

8

00861

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE ECONOMÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Programa de Maestría en Economía  
1998-2000

**DETECCIÓN Y FILTRADO DE CICLOS ECONÓMICOS MEDIANTE TÉCNICAS  
DEL ANÁLISIS ESPECTRAL DE SERIES DE TIEMPO**

(Tesis para obtener el grado de Maestra en Economía)

295637

Maestrante:

CORALIA AZUCENA QUINTERO ROJAS

Asesores de tesis:

Dr. JOSÉ FERNÁNDEZ GARCÍA (UAM-Xochimilco)

Dr. ALEJANDRO VALLE BAEZA (DEP-FE, UNAM)

2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

❖	Introducción .....	i
❖	La estimación suavizada de la densidad espectral (ESDE) y los filtros lineales: detección y filtrado de ciclos .....	1
•	Detección de ciclos .....	1
	La estimación suavizada de la densidad espectral (ESDE): su deducción y formulación para su cálculo digital .....	1
	La formulación final para el cálculo de la ESDE .....	6
•	Filtrado de ciclos .....	8
	Los filtros ideales básicos .....	8
	Los filtros lineales .....	8
	El filtro de las medias móviles de orden R .....	12
	Filtros lineales simétricos .....	12
	El algoritmo para la detección y filtrado de ciclos en series de tiempo .....	14
	Ejemplificación del proceso de filtrado .....	20
	Ciclos encontrados en las series de la tasa de crecimiento del índice del PIB de veintiocho países capitalistas.....	25
❖	Revisión de algunos trabajos contemporáneos que utilizan el análisis espectral .....	26
1.	Entre tendencias y ciclos comerciales: las ondas Largas de Kondratieff. <i>Jan P. G. Reijnders</i> .....	27
2.	Diseño de filtros en el dominio de la frecuencia. <i>Rainer Metz y Winfried Stier</i> .....	30
3.	Una reinvestigación de ondas largas en series agregadas de producción. <i>Rainer Metz</i> .....	35
4.	Un análisis espectral del ciclo de Kondratieff. <i>Casper van Ewijk</i> .....	40
5.	Ciclos económicos suizos: 1861-1988. <i>Peter Englund y     Lars E. O. Svensson</i> .....	47
6.	Medición de ciclos económicos: filtros pasa banda aproximados para series de tiempo económicas. <i>Marianne Baxter y Robert G. King</i> .....	52
	Comentarios recopiladores sobre los procedimientos espectrales empleados en los artículos .....	62
❖	Comentarios finales y conclusiones .....	66
	Sobre la ESDE y el procedimiento de filtrado .....	66
	Sobre los resultados .....	67

❖ Apéndice .....	69
A. Análisis exploratorio de los datos de las series de la tasa de crecimiento del índice del PIB de Estados Unidos y de los ciclos estimados en ésta.....	69
B. Prueba de estacionariedad de la tasa de crecimiento del índice del PIB de Estados Unidos .....	73
C. Fechas de los puntos críticos del ciclo de los negocios, según el NBER.....	79
❖ Referencias.....	81

## INTRODUCCIÓN

En el estudio de series económicas, generalmente basta un simple análisis visual para percibir y medianamente distinguir en ellas fluctuaciones cíclicas.<sup>1</sup> Sin embargo, para determinar el número y la naturaleza de éstas e incluso separarlas y fechar sus puntos críticos, harán falta métodos más complicados. Como es sabido, la gran mayoría de los procedimientos utilizados con tal fin consisten en calcular promedios, desde los más simples hasta los más complejos (pasando por los lineales, los polinómicos, los de ponderaciones exponenciales, etcétera), mediante los cuales se busca resaltar alguno de los patrones subyacentes en los datos; en este caso, las fluctuaciones cíclicas. Formalmente, todos ellos constituyen *filtros* cuyo fin es atenuar parte de la dispersión original de una serie temporal buscando aclarar su comportamiento, lo que, en ese sentido, significa una pérdida de información que, sin embargo, resulta ser una pérdida útil, ya que permite conservar de la serie básicamente solo la correspondiente al componente cíclico que se pretende aislar.

Al estudiar el comportamiento de una serie es muy importante contar con una concepción fundamentada de su estructura y sus componentes, pues de esa manera el riesgo de inducir ciclos espurios que conlleva cualquier procedimiento de filtrado se vuelve mínimo. Aun así, es recomendable aplicar con ciertas reservas filtros que involucren, por ejemplo, ponderaciones polinómicas, pues algunas veces provocan falsas concavidades y/o convexidades en los datos filtrados. Sin embargo, las consideraciones sobre las series usualmente son de índole teórica lo cual, llevado al extremo, puede conducir a que el análisis de una misma serie desde distintos supuestos y enfoques conceptuales genere resultados o conclusiones cualitativamente diferentes. Una manera de evitar problemas de ese tipo consiste en utilizar alguna herramienta que permita detectar los ciclos presentes en una serie haciendo abstracción de cualquier planteamiento teórico. Lo anterior es posible mediante la *estimación suavizada de la densidad espectral (ESDE)* que, debido a la manera en que se construye y fundamenta, puede ser considerada como una técnica 'pura' de detección de ciclos ya que su uso mantiene invariable a la serie.

La comprensión de su funcionamiento se facilita al considerar que cada ciclo está asociado a una frecuencia que se define y calcula como el inverso de su duración o periodo. Así, decir que el periodo promedio del ciclo marxista de reposición de capital es de diez años es equivalente a afirmar que su frecuencia de ocurrencia es de 0.1 ciclos por año. De esta manera, la ESDE permite saber en qué frecuencias y, por tanto, en cuáles ciclos se concentra la mayor parte de la varianza de una serie. De manera general, se asume que si su gráfica muestra uno o más máximos locales

---

<sup>1</sup> En adelante, se utilizarán indistintamente los términos 'ciclo', 'movimiento cíclico', 'fluctuación cíclica', 'componente cíclico' para hacer referencia a cualquier fenómeno cuya recurrencia o periodicidad no deje lugar a dudas.

significa que la forma particular de la serie correspondiente, o sea, la dispersión de sus datos, se debe en gran medida a que contiene ciclos con frecuencias (periodos) aproximadas a aquellas en las cuales se tienen los máximos. Por el contrario y bajo ciertas condiciones, si la gráfica de la ESDE resulta llana, usualmente es síntoma de la ausencia de ciclos en la serie original.

Esta técnica, perteneciente al llamado *análisis espectral de series de tiempo*, tiene su origen en el *análisis de Fourier* y en los procedimientos empleados en el estudio de la transmisión de señales dentro del ámbito de las telecomunicaciones, y con ella pueden obtenerse resultados ampliamente confiables. Pero, no obstante sus cualidades, la ESDE es una herramienta muy poco conocida y empleada en las ciencias sociales por lo que un objetivo de este trabajo es mostrar su uso en la detección de los ciclos que resultan de la evolución particular del capitalismo en diversos países, tanto del *centro*, como de la *periferia del sistema capitalista mundial*.<sup>2</sup> Otro objetivo importante consiste en presentar un método sencillo para separar los ciclos y ubicar sus años de crisis. Este se basa en la aplicación del filtro de las medias móviles simétricas adecuado para aislar cada ciclo de acuerdo con su duración promedio y su eficacia puede saberse al calcular la ESDE de la serie resultante. Así se verá si efectivamente ésta contiene, además de ruido, el ciclo que se busca aislar. La ESDE, sin embargo, no es una herramienta adecuada para la detección de ciclos muy largos con relación al tamaño de la serie; es decir, aun cuando una serie contenga un ciclo cuya regularidad no deje lugar a dudas, si éste completa sólo uno o dos periodos dentro de la serie, es muy posible que no sea detectado por la ESDE.

De acuerdo con los objetivos mencionados, se presentarán primero los aspectos fundamentales de la deducción de la ESDE así como del procedimiento de detección y filtrado de ciclos que aquí se propone, mismo que después será ejemplificado con la serie de la tasa de crecimiento del índice del PIB de Estados Unidos. Dicho país fue escogido por diversas razones, entre las que destacan las dos siguientes: el carácter hegemónico que este país ha mantenido desde la segunda posguerra y la gran influencia en todos los órdenes que ha tenido y tiene sobre México. A continuación, se analizarán las series de la tasa de crecimiento del índice del PIB de veintiocho países capitalistas (18 países avanzados, 7 latinoamericanos y 3 asiáticos, según la clasificación de A. Maddison,<sup>3</sup> para los cuales se tienen series suficientemente largas), para luego diferenciarlos de acuerdo con los ciclos que presenten. Las conclusiones que se deriven de este análisis, así como algunas consideraciones finales sobre las técnicas, serán expuestas en la última parte de este trabajo. Por último, se discuten brevemente seis artículos contemporáneos que hacen uso del análisis espectral en la detección y / o filtrado de ciclos económicos, con el propósito de comparar y justificar el procedimiento propuesto en este trabajo. Se incluye además un apéndice dividido en

---

<sup>2</sup> Para una exposición amplia de los conceptos de *centro* y *periferia del sistema capitalista mundial* véanse, Amin, S.(1970), pp. 27, 175, 348-369, y Vidal, J. M. Y J. Martínez P. (1987), pp.127-152.

<sup>3</sup> Maddison, A. (1997), pp. 212-226.

tres secciones en el que se realizan algunas pruebas estadísticas y se presentan las fechas de los 'ciclos de los negocios' de Estados Unidos reportados por el *National Bureau of Economic Research (NBER)*.

# LA ESTIMACIÓN SUAVIZADA DE LA DENSIDAD ESPECTRAL (ESDE) Y LOS FILTROS LINEALES: DETECCIÓN Y FILTRADO DE CICLOS

## DETECCIÓN DE CICLOS

### *La estimación suavizada de la densidad espectral (ESDE): deducción y formulación para su cálculo digital*

La ESDE es una aproximación del *espectro* o, equivalentemente, de la varianza de un proceso estocástico expresada como función de la frecuencia. Su importancia fundamental radica en que permite estimar la proporción de la varianza total del proceso que corresponde a cada frecuencia, y por tanto al ciclo asociado a ésta, a partir de una realización discreta (serie de tiempo) de dicho proceso, lo cual resulta de gran utilidad si se considera que en el análisis práctico de algún fenómeno (por ejemplo, la evolución del capitalismo en algún país) solo se cuenta, en el mejor de los casos, con conjuntos de datos que reflejan su comportamiento a lo largo del tiempo (en el caso del desarrollo capitalista se dispone de variables económicas como el PIB, tasas de interés, índices de precios, etcétera); no obstante, cuando se supone, como en el presente trabajo, que el proceso o fenómeno en estudio sigue una distribución normal, puede describirse mediante sus dos primeros momentos: la media,  $\mu$ , y la función de autocovarianza,  $\gamma(h)$ . Si se satisface además el supuesto de *ergodicidad*, estos dos primeros momentos pueden obtenerse a partir de una sola realización.<sup>1</sup>

En general, las propiedades de un proceso estocástico dependen del tiempo, por lo que para analizarlo adecuadamente es necesario independizarlas primero de éste buscando alguna forma de 'equilibrio' en el proceso, de manera que sus propiedades estadísticas, reflejadas en las realizaciones o series de tiempo generadas por el mismo, sean constantes a lo largo de la serie y, por tanto, no varíen conforme lo haga el tiempo. Esta característica de estabilidad constituye la condición de *estacionariedad*, que a continuación se define.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Una condición necesaria de la ergodicidad es que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0,$$

lo que en principio puede suponerse que se satisface para las series económicas pues es razonable pensar que entre mayor sea el tiempo que medie entre dos observaciones, la "influencia" de la primera en la segunda será prácticamente nula.

<sup>2</sup> En la práctica, muchas series de tiempo de variables económicas no son estacionarias. Por ejemplo, las economías de muchos países están en continuo crecimiento, causa por la cual los indicadores económicos típicos muestran una

Un proceso estocástico será estacionario en sentido amplio si se cumplen las siguientes tres condiciones:<sup>3</sup>

(a) La esperanza matemática de la variable es finita y permanece constante a lo largo del tiempo:

$$E(X_t) = E(X_{t-k}) = E(X_{t+k}) = \mu < \infty, \forall t, k \in R$$

Como se observa en esta ecuación, la media del proceso,  $\mu$ , carece del subíndice  $t$ , reflejando con ello su constancia a lo largo de todo el horizonte temporal.

(b) La varianza de la variable es finita y permanece constante a lo largo del tiempo:

$$Var(X) \equiv \sigma_x^2 \equiv \gamma_0 = E(X_t - \mu)^2 = E(X_{t-k} - \mu)^2 = E(X_{t+k} - \mu)^2 < \infty, \forall t \in R$$

(c) La autocovarianza de la variable, es decir, la covarianza entre observaciones de la misma variable depende únicamente de qué tan separadas se encuentran [las observaciones] en el tiempo, y no del periodo en que se presentan:

$$Cov(X_t, X_{t-k}) \equiv \gamma_k = E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)] < \infty, \forall t \in R$$

Más aún,

$$\gamma_{-k} = Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k$$

Dicho en otros términos, la autocovarianza de la variable  $X_t$  depende solo del valor de  $k$ , pero no del valor de  $t$ .<sup>4</sup>

tendencia, generalmente ascendente, a lo largo del tiempo. Esta tendencia puede estar tanto en la media como en la varianza o en ambas. A tales series no estacionarias suele llamárseles evolutivas.

<sup>3</sup> Fernández, J. (1994), pp. D-8, D-9.

<sup>4</sup> Una de las pruebas más recientes y utilizadas para determinar si una serie de tiempo es o no estacionaria de segundo orden es el llamado *árbol de decisión* que se basa en la *prueba de Dickey-Fuller ampliada*, pero que utiliza los valores corregidos de Engel-Granger. Como puede verse en el apéndice, esta fue la prueba utilizada en este trabajo.

### El espectro de potencia de un proceso estocástico<sup>5</sup>

El espectro de potencia de un proceso estocástico,  $\Gamma(f)$ , se define como la transformada de Fourier de la función de autocovarianza de dicho proceso, esto es

$$\Gamma(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad f \in (0, 2\pi). \quad (1)$$

Aun cuando el espectro de potencia permite saber cómo se distribuye la varianza del proceso sobre la frecuencia y, por consiguiente, saber cuál o cuáles ciclos la explican en su mayoría, en la práctica no es posible obtenerlo, ya que generalmente solo se conoce una o varias realizaciones del proceso, en forma de series de tiempo, y no al proceso mismo. Así, únicamente podrá calcularse la función de autocovarianza muestral y no la poblacional. Dado lo anterior, debe buscarse alguna buena estimación del espectro de potencia.

### El espectro muestral de una serie de tiempo

Una aproximación natural al espectro de potencia, que guarda cierta analogía con éste, consiste en calcular la transformada de Fourier discreta de la función de autocovarianza muestral de la serie  $x(t)$ . Así, el espectro muestral de  $x(t)$  se define como

$$C_{xx}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N+1}{2}} c_{xx}(k) e^{-j2\pi fk}, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}, \quad (2)$$

donde  $N$  es el número de datos de la serie.

Sin embargo, cuando el espectro muestral se obtiene de una serie estocástica, su comportamiento se vuelve muy errático, no pudiéndose, en ese caso, rescatar información útil sobre la naturaleza cíclica de dicha serie.<sup>6</sup> Para comprender tal comportamiento, es necesario considerar que el registro de  $x(t)$  que se obtuvo en el intervalo  $-N/2 \leq t \leq N/2$ , fue sólo uno de los muchos que pudieron haberse observado, es decir,  $x(t)$  es solo una realización de un proceso estocástico especificado por la distribución conjunta de las variables aleatorias  $X(t)$  asociadas con los datos de la serie. Por análogas razones, el espectro muestral  $C_{xx}(f)$  debe ser considerado como una

<sup>5</sup> Esta parte se construyó con base principal en el capítulo 6 de Jenkins, G. y D. Watts (1968).

<sup>6</sup> La razón básica de por qué falla el análisis de Fourier cuando se aplica a series de tiempo de carácter estocástico es que se basa en el supuesto de amplitudes, frecuencias y fases fijas, mientras que las series de tiempo están caracterizadas por cambios aleatorios en los tres elementos mencionados. Es por eso que los métodos de Fourier necesitan ser adaptados para tomar en cuenta la naturaleza aleatoria de las series de tiempo.

realización de la variable aleatoria  $C_{xx}(f)$ .<sup>7</sup> Además, el valor de su varianza es independiente del número de observaciones,  $N$ , razón por la cual no disminuye en la medida en que se aumenta el tamaño de la serie, por lo que en el siguiente apartado se discutirá un procedimiento útil para disminuir la varianza del estimador muestral o, dicho en otros términos, su comportamiento errático. A tal proceso se le llama *suavizamiento*.

### Suavizamiento del espectro muestral<sup>8</sup>

Una técnica ampliamente utilizada para reducir la varianza del estimador espectral muestral, esto es, para suavizarlo, consiste en promediar estimaciones obtenidas de subseries no traslapadas de la serie original. Heurísticamente, el procedimiento consiste en dividir la serie original, de tamaño  $N$ , en  $n$  segmentos cada uno con  $M=N/n$  datos. A partir de éstos se forman  $n$  estimaciones espectrales, las cuales se promedian para obtener un estimador espectral medio de la forma

$$\bar{C}_{xx}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_{xx}^{(i)}(f) \quad (3)$$

donde  $C_{xx}^{(i)}(f)$  es la estimación obtenida con el  $i$ -ésimo segmento.

Con este procedimiento se reduce la variabilidad o volatilidad del espectro muestral. Esta forma de suavizamiento fue primero implementada por M. S. Barlett<sup>9</sup> (1948), quien llegó a la siguiente expresión general del espectro muestral suavizado:

$$\bar{C}_{xx}(f) = \sum_{k=-\frac{M+1}{2}}^{\frac{M+1}{2}} w(k) c_{xx}(k) \cos 2\pi f k, \quad \frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}. \quad (4)$$

En la expresión anterior<sup>10</sup>,  $w(k)$  representa la ventana de intervalo que asigna las ponderaciones correspondientes al promedio empleado en el suavizamiento del espectro muestral. En el procedimiento de Barlett, la ventana de intervalo es

<sup>7</sup> Por convención, cuando se hace referencia a una realización o muestra de una variable aleatoria se emplean minúsculas para los subíndices y cuando se trata de la variable o proceso aleatorio se emplean mayúsculas; así, por ejemplo,  $c_{xx}(k)$  representa una realización de la variable aleatoria  $C_{xx}(k)$  o, dicho en otros términos,  $c_{xx}(k)$  es la autocovarianza obtenida de una muestra  $x(t)$  de algún proceso aleatorio y  $C_{xx}(k)$  es la autocovarianza poblacional de dicho proceso (muchas veces denotada por  $\gamma_{xx}(k)$ ). La interpretación es análoga para  $C_{xx}(f)$  y  $C_{xx}(f)$ .

<sup>8</sup> Esta sección se construyó tomando como referencia principal a Shanmugan, K. S. y A. M. Breipohl (1988), pp. 579-584

<sup>9</sup> Citado en Bloomfield (1976), p. 162.

$$w(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{M}, & |k| \leq M \\ 0, & |k| > M \end{cases} \quad (5)$$

Por obvias razones, a esta ventana se le llama *ventana de intervalo de Bartlett*.

De manera general, los estimadores suavizados que se desprenden de la ecuación (4) tendrán una varianza menor que la del estimador muestral  $C_{xx}(f)$ ; y la función  $w(u)$  que se escoja como ventana deberá satisfacer las siguientes condiciones:<sup>11</sup>

1.  $w(0)=1$
  2.  $w(k)=w(-k)$
  3.  $w(k)=0, \quad |k| \geq M, M < N.$
- (6)

Algunos ejemplos de ventanas de intervalo que son ampliamente utilizadas en el análisis espectral, además de la ventana de Bartlett son:

Ventana rectangular:

$$w(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leq M \\ 0, & |k| > M \end{cases} \quad (7)$$

Ventana de Tukey:

$$w(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi k}{M} \right), & |k| \leq M \\ 0, & |k| > M \end{cases} \quad (8)$$

La varianza del estimador espectral suavizado puede reducirse haciendo pequeña la longitud  $M$  de los segmentos en que es dividida la serie original.

<sup>10</sup> De la exponencial compleja de la transformada de Fourier solo queda el componente real,  $\cos 2\pi fk$ , porque la transformada de Fourier de una función par es real (Véase la demostración en Otnes, R. y L. Enochson (1978), pp. 9-11)

<sup>11</sup> Jenkins, G. y D. Watts, *op cit*, p. 243.

<sup>12</sup> A  $M$  también se le llama el *punto de truncamiento* de la serie

En el cuadro 1 se indican los valores de la *tasa de varianza*,  $I/N$ , o la varianza restante al utilizar el estimador espectral suavizado en lugar del estimador muestral, correspondientes a cada ventana. Como ilustración del concepto anterior, supóngase que  $M$  es igual a  $(0.1)N$ , es decir, que se divide la serie original en diez subseries ( $k=10$ ). Entonces, para la ventana de Bartlett,  $I/N$  es  $(2/3)(0.1)=0.067$ . Por lo tanto, al tomar un punto de truncamiento del 10% de la longitud de la serie, la varianza del estimador suavizado se reduce al 6.7% de la varianza del espectro muestral.

**CUADRO 1**  
**Tasa de varianza**

Ventana	$I/N$
Rectangular	$2M/N$
Bartlett	$0.667M/N$
Tukey	$0.75M/N$

*Fuente: Jenkins, G. y D. Watts, op cit, p. 252.*

#### La formulación final para el cálculo de la ESDE

Sea  $x_t$ ,  $t=1, 2, \dots, N$ ;  $N \in \mathbb{N}$  una serie temporal formada por los valores de una función real,  $X(t)$ ;  $t \in \mathbb{R}$ , registrados cada  $\Delta$  unidades de tiempo. Sin pérdida de generalidad, supóngase que el espaciamiento entre los datos es igual a uno, esto es,  $\Delta=1$ .

Debido a que  $\bar{C}_{xx}(f)$  es una función par de la frecuencia, sólo es necesario calcularlo para el rango  $0 \leq f < 1/2$ . Sin embargo, para guardar la relación que existe entre el espectro y la varianza o potencia de la serie, es necesario duplicar el valor asociado con cada frecuencia en el rango  $0 \leq f < 1/2$ , con lo cual queda considerada tanto la varianza atribuida al componente de frecuencia  $f_k$ , como la correspondiente a la frecuencia  $-f_k$ ;  $k=1, 2, \dots, M-1$ .<sup>13</sup>

Con lo anterior, (4) se transforma en

$$\bar{C}_{xx}(f) = 2 \sum_{k=-\frac{M+1}{2}}^{\frac{M+1}{2}} w(k) c_{xx}(k) \cos 2\pi f k, \quad 0 \leq f < \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Como la función de autocovarianza es una función par del número de rezagos,  $k$ , sólo se requiere evaluarla para  $k \geq 0$ . Así,

$$\bar{C}_{xx}(f) = 2 \left\{ c_{xx}(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} c_{xx}(k) w(k) \cos 2\pi f k \right\}, \quad 0 \leq f < \frac{1}{2}, \quad (10)$$

donde  $L = (M + 1) / 2$ .

Por último, si se utilizan las autocorrelaciones en lugar de las autocovarianzas para obtener una estimación espectral que sea adimensional, es decir, independiente de las unidades de medida de la serie, entonces

$$\frac{\bar{C}_{xx}(f)}{c_{xx}(0)} = \bar{R}_{xx}(f) = 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} r_{xx}(k) w(k) \cos 2\pi f k \right\}, \quad 0 \leq f < \frac{1}{2}. \quad (11)$$

A  $\bar{R}_{xx}(f)$  se le llama la *estimación suavizada de la densidad espectral (ESDE)*.

En la práctica, se sugiere<sup>14</sup> utilizar un espaciamiento o separación de los puntos de la frecuencia del orden de  $1/F$ , donde  $F$  sea cuando menos 2 o 3 veces  $M$ , pues con éste generalmente se obtienen gráficas bien detalladas de  $\bar{R}_{xx}(f)$ .

<sup>13</sup> Jenkins, G. y D. Watts, *op cit*, p. 259 y Shanmugan, K y A. M. Breipohl, *op cit*, pp. 146-147.

<sup>14</sup> Sugerido por Cooley, J. W., P.A.W. Lewis y P. Welch; citado en Jenkins, W. y D. Watts, *op cit*, p. 261.

## FILTRADO DE CICLOS

Por *filtrado de ciclos* se entiende el proceso de separación de un movimiento cíclico del resto de la información contenida en una serie de tiempo, misma que puede ser, además de la varianza asociada al ruido blanco, aquella explicada por la presencia de otro u otros ciclos de naturaleza distinta al primero. Esta separación se realiza mediante un *filtro* que, en términos generales, es una función que al aplicarla a la serie resalta alguno o algunos de sus componentes (como un ciclo, por ejemplo) a costa de atenuar y, en la medida de lo posible, eliminar la información restante. Esto es, un filtro produce una nueva serie en la que se ha modificado la varianza contenida en la serie original con el objeto de facilitar la comprensión del proceso que le dio origen ya que posibilita el análisis de cada uno de sus elementos significativos por separado.

### Los filtros ideales básicos

El efecto que produce un filtro sobre una serie, es decir, sus características, es descrito en el dominio de la frecuencia por su *función de respuesta de frecuencia*, la cual indica qué parte de la información de la serie de tiempo es conservada después de aplicarle el filtro. Usualmente, se busca que ésta sea lo más parecida posible a alguna de las correspondientes a los tres tipos básicos de filtros ideales: a) el *filtro ideal pasa bajos*, que permite conservar toda la información contenida en el rango de frecuencias  $[0, f_1]$  (también se dice que  $f_1$  es su *frecuencia de corte*), mientras que rechaza el resto; b) el *filtro ideal pasa altos*, que al contrario del pasa bajos retiene la información contenida en el rango  $[f_1, 0.5]$  y rechaza la correspondiente a las frecuencias menores a  $f_1$ ; y c) el *filtro ideal pasa banda*, que sólo rescata la información asociada al rango de frecuencias  $[f_1, f_2]$ . Matemáticamente, 'retener' o 'rescatar' información equivale a multiplicarla por uno, mientras que 'rechazarla' equivale a multiplicarla por cero. Finalmente, a la magnitud del intervalo de frecuencias que es retenido por el filtro se le llama el *ancho de banda*. Así, por ejemplo, el ancho de banda del filtro pasa banda es igual a  $f_2 - f_1$ .

### Los filtros lineales

No obstante lo antes descrito, en la práctica no es posible construir filtros con bandas de perfecta aceptación o rechazo, pues para ello sería necesario tener un número infinito de datos.<sup>15</sup> Esta es la razón por la cual se les llama ideales; sin embargo, pueden lograrse muy buenas aproximaciones a su función de respuesta de frecuencia, aunque para ello generalmente se requiere un conjunto muy grande de ponderaciones que muchas veces supera el tamaño de la serie misma,<sup>16</sup> razón por la cual debe valorarse la importancia de la precisión en función de la cantidad de datos que sera

<sup>15</sup> *Ibidem*, p.135.

<sup>16</sup> Véanse por ejemplo, los filtros propuestos en Otnes, R. K. y L. Enochson, *op cit*, capítulo 4; Koopmans, L. H. (1974) capítulo 6; y Shumway, R. H.(1988), capítulo 2; Kamen, E. (1996), capítulo 9.

necesario invertir para lograrla; esto significa, por ejemplo, que para analizar una serie del tipo de las económicas, que en muchos casos no superan los cien datos, no será conveniente recurrir a un filtro que, pese a tener una respuesta de frecuencia prácticamente igual a la de su contraparte ideal, requiera de 240 datos para calcular un solo dato suavizado. Por consiguiente, cuando se trata de analizar series relativamente cortas, es necesario optar por filtros que no reporten un costo informativo muy alto, tales como los llamados *filtros lineales*, de los cuales las medias móviles y las primeras diferencias son casos particulares.

El término 'filtro lineal' es el nombre corto de las *transformaciones lineales invariantes en el tiempo*. En términos generales<sup>17</sup>, un filtro lineal  $L$  transforma una serie de tiempo  $x(t)$  en otra serie  $y(t)$ , es decir,

$$y(t)=L(x(t)). \quad (12)$$

Por ser transformaciones lineales invariantes en el tiempo, cumplen las siguientes tres propiedades básicas: i) preservación de escala, ii) superposición, y iii) invarianza en el tiempo, las cuales se expresan simbólicamente como

- i)  $L(\alpha x(t)) = \alpha L(x(t)), \quad \forall \alpha \in R$
- ii)  $L(x(t) + y(t)) = L(x(t)) + L(y(t));$
- iii) Si  $L(x(t)) = y(t)$ , entonces  $L(x(t+h)) = y(t+h), \forall h \in R$

Intuitivamente, la última propiedad establece que no importa qué parte de la serie de tiempo sea pasada a través del filtro, ya que éste siempre responderá de la misma manera, es decir, su comportamiento 'no cambia con el tiempo'. Las dos primeras propiedades, al ser combinadas, expresan la *linealidad* de  $L$ :

$$\text{iv) } L(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha L(x(t)) + \beta L(y(t)), \quad \forall \alpha, \beta \in R \quad (13)$$

En términos prácticos, un filtro lineal utiliza un conjunto conocido de coeficientes  $a(t)$ ,  $t=1, 2, \dots$ , generalmente reales (las ponderaciones del filtro) para suavizar una serie estacionaria  $x(t)$ , generando una nueva serie de la forma

---

<sup>17</sup> Esta sección se construyó básicamente a partir de los capítulos 4 y 6 de Koopmans, L. H., 1974 y de Bloomfield, P (1976), capítulo 6.

$$y(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s x(t-s). \quad (14)$$

En el dominio de la frecuencia, el filtro se expresa como la transformada de Fourier del conjunto de ponderaciones, misma que recibe el nombre de *función de transferencia* o *función de respuesta de frecuencia* del filtro,  $A(f)$ , esto es

$$A(f) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t e^{-j2\pi ft}. \quad (15)$$

La forma más adecuada para ver el efecto que tiene un filtro sobre una serie consiste en expresar la función de transferencia en su forma polar

$$A(f) = |A(f)| e^{j\Phi(f)}. \quad (16)$$

En la expresión anterior,  $|A(f)|$  es la función de amplitud del filtro, misma que muestra cómo la potencia o varianza de una serie, correspondiente a diferentes frecuencias, es modificada por el filtro, es decir, si es preservada, reducida, amplificada o eliminada. Por su parte,  $\phi(f)$  representa el cambio de fase que sufren aquellos mismos componentes al ser filtrados, esto es, indica por cuántas unidades de tiempo la serie filtrada se rezaga con respecto a la serie original. Usualmente, se grafica el cuadrado del valor absoluto de la función de transferencia,  $|A(f)|^2$ , que es la aproximación a lo mostrado en la figura 1 para los filtros ideales.

### El parámetro de desplazamiento en el tiempo

En el dominio del tiempo, se tiene una definición equivalente al cambio de fase de la función de transferencia. Mientras  $\phi(f)$  mide el desplazamiento angular de la serie filtrada relativa a la serie original en cada frecuencia  $f$ , el parámetro  $\tau(t)$ ,

$$\tau(t) = \phi(f)/f, \quad f \neq 0, \quad (17)$$

llamado la función de cambio en el tiempo, mide el cambio de fase en unidades de tiempo, esto es, indica la magnitud del desplazamiento del origen de cada componente filtrado, relativo a la serie inicial.<sup>18</sup>

<sup>18</sup> Koopmans, L. H., *op cit.*, pp. 95 y 96.

### El filtro de las medias móviles de orden R

Las medias móviles son de gran importancia en el presente trabajo debido a sus grandes cualidades: es un filtro muy conocido y sencillo de aplicar que reporta un costo informativo relativamente bajo en términos de los datos que se pierden al inicio y al final de la serie con su uso; el orden de las medias permite saber de inmediato cuál es la frecuencia de corte; posee además una expresión matemática general para la respuesta de frecuencia relativamente fácil de evaluar, que indica la proporción de la información que es retenida al aplicarlo, y, además, tiene una fase lineal a partir de la cual puede saberse cuánto debe recorrerse el origen de la serie filtrada, respecto a la original, y que solo depende del orden de la media aplicada.

Así, las ponderaciones de este filtro son  $a(0)=a(1)=\dots=a(R-1)=1/R$  y  $a(t)=0$  para toda  $t \geq R$ , donde R es el orden de la media. Sustituyendo en la expresión (21) se tiene

$$y(t) = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} x(t-k). \quad (18)$$

Su función de transferencia es<sup>19</sup>

$$A(f) = e^{jf(R-1)/2} \frac{\text{sen}(fR/2)}{R \text{sen}(f/2)}, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}, \quad (19)$$

por lo que

$$|A(f)|^2 = \left| \frac{\text{sen}(fR/2)}{R \text{sen}(f/2)} \right|^2. \quad (20)$$

Para valores de f tales que  $\text{sen}(fR/2) \geq 0$ , el cambio de fase es  $\phi(f) = -((R-1)/2)f$ , por lo que los componentes de frecuencia correspondientes son desplazados en el tiempo una cantidad  $\tau(f) = -(R-1)/2$  que solo depende del orden de las medias.

---

<sup>19</sup>*Ibidem*, pp. 171 y 172.

### Filtros lineales simétricos

Un tipo de filtros que inducen un cambio de fase prácticamente nulo, es el constituido por los filtros lineales simétricos, llamados así porque su función de transferencia es par (simétrica).<sup>20</sup>

A partir del filtro de las medias móviles se puede obtener otro filtro virtualmente sin cambio de fase, para cualquier valor de R, usando una *media móvil simétrica*.<sup>21</sup> Así, sea R un entero impar y sea

$$y(t) = \frac{1}{R} \sum_{j=-\frac{R-1}{2}}^{\frac{R-1}{2}} x(k-j).$$

La función de transferencia de este filtro es

$$A(f) = \frac{\text{sen}(fR/2)}{R\text{sen}(f/2)}, \quad -\pi < f \leq \pi. \quad (21)$$

Entonces, el promedio simétrico tiene la misma función de amplitud que el promedio no simétrico, ecuación (20), pero su función de fase es ahora  $\vartheta(f) = 0$  cuando  $\text{sen}(fR/2) \geq 0$  y  $\vartheta(f) = \pm\pi$  en otro caso.

Tanto las medias móviles simétricas como las no simétricas, son filtros pasa bajos con frecuencia de corte igual al inverso del orden de la media, es decir,  $1/R$ . Como ilustración del efecto de este filtro considérese que  $R = 3$ , entonces

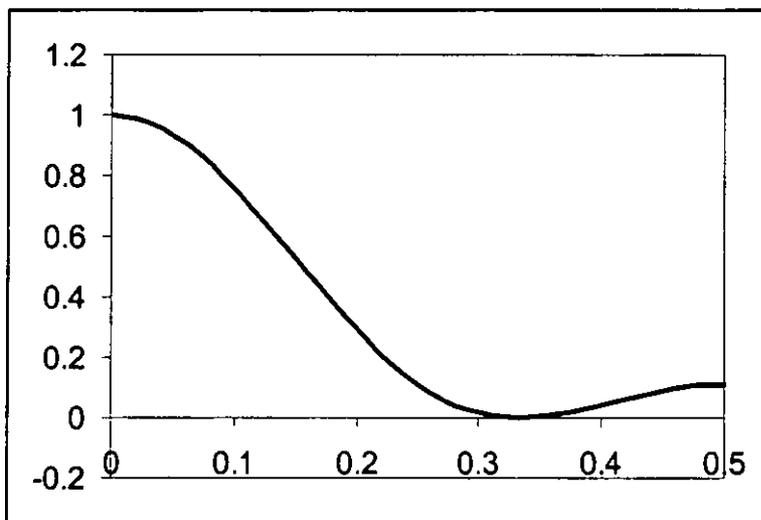
$$|A(f)|^2 = \left| \frac{\text{sen}(3f/2)}{3\text{sen}(f/2)} \right|^2.$$

Como se observa en la figura 1 las medias móviles de orden tres, MM(3), simétricas o no, constituyen un filtro pasa bajos, pues mientras que retiene la información correspondiente a frecuencias menores o iguales a 0.3333 (el inverso del orden de la media), minimiza el resto. Sin embargo, de acuerdo con la gráfica, este filtro provocará un 'achataamiento' en la varianza de los ciclos proporcional al valor de la respuesta de frecuencia en cada punto del intervalo (0, 0.333), debido a que éste es distinto de uno. Asimismo, la serie suavizada contendrá cierto ruido asociado al hecho de que las frecuencias restantes no son eliminadas sino minimizadas, pues la respuesta de frecuencia es distinta de cero en esos valores como ocurriría en el caso ideal.

<sup>20</sup> Como se verá más adelante, Baxter, M. y R. G. King (1999) utilizan también los promedios móviles simétricos en la construcción de sus filtros pasa banda.

<sup>21</sup> *Ibidem*, pp.171-172.

**FIGURA 1**  
**Respuesta de frecuencia del filtro de las MM(3)**



*Fuente:* Koopmans, L. H., *op cit*, p. 172.

Si a la serie original se le aplican las ponderaciones de las medias móviles simétricas, el origen de ambas series, inicial y filtrada, será el mismo 0, equivalentemente, el cambio de fase entre ambos será igual a cero.

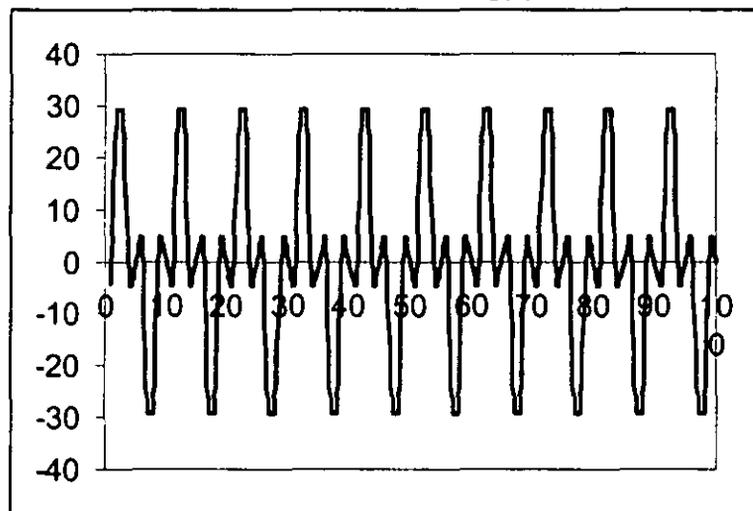
### El algoritmo para la detección y filtrado de ciclos en series de tiempo

Para ilustrar el procedimiento práctico que a continuación se sugiere para la detección de ciclos en una serie temporal, es conveniente tomar una serie tal que se conozca de antemano qué tipos de ciclos contiene, lo que además es una buena manera de mostrar la eficacia de la técnica. De acuerdo con lo anterior, considérese la serie de 100 datos que se obtiene al evaluar la función que se muestra en la figura 2 y cuya expresión matemática es

$$g(x) = 20\text{sen}10x + 17\text{sen}70x$$

(22)

**FIGURA 2**  
Realización de tamaño 100 de la función  $g(x)=20\text{sen}10x+17\text{sen}70x$



*Fuente:* Elaboración propia.

El primer componente de la función es un senoidal que completa diez periodos en el intervalo considerado (cien datos). Por consiguiente, la frecuencia asociada a este componente es  $f_1=0.1$  ciclos por unidad de tiempo (recuérdese que la frecuencia es el inverso del periodo). Análogamente, el segundo componente es un senoidal de frecuencia  $f_2=0.3$ , es decir, en cien unidades de tiempo completa treinta periodos.

El **primer paso** del algoritmo consiste en la observación de los datos para determinar si presentan o no alguna tendencia obvia y / o valores extremos. Sin embargo, por cómo fue construida, la serie en estudio es estacionaria y sin datos demasiado lejanos.

Si, como se sugiere al final de la sección sobre la deducción de la ESDE, se utilizan espaciamientos de los puntos de la frecuencia del orden de  $1/F$ , con  $F$  al menos 2 o 3 veces  $L$ , la fórmula final para el cálculo de la ESDE es

$$\bar{R}_{xx}(l) = 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} r_{xx}(k) w(k) \cos \frac{\pi k l}{F} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots, F. \quad (23)$$

donde

$l$ : índice o contador de los puntos de la ESDE

$r_{xx}(k)$ : función de autocorrelación de la serie estacionaria

$w(k)$ : ventana de intervalo

$F$ : número de puntos de la gráfica de la ESDE

$k$ : número de rezagos

La ventana de intervalo puede ser cualquiera que cumpla las condiciones establecidas en (13). Por ejemplo, A. Ambardar<sup>22</sup> presenta una lista de quince ventanas que cumplen tales condiciones. En este ejercicio se utilizará la ventana de Tukey.

El **segundo paso** comprende el cálculo de la ESDE (utilizando la ventana señalada) para lo cual se deben determinar primero los valores de  $F$  y de  $L$ . Si bien el valor de  $F$  no es difícil de escoger, pues es el número de puntos que se deseen calcular de la ESDE, para determinar el valor adecuado de  $L$  no hay un criterio específico; no obstante, con  $L = 9$  o  $L = 12$  suelen obtenerse buenos resultados.

Si con el valor inicial de  $L$  la gráfica resulta llana en el sentido de que en ella no sobresale ningún pico, entonces debe rehacerse el cálculo considerando una  $L$  un tanto mayor; dos o tres unidades más, por ejemplo. Como puede notarse, el criterio para determinar  $L$  es bastante laxo; además, tampoco hay manera de saber con certeza cuándo hay que detener el proceso de ajuste de la  $L$ . Así que la decisión sobre cuál es la que proporciona la mejor estimación espectral queda, en gran parte, a juicio del investigador con ayuda de su conocimiento previo sobre el fenómeno en estudio.

---

<sup>22</sup> Ambardar, A. (1995), p. 645.

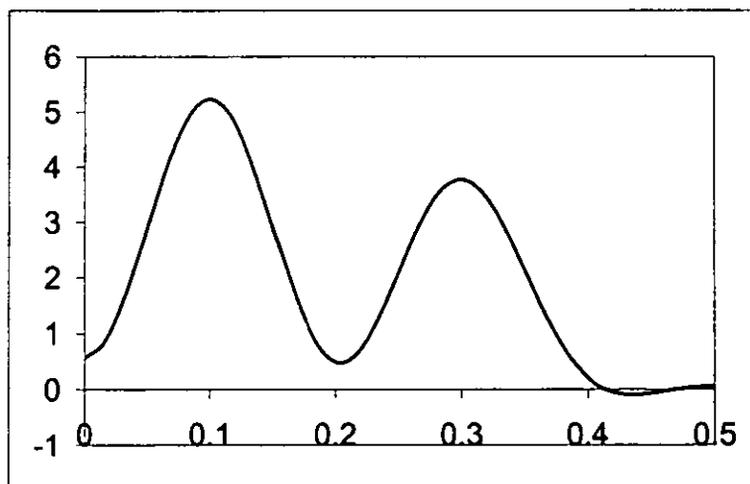
Entonces, sean  $F = 30$  y  $L = 9$  (es decir, implícitamente, la serie original se divide en subseries con nueve datos cada una). Así, la ESDE queda expresada como

$$\bar{R}_{xx}(l) = 2 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^8 r_{xx}(k) \left( 1 - \cos \frac{\pi k}{9} \right) \cos \frac{\pi k l}{F} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots, 30.$$

En la figura 3 se presenta su gráfica, a partir de la cual se obtiene información útil sobre los ciclos presentes en esa serie. Los dos picos que sobresalen en la ESDE corresponden a las frecuencias  $f_1=0.1$  y  $f_2=0.3$  ciclos por unidad de tiempo. Al tomar sus inversos, se obtienen los periodos promedio de los ciclos detectados. De esta manera, a la frecuencia  $f_1$  le corresponde un periodo de diez unidades de tiempo, y a  $f_2$  un periodo de tres unidades de tiempo.

**FIGURA 3**

**ESDE de la serie de la figura 1 usando la ventana de Tukey con  $M=9$**



*Fuente:* Elaboración propia.

El tercer paso se trata de la interpretación de la gráfica obtenida en el paso anterior. De manera general, se asume que si en la gráfica de la ESDE sobresale uno o más picos, quiere decir que la varianza de la serie se debe a la presencia de componentes cíclicos con frecuencias aproximadas a aquellas que presentan el pico. Por el contrario, el que la gráfica de la ESDE resulte llana usualmente es interpretado como indicador de la ausencia de ciclos en la serie analizada.<sup>23</sup> No obstante, debe tenerse en cuenta que como la ESDE se basa en el llamado análisis armónico o de

<sup>23</sup> Puede ocurrir, sin embargo, que si la  $M$  utilizada es muy pequeña, una gráfica llana podría indicar, más que la ausencia de ciclos en la serie, la necesidad de incrementar el valor de  $M$ . Análogamente, suele suceder que cuando  $M$  es demasiado grande, la ESDE presente más picos que los atribuibles a fluctuaciones cíclicas de la serie.

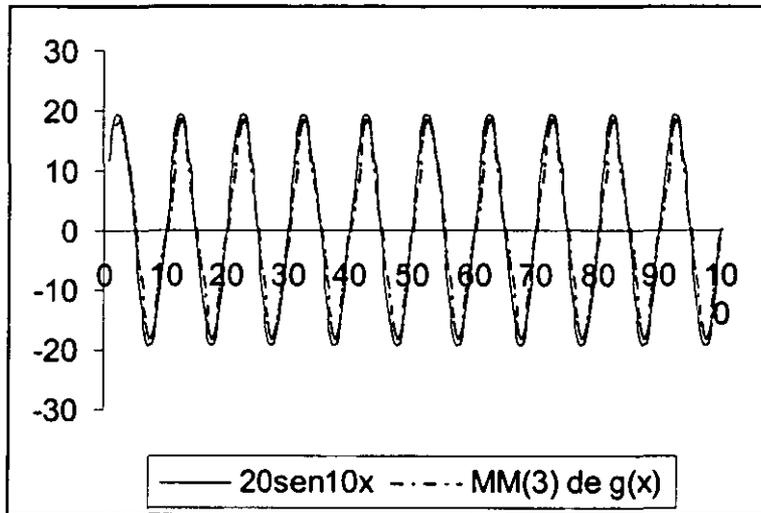
Fourier, implícitamente se supone que las series con ella analizadas contienen ciclos de todas las frecuencias en el intervalo  $[0, 0.5]$ .

Asimismo, como la ESDE es una aproximación al valor de la varianza en cada frecuencia, los máximos deberán compararse con la varianza del ruido blanco, que es función constante igual a uno, para decidir si son significativos o no de acuerdo con la regla siguiente: si un máximo de la ESDE es mayor que uno, entonces puede ser considerado indicador de la presencia de un ciclo en la serie (salvo que por alguna razón se concluya que se trata de un ciclo espurio); por otro lado, cualquier valor de la ESDE menor que uno indica la clara ausencia del ciclo correspondiente. De acuerdo con lo anterior, se concluye que la dispersión de la serie original se debe básicamente a dos componentes cíclicos con periodos aproximados de diez y tres unidades de tiempo, respectivamente.

Una vez que han sido detectados los ciclos, se procede a separarlos. Para ello, la forma más simple consiste en aislar primero al de frecuencia más baja, empleando un filtro pasa bajos, y después restar la serie resultante de la serie original. Si la ESDE detectó solo dos ciclos, esta nueva serie contendrá básicamente al segundo ciclo y algún componente de ruido. Si fuesen más de dos ciclos, deberá procederse de manera iterativa hasta que solo quede uno y ruido.

El **cuarto paso** consiste entonces en aislar el ciclo de menor frecuencia, para lo cual se emplea una media móvil simétrica de orden tres, es decir, un filtro pasa bajos con frecuencia de corte igual a  $1/3$  que básicamente dejará pasar los ciclos que tengan un periodo mayor de tres años, o sea, al ciclo buscado. La figura 4 muestra las series filtrada y teórica del primer ciclo ( $f=0.1$ ), y la figura 5 la ESDE de la serie filtrada.

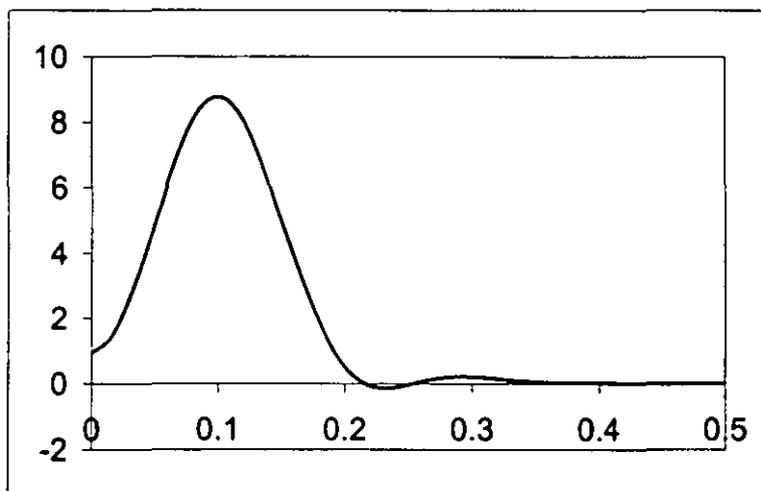
**FIGURA 4**  
Series filtrada y teórica del primer ciclo ( $f_1=0.1$ )



*Fuente:* Elaboraciones propias.

Como puede notarse en la figura 4, ambas series son prácticamente indistinguibles, esto es, salvo los dos datos que se pierden al aplicar la  $\text{MM}(3)$ , se aisló satisfactoriamente el primer ciclo, como puede verse, además, en su ESDE.

**FIGURA 5**  
ESDE de las  $\text{MM}(3)$  de  $g(x)$

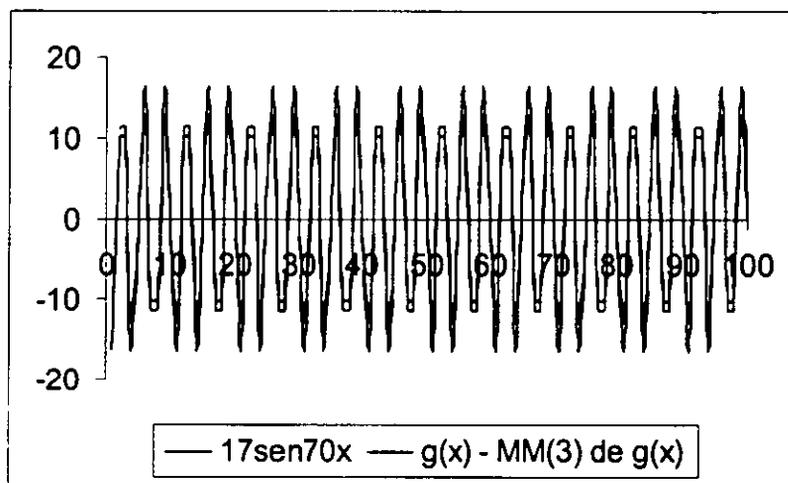


*Fuente:* Elaboración propia.

El **quinto paso** consiste en recuperar ahora el ciclo restante obteniendo la diferencia entre la serie original y la estimación del primero. Procediendo de esta manera, se obtuvo una muy buena estimación del ciclo de mayor frecuencia, la cual se muestra, junto con la serie teórica, en la figura 6, mientras que la figura 7 constituye la gráfica de la ESDE de la estimación, misma que confirma que el aislamiento del segundo ciclo también fue satisfactorio.

**FIGURA 6**

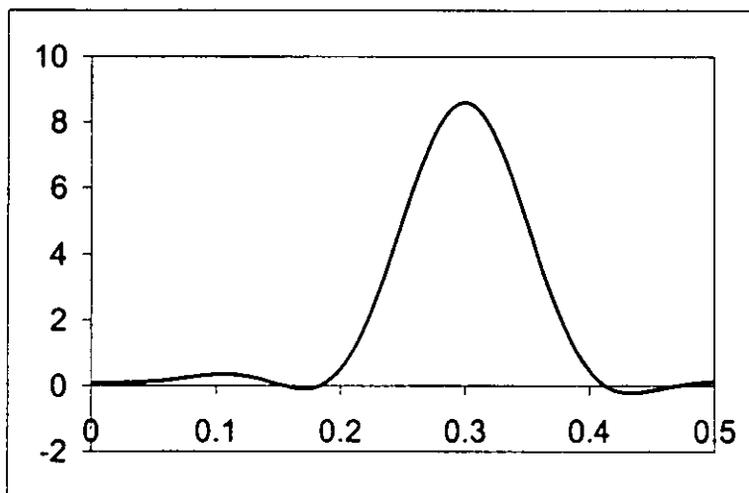
**Serie teórica y la estimación obtenida con la diferencia  $g(x) - MM(3)$  de  $g(x)$**



*Fuente:* Elaboraciones propias.

**FIGURA 7**

**ESDE de la estimación obtenida con la diferencia  $g(x) - MM(3)$  de  $g(x)$**

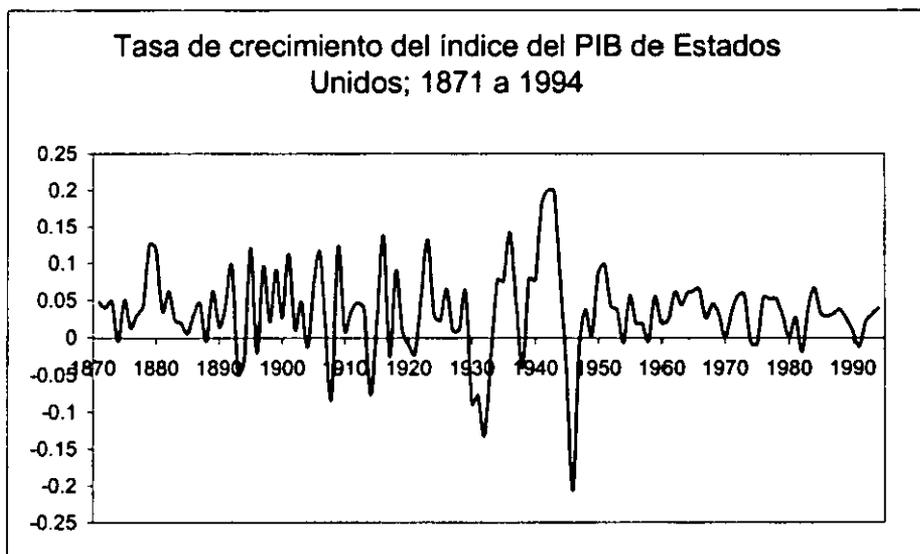


*Fuente:* Elaboración propia.

### Ejemplificación del proceso de detección y filtrado

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el procedimiento descrito de detección y filtrado de ciclos en la serie de la tasa de crecimiento del índice del PIB de Estados Unidos. Como puede verse en la figura 8, la serie no parece presentar ninguna tendencia obvia, lo cual es una primera indicación de su estacionariedad, misma que se ve confirmada al aplicarle la prueba de raíz unitaria, tomando en cuenta los valores corregidos de Engel-Granger, con lo que se concluyó que la serie es estacionaria con un nivel de confianza del 99%.<sup>24</sup> Asimismo, en el apéndice se concluye que el valor de la tasa de crecimiento del índice del PIB en 1946 es extremo, por lo que se procedió a suavizarlo.<sup>25</sup>

FIGURA 8



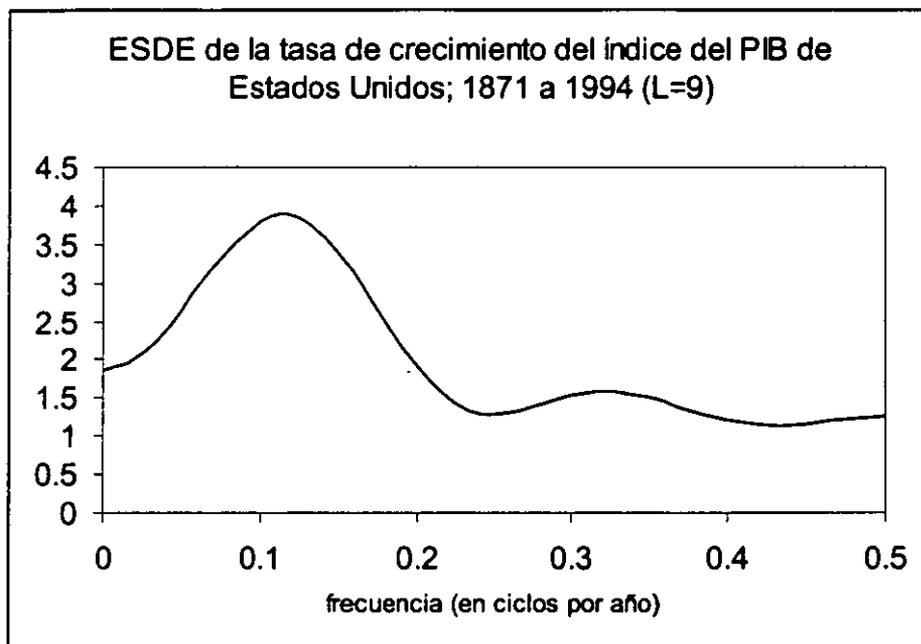
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison (1998), pp. 214 a 217.

De acuerdo con la gráfica de la ESDE (figura 9), en cuyo cálculo se empleó una ventana de Tukey de nueve puntos, puede afirmarse que la varianza y, por tanto, la evolución de la serie estudiada, se explica básicamente por la interacción de dos ciclos: uno con duración promedio de 8.6 años ( $f_1 = 0.116$ ), y el otro con duración promedio de 3.33 años ( $f_2 = 0.316$ ).

<sup>24</sup> Véase la sección B del apéndice.

<sup>25</sup> Debido a que la ESDE es una estimación de la varianza resulta, como ésta, sensible a los valores extremos, por lo que es importante detectarlos y suavizarlos antes de calcular la ESDE.

FIGURA 9

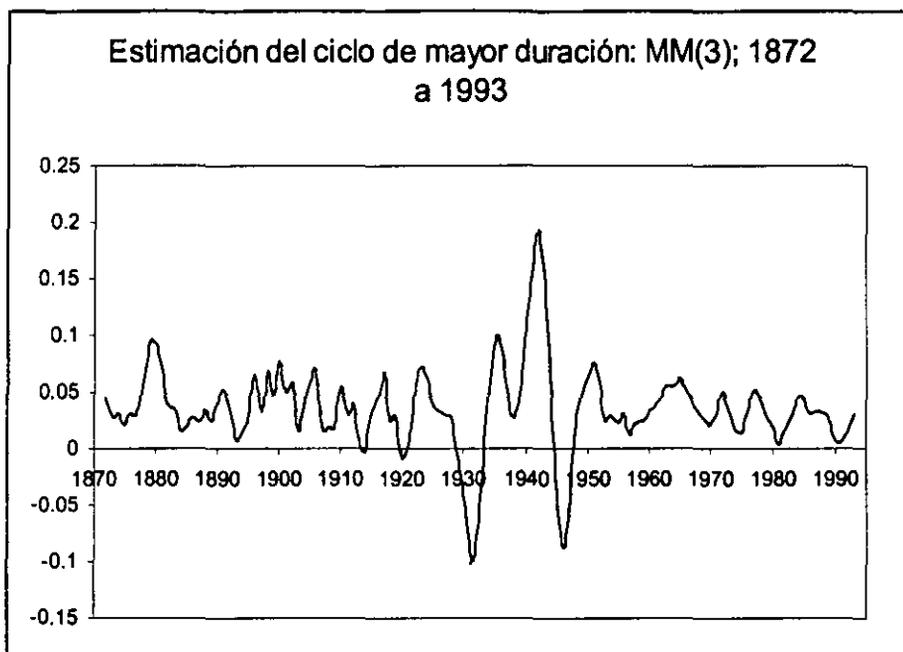


*Fuente:* Elaboración propia.

El ciclo de menor frecuencia (mayor duración) se separó quitando de la serie original el ciclo de mayor frecuencia (menor duración) mediante la aplicación del filtro de medias móviles simétricas de orden tres, MM(3) (figura 10). Por su parte, el ciclo menor fue estimado como la diferencia entre la serie original y la serie correspondiente al ciclo de mayor duración (figura 12). Esto es, en la medida de lo posible, se atenuó la varianza de un ciclo para resaltar el otro.

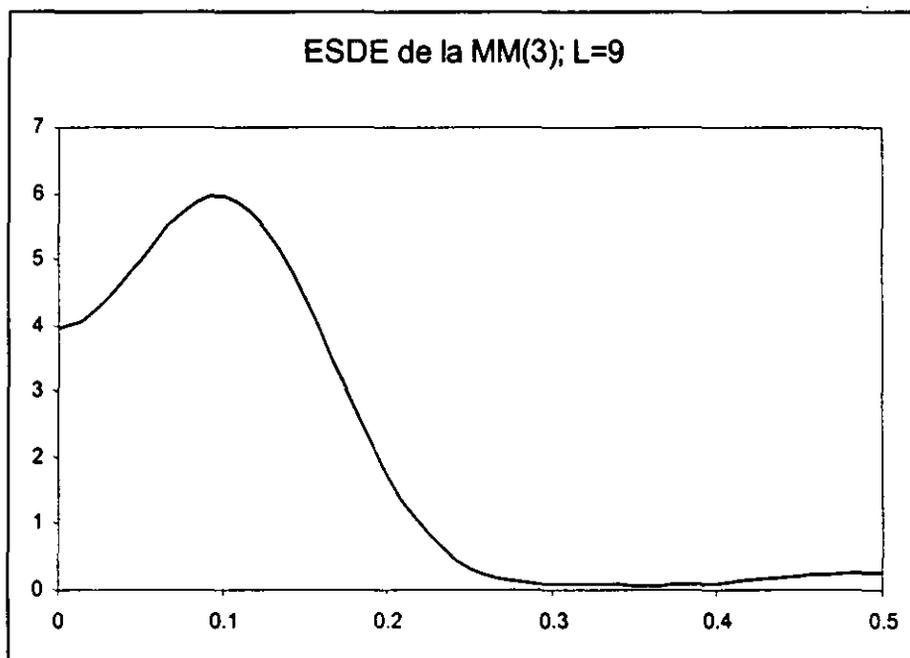
Como comprobación de la eficacia del filtrado, se muestran las gráficas de la ESDE de cada ciclo. En la figura 11, correspondiente al ciclo más largo, solo se aprecia un máximo local en la frecuencia esperada, es decir, su aislamiento fue satisfactorio. En la figura 13 se ve un pico menos marcado, que indica una duración promedio de 2.68 años ( $f = 0.372$ ). Pese a la pequeña discrepancia en la duración del ciclo más pequeño, puede concluirse que el proceso de filtrado fue satisfactorio.

FIGURA 10



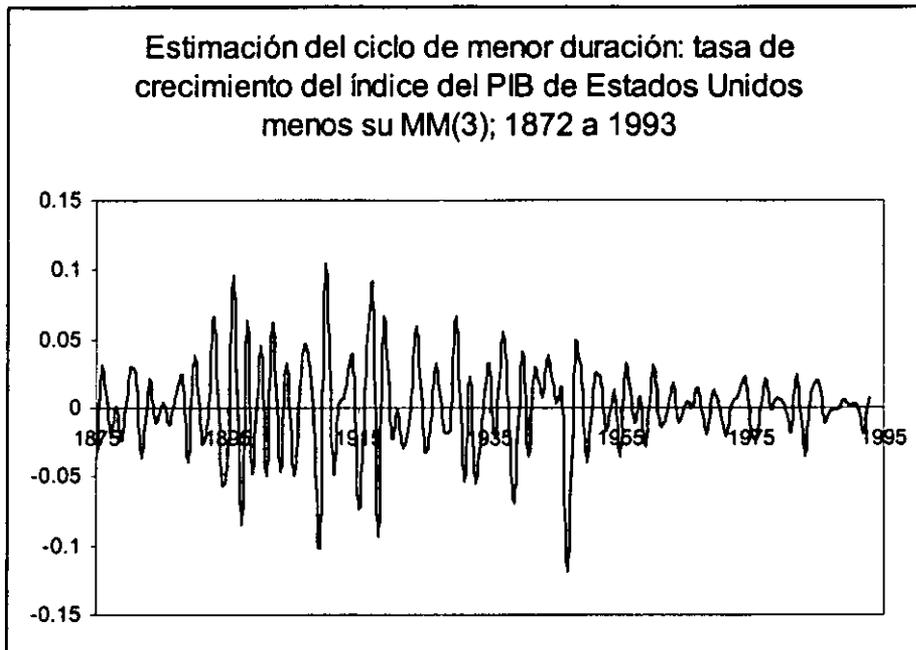
Fuente: Elaboración propia.

FIGURA 11



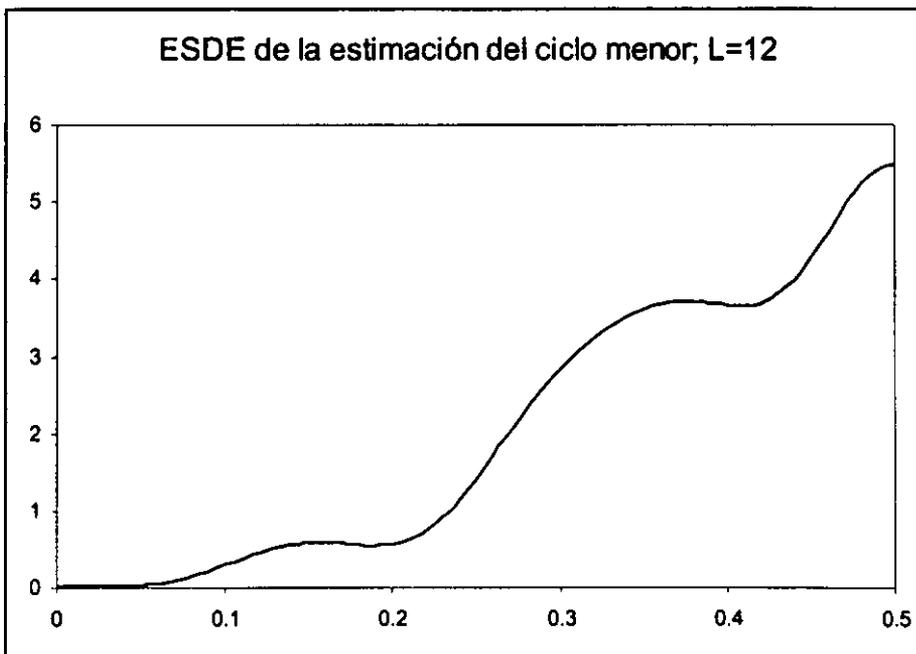
Fuente: Elaboración propia.

FIGURA 12



Fuente: Elaboración propia.

FIGURA 13



Fuente: Elaboración propia.

Como un paso adicional al algoritmo propuesto, en el cuadro 2 se presentan las fechas aproximadas de las crisis del ciclo de mayor período y su duración en años según los mínimos detectados en la serie filtrada con este método.<sup>26</sup>

## CUADRO 2

### Fechas de las crisis del ciclo de mayor período y su duración en años (mínimo a mínimo)

Año de crisis	Duración del período cíclico (en años)	Año de crisis	Duración del período cíclico (en años)
1875	---	1931	11
1884	9	1938	7
1893	9	1946	8
1903	10	1957	11
1908	5	1970	13
1914	6	1974	4
1920	6	1981	7
		1991	10

Fuente: Elaboración propia de acuerdo con los datos de la serie de la figura 10.

Finalmente, como muestra de la utilidad de la ESDE en el análisis de la evolución del capitalismo, en el cuadro siguiente se presentan los ciclos encontrados en las series de la tasa de crecimiento del índice del PIB de veintiocho países capitalistas siguiendo el procedimiento antes propuesto. La discusión de los resultados obtenidos se presenta en una sección posterior de este trabajo.

<sup>26</sup> En la sección titulada *Comentarios finales y conclusiones* se discuten las diferencias entre estas fechas y las proporcionadas por el NBER para los 'ciclos de los negocios'.

**CUADRO 3**  
**Ciclos encontrados en las series de la tasa de crecimiento del índice del PIB de 28 países capitalistas**

País	Frecuencias (en ciclos por año)	Periodos (en años)
Alemania	0.083 y 0.333	12.05 y 3
Argentina	0.055, 0.238 y 0.42	18.18, 3.53 y 2.38
Australia	0.072 y 0.025	13.88 y 4
Austria	0.08 y 0.416	12 y 2.4
Bélgica	0.066 y 0.283	15.15 y 3.53
Brasil	0.416	2.4
Canadá	0.077, 0.3 y 0.427	12.98, 3.333 y 2.34
Colombia	0.116 y 0.333	8.6 y 3
Corea del Sur	0.083, 0.238 y 0.394	12.04, 4.2 y 2.53
Chile	0.183	5.45
Dinamarca	0.08 y 0.28	12 y 3.5
España	0.188 y 0.405	5.32 y 2.47
Estados Unidos	0.116 y 0.316	8.6 y 3.16
Finlandia	0.1 y 0.3	10 y 3.33
Francia	0.08 y 0.28	12 y 3.5
India	0.15 y 0.411	6.66 y 2.43
Indonesia	---	---
Italia	0.111 y 0.433	9.09 y 2.3
Japón	0.238 y 0.372	4.2 y 2.66
México	0.111 y 0.377	9 y 2.97
Noruega	0.08 y 0.3	12 y 3.33
Nueva Zelanda	0.25	4
Países Bajos	---	---
Perú	0.15	6.66
Reino Unido	0.116 y 0.416	8.6 y 2.4
Suecia	0.266	3.8
Suiza	0.111 y 0.322	9 y 3.1
Venezuela	0.066 y 0.4	15.15 y 2.5

Fuente: Elaboración propia.

## **REVISIÓN DE ALGUNOS TRABAJOS CONTEMPORÁNEOS QUE UTILIZAN EL ANÁLISIS ESPECTRAL**

En esta sección se presentan las traducciones libres resumidas de seis artículos que, en menor o mayor medida, tratan sobre el uso del análisis espectral en el estudio de ciclos económicos. En algunos, incluso, se desarrollan procedimientos en el dominio de la frecuencia para su detección y / o filtrado.

Con cada resumen se presenta una discusión, breve pero puntual, sobre su contenido en la forma de notas al final del documento (que no deben confundirse con las notas al pie de página, que forman parte de cada artículo). Algunas de ellas son advertencias conocidas sobre los procedimientos empleados, y el resto observaciones críticas sobre resultados o afirmaciones controversiales.

Al final de la sección se hará una recapitulación de las principales cualidades y fallas de las herramientas espectrales propuestas en estos artículos, con el fin de reforzar las justificaciones sobre la validez y conveniencia del procedimiento de detección y filtrado de ciclos económicos desarrollado en las secciones anteriores, mismo que considera algunas de las aportaciones de estos trabajos.

## Entre tendencias y ciclos comerciales: Las ondas largas de Kondratieff<sup>27</sup>

En este artículo se introduce el concepto de *distorsión de la perspectiva*, con base en el cual se desarrolla un método de estandarización de series de tiempo mediante la eliminación de sus tendencias. Se diseña también un análisis espectral, mismo que se resume a continuación.

### Análisis espectral

Al eliminar la 'tendencia completa' de una serie se obtiene un residual que puede ser interpretado como la suma de todos los patrones cíclicos, fluctuaciones y movimientos erráticos de la serie que no pertenecen al dominio de la tendencia. Como la 'tendencia completa' es uniforme para cada serie sin importar su longitud, el residual puede ser considerado como una serie 'estandarizada'.

Teniendo a disposición series estandarizadas<sup>1</sup>, puede probarse si contienen o no trazos de una onda de Kondratieff. Todas ellas cumplen con la condición de estacionariedad en el sentido amplio (Reijnders, 1990, p. 222). Consecuentemente, se satisfacen los requerimientos mínimos para la aplicación del análisis espectral.

El espectro de potencia es aproximado por una versión suavizada del 'periodograma'. El suavizamiento se obtiene aplicando una ventana a los datos de la serie y calculando su transformada de Fourier, después de haber rellenado ambos lados de la serie con ceros (Bloomfield, 1976, p. 164). Subsecuentemente, se aplica una 'ventana espectral' para obtener el grado de suavidad requerido. Este método evita que se pierdan datos.<sup>ii</sup>

El espectro de potencia es esencialmente una descomposición de la varianza total de una serie en las contribuciones de frecuencias individuales. Un pico en el espectro a una cierta frecuencia indica que esta frecuencia particular tiene una 'potencia' más alta, o mayor valor explicatorio, que las frecuencias a su alrededor. De esto, parece deducirse que es suficiente establecer la existencia de las ondas de Kondratieff demostrando que hay un pico en alguna de las frecuencias del dominio de Kondratieff. Esto es inadecuado e insuficiente, ya que también es necesario evaluar la importancia relativa de un pico particular comparando su altitud con las altitudes de otros picos del espectro. Por lo tanto, se requiere que un pico en el dominio de Kondratieff no sea meramente una pequeña ondulación, sino que éste sea prominente en el sentido de ser uno de los tres picos más altos en el espectro.

---

<sup>27</sup> Reijnders, Jan P. G., "Between Trends and Trade Cycles: Kondratieff Long Waves Revisited", en Kleinknecht *et al* (1992), pp. 15-44.

Un examen de los resultados muestra que la onda larga de Kondratieff es una característica prominente en la mayoría de los espectros, particularmente en los correspondientes a indicadores de la actividad agregada, tales como el PIB, el PNB y el empleo. Similarmente, se ve que el ciclo de Kuznetz probablemente sobrevivirá como un miembro de la familia de las ondas largas. Los resultados indican que la hipótesis de las ondas largas es digna de ser considerada.

En las presentes circunstancias, la hipótesis de Kondratieff sobrevivió a la prueba del análisis espectral. Esto concuerda en un sentido general con los resultados obtenidos mediante algunas otras aplicaciones del análisis espectral en este campo (Haustein y Neuwirth, 1982; Morsink, 1987). Sin embargo, son diametralmente opuestos a los resultados de la prueba espectral analítica de van Ewijk (van Ewijk, 1982), quien concluye que hay una débil pero estable indicación de las ondas de Kondratieff en series de precios pero que no puede encontrarse ninguna señal en las series de volumen. En el análisis final, los desacuerdos con van Ewijk en cuanto a la validez de la hipótesis de Kondratieff recaen en el contraste en el método de eliminación de la tendencia; sus resultados deben ser rechazados debido a que su transformación de tasa de crecimiento obviamente elimina la onda larga antes de comenzar a buscarla (ver Reijnders, 1990, pp. 236-9 y 246-52).<sup>iii</sup>

El análisis espectral de las series estandarizadas indica que la potencia explicativa del dominio de Kondratieff es relativamente alta, especialmente con respecto a los indicadores de actividad agregada. Por lo tanto, la onda de Kondratieff no puede ser vista como una ilusión. A pesar de las conclusiones positivas con respecto a la hipótesis de Kondratieff, deben hacerse algunas reservas, entre ellas:

. Estos resultados solo aplican a una única entidad nacional (Reino Unido), por lo que será necesario repetir este análisis con un número mayor de países, con la intención de averiguar si el caso británico no es más que una excepción. Esto será necesario para demostrar que los patrones de interacción entre naciones son tales que el ciclo de Kondratieff es propagado internacionalmente.

---

<sup>i</sup> Aunque no se dice de manera puntual, para el análisis se emplea una 'miscelánea de series' de Reino Unido, durante el periodo 1700-1985: índice de precios al consumidor, producción industrial (excluyendo la construcción); importaciones, exportaciones y población.

<sup>ii</sup> Este procedimiento es similar al empleado en la tesis, pues usar una ventana de datos (es decir, aplicar una ventana a los datos de la serie) es equivalente a dividir la serie en segmentos, calcular el periodograma de cada uno y, finalmente, promediarlos. De esta manera se obtiene una aproximación del espectro de potencia (ver, por ejemplo: Bloomfield, 1976, pp. 162 y 164).

<sup>iii</sup> Cabe señalar que, como se expone en la síntesis de dicho trabajo de van Ewijk, no se utilizaron propiamente tasas de crecimiento, sino las diferencias de los logaritmos naturales. Además, éste no fue el único procedimiento de eliminación de tendencia considerado, también se usó el filtro de Hodrick-Prescott, y sus conclusiones se sustentan en los resultados obtenidos en ambos casos.

---

Por otra parte, a nuestro juicio es razonable plantear la hipótesis de existencia del ciclo de Kondratieff en series de tasas de crecimiento, aun cuando se sabe que esta transformación suele producir series estacionarias, con lo que se corre el riesgo de disminuir también la intensidad de señales periódicas de frecuencias muy bajas.

## 2. Diseño de filtros en el dominio de la frecuencia<sup>28</sup>

Como las series de tiempo son conjuntos de observaciones ordenadas, pueden concebirse como señales o como suma de señales. Muchas cuestiones concernientes a éstas pueden ser formalizadas y transformadas en algoritmos con el uso de la teoría de los sistemas lineales invariantes en el tiempo. Como un sistema  $S$  se define cualquier regla que transforme una señal  $S(a)$  en otra señal  $S(b)$ . Dentro de este contexto, si se considera una sola serie de tiempo y se trata de identificar un sistema que la transforme de acuerdo con un criterio específico, se está definiendo un problema de "diseño de sistema". Tales transformaciones pueden ser caracterizadas como filtros. En adelante, los filtros se definen como algoritmos que transforman series de tiempo.

Para analizar series de tiempo utilizando un enfoque como este se requiere:

- una descripción formal de la señal o señales en las que se está interesado; y
- un método para extraer (aislar) estas señales.

Para lograr lo último, tiene que diseñarse una función de transferencia del sistema correspondiente. En general, ésta es una función compleja que puede ser escrita en términos de sus funciones de amplitud y de fase. La función de amplitud de un filtro muestra cómo la potencia de una señal —correspondiente a diferentes frecuencias— es modificada por el filtro, esto es, si es reducida, eliminada o amplificada. Por su parte, la función de fase indica por cuántas unidades de tiempo la salida del filtro está rezagada con respecto a la entrada. Como tales cambios de fase pueden ser cruciales, especialmente en la investigación económica y social, la función de fase de un filtro debe ser idénticamente cero para todas las frecuencias. La realización de esto no es trivial. Finalmente, otra característica deseable es la estabilidad de la salida del filtro en los extremos cuando la serie es actualizada. De acuerdo con lo anterior, pueden formularse los siguientes requisitos para un diseño de filtro apropiado:

1. Función de amplitud exacta para bandas de frecuencia preespecificadas;
2. fase cero en la banda de paso; y
3. estabilidad perfecta de la salida del filtro en sus extremos (para los datos más recientes) en caso de actualizar la serie.

Es posible demostrar que estas condiciones no pueden satisfacerse simultáneamente. Por ejemplo, con los filtros de respuesta de frecuencia infinita, se obtiene una (función de) amplitud

---

<sup>28</sup> Metz, Rainer y Winfried Stier, "Filter Design in the Frequency Domain", en Kleinknecht *et al* (1992), pp. 45-79.

casi exacta. Pero desafortunadamente estos filtros tienen características de fase pobres, lo cual resulta en rezagos de tiempo considerables entre la entrada y la salida del filtro.

La cualidad de fase cero se logra fácilmente con filtros de respuesta de frecuencia infinita. En general, estos filtros tienen características de amplitud pobres, a menos que se escoja una longitud suficientemente grande del filtro. Sin embargo, una forma adecuada de la función de amplitud de estos filtros puede abarcar cien o más datos. Como las series de tiempo prácticas suelen ser relativamente cortas, estos filtros no son una buena opción cuando el interés recae en la forma de la función de amplitud. Las implicaciones de la tercera condición solo son considerables si los filtros se aplican con propósitos de predicción y diagnóstico.

### **Filtros con características de amplitud exacta y fase cero**

El punto esencial del enfoque por describir es el hecho de que el proceso completo de filtrado (tanto el diseño del filtro como el filtrado de las series) se realiza en el dominio de la frecuencia. Ninguna ecuación del filtro es usada en el dominio del tiempo. Como los datos siempre están dados en éste último, necesitan ser transformados al de la frecuencia. Esto puede hacerse con la ayuda de la transformada discreta de Fourier (TDF). En la práctica, se ocupa el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (TRF) para evaluar la transformada discreta de una señal.

Así, el procedimiento de filtrado parece ahora claro: la TDF de una serie puede ser fácilmente modificada multiplicándola por la función de amplitud deseada. La serie filtrada resulta de la transformada inversa discreta de Fourier (TIDF).<sup>1</sup> Por ejemplo, un filtro pasa bajos puede producirse multiplicando la TDF por uno en la banda de paso y por cero en la banda de rechazo. Con el objeto de evitar el llamado fenómeno de Gibb (oscilaciones de alta frecuencia en la salida del filtro resultantes de discontinuidades en la función de amplitud), debe colocarse una banda de transición entre las bandas de paso y de rechazo.

Como una banda de transición pequeña es suficiente para evitar este fenómeno, la función de amplitud de este pasa bajos exhibe prácticamente una forma ideal. Es de gran importancia el hecho de que la función de fase de este filtro es idénticamente cero en todo el rango de frecuencias. De una manera similar, pueden diseñarse otros filtros, tales como los filtros pasa altos o los pasa banda. Utilizando esta manera de diseñar un filtro, las series de tiempo pueden ser descompuestas de una manera exacta y de forma tal que puede adaptarse a las necesidades del investigador.

### Simulación de experimentos

Antes de presentar las salidas filtradas de series de tiempo simuladas, se resumen los requerimientos que debe satisfacer un procedimiento de filtrado 'idóneo':

1. Un filtro debe ser capaz de reproducir exactamente las señales correspondientes a una banda de frecuencias. Más aún, no deben ocurrir cambios de fase para estas señales.
2. El filtro no debe generar señales que no estén contenidas en la serie de tiempo (como por ejemplo el bien conocido efecto de Slutsky).

La primera serie simulada de longitud  $T = 200$  está aditivamente compuesta de tres señales (o componentes) generados por las ecuaciones:

$$X_t = T_t + L_t + C_t, \quad T = 1, 2, \dots, 200$$

$$T_t := 5 + 0.7t \text{ (señal tendencia)}$$

$$L_t := 5 \sin(2\pi/60t) \text{ (señal ciclo largo)}$$

$$C_t := 5 \sin(2\pi/8t) \text{ (señal ciclo de los negocios)}$$

Por construcción, estas señales siguen patrones muy simples con el objeto de ser capaces de estudiar la eficiencia de un filtro en situaciones claras. El problema ahora es diseñar filtros que sean capaces de extraer estas señales. Comiencese con la tendencia, definida como cualquier oscilación con frecuencia menor que  $1/T$ . Esta definición implica que la banda de paso de la tendencia es el intervalo  $(0, 1/T)$ . Como banda de transición se escogió el intervalo  $(1/T, 2/T)$ . La banda de rechazo consiste entonces en todas las frecuencias del intervalo  $(2/T, 0.5)$ .

La serie filtrada se grafica junto con la teórica, viéndose que el resultado no es satisfactorio, aunque siempre debe esperarse cierta divergencia entre ambas. En la siguiente figura se muestra la serie filtrada en el caso de diez iteraciones y cuatro frecuencias. En este caso, hay una prácticamente 'exacta' concordancia entre ambas series. Al final del capítulo se demostrará que un número mayor de iteraciones y de frecuencias dará mejores resultados solo si el número de frecuencias de la TRF se incrementa también. <sup>ii</sup>

Mientras que la tendencia se extrae con un filtro pasa bajos, para eliminarla se necesita un filtro pasa altos. Tal filtro reproduce el contenido de alta frecuencia de una serie. En este ejemplo, se supone que el filtro extrae el componente cíclico de la serie que, de hecho, consiste en dos ciclos. Si el pasa altos se define en 'simetría' con el pasa bajos usado antes, entonces serán eliminados

todos los componentes con periodos mayores que 200 unidades de tiempo. El intervalo (1/200, 2/200) es usado como banda de transición. La función de amplitud es la siguiente:

$$T(f) = 0, f \in (0, 1/N)$$

$$0 < T(f) < 1, f \in (1/N, 2/N)$$

$$T(f) = 1, f \in (2/N, 1/2)$$

En este caso, la señal teórica y la filtrada son prácticamente idénticas después de cuatro iteraciones (figura 3.8).<sup>iii</sup>

Para la extracción del ciclo largo se usa un pasa banda con la siguiente función de amplitud:

$$T(f) = 0, f \in (0, 1/90)$$

$$0 < T(f) < 1, f \in (1/90, 1/70)$$

$$T(f) = 1, f \in (1/70, 1/40)$$

$$0 < T(f) < 1, f \in (1/40, 1/20)$$

$$T(f) = 0, f \in (1/20, 1/2)$$

A pesar de algunas desviaciones en los extremos de las series es obvio que el filtro reproduce la señal teórica casi perfectamente.<sup>iv</sup>

### **El impacto de un componente de ruido**

Se generó un proceso de ruido blanco con media cero y varianza uno y se agregó a las señales de la simulación anterior. A continuación se discuten los resultados obtenidos. En el caso de la extracción de la tendencia (pasa bajos), se obtuvieron prácticamente los mismos resultados. En el otro caso (pasa banda), las diferencias son un tanto mayores. Esto se debe en parte a que la potencia espectral del ruido blanco se encima a la de las señales, por lo que no es posible su perfecta separación mediante un filtro.

A continuación se hacen algunos estudios sobre la tendencia, cuyo objetivo principal es demostrar que para su extracción mediante el filtrado no es necesario suponer alguna forma funcional específica de ésta, a diferencia de los procedimientos tradicionales basados en el llamado modelo 'clásico' de series de tiempo.

En el primer ejemplo se genera una serie de 400 datos a partir de la suma de una tendencia logística a un componente cíclico que contiene tres funciones periódicas con duraciones de 60, 25

y 8 años, respectivamente. La extracción de la tendencia se realiza con cinco iteraciones y cinco frecuencias y se ve que hay ligeras discrepancias entre ambas series, sobre todo en los extremos. En el segundo y último ejemplo se supone que la tendencia está dada por una función polinomial de grado tres. En contraste con la tendencia logística, aquí se usan solo 200 datos. El componente cíclico es el mismo que en el ejemplo anterior. Las tendencias filtrada y teórica, para el mismo número de iteraciones y de frecuencias, no son obviamente idénticas. Puede asumirse que este resultado más pobre –en comparación con la tendencia logística filtrada- se debe a que las series son más cortas.<sup>v</sup>

Finalmente, se discuten brevemente algunas posibilidades para mejorar los resultados del filtrado. Primero, se incrementa el número de frecuencias utilizado en el cálculo de la TRF. Para demostrar los efectos de este incremento, se hicieron cálculos alternativos con la misma función de amplitud. Sorprendentemente, los resultados muestran que, manteniendo constante el número de iteraciones, los errores cuadráticos se incrementan también. Así que un mejoramiento en el filtrado puede obtenerse incrementando también el número de iteraciones y de frecuencias utilizadas para minimizar el espectro de Fourier de entrada. Para demostrar el efecto de esto, se calculó la TRF con  $2^{15}$  datos y se minimizó el espectro de Fourier de entrada usando 20 iteraciones y 20 frecuencias. En este caso, se observó una caída en el valor de los errores. Un mejoramiento posterior se obtuvo incrementando el número de iteraciones a 40, las frecuencias a 30 y el número de puntos de la TRF a  $2^{16}$ .

Básicamente, la calidad del espectro de Fourier estimado de una serie de tiempo dada es altamente influenciada por la varianza de la serie. En la mayoría de los casos, el supuesto generalmente asumido de varianza invariante en el tiempo no se cumple. Por el contrario, en la mayoría de las series económicas o sociales, ésta es dependiente del tiempo, es decir, la serie no es estacionaria. Por tanto, deberá hacerse alguna transformación para volverla estacionaria.

---

<sup>i</sup> El espectro muestral obtenido mediante la transformada de Fourier de los datos es una muy mala aproximación al espectro de potencia, más aún si las series a partir de las cuales se calcula son de naturaleza estocástica. Esto se debe básicamente a que el análisis de Fourier se basa en el supuesto de amplitudes, frecuencias y fases fijas, mientras que las series de tiempo reales están caracterizadas por cambios aleatorios en estos tres elementos.

<sup>ii</sup> No es muy claro a qué se refieren con las iteraciones y las frecuencias. Además, si eso pasa con las series no solo conocidas sino deterministas del tiempo, ¿qué no pasará con las series estocásticas reales?. Resaltar las desviaciones entre las series real y estimada.

<sup>iii</sup> Decir que su definición de la función de amplitud es tan vaga que prácticamente cualquier filtro cabe en ella.

<sup>iv</sup> No se dice ahí, sino al pie de la figura 3.9, que esto ocurre con diez iteraciones y cuatro frecuencias.

<sup>v</sup> Más corta pero con 200 datos, además de ser funciones deterministas del tiempo. De nuevo, ¿qué pasará en el caso de las series económicas, que no solo son estocásticas sino generalmente mucho más cortas que las supuestas en este trabajo?.

### 3. Una reinvención de ondas largas en series agregadas de producción<sup>29</sup>

#### Introducción

El punto crucial en la presente investigación es el intento de establecer ondas largas dentro de una teoría de desarrollo económico de largo plazo. Las ondas largas son concebidas como la expresión numérica de un mecanismo de auto generación de procesos que se repiten a sí mismos periódicamente. El crecimiento económico, entonces, puede caracterizarse como fases de generación de alto crecimiento seguidas de fases de crecimiento lento, y viceversa. Verificar esta tesis estadísticamente es difícil debido a que el crecimiento económico como un todo no muestra patrones auto repetidos de regularidad.

El método explicado y usado en este capítulo se ocupa exclusivamente del problema de la detección de la tendencia y el ciclo en series de tiempo económicas. La detección no se restringe solo a la identificación de los posibles ciclos y tendencias presentes, sino también de su extracción de una serie temporal y su representación en el dominio del tiempo. En este enfoque, las ondas largas se conciben como oscilaciones *cuasi* periódicas con una duración de 35 a 60 años. Más aún, estos ciclos deben ser no solo un fenómeno de largo plazo en series individuales, sino también un fenómeno del mercado mundial. Por lo tanto, las ondas largas deben ocurrir con gran sincronía en muchas series a través de las naciones. Como la existencia de ondas largas en series de volumen reales ha sido mucho más controversial que su aceptación en las series de tiempo, este trabajo se concentrará más en las primeras que en las segundas.

Las series de tiempo investigadas son casi las mismas a las usadas por Bieshaar y Kleinknecht (1984). Para una descripción detallada y juzgamiento crítico de estas series, se refiere a dicha obra y a la literatura ahí mencionada. Adicionalmente, se usaron las series del PIB de Dinamarca y Francia publicadas por Angus Maddison (1982).

#### Enfoque metodológico

Un procedimiento estadístico idóneo debe ser capaz de extraer los ciclos de las series de tiempo. Como fue mostrado en el trabajo de Metz y Stier, este objetivo puede ser caracterizado como un problema de detección de señal. Una serie de tiempo se concibe como una suma de señales más un componente de ruido:

---

<sup>29</sup> Metz, Rainer, "A Reexamination of Long Waves in Aggregate Production Series", en Kleinknecht *et al* (1992), pp. 80-111.

SERIE DE TIEMPO = SEÑAL1 + SEÑAL2 + ... + SEÑALN + RUIDO

ó

$$X(t) = S_1(t) + S_2(t) + \dots + S_N(t) + N(t)$$

Con el objeto de extraer las ondas largas posiblemente existentes, las otras señales, así como el componente de ruido, tienen que ser eliminados. Esto requiere (i) una definición exacta de las señales que serán eliminadas y (ii) un método que elimine las diferentes señales. El punto crucial en este contexto siempre ha sido y permanece en la estimación y eliminación de la tendencia. Como se expuso en el trabajo de Metz y Stier, su enfoque de diseño de filtro ofrece oportunidades para la detección y extracción de señales que no son factibles con los métodos tradicionales de análisis de series de tiempo.

De acuerdo con la definición adoptada de las ondas largas, como un proceso cíclico, se requiere primero la determinación y eliminación de la tendencia correspondiente. Como generalmente se asume que la duración máxima de las ondas largas es de cerca de 60 años, todas las oscilaciones entre infinito y 65 años son concebidas como tendencia. Consecuentemente, las oscilaciones con duración entre 2 y 65 años son definidas como componentes cíclicos. Para la representación de la tendencia se requiere un filtro pasa bajos, con función de amplitud definida como  $(0, 90/65)$ .<sup>30</sup> El filtro reproduce exactamente aquellas oscilaciones de la serie de tiempo cuyas frecuencias corresponden a la banda de paso del filtro pasa bajos.<sup>i</sup>

Para obtener la serie libre de tendencia, se ocupa un filtro pasa altos con función de amplitud  $(90/65, 2)$ .<sup>31</sup> Esta serie es la base para examinar la existencia de ondas largas, lo cual puede hacerse con un filtro que elimine las fluctuaciones de corto plazo. Si se define la duración posible de los ciclos de Kondratieff de 35 a 60 años, el filtro debe eliminar todas las oscilaciones entre 2 y menos de 35 años. Para este propósito, se usa un filtro pasa banda cuya función de amplitud se define como  $(90/65, 35/30)$ .<sup>32</sup>

El resultado es un componente suave que representa exactamente aquellas oscilaciones correspondientes a la banda de paso de la función de amplitud definida, esto es, representa todas las oscilaciones entre 35 y 65 años (figura 4.3. Serie: Producción industrial mundial (I) 1780-1979)

<sup>30</sup> Esta notación indica que la banda de paso se extiende de 0 a 65. 90/65 denota la banda de transición en la cual la función de amplitud del filtro pasa bajos tiende monótonamente de  $\infty$  a 0.

<sup>31</sup> Esta notación indica que la banda de frecuencias  $1/90$ - $1/2$  denota la banda de paso del filtro. La banda de transición se extiende de 90 a 65.

<sup>32</sup> Esta notación denota las frecuencias  $1/65$  a  $1/30$  como la banda de paso y  $1/90$  a  $1/65$  y  $1/35$  a  $1/30$  como la banda de transición del filtro. Debido a un efecto de desviación, la serie sin tendencia se filtra con un pasa bajos  $(35/30, 0)$  que es equivalente a un filtro pasa banda para la serie original.

A partir de la serie resultante, puede determinarse directamente la ubicación de los valles y picos de las ondas largas. Como ocurre con la tendencia, es también evidente para el análisis del componente cíclico que la definición especificada determina la forma histórica de los ciclos y, por tanto, de su fechado. Para demostrar el problema involucrado, se probaron definiciones alternas del ciclo para la serie Mundial (I). Las funciones de amplitud adicionales son:

$$T1 = (45/40, 0); T2 = (35/30); T3 = (25/20, 0); T4 = (15/12, 0).$$

Estas funciones definen cuatro tipos diferentes de ciclos. Por ejemplo, de acuerdo con T1, la duración de los ciclos puede abarcar de 40 a 65 años, mientras que de acuerdo con T4, éstos pueden variar de 12 a 65 años. Entre menor es la banda de paso del filtro, mayor es el efecto de suavizamiento del filtro pasa bajos. Es obvio que con un efecto creciente de suavizamiento, el ciclo de largo plazo se vuelve cada vez más 'independiente' de los eventos históricos reales, representados en los valores libres de tendencia. En el límite, el componente suavizado corre sin ninguna relación con dichos eventos (esto es, en la forma de un componente lineal).

Pese a que las fluctuaciones en las series son algunas veces bastante diferentes entre sí, el análisis espectral confirma para casi todas ellas una dominación de ondas largas con una duración de 30 a 65 años. Cabe señalar que las funciones de densidad espectral de las series pueden ser clasificadas en dos tipos. El primero revela una clara dominación de ondas muy largas sin influencia notable de otras fluctuaciones. El segundo tipo contiene también una onda (larga) pero al mismo tiempo muestra otras fluctuaciones. Dos ejemplos de esto son las funciones de densidad espectral del PIB de Italia y de la producción industrial de Reino Unido. Esto no indica solamente una sutileza estadística sino también una estructura diferente del proceso cíclico subyacente. Qué tanto puede explicarse esta disimilitud mediante argumentos económicos referentes a peculiaridades de las economías nacionales es una cuestión que permanece abierta.

A pesar de las diferencias observadas, la definición del ciclo dada por T2 es la más plausible. De acuerdo con ésta, los posibles ciclos con duración menor que 30 años son excluidos (ciclos de Kuznetz). En este punto surge un problema con la influencia perturbadora de las dos guerras mundiales. En muchas series, las guerras producen una serie de valores anormales y erráticos. Sigue abierta la discusión sobre si estos impactos deben ser parte del modelo o deben ser excluidos y considerados como impactos exógenos. Como hay algunas buenas razones para ambas opiniones, los cálculos fueron hechos considerando las dos.<sup>33</sup> En este caso, la onda larga fue filtrada de acuerdo con la definición del filtro pasa bajos T2.

<sup>33</sup> Fueron interpolados los siguientes años: Francia (producción industrial) 1939-45, Francia (PIB), 1940-47, Alemania (PNB), 1914-24 y 1937-41; Reino Unido (PIB), 1939-45; EEUU (PIB), 1939-45; Italia (PIB), 1939-46; Mundial I (producción industrial), 1939-45; Mundial II (producción industrial total), 1939-45; Dinamarca (PIB), 1914-18 y 1940-45.

En la segunda versión (V2), no se interpolaron los valores de las guerras mundiales. Como todas las oscilaciones que se deben a las guerras mundiales muestran una duración más corta es mejor usar la definición T3 para filtrar el componente suavizado. Esto posibilita la aparición de ciclos de Kuznetz. Debido a las distorsiones extremas debidas a los valores de los años de guerra mundial, los resultados de la versión V2 parecen ser menos realistas. Por esta razón, la fechación de las ondas largas se basa principalmente en los resultados de la versión V1.

## **Resultados**

A continuación, para cada serie, son graficadas la tendencia y las ondas largas. Principalmente, se mostró la tendencia solo para las series interpoladas (V1). Las ondas largas se muestran para ambas versiones. Los puntos de inflexión se determinaron de acuerdo con la versión V1.

## **Resumen de los resultados empíricos**

Desde *un punto de vista estadístico*, la mayoría de los valores de las guerras mundiales pueden considerarse valores extremos que disturban la estructura 'normal' de las series de tiempo. Por lo tanto, se exponen las conclusiones obtenidas exclusivamente a partir de los resultados de la versión V1. En las doce series de tiempo investigadas, contando de pico a pico, pueden identificarse diecinueve ondas largas (quince si se fecha de valle a valle). La duración promedio de los periodos es de 54 años (para las diecinueve ondas pico-pico) o de 56 años (para las quince ondas valle-valle).

Esto es notorio, ya que contradice varias de las investigaciones anteriores sobre el tema (por ejemplo, Gerster 1988, Metz 1984, Taylor, 1988), que concluyen que la duración promedio del periodo de la onda larga es más corta que la típicamente supuesta para el ciclo de Kondratieff. No obstante, los resultados obtenidos muestran varias desviaciones del fechado 'ortodoxo' de las ondas de Kondratieff. Notoriamente, la fecha del segundo Kondratieff (burgués) no es muy uniforme. En las series Mundial I, producción industrial y PIB de Francia, la onda ascendente comienza antes de 1847, que es la fecha 'ortodoxa'. Las ondas largas durante la segunda mitad del siglo diecinueve, no obstante, revelan mucho más uniformidad.

Solo la producción industrial de Francia es una excepción, pues la fase ascendente del tercer Kondratieff comienza en 1853. La fase descendente de 1860/69 a 1880/92 y la siguiente onda ascendente puede ser comprobada hasta la Primera Guerra Mundial para la mayoría de las series investigadas. Esto parece indicar una alta sincronía internacional durante la fase de desarrollo capitalista. Es subrayable, sin embargo, que la fase ascendente del tercer Kondratieff no se rompe de forma internacionalmente uniforme con el inicio de, o durante la Primera Guerra Mundial. Una

sincronía alta similar puede encontrarse durante la fase ascendente después de la Segunda Guerra Mundial, a pesar de que su punto de inicio no puede fecharse fácilmente debido al efecto perturbador de esta guerra. En varias series comienza entre 1936 y 1952 y se rompe entre 1967 (RRUU) y 1975 (Francia).

A pesar de estos periodos de alta sincronía, un tiempo variable y una estructura rezago-adelanto dependiente de la nación se vuelve evidente cuando se compara el ciclo de cada serie con la serie Mundial I. El ciclo de esta última se escogió como referencia por dos razones: (i) es bastante larga; y (ii) puede suponerse que las peculiaridades de las series de naciones individuales pueden cancelarse entre si.

### **Comentarios concluyentes**

Desde el inicio del siglo diecinueve hasta el presente, la mayoría de las series, libres de tendencia, muestran ondas largas con una longitud promedio típica de las ondas de Kondratieff. Como las series aquí investigadas son indicadores de la actividad económica general, la interpretación de las ondas de Kondratieff como meras ondas de precios (ver, por ejemplo, van Ewijk, 1982) puede ser refutada. Además, en oposición con Bieshaar y Kleinknecht se encontró evidencia de ondas largas incluso durante el periodo previo a 1890. Asimismo, a diferencia de Gerster (1988), Taylor (1988) y Solomou (1987), se determinó una longitud promedio del ciclo que confirma la hipótesis de Kondratieff. Una razón de esta homogeneidad en la longitud promedio de los periodos se debe a la manipulación de las dos guerras mundiales y a la definición del ciclo ocupada para el filtrado.

En conclusión, la pregunta '¿Hay alguna evidencia de las ondas largas de Kondratieff en indicadores importantes de la actividad económica general?' tiene que ser contestada con un ¡SÍ! rotundo. La cuestión central, sin embargo, de si esos ciclos pueden considerarse como 'ciclos verdaderos' puede ser respondida solo dentro de un marco teórico, considerando variables endógenas así como impactos exógenos.

---

<sup>i</sup> Ver nota i del apartado anterior.

## 4. Un análisis espectral del ciclo de Kondratieff<sup>34</sup>

### I. Introducción

En investigaciones del ciclo largo, algunos autores llegan a conclusiones contradictorias. En un artículo previo en el que se discuten varias de esas investigaciones, se llegó a la conclusión de que el resultado es muy sensitivo al método de identificación de la onda larga.

En este artículo se presentan los resultados de una prueba analítica-espectral de la onda larga. El análisis espectral es un método muy adecuado para determinar la fuerza relativa de un ciclo con cierta frecuencia (o longitud) fija. Este análisis tiene grandes ventajas sobre los métodos tradicionales, especialmente porque los componentes aleatorios y ciclo corto no tienen que ser 'removidos' de la serie original antes de establecer ciclos largos.<sup>i</sup> Además, con el análisis espectral cruzado la correlación y coordinación en el tiempo entre ciclos con la misma longitud en diferentes series de tiempo pueden ser estimadas.

### II. Una sinopsis de las teorías sobre ondas largas<sup>ii</sup>

### III. Alcance del análisis

Siguiendo a la mayoría de los autores sobre ondas largas esta investigación está enfocada en los llamados 'países centrales' del mundo occidental industrializado: Gran Bretaña, Francia, Alemania (occidental) y Estados Unidos.

Siguiendo la tradición, cuando hay datos disponibles, la primera observación es la de 1770. Entonces, si las series cubren el periodo completo 1770-1977, será posible observar cuatro periodos completos. Para el análisis espectral las series deben contener como un requerimiento absolutamente mínimo al rededor de tres ciclos.<sup>35</sup>

Para todas las series consideradas –Gran Bretaña.– Series de volumen: Producción industrial, 1770-1977, PIB, 1830-1977, Inversión Bruta, 1830-1977, Exportaciones, 1796-1977 Importaciones, 1796-1977; y precios al consumidos, 1770-1977. Francia: Producción industrial (volumen), 1815-1977 y precios al consumidos, 1798-1977. Alemania Occidental: precios al

<sup>34</sup> Ewijk, Casper van (1982), "A spectral análisis of the Kondratieff-cycle", *Kyklos*, V. 35, Fasc. 3, pp. 468-499.

<sup>35</sup> Las opiniones sobre la longitud mínima de las series son divergentes. Por ejemplo, se argumentan longitudes de entre tres y diez veces la longitud del ciclo por estudiar. Mucho depende del grado de precisión exigido en el análisis. Para este trabajo, que tiene principalmente un carácter exploratorio, parece que pueden usarse series de 2 ½ a 3 ciclos (125 a 150 observaciones) para obtener una primera aproximación a la existencia de la onda larga. Los resultados, sin embargo, deben ser tratados con gran cuidado.

consumidor, 1792-1977. Estados Unidos: PIB (volumen), 1789-1977 y precios al consumidor, 1770-1977– se estima el espectro muestral (S). El espectro muestral de una serie exhibe cómo es distribuida la varianza ('potencia') sobre la frecuencia. El espectro muestral proporciona entonces información de la fuerza relativa de los ciclos de frecuencia  $f$ .<sup>iii</sup>

En adición a este análisis univariado, algunos conjuntos de series son también analizados bivariadamente (análisis espectral cruzado). Este método se utilizará para determinar el grado de coherencia –que es comparable con el nivel de correlación en el análisis de regresión- entre ciclos de igual frecuencia en dos series. La relación adelanto-rezago entre estos ciclos es medida por el 'ángulo de fase'.

La teoría espectral arranca con el supuesto de que la serie observada es estacionaria (libre de tendencias en media y varianza). Como la mayoría de las series económicas presentan tendencia, se intentarán dos conversiones para eliminarla: primeras diferencias y primeras diferencias de los logaritmos de las series originales.<sup>iv</sup>

Para todas las series se calcula el espectro muestral con puntos de truncamiento de las funciones de autocovarianza en un número de rezagos ( $m$ ) que varía de  $1/3$  a  $1/8$  del número de observaciones ( $N$ ). Para tener gráficas detalladas, los espectros fueron estimados para un número de puntos de frecuencia igual a dos veces el número de rezagos. Usando una ventana de Tukey se obtienen de 8 a 21 grados de libertad. Desde el punto de vista de la estabilidad y fiabilidad del espectro estimado, un número de rezagos igual a  $1/8$  de la longitud de la serie, con 21 grados de libertad, es preferible. No obstante, con series de solo 128 a 208 observaciones, la precisión del espectro con respecto a las diferentes frecuencias será entonces insuficiente para ser capaz de distinguir una posible concentración de potencia en la bastante estrecha banda de frecuencias de Kondratieff.

Jenkins y Watts (1968, p. 279) sugieren que el ancho de banda de la ventana debe ser del mismo orden que el ancho del detalle importante más angosto en el espectro. Siguiendo esta sugerencia se encuentra que se requieren al menos 50 rezagos, obteniéndose un ancho de banda de 0.028 ciclos por año. Esta banda corresponde a un rango de frecuencias de longitudes entre 25 y 80 años por ciclo. Sin embargo, con 50 rezagos la varianza del estimador espectral es alta. Aun en el caso de la serie más larga el truncamiento de 50 rezagos da solo once grados de libertad., lo cual no es muy adecuado.<sup>v</sup> La inspección de los espectros muestra que en la mayoría de las series hay mucha potencia concentrada en las frecuencias bajas.

#### IV. Estimaciones espectrales

La inspección del espectro muestral de las series revela que no se encuentra concentración de potencia en la banda de frecuencias de Kondratieff si se usan menos de 30 rezagos en su cálculo. Cuando el número de rezagos se incrementa al nivel teórico requerido de 40 o 60, mucha de la potencia de baja frecuencia tiende a concentrarse alrededor de las frecuencias de Kondratieff. Esto apunta a la existencia de una onda larga en precios.<sup>vi</sup>

Tanto por la estabilidad de la localización de estos picos de 'onda larga', cuando el número de rezagos varía, como por la gran similitud internacional, puede concluirse que estos picos son un trazo real de una onda larga en precios. Más aún, el espectro de las series después de su conversión a tasas de crecimiento da resultados similares.<sup>vii</sup> En esos espectros, la potencia de las frecuencias bajas es reducida, pero cada espectro sigue mostrando una (débil) indicación de la onda de Kondratieff, cuando se usa un número suficiente de rezagos. Pese a que no puede concluirse que se ha probada la existencia de una onda larga en precios, estos resultados deben al menos producir una indicación de ella en precios en el periodo 1770-1930.<sup>36viii</sup>

Los espectros de las *series de volumen* son estimados usando alrededor de 50 rezagos. Esto debería ser suficiente para revelar una posible onda larga. La característica común a todos los espectros más notable es la concentración de potencia en longitudes de onda de 10 a 15 años para los países europeos y de 20 a 30 años para Estados Unidos. Con respecto a las bandas de frecuencias bajas, puede notarse que ninguna de las series originales muestra del todo trazos de una onda de Kondratieff. En su lugar, las series de Francia y algunas series británicas muestran una pequeña concentración de potencia en frecuencias correspondientes a un ciclo largo de 25 a 30 años.<sup>37</sup>

Sin embargo, este ciclo debe ser tratado con desconfianza pues el intervalo entre las dos guerras mundiales tiene exactamente la misma duración. Con la intención de verificar este resultado se experimentó con correcciones para los periodos de guerra por medio de interpolación y sustitución de tasa de crecimiento promedio por las tasa reales. Estos experimentos apuntan a que, a pesar de que los espectros de las series británicas, son razonablemente estables en conjunto, la potencia del ciclo de 25-30 años es reducida cuando la influencia de las guerras mundiales es atenuada

Para la producción industrial de Francia los resultados espectrales cambian dramáticamente después de la corrección de las observaciones extremas durante el periodo de guerra: el ciclo de

<sup>36</sup> En el espectro para el periodo completo 1770-1997, no puede encontrarse ningún trazo de la onda larga. Esto puede ser atribuido a la significativa no estacionariedad de las series o a los supuestos cambios en los movimientos de largo plazo en precios desde 1930.

<sup>37</sup> En este caso, este ciclo parece depender mucho del intervalo entre las dos guerras mundiales.

25 años desaparece y en su lugar surge un claro ciclo de 15 años.<sup>k</sup> Esta sensibilidad mayor de las series francesas con respecto a las británicas a los experimentos, es obviamente debida a la mucho más penetrante influencia de las guerras en la economía francesa. Aun así, puede discernirse una débil indicación de un ciclo largo de 50 a 100 años en el espectro de la producción industrial de Francia después de la interpolación de los años de la segunda guerra mundial. Como no se dispone de otras series largas francesas, no es posible una posterior investigación de este resultado. Entonces debe concluirse que si este resultado, que está lejos de ser significativo, es un trazo de una onda larga, ésta es muy débil en comparación con otros ciclos.

Para las series más largas ( $N > 180$ ), los efectos de la reducción del periodo de observación, en analogía con el análisis de las series de precios, de 1770-1930, también fueron probados.<sup>x</sup> La serie británica muestra notable insensibilidad a esta reducción. Sin embargo, la serie estadounidense del producto nacional cambia significativamente. El pico espectral situado en el punto de frecuencia 0.048 (20 años por ciclo) se traslada al punto de frecuencia 0.032 (31 años por ciclo) y un nuevo pico puede ser observado en la frecuencia correspondiente a un ciclo de diez años. Esto, no obstante, no tiene ninguna consecuencia importante para la conclusión del presente estudio con respecto a la onda larga; que sigue siendo que no hay signo de la onda de Kondratieff (en series de volumen).

La conclusión global de este análisis espectral es que existe una marcada diferencia entre las propiedades de las frecuencias bajas de las series de precios y aquellas de las variables económicas reales. Esto apunta a una leve si no ausente correspondencia entre los movimientos de largo plazo en precios y en variables reales. La onda larga en precios, que fue la base principal de las primeras teorías sobre el ciclo largo, no pudo encontrarse en las variables que fueron tomadas como indicadores del crecimiento económico real. De acuerdo con los resultados, la característica más sobresaliente de las fluctuaciones de baja frecuencia en el crecimiento económico real es el 'ciclo mayor' largo de 10 a 15 años para Gran Bretaña y Francia y el 'ciclo de Kuznetz' de 20 a 30 años para Estados Unidos.

## **V. Estimaciones espectrales cruzadas**

En el análisis espectral cruzado el interés particular se centra en la relación entre ciclos con la frecuencia de Kondratieff en diferentes pares de series. Las estimaciones de la coherencia y la fase pueden proporcionar una corroboración del supuesto crucial de la mayoría de los autores de ondas largas, a saber, que los ciclos largos en precios son el reflejo de ciclos simultáneos en el crecimiento económico real. La argumentada similitud internacional en movimientos largos puede también ser examinada mediante el análisis espectral cruzado. En términos de la teoría espectral de la onda larga, los autores generalmente suponen alta coherencia internacionalmente entre

precios y variables reales en la banda de frecuencias de Kondratieff sin algún rezago o adelanto considerable.

Como la experiencia del análisis espectral anterior dejó en claro que se necesitan de 40 a 50 rezagos para poder distinguir las características del ciclo de Kondratieff, en el análisis cruzado se usa un número similar de rezagos. Debido a que el número de grados de libertad (8 a 11) es bastante inadecuado, los resultados deben ser interpretados con precaución.<sup>xi</sup>

En los cuadros 4 a 8 se resumen los valores de la coherencia cuadrática promedio sobre bandas de frecuencia correspondientes a las longitudes de onda del ciclo mayor (8-15 años), ciclos de Kuznetz (15-30 años), ciclos de Kondratieff (30-70) años y todos los ciclos mayores de 70 años.

En el cuadro 4 se muestran las estimaciones para las series de precios al por mayor de Gran Bretaña, Francia y Estados Unidos en el periodo 1798-1930. En conjunto, estos resultados confirman las conclusiones preliminares del análisis univariado. Los movimientos de largo plazo en precios prueban ser internacionalmente similares; más aún, ocurren sin grandes diferencias de tiempo.

En el cuadro 5 se tienen las estimaciones hechas considerando series de Gran Bretaña: producción industrial e índice de precios, 1770-1930, y de Estados Unidos: PIB y precios al por mayor, 1789-1930. En este cuadro claramente se observa la mala correspondencia entre los movimientos en precios y los de la producción industrial sobre todo el rango de frecuencias bajas, siendo las coherencias insignificantes o casi insignificantes. Además, en contraste con la teoría de la onda larga, se encontró una fase negativa en todo el rango de frecuencias bajas. Esto indica un movimiento contrario entre precios y producción.

Estas conclusiones se ven reafirmadas cuando se analizan series de variables reales y de precios para el caso de Gran Bretaña (cuadro 6), obteniéndose que casi con cualquier combinación entre ellas, las coherencias no difieren significativamente de cero.

Finalmente, la relación internacional entre ciclos del crecimiento económico pueden establecerse a partir de las coherencias promedio estimadas a partir de series de variables reales de Gran Bretaña (producción industrial, 1789-1930), Estados Unidos (producto nacional, 1789-1930 y 1789-1977) y Francia (1815-1977). Los resultados se asientan en los cuadros 7 y 8, en los que puede verse que prácticamente no hay ninguna correlación internacional entre los ciclos de las bandas de frecuencias más bajas. La coherencia en la banda de Kondratieff es insignificante para todas las combinaciones de las series de producción de los tres países. Entonces, la conclusión con respecto al la similitud internacional de la onda larga es definitivamente negativa.<sup>xii</sup>

## VI. Conclusiones

Usando métodos de análisis espectral univariado y cruzado fue posible poner a prueba la teoría de los ciclos largos de Kondratieff, obteniendo resultados muy diferentes para las series de precios, por un lado, y las series de volumen, por el otro. Mientras que aparece una leve pero estable indicación de este ciclo en las series de precios, en las de volumen no se encuentra ningún trazo de él. Esto apunta a una poca correspondencia entre las fluctuaciones de baja frecuencia en precios y las del crecimiento económico real. Esto fue confirmado por el análisis cruzado, encontrándose además una relación inversa entre precios y variables reales en las bandas de frecuencias bajas. Finalmente, la coherencia entre series de producción industrial no fue significativa para la banda de frecuencias de Kondratieff.

Así, según esta investigación, la onda larga parece confirmarse solo en las series de precios. Con base en estos resultados puede concluirse tentativamente que la onda larga *no* es una característica general del crecimiento económico real de países industrializados. Con todo, si el ciclo largo existe, parece estar confinado a los precios –y posiblemente a la esfera monetaria. Como consecuencia, se debe dudar seriamente si hay un mecanismo causal real y endógeno detrás de este fenómeno, como se supone en la mayoría de las teorías sobre la onda larga.

La conclusión final es que, sin juzgar la validez de ninguna de estas teorías con respecto al actual estancamiento económico, no es posible explicar este receso simplemente como la manifestación de una alternación recurrente de largos periodos de prosperidad con largos periodos de adversidad.

---

<sup>i</sup> Desde nuestro punto de vista, la necesidad de filtrar o no los ciclos de menor duración pero mayor intensidad o fuerza debe discutirse aún.

<sup>ii</sup> En esta subsección se exponen muy brevemente algunas de las teorías y posturas sobre ondas largas. Debido a que no es un resumen exhaustivo y a que una discusión teórica sobre el tema amerita mucho más que un pequeño apartado, nos restringiremos básicamente a la discusión sobre el análisis espectral implementado.

<sup>iii</sup> Como se argumenta en el cuerpo de la tesis, (y en la nota i del primer artículo) el espectro muestral no es una buena estimación del espectro poblacional, debido a su gran volatilidad, misma que disminuye si se 'suaviza' con una ventana espectral.

<sup>iv</sup> La segunda transformación tiende al valor de la tasa de crecimiento de las series.

<sup>v</sup> Es la misma fuente y básicamente el mismo método que el empleado en la tesis, aunque falta advertir que un valor tan grande del punto de truncamiento puede inducir ciclos espurios.

<sup>vi</sup> A no ser que se trate de un ciclo espurio, debido al gran valor de  $m$ .

<sup>vii</sup> A este respecto, no es claro si los espectros que se muestran son los correspondientes a las serie de las primeras diferencias o a las de las diferencias de los logaritmos. De ser este segundo caso, es natural que los resultados se parezcan pues la diferencia de los logaritmos naturales tiende a la tasa de crecimiento de la serie.

---

<sup>viii</sup> (Esta nota hace referencia a la nota al pie de página número 3) Es una explicación débil y, en cierta manera, contradictoria, pues se supone que las series fueron primero transformadas para volverlas estacionarias lo cual, además, debió justificarse formalmente.

<sup>ix</sup> Resaltar la importancia de corregir desde el inicio los valores extremos, dada su influencia en la varianza y, por lo tanto, en las estimaciones de esta.

<sup>x</sup> Pueden hacerse varios comentarios críticos sobre este punto. Primero, con esta reducción se pierde casi un periodo completo del ciclo largo, con lo cual se reduce, de estar presente, su significancia estadística en la serie. Segundo, Con esta reducción, y con las estimaciones espectrales correspondientes, se propuso que las diferencias entre los espectros, con el periodo completo y reducido, podrían deberse al supuesto cambio en la evolución de los precios a partir de 1930 (nota 3 en este resumen; nota 15 en el trabajo original). De ser esta la causa sospechada, debería hacerse un análisis de ruptura estructural en 1930.

<sup>xi</sup> Existe la duda sobre si esta estimación promedio de la coherencia es adecuada, pues puede suceder que el nivel de la coherencia solo sea significativo en una de las frecuencias de la banda considerada, con lo que el promedio subestimaría la potencia del ciclo común correspondiente.

<sup>xii</sup> Señalar que para el análisis espectral cruzado se sugiere realizar una alineación previa entre las series para evitar distorsiones en las estimaciones de la coherencia (Jenkins y Watts, capítulos 8 y 9).

## 5. Ciclos económicos suizos: 1861-1988<sup>38</sup>

En este artículo se examinan datos tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Se encuentra evidencia de un ciclo económico en la forma de masa espectral considerable para ciclos entre tres y ocho años.

### Introducción

El conjunto de datos examinados incluye no solo el PIB (GDP) y sus componentes, sino también variables del mercado de trabajo como empleo y salarios. El análisis de los datos está específicamente enfocado en el ciclo de los negocios. Se adopta una definición tradicional del ciclo de los negocios, a saber, *movimientos conjuntos cíclicos entre variables macroeconómicas importantes con periodos de alrededor de cinco años*. En la sección tres se muestra el espectro de series a las que primero se les quitó la tendencia de acuerdo con dos métodos: calculando las primeras diferencias y aplicando el filtro de Hodrick-Prescott. Se encontró una considerable cantidad de masa espectral para periodos de entre tres y ocho años, lo cual puede ser interpretado como evidencia de la presencia del ciclo económico en los datos.

Como el objetivo es estudiar los hechos estilizados del ciclo de los negocios, más que las series de tiempo en general, es natural tratar los datos de tal manera que cualquier variación fuera de la banda de frecuencias del ciclo de los negocios sea filtrada. Para hacerlo se utiliza un filtro pasa banda.

### Datos

Series: (los logaritmos de) PIB, Producción manufacturera (Q), consumo privado (C), inversión (I), exportaciones (X), importaciones (I), empleo (L), salarios reales (W) y productividad (Q/L), de Suiza. Los datos cubren el periodo que va de 1861 a 1988.

### Análisis espectral

Usando la transformada de Fourier, se puede expresar una serie de tiempo estacionaria como una suma de componentes cíclicos de diferentes frecuencias. Esto proporciona el espectro de la serie de tiempo, mismo que descompone la varianza total de la serie en la varianza atribuida a las diferentes frecuencias. El espectro puede ser interpretado como una función de densidad. El área

---

<sup>38</sup> Englund, Peter y Lars E. O. Svensson (1992), "Swedish business cycles: 1861-1988", *Journal of Monetary Economics* No 30, pp. 343-371, North-Holland.

bajo el espectro para un intervalo de frecuencias es igual a la proporción de la varianza total atribuida a los componentes con frecuencias dentro del intervalo.<sup>1</sup>

También es considerada la coherencia entre las series del PIB y cada una de las otras series. La coherencia entre dos series en una frecuencia particular puede ser interpretada como un coeficiente de correlación entre los componentes cíclicos de las dos series en esa frecuencia. El cuadrado de la coherencia para una frecuencia dada es la proporción de la varianza total de ambas series que puede ser explicada por la regresión lineal de una de ellas sobre la otra.

Antes de calcular los espectros y las coherencias se elimina la tendencia de las series. Esto es, las series se transforman en series estacionarias, lo cual se hace de dos diferentes maneras. Una de ellas simplemente consiste en calcular las primeras diferencias. La otra es usar el filtro previamente empleado por Hodrick y Prescott (1980) y muchos otros, conocido como el filtro Whittaker-Henderson de tipo A. Para aplicarlo, debe escogerse un coeficiente de suavizamiento  $\lambda$ . El valor de este coeficiente refleja la varianza relativa al "componente de crecimiento", el cual es removido de los datos, quedando el componente estacionario. En este trabajo se escogió  $\lambda=400$ , que es menor que el valor de 1600 usado en varios estudios de datos trimestrales de la época de posguerra, pero que sin embargo produce ciclos de relativamente lento movimiento en los datos históricos anuales estudiados (véase la discusión al respecto en lo que sigue y en la siguiente sección).

En este trabajo se aplican ambos métodos en los logaritmos de cada serie. Los espectros y las coherencias son graficados, en escala logarítmica, para frecuencias correspondientes a periodos de entre 2 y 128 años de duración (128 es la duración de la serie). También se grafica una línea horizontal correspondiente al logaritmo del espectro promedio, esto es, la forma en que luciría el espectro si fuera completamente plano (y la serie a partir de la cual se generó fuera una caminata aleatoria). El nivel del logaritmo del espectro promedio es  $\ln(1/64) =$

-4.16.<sup>ii</sup>

Gráficamente, se ve que la mayor parte de la masa espectral en todas las series filtradas con el filtro de H-P se concentra en periodos mayores a ocho años. Esto es, la mayoría de la variación en las series es atribuida a estos componentes. De hecho, el espectro de todas las series tiene un pico en las frecuencias bajas, de alrededor de trece años. También puede verse que hay algo de masa espectral y un pequeño pico en la mayoría de las series para periodos entre tres y ocho años, a pesar de que éste se sitúa arriba del espectro promedio solo para las importaciones.

En las gráficas de las coherencias se observa que hay valores relativamente altos de éstas entre el PIB y la mayoría de las series para periodos mayores de ocho años. La coherencia entre el PIB y varias series es también relativamente alta para periodos entre tres y ocho años. Solo es en el consumo privado donde la coherencia es alta para todas las frecuencias del ciclo de los negocios.

Los espectros de las primeras diferencias de las series, en comparación con los de las series obtenidas con el filtro de Hodrick-Prescott, presentan menos masa espectral para periodos mayores de ocho años y más para periodos de entre tres y ocho años. Por otra parte, las coherencias de estas series son similares para ambos filtros. A partir de estos resultados, se concluye que hay algún soporte empírico para los ciclos económicos suizos con periodos entre tres y ocho años: la mayoría de las variables macroeconómicas tiene masa espectral considerable así como ligera alta coherencia con el PIB en la banda de frecuencias correspondiente.

### **Filtrado**

El filtro que corresponde mejor a la definición de ciclo adoptada es el llamado filtro pasa banda. En términos generales, el filtro trabaja de la siguiente manera: (1) transforma una serie estacionaria dada al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier, (2) elimina todos los componentes que no estén dentro de la banda de frecuencias escogida, y (3) transforma los componentes restantes de regreso al dominio del tiempo con la transformada inversa de Fourier. El resultado de estas tres operaciones es una medida de la parte cíclica de las series.<sup>iii</sup>

Se aplica el filtro pasa banda a las series previamente suavizadas con el filtro de H-P. El primer efecto que se observa es la reducción de las fluctuaciones en todas las series. Un segundo efecto es la inducción de un patrón cíclico más regular con un número mayor de ciclos (periodos del ciclo) distinguibles. Este es un obvio y deseable resultado. Contando el número de picos y valles, se distinguen cerca de 25 ciclos en los 128 años, lo cual corresponde bien con la noción de ciclos con un periodo promedio de cinco años. Un tercer efecto es la gran reducción de ciertos valores extremos, particularmente durante el periodo de entreguerras. Aunque menos obvio, este efecto es sin embargo comprensible. Observando las gráficas de las series sin tendencia, se ve que la secuencia de observaciones extremas en ese periodo de entreguerra realmente se parece a un ciclo con un periodo de diez a doce años.<sup>iv</sup>

El filtro pasa banda no es, sin embargo, la única forma de obtener ciclos con duración promedio de cinco años. El filtro de las primeras diferencias también conduce a ello.<sup>v</sup> Otra forma aún de obtener ciclos con una duración promedio de cinco años puede ser escoger un valor apropiado del coeficiente de suavizamiento  $\lambda$  cuando se implemente el filtro de H-P.<sup>vi</sup> Hassler et al. (1992) hacen

precisamente esto y encuentran que los ciclos de negocios obtenidos después de filtrar de esta manera son muy cercanos a los obtenidos con el filtro pasa banda.<sup>39</sup>

Esta sección se concluye con una reserva técnica. Para series infinitas un filtro pasa banda elimina completamente las frecuencias fuera de la banda de interés. Sin embargo, esto no es posible con series finitas, esto es, después del filtrado quedan aún componentes no deseados. El problema se debe a que la transformada finita de Fourier implícitamente considera a la serie como periódica con periodo igual a la longitud de la misma (así, el dato de 1861 precede al de 1988). Dos cosas en el procedimiento empleado reducen este problema potencial. Primero, se aplicó el filtro pasa banda a las series después de quitarles la tendencia con el filtro de H-P. Como resultado, las observaciones al inicio y al final de la muestra son cercanas a cero, algo que limita las distorsiones inducidas por el sobreenvolvimiento. Segundo, antes de aplicar el filtro pasa banda primero se rellenaron los datos agregando un gran número de observaciones al inicio y al final de cada serie.<sup>40vi</sup>

## Conclusiones

Lo más interesante de los hechos estilizados que fueron calculados fue su estabilidad a lo largo del tiempo. Por un lado, se reestableció el bien conocido hecho de que el periodo de posguerra es mucho menos volátil que el de preguerra. Por otro lado, se mostró que hay una gran muestra de estabilidad en la volatilidad relativa y los movimientos conjuntos de diferentes variables.

---

<sup>i</sup> Este procedimiento no es válido para series de carácter estocástico, como las económicas, debido a que en este caso el espectro complejo de Fourier, o periodograma, no es una buena estimación del espectro poblacional pues el primero no tiende al segundo conforme la longitud de la serie tiende a infinito. Esto solo ocurre con las series provenientes de procesos deterministas del tiempo. (Ver, por ejemplo, Jenkins y Watts, 1968, capítulo 6).

En la nota de pie de página 5 se describe el procedimiento utilizado para la estimación del espectro:

"Cuando se calculan el espectro y las coherencias se comienza por aplicar la transformada rápida de Fourier, con lo que automáticamente se agregan ceros a la serie, de tal manera que el número de observaciones sea una potencia de dos. El espectro y las coherencias son entonces suavizados con una ventana triangular con ancho igual a 11. Cada espectro es normalizado mediante la varianza de la serie, de manera que el área bajo el espectro es igual a uno. Finalmente, se grafica el logaritmo natural del espectro contra la frecuencia expresada en ciclos por 128 años. Las medias de las series originales han sido sustraídas antes de usar la transformada de Fourier, así el espectro para la frecuencia cero es igual a cero. Ver Koopmans (1974, c. 9) para detalles y recomendaciones."

<sup>ii</sup> El concepto de espectro promedio no es claro ni parece ser correcto por varias razones, entre ellas:

---

<sup>39</sup> Hassler et al. (1992), quien estudia el mismo periodo histórico que en este artículo, encuentra que un valor de  $\alpha = 1$  produce ciclos de cinco años en promedio para el PIB. El filtro resultante deja pasar componentes con frecuencias mayores y menores a las de interés, pero estos componentes de mayores y menores frecuencias pasan con considerablemente menos masa espectral que con el filtro de las primeras diferencias.

<sup>40</sup> El rellenamiento consiste en agregar la serie misma al inicio y al final de la serie de tiempo. Se continúa agregando de esta manera hasta que la serie filtrada resultante se vea inafectada por un rellenamiento adicional.

- 
- Si el espectro fuera completamente llano no podría provenir, como se afirma en el artículo, de una caminata aleatoria, pues su varianza no es constante o, en otros términos, no es estacionaria ya que los errores se van acumulando produciendo tendencias crecientes o decrecientes --recuérdese que una caminata aleatoria es un AR(1) con parámetros  $b_1=0$  y  $b_2=1$ :  $x(t)=X(t-1)+\varepsilon(t)$ ;  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ .
  - No parece haber razón para afirmar que el espectro promedio es  $1/64$  ( $\rightarrow \ln(1/64)=-4.16$ ). Una referencia correcta para determinar la significancia de un pico es el espectro del ruido blanco, que es la función constante uno, es decir, el valor de su varianza. Así, si se considera una escala logarítmica, como hacen los autores, el valor de referencia es la constante cero, ya que  $\ln(1)=0$ .

<sup>iii</sup> Mismas críticas a este procedimiento de filtrado.

<sup>iv</sup> De ser esa la explicación del ciclo de entre diez y doce años, entonces se debería suavizar los valores extremos de la serie antes de realizar el análisis espectral de las mismas.

<sup>v</sup> Esto no puede ser pues son filtros diferentes, como lo indican sus funciones de transferencia. No obstante, como el filtro de las primeras diferencias es un filtro pasa altos que atenúa los componentes con frecuencias menores a cinco años y magnifica al resto, ambos filtros dejan pasar, entre otros, a los componentes cuya duración va de los cinco a los ocho años. Es por eso que los resultados parecen similares.

<sup>vi</sup> Una limitación de este filtro es que, al no conocer su función de transferencia, no parece haber una manera clara de escoger los valores de  $\lambda$  que permitan aislar ciclos con frecuencias predeterminadas. Esto aunado al hecho de que es un filtro recursivo de no fácil implementación.

<sup>vii</sup> No es clara la explicación sobre los efectos del procedimiento.

## 6. Medición de ciclos económicos: filtros pasa banda aproximados para series de tiempo económicas<sup>41</sup>

En este artículo se desarrolla un conjunto de filtros pasa banda aproximados y se ilustra su aplicación en la medición del componente ciclo de los negocios de la actividad macroeconómica.

### I. Introducción

El procedimiento aquí propuesto aísla los componentes del ciclo de los negocios de una manera sencilla, transformando los datos macroeconómicos aplicando promedios móviles particulares especificados de acuerdo con las características definitorias de los componentes cíclicos. Técnicamente, se desarrollan filtros pasa banda aproximados que son forzados a producir salidas estacionarias cuando se aplican a series de tiempo crecientes.<sup>42</sup>

Para las aplicaciones empíricas de este artículo, se adopta la definición de *ciclo de los negocios* sugerida por los procedimientos y los resultados de los investigadores del NBER, como Burns y Mitchell, quienes especificaron que los ciclos de los negocios eran componentes cíclicos de no menos de seis trimestres de duración, y no menores de 32 trimestres (ocho años). Aquí se adoptan esos límites como la definición del ciclo de los negocios. El método desarrollado se aplicó a varias series trimestrales de EEUU de la posguerra, incluyendo producción e inflación.

Definir el ciclo de los negocios como fluctuaciones con un rango específico de periodicidades resulta en un promedio móvil particular de dos colas (un filtro lineal). En este caso, un filtro pasa banda. Sin embargo, el filtro pasa banda exacto es un promedio móvil de orden infinito, por lo que es necesaria una aproximación para aplicaciones prácticas. Entonces, un problema central discutido en este trabajo es cómo construir una buena aproximación al filtro óptimo.

Para resolver este problema de diseño del filtro, se requiere que el método cumpla seis objetivos<sup>43</sup> Primero, el filtro debe extraer un rango específico de periodicidades y dejar además intactas sus propiedades. Segundo, se requiere que el filtro pasa banda ideal no introduzca cambios de fase, es decir, que no altere las relaciones de tiempo entre series en ninguna frecuencia. Estos dos objetivos definen un promedio móvil ideal de los datos con pesos simétricos sobre valores

<sup>41</sup> Baxter, Marianne y Robert G. King (1999), "Medición de ciclos económicos: filtros pasa banda aproximados para series de tiempo económicas", *The review of Economics and Statistics*, 81 (4), pp. 575-593.

<sup>42</sup> Englund et al. (1992) y Hassler et al (1994) procedieron como los autores de este artículo definiendo primero al ciclo de los negocios y desarrollando entonces métodos para extraer los componentes del ciclo de los negocios de las series. Ellos emplean un procedimiento de dos pasos en el cual primero eliminan la tendencia de las series usando el filtro de Hodrick Prescott (1980), y entonces extraen los componentes del ciclo de los negocios mediante el filtrado pasa banda en el dominio de la frecuencia. Los autores discuten ese método con más detalle posteriormente en el presente artículo.

<sup>43</sup> Estos requerimientos son muy similares a aquellos que Prescott (1986) discute para justificar el uso del filtro de H-P (1980).

adelantados y rezagados. Tercero, se requiere que el método sea una aproximación óptima al filtro pasa banda ideal. Cuarto, se requiere que la aproximación del filtro aproximado resulte en una serie estacionaria cuando se aplique a datos con tendencia. Se impone el requerimiento de que la respuesta de frecuencia sea cero en la frecuencia cero. Quinto, se requiere que el método produzca componentes cíclicos que no dependan de la longitud del periodo muestral. Técnicamente, esto es posible con los promedios móviles, que son invariantes en el tiempo. Sexto, y finalmente, se requiere que el método sea operacional.

En el problema general de aproximación del filtro existe un *tradeoff* importante: el filtro pasa banda ideal puede ser mejor aproximado con los promedios móviles más largos, pero agregar más rezagos y adelantos conlleva también el perder más observaciones al inicio y final de las series, quedando muchas menos observaciones para el análisis. La recomendación es que se usen promedios móviles basados en tres años de los datos pasados y tres de los datos futuros, así como en la observación corriente, cuando se trabaje con series tanto trimestrales como anuales.

## II. Diseño del filtro

En esta sección se describe la construcción de promedios móviles que aislen los componentes periódicos de una serie de tiempo económica que caigan dentro de una banda de frecuencias específica. Esto es, de filtros pasa banda lineales. En este trabajo, se emplea el análisis en el dominio de la frecuencia para el diseño de filtros lineales, pero finalmente el filtrado tendrá lugar en el dominio del tiempo (es decir, simplemente se aplicarán promedios móviles a los datos macroeconómicos).

### A. Aplicar promedios móviles a series de tiempo

Al aplicar un promedio móvil a una serie de tiempo,  $y_t$ , se obtiene una nueva serie de tiempo,  $y_t^*$ , con

$$y_t^* = \sum_{k=-K}^K a_k y_{t-k}. \quad (1)$$

La transformada de Fourier de las ponderaciones es llamada la respuesta de frecuencia del filtro y

se expresa como  $\alpha(\omega) = \sum_{h=-K}^K a_h e^{-i\omega h}$ .

Es importante notar que  $\alpha(\omega)$  valdrá cero para la frecuencia cero si y solo si se pide que la suma de las ponderaciones del filtro sea cero ( $\alpha(0) = \sum_{h=-K}^K a_h e^{-i0h} = 0 \Leftrightarrow \sum_{h=-K}^K a_h = 0$ ).

La importancia de lo anterior radica en que, como se discutió antes, se requiere que el filtro tenga propiedades de eliminación de tendencias, de tal manera que pueda ser aplicado en series no estacionarias. Es por eso que se requiere que el filtro tenga una función de respuesta de frecuencia con  $\alpha(0)=0$ .

### B. El filtro pasa bajos

Un elemento básico en la construcción y diseño de filtros es el filtro pasa bajos. Si  $\beta(\omega)$  es la función de transferencia de este filtro, entonces las ponderaciones del filtro,  $b_h$ , pueden encontrarse mediante la transformada inversa de Fourier, así

$$b_h = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(\omega) e^{i\omega h} d\omega. \quad (2)$$

Evaluando esta integral, las ponderaciones del filtro ideal son

$$b_0 = \underline{\omega}/\pi \text{ y } b_h = \text{sen}(h\underline{\omega})/h\pi \text{ para } h = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Mientras que las ponderaciones tienden a cero conforme crece  $h$ , nótese que para construir el filtro ideal es necesario un promedio móvil de orden infinito. Entonces, se debe considerar una aproximación al filtro ideal con un promedio móvil finito.

### C. Aproximación de filtros simétricos

La aproximación óptima es aquella para la cual  $a_h = b_h$  para  $h = 0, 1, \dots, K$ , y  $a_h = 0$  para  $h \geq K+1$ , donde las ponderaciones  $b_h$  son aquellas dadas por la ecuación (3).

### D. Construcción de filtros pasa altos y pasa banda

Los filtros pasa altos y pasa banda se construyen fácilmente a partir de los filtros pasa bajos. Las ponderaciones del filtro pasa altos son  $1-b_0$  en  $h = 0$  y  $-b_h$  en  $h = \pm 1, 2, \dots$ . Para el filtro pasa banda se tiene que si  $b_{1h}$  y  $b_{2h}$  son las ponderaciones de dos filtros pasa bajos con frecuencias de

corte  $\omega_1, \omega_2$ ;  $\omega_1 > \omega_2$ , entonces las ponderaciones del filtro que deja pasar todos los componentes dentro del intervalo de frecuencias  $(\omega_1, \omega_2)$  son iguales a  $b_2 - b_1$ . Las aproximaciones a estos filtros ideales se obtienen truncando sus ponderaciones.

#### *E. Constricciones en puntos específicos*

En lo que resta del artículo solo se considerarán filtros pasa banda constreñidos a que la suma de sus ponderaciones sea igual a cero (para que valgan cero en la frecuencia cero). Se usará la notación  $BP_K(p, q)$  para referirse a la aproximación al filtro pasa banda ideal que deja pasar ciclos de entre  $p$  y  $q$  periodos.<sup>i</sup>

#### *F. Los efectos del truncamiento*

En esta sección se exploran los efectos de cambios en la longitud del rezago máximo  $K$  en la forma de los filtros pasa altos y pasa banda constreñidos.

Para el caso del filtro pasa altos se tiene que cuando  $K=4$  hay una gran desviación entre el filtro ideal y su aproximación. Conforme se incrementa el valor de  $K$ , el filtro truncado se asemeja más al ideal. Se estudiaron los casos en que  $K=8$ ,  $K=12$ ,  $K=16$  y  $K=32$ . Se ve que la desviación es pequeña con  $K=12$ .<sup>ii</sup>

#### *G. ¿Por qué filtrar en el dominio del tiempo?*

Un enfoque común en la aplicación del filtro pasa banda en el dominio de la frecuencia consiste en tomar primero la transformada discreta de Fourier de los datos económicos, calculando los componentes periódicos asociados a un número finito de frecuencias armónicas. Después, se multiplica por cero a las frecuencias que caen fuera de la banda de interés. Finalmente, se calcula la transformada inversa de Fourier para expresar la serie filtrada en el dominio del tiempo.

Se pueden ver dos importantes desventajas de este procedimiento explícitamente del dominio de la frecuencia. Primero, como la mayoría de las series económicas presentan tendencias estocásticas, es necesario eliminarlas antes de tomar su transformada de Fourier. Segundo, todos los resultados obtenidos con este método dependen de la longitud del intervalo muestral, lo cual viola el quinto requerimiento discutido en la primera sección.<sup>iii</sup>

### III. Midiendo el ciclo de los negocios

Como se discutió antes, un filtro ideal para el ciclo de los negocios se define como  $BP_{\infty}(6, 32)$ , cuya aproximación óptima es  $BP_K(6, 32)$ . En esta parte, primero, se describe el efecto que producen los cambios del punto de truncamiento  $K$  en los momentos calculados a partir de los datos generados por un proceso  $AR(1)$ , y, segundo, se explora el efecto de la variación de  $K$  en los momentos muestrales de varias series de tiempo macroeconómicas.

#### A. El efecto de la variación de $K$ sobre un proceso autorregresivo $A(1)$

Se examina el efecto de la variación de  $K$  en las autocovarianzas de la siguiente autorregresión de primer orden:

$$x_t = 0.95x_{t-1} + \epsilon_t$$

En el cuadro 1 se muestran las autocovarianzas para el filtro ideal y para varias aproximaciones de este (es decir, varios valores de  $K$ ).<sup>44iv</sup>

En ese cuadro se observa que la varianza se vuelve bastante pequeña para  $K \geq 12$ . Interesantemente, la varianza calculada a partir de los filtros aproximados no tiende monótonamente a la varianza verdadera conforme  $K$  crece. No obstante, las desviaciones del valor real son chicas para grandes valores de  $K$ . En todos los casos, el error de la aproximación es pequeño para  $K \geq 12$ .

#### B. Efectos empíricos de la variación de $K$

En esta subsección se explora el efecto de la longitud del promedio móvil en estadísticas sumarias para varias series de tiempo de EEUU de la posguerra. En el cuadro 2-A se presentan las desviaciones estándares, correlaciones seriales de los coeficientes y las correlaciones contemporáneas con el PIB para  $K = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ . En esta tabla se ve que la desviación estándar es sensible al valor de  $K$ . Una buena aproximación fue obtenida para  $K \geq 12$ . El cuadro 2-B contiene los coeficientes de correlación serial los cuales, como la desviación estándar, dependen de  $K$ . Como en los casos anteriores el problema es más severo para  $K = 4$ , y solo hay cambios pequeños para  $K \geq 12$ . El cuadro 2-C muestra los resultados para la correlación contemporánea del PIB con varias variables, lo que es una medida comúnmente usada del movimiento conjunto de

<sup>44</sup> Las autocovarianzas son momentos poblacionales y fueron calculados aplicando la función de transferencia del filtro pasa banda aproximado a la función de densidad espectral de la autorregresión de primer orden y después se integró numéricamente el resultado.

una variable con el ciclo de los negocios. En este cuadro se ve que hay una tendencia de estas correlaciones a incrementarse conforme  $K$  crece, a pesar de que esto no es uniformemente cierto. Como antes, esta tendencia no cambia mucho para  $K \geq 12$ . Globalmente, los resultados sugieren que las estadísticas sumarias, obtenidas de series macroeconómicas clave, son ampliamente invariantes a posteriores mejoramientos en el filtro de los negocios aproximado más allá de  $K=12$ .

### *C. Inspeccionando los resultados para el PIB*

En esta parte se muestran los resultados de aplicar cinco filtros al logaritmo natural del PIB. En las cuatro gráficas se usa el filtro del ciclo de los negocios, con  $K=12$ , como punto de referencia. El periodo muestral común es 1947.1-1997.1, pero con este valor de  $K$  se pierden tres años de datos en cada extremo de la serie, tanto para el filtro pasa banda como para el pasa altos.

*El filtro de las primeras diferencias.* Hay poca correspondencia entre las series producidas por cada filtro.

*El filtro de Hodrick-Prescott.* Hay una muy cercana correspondencia entre los ciclos aislados por este filtro y los generados por el filtro pasa banda, aun cuando la serie filtrada con el filtro de Hodrick-Prescott es un poco menos suave.

*El filtro pasa altos  $HP_{12}(32)$ :* En esta gráfica simplemente se ilustra el efecto del suavizamiento de los componentes de alta frecuencia introducido por el filtro pasa banda. Es claro que este suavizamiento de los componentes irregulares tiene pocos efectos sobre la volatilidad total.

*La desviación con respecto al filtro de promedios móviles de cinco años:* En la última gráfica se muestran las desviaciones de una media móvil centrada con ponderaciones iguales, misma que es ampliamente usada como método de eliminación de tendencia en la investigación del ciclo económico. Análogamente a los filtros pasa altos y de Hodrick-Prescott, la correspondencia con el filtro pasa banda es muy cercana, siendo la media móvil un poco más volátil.

## **IV. Comparación con otros filtros**

En esta sección se comparan las propiedades del filtro propuesto para el ciclo de los negocios con otros filtros comúnmente usados. Cada filtro se evalúa en términos de su capacidad de

proporcionar las siguientes características que se ha argumentado que son necesarias para un "buen" filtro del ciclo de los negocios: capacidad para remover raíces unitarias, ausencia de cambio de fase, y capacidad de aislar frecuencias del ciclo de los negocios sin reponderar las frecuencias filtradas.

#### A. Removimiento de tendencias lineales

La evidencia empírica muestra que la eliminación de tendencias lineales es indeseable para la mayoría de las series de tiempo macroeconómicas.

#### B. El filtro de las primeras diferencias

Hay varios problemas con este filtro con respecto a los criterios antes listados. Primero, este filtro no es simétrico, lo cual altera las relaciones en el tiempo entre las variables (es decir, este filtro induce una fase sustancial). Segundo, repondera los componentes filtrados (atenúa las bajas frecuencias y exalta las altas).<sup>v</sup> Si el objetivo es aislar componentes entre frecuencias específicas, el filtro de las primeras diferencias es una elección pobre.

#### C. El filtro de Hodrick-Prescott

La versión muestral infinita del filtro de Hodrick-Prescott define el componente cíclico,  $y_t^c$ , de una serie,  $y_t$ , como sigue:

$$y_t^c = \left( \frac{\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2}{1 + \lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2} \right) y_t \quad (3)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro que penaliza la variación en el componente de crecimiento. (Para datos trimestrales, Hodrick y Prescott recomiendan un valor de  $\lambda=1600$ ). De la ecuación, puede verse que este filtro remueve componentes de raíz unitaria. (De hecho, removerá componentes no estacionarios de orden de integración menor o igual que cuatro). Más aún, el filtro es simétrico, por lo que no induce cambios de fase.<sup>vi</sup> Para  $\lambda=1600$ , su función de transferencia se asemeja a la de un filtro pasa altos con frecuencia de corte igual a  $\pi/16$  o 32 ciclos por periodo.

En términos de los objetivos especificados para el problema de diseño del filtro, el filtro de Hodrick-Prescott tiene varias cualidades deseables. Primero, no introduce cambio de fase. Segundo, tiene propiedades de eliminación de tendencias. Tercero, con  $\lambda=1600$ , se aproxima bastante bien a un

filtro pasa altos  $HP_{\infty}(32)$ . Sin embargo, para aplicarlo a los datos son necesarias algunas modificaciones, debido a que es un promedio móvil de orden infinito.

#### D. Promedios Móviles

En este caso, el componente tendencia o de crecimiento se forma como

$$y_t^g = \frac{1}{2K+1} \sum_{j=-K}^K y_{t-j} \quad (4)$$

Entonces, el componente cíclico se genera con un filtro lineal cuyas ponderaciones son  $a_0=1-1/(2K+1)$ , y  $a_j=1/(2K+1)$  para  $j=1, 2, \dots, K$ .<sup>45vii</sup>

### V. Comparación de filtros pasa altos

En los apartados A y B de esta sección se hace una comparación entre el filtro de Hodrick-Prescott y el filtro pasa altos construido en este trabajo. Se concluye que el filtro pasa altos aquí propuesto es mejor en una dimensión importante: es de fácil aplicación en datos cuya frecuencia de muestreo no sea trimestral. Además se ve que el filtro de Hodrick-Prescott, en el caso de muestras finitas, no es invariante en el tiempo. Finalmente, se pierden prácticamente la misma cantidad de datos con ambos filtros pues las primeras y últimas estimaciones del filtro de Hodrick-Prescott deben ser desechadas.

#### C. Filtros pasa altos para frecuencias de muestreo distintas a la trimestral

Frecuentemente, solo se dispone de datos anuales. Para el procedimiento aquí propuesto, es claro cómo moverse entre diferentes frecuencias de muestreo. Por ejemplo, si para datos trimestrales se considera un filtro pasa altos  $HP_{12}(32)$ , entonces, lo natural es que el primer filtro a considerar para datos anuales sea  $HP_3(8)$ : con ambos se aíslan las mismas frecuencias y se pierde el mismo número de años en los extremos de las series.<sup>viii</sup>

Sin embargo, con el filtro de Hodrick-Prescott no es tan fácil saber cómo proceder con datos anuales, aunque en la práctica suele emplearse  $\lambda=400$  o  $\lambda=100$ ; no obstante, con esos valores el filtro recupera componentes con periodos entre nueve y dieciséis años y no entre dos y ocho años, que es lo que se desea.

<sup>45</sup> La forma general de este filtro es muy similar a la de un filtro pasa altos aproximado.

## VI. Resumen y conclusiones

El filtro pasa banda aquí diseñado para el ciclo de los negocios, es más flexible y fácil de implementar que los otros filtros considerados y produce una mejor aproximación al filtro ideal. Así, con base en los resultados de este trabajo, se recomiendan tres filtros para usar con datos macroeconómicos trimestrales y anuales:  $BP_{12}(6, 32)$ ,  $BP_{12}(2, 32)$  y  $BP_3(2, 8)$ . En el siguiente cuadro se proporcionan las ponderaciones de estos filtros.<sup>ix</sup>

**Cuadro4.—Ponderaciones para los filtros de los negocios**

Rezago	$BP_{12}(6, 32)$	$BP_{12}(2, 32)$	$BP_3(2, 8)$
0	0.2777	0.9425	0.7741
1	0.2204	-0.0571	-0.2010
2	0.0838	-0.0559	-0.1351
3	-0.0521	-0.0539	-0.0510
4	-0.1184	-0.0513	
5	-0.1012	-0.0479	
6	-0.0422	-0.0440	
7	0.0016	-0.0396	
8	0.0015	-0.0348	
9	-0.0279	-0.0297	
10	-0.0501	-0.0244	
11	-0.0423	-0.0190	
12	-0.0119	-0.0137	

<sup>i</sup> Se hace mucho énfasis en que la suma de las ponderaciones del filtro aproximado sea igual a cero. No obstante, en el cuadro cinco esto no parece cumplirse.

<sup>ii</sup> Esta parte es muy importante pues para ilustrar las desviaciones entre el filtro ideal y el aproximado no se hace referencia a la naturaleza de los datos, es decir, a si son anuales o trimestrales para mostrar la poca precisión de los promedios que consideran cuatro datos pasados y cuatro futuros. Esto se contradice de cierto modo con el hecho de que al final se ocupen filtros que tomen en cuenta tres años pasados y tres futuros, sugiriendo además que lo importante es el tiempo abarcado por el promedio, de tal manera que un filtro  $BP_{12}(2, 32)$  para una serie trimestral sea equivalente a un filtro  $BP_3(2,8)$  para datos anuales.

<sup>iii</sup> Ver nota i del primer artículo y nota iii del tercero.

<sup>iv</sup> No es claro a qué se refieren con "la implementación del filtro ideal" el cual, de hecho, no es implementable.

<sup>v</sup> Hacer notar que el filtro propuesto en el artículo también repondera los componentes filtrados (para sostener esta afirmación, lo ideal es mostrar la función de transferencia del filtro de promedios móviles simétricos).

<sup>vi</sup> La simetría es una condición necesaria, pero no suficiente, para garantizar cambios de fase iguales a cero.

---

<sup>vii</sup> Hay una confusión en el artículo con respecto al filtro de las medias móviles el cual, según su función de transferencia, es un filtro pasa bajos. Sin embargo, a partir de las ponderaciones de éste, y de la manera en que se hace en el trabajo, pueden construirse filtros pasa altos.

<sup>viii</sup> Es natural esa consideración; sin embargo, no se prueba la equivalencia entre ambos filtros.

<sup>ix</sup> Críticas a los filtros propuestos:

- No se demostró ni se argumentó formalmente la equivalencia entre filtros para datos trimestrales y filtros para datos anuales.
- En ningún caso, las ponderaciones de los filtros suman cero (ni uno), lo cual fue uno de los requisitos más señalados.
- Al aplicar el filtro  $BP_3(2, 8)$  a dos series cuyo espectro revela dos ciclos, uno de los cuales cae en el rango de frecuencias no siempre se obtiene el resultado esperado.

## COMENTARIOS RECAPITULADORES SOBRE LOS PROCEDIMIENTOS ESPECTRALES EMPLEADOS EN LOS ARTÍCULOS

Al igual que en el presente trabajo, en los artículos 1-5, se emplean estimaciones del espectro de potencia para saber cómo se distribuye la varianza en los diferentes ciclos de las series. No obstante, como se señaló en cada caso, el espectro muestral, obtenido a través de la transformada de Fourier, no es una buena aproximación al espectro teórico de una serie de carácter estocástico, como las económicas. Para series de este tipo, un mejor estimador se construye a partir del suavizamiento del espectro muestral, como se hace en los artículos 1 y 4. En particular, el procedimiento de estimación del espectro descrito en el artículo 4 es, en términos generales, equivalente al utilizado en la deducción de la ESDE. Sin embargo, sus resultados sobre el ciclo de Kondratieff deben ser aceptados con reservas, debido a que el orden de la ventana que se usó en el suavizamiento es tan grande ( $m = 50$ ) que el riesgo de inducir ciclos espurios es muy alto.

En los artículos 2 y 6 se diseñan filtros para los ciclos. El procedimiento expuesto en el artículo 2 consiste, a grandes rasgos, en calcular el espectro de Fourier y multiplicar por uno a las frecuencias de interés y por cero a las restantes, para luego obtener la serie filtrada mediante la transformada inversa de Fourier. Este mismo método es empleado en los artículos 3 y 5. Sus principales desventajas radican, por un lado, en que se emplea una mala estimación del espectro de potencia y, por otro, al hecho de que cuando se evalúa la eficacia del filtro, al aplicarlo a una serie construida a partir de una suma de funciones cíclicas y una tendencia lineal, se observan considerables divergencias entre las series filtrada y teórica (por ejemplo, la tendencia filtrada muestra amplias curvas cuando la teórica es una línea recta creciente). La precisión del filtrado mejora cuando se itera un número indeterminado de veces el procedimiento. En los ejemplos usados, se fueron comparando ambas series para diversos números de iteraciones con el fin de determinar en cuándo eran mínimas las discrepancias; no obstante, el número adecuado de iteraciones variaba, según el caso. Así, el problema con series económicas reales, sin una forma funcional específica, será el no poder realizar comparaciones de ese tipo, además de que son mucho más cortas que las series de los ejemplos, con 200 y 400 datos.

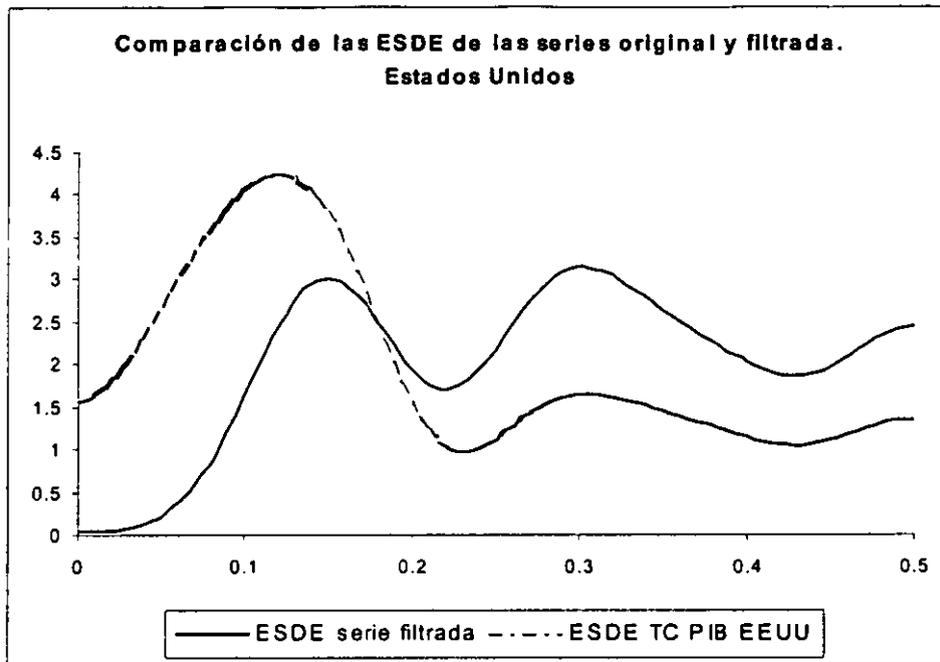
Finalmente, el filtro pasa banda diseñado en el artículo 6 está estrechamente vinculado a la definición del ciclo de los negocios usada por el NBER, de tal manera que las ponderaciones que se proponen sólo son útiles para aislar movimientos cíclicos de dos a ocho años de duración. Sin embargo, su construcción parece muy interesante, pese a que no es lo suficientemente clara como para poder diseñar filtros para aislar otras bandas de frecuencias. Una de sus características más importantes es que el filtrado es fácil y tiene lugar en el dominio del tiempo. Éste consiste en la aplicación de promedios móviles simétricos, con ponderaciones específicas proporcionadas por los autores. Este filtro es un caso particular de los filtros simétricos lineales, que además de ser de fácil

implementación, tienen la gran ventaja de inducir fases nulas en las series filtradas. Por estas y otras cualidades, en esta tesis se empleó también un filtro de esta familia, a saber, las medias móviles simétricas equiponderadas. Como ya se mostró, estas medias son filtros pasa bajos a partir de los cuales se puede resaltar prácticamente cualquier ciclo.

Como un estudio adicional del filtro pasa banda propuesto por Baxter y King,  $BP_3(2,8)$ , sus ponderaciones fueron aplicadas a tres series económicas reales: las tasa de crecimiento de los índices del PIB de Estados Unidos, Francia y Alemania. Como puede verse en el cuadro 3, todas las series contienen dos ciclos sobresalientes, uno de los cuales cae dentro de la banda de aceptación del filtro, y el otro en la de rechazo. Las duraciones promedio de los ciclos son: 8.6 y 3.16, 12 y 3.5, y 12.05 y 3, respectivamente. Las gráficas de la ESDE de cada serie, antes y después del filtrado, se exhiben en las figuras 20a-20c.

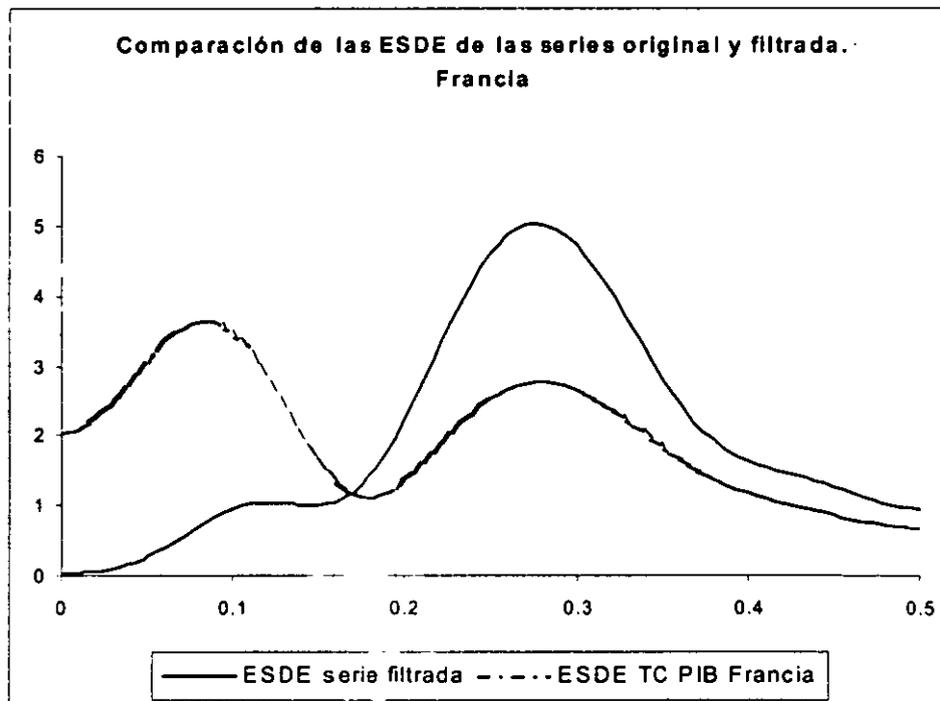
Como puede verse, solo en el caso de Francia (figura 20b) el filtrado es altamente satisfactorio, pues el ciclo de 12 años fue prácticamente eliminado. En cuanto a Estados Unidos (figura 20a), el filtro modificó la importancia relativa de un ciclo con respecto al otro, igualándose prácticamente sus alturas en la ESDE de la serie filtrada. Asimismo, el ciclo de mayor sufrió una disminución en su duración promedio de 8.18 a 6.66 años. Por último, en el caso de Alemania (figura 20c) sí se aisló al ciclo más pequeño, aunque su duración promedio también cambió ligeramente, de 3 a 4.39 años. Estos resultados parecen indicar que para, obtener un buen filtrado, es necesario que ambos ciclos estén bien definidos (lo cual no ocurre con las series de Alemania) y que la duración del ciclo que se desee eliminar no sea tan cercana a las duraciones que comprende la banda de aceptación del filtro (presumiblemente, ésta es la causa de que el ciclo de 8.18 años no fue eliminado de la serie de Estados Unidos).

FIGURA 20a



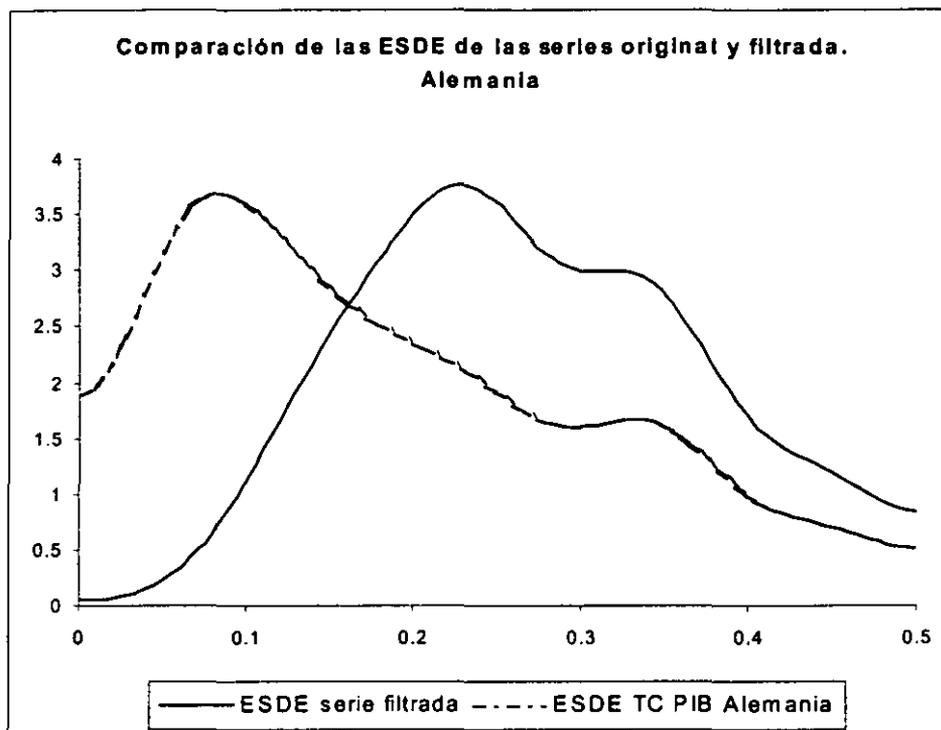
Fuente: Elaboración propia.

FIGURA 20b



Fuente: Elaboración propia.

FIGURA 20c



Fuente: Elaboración propia.

## COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

### Sobre la ESDE y el procedimiento de filtrado

- Como se expuso anteriormente, no hay una forma precisa para determinar el número de puntos,  $L$ , de la ventana. Sin embargo, la mayoría de las veces se obtienen resultados suficientemente claros con  $L = 9$  o  $L = 12$ . Si con ese valor la ESDE resultara poco clara, en el sentido de que no mostrase máximos locales bien definidos, es recomendable volver a calcularla con un valor 3 o 4 unidades mayor. No obstante, debe tenerse mucho cuidado al interpretar los resultados obtenidos al variar  $L$  pues entre mayor sea ésta más riesgo hay de inducir ciclos espurios.

Como regla empírica, debe desconfiarse de las gráficas que de un valor de  $L$  al siguiente muestren una enorme variación. Por ejemplo, si con  $L = 9$  resultan dos picos suaves y poco claros en la ESDE y con  $L = 12$  éstos se apuntalan y se definen bien, entonces es razonable concluir que éstos corresponden a dos movimientos cíclicos, cada uno definido por la frecuencia en que se sitúan los picos. Por otra parte, si además de una mejor definición de los dos ciclos iniciales se observan otras oscilaciones bien marcadas no presentes en la anterior estimación, es muy probable que éstas correspondan a ciclos espurios inducidos por un valor no adecuado de  $L$ .

- Después de descartar los ciclos espurios asociados al tamaño de  $L$  debe decidirse cuáles de los picos restantes en la ESDE pueden ser considerados como indicadores de movimientos cíclicos. Para ello, y debido a que la ESDE se basa en la aproximación de una serie mediante series de Fourier, se parte de considerar que en la serie temporal analizada están presentes todos los ciclos correspondientes a las frecuencias contenidas en el rango  $[0, \frac{1}{2}]$  y solo se consideran como significativos a los sobresalientes, esto es, aquellos que constituyan un máximo local en la ESDE cuyo valor sea mayor que 1, que es el espectro o varianza del ruido blanco.<sup>46</sup> Todos los valores inferiores a 1 indican la clara ausencia del ciclo correspondiente.
- Es muy importante suavizar los valores extremos de la serie antes de calcular la ESDE ya que, al ser ésta una estimación de la varianza, resulta también sensible a estos datos.

---

<sup>46</sup> Jenkins, G. Y D. G. Watts, *op cit*, pp. 224-226.

### Sobre los resultados

- En el cuadro tres puede notarse una gran recurrencia de al menos dos tipos de ciclos: el primero con una duración promedio entre 8.6 y 15.15 años, encontrado en las series de Alemania, Argentina, Australia, Austria, Bélgica, Canadá, Colombia, Dinamarca, Estados Unidos, Finlandia, Francia, Italia, México, Noruega, Reino Unido, Suiza y Venezuela; y el segundo con una duración promedio entre 2.38 y 6.6 años, encontrado en las series de Argentina, Alemania, Australia, Austria, Bélgica, Brasil, Canadá, Colombia, Corea del Sur, Chile, Dinamarca, España, Estados Unidos, Finlandia, Francia, India, Japón, México, Noruega, Nueva Zelanda, Perú, Reino Unido, Suecia, Suiza y Venezuela.

En resumen, 18 países presentaron ambos tipos de ciclos, aunque en seis casos se detectaron dos frecuencias correspondientes al ciclo más pequeño. En cinco países se detectó una sola frecuencia. En dos casos no se encontró ninguna evidencia de ciclos, lo cual seguramente se debe a que sus autocorrelaciones fueron muy cercanas a cero.

- Finalmente, existe una gran discrepancia entre las fechas de crisis encontradas con este método en el ciclo de 8.6 años de Estados Unidos (cuadro 3) y las fechas publicadas por el NBER para el ciclo de los negocios, mismas que se muestran en la sección C del apéndice de este trabajo. Presumiblemente, estas diferencias surgen con la propia definición 'del ciclo' investigado por el *National Bureau of Economic Research (NBER)*:

"Los ciclos de los negocios son el tipo de fluctuación que se encuentra en la actividad agregada de las naciones organizadas principalmente en empresas de negocios: un ciclo consiste de expansiones que ocurren más o menos al mismo tiempo en muchas actividades económicas, seguidas de similares recesiones, contracciones y restablecimientos generales que se fusionan con la fase expansiva del siguiente ciclo; esta secuencia de cambios es recurrente pero no periódica; en duración, los ciclos de los negocios varían de más de un año a diez o doce años; no son divisibles en ciclos más cortos de carácter similar y con amplitudes aproximadas a la suya."<sup>47</sup>

La definición anterior, sin cambios significativos, ha sido utilizada en el NBER por más de cincuenta años, siendo la que se emplea para identificar y fechar el ciclo de los negocios de Estados Unidos. Tales fechas son ampliamente aceptadas tanto por analistas de empresas gubernamentales y privadas como por investigadores académicos y, según se refiere en la parte final de un estudio reciente del NBER sobre los ciclos de los negocios<sup>48</sup>, las comparaciones entre su cronología y otras arrojan muy pocas discrepancias y no proporcionan razones suficientes para revisarla y o modificarla; asimismo, consideran que esas fechas están ampliamente apoyadas por el

<sup>47</sup> Burns, A. y Wesley Mitchell (1946), p. 1. Citado en Gordon, R. (ed.), 1986, p.3.

<sup>48</sup> Moore, G. Y V. Zamowitz, en R. Gordon (ed.), *op cit*, pp. 736-737, 758-759.

comportamiento fase a fase tanto de indicadores individuales como de combinaciones ponderadas de varias series de tiempo (Índices de actividad de los negocios).

De acuerdo con esta definición, el rango de duración de los ciclos es bastante amplio, de manera que incluye ciclos muy cortos y muy largos. Sin embargo, por parte del NBER no se reconoce ninguna distinción sistemática entre éstos, aunque se acepta que existen claras diferencias entre los ciclos 'mayores' o 'Juglar' y los 'menores' o 'Kitchin' —por ejemplo, en los primeros el capital fijo juega un papel muy importante, mientras que en los otros se considera más explicativo el movimiento de los inventarios— éstas solo son consideradas en la explicación causal de cada fluctuación y no como elementos suficientes para considerar la existencia de dos movimientos cíclicos cualitativamente distintos. A pesar del amplio rango de variación, la mayor parte de estos ciclos tienen una duración promedio aproximada de cuatro años.

Por otra parte, para identificar y fechar los ciclos el NBER se basa en un índice compuesto por numerosas series de tiempo sobre diversas actividades, por lo que las fechas resultantes no necesariamente coinciden con el momento de la ocurrencia de un mínimo o máximo en cada serie utilizada, sino que representan el periodo de tiempo en el que se concentran los puntos críticos de las series. Por esta razón, no puede esperarse una gran correspondencia entre las fechas mostradas en el cuadro 3 para el caso del PIB de Estados Unidos y la cronología del NBER.

## APÉNDICE

### A. Análisis exploratorio de los datos de las series de la tasa de crecimiento del índice del PIB de Estados Unidos y de los ciclos estimados en ésta

Detección de valores extremos y prueba exploratoria de normalidad<sup>49</sup> en los datos de las series siguientes: tasa de crecimiento del índice del PIB de Estados Unidos, TCPIBEEUU; media móvil de orden tres de la tasa de crecimiento del índice del PIB de Estados Unidos, MM(3); tasa de crecimiento del índice del PIB de Estados Unidos menos su media móvil de orden tres, TCPIBEEUU-MM(3).

**CUADRO A.1**  
Estadísticas descriptivas

	TCPIBEEUU	MM(3, -1)	TCPIBEEUU-MM(3, -1)
<b>MEDIA</b>	0.03517	0.3507867	-5.1105E-05
<b>VARIANZA</b>	0.003271	0.001535	0.001953
<b>DESVIACIÓN ESTÁNDAR (S)</b>	0.05719	0.03918	0.04419
<b>MEDIANA</b>	0.0332009	0.03176716	-0.00092334
<b>CUARTIL INFERIOR (QL)</b>	0.0093421	0.0198445	-0.02279913
<b>CUARTIL SUPERIOR (QU)</b>	0.06133359	0.05119185	0.02657012
<b>RANGO INTERCUARTÍLICO (IQR)</b>	0.05199149	0.03134735	0.04936925
<b>LÍMITE INFERIOR</b>	-0.14663236	-0.07419756	-0.17090689
<b>LÍMITE SUPERIOR</b>	0.21730806	0.14523391	0.17467788
<b>PSEUDO DESVIACIÓN ESTÁNDAR (sp)</b>	0.03851221	0.02322026	0.03656982

*Fuente:* datos estimados con SPSSX y *Econometric Views*, así como cálculos propios.

<sup>49</sup> Una prueba más formal se basa en el cálculo del estadístico de Jarque-Bera; sin embargo, como éste sólo es válido para series con al menos 1000 datos, no se utilizará en el presente trabajo.

### Valores extremos

Un dato  $Y_o$  de una serie se considera un valor extremo si

$$Y_o < QL - 1.5 IQR \quad \text{ó} \quad Y_o > QU + 1.5 IQR,$$

Valores extremos inferiores y superiores, respectivamente. Asimismo, se considera que  $Y_o$  es un valor extremo lejano si

$$Y_o < QL - 3.0 IQR \quad \text{ó} \quad Y_o > QU + 3.0 IQR.^{50}$$

De acuerdo con la segunda definición, se encontraron los siguientes valores extremos:

- TCPIBEEUU: -0.21 (1946).
- MM(3, -1): 0.19 (1942), 0.16 (1943), 0.15 (1944), -0.8 (1933), -0.9 (1947) y -0.1 (1932).
- TCPIBEEUU-MM(3, -1): (ninguno).

No obstante, en este caso, no hubo ningún cambio cualitativo significativo entre las estimaciones de la ESDE antes y después de la corrección de esos datos. Sin embargo, a ellos puede deberse el leve, pero no importante para los fines de este trabajo, sesgo entre la distribución muestral de las series y una distribución normal.

### Prueba exploratoria de normalidad de los datos<sup>51</sup>

El procedimiento consta de dos pasos. Primero, se verifica si los datos son razonablemente simétricos y, en ese caso, se averigua si las colas de la distribución muestral son suficientemente delgadas como para validar el supuesto de normalidad.

#### Paso 1. Análisis de asimetría

La ausencia o presencia de asimetría se deduce de la posición de la media relativa a la mediana:

1.  $media > mediana \rightarrow$  asimetría positiva;
2.  $media \cong mediana \rightarrow$  simetría aproximada;
3.  $media < mediana \rightarrow$  asimetría negativa.

Así,

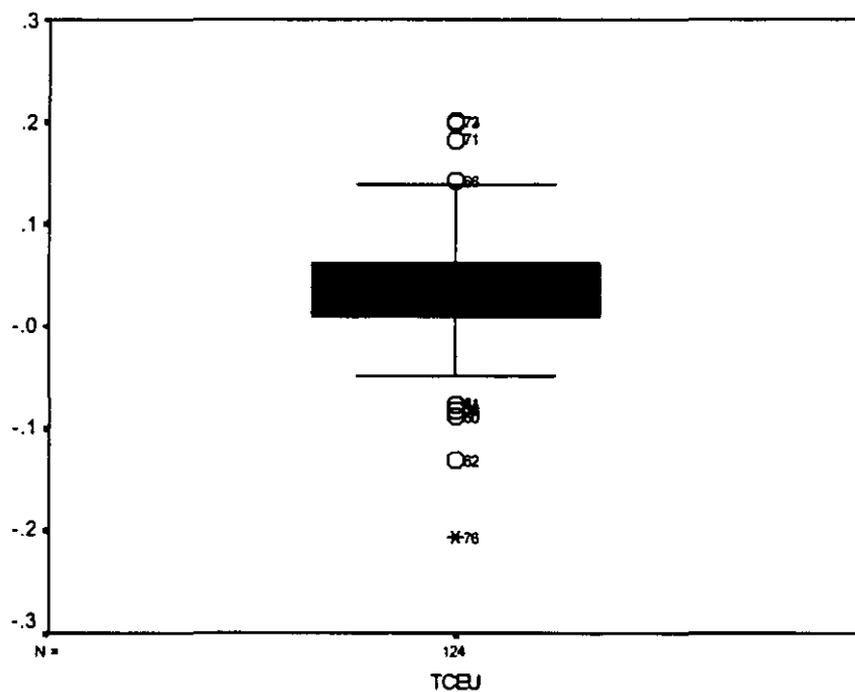
- TCPIBEEUU: simetría aproximada.
- MM(3, -1): simetría aproximada.
- TCPIBEEUU-MM(3, -1): ligera asimetría negativa.

<sup>50</sup> Mujherke (1999), p. 87.

<sup>51</sup> *Ibidem*, pp. 91-94.

Gráficamente, La simetría requiere que la mediana divida aproximadamente en mitades el diagrama de caja<sup>52</sup> de las series. En las figuras A.1-A.4 se muestran los diagramas de caja de las series. Como puede notarse, salvo en el segundo caso, la mediana se sitúa prácticamente en medio de los extremos de la caja.

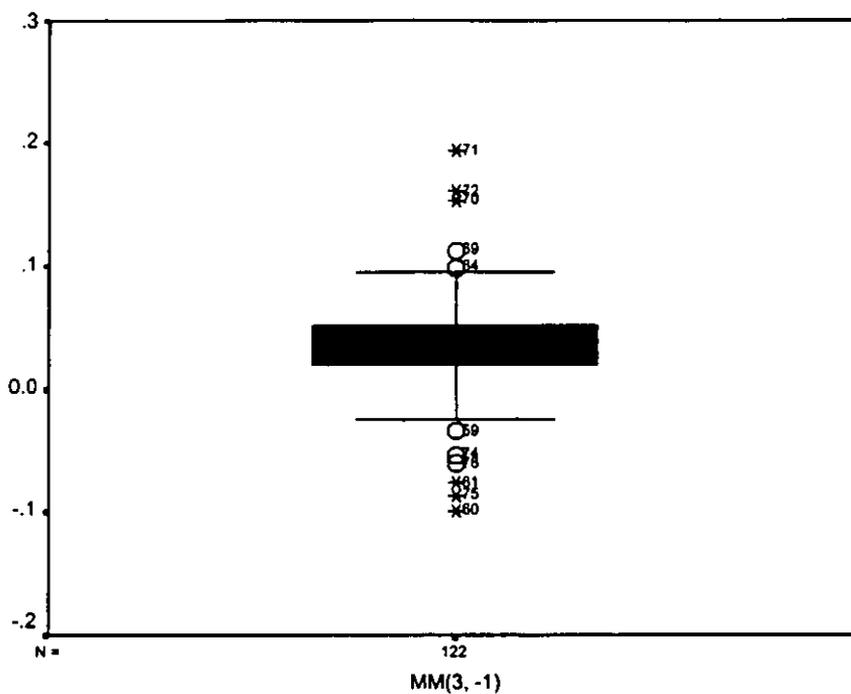
**FIGURA A.1**  
**Diagrama de caja de la TCPIBEEUU**



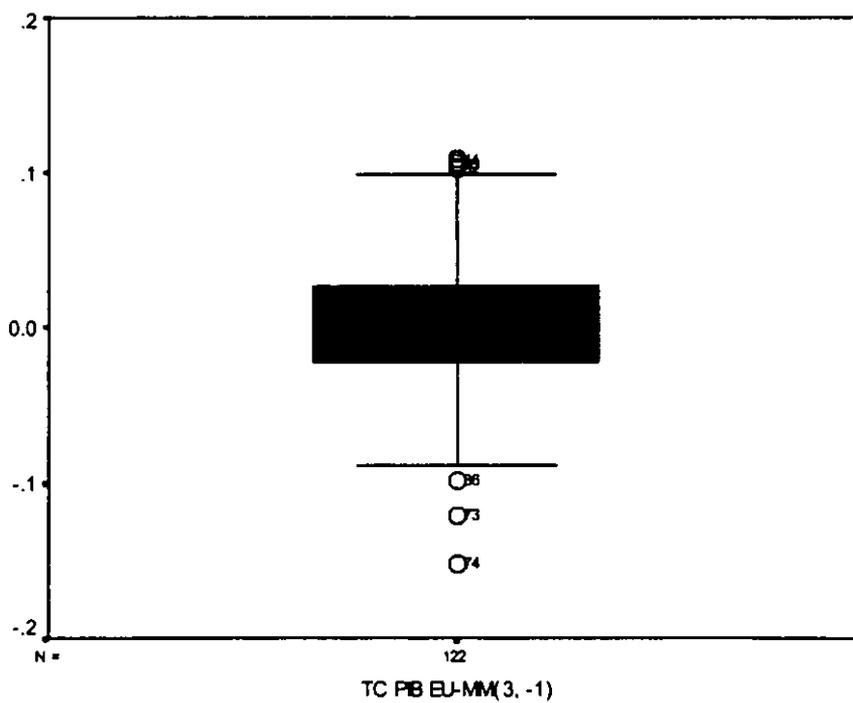
Fuente: SPSSX.

<sup>52</sup> El diagrama de caja básicamente consta de cinco líneas horizontales: dos externas que representan las colas de la distribución muestral (éstas se trazan a la altura de los puntos mínimo y máximo de la serie, sin considerar los valores extremos); y tres intermedias, que forman el cuerpo de la 'caja' y que representan los cuartiles superior e inferior y la mediana.

**FIGURA A.2**  
**Diagrama de caja de la MM(3, -1)**



**FIGURA A.3**  
**Diagrama de caja de la TCPIBEE(U)-MM(3, -1)**



Fuente: Ibidem.

De acuerdo con lo anterior, para los propósitos de este trabajo, la distribución muestral de las cuatro series puede considerarse aproximadamente simétrica, por lo que se procede con la segunda parte de la prueba.

#### *Paso 2: Análisis de las colas*

Si una distribución muestral aproximadamente simétrica tiene colas normales, su pseudo desviación estándar,  $sp = IQR / 1.35$ , tendrá un valor muy cercano al de su desviación estándar. Más específicamente, se tiene que:

1.  $sp < s \rightarrow$  colas más delgadas que las normales;
2.  $sp \cong s \rightarrow$  colas aproximadamente normales;
3.  $sp > s \rightarrow$  colas más gruesas que las normales.

Así,

- TCPIBEEUU: colas ligeramente más delgadas que las normales.
- MM(3, -1): colas ligeramente más delgadas que las normales.
- TCPIBEEUU-MM(3, -1): colas ligeramente más delgadas que las normales.

Entonces, para fines prácticos, puede concluirse que las cuatro series estudiadas siguen una distribución muy próxima a la normal.

#### **B. Prueba de la estacionariedad de la tasa de crecimiento del índice del PIB de Estados Unidos (TCPIB); 1871 a 1994 (n = 124, inicialmente)**

La siguiente es una prueba formal de estacionariedad que consiste en averiguar si la serie puede ser o no descrita como una caminata aleatoria (con o sin desplazamiento). Este procedimiento es comúnmente llamado prueba de raíz unitaria.<sup>53</sup> Si se rechaza la hipótesis nula de que la serie representa una caminata aleatoria, entonces se concluye que la serie es estacionaria.

*Paso 1a.* Consiste en estimar el modelo más general: un AR(1) con tendencia lineal que considera además la presencia de autocorrelación serial, con lo que resulta la siguiente regresión (cuadro B.1)

$$TCPIB = 0.030756 - 6.2E-05 * TENDENCIA + 0.242022 * TCPIB(-1) + 0.30665 * DIFLAG1TCPIB.$$

<sup>53</sup> Cabe señalar que esta prueba es más completa que la de Dickey-Fuller Aumentada (Mujherke, *op cit*, p. 352).

Donde TENDENCIA representa a la tendencia determinista del modelo, TCPIB(-1) el primer rezago de TCPIB y DIFLAG1TCPIB la primera diferencia con un rezago de TCPIB.

*Paso 1b.* Se estima el modelo restringido con  $H_0: \beta_1=\beta_2=0$  y  $\beta_3=1$ , para ver si se trata de una caminata aleatoria sin desplazamiento. La regresión que resulta es (cuadro B.2)

$$DIF1TCPIB = -0.348293 \cdot DIFLAG1TCPIB,$$

Donde DIF1TCPIB es la primera diferencia de TCPIB.

*Paso 1c.* Se obtiene la F calculada y se compara con la F de las tablas corregidas (estadístico  $\Phi_2$ )<sup>54</sup>, el cual, para una población de tamaño mayor que 100 y al 5% es igual a 4.68.

$$F_{calc} = [(SSRR1 - SSRU) / \# \text{ restricciones}] / (SSRU / (n - ku))$$

$$F_{calc} = [(0.518175 - 0.372547) / 3] / (0.372547 / (122 - 4)) = 15.375.$$

Como, en términos absolutos, F-calculada > F-tablas, se rechaza  $H_0$ , es decir, no se trata de una caminata aleatoria sin desplazamiento.

*Paso 2.a.* Se estima un segundo modelo restringido con  $H_0: \beta_2=0$  y  $\beta_3=1$  para ver si se trata de una caminata aleatoria con desplazamiento. La estimación resultante (cuadro B.3) es

$$DIF1TCPIB = -5.63E-05 - 0.348294 \cdot DIFLAG1TCPIB$$

*Paso 2b.* La F-calculada es

$$F_{calc} = [(SSR2 - SSRU) / \# \text{ restricciones}] / (SSRU / (n - ku))$$

$$F_{calc} = [(0.518174 - 0.372547) / 2] / (0.372547 / (122 - 4)) = 23.062.$$

Como F-calculada > F-tablas=6.25 (estadístico  $\Phi_3$ )<sup>55</sup>, se rechaza  $H_0$ , es decir, no es una caminata aleatoria con desplazamiento.

<sup>54</sup> Mujherke, *op cit*, p 480.

<sup>55</sup> *ibidem*.

*Paso 3.* La hipótesis nula  $\beta_3=1$  debe ser entonces probada con un estadístico t, mismo que es comparado con un valor crítico dado por la tabla normal estándar.

Entonces, como puede verse en el cuadro B.1, el coeficiente estimado para TCPIB(-1) es 0.242022, y la t calculada es

$$t\text{-calc}=(0.242022-1)/\text{error estándar}=-0.757978/0.111607= -6.79.$$

Como  $|-6.79| > 1.96$  (el valor en tablas de la normal estándar al 5%), se rechaza la hipótesis nula, es decir, se asume que TCPIB no tiene una raíz unitaria. Entonces, se concluye que TCY es estacionaria.

## CUADRO B.1

LS // Dependent Variable is TCPIB				
Date: 05/29/00 Time: 18:52				
Sample: 1873 1994				
Included observations: 122 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
C	0.030756	0.011446	2.687046	0.0082
TENDENCIA	-6.62E-05	0.000145	-0.457122	0.6484
TCPIB(-1)	0.242022	0.111607	2.168525	0.0321
DIFLAG1TCPIB	0.030665	0.092019	0.333244	0.7395
R-squared	0.073590	Mean dependent var	0.035028	
Adjusted R-squared	0.050037	S.D. dependent var	0.057650	
S.E. of regression	0.056189	Akaike info criterion	-5.725839	
Sum squared resid	0.372547	Schwartz criterion	-5.633904	
Log likelihood	180.1657	F-statistic	3.124464	
Durbin-Watson stat	2.007549	Prob(F-statistic)	0.028535	

Fuente: Resultados obtenidos con el paquete *Econometric Views*.

Estimation Command:

=====  
 LS TCPIB C TENDENCIA TCPIB(-1) DIFLAG1TCPIB

Estimation Equation:

=====  
 $TCPIB = C(1) + C(2)*TENDENCIA + C(3)*TCPIB(-1) + C(4)*DIFLAG1TCPIB$

Substituted Coefficients:

=====  
 $TCPIB = 0.030755848 - 6.620391e-05*TENDENCIA + 0.24202191*TCPIB(-1) + 0.030664825*DIFLAG1TCPIB$

CUADRO B.2

LS // Dependent Variable is DIF1TCPIB				
Date: 05/29/00 Time: 18:57				
Sample: 1873 1994				
Included observations: 122 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
DIFLAG1TCPIB	-0.348293	0.085218	-4.087083	0.0001
R-squared	0.121305	Mean dependent var		-9.66E-06
Adjusted R-squared	0.121305	S.D. dependent var		0.069811
S.E. of regression	0.065440	Akaike info criterion		-5.445070
Sum squared resid	0.518175	Schwartz criterion		-5.422086
Log likelihood	160.0388	Durbin-Watson stat		2.129769

Fuente: Resultados obtenidos con el paquete *Econometric Views*.

Estimation Command:

```
=====
LS DIF1TCPIB DIFLAG1TCPIB
```

Estimation Equation:

```
=====
DIF1TCPIB = C(1)*DIFLAG1TCPIB
```

Substituted Coefficients:

```
=====
DIF1TCPIB = -0.34829273*DIFLAG1TCPIB
```

## CUADRO B.3

LS // Dependent Variable is DIF1TCPIB				
Date: 05/29/00 Time: 19:22				
Sample: 1873 1994				
Included observations: 122 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
C	-5.63E-05	0.005949	-0.009468	0.9925
DIFLAG1TCPIB	-0.348294	0.085572	-4.070171	0.0001
R-squared	0.121306	Mean dependent var		-9.66E-06
Adjusted R-squared	0.113983	S.D. dependent var		0.069811
S.E. of regression	0.065712	Akaike info criterion		-5.428678
Sum squared resid	0.518174	Schwartz criterion		-5.382710
Log likelihood	160.0388	F-statistic		16.56629
Durbin-Watson stat	2.129768	Prob(F-statistic)		0.000085

Fuente: Resultados obtenidos con el paquete *Econometric Views*.

Estimation Command:

```
=====
LS DIF1TCPIB C DIFLAG1TCPIB
```

Estimation Equation:

```
=====
DIF1TCPIB = C(1) + C(2)*DIFLAG1TCPIB
```

Substituted Coefficients:

```
=====
DIF1TCPIB = -5.6329123e-05 - 0.34829429*DIFLAG1TCPI
```

**C. Fechas de los puntos críticos del ciclo de los negocios según el National Bureau of Economic Research (NBER)**

**CUADRO C.1  
DATOS DE REFERENCIA DEL CICLO DE LOS NEGOCIOS, SEGÚN EL NBER  
(DURACIÓN EN MESES)**

Valle	Pico	Contracción (de pico a valle)	Expansión (de valle a pico)	Ciclo (de valle a valle)	Ciclo (de pico a pico)
Diciembre 1854	Junio 1857	---	30	---	---
Diciembre 1858	Octubre 1860	18	22	48	40
Junio 1861	Abril 1865	8	46	30	54
Diciembre 1867	Junio 1869	32	18	78	50
Diciembre 1870	Octubre 1873	18	34	36	52
Marzo 1879	Marzo 1882	65	36	99	101
Mayo 1885	Marzo 1887	38	22	74	60
Abril 1888	Julio 1890	13	27	35	40
Mayo 1891	Enero 1893	10	20	37	30
Junio 1894	Diciembre 1895	17	18	37	35
Junio 1897	Junio 1899	18	24	36	42
Diciembre 1900	Septiembre 1902	18	21	42	39
Agosto 1904	Mayo 1907	23	33	44	56
Junio 1908	Enero 1910	13	19	46	32
Enero 1912	Enero 1913	24	12	43	36
Diciembre 1914	Agosto 1918	23	44	35	67
Marzo 1919	Enero 1920	7	10	51	17
Julio 1921	Mayo 1923	18	22	28	40
Julio 1924	Octubre 1926	14	27	36	41
Noviembre 1927	Agosto 1929	13	21	40	34
Marzo 1933	Mayo 1937	43	50	64	93
Junio 1938	Febrero 1945	13	80	63	93

Octubre 1945	Noviembre 1948	8	37	88	45
Octubre 1949	Julio 1953	11	45	48	56
Mayo 1954	Agosto 1957	10	39	55	49
Abril 1958	Abril 1960	8	24	47	32
Febrero 1961	Diciembre 1969	10	106	34	116
Noviembre 1970	Noviembre 1973	11	36	117	47
Marzo 1975	Enero 1980	16	58	52	74
Julio 1980	Julio 1981	6	12	64	18
Noviembre 1982	Julio 1990	16	92	28	108
Marzo 1991	---	8	---	100	---

Fuente: <http://www.nber.org/cycles.html>

## REFERENCIAS

### I. Sobre las técnicas

- Ambardar, A. (1995), *Analog and Digital Signal Processing*, New Jersey, Prentice-Hall.
- Baxter, M. y R. G. King (1999), "Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series", *The Review of Economics and Statistics*, 81 (4), pp. 575-593.
- Bellanger, M. (1984), *Digital Processing of Signal: Theory and Practice*, Chichester, John Wiley & Sons.
- Bloomfield, Peter (1976), *Fourier Analysis of Time Series: an Introduction*, New York, John Wiley & Sons.
- Box, George E. P. y Gwilym M. Jenkins (1976), *Time Series Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day.
- Espasa, A. y J. R. Cancelo (eds.), 1993, *Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica*, Madrid, Alianza Editorial.
- Ewijk, C. van (1982), "A Spectral Analysis of the Kondratieff Cycle", *Kyklos*, no. 35, pp. 468-499.
- Englund, P. y L. E. O. Svensson (1992), "Swedish business cycles: 1861-1988", *Journal of Monetary Economics*, 30, pp. 343-371.
- Fernández, J. (1994), *Proceso de acumulación y crisis en México: una aproximación desde la perspectiva de las ondas largas*, tesis de doctorado, Universidad de Barcelona.
- Fuller, Wayne A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, New York, John Wiley & Sons.
- Hsu, Hwei P. (1986), *Análisis de Fourier*, México, Fondo Educativo Interamericano.
- Jenkins, Gwilym M. y Donald G. Watts (1968), *Spectral Analysis and its Applications*, San Francisco, Holden-Day.
- Kamen, Edward W. (1996), *Introducción a señales y sistemas*, México, CECSA.
- Kleinknecht, A., Mandel, E. e I. Wallerstein (eds.), 1992, *New Findings in long wave Research*, N.Y., St Martin's Press.
- Koopmans, L. H. (1974), *The Spectral Analysis of Time Series*, N. Y., Academic Press.
- Lilen, D. M., et al (1994), *Eviews User's Guide*, Irvine, Cal., QMS.
- Metz, R. y W. Stier, "Filter Design in the Frequency Domain", en Kleinknecht et al (1992), pp. 45-79.
- Metz, R., "A Reexamination of Long Waves in Aggregate Production Series", en Kleinknecht et al (1992), pp.80-119.
- Mukherjee, Ch., H. White y M Wuyts (1998) *Econometrics and Data Analysis for Developing Countries*, Londres, Routledge.
- Otnes, R. K. y L. Enochson (1978), *Applied Time Series Analysis, Volume 1, Basic Techniques*, N. Y., John Wiley & Sons.

Quintero, C. (1999), *El análisis espectral univariante de series de tiempo para la detección de ciclos económicos*, tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM.

Reijnders, J. P. G., "Between Trends and Trade Cycles: Kondratieff Long Waves Revisted", en Kleinknecht *et al* (1992), pp. 15-44.

Shanmugan, K. S. y A. M. Breipohl (1988), *Random Signals. Detection, estimation and data analysis*, New York, John Wiley & Sons.

Shumway, R. H. (1988), *Applied Statistical Time Series Analysis*, New Jersey, Prentice-Hall.

## II. Sobre los conceptos económicos

Amin, Samir (1985), *La acumulación a escala mundial. Crítica de la teoría del subdesarrollo*, México, Siglo XXI.

Fröbel, F., J. Heinrichs y O. Kreye (1980), *La nueva división internacional del trabajo. Para estructural en los países industrializados e industrialización de los países en desarrollo*, Madrid, Siglo XXI.

Gordon, R. (ed.), 1986, *The American Business Cycle. Continuity and Change*, Chicago, NBER.

Lewis, W. A. (1983), *Crecimiento y fluctuaciones 1870-1913, México, FCE.*

Niveau, M. (1983), *Historia de los hechos económicos contemporáneos*, Barcelona, Ariel.

Palazuelos, Enrique (*et al*), 1990, *Estructura económica capitalista internacional. El modelo de acumulación de posguerra*, Madrid, Akal. [falta la referencia del compañero]

Stock, J. H. y M. W. Watson (eds.), 1993, *Business Cycles, Indicators and Forecasting*, Chicago, NBER.

Talavera, P. (1984), *Economía mundial y subdesarrollo*, Barcelona, Ed. Hacer.

Vidal, J. M. y J. Martínez (1987), *Estructura económica y sistema capitalista mundial*, Madrid, Ediciones Pirámide.

----- (1995), *Economía Mundial*, Madrid, McGraw-Hill.

## III. Sobre las fuentes estadísticas

Maddison, A. (1997), *La economía mundial 1820-1992. Análisis y estadísticas*, París, OCDE.

Duményl, G. Y D. Lévy, *The Economics of the Profit Rate. Competitio, Crises and Historical Tendencies in Capitalism*, París, Edward Elgar.

<http://www.dowjones.com.us>

<http://www.globalfindata.com/>

<http://www.nber.org/databases/jones-obstfeld/index.html>

<http://www.amatecon.comm/qdfandf.html>