}$$

(b) S deja a $D(H_o)$ invariante y además:
$$SH_o \subseteq H_oS. \tag{3.3.16}$$

Demostración:
La demostración de (3.3.15) se obtiene inmediatamente de la definición de S y de las relaciones de entrelazamiento, puesto que:
$$SU_\tau = W_+^*W_-U_\tau = W_+^*V_\tau W_- = U_\tau W_+^*W_- = U_\tau S.$$

Para probar la ecuación (3.3.16) se debe de observar lo siguiente:
$SH_o \subset H_oS$ quiere decir que $SH_of = H_oSf \forall f \in D(H_o)$.
Ahora por la ecuación (3.3.15) y el Teorema de Stone (Teorema 3.3.1) se tiene que :

$$H_oSf = i\frac{d}{d\tau}U_\tau Sf = i\frac{d}{d\tau}SU_\tau f = Si\frac{d}{d\tau}U_\tau f = SH_of \forall f \in D(H_o)$$

Mas aún se puede observar que la igualdad del resultado (3.3.16) se obtiene cuando nos restringimos al subespacio $M_\infty(H_o)$, esto es:
$$SH_oE_\infty(H_o) = H_oS.$$

Ello se ve del hecho de que si $g \in M_\infty(H_o)$ y $Sg \in D(H_o)$ se tiene que:

$$H_oSg = i\frac{d}{d\tau}U_\tau SS^*Sg = i\frac{d}{d\tau}SU_\tau S^*Sg = Si\frac{d}{d\tau}U_\tau S^*Sg = SH_oE_\infty(H_o)g$$

Por lo que $E_\infty(H_o)g = g \in D(H_o)$ y la igualdad se cumple.◇
Este último resultado demostrado tiene mucha importancia en el sentido físico pues esto nos dice que la energía libre de perturbación se conserva dentro del proceso de dispersión, o en otras palabras que el proceso de dispersión es elástico. De esta relación se puede obtener que el valor de expectación en el estado final f_+ es el mismo que el valor de expectación del estado inicial $f_- \in M_\infty(H_o) \cap D(H_o)$:

$$(f_+, H_of_+) = (Sf_-, H_oSf_-) = (S^*Sf_-, H_of_-) = (f_-, H_of_-).$$

Enunciaremos ahora la siguiente proposición fundamental para poder establecer la unitariedad de S.

Proposición 3.3.8

El operador de dispersión es un operador unitario en $M_\infty(H_o)$ si y sólo si el rango de W_- es igual al de W_+. En particular S es unitario si la teoría es asintóticamente completa.
Demostración.
Ya que el operador de dispersión es una isometría parcial, para poder observar que se trata de un operador unitario es necesario observar que $S^*S = SS^* = I$. Puesto que $S^*S = E_\infty(H_o)$ basta con pedir que $SS^* = E_\infty(H_o)$ (recordemos que estamos hablando del caso en que $M_\infty(H_o) = \mathcal{H}$), pero si pedimos que $SS^* = E_\infty(H_o)$ entonces dado que $SS^* = W_+^*W_-W_-^*W_+ = W_+^*F_-W_+$, para poder garantizar que $SS^* = E_\infty(H_o)$ debemos de pedir que el rango de W_+ este contenido en el rango de W_-, para así observar que $F_-W_+ = W_+$ y por tanto $SS^* = W_+^*W_+ = E_\infty(H_o)$.
Ahora si pasara que el rango de W_- fuese estrictamente más pequeño que el rango de W_+ entonces se tendría que F_-W_+ sería nulo en un subespacio de $\mathcal{H}$ y por tanto SS^* sería una proyección mas pequeña que $E_\infty(H_o)$ y S no sería unitario. Y como hemos supuesto que el rango de W_- está contenido en el rango de W_+, sólo queda que para que se cumpla la unitariedad debemos tener que $W_-\mathcal{H} = W_+\mathcal{H}$.
Ahora veremos algunas consideraciones de simetría en la teoría de dispersión.
Las simetrías en la teoría de dispersión como en todas las teorías de la física juegan un papel fundamental puesto que ellas involucran la conservación de ciertas propiedades fundamentales del sistema físico en cuestión.
Debemos de definir primero que nada lo que es una simetría en el sentido matemático. Una simetría es una transformación en el espacio que describe el sistema físico que al actuar en la evolución del sistema deja invarientes las leyes de movimiento que lo rigen. En mecánica cuántica debemos de observar que una *transformación simétrica* está representada por un grupo unitario o anti-unitario.

nota:
Un operador lineal U definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es anti-unitario si:

(i)
$$UU^* = U^*U = I.$$

(ii)
$$U(\alpha f) = \overline{\alpha}U(f) \quad \forall\alpha \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{H}.$$

De esta forma decimos que un sistema de Dispersión es invariante bajo un grupo G si existe una representación de G hecha por operadores (unitarios o anti-unitarios) definidos en $\mathcal{H}$ y que es tal que conmuta con U_t y V_t y que deja $M_\infty(H_o), M_\infty(H)$ invariantes. De este modo para cada elemento $\gamma \in G$ existe un operador (unitario o anti-unitaro) U_γ tal que:

$$U_{\gamma_1\gamma_2} = U_{\gamma_1}U_{\gamma_2} \tag{3.3.17}$$

$$U_\gamma E_\infty(H_o) = E_\infty(H_o)U_\gamma, U_\gamma E_\infty(H) = E_\infty(H)U_\gamma \tag{3.3.18}$$

$$U_\gamma U_t = U_{\pm t}U_\gamma, U_\gamma V_t = V_{\pm t}U_\gamma \tag{3.3.19}$$

En la ecuación (3.3.19) se toma el signo negativo cuando el operador es anti-unitario y el signo positivo cuando el operador es unitario.

Proposición 3.3.9

Consideremos que se tiene un sistema físico que es invariante bajo el grupo G, entonces:

$$SU_\gamma = U_\gamma S$$

Si U_γ es unitario.

$$S^*U_\gamma = U_\gamma S$$

Si U_γ es anti-unitario.
Podemos observar que si la representación esta hecha por operadores anti-unitarios entonces se tiene que:

$$U_\gamma S U_\gamma^* = S^*$$

Demostración:
Supongamos que U_γ es unitario, entonces se tiene que por (3.3.18):

$$U_\gamma V_t^* U_t E_\infty(H_o) = V_t^* U_t E_\infty(H_o) U_\gamma$$

Si ahora tomamos los límites cuando $t \to \pm\infty$ se tiene que, por la definición de operadores de onda:

$$U_\gamma W_\pm = W_\pm U_\gamma,$$

lo que implica que $W_\pm^* U_\gamma^* = U_\gamma^* W_\pm^*$. Ahora dado que: $U_\gamma U_\gamma^* = I = U_{\gamma\gamma^{-1}} = U_\gamma U_{\gamma^{-1}}$,se tiene entonces que $U_\gamma^* = U_{\gamma^{-1}}$, y por tanto se tiene que: $W_\pm^* U_{\gamma^{-1}} = U_{\gamma^{-1}} W_\pm^*$ o lo que es lo mismo renombrando a γ: $W_\pm^* U_\gamma = U_\gamma W_\pm^*$. De esta forma se tiene que:

$$SU_\gamma = W_+^* W_- U_\gamma = W_+^* U_\gamma W_- = U_\gamma W_+^* W_- = U_\gamma S.$$

Ahora supongamos que U_γ es anti-unitario, siguiendo los mismos argumentos que en la demostración del caso unitario se obtiene la otra relación de conmutación.$\diamond$
Se mencionará ahora una proposición en la que se vera como mediante el cumplimiento de las dos primeras condiciones de la condición asintótica se puede establecer la unitariedad del operador de dispersión.

Proposición 3.3.10

Supongamos que (CA1) y (CA2) se cumplen y supongamos también que existe una transformación simétrica anti-unitaria, esto es que existe un operador U anti-unitario que verifica las ecuaciones (3.3.17) y (3.3.18). Entonces se tiene que $F_+ = F_-$ y que S es unitario en $M_\infty(H_o)$.
Demostración:
Dado que se cumple (CA2) entonces tenemos que $F_-\mathcal{H} \subseteq F_+\mathcal{H}$, por tanto solo falta demostrar que $F_-\mathcal{H} \supseteq F_+\mathcal{H}$ por la proposición (3.3.9). Para ello tomemos una $g \in F_+\mathcal{H}$; ahora por la propiedad de que $U_\gamma W_\pm = W_\mp U_\gamma$ y por

$U_\gamma W_\mp^* = W_\pm^* U_\gamma$, se puede ver que $F_+U = UF_-$ y por tanto $U^*F_+ = F_-U^*$. Así se tiene que $U^*g = U^*F_+g = F_-U^*g \in F_-\mathcal{H} \subseteq F_+\mathcal{H}$ y por tanto $U^*g \in F_+$ o lo que es lo mismo $F_+U^*g = U^*g$, por otro lado se tiene que.

$$\|g - W_-UW_+^*U^*g\| = \|g - UW_+W_+^*U^*g\| = \|U^*g - F_+U^*g\| = 0.$$

Lo que demuestra que $g \in W_-\mathcal{H} = F_-\mathcal{H} \forall g \in F_+\mathcal{H}$ por lo que $F_+\mathcal{H} \subseteq F_-\mathcal{H}$.$\diamondsuit$
Ahora veremos la relación existente entre las observables de un sistema físico y los operadores de onda.
Hemos dicho que una observable de un sistema físico esta representada por un operador auto-adjunto definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, también definimos de esta observable su valor de expectación para un estado dado, ahora debemos ver a dicho valor de expectación como una función del tiempo que involucra estados que se encuentran bajo la influencia del grupo de evolución perturbativa. De este modo y en analogía a la definición de valor de expectación antes mencionada diremos que el valor de expectación de un estado g que se encuentra bajo la influencia de la evolución perturbativa V_t al tiempo t estará dado por $(V_tg, AV_tg) = (g, V_t^*AV_tg)$.
Tenemos que ver que para ciertas observables resulta ser que los valores de expectación se vuelven constantes cuando $t \to \pm\infty$. Y es con estas observables con las que debemos trabajar puesto que ellas son muy útiles para describir los sistemas de dispersión, pues pueden ser usadas para caracterizar las propiedades asintóticas de los estados de dispersión. Esto se debe a que si uno mide el valor de expectación de una de estas observables a un tiempo finito pero suficientemente grande uno obtiene lo que se conoce como el valor asintótico de la observable. De esta forma lo que nos interesa en realidad es relacionar a los valores asintóticos de las observables con los operadores de onda y dado que los operadores de onda se definieron como límites fuertes lo que se pretende ahora es definir de una manera análoga la relación existente entre los valores asintóticos y los operadores de onda. De este modo se tomará el límite fuerte de las sucesiones de operadores $\{V_t^*AV_t\}$ cuando esto tenga sentido. Podemos ver que la existencia de dichos límites garantiza la existencia de los límites de los valores de expectación de la observable, visto como función.
Puesto que usualmente lo que se hace es caracterizar el comportamiento asintótico de los estados de dispersión mediante estados pertencientes a la evolución libre (sin preturbación), lo que se pide también a la observable del sistema físico en consideración es que también sea tal que $\{U_t^*AU_t\}$ tenga límite fuerte cuando $t \to \pm\infty$. Además se le pedirá a la observable que solo actúe en el subespacio $M_\infty(H_o)$, esto es:

$$A = AE_\infty(H_o) = E_\infty(H_o)A. \tag{3.3.20}$$

Siendo así se puede establecer el siguiente resultado.

Proposición 3.3.11

Supongamos que (CA1) y (CA3) se verifican. Supongamos además que existe un $A \in B(\mathcal{H})$ ($B(\mathcal{H})$ es el conjunto de todos los operadores lineales acotados definidos en el espacio de Hlibert $\mathcal{H}$) tal que cumple (3.3.20) y que es tal que cumple que $\{U_t^*AU_t\}$ converge fuertemente cuando $t \to \pm\infty$. Entonces tenemos que $\{V_t^*AV_tE_\infty(H)\}$ converge fuertemente también cuando $t \to \pm\infty$.
Demostración:
Debemos de notar que:

$$V_t^*AV_tE_\infty(H) = V_t^*U_tU_t^*AU_tU_t^*V_tE_\infty(H) =$$
$$V_t^*U_tU_t^*E_\infty(H_o)AU_tU_t^*V_tE_\infty(H) = V_t^*U_tE_\infty(H_o)U_t^*AU_tU_t^*V_tE_\infty(H).$$

Ahora dado que:

$$V_t^*U_tE_\infty(H_o) \to W_\pm$$
$$U_t^*V_tE_\infty(H) \to W_\pm^*$$
$$U_t^*AU_t \to A_\pm,$$

se concluye entonces que:

$$V_t^*AV_tE_\infty(H) \to W_\pm A_\pm W_\pm^*, \tag{3.3.21}$$

esto es debido a que dados: $\{A_n\}, \{B_n\}, A, B \in B(\mathcal{H})$ se tiene que si $s - \lim_{n\to\infty} A_n = A$ y que si $s - \lim_{n\to\infty} B_n = B$ entonces $s - \lim_{n\to\infty} A_nB_n = AB$. $\diamondsuit$
Consideremos ahora a $\mathcal{A}_o$ como el conjunto de todas las observables que verifican (3.3.20) y que además conmutan con $\{U_t\}$, entonces para $A \in \mathcal{A}_o$ se tiene que $A_\pm = A$ y además se tiene que (3.3.21) se escribe como.

$$V_t^*AV_tE_\infty(H) \to W_\pm AW_\pm^*.$$

De este modo se puede pedir la existencia de los límites fuertes de:

$$\{V_t^* A V_t E_\infty(H)\} \forall f \in \mathcal{A}_o,$$

en lugar de la existencia de los límites fuertes que definen a los operadores de onda. Físicamente lo que esto quiere decir es que todas las constantes del movimiento sin perturbación serán constantes asintóticas del movimiento perturbado y es en este sentido que el movimiento perturbado podrá ser caracterizado de manera asintótica por cantidades que pertenezcan al sistema sin perturbación.

Capítulo 4

La ecuación de Schrödinger No lineal

4.1 Discusión General del Artículo

Dado que existen fenoménos de dispersión que se presentan en la naturaleza y que tienen una forma no lineal lo que se pretende en este capítulo es tomar un caso en el que la evolución del sistema no sea lineal y discutir la forma en que dicho problema es tratado. Recordemos que la ecuación, en el caso lineal, que nos da la evolución del sistema en cualquier tiempo es la llamada ecuación de Schrödinger lineal y que se indica en la ecuación (3.2.2).
Para poder abarcar entonces el caso no lineal discutiremos con detalle el tratamiento del problema que se trata en el artículo: "Inverse Scattering for the Nonlinear Schrödinger Equation Reconstrucction of the Potential and the Nonlinearity"[10]. En dicho artículo se resuelve el caso en el que la ecuación de Schrödinger no es lineal estableciendo la condición asintótica del sistema de dispersión, construyendo el operador de dispersión de este caso y recuperando el potencial V_o y en el caso de que la forma de la no linearidad sea de cierta manera recuperando dicha forma de la no linealidad mediante el operador de dispersión. Para ser mas específica, lo que se hace en el artículo es demostrar que considerando el problema de la ecuación de Schrödinger no lineal unidimensional:

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -\frac{d^2}{dx^2}u(t,x) + V_0(x)u(t,x) + \sum_{j=1}^{\infty} V_j(x)|u|^{2(j_0+j)}u(t,x),$$

se probará que bajo ciertas condiciones, el límite para bajas amplitudes del operador de dispersión determina unívocamente las funciones $V_j, j = 0, 1\cdots$ El método también sirve para reconstruir los potenciales $V_j, j = 0, 1, \cdots$
La manera como se procede en el artículo es la siguiente: Primero se establecen las condiciones y definiciones necesarias para poder establecer la definición del operador de dispersión de la ecuación de Schrödinger no lineal en su forma general.
Recordemos que la ecuación de Schrödinger no lineal en su forma general es:

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -\frac{d^2}{dx^2}u(t,x) + V_0(x)u(t,x) + F(x,u), \quad u(0,x) = \phi(x) \tag{4.1}$$

Primero se da la definición de función continua C^k en el sentido real:
Sea $F(x,u)$ una función a valores complejos, decimos que la función $F(x,u)$ es una función C^k en el sentido real si para cada $x \in R$, la parte real de la función, $\Re F$, y la parte imaginaria, $\Im F$, son funciones C^k con respecto a las partes real e imaginaria de u.
Una vez hecho esto se procede a definir la naturaleza de la no linealidad $F = F(x,u)$ asumiendo que se trata de una función C^2 continua cuya derivada es C^1 en el sentido real, y que se puede dividir en dos funciones real-valuadas F_1, F_2, de forma que $F = F_1 + iF_2$ y $u = r + is$ con $r, s \in R$.
Definamos:

$$F^{(2)}(x,u) := \sum_{j=1}^{2}\left[\left|\frac{\partial^2}{\partial r^2}F_j(x,u)\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial r\partial s}F_j(x,u)\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial s^2}F_j(x,u)\right|\right] \tag{4.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}F\right)^{(1)}(x,u) := \sum_{j=1}^{2}\left[\left|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial x}F_j\right)(x,u)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x}F_j\right)(x,u)\right|\right] \tag{4.3}$$

Todo ello nos sirve para caracterizar a la función F.
Luego se procede a definir para cualquier $\gamma \in R$, a L^1_γ como el espacio de Banach de todas las funciones medibles, complejo-valuadas, ϕ, definidas en R y que están equipadas con la norma:

$$\|\phi\|_{L^1_\gamma} := \int |\phi(x)|(1+|x|)^\gamma dx < \infty \tag{4.4}$$

Lo que sigue a continuación es la definición del operador H como la única realización autoadjunta de otro operador $\tau = -\frac{d}{dx^2} + V_o(x)$ (con $V_o \in L^1_1$) que es esencialmente auto-adjunto en el siguiente dominio:

$$D(\tau) := \{\phi \in L^2_C : \phi \text{ y } \tfrac{d}{dx}\phi \text{ son absolutamente continuas y } \tau\phi \in L^2\},$$

donde L^2_C es el espacio de todas las funciones (clases de equivalencia) de L^2 con soporte compacto.
Se menciona además el hecho de que el espectro puntual de H no tiene valores positivos o iguales que cero, que no tiene un espectro singular continuo y que su espectro continuo es $[0,\infty)$. Además se define al operador H_o como la realización auto-adjunta del operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ definida en el espacio de Sobolev $\mathcal{W}_{2,2}$ (Recordemos la definición hecha en la ecuación (1.3.3-ii)). Todo esto sirve para definir los operadores de onda y sus adjuntos, de forma que están definidos como sigue:

$$W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{\imath tH} e^{-\imath tH_o} \tag{4.5}$$

$$W^*_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{\imath tH_o} e^{-\imath tH} P_c \tag{4.6}$$

Dichos límites tienen sentido (como se vió en el capítulo anterior) y se puede demostrar que existen, que el rango de $W_\pm = \mathcal{H}_c$ que es el subespacio de continuidad de H y además se tiene que P_c es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_c$.
Lo que sigue es establecer la condición asintótica pero primero se dan las siguientes definiciones.
Para cualesquiera u, v soluciones de la ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$-\frac{d^2}{dx^2}u + V_o u = k^2 u, k \in C \tag{4.7}$$

se denota como el Wronskiano $[u,v]$ de u, v:

$$[u,v] := (\frac{d}{dx}u)v - u(\frac{d}{dx}v).$$

Sean $f_j(x,k)$, $j = 1,2$ $\Im j \geq 0$ las soluciones de Jost, de la ecuacion (4.7). (Las soluciones de Jost $(f_i(x,k)$ $(i = 1,2)$ con $k \in R$ se comportan como: $f_1(x,k) \sim e^{ikx}$ si $x \to \infty$,$f_2(x,k) \sim e^{-ikx}$ si $x \to -\infty$.) Un potencial V_o se dice que es genérico si $[f_1(x,0), f_2(x,0)] \neq 0$ y se dice que V_o es exepcional si $[f_1(x,0), f_2(x,0)] = 0$.
Ahora definimos el siguiente espacio métrico:

$$M := \{u \in C(R, \mathcal{W}_{1,p+1}) : \sup_{t\in R}(1+|t|^d\|u\|_{\mathcal{W}_{1,1+p}}) < \infty\}$$

Con la siguiente norma:

$$\|u\|_M := \sup_{t\in R}(1+|t|)^d\|u\|_{\mathcal{W}_{1,1+p}}$$

Donde $p \geq 1$ y además $d = \frac{1(p-1)}{2(p+1)}$. Además recordemos que las normas definidas en los espacios de Sobolev $\mathcal{W}_{m,p}$ estan definidas en la ecuación (1.3.2) notando que: $\|u\|_{m,p} = \|u\|_{\mathcal{W}_{m,p}}$.
Dichas estas condiciones se puede establecer el primer resultado del artículo que es el siguiente:

Teorema 4.1 [1]

Sea $V_o \in L^1_\gamma$, que en el caso genérico es $\gamma > \frac{3}{2}$ y en el caso excepcional $\gamma > \frac{5}{2}$, supóngase que H no tiene eigenvalores negativos, y que:

$$N(V_o) := \sup_{x\in R}\int_x^{x+1} |V_o(y)|^2 dy < \infty \tag{4.8}$$

Además asumamos que F es C^2 en el sentido real y que $F(x,0) = 0$, y que para cada $x \in R$, todas las derivadas de primer orden, en el sentido real de F se anulan en cero. Mas aún, supongamos que $\frac{\partial}{\partial x}F$ es $C^{(1)}$ en el sentido real, y que las siguientes estimaciones se cumplen:

[1] [10]Teorema 1 1

$$F^{(2)}(x,u) = O(|u|^{p-2}),\ \left(\tfrac{\partial}{\partial x}F\right)^{(1)}(x,u) = O(|u|^{p-1}),\ u \to 0 \text{ uniformemente para } x \in R \tag{4.9}$$

para alguna $\rho < p < \infty$, donde ρ es la raíz positiva de $\frac{1}{2}\frac{(\rho-1)}{(\rho+1)} = \frac{1}{\rho}$.
Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que para toda $\phi_- \in \mathcal{W}_{2,2} \cap \mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}$ con $\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{2,2}} + \|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}} \leq \delta$ existe una única solución, u, de (4.1) tal que $u \in C(R, \mathcal{W}_{1,2}) \cap M$ y:

$$\lim_{t\to-\infty} \|u(t) - e^{-itH}\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,2}} = 0, \tag{4.10}$$

mas aún, existe también una única $\phi_+ \in \mathcal{W}_{1,2}$ tal que:

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - e^{-itH}\phi_+\|_{\mathcal{W}_{1,2}} = 0. \tag{4.11}$$

Además que: $e^{-itH}\phi_\pm \in M$ y:

$$\|u - e^{-itH}\phi_\pm\|_M \leq C\|e^{-itH}\phi_\pm\|_M^p \tag{4.12}$$

$$\|\phi_+ - \phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,2}} \leq C[\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{2,2}} + \|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}}] \tag{4.13}$$

El operador de dispersión $S_{V_o} : \phi_- \hookrightarrow \phi_+$ es inyectivo en $\mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}} \cap \mathcal{W}_{2,2}$.
En la demostración del Teorema 4.1 se nos dice que un principal resultado que se utiliza es la estimación $L^p - L^q$ que fue probada por el autor en otro artículo [11], dicha estimación es:

$$\|e^{-itH}\|_{B(L^p,L^{p'})} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}, t > 0, \tag{4.14}$$

o lo que es lo mismo:

$$\|e^{-itH}f\|_{L^{p'}} \leq C\frac{1}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}\|f\|_{L^p}, \tag{4.15}$$

donde debemos de observar que p, p' son exponentes conjugados (Recordemos la definición de exponentes conjugados dada en (1.2.3.2), $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.) y además $1 \leq p \leq 2$.
También por los resultados de otro artículo [9] se demuestra que los operadores de onda $W_\pm$ y sus adjuntos $W_\pm^*$ son operadores acotados en los espacios de Sobolev $\mathcal{W}_{1,p}, 1 < p < \infty$.
El resultado que sigue es el que nos dice que se puede ver que existe una equivalencia entre las normas de los espacios $\mathrm{W}_{k,p}$ y la norma del espacio L^p definida como sigue:

$$\|F^{-1}(1+q^2)^{\frac{k}{2}}(Ff)(q)\|_{L^p}$$

Donde F es la transformada de Fourier [2]. Probaremos que dicha equivalencia se cumple en el caso $p = 2$.
Por la definición de espacio de Sobolev, se tiene que:

$$\|f\|^2_{\mathcal{W}_{\kappa,2}} = \sum_{|\alpha|\leq\kappa} \|D^{|\alpha|}f\|^2_{L^2} = \sum_{|\alpha|\leq\kappa} \|(ik)^{|\alpha|}\hat{f}(k)\|^2_{L^2}$$

Esta última igualdad es debida a las propiedades de la Transformada de Fourier definida en L^2, tomando en consideración que $\beta = ik \Rightarrow |\beta| = k$. Se demostrará entonces que $|\beta|^{|\alpha|} \leq C(1+|\beta|^2)^{\frac{\kappa}{2}}, 0 \leq |\alpha| \leq \kappa$. Para ello se toman dos casos:

(ı) $(|\beta| \leq 1)$

$$|\beta|^{|\alpha|} \leq 1 \leq (1+|\beta|^2)^{\frac{\kappa}{2}}$$

(i) $(|\beta| \geq 1)$

$$|\beta|^{|\alpha|} \leq (|\beta|^2)^{\frac{\kappa}{2}} \leq 1 + (|\beta|^2)^{\frac{\kappa}{2}} \leq (1+|\beta|^2)^{\frac{\kappa}{2}}$$

[2] [8] p.135

De este modo se tiene que:

$$\|f\|^2_{\mathcal{W}_{\kappa,2}} \leq \sum_{|\alpha|\leq\kappa} \||\beta|^{|\alpha|}\hat{f}(k)\|^2_{L^2} \leq \sum_{|\alpha|\leq\kappa} \|(1+k^2)^{\frac{\kappa}{2}}\hat{f}(k)\|^2_{L^2} \leq C\|(1+k^2)^{\frac{\kappa}{2}}\hat{f}\|^2_{L^2}.$$

Dado que $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2} = \|\check{f}\|_{L^2}$ se concluye entonces que:

$$\|f\|^2_{\mathcal{W}_{\kappa,2}} \leq C\|F^{-1}(1+k^2)^{\frac{\kappa}{2}}Ff(k)\|^2_{L^2}.$$

Ahora, para observar que:

$$\|F^{-1}(1+q^2)^{\frac{\kappa}{2}}Ff\|_{L^2} \leq C\|f\|_{\mathcal{W}_{\kappa,2}},$$

debemos de notar que:

$$\|F^{-1}(1+q^2)^{\frac{\kappa}{2}}Ff\|^2_{L^2} = \|(1+q^2)^{\frac{\kappa}{2}}Ff\|^2_{L^2} =$$
$$\int(1+q^2)^{\kappa}|\hat{f}|^2dq.$$

Tomando de nuevo dos casos se tiene que:

(i)
$$|q| \leq 1, (1+q^2)^{\kappa} \leq 2^{\kappa}$$

y por tanto:

$$\int_{|q|\leq 1}(1+q)^{\kappa}|\hat{f}|^2dq \leq \int_{|q|\leq 1} 2^{\kappa}|\hat{f}|^2dq$$

(ii)
$$|q| \geq 1, (1+q^2)^{\kappa} \leq (q^2+q^2)^{\kappa} = 2^{\kappa}q^{2\kappa}$$

y por tanto:

$$\int_{|q|\geq 1}(1+q)^{\kappa}|\hat{f}|^2dq \leq \int_{|q|\geq 1} 2^{\kappa}q^{2\kappa}|\hat{f}|^2dq.$$

En ambos casos podemos observar que:

$$\|f\|^2_{\mathcal{W}_{\kappa,2}} = \sum_{|\alpha|\leq\kappa} \||q|^{\alpha}Ff(q)\|^2_{L^2} =$$
$$\sum_{|\alpha|\leq\kappa}\int |q|^{2\alpha}|Ff(q)|^2dq = \int[1+|q|^2+|q|^4+\cdots+|q|^{2\kappa}]|\hat{f}(q)|^2dq$$

De esta manera si consideramos $C = 2^{\kappa}$ concluiremos que:
Para $|q| \leq 1$

$$\|F^{-1}(1+q^2)^{\frac{\kappa}{2}}Ff\|^2_{L^2} \leq \int 2^{\kappa}|\hat{f}|^2dq \leq$$
$$C\int|\hat{f}|^2dq \leq C\int[1+|q|^2+|q|^4+\cdots+|q|^{2\kappa}]|\hat{f}(q)|^2dq = C\|f\|^2_{\mathcal{W}_{\kappa,2}}.$$

Para $|q| \geq 1$

$$\|F^{-1}(1+q^2)^{\frac{\kappa}{2}}Ff\|^2_{L^2} \leq \int 2^{\kappa}q^{2\kappa}|\hat{f}|^2dq \leq C\int[1+|q|^2+|q|^4+\cdots+|q|^{2\kappa}]|\hat{f}(q)|^2dq = C\|f\|^2_{\mathcal{W}_{\kappa,2}}.$$

En ambos casos se tiene:

$$\|F^{-1}(1+q^2)^{\frac{\kappa}{2}}Ff\|_{L^2} \leq C\|f\|_{\mathcal{W}_{\kappa,2}},$$

por lo que la equivalencia de normas está establecida para el caso en que $p = 2$. $\Diamond$
El resultado de la equivalencia de normas es útil en el articulo puesto que sirve para establecer la estimación $\mathcal{W}_{1,p} - \mathcal{W}_{1,p'}$, como veremos a continuación y la cual será utilizada despues.
Primero que nada se debe de observar que si se generaliza el resultado demostrado se puede concluir que la norma $\|(I+H)^{\frac{k}{2}}f\|_{L^p}$, es equivalente a la norma de $\mathcal{W}_{k,p}$, para $k = 0, 1$ y para $1 < p < \infty$ [9]. Luego, podremos ver que:

$$\|e^{-itH}f\|_{\mathcal{W}_{k,p'}} \leq C\|(I+H)^{\frac{k}{2}}e^{-itH}f\|_{L^{p'}} \leq C\|e^{-itH}(I+H)^{\frac{k}{2}}f\|_{L^{p'}}$$
$$\leq C\frac{1}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}\|(I+H)^{\frac{k}{2}}f\|_{L^p} \leq C\frac{1}{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}\|f\|_{\mathcal{W}_{k,p}},$$

y así se establece el resultado.
Lo que sigue a continuación es el establecimiento de la existencia de $u \in C(R, \mathcal{W}_{1,2}) \cap M$ como solución de la ecuación no lineal de Schrödinger que cumple la condición asintótica para $t \to -\infty$ siempre y cuando sea solución de la ecuación integral:

$$u = e^{-itH}\phi + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-\tau)H}F(x, u(\tau))d\tau. \tag{4.16}$$

Lo primero que se debe demostrar es que la integral del lado derecho converge absolutamente en $\mathcal{W}_{1,2}$ y en M lo que se procede a hacer es definir el siguiente operador integral para $u \in M$:

$$Qu(t) := \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-\tau)H}F(x, u(\tau))d\tau \tag{4.17}$$

De este modo se nos dice que dada la existencia del encajamiento del espacio L^p en $\mathcal{W}_{1,p+1}$, (1.3.7), dada la estimación $L^p - L^{p'}$ se concluye que:

$$\|Qu(t) - Qv(t)\|_{\mathcal{W}_{1,1+p}} \leq C(1+|t|)^{-d}(\|u\|_M + \|v\|_M)^{p-1}\|u-v\|_M, \tag{4.18}$$

Para el caso en el que $pd > 1$,y se nos dice también que las constantes C pueden ser tomadas uniformes en vecindades abiertas de M.
Antes de demostar dicho resultado, en un caso particular, se debe establecer el siguiente lema que servirá no sólo en esta demostración sino que tambien en el establecimiento de la unicidad de la solución.

Lema 4.1.1
Sean $0 < d' \leq d < 1, d'p > 1, p > 1$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t-\tau|^d}\frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}}d\tau \leq C(1+|t|)^{-d'}.$$

Demostración:
Sea:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t-\tau|^d}\frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}}d\tau = I_1 + I_2,$$

donde:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(|t-\tau|\leq 1)}(\tau)\frac{1}{|t-\tau|^d}\frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}}d\tau, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(|t-\tau|\geq 1)}(\tau)\frac{1}{|t-\tau|^d}\frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}}d\tau.$$

Veamos primero que pasa con I_1, consideremos dos casos $|t| \leq \frac{3}{2}$ y $|t| \geq \frac{3}{2}$, en el primer caso se tiene que:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(|t-\tau|\leq 1)}(\tau)\frac{1}{|t-\tau|^d}\frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}}d\tau \leq C'\int_{|t-\tau|\leq 1}\frac{d\tau}{|t-\tau|^d} = -\int_{|\xi|\leq 1}\frac{d\xi}{|\xi|^d} = C" = C"\frac{(1+|t|)^{d'}}{(1+|t|)^{d'}} \leq C(1+|t|)^{-d'}.$$

Ahora si $|t| \geq \frac{3}{2}$ se tiene que $|\tau| = |\tau - t + t| \geq |t| - |\tau - t| \geq |t| - 1 \geq \frac{|t|}{3}$ y así:

$$I_1 \leq C'\int_{|t-\tau|\leq 1}\frac{d\tau}{|t-\tau|^d}(1+|t|)^{-d'p} \leq \frac{C"}{(1+|t|)^{d'p}} = \frac{C"}{(1+|t|)^{d'p}}\frac{(1+|t|)^{d'}}{(1+|t|)^{d'}} \leq C(1+|t|)^{-d'}.$$

Veamos ahora que pasa en I_2:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(|t-\tau|\geq 1)}(\tau)\frac{1}{|t-\tau|^d}\frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}}d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(|t-\tau|\geq 1)}(\tau)\frac{C'}{(1+|t-\tau|)^d}\frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}}d\tau = I_3 + I_4,$$

donde

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(|t-\tau|\geq\frac{|t|}{2})}(\tau)\frac{C'}{(1+|t-\tau|)^d}\frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}}d\tau,$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(|t-\tau|\leq \frac{|t|}{2})}(\tau) \frac{C'}{(1+|t-\tau|)^d} \frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}} d\tau.$$

Notemos que:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(|t-\tau|\geq \frac{|t|}{2})}(\tau) \frac{C'}{(1+|t-\tau|)^d} \frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}} d\tau \leq C(1+|t|)^{-d'},$$

y además como $|\tau| = |\tau - t + t| \geq |t| - \frac{|t|}{2} = \frac{|t|}{2}$:

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(|t-\tau|\leq \frac{|t|}{2})}(\tau) \frac{C'}{(1+|t-\tau|)^d} \frac{1}{(1+|\tau|)^{d'p}} d\tau \leq C(1+|t|)^{-dp} \int_{|\xi|\leq \frac{|t|}{2}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^d} = C(1+|t|)^{-d'p}(1+|t|)^{1-d} =$$

$$C(1+|t|)^{-[d'p-1+d]} \leq C(1+|t|)^{-d} \leq C(1+|t|)^{-d'},$$

de esta forma se demuestra el lema.◊

Este lema nos sirve de manera directa para demostrar la desigualdad (4.18) en el caso en que $v = 0$, puesto que en este caso lo que se quiere demostrar es que:

$$\|Qu(t)\|_{L^{p+1}} \leq C(1+|t|)^{-d} \|u(t)\|_M^p$$

$$\|\frac{\partial}{\partial x} Qu(t)\|_{L^{p+1}} \leq C(1+|t|)^{-d} \|u(t)\|_M^p$$

Pero como:

$$\|Qu(t)\|_{L^{p+1}} \leq C \int_{-\infty}^{t} \|e^{-i(t-\tau)H} F(x,u(\tau))\|_{L^{p+1}} d\tau \leq C \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{|t-\tau|^d} \|F(x,u(\tau))\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} d\tau$$

La última desigualdad se observa de que de acuerdo con (4.15) el exponente de t será $\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{p-1}{p+1} = d$.

Tomando en cuenta la primera de las estimaciones de (4.9) y la definición de la segunda derivada de F dada en (4.2) se tiene que: $F(x,u) = O'(|u|^p)$ y por tanto:

$$C \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{|t-\tau|^d} \|(F(x,u(\tau))\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} d\tau \leq C \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{|t-\tau|^d} \||u(\tau)|^p\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} d\tau = C \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{|t-\tau|^d} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^p$$

$$\leq C \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{|t-\tau|^d} [\|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^p (1+|\tau|)^{dp}](1+|\tau|)^{-dp} d\tau \leq C \|u(\tau)\|_M^p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t-\tau|^d} \frac{1}{(1+|\tau|)^{dp}} d\tau$$

$$\leq C(1+|t|)^{-d} \|u(t)\|_M^p,$$

como consecuencia del lema 4.1.1, de manera análoga se estima:

$$\|\frac{\partial}{\partial x} Qu(t)\|_{L^{p+1}} \leq C(1+|t|)^{-d} \|u(t)\|_M^p,$$

pues como $\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial x} = O'(|u|)^{p-1}) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = O"(|u|^p)$. Así el resultado (4.18) queda demostrado para el caso en que $v(t) = 0$.

El resultado (4.18) sirve para demostrar la desigualdad:

$$\|Qu(t)\|_{\mathcal{W}_{1,2}}^2 \leq C\Re \int_{-\infty}^{t} d\tau (\sqrt{I+H} F(x,u), \sqrt{I+H} Qu(t))_{L^2}$$

$$\leq C \int_{-\infty}^{t} d\tau \|F(x,u)(\tau)\|_{\mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}} (1+|\tau|)^{-d} \|u\|_M^p \leq C \int_{-\infty}^{t} d\tau \|u\|_{\mathcal{W}_{1,p+1}}^p (1+|\tau|)^{-d} \|u\|_M^p \leq C \int_{-\infty}^{t} d\tau (1+|\tau|)^{-d(p+1)} \|u\|_M^{2p}$$

$$\leq C(1+max\{0,-t\})^{-(d+dp-1)} \|u\|_M^{2p}. \tag{4.19}$$

Para demostrar la primera desigualdad de esta expresión debemos de observar lo siguiente:

$$\|Qu(t)\|_{\mathcal{W}_{1,2}}^2 \leq C(\sqrt{I+H} Qu(t), \sqrt{I+H} Qu(t))_{L^2}$$

$$= C\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{t} d\tau' \Big(\sqrt{I+H}e^{-i(t-\tau)H}F(u(\tau)), \sqrt{I+H}e^{-i(t-\tau')H}F(u(\tau'))\Big)_{L^2}$$

$$= C\int_{-\infty}^{t} d\tau \Big(\sqrt{I+H}F(u(\tau)), \int_{-\infty}^{t} e^{-i(\tau-\tau')H}\sqrt{I+H}F(u(\tau'))d\tau'\Big)_{L^2}$$

$$= C\Big[\int_{-\infty}^{t} d\tau \Big[\Big(\sqrt{I+H}F(u(\tau)), \int_{-\infty}^{\tau} e^{-i(\tau-\tau')H}\sqrt{I+H}F(u(\tau'))d\tau'\Big)_{L^2} +$$

$$\int_{-\infty}^{t} d\tau \Big(\sqrt{I+H}\int_{\tau}^{t} e^{-i(\tau'-\tau)H}F(u(\tau))d\tau', \sqrt{I+H}F(u(\tau'))\Big)_{L^2}\Big]$$

$$= C\Big[\int_{-\infty}^{t} d\tau \Big(\sqrt{I+H}F(u(\tau)), \sqrt{I+H}Qu(\tau)\Big)_{L^2} + \int_{-\infty}^{t} d\tau' \Big(\sqrt{I+H}\int_{-\infty}^{\tau'} e^{-i(\tau'-\tau)H}F(u(\tau))d\tau, \sqrt{I+H}F(u(\tau'))\Big)_{L^2}\Big]$$

$$= C\Big[\int_{-\infty}^{t} d\tau \Big(\sqrt{I+H}F(u(\tau)), \sqrt{I+H}Qu(\tau)\Big)_{L^2} + \int_{-\infty}^{t} d\tau' \Big(\sqrt{I+H}Qu(\tau'), \sqrt{I+H}F(u(\tau'))\Big)_{L^2}\Big]$$

$$= 2\Re\int_{-\infty}^{t} d\tau \Big(\sqrt{I+H}F(u(\tau)), \sqrt{I+H}Qu(\tau)\Big)_{L^2}$$

La última desigualdad de (4.19), se obtiene de evaluar directamente la integral cuando $\tau \geq 0$ o $\tau \leq 0$. Para lo que se utiliza dicha desigualdad es para observar la unicidad de la solución puesto que se utiliza la definición de Q y la ecuación integral (4.16) para demostrar que:

$$u(t) - v(t) = Qu(t) - Qv(t)\forall t$$

Para u, v soluciones de la ecuación de Scrödinger no lineal.
Lo que esto implica es que si se define $u_T := \chi_{(-\infty,T)}u(t)$ donde $\chi_{(-\infty,T)}$ es la función característica del intervalo $(-\infty, T)$ y donde $T \in R$ entonces se tiene que:

$$u_T(t) - v_T(t) = Qu_T(t) - Qv_T(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-\tau)H}[F(u_T) - F(v_T)]d\tau.$$

Notemos que:

$$\|Qu_T(t) - Qv_T(t)\|_{L^{p+1}} \leq \int_{-\infty}^{t} \|e^{-i(t-\tau)H}[F(u_T) - F(v_T)]\|_{L^{1+p}}d\tau \leq \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{|t-\tau|^d}\|[F(u_T) - F(v_T)]\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}d\tau.$$

Y ahora veamos que:

$$|F(u_T) - F(v_T)| \leq \Big|F(u(0)) - F(u(1))|\Big| \leq \int_0^1 \Big|\frac{dF(u(t))}{dt}|dt = \int_0^1 |\frac{\partial F}{\partial u_{1T}}\frac{\partial u_{1T}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial u_{2T}}\frac{\partial u_{2T}}{\partial t}\Big|dt =$$

$$\int_0^1 \Big|\frac{\partial F}{\partial u_{1T}}(v_{1T} - u_{1T}) + \frac{\partial F}{\partial u_{2T}}(v_{2T} - u_{2T})\Big| \leq \int_0^1 |\nabla F||v_T - u_T|dt \leq C|u|^{p-1}|u_T - v_T| \leq C(|u_T| + |v_T|)^{p-1}|u_T - v_T|,$$

Donde se condsideró $u(t) = (1-t)u_T + tv_T$, tomando en consideración que $u_T = (u_{1T}, u_{2T}), v_T = (v_{1T}, v_{2T})$ y que $F = F(u_T)$. Una vez obtenido esto se concluye que:

$$\|[F(u_T) - F(v_T)]\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} \leq \|(|u_T| + |v_T|)^{p-1}|u_T - v_T|\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} \leq \|(|u_T| + |v_T|)^{p-1}\|_{L^{\frac{p+1}{p-1}}}\|u_T - v_T\|_{L^{1+p}},$$

esta última desigualdad como consecuencia de la aplicación de la desigualdad de Hölder (1.2.3.3). Ahora como:

$$\|(|u_T| + |v_T|)^{p-1}\|_{L^{\frac{p+1}{p-1}}} = [\int (|u_T| + |v_T|)^{p+1}]^{\frac{p-1}{p+1}} = \|(|u_T| + |v_T|)\|_{L^{p+1}}^{p-1} \leq [\|u_T\|_{L^{p+1}} + \|v_T\|_{L^{p+1}}]^{p-1},$$

se tiene que:

$$\|u_T(t) - v_T(t)\|_{L^{p+1}} \leq C\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{|t-\tau|^d}[\|u_T\|_{L^{p+1}} + \|v_T\|_{L^{p+1}}]^{p-1}\|u_T - v_T\|_{L^{p+1}}d\tau$$

$$\leq C\int_{-\infty}^{t}\frac{(1+|\tau|)^{-d'p}}{|t-\tau|^{d}}[\|u_T\|_{\mathcal{M}}+\|v_T\|_{\mathcal{M}}]^{p-1}\|u_T-v_T\|\|_{\mathcal{M}}d\tau,$$

en donde:

$$\|u\|_{\mathcal{M}}=\sup_{t\in R}(1+|t|)^{d'}\|u\|_{L^{p+1}}$$

entonces por el Lema 4.1.1:

$$\|u_T(t)-v_T(t)\|_{L^{p+1}}\leq C(1+|t|)^{-d'}[\|u_T\|_{\mathcal{M}}+\|v_T\|_{\mathcal{M}}]^{p-1}\|u_T-v_T\|\|_{\mathcal{M}},$$

o sea que:

$$\|u_T-v_T\|_{\mathcal{M}}\leq[\|u_T\|_{\mathcal{M}}+\|v_T\|_{\mathcal{M}}]^{p-1}\|u_T-v_T\|\|_{\mathcal{M}}, \tag{4.20}$$

pero como:

$$\|u_T\|_{\mathcal{M}}=\sup_{t\leq T}(1+|t|)^{d'}\|u_T\|_{L^{p+1}}\leq\sup_{t\leq T}\frac{1}{(1+|t|)^{d-d'}}\|u_T\|_{\mathcal{M}}=\frac{1}{(1+|T|)^{d-d'}}\|u_T\|_{\mathcal{M}}<\epsilon\|u_T\|_{\mathcal{M}},$$

si $T\leq T_o$, por lo que (4.20) queda como:

$$\|u_T-v_T\|_{\mathcal{M}}\leq\frac{1}{2}\|u_T-v_T\|\|_{\mathcal{M}},$$

lo que nos dice que $u_T(t)-v_T(t)=0$ si $t\leq T_0$. Luego, por un método estandar, t se extiende a todo R.
La unicidad de ϕ_+ se puede observar del razonamiento siguiente:

$$\begin{aligned}0&=\lim_{t\to\infty}\|u(t)-e^{-itH}\phi_+\|_{\mathcal{W}_{1,2}} \qquad (4.21)\\&=\lim_{t\to\infty}\|e^{-itH}[e^{itH}u(t)-\phi_+]\|_{\mathcal{W}_{1,2}}\\&\geq C\lim_{t\to\infty}\|e^{-itH}\sqrt{I+H}[e^{itH}u(t)-\phi_+]\|_{L^2}\\&\geq C\lim_{t\to\infty}\|\sqrt{I+H}[e^{itH}u(t)-\phi_+]\|_{L^2}\\&\geq C\lim_{t\to\infty}\|e^{itH}u(t)-\phi_+]\|_{\mathcal{W}_{1,2}}=0,\end{aligned}$$

por lo que se puede observar que:

$$\phi_+=s-\lim_{t\to-\infty}e^{itH}u(t), \tag{4.22}$$

y por tanto, si existen ϕ_+^1,ϕ_+^2 que son solución de (4.21) entonces por (4.22) se tiene que:

$$\phi_+^1-\phi_+^2=0\Rightarrow\phi_+^1=\phi_+^2.$$

El resultado que se presenta a continuación es el que nos dice la equivalencia de la norma de $\mathcal{W}_{2,2}$ y la norma:

$$\|(H+I)\phi\|_{L^2}$$

Dicho resultado es derivado de lo siguiente:
Primero se debe de ver que la norma en $\mathcal{W}_{2,2}$ y la norma $\|(H_o+I)u\|_{L^2}$ son equivalentes, para ello debemos de observar que:

$$\|u\|^2_{\mathcal{W}_{2,2}}=\int[|\hat{u}|+|k|^2|\hat{u}|^2+|k|^4|\hat{u}|^4]dk\leq C\int(1+|k|^2)^2|\hat{u}|^2dk=C\|(I+H_o)u\|^2_{L^2},$$

y por otro lado se tiene que:

$$\|(I+H_o)u\|^2_{L^2}=\int(1+|k|^2)^2|\hat{u}|^2dk=\int[|\hat{u}|+2|k|^2|\hat{u}|^2+|k|^4|\hat{u}|^4]dk\leq C\|u\|^2_{\mathcal{W}_{2,2}}$$

)e esta forma entonces lo que basta por demostrar es que los operadores $\frac{H_o+I}{H_o+V_o+I}$ y $\frac{H_o+V_o+I}{H_o+V_o}$ son acotados puesto que i ello pasara:

$$\|(H_o+I)u\|_{L^2} = \|\frac{H_o+I}{H_o+V_o+I}(H_o+V_o+I)u\|_{L^2} \le K\|(H+I)u\|_{L^2},$$

' por el otro lado se tendría que:

$$\|\frac{H+I}{H_o+I}(H_o+I)u\|_{L^2} \le K'\|H_o+I\|_{L^2} \le K''\|u\|_{\mathcal{W}_{2,2}},$$

le forma que se obtendría el resultado deseado:

$$C'\|\|(H+I)u\|_{L^2} \le \|u\|_{\mathcal{W}_{2,2}} \le C\|(H+I)u\|_{L^2}.$$

Para ver que los operadores sean acotados a lo que se recurre es a un resultado [3] que nos dice que si $D(A) \supset D(B)$ donde A y B son operadores lineales cerrados B^{-1} es acotado entonces AB^{-1} es acotado. Como en este caso $D(H+I) = D(H_o+I)$ y como ambos son cerrados y tienen inversa acotada entonces el teorema se cumple y queda demostrada la equivalencia de normas.

Por este resultado y por el Teorema de encajamiento de Sobolev, (1.3.7), se deriva:

$$\|e^{-itH}\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,p+1}} \le C\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{2,2}}.$$

Lo que implica que:

$$\|e^{-itH}\phi_-\|_M \le C\left[\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{2,2}} + \|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}}\right], \tag{4.23}$$

esto debido a que:

$$\|e^{-itH}\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,p+1}} \le C_1\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{2,2}} \le \frac{C_2}{(1+|t|)^d}\cdot\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{2,2}}, |t| \le 1$$

$$\|e^{-itH}\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,p+1}} \le \frac{C_3}{|t|^d}\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}} \le \frac{C_3(1+|t|)^d}{|t|^d}\frac{1}{(1+|t|)^d}\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}} \le$$

$$\frac{C_4}{(1+|t|)^d}\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}}, |t| \ge 1 \Rightarrow$$

$$\|e^{-itH}\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,p+1}} \le C_5\frac{1}{(1+|t|)^d}[\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{2,2}} + \|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}}]\forall t \in R,$$

que inmediatamente implica el resultado (4.23)

Se utiliza este resultado para definir una función $u \to e^{-itH}\phi_- + Q(u)$ que sea una contracción (recordemos la definición (2.7.2)) de M_R a M_R, para toda $\phi \in \mathcal{W}_{2,2}\cap\mathcal{W}_{1,\frac{1}{p}}$ donde $M_R := \{u \in M \,.\, \|u\|_M \le R\}$, tal que $\|\phi_-\|_{2,2} + \|\phi_-\|_{1,1+\frac{1}{p}} \le \delta$ con la condición de que: $C(2R)^{p-1} \le \frac{1}{2}$ con C como en (4.18) y $\delta > 0$ tal que $C\delta \le \frac{R}{4}$ con C como en (4.23), podemos ver que la anterior función es una contracción del siguiente razonamiento, sea T la función antes definida, entonces se tiene que·

$$\|T(u)\|_M \le \|e^{-itH}\phi_-\|_M + \|Q(u)\|_M$$

$$\|T(u)\|_M \le C\left[\|\phi_-\|_{2,2} + \|\phi_-\|_{1,1+\frac{1}{p}}\right] + C\|u\|_M^p$$

$$\|T(u)\|_M \le C\delta + CR^p = \le \frac{R}{4} + CR^p = [\frac{1}{4} + CR^{p-1}]R \le (\frac{1}{4}+\frac{1}{2})R \le R.$$

Además que:

$$\|T(u)-T(v)\|_M = \|Q(u)-Q(v)\|_M = C(2R)^{p-1}\|u-v\|_M \le \frac{1}{2}\|u-v\|_M$$

[3] Este resultado es una consecuencia del Teorema (2 3 7), Teorema de la gráfica cerrada, pues otra forma en la que se enuncia al teorema es la siguiente:
TEOREMA
Sea A un operador cerrado definido de un espacio de Hilbert H a otro con la propiedad de que $D(A) = \mathcal{H}$ entonces A es acotado.
La demostración de este teorema se puede ver en [6] Apéndice B p. 313

por lo que T es una contracción. Aplicando ahora, el teorema de la Contracción (2.7.3) existe, entonces, un punto fijo que es solución de la ecuación integral (4.16) definida en M_R. Y más aún se tiene que.

$$\begin{aligned}\|u\|_M &\leq \|e^{-itH}\phi_-\|_M + \|Qu\|_M \leq \|e^{-itH}\phi_-\|_M + C\|u\|_M^{p-1}\|u\|_M \\ &\leq \|e^{-itH}\phi_-\|_M + CR^{p-1}\|u\|_M \leq \|e^{-itH}\phi_-\| + \frac{1}{2}\|u\|_M,\end{aligned}$$

de modo que:

$$\|u\|_M \leq C\|e^{-itH}\phi_-\|_M. \tag{4.24}$$

La deducción de la estimación (4.12) (en el caso ϕ_-) es una consecuencia de (4.18) y (4.24) ya que:

$$\|u - e^{-itH}\phi_-\|_M = \|Q(u)\|_M \leq C\|u\|_M^p \leq C\|e^{-itH}\phi_-\|_M.$$

Ahora observemos que, como consecuencia de (4.19):

$$\lim_{t\to-\infty} \|u(t) - e^{-itH}\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,2}} \leq C \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{(1+max\{0,-t\})^{\frac{(d+dp-1)}{2}}}\|u\|_M^p = 0$$

Por lo que la ecuación (4.10) del Teorema 4.1 queda demostrada y además tenemos que $u \in C(R, \mathcal{W}_{1,2})$ es una consecuencia de la estimación (4.19) también, puesto que si se tiene $t_1, t_2 \in R$ con $t_1 \to t_2$ entonces:

$$\|u(t_1) - u(t_2)\|_{\mathcal{W}_{1,2}} = \|Qu(t_1) - Qu(t_2)\|_{\mathcal{W}_{1,2}} \leq C\int_{t_1}^{t_2} d\tau(1+|\tau|)^{-d(p+1)}\|u\|_M^p,$$

que puede observarse tiende a cero cuando $t_1 \to t_2$.
Se procede a definir, después, a ϕ_+ como:

$$\phi_+ = \phi_- + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau H}F(x, u(\tau))d\tau. \tag{4.25}$$

y siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de la estimación (4.19) se puede probar que $\phi_+ \in \mathcal{W}_{1,2}$ y además se puede notar de inmediato que:

$$\|\phi_+ - \phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,2}} \leq C\|u\|_M^p.$$

De este modo se puede probar la ecuación (4.13), puesto que:

$$\|\phi_+ - \phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,2}} \leq C\|u\|_M^p \leq C\|e^{-itH}\phi_-\|_M^p \leq C[\|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{2,2}} + \|\phi_-\|_{\mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}}]^p.$$

Dada la definición de ϕ_+ se puede observar que la ecuación integral (4.16) cambia a:

$$u(t) = e^{-itH}\phi_+ - \frac{1}{i}\int_t^{\infty} e^{-i(t-\tau)H}F(x, u(\tau))d\tau,$$

y siguiendo el mismo razonamiento que en la deducción de la ecuación (4.19) se tiene que·

$$\|\int_t^{\infty} e^{-i(t-\tau)H}F(x, u(\tau))d\tau\|_M \leq C\|u\|_M^p,$$

lo que hace que la ecuación (4.11) se cumpla y que $e^{-itH}\phi_+ \in M$. Dada la nueva defínción de u se puede seguir un tratamiento simétrico al del caso de ϕ_- para que se tenga en el caso de ϕ_+:

$$\|u\|_M \leq C\|e^{-itH}\phi_+\|_M,$$

y por tanto la ecuación (4.12), se cumple de inmediato.
Finalmente se prueba la inyectividad de S_{V_0}, para ello se observa que si se supone $\phi_+ = S_{V_0}\phi_- = 0$ se tiene que:

$$u(t) = -\frac{1}{i}\int_t^{\infty} e^{-i(t-\tau)H}F(x, u(\tau))d\tau,$$

de este modo, si se vuelve a denotar a $u_T(t) = \chi_{(T,\infty)}(t)u(t)$ y se sigue el mismo razonamiento que el que se siguió en (4.20), sólo que ahora los límites de integración han variado, se tiene que:

$$\|u_T(t)\|_{\mathcal{M}} \leq \frac{1}{2}\|u_T(t)\|_{\mathcal{M}},$$

para $T \geq T_o$ con $T_o > 0$ De este modo $u(t) = 0$ para $t \geq T_0$, y nuevamente por un metodo estandar se establece la unicidad en $C(R, \mathcal{W}_{1,2})$ y por tanto $u(t) = 0$ y ello implica, dado el resultado (4.10), que $\phi_- = 0$ lo que prueba que S_{V_0} es inyectivo.

Con esto finaliza, en el artículo, la demostración del teorema 4.1. El tratamiento que sigue se centra ahora en la reconstrucción del potencial en la ecuación de Schrödinger no lineal. Por ello es que se establece la definición de un nuevo operador de dispersión S que relacione al operador de dispersión de la ecuación no lineal S_{V_o} con los operadores de onda $W_\pm$ y que nos sirva para reconstruir el operador de dispersión del caso lineal que se denota por S_L. Por ello se define a S como:

$$S := W_+^* S_{V_0} W_-.$$

El por qué se define al operador de dispersión de esta manera está relacionado directamente con las propiedades de los operadores de onda y de dispersión en el caso lineal, para ver ello de manera clara recordemos la figura (3.1). Consideremos que $\phi_\pm$ son los estados de dispersión del sistema sin perturbación al tiempo $(t = 0)$, es decir, $f_\pm(t = 0)$, respectivamente (de acuerdo con la figura (3.1)) y consideremos que $\psi_\pm$ es el estado de dispersión perturbado al tiempo $t = 0$, es decir, $g(t = 0)$, de esta forma se tiene que:

$$W_+^* \phi_+ = \psi_+, W_- \phi_- = \psi_-.$$

Ahora, en analogía al operador de dispersión lineal S_L, se tiene que, para S_{V_0}:

$$S_{V_0}\phi_- = \phi_+,$$

por lo que para este nuevo operador de dispersión S:

$$S\psi_- = \psi_+ = W_+^*\phi_+ = W_+^* S_{V_0}\phi_- = W_+^* S_{V_0} W_- \psi_-.$$

Dicho esto se establece el siguiente resultado en el que se da el método de la reconstrucción de S_L y que se da a continuación:

Teorema 4.2 [4]

Supóngase que las condiciones del Teorema 4.1 están dadas. Entonces, para cada $\phi_- \in \mathcal{W}_{2,2} \cap \mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}$ se tiene que:

$$\frac{d}{d\epsilon} S(\epsilon\phi)\Big|_{\epsilon=0} = S_L \phi \tag{4.26}$$

en donde la derivada del lado izquierdo de la ecuación (4.25) existe en la topología fuerte de $\mathcal{W}_{1,2}$.

Para la demostración de dicho resultado se observa primero que dado que $S(0) = 0$ y que $W_\pm$ son acotados en $\mathcal{W}_{2,2} \cap \mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}$ [9] es suficiente probar que:

$$s - \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(S_{V_0}(\epsilon\phi) - \epsilon\phi) = 0$$

Esto es debido a que:

$$\frac{d}{d\epsilon} S(\epsilon\phi)\mid_{\epsilon=0} = S_L\phi \Rightarrow$$

$$s - \lim_{\epsilon \to 0} \frac{W_+^* S_{V_o} W_-(\epsilon\phi) - S(0)}{\epsilon} - W_+^* W_- \phi = 0 \Rightarrow$$

$$s - \lim_{\epsilon \to 0} \frac{W_+^* S_{V_o} W_-(\epsilon\phi) - \epsilon W_+^* W_- \phi}{\epsilon} = 0 \Rightarrow$$

$$s - \lim_{\epsilon \to 0} W_+^* [\frac{S_{V_0} W_-(\epsilon\phi) - W_-\phi\epsilon}{\epsilon}] = 0 \Rightarrow$$

$$s - \lim_{\epsilon \to 0} [\frac{S_{V_0} W_-(\epsilon\phi) - W_-\epsilon\phi}{\epsilon}] = 0 \Rightarrow$$

[4][10] Teorema 1.2

$$s - \lim_{\epsilon\to 0}[\frac{S_{V_0}(\epsilon\psi) - \epsilon\psi}{\epsilon}] = 0,$$

en el último paso se consideró $W_-\phi = \psi$.
Para demostrar entonces que dicho límite existe se debe de ver que si se renombra $\epsilon\psi = \phi_-$ entonces lo que se debe de demostrar es:

$$s - \lim_{\epsilon\to 0}[\frac{\phi_+ - \phi_-}{\epsilon}] = 0 \Rightarrow,$$

pero como:

$$\|\phi_+ - \phi_-\|_{1,2} \leq C\|u\|_M^p \leq C_1\|e^{-itH}\phi_-\|_M^p \leq C|\epsilon|^p[\|\psi\|_{2,2} + \|\psi\|_{1,1+\frac{1}{p}}]^p,$$

se tiene que:

$$\frac{1}{|\epsilon|}\|\phi_+ - \phi_-\|_{1,2} \leq C|\epsilon|^{p-1}[\|\psi\|_{2,2} + \|\psi\|_{1,1+\frac{1}{p}}]^p$$

y por tanto el resultado queda demostrado.◇
En el siguiente resultado se establece la forma en que se puede recuperar el potencial V_o a partir de S.

Corolario 4.3[5]

Bajo las condiciones del Teorema 4.1 el potencial V_o está determinado de manera única por el operador de dispersión, S.
Para demostrar este resultado se tiene que, por el teorema 4.2, S determina de manera única a S_L, de S_L se obtienen los coeficientes de reflección para la dispersión de Schrödinger lineal. Dado que H no tiene estados acotados se puede reconstruir V_o de algún coeficiente de reflección, usando un método de dispersión inversa lineal.◇
Finalmente se establece que si la forma de la no linealidad, F, es:

$$F(x,u) = \sum_{j=1}^{\infty} V_j(x)|u|^{2(j_o+j)}u$$

Entonces es también posible recuperar los V_j con $j = 1, 2, \ldots$ y precisamente, en el cuarto resultado , se establecen las condiciones para poder aplicar el procedimiento de la reconstrucción de las V_j:

Lema 4.4 [6]

Supongamos que las condiciones del teorema 4.1 estan dadas y que además $F(x,u) = \sum_{j=1}^{\infty} V_j(x)|u|^{2(j_o+j)}u$, donde j_0 es un entero tal que $j_o \geq \frac{(p-3)}{2}$ para $|u| \leq \eta$, para alguna $\eta > 0$, y donde $V_j \in \mathcal{W}_{1,\infty}$ con $\|V_j\|_{\mathcal{W}_{1,\infty}} \leq C^j$, $j = 1, 2\ldots$ para alguna constante C. Entonces para cualquier $\phi \in \mathcal{W}_{2,2} \cap \mathcal{W}_{1,1+\frac{1}{p}}$, existe una $\epsilon_0 > 0$ tal que para todas las $0 < \epsilon < \epsilon_0$ se tiene que:

$$i((S_{V_0} - I)(\epsilon\phi), \phi)_{L^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^{2(j_0+j)+1}\Big[\int\int dtdx V_j(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_0+j+1)} + Q_j\Big] \tag{4.27}$$

donde $Q_1 = 0$ y $Q_j, j > 1$, depende únicamente de ϕ y de V_k con $k < j$, mas aún, para cualesquiera $\acute{x} \in R$ y $\lambda > 0$; si denotamos $\phi_\lambda(\tilde{x}) := \phi(\lambda(x - \acute{x}))$, entonces si $\phi \neq 0$ se tiene que:

$$V_j(\acute{x}) = \frac{\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^3 \int\int dtdx V_j(x)|e^{-itH}\phi_\lambda|^{2(j_0+j+1)}}{\int\int dtdx|e^{-itH_0}\phi|^{2(j_0+j+1)}}. \tag{4.28}$$

Lo que primero se procederá a demostrar es que por el teorema de la contracción podemos ver que $u(t)$ se puede escribir como:

$$u(t) = e^{-itH}\epsilon\phi + \sum_{n=1}^{\infty} Q^n e^{-itH}\epsilon\phi,$$

esto es debido a que:

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} T^n(e^{-itH}\epsilon\phi) = \lim_{n\to\infty}\left[e^{-itH}\epsilon\phi + \sum_{k=1}^{n} Q^k e^{-itH}\epsilon\phi\right] = e^{-itH}\epsilon\phi + Qe^{-itH}\epsilon\phi + Q^2e^{-itH}\epsilon\phi\ldots + Q^n e^{-itH}\epsilon\phi\ldots$$

[5][10] Corolario 1.3
[6][10] Lema 1.4

(Recordemos que T esta definido por el mapeo $u \to e^{-itH}\phi_- + Q(u)$).
Una vez escrita de esta forma $u(t)$ se utiliza la definición de ϕ_+ (4.25) para observar que:

$$((S_v - I)(\epsilon\phi), \phi) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itH}F(x,u(t)), \phi)dt =$$

$$\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}(F(x,u(t)), e^{-itH}\phi)dt =$$

$$\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty}V_j(x)|u|^{2(j_o+j)}u, e^{-itH}\phi)dt = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}V_j(x)|u|^{2(j_o+j)}u\overline{(e^{-itH}\phi)}dtdx =$$

$$\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}V_j(x)|e^{-itH}\epsilon\phi + \sum_{n=1}^{\infty}Q^n e^{-itH}\epsilon\phi|^{2(j_o+j)}(e^{-itH}\epsilon\phi + \sum_{n=1}^{\infty}Q^n e^{-itH}\epsilon\phi)\overline{(e^{-itH}\phi)}dtdx. \quad (4.29)$$

Para analizar esta desigualdad consideremos el caso en que $u(t) = e^{-itH}\epsilon\phi$. De esta forma podremos ver que (4.29) queda como:

$$\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}V_j(x)|e^{-itH}\epsilon\phi|^{2(j_o+j)}(e^{-itH}\epsilon\phi)\overline{(e^{-itH}\phi)}dtdx = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon^{2(j_o+j)+1}V_j(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+j+1)}dtdx =$$

$$\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon^{2(j_o+j)+1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}V_j(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+j+1)}dtdx, \quad (4.30)$$

que como puede darse uno cuenta son los términos principales de la relación (4.27).
Ahora, para poder ver la forma de los términos correctores, Q_n de (4.27) empezemos considerando el caso más simple, ($j = 1$), de este modo se tiene que:

$$u(t) = e^{-itH}\epsilon\phi + Qe^{-itH}\epsilon\phi = e^{-itH}\epsilon\phi + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t}e^{-i(t-\tau)H}F(x, e^{-itH}\epsilon\phi)d\tau =$$

$$e^{-itH}\epsilon\phi + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t}e^{-i(t-\tau)H}V_1(x)|e^{-itH}\epsilon\phi|^{2(j_o+1)}e^{-itH}\epsilon\phi d\tau =$$

$$e^{-itH}\epsilon\phi + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t}e^{-i(t-\tau)H}\epsilon^{2(j_o+1)+1}V_1(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+1)}e^{-itH}\phi d\tau,$$

por ello (4.29) queda como:

$$\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}V_1(x)\Big|e^{-itH}\epsilon\phi + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t}e^{-i(t-\tau)H}\epsilon^{2(j_o+1)+1}V_1(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+1)}e^{-itH}\phi d\tau\Big|^{2(j_o+j)}$$

$$\Big(e^{-itH}\epsilon\phi + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t}e^{-i(t-\tau)H}\epsilon^{2(j_o+1)+1}V_1(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+1)}e^{-itH}\phi d\tau\Big)\overline{(e^{-itH}\phi)}dtdx.$$

De esta ecuación nos interesa la parte:

$$\Big|e^{-itH}\epsilon\phi + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t}e^{-i(t-\tau)H}\epsilon^{2(j_o+1)+1}V_1(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+1)}e^{-itH}\phi d\tau\Big|^{2(j_o+j)}$$

$$\Big(e^{-itH}\epsilon\phi + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t}e^{-i(t-\tau)H}\epsilon^{2(j_o+1)+1}V_1(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+1)}e^{-itH}\phi d\tau\Big), \quad (4.31)$$

puesto que al desarrollar el primer binomio.

$$\Big|e^{-itH}\epsilon\phi + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t}e^{-i(t-\tau)H}\epsilon^{2(j_o+1)+1}V_1(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+1)}e^{-itH}\phi d\tau\Big|^{2(j_o+j)} \quad (4.32)$$

obtendremos potencias menores o iguales a $2(j_o+j)$. El término $(e^{-itH}\epsilon\phi)^{2(j_o+j)}$ de dicho desarrollo, al ser multiplicado por $e^{-itH}\epsilon\phi$, de otro binomio de (4.31) nos dará el primer término principal de (4.27) cuando $j=1$ (lo que concuerda con la obtencion de la ecuación (4.30) cuando $u = e^{-itH}\epsilon\phi$).
Los demás términos del desarrollo de (4.32) al ser multiplicados por el segundo binomio de (4.31) nos darán únicamente términos correctores. Esto se sigue del siguiente razonamiento:
Tomemos el término del desarrollo del binomio (4.32) $(e^{-itH}\epsilon\phi)^{2(j_o+1)-1}$ y luego multlipiquémoslo por:

$$(\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-\tau)H}\epsilon^{2(j_o+1)+1}V_1(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+1)}e^{-itH}\phi d\tau),$$

con ello obtendremos el siguiente resultado:

$$\left|(e^{-itH}\epsilon\phi)^{2(j_o+1)-1}(\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-\tau)H}\epsilon^{2(j_o+1)+1}V_1(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+1)}e^{-itH}\phi d\tau)\right| =$$

$$\epsilon^{4(j_o+1)}\left|(e^{-itH}\phi)^{2(j_o+1)-1}(\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t} e^{-i(t-\tau)H}V_1(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+1)}e^{-itH}\phi d\tau)\right| \tag{4.33}$$

Que puede observarse se trata de un término con una potencia en ϵ más grande que la del principal cuando $j=1$ (la potencia de ϵ que corresponde en este caso es $2(j_o+1)+1$, como puede verse en (4.27)).
Podemos concluir que no existe término correctivo para el caso $j=1$, por lo que $Q_1=0$ (en todo caso este término pertenecerá a algún término correctivo, de orden superior). Notemos además que dicho (4.33) depende de ϕ y V_1, lo que nos dice que los términos correctores Q_n con $n>1$ podrán depender de (4.33).
Para el caso siguiente ($j=2$) el término más simple le pasará algo parecido y al compararlo con el término principal en el caso $j=2$ se observará que la potencia obtenida será mayor que la del término principal y por tanto el término obtenido pertenecerá a un correctivo de orden mayor (el término correctivo al que pertencezan estará determinado por el valor de j_o), que únicamente depende de V_1 o V_2 (o ambas).
En conclusión los términos correctivos Q_n dependerán siempre de partes que involucren a términos con ϕ y V_j con $j<n$, que es lo que se pide en el Lema 4.4.

Lo que sigue es la demostración de la ecuación (4.28). Para ello primero se tiene que ver que la integral:

$$\int\int dtdx|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+j+1)} < \infty,$$

es decir, es finita.
Dado que como consecuencia del Teorema de Sobolev (1.3.7) se tiene que:

$$\|e^{-itH}\phi\| \leq C_q\|e^{-itH}\phi\|_{W_{2,2}} \leq C_q\|\phi\|_{W_{2,2}}.$$

Para una constante C_q, $2\leq q\leq\infty$.
Para ello consideraremos dos casos, el primero será para $|t|\leq 1$, de modo que·

$$\int_{|t|\leq 1} dt\int dx\left|e^{-itH}\phi\right|^{2(j_o+j+1)} = \int_{|t|\leq 1} dt\|e^{-itH}\phi\|^{2(j_o+j+1)}_{L^{2(j_o+j+1)}} \leq \int_{|t|\leq 1} dtC\|\phi\|^{2(jo+j+1)}_{W_{2,2}} \leq C_1.$$

Luego se considera el caso en $|t|\geq 1$ observando además que, $2(j_o+j+1)\geq(p+1)$:

$$\int_{|t|\geq 1} dt\int dx\left|e^{-itH}\phi\right|^{2(j_o+j+1)} = \int_{|t|\geq 1} dt\int dx\left|e^{-itH}\phi\right|^{2(j_o+j+1)-(p+1)}\left|e^{-itH}\phi\right|^{(p+1)} \leq$$

$$\int_{|t|\geq 1} dt\|e^{-itH}\phi\|^{2(j_o+j+1)-(p+1)}_{L^\infty}\left|e^{-itH}\phi\right|^{(p+1)} \leq C\int_{|t|\geq 1}\|e^{-itH}\phi\|^{p+1}_{L^{p+1}} \leq C\int_{|t|\geq 1}\frac{\|\phi\|^{p+1}_{L^{1+\frac{1}{p}}}}{|t|^{\frac{1}{2}(p-1)}} \leq C_2.$$

La última desigualdad se basa en el hecho que $\frac{1}{2}(p-1)>1$ puesto que $3.56=\rho<p$. Por todo esto se puede ver que $\int dt\int dx\left|e^{-itH}\phi\right|^{2(j_o+j+1)}<\infty$.
Una vez establecido esto se procede a definir el siguiente operador auto-adjunto en L^2

$$H_\lambda := H_o + V_\lambda(x)$$

con:

$$V_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2} V_o\left(\frac{\tilde{x}}{\lambda} + \acute{x}\right).$$

Puesto que H no tiene eigenvalores, entonces H_λ tampoco tiene eigenvalores, esto es $H_\lambda > 0$. También se puede ver que se puede establecer la siguiente equivalencia de normas [7]:

$$C_1 \|\phi\|_{\mathcal{W}_{2,2}} \leq \|(H_\lambda + I)\phi\|_{L^2} \leq C_2 \|\phi\|_{\mathcal{W}_{2,2}} \tag{4.34}$$

Dado que $N(V_\lambda) = \frac{1}{\lambda} N(V_o)$ para $\lambda \geq 1$ entonces se pueden fijar las C_1, C_2 para toda $\lambda \geq 1$. Definamos $\tilde{t} = \lambda^2 t$ y $\tilde{x} = \lambda(x - \acute{x})$.
Podemos notar, además, que se cumple lo siguiente.

$$e^{-i\tilde{t}H_\lambda}\phi(\tilde{x}) = e^{-itH}\phi_\lambda(x), \tag{4.35}$$

ello se puede ver si se plantea el siguiente problema. Consideremos la siguiente ecuación:

$$i\frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = H_\lambda v$$

$$v(0, x) = \phi.$$

Se puede observar que $\tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}) = e^{-i\tilde{t}H_\lambda}\phi(\tilde{x})$ es solución de la ecuación antes planteada. Y además se puede ver que $u(t, x) = e^{-itH}\phi_\lambda(x)$ también lo es, puesto que:

$$i\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} u(t, x) = i\frac{\partial}{\partial \lambda^2 t} e^{-itH}\phi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2}[-\Delta_x + V_0(x)]e^{-itH}\phi_\lambda(x)$$

$$= [-\Delta_{\tilde{x}} + V_\lambda]u(t, x) = H_\lambda u(t, x)$$

Dado que $u(0, x) = \phi(\lambda(x - \acute{x})) = \phi(\tilde{x})$ entonces se tiene que $u = \tilde{u}$ y el resultado está demostrado.
El resultado:

$$I_j := \lambda^3 \int\int dt dx V_j(x) |e^{-itH}\phi_\lambda|^{2(j_0+j+1)} = \int\int d\tilde{t} d\tilde{x} V_j\left(\frac{\tilde{x}}{\lambda} + \acute{x}\right) |e^{-i\tilde{t}H_\lambda}\phi|^{2(j_0+j+1)}, \tag{4.36}$$

es inmediato del cambio de variable $\tilde{t} := \lambda^2 t$ y $\tilde{x} := \lambda(x - \acute{x})$.
Para ver los siguientes resultados debemos de mencionar el siguiente teorema:

Teorema 4.4.1 [8]

Sean A_n y A dos operadores autoadjuntos, entonces si $(\kappa I - A_n)^{-1} \to (\kappa I - A)^{-1}$ en la topología fuerte (ecuación (2.2.8)), donde κ es elemento del conjunto resolvente de A, [9] y además f es una función continua y acotada en R entonces, $f(A_n) - f(A) \to 0$.
Dado que las normas $\|u\|_{\mathcal{W}_{2,2}}$ y $\|(I + H_0)u\|_{L^2}$ son equivalentes y se tiene (4.34) entonces:

$$(I - H_\lambda)^{-1} \to (I - H_0)^{-1}$$

en la topología fuerte de $\mathcal{W}_{2,2}$ y por tanto como $f(x) : e^{-itx}$ es una función continua y acotada en R se tiene que:

$$s - \lim_{\lambda \to \infty} e^{-itH_\lambda}\phi = e^{-i\tilde{t}H_0}\phi, \tag{4.37}$$

donde el límite existe en la topología fuerte de $\mathcal{W}_{2,2}$.
Además por el teorema de encajamiento de Sobolev, (1.3.7), se tiene que dicho límite existe también en la topología de $L^q, 2 \leq q \leq \infty$, y mas aún:

$$\|e^{-i\tilde{t}H_\lambda}\phi\|_{L^q} \leq C_q \|\phi\|_{\mathcal{W}_{2,2}}, \quad 2 \leq q \leq \infty, \quad \lambda \geq 1, \tag{4.38}$$

de esta forma, utilizando la estimación (4.14) y el resultado (4.35) se obtiene que:

---

[7] [6] Teorema 2.7.1

[8] [4] Vol.I Teorema VIII 20 p 286

[9] Sea $T : X \to Y$, un operador lineal acotado, con X, Y espacios normados lineales Se dice que $\kappa \in C$ es elemento del conjunto resolvente de un operador T si $(\kappa I - T)^{-1}$ es una biyección con inversa acotada. Al operador $(\kappa I - T)^{-1}$ se le conoce como el resolvente de T en λ

$$\|e^{-i\tilde{t}H_\lambda}\phi\|^{p+1}_{L^{p+1}} = \lambda\|e^{-itH}\phi_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}} \leq C\frac{1}{t^{d(p+1)}}\lambda\|\phi_\lambda\|^{p+1}_{L^{1+\frac{1}{p}}} = C\frac{1}{\tilde{t}^{d(p+1)}}\|\phi\|^{p+1}_{L^{1+\frac{1}{p}}}, \tag{4.39}$$

on $d := \frac{1}{2}\frac{p-1}{p+1}$.
os resultados (4.36)-(4.39) y el teorema de convergencia dominada (1.2.2.5) sirven para poder calcular el límite .

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^3\int\int dtdxV_j(x)|e^{-itH}\phi_\lambda|^{2(j_o+j+1)} = \lim_{\lambda\to\infty}\int\int d\tilde{t}d\tilde{x}V_j(\frac{\tilde{x}}{\lambda}-\acute{x})|e^{-i\tilde{t}H_\lambda}\phi(\tilde{x})|^{2(j_o+j+1)} =$$

$$V_j(\acute{x})\int\int dtdx|e^{-itH_o}\phi|^{2(j_o+j+1)},$$

otando que $2(j_0+j+1)\geq p+1$, que $d(p+1)>1$ y que V_j es continua. Por tanto la ecuación (4.28) del artículo se umple.
'inalmente , como último resultado se establece la forma de la reconstrucción de las $V_j, j = 1.2, ...,$

:orolario 4.5 [10]

Bajo las condiciones del Lema 4.4, el operador de dispersión S, determina de manera única los potenciales $V_j, j = 0, 1\ldots$
:n la demostración que se menciona en el artículo, la discusión se centra en la forma en que se reconstruirá S_{V_0} or medio de S, una vez establecido ello se menciona que los coeficientes pueden ser recuperados por medio de las cuaciones (4.27) y (4.28) . Para ver dicha reconstrucción se debe de observar que la ecuación (4.27) nos define una erie con potencias en ϵ y por ello es posible calcular los coeficientes de dicha serie.
:l proceso por el que se recuperan los coeficientes se sigue del siguiente razonamiento:
ea $f(\epsilon) = \sum_{k=k_o}^{\infty}\epsilon^k a_k$ una serie de potencias de ϵ entonces podemos observar que:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^{k_o}} = \lim_{\epsilon\to 0}[a_{k_o} + \sum_{k=k_o+1}^{\infty}\epsilon^{j-j_o}a_k] = a_{k_o}.$$

i ahora se calcula:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\epsilon)-a_{k_o}\epsilon^{k_o}}{\epsilon^{k_o+1}} = \lim_{\epsilon\to 0}[a_{k_o+1} + \sum_{k=k_o+2}^{\infty}\epsilon^{k-k_o-1}a_k] = a_{k_o+1}.$$

hora veamos para $k = k_o+2$:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\epsilon)-a_{k_o}\epsilon^{k_o}-\epsilon^{k_o+1}a_{k_o+1}}{\epsilon^{k_o+2}} = \lim_{\epsilon\to 0}[a_{k_o+2} + \sum_{k=k_o+3}^{\infty}\epsilon^{k-k_o-2}a_k] = a_{k_o+2},$$

iendo así, si se quiere obtener el coeficiente $a_{k_o+n}, n = 1, 2, 3...$ de la serie se tendrá que calcular el siguiente límite:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\epsilon)-\sum_{i=0}^{n-1}a_{k_o+i}\epsilon^{k_o+i}}{\epsilon^{k_o+n}} = a_{k_o+n}$$

)e este modo el primer coeficiente de la serie definida en (4.27), no será otra cosa que:

$$\frac{1}{i}\int\int dtdxV_1(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+2)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{((S_v-I)(\epsilon\phi),\phi)_{L^2}}{\epsilon^{2(jo+1)+1}},$$

o que nos permite introducirlo en la ecuación (4.48) y ello mismo nos permite conocer quien es $V_1(\acute{x})$. Una vez onocido V_1 entonces se pueden conocer todos los términos correctores que tengan a V_1 que podrán ser los términos orrectores $Q_n, n = 2, 3, \ldots$. De este modo al calcular el segundo coeficiente de la serie de potencias de ϵ que es $\int dtdxV_2(x)|e^{-itH}\phi|^{2(j_o+3)} + Q_2$ se podrá conocer la integral puesto que Q_2 se conoce, ya que, si existe, sólo depende le V_1. De este modo se podrá obtener V_2. Para los demás términos se procederá de manera análoga. y de esta forma l proceso de reconstrucción de las V_j está dado.
' con esto damos por terminada la discusión.◇◇

[10][10] Corolario 1.5

Bibliografía

1] Adams, Robert A. "Sobolev Spaces" Academic Press. New York, 1975.

2] Boccara, Nino "Funtional Analysis"(An introduction for Physicists). Academic Press. Inc. San Diego USA, 1990.

3] Toda, Morikazu "Nonlinear Waves and Solitons". Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, Japan, 1983.

4] Reed, M. Simon B. "Methods of Modern *Mathematical Physics (I,II,III)". Academic Press. New York. USA*, 1972.

5] H.L. Royden "Real Analysis". Macmillan Company (second Edition). USA, 1970.

6] Schechter, Martin "Operator Methods in Quantum Mechanics". North Holland. New York, 1981

7] Sulem, C. and Sulem, P-L. "The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse". Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, NY, 1999.

8] Stein, E. M. "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions" Princeton University Press: Princeton, NJ, 1970.

9] Weder, Ricardo "The $W_{k,p}$-continuity of the Schrödinger wave operators on the line". Comm.Math.Phys, 208(1999), $507 - 520$.

[10] Weder, Ricardo "Inverse Scattering for the *Nolineal* Schrödinger equation *Reconstrucction of the Potential and* the Nonlinearity". Mathemáthical Methods in the Applied Sciences, 24 (2001),245-254.

[11] Weder, Ricardo "$L^p - L^{p'}$ estimates for the Schrödinger equation on the line and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential". J. Funct. Analysis, 170(2000)$37 - 68$.

[12] Werner Amrein, Josef, J. and Kalyan B. S. "Scattering Theory in Quantum Mechanics". W.A Benjamin. London, 1977.

[13] Zaidman, Samuel "Functional Analysis and Diferential equations in Abstracs Spaces" Chapman-Hall/CRC. USA, 1999.