

00365

2



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TRANSFORMADA DE RADON
Y LA CURVATURA DE UN
UNIVERSO

295499

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)

PRESENTA:
FRANCISCO JOSE BULNES AGUIRRE



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TRANSFORMADA DE RADON Y
LA CURVATURA DE UN UNIVERSO**

Francisco J. Bulnes Aguirre

fjbulnes@lomas verdes.uvmnet.edu

Marzo 2000

1

A Panchito

Agradecimientos: Agradecido al Dr. Fernando Escobar por su orientación y ayuda para realizar este trabajo. Así mismo un especial agradecimiento a mi hermano Gustavo Escobar por su gran apoyo y ayuda para la materialización de este trabajo.

Mi agradecimiento al apoyo recibido de:

IM-UNAM - Instituto de Matemáticas de la UNAM

ICM-UNAM - Facultad de Ciencias UNAM

Toda mi gratitud a mis padres Conchita y Manuel.

Contenido

Introducción General.....	71
CAPITULO 0	
TRANSFORMADA DE RADON Y CURVATURA	
0.1. Correspondencias Generales.....	2
0.2. Curvatura.....	2
0.3. Glosario Técnico.....	4
CAPITULO I	
TRANSFORMADA DE RADON CLASICA	
1.1. Transformada de Radon sobre R^n	6
1.2. Relación entre la Transformada de Radon y de Fourier.....	12
CAPITULO II	
GENERALIZACION DE LA TRANSFORMADA DE RADON	
2.1. Generalización de la transformada de Radon a espacios homogéneos no euclídeos.....	16
2.2. Integración invariante en un espacio de curvatura constante.....	17
2.3. Integración sobre subvariedades totalmente geodésicas en espacios homogéneos de curvatura constante. Integrales Orbitales.....	20
2.4. Espacio hiperbólico.....	24
CAPITULO III	
CURVATURA	
3.1. Concepto General de Curvatura.....	33
3.2. Propiedades de la Curvatura como un Mapeo Cuadrilineal sobre un Espacio Vectorial n-Dimensional.....	34
3.3. Curvatura Seccional.....	35

CAPITULO IV

MEDICION DE LA CURVATURA DE UN UNIVERSO MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE RADON

4.1. El Cosmos y la Justificación del uso de Elementos Electrodinámicos (Haces de Luz Provenientes de las Estrellas) en la Medición de su Curvatura.....	40
4.2. Transformada de Radon Vectorial.....	41
4.3. Generalización.....	45
4.4. Recepción de las Señales de Luz.....	46
4.5. Medición de la Curvatura mediante la Transformada de Radon.....	46
4.6. Consistencia de la Medida.....	54

CAPITULO V

TRANSFORMADA DE RADON SOBRE HOROCICLOS

5.1.El Disco de Poincaré.....	62
5.2.Horociclos.....	63
5.3.La Transformada de Radon sobre Horociclos.....	65

Apéndices

APENDICE A: Espacio Simétrico Homogéneo.

APENDICE B: Cronogeometría.

APENDICE C: El Uniespacio (Cubriente Universal).

APENDICE D: El Algebra no Simétrica

APENDICE E: Paralajes.

APENDICE F: La Transformada de Radon de la Doble Fibración.

Referencias

RESUMEN DE LA TESIS DE MAESTRÍA

TRANSFORMADA DE RADON Y CURVATURA DE UN UNIVERSO.

En esta tesis se hace primero un estudio de la Transformada de Radon Clásica que sirvió para desarrollar la tomografía computarizada. Y llevó al Premio Nobel de medicina 1979 a un Físico y un Ingeniero. Tomando, después del Premio Nobel, un gran auge el área de Geometría Integral. Esta Transformada además de ser una transformada con fuertes características geométricas tiene un gran interés, por su relación con la Transformada de Fourier.

Como segunda parte se investigó sobre las generalizaciones de la Transformada de Radon. En particular la generalización cuando se cambian espacios R^n por Variedades Diferenciales. Y cuando las rectas son cambiadas por geodésicas. Así se empezó un estudio tomográfico de variedades.

El resultado más importante de esta tesis viene en el capítulo 0 que se avoca a tratar de recuperar la curvatura de un espacio alrededor de un punto, si la información que se tiene es la integral sobre distintas geodésicas. Esto es un **PROBLEMA INVERSO**. Usualmente en los cursos de geometría nos enseñan a calcular por ejemplo la curvatura teniendo toda la información disponible. Pero en la práctica queremos saber el comportamiento de una variedad en lugares **inaccesibles**. De ahí la idea de usar el principio de tomografía para conocer por un método indirecto la curvatura sin estar "parado ahí".

"Curvatura de una variedad".

La fundamentación Matemática para que podamos, con ultrasonido "Hacer la imagen de la forma de órganos inaccesibles" está basado en la Transformada de Radon Vectorial. Y la fundamentación Matemática para "Saber cual es la curvatura de una variedad" es una generalización de la Transformada de Radon a variedades y una interpretación correcta de los conceptos de curvatura y de integral de Radon. Es en el Capítulo 0 donde presentamos la fundamentación matemática del problema de Curvatura y Transformada de Radon.

Se complementa la tesis agregando un ejemplo en el capítulo 4 que trata de contestar la pregunta ¿Cómo se calcularía la curvatura de una región del universo, si solo se puede conocer integrales sobre los rayos de luz que recorren geodésicas?.

Mat. Francisco Bulnes Aguirre.

CAPITULO 0
TRANSFORMADA DE RADON Y CURVATURA

0.1. Correspondencias Generales.

Sea M y Σ variedades diferenciables de dimensión finita. Considerese a Σ una subvariedad de M . La transformada de Radon (generalizada) es el mapeo lineal

$$R : C_c^\infty(M) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$$

cuya regla de correspondencia es

$$f \mapsto R(f) := \int_\Sigma f \mu$$

donde $\forall x, y \in M$, dicha regla de correspondencia en forma explícita viene dada como

$$R(f) = \int_\Sigma f(x) \mu_x(x)$$

donde para cada $y \in \Sigma$ existe una correspondiente subvariedad Σ^y de M con densidad μ_y sobre Σ^y .

El objetivo es demostrar que $R(C_c^\infty(M))$ es una subvariedad del espacio de funciones generalizadas $D'(M) \subset D(M) := C_c^\infty(M)$ y calcular su curvatura extrínseca, la cual se calculará como el Hessiano compuesto con la transformada de Radon.

Sea σ el mapeo suave definido como

$$\sigma : \Sigma \rightarrow D'(M)$$

cuya regla de correspondencia es

$$y \mapsto \sigma(y)$$

donde $D'(M) = \mathcal{L}(D(M), \mathbb{R})$. Por el principio de acotación uniforme, el mapeo σ es suave si y sólo si la composición por la evaluación

$$ev_f : \mathcal{L}(D(M), \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

cuya regla de correspondencia es

$$\sigma(y)(f) \mapsto \langle \sigma(y), f \rangle$$

es suave $\forall f \in D(M)$, es decir, $R_{\sigma_f}(f) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es suave para cada $f \in D(M)$. Entonces

$$R_{\sigma_f}(f) = \sigma \circ ev_f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

con regla de correspondencia

$$R_{\sigma_f} : \sigma(y)(f) \mapsto \langle \sigma(y), f \rangle$$

Así mismo $\sigma : \Sigma \rightarrow D'(M)$ es un encaje de una subvariedad encajada de dimensión finita suave en el espacio vectorial localmente convexo $D'(M)$. Por lo tanto la transformada de Radon en sí misma está definida también en forma más general como un mapeo suave de este tipo, es decir, es un encaje suave en el espacio $D'(M)$.

Consideremos el siguiente ejemplo trivial. Considerese el mapeo

$$\delta : M \rightarrow D'(M)$$

un encaje de Dirac cuya regla de correspondencia es

$$x \mapsto \delta_x$$

donde δ_x es la medida de Dirac. Entonces

$$R_{\delta_f}(f) := \langle \delta_x, f \rangle = f_x \quad \forall f \in D'(M), x \in M$$

0.2. Curvatura.

Demos la definición de la segunda forma fundamental o curvatura extrínseca de una subvariedad de dimensión finita Σ del espacio localmente convexo $D'(M)$.

No asumiremos la existencia de un producto interno sobre cierto subespacio de dimensión finita de $D'(M)$. Lo que haremos será considerar para este caso general, el haz normal

$$N(\Sigma) := (TD'(M)|_\Sigma) / T\Sigma$$

y la proyección canónica

$$\pi : TD'(M)|_\Sigma \rightarrow N(\Sigma)$$

de haces vectoriales sobre Σ . La estructura lineal de $D'(M)$ da como es obvio la derivada covariante $\nabla_X Y$ de los campos vectoriales X, Y sobre $D'(M)$, la cual está definida por

$$(\nabla_X Y)(\phi) = dY(\phi)X(\phi) \quad \forall \phi \in D'(M)$$

Para campos vectoriales (locales) $X, Y \in \mathcal{K}(D'(M))$ los cuales son a lo largo de Σ tangentes a Σ . Consideremos la sección $S(X, Y)$ de $N(\Sigma)$, la cual está dada por $S(X, Y) = \pi(\nabla_X Y)$. Esta sección depende solo de $X|_\Sigma$ y $Y|_\Sigma$, por lo cual podemos considerar el flujo $\mathcal{F}_t^{X|_\Sigma}$ del campo vectorial $X|_\Sigma$ sobre la variedad de dimensión finita Σ , y tenemos que

$$(\nabla_X Y)|_\Sigma = d/dt \{Y \circ \mathcal{F}_t^{X|_\Sigma}\}|_{t=0}$$

Consideremos el mapeo suave

$$Y : D'(M) \rightarrow D'(M)$$

cuya regla de correspondencia es

$$\phi \mapsto Y(\phi)$$

Obviamente $S(X, Y)$ es $C^\infty(M)$ -lineal en X y esta es simétrica ya que

$$S(X, Y) - S(Y, X) = \pi(dYX - dXY) = \pi([X, Y]) = 0$$

Así mismo la forma fundamental o curvatura intrínseca de la subvariedad Σ de $D'(M)$ está dada por el mapeo

$$S : T\Sigma \times T\Sigma \rightarrow N(\Sigma)$$

cuya regla de correspondencia es

$$X, Y \mapsto S(X, Y) = \pi(\nabla_X Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{K}(\Sigma)$$

Para $y \in \Sigma$ el espacio vectorial conveniente $N_y(\Sigma) = D'(M)/T_y(\Sigma)$ es el espacio dual del subespacio lineal cerrado

$$\{f \in D'(M) \mid \langle T_y \phi X, f \rangle = 0 \quad \forall X \in T_y(\Sigma)\}$$

Teorema.0.2.1. Sea $\sigma : \Sigma \rightarrow D'(M)$ un encaje suave de una variedad suave de dimensión finita Σ en el espacio de distribuciones $D'(M)$, y sea $R_\sigma : C_c^\infty(M) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$ la transformada de Radon asociada a dicho encaje. Entonces la curvatura extrínseca de $\sigma(\Sigma)$ en $D'(M)$ es el hessiano compuesto con la transformada de Radon.

Prueba: $\sigma(\Sigma)$ es una subvariedad encajada de dimensión finita en $D'(M)$, la cual puede ser seccionada y por lo tanto para cada campo vectorial $X \in \mathcal{K}(\Sigma)$ existe una extensión (local) $X^\sim \in \mathcal{K}(D'(M))$. No es muy conocido que el espacio $D'(M)$ admita particiones suaves de la unidad (ver cita [17] y el libro de Kriegl, A. "Foundations of Global Analysis"). Pero el espacio $C_c^\infty(M)$ de funciones de prueba sí admite particiones suaves de la unidad. Ahora bien, una función de prueba $f \in C_c^\infty(M)$ está en el espacio aniquilador si y sólo si $\langle T_y \phi X, f \rangle = 0 \quad \forall X \in T_y(\Sigma)$. Elijamos una curva suave

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$$

con $c(0) = y$ y $c'(0) = X$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle T_y \phi X, f \rangle &= \langle d/dt \sigma(c(t))|_{t=0}, f \rangle = \langle d/dt \sigma(c(t)), f \rangle|_{t=0} \\ &= d/dt R_\sigma f(c(t))|_{t=0} \\ &= d(R_\sigma \Omega)_y(X) \end{aligned}$$

Ahora calculemos la curvatura extrínseca de $\sigma(\Sigma)$. Sean $X, Y \in \mathcal{K}(\Sigma)$ campos vectoriales. Sean X^\sim y Y^\sim sus extensiones suaves para $D'(M)$. Sea $y \in \Sigma$ y elijamos $f \in C_c^\infty(M)$ con $d(R_\sigma \Omega)_y = 0$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle S(X, Y)(y), f \rangle &= \langle (\nabla_X^\sim Y^\sim)(\sigma(y)), f \rangle = \langle dY^\sim(\sigma(y)), X^\sim(\sigma(y)), f \rangle \\ &= \langle dY^\sim(\sigma(y)), d\sigma(y) \cdot X(y), f \rangle \\ &= \langle d(d\sigma \cdot Y)(y), X(y), f \rangle \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} Y(R_\sigma f) &= d(R_\sigma f) \cdot Y = d/dt R_\sigma f \circ F|_{t=0}^Y = d/dt \langle \sigma \circ F|_t^Y, f \rangle|_{t=0} \\ &= \langle d\sigma \cdot Y, f \rangle \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} XY(R_\sigma f)(Y) &= d/dt (Y(R_\sigma f))(F|_t^Y(y))|_{t=0} = d/dt \langle d\sigma \cdot Y, f \rangle(F|_t^Y(y))|_{t=0} \\ &= \langle d(d\sigma \cdot Y), X(y), f \rangle \\ &= \langle S(X, Y)(y), f \rangle \end{aligned}$$

donde $\langle S(X, Y)(y), f \rangle$ es el hessiano de $R_\sigma f$ en y aplicado a $(X(y), Y(y))$. \square

Por lo tanto la curvatura extrínseca en una sección Σ de M de $\sigma(\Sigma)$ en $D'(M)$ es:

$$K(\sigma(\Sigma)) : T_y \Sigma \times T_y \Sigma \rightarrow N_y(\Sigma)$$

con regla de correspondencia

$$XY(R_\sigma f(y)), f \mapsto \langle S(X, Y)(y), f \rangle_y$$

es decir, $K(\sigma(\Sigma)) = \langle S(X, Y)(y), f \rangle_y$ y la curvatura total extrínseca es

$$K(M) = \int_M K(\sigma(\Sigma)) dV_M$$

donde dV_M es la forma de volumen de la variedad M de la cual es subvariedad Σ .

0.3. Glosario Técnico.

$C_c^\infty(M) = D(M)$ - Es el espacio de funciones diferenciables con soporte compacto sobre la variedad M .

$\mathcal{L}(C_c^\infty(M), \mathbb{R}) = C_c^\infty(M)' = D'(M)$ - Espacio de mapeos lineales cuyo espacio dual es el espacio de funciones suaves de soporte compacto localmente convexo.

Lema 0.3.1. $C^\infty(|\Lambda^m|(M))$ es denso en $D'(M)$.

Prueba: Ver citas [12], [17] y [25].

$ev_f : \mathcal{L}(D(M), \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ - Es el mapeo "evaluación de f " cuya regla de correspondencia es

$$\sigma(y)(f) \mapsto \langle \sigma(y), f \rangle$$

Proposición 0.3.1. $R_\sigma : C_c^\infty(M) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$ es inyectivo si y sólo si el subconjunto $\sigma(\Sigma) \subset D'(M)$ separa puntos sobre $C_c^\infty(M)$ y $\ker R_\sigma$ es el aniquilador de $\sigma(\Sigma)$ en $C_c^\infty(M)$. ($\ker R_\sigma(\sigma(\Sigma)) = \{0\}$).

Prueba: Ver citas [17], [12] y [25].

$TD'(M)|_\Sigma$ - Haz vectorial del espacio $D'(M)$ restringido a la subvariedad Σ de M .

$T\Sigma$ - Haz vectorial de la subvariedad Σ .

$T_y \Sigma$ - Haz tangente local de la variedad Σ .

$N(\Sigma)$ - Haz normal, el cual es $TD'(M)|_\Sigma - T\Sigma$.

π_Σ - Producto vectorial inducido por la variedad Σ .

$\mathcal{K}(D'(M))$ - Espacio de campos vectoriales aplicados al espacio de distribuciones $D'(M)$.

$TD'(M)|_y = D'(M) \forall y \in \Sigma$ - Haz tangente local restringido a Σ del espacio de distribuciones $D'(M)$.

$N_y(\Sigma)$ - Haz normal local de la variedad Σ .

Curvatura Extrínseca: - Curvatura medida desde el exterior de una variedad.

Encaje: - Un encaje es la inmersión $\phi : M \rightarrow M'$ tal que $\phi(p) \neq \phi(q) \forall p, q \in M$.

Encaje en $D'(M)$: - Es toda inmersión inyectiva de M en $D'(M)$.

Encaje suave: - Es toda inmersión inyectiva diferenciable de M en M' .

Encaje de Dirac: - Es toda inmersión inyectiva del mapeo $\delta : M \rightarrow D'(M)$.

Inmersión: - Es un encaje local de M en M' . Todo encaje es inmersión pero no viceversa. En topología general no existe diferencia entre inmersión y encaje, ya que en esta no existe la diferencial.

CAPITULO I

TRANSFORMADA DE
RADON CLASICA

1.1 Transformada de Radon sobre \mathbb{R}^n .

Sea $f(x) \in f(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Elijamos una orientación en \mathbb{R}^n de tal forma que toda medida de un elemento de volumen del espacio \mathbb{R}^n sea positiva y completamente determinada.

Empecemos definiendo las integrales de $f(x)$ sobre un hiperplano. Sea $A_{\mathbb{R}^n}$ nuestro espacio afín real de dimensión n , constituido de los puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. $A_{\mathbb{R}^n}$ está orientado, por lo cual podemos considerar que un elemento de volumen en tal espacio afín real está dado como:

$$dx = dx_1 \dots dx_n \quad (1)$$

el cual ayuda a definir la integral

$$\int_{A_{\mathbb{R}^n}} f(x) dx \quad (2)$$

Se desea obtener la medida de $f(x)$ sobre algún hiperespacio de codimensión 1 ó hiperplano de $A_{\mathbb{R}^n}$. Sea $H \subset A_{\mathbb{R}^n}$ tal hiperplano de ecuación

$$H(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n = p \quad (3)$$

Para esto definamos un elemento de volumen sobre el hiperplano, nombrando una forma diferencial perteneciente al espacio $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ dando la orientación del hiperplano. Por lo tanto para el hiperplano asociamos la forma diferencial definida por

$$d(\xi, x)\omega = dx_1 \dots dx_n \quad (4)$$

la cual es una manera simple de obtener una expresión para ω en cualquier sistema de coordenadas sobre un hiperplano. Por un instante, si los puntos sobre el hiperplano son dados por $n-1$ coordenadas

$$x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \quad (5)$$

ω toma la forma

$$\omega = [(-1)^{j-1} dx_1 \dots dx_{j-1} \cdot dx_{j+1} \dots dx_n] / \xi_j \quad (6)$$

Entonces definimos la integral de $f(x)$ sobre el hiperplano $(\xi, x) = p$ por

$$f^A(\xi, p) = \int_{(\xi, x)=p} f(x)\omega \quad (7)$$

(1) Aquí se ha utilizado la notación $A_{\mathbb{R}^n}$ representando al espacio \mathbb{R}^n para resaltar que nos interesa explotar la estructura de espacio afín de \mathbb{R}^n . Así mismo el espacio afín es el mismo \mathbb{R}^n .

(2) También conocido como subespacio en \mathbb{R}^n .

(3) La forma ω .

Sea la hipersuperficie $S: P(x_1, \dots, x_n) = 0$ donde $P \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\text{grad} P = \{ \partial P / \partial x_1, \dots, \partial P / \partial x_n \}$$

no se anule sobre S (la cual por lo tanto tiene puntos no singulares).

Sea $\omega \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. ω es unívocamente determinada por P sobre $P = 0$. La forma está definida por

$$dP \circ \omega = dv$$

donde $dv = dx_1 \dots dx_n$ y dP es la diferencial de P . En la vecindad de una superficie podemos introducir un sistema de coordenadas locales u_1, \dots, u_{n-1} tales que una de las coordenadas, digamos u_n es $P(x)$, y tal que la transformación de x_i a u_i ($i=1, 2, \dots, n$) está dada por funciones infinitamente diferenciables con jacobiano positivo $D(\frac{x}{u})$. En este sistema de coordenadas escribimos:

$$dv = D(\frac{x}{u}) du_1 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_n$$

y por lo tanto hacemos corresponder

$$\omega = (-1)^{j-1} D(\frac{x}{u}) du_1 \dots du_{j-1} du_{j+1} \dots du_n \quad (1)$$

y ω existe. Si en particular, en la vecindad de cualquier punto $\partial P / \partial x_j \neq 0$, la coordenada u_j puede ser

$$u_1 = x_1, \dots, u_j = P, \dots, u_n = x_n$$

entonces $D(\frac{x}{u}) = D(\frac{x}{P})^{-1} = 1 / \partial P / \partial x_j$ y la forma diferencial definida por (1) se convierte en

$$\omega = [(-1)^{j-1} dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n] / \partial P / \partial x_j$$
 y por lo cual ω es única.

y la orientación del plano está elegida de tal modo que éste hiperplano está en la frontera de la región (ξ, x) . Usando la propiedad de escudriñamiento de la función $\delta(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, la integral (7) puede escribirse como:

$$\mathcal{R}f^\wedge(\xi, p) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(p - (\xi, x))dx^{(4)} \quad (8)$$

la cual expresa el hecho de obtener el valor de $f(x)$ en el hiperespacio $(\xi, x) = p$ del espacio \mathbb{R}^n con $n > p$. Así mismo dicha integral está dada sobre todo el espacio $\mathbb{R}^{n(s)}$. Sea $\mathbb{R}P^n$ el espacio proyectivo de todos los hiperplanos en \mathbb{R}^n .

Def.: Sea $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Definimos la Transformada de Radon de f como la función

$$\mathcal{R}\{f(x)\} = f^\wedge(\xi, p) = \int_{\mathbb{R}^{n-1-\mathbb{R}P^n}} f(x)\omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(p - (\xi, x))dx \quad (9)$$

donde $f^\wedge(\xi, p) \in L^1(\mathbb{R}P^n)$ y dicha integral existe para todos los valores de ξ para los cuales $f^\wedge(\xi, p)$ converge, con $\xi \in H^{n(s)}$ y $p \in \mathbb{R}$.

Los aspectos relevantes de estudio sobre $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(H^p)$ son la existencia y convergencia (campo de definición de la transformada de Radon), propiedad de unicidad y evaluación formal de \mathcal{R} y \mathcal{R}^{-1} . La existencia de la transformada de Radon en el dominio \mathbb{R}^n esta sujeta a la convergencia absoluta de $f(x)$ en todo el espacio \mathbb{R}^n .

La diferencialidad de $\mathcal{R}\{f\}$ queda sujeta a la condición de que $f(x)$ sea rápidamente decreciente.

Prop. 1.1: $f^\wedge(\xi, p) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}$.

Un hecho notable acerca de la función $f^\wedge(\xi, p)$, expresada ésta por la integral (8) y que sirve posteriormente para establecer la unicidad de la transformada de Radon como una distribución en el espacio $S(\mathbb{R}^n)$, es que la función $f^\wedge(\xi, p)$ es homogénea en ξ y p de grado -1 .

Lema. 1.1: Sea $f^\wedge(\xi, p) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $f^\wedge(\alpha\xi, \alpha p) = |\alpha|^{-1} f^\wedge(\xi, p)$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prueba: Escribiendo a la función $f^\wedge(\alpha\xi, \alpha p)$ como la integral (8), esta toma la forma

(4) Sea K una hipersuperficie suave arbitraria de ecuación $P(x)=0$ donde la integración está definida sobre dicha hipersuperficie.

Es menester observar que

$$\int_{P(x)=0} f(x)\omega = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(P(x))f(x)dx$$

En efecto, por definición, con cada $f(x)$ en K asociamos el número

$$\int_{P(x)=0} f(x)\omega$$

Este claramente da un funcional lineal continuo sobre K . Denotemos éste funcional por $(\delta(P), f)$, es decir, escribamos

$$(\delta(P), f) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(P)f dx = \int_{P(x)=0} f(x)\omega$$

la invariancia de ω respecta la elección de coordenadas, de lo cual se sigue que δ es independiente de la elección de la forma diferencial ω , dependiendo sólo de $P(x)$. Para verificar que esta definición coincide con la del inicio del capítulo sólo es necesario recordar a la ecuación

$$\omega = (-1)^{j-1} D_{x_j} \left(dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n \right)$$

que en el sistema de coordenadas $u_1 = P, u_2, \dots, u_n$ toma la forma

$$\omega = (-1)^{j-1} dx_2 \dots dx_n / \partial P / \partial x_1.$$

(5) Es menester primero saber como está definida la integración sobre una superficie suave arbitraria $P(x)=0$ en el espacio \mathbb{R}^n .

(6) $H^p = \{x \in \mathbb{R}^n | (\xi, x) = p\}$ donde (\cdot, \cdot) es el producto interior usual, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ el vector unitario y $p \in \mathbb{R}$.

(7) Def.: Sea $f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es rápidamente decreciente si para todo $k > 0$ se satisface que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k f(x) = 0$ para toda medida métrica $|x|$ en \mathbb{R}^n .

$$f^\wedge(\alpha\xi, \alpha p) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(p - (\alpha\xi, \alpha p)) dx$$

Por la propiedad de escala⁽⁸⁾ de la función $\delta(x)$ sobre \mathbb{R}^n se tiene que

$$\begin{aligned} f^\wedge(\alpha\xi, \alpha p) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) [1/|\alpha|] \delta(p - (\xi, p)) dx \\ &= [1/|\alpha|] \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(p - (\xi, p)) dx \\ &= |\alpha|^{-1} f^\wedge(\xi, p). \square \end{aligned}$$

Tomando en consideración la propiedad de homogeneidad de la función $f^\wedge(\xi, p)$ y teniendo en cuenta que la transformada de Radon es una distribución en el espacio $S(\mathbb{R}^n)$, es útil definir el espacio funcional siguiente:

Def.: $S_H(\mathbb{R}^n) = \left\{ F \in S(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+, \int_{\mathbb{R}^n} F(x, \xi) \xi^k d\xi \text{ es un polinomio homogéneo en } (x_1, \dots, x_n) \text{ de grado } k \right\}$.

El cual es útil para establecer el teorema de isomorfismo siguiente:

Teo. I.1: La transformada de Radon $\mathcal{R}: f \mapsto f^\wedge$ es un mapeo uno a uno lineal de $S(\mathbb{R}^n)$ en $S_H(\mathbb{R}^n)$.

El teorema anterior viene a establecer con precisión el problema de unicidad de la transformada de Radon, reduciendo éste a la biyectividad del operador \mathcal{R} sobre el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$. De ésta manera en el problema de la determinación de $\mathcal{R}^{-1}\{f\}$ se hace natural considerar la medida definida por la forma Ω , la cual se define explícitamente sobre el conjunto compacto $\left\{ (\xi, x) \in \mathbb{R}P^n \mid x \in \mathbb{H}^n \right\}$

el cual es invariante bajo el grupo de rotaciones alrededor de $x \in \mathbb{H}^n$ y para la cual la medida del conjunto singular es 1.

Nota: Nótese que los pares (ξ, x) y $(-\xi, -x)$ dan el mismo \mathbb{H}^n ; ya que el mapeo $(\xi, x) \rightarrow \mathbb{H}^n$ es un doble cubriente de $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}P^n$. Por lo tanto $\mathbb{R}P^n$ tiene una estructura de variedad canónica con respecto a la cual éste mapeo cubriente es diferenciable y regular.

(8) Propiedad de Escala: Sea $\delta(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\delta(\alpha x) = [1/|\alpha|] \delta(x)$.

Prueba: Consideremos las sustituciones $\alpha x = z, x = z/\alpha$ y $dx = (1/|\alpha|) dz$ para todo $x, z \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Es menester tomar en cuenta los siguientes casos:

Si $\alpha > 0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\alpha x) f(x) dx = (1/\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(z) f(z/\alpha) dz = (1/\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(z) f(z/\alpha) dz = (1/\alpha) f(z/\alpha) \Big|_{z=0} = (1/|\alpha|) f(\theta(1))$$

pero por la propiedad de escalamiento de la función $\delta(x)$ en \mathbb{R}^n ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(p - (\xi, \theta)) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) f(x) dx = f(\theta)$$

entonces

$$[1/|\alpha|] f(\theta) = [1/|\alpha|] \int_{\mathbb{R}^n} \delta(p - (\xi, \theta)) f(x) dx = [1/|\alpha|] \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} [1/|\alpha|] \delta(x) f(x) dx \quad (II)$$

de donde uniendo las expresiones (I) y (II) se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \delta(\alpha x) - [1/|\alpha|] \delta(x) \right\} dx = 0$$

de donde sobre el espacio ilimitado y sobre cualquier región arbitraria del mismo se cumple que

$$\delta(\alpha x) = [1/|\alpha|] \delta(x) \text{ para toda } \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Para el caso $\alpha < 0$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\alpha x) f(x) dx = (1/\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(z) f(z/\alpha) dz = (1/|\alpha|) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(z) f(z/\alpha) dz = (1/|\alpha|) f(\theta) \text{ para toda } \alpha \in \mathbb{R} \square$$

Nota: Recuérdese que la elección de un nuevo sistema de coordenadas $u_1 = P, \dots, u_n$ permite escribir al funcional lineal continuo $(\delta(P), f)$ como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(P) f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(P) f(u) D \left(\begin{matrix} x \\ u \end{matrix} \right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u_1) g(u) du. \end{aligned}$$

Condición (condición análoga a la de rápido crecimiento para $f(x)$):

Para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ la integral $\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(\xi, p) p^k dp$ puede escribirse como el k -ésimo homogéneo en $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Prueba: Es inmediata de la relación

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(\xi, p) p^k dp = \int_{\mathbb{R}^n} p^k dp \int_{(x, \omega)=p} f(x) \omega(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (x, \omega)^k dx. \square$$

$D(\mathbb{R}P^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}P^n)$ y consideramos $D_H(\mathbb{R}P^n) = S_H(\mathbb{R}P^n) \cap D(\mathbb{R}P^n)$.

Sea la transformada de Radon

$$\mathcal{R}\{f\} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(p - (\xi, x)) dx$$

de $f(x)$. Se desea que $f^\wedge(\xi, p)$ se obtenga a través de una fórmula expresando a $f(x)$ en términos de sus integrales sobre hiperplanos. Esta fórmula puede encontrarse para espacios de dimensión impar ó par, aunque con ciertas diferencias⁽⁹⁾. Consideremos el caso impar. Sea n (un entero impar) la dimensión del espacio \mathbb{R}^n . Derivando $f^\wedge(\xi, p)$ $n-1$ veces con respecto a p obtenemos

$$\Psi(\xi, p) = f_p^{\wedge(n-1)}(\xi, p) \quad (11)$$

Luego promediamos $\Psi(\xi, p)$ sobre el conjunto de hiperplanos $\mathbb{R}P^n$ que pasan a través de algún punto fijo x . Así mismo se puede demostrar que éste promedio es igual a un factor constante en el momento en el que se obtiene el valor de f en x .

El problema que se plantea en la biyectividad del operador \mathcal{R} es la determinación del campo de definición de \mathcal{R}^{-1} el cual debe establecerse a través de alguna función $\Psi(\xi, p)$ que dependa del comportamiento diferenciable de $f^\wedge(\xi, p)$ como distribución; es decir, suponiendo a $f^\wedge(\xi, p)$ de soporte compacto, el dominio de definición de \mathcal{R}^{-1} quedará entonces definido en un hiperplano compacto de la forma

$$H = \{(\xi, x) = p \in \mathbb{R}P^n \mid x \in H\}$$

Notando que un hiperplano que pasa a través del punto x_0 tiene ecuación $(\xi, x) = (\xi, x_0)$, los promedios sobre ξ serán las funciones de la forma $\Psi(\xi, (\xi, x))$. Así mismo podemos definir estos promedios por las integrales

$$\int_{\Gamma} \Psi(\xi, (\xi, x)) \omega(\xi) \quad (12)$$

donde la forma diferencial definida en el ξ -espacio, es decir; el espacio de coordenadas

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

viene dada como

$$\Omega = \omega(\xi) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \xi_k d\xi_1 \dots d\xi_{k-1} d\xi_{k+1} \dots d\xi_n \quad (13)$$

(9) La división en dos casos según la paridad de la dimensión del espacio es necesaria, ya que la codimensión de los hiperplanos es siempre 1 respecto a la dimensión del espacio al cual pertenecen dichos hiperplanos, haciendo necesario un criterio de diferencia en cada caso para el espacio que los contiene.

(10) De hecho sobre éste compacto se definirá la transformada inversa de Radon.

Prop.L1.2. Sea Γ una superficie cerrada con origen $\xi = 0$ en el ξ -espacio y cuya forma diferencial $\Omega = \omega(\xi)$ está definida sobre todo el ξ -espacio determinando una medida en el mismo ⁽¹¹⁾. Entonces (12) es un invariante bajo cualquier deformación de Γ .

Teo.L1.2.: Sea $f^\wedge(\xi, p)$ la transformada de Radon de $f(x)$ en un espacio de dimensión par. Entonces la transformada de Radon es

$$\int_{\Gamma} f_p^{\wedge(n-1)}(\xi, (\xi, x)) \omega(\xi) = cf(x) \quad (14)$$

donde la integral está dada sobre cualquier hipersuperficie Γ encerrando el origen en el ξ -espacio y $\omega(\xi)$ es la forma diferencial en el ξ -espacio.

Prueba: Demostremos la validez de la fórmula integral (14) para el caso $x=0$,

$$\int_{\Gamma} f_p^{\wedge(n-1)}(\xi, (\xi, 0)) \omega(\xi) = cf(0) \quad (15)$$

Esta integral define un funcional continuo sobre el espacio de funciones rápidamente decrecientes e infinitamente diferenciables, la cual pueden ser escrita en la forma

$$(F, f) = \int_{\Gamma} f_p^{\wedge(n-1)}(\xi, 0) \omega(\xi) \quad (16)$$

de lo cual es deseable demostrar que $F(x) = c\delta(x)$. Para ello primero es menester demostrar que $F(x)$ satisface la condición

$$(F, f(A^{-1}x)) = (F, f(x)) \quad (17)$$

Donde A es cualquier transformación lineal no singular ⁽¹³⁾. Esto se sigue de la propiedad de la transformada de Radon sobre la composición

$$f_A(x) = f(A^{-1}x) \quad (18)$$

lo cual es $|\det A| f^\wedge(A^t \xi, p)$, donde A^t es la traspuesta de A .

(11) Elemento de volumen en el ξ -espacio.

(12) Para el caso de la dimensión par del espacio R^n la constante toma la forma

$$c = (-1)^{1/2(n-1)} 2(2\pi)^{n-1}$$

y para el caso impar $c = [(-1)^{1/2n}] / (n-1)!$.

(13) $A \in \mathcal{L}(R^n, R^n)$ definida por la correspondencia

$$Ax = (y_1, \dots, y_n)$$

donde $y_k = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l$, $\det |a_{kl}| \neq 0$.

(14) Sea A una transformación lineal no singular de x ; escribimos

$$A_x = (y_1, \dots, y_n)$$

donde $y_k = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l$, $\det |a_{kl}| \neq 0$. Entonces la transformada de Radon de $f_A(x) \equiv f(A^{-1}x)$ es

$$f^\wedge(\xi, p) = |\det A| f^\wedge(A^t \xi, p)$$

donde $f^\wedge(\xi, p)$ es la transformada de $f(x)$, y A^t es la traspuesta de A . [La traspuesta está definida por $(\xi, Ax) = (A^t \xi, x)$].

Prueba: La transformada de Radon de $f_A(x)$ está dada por

$$f^\wedge_A(x, p) = \int_{R^n} f(A^{-1}x) \delta(p - (\xi, x)) dx$$

Escribamos $x = Ay$. De lo cual queda que

$$f^\wedge(\xi, p) = |\det A| \int_{R^n} f(y) \delta(p - (\xi, Ay)) dy = |\det A| \int_{R^n} f(y) \delta(p - (A^t \xi, y)) dy = |\det A| f^\wedge(A^t \xi, p) \square$$

Por lo tanto

$$(F, f(A^{-1}x)) = \int_{\Gamma} |\det A| f_p^{\wedge(n-1)}(A^{-1}\xi, 0) \omega(\xi) \quad (18)$$

Luego reemplazando ξ por $At^{-1}(\xi)$ en la fórmula (14) se tiene que

$$\begin{aligned} (F, f(At^{-1})) &= \int_{\Gamma} f_p^{\wedge(n-1)}(At^{-1}\xi, 0) \omega(At^{-1}\xi) \\ &= \int_{\Gamma} |\det A| f_p^{\wedge(n-1)}(At^{-1}\xi, 0) \omega(\xi) \quad (19) \end{aligned}$$

por lo que $(F, f(x)) = (F, f(A^{-1}x))$. Promediando el lado izquierdo de (17) sobre el conjunto de transformaciones ortogonales A , i.e: sobre todas las transformaciones que dejan invariante

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

esto da

$$(F, f_1(x)) = (F, f(x)) \quad (20)$$

donde $f_1(x)$ es el promedio de $f(x)$ sobre la esfera $|x|^2 = r^2$. Por lo tanto en el cálculo de (F, f) podemos reemplazar f por su promedio sobre tales esferas. En otras palabras, F puede ser tratado como un funcional sobre funciones definidas en las semilíneas $0 \leq \Gamma \leq \infty$.

Notemos que recordando a la ecuación (17), para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(F, f(\alpha x)) = (F, f(x)) \quad (21)$$

tal que sobre la semilínea, F es homogénea de grado -1. Por lo cual es fácil demostrar que salvo un factor constante la única función homogénea generalizada de grado -1 es la función $\delta(x)^{(15)}$, lo cual prueba que $F = c\delta(x)$.

Ahora bien, la expresión para $f(x)$ en cualquier punto x_0 puede ser obtenida de

$$\int_{\Gamma} f^{\wedge(n-1)}_p(\xi, 0) \omega(\xi) = cf(0)$$

Para ello, requerimos aplicar tal fórmula integral a la función f evaluada en la traslación $x + x_0$, es decir si definimos como f_1 a tal imagen de la traslación bajo f entonces

$$f_1(x) = f(x + x_0),$$

En efecto

$$\int_{\Gamma} f^{\wedge(n-1)}_p(\xi, x + x_0) \omega(\xi) = cf(0) \quad (22)$$

pues para ello considérese

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) \delta(p - (\xi, x)) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + x_0) \delta(p - (\xi, x + x_0)) dx = f^{\wedge}(\xi, p - x + x_0) \quad (23)$$

Pero conviene usar el cambio de variable $y = x + x_0$. Entonces por la propiedad de la transformada de Radon aplicada a una imagen de f sobre la traslación $x + x_0$ se tiene que

$$f^{\wedge} x_0(\xi, p) = f^{\wedge}(\xi, p + x + x_0) \int_{\mathbb{R}^n} f(x + x_0) \delta(p - (\xi, x)) dx$$

con $x = y - x_0$. Luego

$$f^{\wedge} x_0(\xi, p) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \delta(p + (\xi, x_0) - (\xi, y)) dy = f^{\wedge}(\xi, p + (\xi, x_0)).$$

Obs. Para el caso de dimensión par del espacio \mathbb{R}^n , la integral

$$\int_{\Gamma} f^{\wedge(n-1)}_p(\xi, (\xi, x_0)) \omega(\xi)$$

(15) Proposición. La transformada de Radon de $f_a(x) = f(x + a) = f(x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$ está determinada

$$\text{como } f_a^{\wedge}(\xi, p) = f^{\wedge}(\xi, p + (\xi, a))$$

donde $f^{\wedge}(\xi, p)$ es la transformada de Radon de $f(x)$.

Prueba: Sea

$$f_a^{\wedge}(\xi, p) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + a) \delta(p - (\xi, x)) dx$$

Eligiendo el cambio de variable $x = y - a$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x + a) \delta(p - (\xi, x)) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \delta(p + (\xi, a) - (\xi, y)) dy = f^{\wedge}(\xi, p + (\xi, a)).$$

se anula, ya que por cada n par

$$\psi(\xi) = f^{\wedge(n-1)}_p(\xi, (\xi, x_0))$$

es una función impar de ξ , esto es;

$$\psi(-\xi) = -\psi(\xi) \quad (24)$$

El caso impar se analiza en forma análoga considerando $c = \{(-1)^{1/2n}\}/(n-1)!$, y utilizando la relación existente entre la transformada de Radon y de Fourier.

El último problema relevante en el estudio de la transformada de Radon es la forma operativa de la transformada, como transformada integral aplicada a un espacio de funciones cuyo requisito mínimo es que pertenezcan al espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$; en el caso más simple (clase mínima de funciones cuya transformada de Radon existe).

Ejemplo 1. Una interpretación fácilmente de visualizar de $f^{\wedge}(\xi, p)$ es la siguiente:

Sea $f(x)$ la densidad con la cual alguna masa finita es distribuida a través del espacio.

Sea $M(\xi, p)$ la masa total en la región del espacio afín, $(\xi, x) < p$. Entonces

$$M(\xi, p) = \int_{(\xi, x) < p} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \theta(p - (\xi, x)) dx, \quad (22)$$

donde como es usual $\theta(p) = 1$, para todo $p > 0$ y $\theta(p) = 0$, para todo $p < 0$.

Además sea θ la función tal que

$$\theta'(p) = \partial \theta / \partial p = \delta(p) \quad (23)$$

Por lo tanto la derivada parcial de $M(\xi, p)$ respecto a p da:

$$\partial M(\xi, p) / \partial p = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(p - (\xi, x)) dx = f^{\wedge}(\xi, p) \quad (24)$$

Consecuentemente si $f(x)$ es la densidad con la cual una masa finita es distribuida a través del espacio, su transformada de Radon es

$$f^{\wedge}(\xi, p) = \partial M(\xi, p) / \partial p, \quad (25)$$

donde $M(\xi, p)$ es la masa en el semiespacio $(\xi, x) < p$.

Ejemplo 2. Determinemos la transformada de Radon de la función característica de cierta región acotada del espacio. Sea V la región acotada y sea $f(x)$ su función característica; es decir,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{si } x \notin V \end{cases}$$

Entonces la transformada de Radon $f^{\wedge}(\xi, p) = \int f(x) \theta(p - (\xi, x)) dx$ está dada por:

$$f^{\wedge}(\xi, p) = \partial V(x, p) / \partial p, \quad (26)$$

donde $V(\xi, p)$ es el volumen de la parte de V que cae en $(\xi, x) < p$, es decir;

$$\begin{aligned} V(\xi, p) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \zeta(p - (\xi, x)) dx = \int_{(\xi, x) < p} f(x) \zeta(p - (\xi, x)) dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus V = (\xi, x) > p} f(x) \zeta(p - (\xi, x)) dx \\ &= \int_{(\xi, x) < p} f(x) \zeta(p - (\xi, x)) dx \end{aligned}$$

Así mismo nuestro espacio $A_{\mathbb{R}^n}$ siendo \mathbb{R}^n podemos tratarlo como espacio euclidiano con métrica

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \quad (27)$$

y podemos dar los hiperplanos por medio de las ecuaciones normalizadas (i.e. tales que $\xi = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2} = 1$ en la ecuación $(\xi, x) = p$).

Entonces $f^{\wedge}(\xi, p)$ es simplemente el área de la intersección de V y $(\xi, x) = p$.

Proposición L13. Sea f la función característica en una región acotada $V \subset \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{R}\{f(x)\}$ con $f(x) \in \mathcal{F}(V, \mathbb{R}^n)$ es el hiperárea del subespacio $V \cap \{(\xi, x) = p\}$.

Prueba: Ver la obra del científico Gelfand Volumen I de "Generalized Functions".

1.2 Relación entre la transformada de Radon y de Fourier.

Debido a que las transformadas de Fourier y Radon pertenecen al espacio $\mathcal{L}(H)$ con $H = L^1(\mathbb{R}^n)$ (ó $S(\mathbb{R}^n)$), éstas deben estar íntimamente relacionadas bajo alguna transformada integral en H .

Sea $f^\wedge(\xi) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ definida por la correspondencia

$$f^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i(\xi, x)} dx \quad (28)$$

Dicha transformada integral puede ser escrita directamente en términos de integrales de $f(x)$ sobre hiperplanos, es decir,

$$f^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{(\xi, x) = p} f(x) \omega \right) e^{i p} dp \quad (29)$$

la cual representa la relación entre la transformada de Radon y de Fourier de $f(x)$.

Esta expresión integral puede ser reescrita reemplazando ξ por $\alpha \xi \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ y realizando un cambio de variable apropiado en el integrando de la forma $p = \alpha p_1$ usando además la homogeneidad de $f^\wedge(\xi, p)$, obtenemos

$$f^\wedge(\alpha \xi) = \int_{\mathbb{R}} f^\wedge(\xi, p) e^{i \alpha p} dp \quad (30)$$

Esto muestra que la transformada de Fourier en n dimensiones se reduce a la transformada de Radon seguida por una transformada de Fourier unidimensional.

Así mismo obteniendo la transformada inversa de Fourier de la fórmula integral (30) obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f^L(\alpha \xi)\} &= [1/2\pi] \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(\alpha, \xi) e^{i \alpha p} d\alpha \\ &= f^\wedge(\xi, p) \end{aligned}$$

De ésta manera se observa que en un espacio afin real la transformada de Radon de $f(x)$ está estrechamente relacionada a su transformada de Fourier unidimensional.

La transformada de Radon tiene la ventaja sobre la transformada de Fourier de que geoméricamente sobre un espacio homogéneo (no necesariamente euclidiano) es más manipulable.

Así mismo una transformada de Fourier en el espacio homogéneo euclidiano \mathbb{R}^n se obtiene a través de dos transformaciones sucesivas, una la transformada de Radon en el espacio \mathbb{R}^n seguida de una transformada de Fourier unidimensional.

De alguna forma la distribución espectral de hiperplanos en un espacio euclidiano E trae consigo todo el espacio espectral definido en un espacio euclidiano (continuo espectral).

Proposición I 2.1. Sea $\mathcal{F}, \mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^p)$, $p \geq 2$ y $\mathbb{H}^p = S(E^p)$. Considérese además el autoformismo de grupo $\sigma_{\mathcal{F}} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{F} \mathcal{R} \in O(n, E)$ donde $O(n, E)$ es un grupo ortogonal unimodular de transformaciones Euclidianas. Entonces

$$\mathcal{R}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ f^\wedge(E^{n-1}) \right\} \right\} = E_{\mathcal{F}} \left\{ f(E^n) \right\} \quad (31)$$

Prueba: Debido a que la transformada de Fourier es invariante en un espacio euclidiano, es decir; se construye de igual forma y permanece invariante bajo transformaciones del espacio euclidiano (transformaciones rígidas (traslaciones y rotaciones)), tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \mathcal{R} \left\{ f \right\} \right\} &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{E^n} f(x) \delta(p - (\xi, x)) dx \right\} e^{i p} dp \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{E^n} f(x) \omega(\xi) \right\} e^{i(\xi, x)} dp \\ &= \int_{\mathbb{R} \times E^n} f(\xi, x) \omega(\xi) e^{i(\xi, x)} dp \\ &= \mathcal{F} \left\{ f^\wedge \right\} \in E_{\mathcal{F}} \left\{ f(E^n) \right\} = E^1_{\mathcal{F}} \left\{ f(E^n) \right\}, 1=1, 2, 3, 4, \dots, n \end{aligned}$$

Luego completando el automorfismo con la aplicación del operador de grupo \mathcal{R}^{-1} se tiene que

$$\mathcal{R}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ f^\wedge \right\} \right\} = c f(x) \in E_{\mathcal{F}} \left\{ c f(E^n) \right\} = E_{c \mathcal{F}} \left\{ f(E^n) \right\} = \mathcal{R} \times E_{\mathcal{F}} \left\{ f(E^n) \right\}$$

Y puesto que el espacio de espectros $E_F \{f(E^{n-1})\} \times R \cong S^{n-1} \times R$ donde $S^{n-1} \times R$ es un cubriente diferenciable de $EP^n = E^{n-1}_F$ entonces $cf(x) \in R \times E_F \{f(E^{n-1})\} = E_F \{f(E^n)\} \square$.

Nota: Una de las ventajas de la transformación de Radon sobre otras transformadas integrales definidas en diferentes **espacios homogéneos**, y que da un carácter más general de uso para un calculo operacional de tipo geométrico en dichos espacios: es la existencia de la transformada de Radon en cualquier espacio homogéneo (hiperbólico, elíptico, etc. ...), sin necesidad de ser construida en forma diferente en cada espacio distinto. No siendo así, por ejemplo para la transformada de Fourier, la cual debe ser construida en forma diferente para cada espacio homogéneo diferente.

La transformada de Fourier solo puede ser construida de igual forma en espacios euclidianos.

CAPITULO II

GENERALIZACION DE LA TRANSFORMADA DE RADON

2.1. Generalización de la Transformada de Radon a Espacios Homogéneos no Euclidianos.

Sea M una variedad Riemanniana completa⁽¹⁸⁾, x un punto de M y $T_x(M)$ el espacio tangente a M en x . Sea Exp_x el mapeo exponencial de $T_x(M)$ en M dado por

$$\text{Exp}_x(u) = \gamma_u(1) \quad (32)$$

donde su regla de correspondencia es

$$t \mapsto \gamma_u(t) \quad (33)$$

es la geodésica en M a través de x con vector tangente u en $x = \gamma_u(0)$.

Así mismo una **subvariedad conexa** S de la variedad Riemanniana M se dice ser totalmente geodésica si cada geodésica en M , la cual es tangente a S en cada punto cae enteramente en S .

Las subvariedades totalmente geodésicas en \mathbb{R}^n son los hiperplanos en \mathbb{R}^n . Por lo cual generalizando la transformada de Radon a variedades Riemannianas, es natural considerar que la integración sobre subvariedades totalmente geodésicas en nuestra discusión será completamente análoga a la integración sobre subvariedades totalmente geodésicas en \mathbb{R}^n (hiperplanos) considerando ahora nuestras variedades Riemannianas M como **espacios homogéneos dos puntos**, es decir; espacios homogéneos en los cuales para dos pares de puntos $p, q \in M$ y $p', q' \in M$ se satisfaga que

$$d(p, q) = d(p', q') \quad (34)$$

(donde d es la distancia), entonces existe una **isometría** ϕ de M tal que $\phi \cdot p = p'$ y $\phi \cdot q = q'$.

Así mismo definiendo de ésta forma a nuestro espacio homogéneo podremos hacer posible definir una **geometría integral** inducida por la transformada integral de Radon la cual debido a su carácter invariante sobre cualquier espacio homogéneo aunado el hecho de ser un automorfismo invariante bajo la acción de cualquier otro endomorfismo del grupo cociente subyacente en la variedad Riemanniana completa e isométrica que define tal espacio homogéneo, será de gran utilidad e importancia para la obtención de algún método para la determinación de la **curvatura** en una región (subvariedad) del cosmos M .

Describiendo a la variedad Riemanniana a través del grupo de Lie que la define⁽¹⁹⁾, es decir como el conjunto de clases G/H con H un subgrupo cerrado⁽²⁰⁾, podremos afirmar que el subgrupo que divide al grupo G para formar el grupo cociente que es de tipo compacto o no compacto en la descripción del espacio homogéneo, es el que actúa transitivamente y trivialmente con sus elementos sobre los automorfismos de G .

(18)Nota: Una variedad Riemanniana M se dice ser completa si cada sucesión de Cauchy en M es convergente. Así mismo una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico con métrica d es llamada de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0 \exists$ un $N \in \mathbb{Z}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall n, m > N$.

(19) Nota: El grupo analítico subyacente en una variedad Riemanniana es un grupo de Lie **semisimple**^(*) conexo, el cual en la teoría de los grupos semisimples se sabe que es de centro $\{e\}$ (es decir, de centro finito). Entonces sabiendo esto, se puede demostrar que éste grupo es un **espacio homogéneo simétrico**. Este hecho será de gran importancia para la obtención de un espacio de horociclos del espacio de clases G/K el cual es un caso particular de un espacio homogéneo simétrico cuando K es un subgrupo compacto de G , con G conexo no necesariamente compacto de centro finito.

Por la misma teoría de grupos semisimples, se sabe que dicho grupo semisimple conexo se puede descomponer en dos componentes conexas, una compacta y otra no compacta. Luego a su vez la componente compacta puede descomponerse en dos componentes, una abeliana y otra no abeliana. Hoy en día, la teoría

Proposición II. 1. 1. El grupo semisimple subyacente a la variedad Riemanniana M es un grupo unimodular.

Prueba: Si G es semisimple entonces su forma de Killing que es el funcional $B_U(X, Y) = g(e)$ es no degenerada, (donde g es el tensor métrico que establece la estructura diferenciable de la variedad M). Luego dicha forma bilineal es invariante bajo la acción del mapeo

$$U: G \rightarrow \text{Ad}(G) \quad (35)$$

(e cual establece una representación lineal del grupo G), pues se tiene que

$$B_U(\text{Ad}(\sigma)X, \text{Ad}(\sigma)Y) = B_U(X, Y) \quad (36)$$

$\forall \sigma \in G$ y $X, Y \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto $B_U(X, Y)$ es invariante bajo la acción de $\text{Ad}(\cdot)$.

Ahora bien, es invariante izquierdo y derecho puesto que

$$(\det(\text{Ad}(\sigma)))^2 = 1 \quad \forall \sigma \in G.$$

Nota: Es decir la acción de los endomorfismos R_σ y L_σ sobre B_U satisfacen que:

$$B_U \circ R_\sigma = |\det(\text{Ad}(\sigma))| B_U = B_U \circ L_\sigma \quad (37)$$

Pero $(B_U \circ L_\sigma)^{-1} \circ B_U \circ R_\sigma = L_\sigma^{-1} \circ R_\sigma = I(\sigma) \quad \forall \sigma \in G$. Entonces $|\det(\text{Ad}(\sigma))|^2 = 1$.

Por lo cual se concluye que el grupo G es unimodular. \square

2.2. Integración Invariante en un espacio de curvatura constante.

Sea G/H el grupo de transformaciones integrales de funciones sobre un espacio de curvatura constante cuyas transformadas integrales están definidas sobre $L^p(M)$ con $M \subseteq E^{n+1}$ una variedad diferenciable no euclidiana de curvatura constante.

Se requiere, como para el caso del grupo de transformadas integrales, que los endomorfismos de M tales como las formas ω y las integrales $\int f\omega$ sean invariantes bajo la acción de automorfismos (movimientos en M) de M, es decir

$$\int_{M=G/H} f(x) dx = \int_{M=G/H} f(x\sigma) dx^{(21)} \quad \forall \sigma \in G. \quad (38)$$

donde $x\sigma$ designa el punto en el cual x es llevado bajo la acción del movimiento σ (automorfismo). Así mismo el problema de la medida es definir un elemento de volumen $dv = \omega$ (forma diferencial) el cual sea invariante bajo los movimientos del espacio propio

de grupos de Lie abelianos está casi terminada en cuanto a los grupos compactos abelianos. Sin embargo se está creando apenas una teoría general de los grupos no abelianos.

Algunos grupos compactos no abelianos tales como $SU(n)$ están siendo estudiados a través de la descomposición en espacios radicales de su correspondiente álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n)$. Si $n = 2$, la idea está basada para éste caso en la existencia de subgrupos K_α de G un grupo de Lie conexo y compacto, localmente isomórficos a $SU(2)$, lo cual sirve para describir explícitamente todas las representaciones lineales de $SU(2)$.

Def.: Decimos que G es de centro finito si su centro es $\{e\}$, lo cual es completamente equivalente a decir que G actúa trivialmente sobre G/H , ó también es completamente equivalente a decir que $\bigcap_i sHs^{-1} = \{e\} \quad \forall s, h, hs \in G/H \quad \forall s \in G$ y $h \in H$. Esto también es equivalente a afirmar que el subgrupo no normal de G que contiene a H debe ser uno que no sea $\{e\}$ (en otras palabras que H no contiene un subgrupo normal de G que no sea $\{e\}$).

(20) **Nota:** En general el grupo G que describe al Universo es un grupo de tipo no compacto. Sin embargo para los requerimientos técnicos de la geometría integral que desarrollaremos, se hará necesario utilizar al grupo de transformaciones como del tipo compacto. Así mismo nuestra variedad la supondremos un espacio simétrico de la forma $M = G/K$ donde K es un subgrupo compacto máximo en G (a G lo consideraremos localmente compacto y conexo).

$M = G/H$, con H un subgrupo cerrado de G .

Proposición. II. 2. 1: Sea $m = \dim M = \dim G/H$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i). G/H tiene una m -forma ω G -invariante.
- (ii). $\det \text{Ad}_G(h) = \det \text{Ad}_H(h) \forall h \in H$.

entonces G/H tiene una orientación G -invariante y la m -forma ω G -invariante es única salvo un factor constante.

Prueba: (i) \Rightarrow (ii): Sea ω una m -forma G -invariante sobre G/H , $\omega \neq 0$. Entonces la relación $\tau^*(h)\omega = \omega$ en el punto o implica que $\det(d\tau(h)) = 1$, de donde entonces $\det(\text{Ad}_G(h)) = \det(\text{Ad}_H(h)) \forall h \in H$. Por otro lado (ii) \Rightarrow (i). En efecto, X_1, \dots, X_n una base del espacio tangente $T_o(G/H)$ y sea $\omega^1, \dots, \omega^m$ las funciones lineales sobre $T_o(G/H)$ determinadas por las ecuaciones $\omega^i(X_j) = \delta_{ij}$. Consideremos el elemento

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m$$

en el álgebra de Grassmann del espacio tangente $T_o(G/H)$. La condición (ii) implica que $\det(d\tau(h)) = 1$ y el elemento $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m$ es invariante bajo la transformación lineal $d\tau(h)$. Se sigue entonces que existe una única m -forma G -invariante ω sobre G/H tal que $\omega^0 = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m$. Si ω^* es otra m -forma invariante sobre G/H , entonces $\omega^* = f\omega$ donde $f \in C_c^\infty(G/H)$. Pero por la G -invariancia de ω y ω^* , f puede ser constante.

Ahora demosetremos la preservación de la orientación bajo los movimientos producidos por los automorfismos de G .

Asumiendo (i), sea $\phi: p \rightarrow (x_1(p), \dots, x_m(p))$ un sistema de coordenadas sobre una vecindad abierta U del $o \in G/H$ sobre la cual ω tiene una expresión local

$$\omega_U = F(x_1, \dots, x_m) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \quad (39)$$

con $F > 0$. Así mismo, el par $(\tau(\sigma)U, \phi \circ \tau(\sigma^{-1}))_{\sigma \in G}$ es una carta local sobre una vecindad conexa de $\sigma \cdot o \in G/H$. Ponemos $\phi \circ \tau(\sigma^{-1})(p) = (y_1(p), \dots, y_m(p)) \forall p \in \tau(\sigma)U$.

Nota: Una forma G -invariante ω da una integral $\int \omega$ G -invariante en el sentido de que

$$\int_{G/H} f\omega = \int_{G/H} (f \circ \tau(\sigma)) \omega, \forall \sigma \in G, f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ y } \tau \in \text{Diff}(G/H).$$

Entonces el mapeo $\tau(\sigma): U \rightarrow \tau(\sigma)U$ tiene la expresión en coordenadas canónicas

$$(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_m)$$

y sobre $\tau(\sigma)U$, la m -forma G -invariante ω tiene la expresión

$$\omega_{\tau(\sigma)U} = G(y_1, \dots, y_m) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$$

de $\omega_q = \tau(\sigma)^* \omega_{\tau(\sigma)q}$ tenemos para $q \in U \cap \tau(\sigma)U$ que

$$\omega_q = G(y_1(q), \dots, y_m(q)) (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m)_q = G(x_1(q), \dots, x_m(q)) (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)_q$$

de donde

$$F(x_1(q), \dots, x_m(q)) = G(x_1(q), \dots, x_m(q))$$

y

$$F(x_1(q), \dots, x_m(q)) = F(y_1(q), \dots, y_m(q)) \left| \frac{\partial(y_1(q), \dots, y_m(q))}{\partial(x_1(q), \dots, x_m(q))} \right| \quad (40)$$

lo cual muestra que el jacobiano del mapeo $(\phi \circ \tau(\sigma^{-1})) \circ \phi^{-1}$ es positivo. Consecuentemente, la colección $(\tau(\sigma)U, \phi \circ \tau(\sigma^{-1}))_{\sigma \in G}$ de cartas locales que caracterizan a G/H como una variedad orientada y cada $\tau(\sigma)$ es una orientación que se preserva

bajo las acciones del grupo G . \square

Debido a que el grupo es **semisimple** y unimodular, aunado el hecho de que se satisface el teorema de existencia de una medida invariante sobre espacios homogéneos (siendo que nuestra variedad es un espacio homogéneo), resulta entonces que la medida que se deduce de la m - forma diferencial ω es una medida G - invariante.

Asimismo, algunos ejemplos de tales formas diferenciales que inducen una medida sobre espacios homogéneos no euclidianos son los siguientes: Es bien sabido que sobre una esfera multidimensional

$x_0^2 + \dots + x_n^2 = R^2$, su elemento de volumen G - invariante, o simplemente invariante bajo los automorfismos del grupo de transformaciones subyacente en la variedad de curvatura constante (medida invariante) está dado por

$$dx = R dx_1 \dots dx_n / |x_0| = R dx_1 \dots dx_n / [R^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)]^{1/2} \quad (41)$$

En forma análoga podemos deducir la expresión análoga para un elemento de volumen de un espacio hiperbólico (Espacio de Lobachevsky) tomando el modelo sobre un hiperboloide $S: [x, x] = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1, x_0 > x$ en E^{n+1} . El elemento de volumen $dv = dx_0 dx_1 \dots dx_n$ en E^{n+1} permanece invariante bajo todas las transformaciones lineales con determinante unidad, los cuales son rotaciones hiperbólicas. Sea x_1, \dots, x_n un nuevo sistema de coordenadas tal que $r = [x, x]^{1/2}$ en la región $[x, x] > 0, x_0 > 0$. En éste nuevo sistema de coordenadas dv se convierte en

$$dv = r dr dx_1 \dots dx_n / x_0 = r dr dx_1 \dots dx_n / (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad (42)$$

rotaciones hiperbólicas en E^{n+1} dejan ambas dv y r invariantes y por lo cual también

$$dx = dx_1 \dots dx_n / x_0 = dx_1 \dots dx_n / (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad (43)$$

Ésto dá una medida invariante en un espacio hiperbólico. Así observemos que si tenemos cualquier hipersuperficie en el espacio E^{n+1} , la expresión en coordenadas x_1, \dots, x_n del elemento de volumen es de la forma

$$dx = dx_0 \dots dx_k \cdot dx_{k+1} \dots dx_n / |x_0|, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

y éste se conserva aplicando los automorfismos del grupo G en el espacio E^{n+1} que corresponden al tipo de hipersuperficie que tienen como espacio ambiente E^{n+1} .

Nota: Aquí la hipersuperficie está encajada en E^{n+1} o inmersa en E^{n+1} .

La integral invariante sobre el hiperboloide $[x, x] = 1$ puede entonces ser escrita por medio de la función $\delta([x, x] - 1)$ como:

$$\int_{[x, x] = 1} f(x) dx = 2 \int_{E^{n+1}} f(x) \delta([x, x] - 1) dv \quad (44)$$

(tal integral representa la extensión continua a todo el espacio E^{n+1} de la función definida sobre la hipersuperficie hiperbólica $[x, x] = 1$).

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{[x, x] = 1} f(x) dx &= \int_{[x, x] > 0 = E^{n+1} \setminus \{[x, x] = 1, x_0 > 0\}} f(x) \delta([x, x] - 1) dv + \\ &\quad + \int_{[x, x] < 0 = E^{n+1} \setminus \{[x, x] = 1, x_0 < 0\}} f(x) \delta([x, x] - 1) dv \\ &= 2 \int_{E^{n+1} \setminus \{[x, x] = 1 = [x, x] > 0, x_0 > 0\}} f(x) \delta([x, x] - 1) dv. \quad \square \end{aligned}$$

La invariancia de la integral $\int_{E^{n+1} \setminus \{[x, x] = 1\}} f(x) \delta([x, x] - 1) dV$ se sigue de la invariancia de dV y $[x, x]$ bajo rotaciones hiperbólicas del espacio E^{n+1} . Lo análogo se establece en cuanto a la integración invariante de una función $f(x)$ sobre el hiperboloide imaginario.

2. 3. Integración sobre subvariedades totalmente geodésicas en espacios homogéneos de curvatura constante. Integrales orbitales.

Las órbitas de un espacio hiperbólico como espacio de clases laterales son las llamadas esferas generalizadas o **horoesferas** las cuales juegan el mismo papel que los hiperplanos en un espacio euclidiano, teniendo entonces su geometría intrínseca en una variedad Riemanniana a la de un hiperplano en un espacio $E^{n(21)}$.

Ahora bien, nuestro espacio hiperbólico es una variedad Riemanniana (de curvatura constante negativa) cuyas hipersuperficies son los hiperboloides $[x, x] = 1$. La estructura causal está dada por la conificación dada por la familia $[\xi, \xi] = 0$ determinado por el **subgrupo de isotropía** G_ξ que actúa en M en el punto $\xi \in M$ el cual queda fijo.

Precisamente la horoesfera será la órbita $G_\xi \cdot x \forall x \in M$ cuya ecuación a través de ésta realización en el espacio hiperbólico toma la forma

$$[x, \xi]^2 = \lambda^2$$

donde $\lambda = k[x, x] \forall x \in E^{n+1} \forall x \in \mathbb{C}$.

Def. Una horoesfera o esfera generalizada es una órbita $G_\xi \cdot x$ en M para algun $x \in M$ bajo el subgrupo de isotropía G_ξ .

Así mismo, por la sección 2.1 se sabe que la integral $\int_{G/H} f\omega$ es G -invariante ya que su forma diferencial ω es también G -invariante. Ahora debido a que $\int_{G/H} f\omega$ puede determinarse a través de las integrales sobre las clases laterales G/H ú órbitas integrales (ya que éstas órbitas son subgrupos compactos sobre los cuales existe una medida de Haar G -invariante), los subgrupos de isotropía son compactos para cualquier $x \in H_\xi$ (H_ξ una clase lateral del espacio G/H , del cual es un subgrupo cerrado). Así mismo la medida invariante sobre la órbita $G_\xi \cdot x$ ($\forall \xi \in G/H$ y $x \in H_\xi$) puede entonces ser consistentemente normalizada⁽²²⁾ como sigue:

Fijando una medida de Haar dg_0 sobre G_0 . Si $\xi = g \cdot o$ tenemos $G_\xi = gG_0g^{-1}$ y podemos aplicar dg_0 sobre una medida dg_ξ sobre G_ξ por simple **conjugación** sobre G_0 es decir mediante la identificación $z \mapsto gzg^{-1}$ ($\forall z \in G_0$). Luego dg_0 es bi-invariante y dg_ξ es independiente de la elección de g satisfaciendo $\xi = g \cdot o$, y ésta es bi-invariante.

(21) La necesidad de calcular una integral sobre G/H a través de sus órbitas (i. e. a través de integrales orbitales) estriba en el hecho de que éstas conforman subgrupos cerrados en G . Así mismo $X = G/H_x$ y $Y = G/H_y$ son espacios de clases integrales izquierdas donde H_x y H_y son subgrupos cerrados en G . Ahora si G es un grupo localmente compacto entonces H_x y H_y como subgrupos cerrados de G necesariamente son grupos compactos. Pero se sabe por la teoría de grupos compactos que éstos siempre son unimodulares de ahí que sus medidas de Haar invariantes izquierdas sean invariantes derechas sobre tales subgrupos de G . Por lo cual la integral sobre G puede quedar reescrita a través de integrales definidas sobre subgrupos compactos de G .

(22) **Def.:** Se dice que una medida sobre G/H es normalizada sí y sólo si es G -invariante y satisface la fórmula integral (Identidad de Fubini):

$$\int_G f(g) dg = \int_{G/H} \left(\int_H f(gh) dh \right) dg_H \quad \forall f \in C_c(G)$$

(es decir, dicha relación integral entre las medidas dg y dh son normalizadas).

Nota: Para la demostración del teorema de existencia de una medida G -invariante en G/H ver cita [1].

Luego $(G\xi)_x$ es compacto por lo cual éste tiene una única medida de Haar $dg_{\xi, x}$ con medida total 1 y ahora dg_{ξ} y $dg_{\xi, x}$ determinan canónicamente una medida invariante μ sobre la órbita $G\xi \cdot x = G\xi / (G\xi)_x$. Por lo tanto es válida la integración de $\int_{G/H} f\omega$ mediante las integrales orbitales; (es decir, mediante la integración de horoesferas):

$$\int_{G\xi \cdot x} f(x) d\mu(x) \quad \forall x \in M = G/H.$$

Así mismo, la transformada integral de Radon como un **automorfismo** del grupo G/H con H compacto puede escribirse a través de las horoesferas ó orbitas $G\xi \cdot x = \Xi$ en el espacio hiperbólico H^n como:

$$\int_{E^{n-1}/[x, x] = 1 : H^n} f(x) \delta([x, \xi] - 1) dx = \int_{\Xi} f(x) d\sigma \quad (45),$$

donde dx es la medida invariante. La integral así definida es invariante bajo desplazamientos de la horoesfera Ξ . Ésto significa que bajo movimientos g del espacio H^n mapeando Ξ en la nueva horoesfera Ξg , obtenemos

$$\int_{\Xi} f(x) d\sigma = \int_{\Xi g} f(x) d\sigma_g \quad (46)$$

donde $d\sigma_g$ es la medida sobre Ξg . Si en particular g transforma Ξ en sí mismo entonces

$$\int_{\Xi} f(xg) d\sigma = \int_{\Xi} f(x) d\sigma \quad (47)$$

Lo análogo para el espacio hiperbólico imaginario, tomando el hiperboloide $H^n: [x, x] = -1$. Ahora bien, como es necesario que las órbitas definidas por las horoesferas sean transitivamente permutadas bajo acciones del grupo (movimientos de la variedad), (es decir éstas deben pertenecer a un subgrupo conjugado al subgrupo normal N de G para dar mayor flexibilidad a su representación a través de subgrupos compactos, aunado el hecho de que éstas horoesferas tengan alguna propiedad que les permita permutarse de una a otra buscando la órbita invariante más indicada para el cálculo de la integral $\int_{G/H} f\omega$ según la orientación exigida por la variedad), tales horoesferas deben ser **horociclos**⁽²³⁾.

Precisamente explotando la idea de calcular la integral $\int_{G/H} f\omega$ a través de sus órbitas (integrales orbitales) y teniendo en cuenta la estructura analítica de la variedad riemanniana del espacio homogéneo G/H para calcular la medida de las secciones (subvariedades cerradas) de la variedad riemanniana M , es menester hacer recurso de un concepto que involucre alguna propiedad invariante de las subvariedades de G/H bajo las acciones del grupo semisimple subyacente en la variedad M . Dicha propiedad es la inducida por las subvariedades encajadas en M ⁽²⁴⁾, la cual caracteriza a tales órbitas como subvariedades totalmente geodésicas⁽²⁵⁾.

(23) Def.(Horociclo): Sea M un espacio simétrico de tipo no compacto definido como el espacio de clases G/K , donde G es un grupo de Lie semisimple conexo no compacto con centro finito y K un subgrupo compacto máximo en G . Admitamos la descomposición de Iwasawa de G dada por $G = KAN$, con A y N grupos abeliano y nilpotente, respectivamente. Un horociclo en M es una órbita en M de un subgrupo de G conjugado a N . Por un lado N es cerrado en G y K es compacto, entonces los horociclos son siempre subvariedades cerradas de M .

(24) Dicho encaje existe en forma natural, ya que existe un difeomorfismo local entre el espacio tangente en $x \in M$ y M cuya imagen es un subconjunto propio de una subvariedad cerrada en M . Si la variedad difeomorfa a M es N , dicho encaje es el mapeo

$$E: N \rightarrow E(N) \subset S$$

con S una subvariedad en M . De hecho dicho encaje es una **inmersión**.

(25) Def. (Subvariedad Totalmente Geodésica): Una subvariedad conexa S de una variedad riemanniana M se dice ser totalmente geodésica si ésta es geodésica en cada uno de los puntos de M .

Proposición II. 3. 1: Un horociclo es una subvariedad totalmente geodésica.

Prueba: Por definición el horociclo es una subvariedad cerrada en M . Puesto que todo H_ξ cumple la propiedad de conjugación en el grupo de Lie semisimple conexo G que admite la descomposición de Iwasawa, $G = ANK$, es decir

$$H_\xi = gNg^{-1} \subset G \quad \forall H_\xi$$

entonces éste es un grupo de isotropía en M , y toda órbita de M bajo la acción de dicho subgrupo es una geodésica paralela. Luego debido a que los horociclos son perpendiculares a las geodésicas paralelas a lo largo del transporte paralelo de la subvariedad cerrada $S \subset M$ entonces los horociclos son subvariedades totalmente geodésicas en M . \square

Ahora pasemos a identificar a los horociclos de una variedad riemanniana completa simplemente conexa de dimensión $n \geq 2$ y de curvatura seccional constante a través del difeomorfismo local que mapea al espacio $T_x(M)$ en M .

Lema: Sea $x \in M$, V un subespacio del espacio tangente $T_x(M)$, entonces $\text{Exp}_x(V)$ es una subvariedad totalmente geodésica de M .

Prueba: Para ésto elijamos un encaje específico de M en \mathbb{R}^{n+1} , y asumamos por simplicidad la curvatura $\epsilon = \pm 1$. Consideremos la forma cuadrática

$$B_\epsilon(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \epsilon x_{n+1}^2 \quad (4\epsilon)$$

y la cuádrica Q_ϵ dada por $B_\epsilon(x) = \epsilon$. El grupo ortogonal $O(B_\epsilon)$ actúa transitivamente sobre Q_ϵ . La forma B_ϵ es definida positiva sobre el espacio tangente $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ a Q_ϵ en $x^0 = (0, \dots, 0, 1)$; por la transitividad B_ϵ induce una forma cuadrática definida positiva en cada punto de Q_ϵ cambiando Q_ϵ dentro de una variedad riemanniana sobre la cual $O(B_\epsilon)$ actúa como un grupo transitivo de isometrías. El grupo de isotropía en el punto x^0 es isomórfico a $O(n)$ y éste actúa transitivamente sobre el conjunto de subespacios dos-dimensionales del espacio tangente $(Q_\epsilon)_{x^0}$. De ésto se sigue que todas las curvaturas seccionales en x^0 son la misma, llamada ϵ , luego por la homogeneidad, Q_ϵ tiene curvatura constante ϵ . Debido a la conexidad de las variedades con las cuales se está realizando éste estudio, podemos reemplazar Q_{-1} por su intersección Q_{-1}^+ con el semiespacio $x_{n+1} > 0$. Entonces Q_{-1} y Q_{-1}^+ son variedades simplemente conexas completas riemannianas de curvatura constante. Por un lado tales variedades son unívocamente determinadas por la dimensión y la curvatura. De ésto se sigue que podemos identificar M con Q_{+1} ó Q_{-1}^+ .

La geodésica en M a través de x^0 con vector tangente $(1, 0, \dots, 0)$ puede ser dejada fijamente por la isometría

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, -x_2, \dots, -x_n, x_{n+1})$$

Ésta geodésica es por lo tanto la intersección de M con los dos planos $x_2 = \dots = x_n = 0$ en \mathbb{R}^{n+1} . Por la transitividad de $O(n)$ todas las geodésicas en M a través de x^0 intersecan a M con dos planos a través del 0. Por la transitividad de $O(Q_\epsilon)$ se sigue entonces que las geodésicas en M son precisamente las intersecciones no vacías de M con dos planos a través del origen. Ahora si $V \subset T_{x^0}(M)$ es un subespacio de $T_x(M)$, $\text{Exp}_{x^0}(V)$ es por lo anterior la intersección de M con el subespacio de \mathbb{R}^{n+1} desarrollado por V y x^0 .

Por lo tanto $\text{Exp}_{x^0}(V)$ es una cuádrica en $V \oplus \mathbb{R}x^0$ y su estructura riemanniana inducida por M es la misma como la inducida por la restricción $B_\epsilon|_{(V \oplus \mathbb{R}x^0)}$.

Por lo cual, por lo anterior, las geodésicas en $\text{Exp}_x^o(V)$ son obtenidas por intersección con 2 planos en $V \oplus \mathbb{R}x^o$ a través de 0. Recíprocamente; las geodésicas en $\text{Exp}_x^o(V)$ son geodésicas en M tal que $\text{Exp}_x^o(V)$ es una subvariedad totalmente geodésica en M . Por la homogeneidad de M , reemplazando x^o por un punto arbitrario $x \in M$. El lema es probado. \square

Identificaciones en el espacio de clases:

De acuerdo con la teoría de espacios homogéneos, consideramos a M como un espacio homogéneo de la componente identidad G del grupo $O(G_o)$. Sea H_M el subgrupo isotrópico de G en el punto $x^o = (0, \dots, 0, 1)$ entonces H_M puede ser identificado con el grupo ortogonal especial $SO(n)$. Sea k un entero fijo; $1 \leq k \leq n - 1$, sea $\xi_o \subset M$ una subvariedad totalmente geodésica fijada de dimensión k pasando a través de x^o y sea H_ξ el subgrupo de G dejando ξ_o invariante, entonces tenemos

$$M = G/H_M, \quad \Xi = G/H_\xi.$$

Tal espacio Ξ es un espacio de órbitas que son subvariedades cerradas de M llamadas **horociclos**⁽²⁷⁾ las cuales son invariantes bajo acciones de G ⁽²⁶⁾.

Sea Ξ el espacio de horociclos en M . Si o es el origen $\{K\}$ en M y ξ_o el horociclo $N \cdot o$, el subgrupo de G que deja ξ_o invariante es igual a MN donde M es el centralizador de A en K , admitiendo la descomposición de Iwasawa de G . Por lo tanto tenemos las identificaciones

$$M = G/K, \quad \Xi = G/MN,$$

Usando la descomposición de G , se observa rápidamente que el mapeo $(kM, a) \rightarrow \xi = ka \cdot \xi_o$ es un difeomorfismo de $K/M \times A$ en Ξ . Así mismo el espacio de clases kM es llamado el **normal** a ξ y a la distancia compleja de o a ξ . Sea $B = K/M$, dados $x \in M$, $b \in B$, entonces existe exactamente un horociclo a través de x con normal b . Consideremos nuevamente el caso cuando M es el disco unitario. Si ξ es un horociclo y x un punto sobre ξ existe exactamente otro horociclo a través de x tangente a ξ . Por lo cual en la analogía existente entre horociclos e hiperplanos en \mathbb{R}^n (ambos perpendiculares a la familia de geodésicas paralelas), los hiperplanos pueden ser considerados como hiperplanos orientados.

Para mayor generalidad, consideremos a M' el normalizador de A en K y W el grupo de Weyl M'/M . Para cierto $\sigma \in W$ seleccionemos un representante $m_\sigma \in M' \text{ mod } M$. Ahora bien, correspondiendo a la descomposición de Iwasawa $G = KA(m_\sigma^{-1}Nm_\sigma)$, los horociclos $(m_\sigma Nm_\sigma^{-1} \cdot o)$ tienen el mismo espacio tangente en o . En general si $\xi \in \Xi$ y $x \in \xi$, existen precisamente $|W|$ horociclos distintos a través de x tangentes a ξ en x . ($|W|$ denota el orden de W .)

(26) Ξ es el conjunto de subvariedades k -dimensionales totalmente geodésicas de M .

(27) Para el caso simple cuando $G = SU(1, 1)$, el grupo de mapeos conformes del disco unitario $|z| < 1$, las nociones de horoesfera y horociclo coinciden y son los círculos tangentes a la frontera $|z| = 1$.

2.4. El Espacio Hiperbólico.

(a). **Existencia y convergencia de la transformada de Radon (dominio de definición).**
 Consideremos una variedad riemanniana simplemente conexa y completa de curvatura negativa $\epsilon = -1$. La transformada de Radon es ahora dada por

$$\mathcal{R}f(x) = f^*(\xi) = \int_{\xi} f(x) \, dm(x) \quad (49)$$

donde ξ es cualquier subvariedad totalmente geodésica k - dimensional de M con $1 \leq k \leq n - 1$ con una estructura riemanniana inducida y dm su correspondiente medida en M .

Es claro que dos puntos en M pueden ser unidos por una única geodésica en M . Sea o el origen en M . Considérese la geodésica $\text{Exp}_o Y = \gamma_Y(1)$ en coordenadas polares para M en o , esto es; considérese el mapeo

$$\text{Exp}_o Y \rightarrow (r\theta_1, \dots, \theta_{n-1})^{(28)} \quad (50)$$

donde Y corre a través del espacio tangente $T_o(M)$ y $r = |Y|$ (la norma dada por la estructura riemanniana)⁽²⁹⁾ y $(r\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ las coordenadas del vector unitario

(28) Todas las geodésicas empezando del origen o son obtenidas de la geodésica $\text{Exp}_o Y = \gamma_Y(1)$ por rotaciones en el grupo $SO(n)$. Por lo cual para tener un difeomorfismo transitivo podemos considerar la forma polar de tales geodésicas para que la acción de $SO(n)$ sea trivial. De ésta manera cualquier subvariedad totalmente geodésica en una componente conexa M' de la variedad M (por ejemplo una subvariedad totalmente geodésica de la hipersuperficie $F(x, x) = -1$ con $x^0 \geq 1$) puede ser transformada por una acción de $SO(n)$ [una rotación de $SO(n)$] a la subvariedad

$$\{x \in M' \mid x^{n-1} = \dots = x^0 = 0\}$$

entonces la representación local de la variedad M' puede ser realizada a través de una bola abierta unitaria D^n en \mathbb{R}^{n+1} , ésto es; si $y^i = x^i/|x|$ con $1 \leq i \leq n$ de donde con ésta se define en forma explícita como

$$D^n = \{y = (y^1, \dots, y^n) \in D^n \mid y^{n-1} = \dots = y^0 = 0\}$$

la cual es completamente isomorfa a la anterior y es $SO(n)$ - invariante, situación que ayuda a estudiar la estructura diferenciable inducida por la métrica riemanniana*. \square

(29) **Proposición:** Sea M una variedad diferenciable. Sea $\Phi : T_m(M) \rightarrow T_m^*(M)$ con regla de correspondencia $\Phi(m)(v_m, \cdot) = \Phi_U$ donde U es una vecindad en $m \in M$. El producto interno Φ_U dota a M de una estructura riemanniana cuya norma es la deducida por dicho producto interno.

Comentario: Es decir se tiene que demostrar que el producto interno en \mathbb{R}^n define una métrica riemanniana sobre cada $V_i \forall i \in I$ siendo $V_i \in \mathcal{A}_M$, pero además sabemos que el producto interno en \mathbb{R}^n es simétrico. Luego ésta propiedad en cada V_i con $i = 1, 2, 3, \dots$ se puede extender usando cierta partición de la unidad subordinada al atlas \mathcal{A}_M en M .

Prueba: Sea $\mathcal{A} = \{(V_i, \phi_i)\} \in I$ un atlas de M y sea $\{(V_i, f_i)\}_{i \in I}$ una partición de la unidad subordinada a dicho atlas en M . Luego en cada $V_i \subset M \forall i \in I, \Phi_i = \phi_i^* \Psi$ es una forma bilineal donde Ψ es el producto interno en \mathbb{R}^n $[\Phi_m^* = (d\phi)_m : T_m V \rightarrow T_m M = (\mathbb{R}^n, \cdot), \text{ y } \Phi : T_m V \times T_m V \rightarrow \mathbb{R} \text{ con regla de correspondencia } \langle X_m, Y_m \rangle = \sum_i X_i Y_i \text{ pues } T_m M \cong (\mathbb{R}^n, \cdot)]$, la cual define una métrica riemanniana sobre cada $V_i \forall i \in I$, es decir; $\Phi_m(X, Y) = \phi_i^* \Psi_m(X, Y) = \Psi_{\phi(m)}(T_m \phi(X), T_m \phi(Y)) = \langle X, Y \rangle_m = \langle X_m, Y_m \rangle \forall m \in V_i \text{ y } X_m, Y_m \in T_m \phi(V_i) \forall i \in I$. Ahora bien, dicho tensor Φ es diferenciable puesto que $\forall i, X, Y \in \mathfrak{X}(V_i), \langle X, Y \rangle_m = \Phi_m(X, Y) \in C^\infty(V_i) \forall m \in V_i \subset M \text{ é } i \in I$. Luego Φ , es un elemento del espacio de tensores diferenciables $\Gamma^2(T^0_2(U))$, ya que f_i , por ser una partición de la unidad en U , es diferenciable en todo U . Dicho tensor es un tensor simétrico en cada V_i debido a que Φ_i es simétrico sobre V_i . Tomemos una f en U_k para cualquier $k \in I$ de la partición de la unidad $\{(V_i, f_i)\}_{i \in I}$ con $f_i \phi_i > 0$ en $\phi_i^{-1}(M)$, y cero fuera de $\phi_i^{-1}(M)$.

Ahora extendamos dicho tensor simétrico y diferenciable a todo M . Puesto que $M = \bigcup_{i \in I} V_i$ y para cada $V_i, f_i \phi_i > 0$ entonces $\Phi_m = \sum_k f_k(m) \Phi_{\phi(m)} > 0$. En efecto, ya que $f_k(m) > 0$ en U_k , luego por otro lado $0 = \Phi_m(X, Y) = \sum_i f_i(m) \Phi_{\phi(m)}(X_m, Y_m)$ si y sólo si $\Phi(X_m, Y_m) = 0$ entonces $\Phi_m = 0$ si y sólo si para cualquier $Y_m \in T_m(M), X_m = 0$ por lo tanto $\Phi_m > 0$ si para cualquier $X_m \in T_m(M), Y_m = 0$. Luego definimos $\Phi_{\phi(m)} = \{f_k(m) \Phi_{\phi(m)} \text{ si } m \in V_i, 0 \text{ si } m \in \text{Supp } f, \subset V_i, \text{ pues } \sum_k f_k(m) = 1 \text{ para todo } m \in M \text{ y } \phi(m) \geq 0 \text{ para cualquier } m \in M \text{ y todo } i \in I, \text{ y donde } \Phi_{\phi(m)} = \{1 \text{ en } V_i, 0 \text{ fuera de } V_i. \text{ Entonces } \sum_i \sum_k f_k(m) \Phi_{\phi(m)} \text{ es convexa en } [0, 1] \text{ y por lo tanto diferenciable. Cada } f_k(m) \Phi_{\phi(m)} \text{ es diferenciable ya que } f_i \text{ y } \Phi_{\phi(m)} \text{ lo son. La suma de funciones diferenciables es diferenciable por lo cual } \Phi_m = \sum_i \sum_k f_k(m) \Phi_{\phi(m)} \text{ es diferenciable en } M, \text{ de donde la métrica definida } \Phi_m(X, Y) \text{ da una estructura diferenciable a la variedad riemanniana } M. \square$

Y/!Y.Entonces la estructura riemanniana de M está dada por

$$ds^2 = dr^2 + (\sinh r)^2 d\sigma^2 \quad (51)$$

donde $d\sigma^2$ es la estructura riemanniana

$$d\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) d\theta_i d\theta_j \quad (52)$$

sobre la esfera unitaria en $T_0(M)$ (es decir, la expresión local de la métrica riemanniana $d\sigma^2$).

El área de la superficie $A(r)$ y Volumen $V(r) = \int_0^r A(t) dt$ de una esfera en M de Radio r están dados por

$$A(r) = \Omega_n (\cosh r)^{n-1}$$

$$V(r) = \Omega_n \int_0^r \cosh^{n-1} t dt \quad (53)$$

donde tal $V(r)$ decrece como la función $e^{-(n-1)r}$, es decir; se satisface la igualdad de límites $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-(n-1)r} = 0 \quad (54)$

Ahora bien, la condición de crecimiento está dado por en el siguiente resultado⁽³⁰⁾ donde $d(0, \xi)$ denota la distancia del punto 0 a la subvariedad ξ .

Teo. II.4.1. (Teorema del soporte): Supóngase $f \in C^1(M)$ satisfice:

- (i). Por cada $m > 0, f(x) e^{-md(0,x)}$ es acotada,
- (ii) Existe $R > 0$ tal que $f^\wedge(\xi) = \int_{\mathcal{R}} \{f(x)\} = 0$ para toda $d(0,x) > R$,

entonces $f(x) = 0$ para $d(0,x) > R$.

Prueba: Inducimos la demostración del caso euclideano al caso riemanniano (ver Helgason, 1972)) □

Ahora bien, tomando $R \rightarrow 0$ obtenemos la siguiente consecuencia, la cual da un criterio de decrecimiento válido para la transformada de Radon en la variedad M, es decir; que ésta sea una distribución perteneciente al espacio $S(M)$,

Corolario: $\int_{\mathcal{R}} \{f\} = f^\wedge$ es 1:1 en $C^0(M)$ tal que satisfice (i).

Prueba: En efecto, usando la suavidad de M en la forma funcional

$$\int_G \phi(g) f(g^{-1} \cdot x) dg$$

para todo $\phi \in C^\infty_c(G)$, dg una medida de Haar sobre G, se puede asumir que $\phi \in C^\infty(M)$ en (49).

Consideremos a f una función radial. Sea p el punto en el horociclo ξ (subvariedad cerrada totalmente geodésica en M) de distancia mínima $P = d(0, \xi)$, sea $Q \in \xi$, arbitrario y sea $q = d(0, Q)$, $r = d(P, Q)$. Siendo ξ totalmente geodésica, $d(P, Q)$ es también la distancia entre P y Q en ξ .

Consideremos ahora el plano totalmente geodésico π a través de las geodésicas OP y OQ. Siendo que una subvariedad totalmente geodésica contiene la geodésica que une cualesquiera dos puntos de sus puntos, π contiene la geodésica PQ.

El ángulo OPQ mide 90 grados (Helgason, 1978; 77). Se concluye por geometría hiperbólica (Coxeter, 1957) que

$$\cosh q = \cosh p - \cosh r \quad (56)$$

Puesto que f es radial se sigue de (56) que la restricción $f|_\xi$ es constante sobre esferas en M (ver nota pie de página 28), con centro en P. Siendo que éstas tienen área $\Omega_R (\sinh r)^{k-1}$; por la fórmula (49) tenemos que,

$$f(\xi) = \Omega_R \int_0^\infty f(r) (\sinh r)^{k-1} dr$$

Puesto que f es radial, ésta es invariante bajo el subgrupo $H_x \subset G$ el cual fija O. Pero H_x no es sólo transitivo sobre cada esfera $S^r(O)$ con centro O, pues éste es para k fijo, transitivo sobre cada esfera $S^r(O)$ con subvariedades k -dimensionales totalmente

(30) De alguna manera la condición de decrecimiento regida a través de la función e^{-mr} presupone que el crecimiento también está regido por una función exponencial cuyo argumento debe ser la distancia $d(0,x)$

(31) Si f es radial, la integral orbital de la cual puede calcularse su transformada de Radon, resulta simple de calcularse y la invariancia de f bajo el subgrupo de isotropía $H_x \subset G$ puede inducirse, de las órbitas (horoesferas) a toda la variedad Riemanniana M.

geodésicas, las cuales son tangentes a $S'(O)$. Recíprocamente, $f(\xi)$ depende sólo sobre la distancia $d(O, \xi)$. Por lo tanto podemos escribir

$$F(Q) = F(\cosh q), \quad f(\xi) = \hat{F}(\cosh p)$$

para ciertas funciones univariadas F y \hat{F} tal que por (56) obtenemos

$$\hat{F}(\cosh p) = \Omega_k \int_0^{\infty} F(\cosh p \circ \cosh r) (\cosh r)^{k-1} dr$$

Escribiendo aquí $t = \cosh p$, $s = \cosh r$, esta expresión integral se reduce a

$$\hat{F}(t) = \Omega_k \int_0^{\infty} F(ts) (s^2 - 1)^{1/2k-1} ds$$

Si sustituimos $u = (ts)^{-1}$ y $v = t^{-1}$, entonces (56) toma la forma

$$v^{-1} \hat{F}(v^{-1}) = \Omega_k \int_0^v \left\{ F(u^{-1}) u^{-1} \right\} (v^2 - u^2)^{1/2k-1} du.$$

Esta ecuación integral es de la forma similar al caso euclideo (32).

(32) En el capítulo I de este trabajo se enunció solamente el teorema del soporte para el caso Euclideo, de una manera informal en el teorema I.1. Sin embargo resulta necesario enunciarlo explícitamente y dar su demostración, ya que en este momento se requiere realizar una aplicación análoga del discurso de tal teorema sobre la variedad riemanniana M .

Teo. (del Soporte caso Euclideo): Sea $f \in C(\mathbb{R}^n)$ satisfaciendo

- (i) Para cada entero $k > 0$, $|x|^k f(x)$ es acotada y
- (ii) Existe una constante $A > 0$ tal que $f(\xi) = 0$ para $d(O, \xi) > A$.

Entonces $f(x) = 0$ para $|x| > A$.

Prueba: Reemplazando f por convolución $\phi * f$ donde ϕ es radial y una función de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en el convexo definido por la bola de radio pequeño $B^*(O)$, vemos que es suficiente demostrar el teorema para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De hecho $\phi * f$ es suave, si satisface (i) y por la condición

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\sigma) d\sigma = 0$$

$\forall \sigma \in S$ donde S es la esfera que encierra la bola $B^*(O)$ se satisface (ii) con A reemplazada por $A + \epsilon$. Asumiendo el Teorema para el caso suave, obtenemos el soporte

$$\text{supp } \phi * f \subset B^{A+\epsilon}(O)$$

del cual tendiendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos el soporte $\text{supp } f \subset C \cup B^A(O)$

Si asumimos además que f es radial, entonces $f(x) = F(|x|)$ donde $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ y par. Entonces \hat{F} tendrá la forma

$$\hat{F}(\xi) = \hat{F}(d(O, \xi)) \text{ donde } \hat{F} \text{ está dada por}$$

$$\hat{F}(p) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} F((p^2 + |y|^2)^{1/2}) d\mu(y), \quad (p \geq 0)$$

debido a la definición de la transformada de Radon de la función $F(|x|)$. En particular F es par y \hat{F} se extiende a una función par en $C^\infty(\mathbb{R})$. Usando coordenadas polares en \mathbb{R}^{n-1} obtenemos

$$\hat{F}(p) = \Omega_{n-1} \int_0^{\infty} F((p^2 + t^2)^{1/2}) t^{n-2} dt \quad (I)$$

Utilizando la sustitución $s = (p^2 + t^2)^{1/2}$ y $u = p^{-1}$, entonces (I) se convierte en

$$u^{n-3} \hat{F}(u^{-1}) = \Omega_{n-1} \int_0^{\infty} (F(s^{-1}) s^{-n}) (u^2 - s^2)^{1/2(n-3)} ds$$

la cual podemos escribir con simplicidad como

$$h(u) = \int_0^{\infty} G(s) (u^2 - s^2)^{1/2(n-3)} ds$$

Tal ecuación integral es muy parecida a la ecuación integral de Abel y puede ser desarrollada como sigue para los fines demostrativos requeridos.

Multiplicando ambos lados por $u(t^2 - u^2)^{1/2(n-3)}$ e integrando sobre $0 \leq u \leq t$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t h(u) (t^2 - u^2)^{1/2(n-3)} u du = \\ & = \int_0^t \left(\int_0^{\infty} G(s) \left[(t^2 - s^2) (t^2 - u^2) \right]^{1/2(n-3)} ds \right) u du \\ & = \int_0^t G(s) \left(\int_{s^{-1}}^t \left[(t^2 - u^2) (u^2 - s^2) \right]^{1/2(n-3)} du \right) ds \end{aligned}$$

(Caso Particular (II))

La Sustitución $(t^2 - s^2)v = (t^2 + s^2) - 2u^2$ da una evaluación explícita de la integral dentro del paréntesis (.) y obtenemos

$$\int_0^t h(u)(t^2 - u^2)^{1/2(n-3)} u \, du = c \int_0^t g(s)(t^2 - s^2)^{n-2} \, ds$$

Aplicando el operador diferencial $\frac{d}{d(t^2)} = \frac{1}{2t} \frac{d}{dt}$, $(n-1)$ veces sobre el miembro derecho de un múltiplo de $t^{-1}g(t)$. De la cual se obtiene entonces

$$F(t^{-1})t^{-n} = ct \left(\frac{d}{d(t^2)} \right)^{n-1} \int_0^t (t^2 - u^2)^{1/2(n-3)} u^{n-2} \tilde{F}(u^{-1}) \, du. \text{ (II)}$$

Asumiendo (ii) tenemos que $\tilde{F}(u^{-1}) = 0$ si $u^{-1} > A$ lo cual es si $u \leq A^{-1}$. Pero entonces (II) implica que $F(t^{-1}) = 0$ si $t \leq A^{-1}$, lo cual es si $t^{-1} \geq A$. Esto demuestra el teorema para el caso cuando f es una función radial. Consideremos ahora el caso general fijando un punto $x \in \Omega^n$, y consideremos la función

$$U_x(y) = \int_k f(x + ky) \, dk$$

Como en (II) U_x satisface (i) y

$$\hat{U}_x(\xi) = \int_k f(x + k\xi) \, dk, \text{ III}$$

donde $(x + k\xi)$ denota la traslación del hiperplano $k\xi$ por x . La desigualdad del triángulo demuestra que

$$d(O, x + k\xi) \geq d(O, \xi) - |k|, \quad x \in \Omega^n, k \in \mathbb{K}.$$

De donde concluimos de nuestra observación (i) y (III) que

$$\hat{U}_x(\xi) = 0 \text{ IV}$$

Si $d(O, \xi) > A + |k|$ Pero $g(x)$ es una función radial tal que (IV) implica para la primera parte de la demostración que

$$\int_k f(x + k \circ y) \, dk = 0 \quad \text{si } |y| > A + |x|$$

la cual tiene el siguiente significado geométrico:

La integral de Superficie de f sobre $S^{|y|}(x)$ es cero si la bola $B^{|y|}(x)$ contiene a la bola $B^A(O)$.

En efecto, demostremos una generalización de este pronunciamiento, el cual podemos enunciar del modo siguiente:

Proposición: Sea $f \in C(\Omega^n)$ tal que para cada entero $k > 0$

$$\sup_{x \in \Omega^n} |x|^k |f(x)| < \infty$$

Supóngase f con integral de superficie 0 sobre cada esfera S la cual encierra una bola unitaria. Entonces $f(x) = 0$ para $|x| > 1$.

Prueba: La idea es perturbar a σ en la relación integral

$$\int_x f(\sigma) \, d\omega(\sigma) = 0$$

desplazando y derivando con respecto al parámetro de perturbación σ , esto claro está, obteniendo relaciones adicionales. Reemplazando como se menciona con anterioridad a f por una convolución conveniente $\phi * f$, vemos que es suficiente demostrar esta proposición para $f \in C^\infty(\Omega^n)$.

Escribiendo $S = S^R(x)$ y escribiendo el exterior de las bolas $B^R(x)$ como una unión de esferas con centro x tenemos por las hipótesis que

$$\int_{B^R(x)} f(y) \, dy = \int_{S^R(x)} f(y) \, dy$$

la cual es constante derivando respecto a x_1 obtenemos

$$\int_{B^R(O)} (\partial_1 f)(x+y) \, dy = 0 \quad \text{V}$$

Usando el teorema de la divergencia sobre la bola $B^R(O)$ tenemos que ésta toma la forma para un campo vectorial F sobre \mathbb{R}^n como

$$\int_{B^R(O)} (\text{div } F)(y) \, dy = \int_{S^R(O)} (F \cdot \bar{n})(s) \, d\omega(s) \quad \text{VI}$$

donde \bar{n} denota el vector normal exterior a la superficie $S^R(O)$ y $d\omega$ el elemento de superficie sobre $S^R(O)$.

Para el campo vectorial

$$F(y) = F(x+y) \frac{\partial}{\partial y_1}$$

obtenemos de (V) y (VI) con $\bar{s} = R^{-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ que

$$\int_{S^R(O)} f(x+\sigma) \sigma_1 \, d\omega(\sigma) = 0$$

pero por $\int_S f(\sigma) \, d\omega(\sigma) = 0$ tenemos que

$$\int_{S^R(O)} f(x+\sigma) \sigma_1 \, d\omega(\sigma) = 0$$

tal que $\int_S f(\sigma) \sigma_1 \, d\omega(\sigma) = 0$

Por lo cual tomamos la siguiente forma análoga al caso Euclidiano de tal ecuación integral

$$F(u^{-1})u^{-k} = cu \left(\frac{d}{d(u^2)} \right)^k \int_0^u (u^2 - v^2)^{1/2k-1} \hat{F}(v^{-1}) dv.$$

Asumiendo (ii), $\hat{F}(\cosh p) = 0$ Si $P > R$ Por lo tanto $\hat{F}(v^{-1}) = 0$ si $0 < v < (\cosh R)^{-1}$. De (58) se puede concluir que $F(u) = 0$ si $u < (\cosh R)^{-1}$; lo cual significa que $f(x) = 0$ y $d(0, x) > R$. Lo cual demuestra el teorema de soporte para $f \in C^\infty(M)$ para el caso f radial ⁽³³⁾.

Ahora consideremos $f \in C^\infty(M)$ satisfaciendo (i) y (ii) del teorema del soporte. Fijando un punto $x \in M$ y si dk es una medida de Haar normalizada sobre el subgrupo de isotropía H_x consideremos la integral

$$F_x(y) = \int_{H_x} f(gk \circ y) dk \quad \forall y \in M$$

donde $g \in G$ es un elemento tal que $g \circ O = x$. Claramente, $F_x(y)$ es la variación de f sobre la esfera con centro en x , pasando a través de $M/g \circ y$. La función F_x satisface la condición de decrecimiento (i) y ésta resulta ser radial.

Consideremos ahora

$$\hat{F}_x(y) = \int_{H_x} f(gk \circ \xi) dk$$

ahora es menester hacer recurso de las siguientes estimaciones:

$$d(0, gk \circ \xi) \geq d(0, \xi) - d(0, g \circ O)$$

Para ello, sea x_0 un punto sobre ξ que cierra a $k^{-1}g^{-1} \circ O$. Entonces por la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned} d(0, gk \circ \xi) &= d(k^{-1}g^{-1} \circ O, \xi) \geq d(0, x_0) - d(0, k^{-1}g^{-1} \circ O) \\ &\geq d(0, \xi) - d(0, g \circ O) \end{aligned}$$

Por lo tanto se sigue de (ii) que $\hat{F}_x(\xi) = 0$ si $d(0, \xi) > d(0, x) + R$.

Por un lado F es radial, esto implica por la primera parte de la demostración que

$$\int_{H_x} f(gk \circ y) dk = 0$$

Si $d(0 \circ y) > d(0, g \circ O) + R$ (60). Pero el conjunto $\{gk \circ y | k \in H_x\}$ es la esfera $S^{\alpha(0, y)}(g \circ O)$ con centro $g \circ O$ y radio $d(0, y)$. Por otro lado la desigualdad (60) implica la relación de inclusión.

$$B^r(0) \subset B^{\alpha(0, y)}(g \circ O)$$

para las bolas $B^R(0)$ y $B^{\alpha(0, y)}(g \circ O)$. Pero considerando la parte en $B^R(0)$ de la geodésica a través de 0 y de $g \circ O$ se ve que la relación reciproca de (61) implicará (60).

El teorema de soporte para $f \in C^\infty(M)$ puede ser por lo tanto demostrado si establecemos el siguiente lema para $f(x) = 0$ cuando $d(0, x) > R$:

Lema II.4.1. Sea $f \in C(M)$ satisfaciendo las condiciones:

(i) Para cada entero $m > 0$, $f(x)e^{-\alpha(0, x)}$ es acotada,

(ii) \exists un numero $R > 0$ tal que la superficie integral

$$\int_S f(\sigma) d\omega(\sigma) = 0$$

Siempre y cuando la esfera S encierre a la bola $B^R(0)$. Entonces $f(x) = 0 \quad \forall d(0, x) > R$.

(Sigue pie de página 32)....

Esto significa que las hipótesis de la proposición dadas para $f(x)$ fueron establecidas para la función $x_1 f(x)$. Por iteración

$$\int_S f(\sigma) P(\sigma) d\omega(\sigma) = 0$$

para cualquier polinomio $P(\sigma)$ tal que $f = 0$ sobre S . Esto demuestra la proposición, teniéndose entonces la demostración del teorema de soporte para $f \in C(U^2)$. \square .

(33) De alguna manera se está usando la acotación de las funciones que resultan en la aplicación de la transformada de Radon mediante el decrecimiento de funciones esféricas (tal es el caso de la función exponencial de $e^{(\frac{r^2 - R^2}{2rR})}$). Así mismo se estudia el decrecimiento de $\hat{f}(\xi)$ sobre ξ un horociclo en $B_r(0) \subset M$ con $r > 0$. La idea es precisamente que a través de las órbitas de M dadas por los horociclos en M , se obtenga una forma de acotación de f sobre dichos horociclos, teniendo entonces garantizada la existencia de la transformada de Radon en el espacio de funciones continuas las cuales también estén acotadas por funciones esféricas.

Prueba: Este lema es el análogo al lema demostrado en la nota del pie de página (32) para la demostración del teorema de soporte para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Usando un modelo especial hiperbólico de la variedad M , podemos adoptar tal demostración a la presente situación en la variedad Riemanniana M . Para ello asumamos nuevamente a $f \in C^\infty(M)$.

Considérese la bola unitaria $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1 \right\}$ con la estructura Riemanniana

$$ds^2 = \rho(x_1, \dots, x_n)^2(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$$

donde $\rho(x_1, \dots, x_n) = 2(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^{-1/2}$

Es bien conocido que esta variedad Riemanniana tiene curvatura constante -1 , la cual puede servirnos como modelo de la variedad M . Este modelo es usado ampliamente en esta parte, ya que las esferas en M son las esferas Euclidianas ordinarias dentro de la bola

Este hecho es obvio para la esfera Σ con centro O . Para la afirmación general es suficiente probar que si T es una geodésica geométrica con respecto a un punto (el cual puede tomarse sobre el eje x_1 , entonces $T(\Sigma)$ es una esfera euclidiana. El disco unitario D en el plano x_1, x_2 es totalmente geodésico en M , y por lo tanto invariante bajo T . Ahora bien, las isometrías del disco no euclidiano D son generadas por la conjugación compleja

$$x_1 + ix_2 \longrightarrow x_1 - ix_2$$

y las transformaciones lineales fraccionales, las cuales mapean círculos euclidianos en círculos euclidianos (es decir por las transformaciones conformes de $D \cap \Sigma \subset x_1, x_2$).

En particular $T(\Sigma \cap D) = T(\Sigma) \cap D$ es un círculo euclidiano. Pero T conmuta con las rotaciones alrededor del eje x_1 . Por lo tanto $T(\Sigma)$ es invariante bajo tales rotaciones e intersecciones D en el círculo, por lo cual ésta es una esfera euclidiana.

Pasemos a la demostración del Lema. Sea $S = S^r(y)$ una esfera en M encerrando $B^r(0)$ y sea $B^r(y)$ denotando la correspondiente bola. Expresando el exterior $M - B^r(y)$ como una unión de esferas en M con centro g , se deduce de la aseveración (ii) que

$$\int_{B^r(y)} f(x) dk = \int_x f(x) dx \quad (62)$$

la cual es constante para pequeñas variaciones en r y y .

La medida Riemanniana dx está dada por

$$dx = e^{\rho} dx_0 \quad (63)$$

donde $dx_0 = dx_1 \dots dx_n$ es el elemento de volumen euclidiano. Sean r_0 y y_0 respectivamente, el radio euclidiano y centro euclidiano de $S^r(y)$. Entonces $S^{r_0}(y_0) = S^r(y)$, $B^{r_0}(y_0) = B^r(y)$ y por (62) y (63) tenemos que

$$\int_{B^{r_0}(y_0)} f(x_0) \rho(x_0)^{\rho} dx_0 = cte \quad (64)$$

para todas las variaciones pequeñas en r_0 y y_0 ; por lo tanto por derivación con respecto a r_0 ,

$$\int_{S^{r_0}(y_0)} f(\sigma_0) \rho(\sigma_0)^{\rho} d\omega_0(\sigma_0) = 0 \quad (65)$$

donde $d\omega_0$ es el elemento de superficie euclidiano. Poniendo $f^*(x) = f(x) \rho(x)^{\rho}$, tenemos por (65) que

$$\int_{B^{r_0}(y_0)} f^*(x_0) dx_0 = cte$$

y derivando respecto a y_0 tenemos que

$$\int_{B^{r_0}(y_0)} (\partial_i f^*)(y_0 + x_0) dx_0 = 0$$

Usando el teorema de la divergencia enunciada en el pie de página (32), sobre el campo vectorial $F(x_0) = f^*(y_0 + x_0) \partial_i$ definido en una vecindad de $B^{r_0}(0)$, la última ecuación implica que

$$\int_{S^{r_0}(y_0)} f^*(y_0 + \sigma) \sigma_i d\omega_0(\sigma) = 0$$

la cual en combinación con (65) da

$$\int_{S^{r_0}(y_0)} f^*(\sigma) \sigma_i d\omega_0(\sigma) = 0 \quad (66)$$

Las estructuras euclidianas y no euclidianas sobre $S^{r-1}(y_0)$ difieren por el factor ρ^2 . Se sigue que $d\omega = \rho(\sigma)^{n-1} d\omega_0$ tal que (66) toma la forma

$$\int_{S^{r-1}(y)} f(\sigma) \rho(\sigma) \sigma_1 d\omega(\sigma) = 0$$

Por lo cual faltaria demostrar que la función $x \rightarrow f(x) \rho(x) x_1$ satisface las aseveraciones del teorema. Para ello por iteración obtenemos

$$\int_{S^{r-1}(y)} f(\sigma) \rho(\sigma)^k \sigma_1, \dots, \sigma_k d\omega(\sigma) = 0 \quad (67)$$

En particular esta identidad integral satisface para $y=0$ y $r > y$. Entonces $\rho(\sigma) = \text{cte}$ y (67) proporciona $f \equiv 0$ fuera de la bola $B^k(0)$ por el teorema de aproximación de Weierstrass. De esta manera se completa la demostración del teorema de soporte para $f \in C^\infty(M)$. \square .

Ahora para demostrar la existencia de la fórmula de la transformada de Radon inversa sobre M , es menester como en el caso euclideo, hacer recurso de un operador diferencial sobre M . Para ello usemos el operador de Beltrami-Laplace L sobre M (34).

Para nuestra variedad hiperbólica, usando la estructura Riemanniana propia de ésta, L toma la forma

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(n-1) \coth r \frac{\partial}{\partial r} + (\sinh r)^{-2} L_s$$

donde L_s es el operador de Beltrami-Laplace sobre la esfera unitaria en x_0 . Consideremos también para cada $r \geq 0$ el operador de valor significativo M^r definido por

$$(M^r f)(x) = \frac{1}{A(r)} \int_{S^r(x)} f(\sigma) d\omega(\sigma)$$

Como se vio anteriormente ésta puede ser escrita como

$$(M^r f)(g \circ 0) = \int_{H^r} f(gk \circ y) dk. \quad (68)$$

Sea $g \in G$ arbitrario y $y \in M$ es tal que $r = d(0, y)$. Si f es una función analítica, se puede desarrollar en serie de Taylor demostrando de (68) que M^r es cierta serie de potencias de L (Helgason, 1959 : 270 - 272). En Particular tenemos la conmutatividad

$$M^r L = L M^r \quad (69)$$

de lo cual se satisface la ecuación de Darboux.

$$L_x(F(x, y)) = L_y(F(x, y))$$

Para la función $F(x, y) = (M^{d(0,y)} f)(x)$. De hecho, usando (68) y (69) tenemos que si

$$g \circ 0 = x, \quad r = d(0, y).$$

Entonces

$$L_x(F(x, y)) = (L M^r f)(x) = (M^r L f)(x)$$

$$\int_{H^r} (L f)(gk \circ y) dk = \int_{H^r} (L f)(f(gk \circ y)) dk$$

de donde la última expresión integral es debida a la invariancia del laplaciano bajo la isometría gk . Pero ésta última expresión es $L_y(F(x, y))$.

Esta invariancia será útil para marcar la invariancia de la expresión integral de la fórmula de inversión para $f(\xi)$.

Teorema II.4.2. (Fórmula de inversión) Para k par, sea $Q_k \ (k \in \mathbb{Z})$ el polinomio

$$Q_k(z) = [z + (k-1)(n-k)] [z + (k-3)(n-k+2)] \dots [z + 1 - (n-2)]$$

de grado $k/2$. La transformada de Radon k -dimensional sobre la variedad Riemanniana M es invertida por la fórmula para este caso: $cf = Q_k(L)(f^*) \quad \forall \quad f \in C_0^\infty(M)$.

(34) Def. El Operador de Beltrami Laplace L está definido sobre $V \subset M$ por

$$L_f = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sum_i g^{ik} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right\}$$

$\forall f \in C^\infty(V)$. Tal expresión diferencial es invariante bajo un cambio de coordenadas de tal operador diferencial sobre M , donde

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad \sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik} \quad \text{y} \quad \bar{g} = |\det(g_{ij})|.$$

Aquí c es la constante $c = \frac{r(\frac{1}{2}n)}{r(\frac{1}{2}(n-k))} (-4\pi)^{\frac{1}{2}k}$

la fórmula se da también para f rápidamente decreciente en el sentido de la condición (i) del teorema de decrecimiento rápido para distribuciones.

Prueba: Fijamos un horociclo $\xi \in \Xi$ que pase a través del origen $O \in M$. Si $x \in M$ fijamos $g \in G$ tal que $g \cdot O = x$. Como k corre a través de H_x , $gk \circ \xi$ corre a través del conjunto de subvariedades totalmente geodésicas de M , pasando por x entonces

$$\hat{\phi}(g \circ O) = \int_k \hat{\phi}(gk \circ \xi) dk^{(2n)}$$

Por lo cual

$$(\hat{f})^\vee(g \circ O) = \int_k \left\{ \int_\xi f(gk \circ y) dm(y) \right\} dk = \int_\xi (M^r f)(g \circ O) dm(y)$$

donde $r = d(O, y)$. Pero por un lado ξ es totalmente geodésica en M , éste tiene también curvatura constante -1 y dos puntos en ξ tienen la misma distancia en ξ como en M . Es decir ξ hereda la isometría de la variedad de M . Por lo cual se tiene

$$(\hat{f})^\vee(x) = \Omega_k \int_0^\infty (M^r f)(x) (\sinh r)^{k-1} dr$$

Aplicando L a ambos miembros y usando a L en coordenadas hiperbólicas. Entonces

$$(L(\hat{f})^\vee)(x) = \Omega_k \int_0^\infty (\sinh r)^{k-1} L_r(M^r f)(x) dr ; \quad (70)$$

donde L^r es la "parte radial" $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1) \coth r \frac{\partial}{\partial r}$ de L . Poniendo ahora $F(r) = (M^r f)(x)$ se tiene que:

Lema: Sea m un entero tal que $0 < m < n = \dim M$. Entonces

$$\int_0^\infty \sinh^m r L_r F dr = (m+1-n) \left[m \int_0^\infty \sinh^m r F(r) dr + (m-1) \int_0^\infty \sinh^{m-2} r F(r) dr \right]$$

Si $m = 1$, los términos $(m-1) \int_0^\infty \sinh^{m-2} r F(r) dr$ pueden ser reemplazados por $F(0)$, los cuales se sigue por la repetición del método de integración por partes. De la combinación de éste lema con la ecuación de Darboux en la forma Radial

$$L_x(M^r f(x)) = L_r(M^r f(x))$$

deducimos

$$[L_x + m(n-m-1)] \int_0^\infty \sinh^m r (M^r f)(x) dx = -(n-m-1)(m-1) \int_0^\infty \sinh^{m+2} r (M^r f)(\rho) dr$$

Aplicando esto repetidamente a (70) obtenemos satisfechas las condiciones (i) y (ii) del teorema de decrecimiento rápido para $(L(\hat{f})^\vee)(x)$. Y por ende de \hat{f} . \square .

(35)

$\forall k \in \mathbb{Z}^+$ fijo con $(1 \leq k \leq n-1)$ sobre Ξ la variedad de todas las subvariedades totalmente geodésicas k -dimensionales de M . Si $\hat{\phi}$ es una función continua sobre Ξ denotamos por $\hat{\phi}$ la función puntual $\hat{\phi}(x) = \int_{x \in \xi} \hat{\phi}(\xi) d\mu(\xi)$

CAPITULO III

CURVATURA

3.1 CONCEPTO GENERAL DE CURVATURA.

La curvatura es una característica de una variedad no Euclídeana, la cual ayuda a obtener una idea de la forma de tal variedad. El tensor curvatura define un campo de curvaturas seccionales sobre las cuales puede medirse la curvatura, es decir se eligen las direcciones sobre cada sección pseudo-euclídeana ó euclídeana σ y se mide ahí la curvatura.

En el caso de una variedad Riemanniana elegimos el Haz vectorial de espacios proyectivos $O(M)$ y se mide ahí la curvatura a través del marco determinado en el Haz $L(M)$.

Una forma general para determinar la curvatura a través de una conexión proyectiva, siendo ésta la deducida de la estructura proyectiva P de la variedad Riemanniana M (el cual se define como un Haz principal en M) es utilizar el tensor curvatura proyectivo de Weyl con componentes $W_{\mu\nu}^{\lambda}$. La idea es utilizar algún subgrupo isomórfico al grupo de Weyl $W(G)$ definido sobre la variedad Riemanniana (es decir, el grupo semisimple que subsiste en M cuya identificación canónica es como un espacio simétrico en M). El tensor proyectivo de curvatura de Weyl, por sí mismo induce a una medida de la curvatura por espacios pseudo-euclídeanos en una variedad no Euclídeana y la medida de curvaturas seccionales se vuelve más natural en M , por medio del tensor W . Así mismo, en el caso de una variedad Riemanniana M , se elige el haz de espacios proyectivos $\pi: P \rightarrow M$ y se mide ahí la curvatura $K(u) \forall S \in M$.

De la conexión lineal asociada a la conexión principal de una variedad no euclídeana M cuya 1-forma diferencial de la conexión principal sea ω , se tiene la forma de curvatura Ω y la forma de torsión Θ donde la primera es una 2-forma de la conexión principal de la variedad M definida como una 2-forma en el espacio $C^\infty(M)$ y con valores en $\xi_\sigma = T_x(M)$; la cual es la diferencial exterior covariante de ω de tal conexión principal. La segunda forma de la conexión principal dada por Θ también es una 2-forma de ω , la cual se obtiene como la derivada exterior covariante de la forma canónica de tal conexión principal.

Entonces los campos tensoriales de torsión y curvatura respectivamente, pueden definirse como sigue:

$$\text{Torsión: } T(X, Y) = u(2\Theta(X^\alpha, Y^\alpha)) \quad \forall X, Y \in T_x(M) \quad (71)$$

donde u es cualquier punto del haz vectorial de marcos $L(M)$ con $\pi(u) = x$ y X^α, Y^α son vectores de $L(M)$ en u con $\pi(X^\alpha) = (X)$ y $\pi(Y^\alpha) = (Y)$.

La Torsión $T(X, Y)$ es independiente de la elección de u , X^α y Y^α , lo cual puede ser verificado directamente.

Por lo tanto en cada $x \in M$, T define un mapeo bilineal simétrico $T_x(M) \times T_x(M) \rightarrow T_x(M)$

En otras palabras, T es un campo tensorial de tipo (1,2) tal que $T(X, Y) = -T(Y, X)$.

Puede llamarse sin confusión alguna y deseando ser más técnicos a $T(X, Y)$, la traslación torsión en $T_x(M)$ determinada por X y Y . Similarmente tenemos que

$$R(X, Y)Z = u((2\Omega(X^\alpha, Y^\alpha))(u^{-1}Z)) \quad \forall X, Y, Z \in T_x(M). \quad (72)$$

donde u , X^α y Y^α son elegidos arbitrariamente en $L(M)$. Entonces $R(X, Y)Z$ depende sólo sobre X, Y y Z no sobre u , X^α y Y^α .

En la definición anterior $(2\Omega(X^\alpha, Y^\alpha))(u^{-1}Z)$ denota la imagen de $u^{-1}Z \in \mathbb{R}^1$ por el endomorfismo de $2\Omega(X^\alpha, Y^\alpha) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de \mathbb{R}^n . Por lo tanto $R(X, Y)$ es un endomorfismo de $T_x(M)$, $(R(X, Y)) \in \text{End}(T_x(M))$ y es llamada la transformación curvatura de $T_x(M)$ determinado por X y Y . Se sigue que R es un campo tensorial del tipo (1,3) tal que $R(X, Y) = -R(Y, X)$.

En términos de la diferenciación covariante, la torsión T y la curvatura R pueden ser expresadas como

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (73)$$

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (74)$$

donde X, Y y Z son campos vectoriales sobre M .

3.2 PROPIEDADES DE LA CURVATURA COMO UN MAPEO CUADRILINEAL SOBRE UN ESPACIO VECTORIAL D -DIMENSIONAL

Sea E un espacio vectorial n -dimensional y $R: E, E, E, E \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo cuadrilineal con las siguientes tres propiedades:

$$(a) R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_2, v_1, v_3, v_4)$$

$$(b) R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_4, v_3)$$

$$(c) R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0$$

Proposición III.2.1. Si R satisface las propiedades anteriores entonces éste posee también la siguiente propiedad

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_3, v_4, v_1, v_2) \quad (75)$$

Prueba: Denotando por $S(v_1, v_1, v_1, v_1)$ el miembro izquierdo de la propiedad (c) anteriormente mencionada y realizando un cálculo antisimétrico en S tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= S(v_1, v_2, v_3, v_4) - S(v_2, v_3, v_4, v_1) - S(v_3, v_4, v_1, v_2) + S(v_4, v_1, v_2, v_3) \\ &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_2, v_1, v_3, v_4) - R(v_3, v_4, v_1, v_2) + R(v_4, v_3, v_1, v_2) \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades (a) y (b) anteriores tenemos que

$$2R(v_1, v_2, v_3, v_4) - 2R(v_3, v_4, v_1, v_2) = 0$$

es decir $R(v_1, v_2, v_3, v_4) - 2R(v_3, v_4, v_1, v_2) = 0$.

Proposición III.2.2. Sean R y T dos mapeos cuadrilineales con propiedades (a), (b), (c).

Si $R(v_1, v_2, v_1, v_2) = T(v_1, v_2, v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \Rightarrow R = T$.

Lateralmente al mapeo cuadrilineal R , consideremos un producto interior sobre V (i.e. una forma bilineal simétrica definida positiva sobre V), la cual puede ser denotada por (\cdot, \cdot) . Sea P un plano que es un subespacio 2-dimensional en V y sea v_1 y v_2 una base ortonormal para P . Sea $K(P) = R(v_1, v_2, v_1, v_2)$. Como la notación sugiere, $K(P)$ es independiente de la elección de una base ortonormal para P . De hecho si w_1 y w_2 forman otra base ortonormal de P entonces $w_1 = av_1 + bv_2$, $w_2 = -bv_1 + av_2$ (ó $bw_1 - av_2$) donde a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$. Usando (a) y (b) se obtiene fácilmente que

$$R(v_1, v_2, v_1, v_2) = R(w_1, w_2, w_1, w_2) \quad (76)$$

Proposición III.2.3. Si v_1, v_1 es una base (no necesariamente ortonormal) de un plano P en V , entonces

$$K(P) = \frac{R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{(v_1, v_2)(v_2, v_2) - (v_1, v_2)^2} \quad (77)$$

Prueba: Obtenemos la fórmula usando la siguiente base ortonormal para P :

$$\frac{v_1}{(v_1, v_2)}, \frac{1}{\Delta} [(v_1, v_1)v_2 - (v_1, v_2)v_1]$$

donde $\Delta = \left[(v_1, v_1)((v_1, v_1)(v_2, v_2) - (v_1, v_2)^2) \right]^{1/2}$. \square

Sea $R_1(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1, v_3)(v_2, v_4) - (v_2, v_3)(v_4, v_1) \quad \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$.

Es un hecho trivial, verificar que R es un mapeo cuadrilineal que satisface las propiedades (a), (b) y (c), y que para cualquier plano P en V , tenemos

$$K_1(P) = R_1(v_1, v_2, v_1, v_2) = 1 \quad (78)$$

donde v_1, v_2 es una base ortonormal para P .

Proposición III.2.4. Sea R un mapeo cuadrilineal con las propiedades (a), (b) y (c). Si $K(P) = C$ con $C \in \mathbb{R}$ para todos los planos $P \Rightarrow R = CR_1$.

Prueba: Por la Proposición III.2.1 tenemos que

$$R(v_1, v_2, v_1, v_2) = CR_1(v_1, v_2, v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

Aplicando la proposición III.2.2. a R y CR_1 , se concluye fácilmente que $R = CR_1$. \square

Sea e_1, \dots, e_n una base ortonormal para V con respecto al producto interno (\cdot, \cdot) . Para cada mapeo cuadrilineal R que satisface las propiedades (a), (b) y (c) asociamos la forma bilineal simétrica S sobre V como sigue

$$S(v_1, v_2) = R(e_1 v_1, e_1 v_2) + R(e_2 v_1, e_2 v_2) + \dots + R(e_n v_1, e_n v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

se puede verificar fácilmente que S es independiente de la elección de una base ortonormal e_1, \dots, e_n . De la definición de S obtenemos

Proposición III.2.5. Sea $u \in V$ un vector unitario y sea v, e_2, \dots, e_n una base ortonormal para V . Entonces

$$S(v, v) = K(P_2) + \dots + K(P_n) \quad (79)$$

donde cada P_i es el plano generado por v y e_i .

Prueba: Completamente inmediato de la definición de $S(v_1, v_2)$ considerando $v_1 = v_2$ con $v_1, v_2 \in V$. \square

3.3. CURVATURA SECCIONAL

Sea M una variedad Riemanniana n -dimensional con tensor métrico g . Sea $R(X, Y)$ la transformación curvatura de $T_X(M)$ determinada por $X, Y \in T_X(M)$.

El campo tensorial curvatura Riemanniano de M denotado por R es el campo vectorial de grado 4-covariante definido por

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4), X_2, X_1) \quad (80)$$

$$\forall X_i \in T_X(M), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Proposición III.3.1. El tensor Riemanniano considerado como un mapeo cuadrilineal

$$T_X(M) \times T_X(M) \times T_X(M) \times T_X(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (81)$$

en cada $T_X(M)$ posee las propiedades (a), (b) y (c) de la sección 2, anterior y también

$$R(u_1, u_2, u_3, u_4) = R(u_3, u_4, u_1, u_2) \quad \forall u_1, u_2, u_3, u_4 \in T_X(M)$$

Prueba: Sea u cualquier punto del haz $O(M)$ de marcos ortogonales tales que $\pi(u) = x$. Sean $X_3^*, X_4^* \in T_u(O(M))$ con $\pi(X_3^*) = X_3$ y $\pi(X_4^*) = X_4$. De la definición de la transformación curvatura $R(X_3, X_4)$, dada en la sección 1 de este capítulo se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(R(X_3, X_4), (X_2, X_1)) &= \mathfrak{g}(u \left[2\Omega(X_3^*, X_4^*)(u^{-1}X_2) \right], X_1) \\ &= ((2\Omega(X_3^*, X_4^*))(u^{-1}(X_2), u^{-1}(X_1))) \end{aligned} \quad (85)$$

donde $(,)$ es el producto interno natural en \mathbb{R}^n . Ahora vemos que la propiedad (a) es consecuencia del hecho de que $\Omega(X_3^*, X_4^*) \in (\mathfrak{u})$, esto es, tiene la forma de una matriz simétrica. (b) se sigue de $R(X_3, X_4) = -R(X_4, X_3)$. Finalmente (c) es consecuencia de la primera identidad de Bianchi. \square

Para cualquier plano P en el espacio tangente $T_x(M)$, la curvatura seccional $K(P)$ está definida por

$$K(P) = R(X_1, X_2, X_1, X_2) = \mathfrak{g}(R(X_1, X_2)X_2, X_1) \quad (86)$$

donde X_1 y X_2 es una base ortonormal de P . Como se vio en la sección 2 de este capítulo, $K(P)$ es independiente de la elección de la base ortonormal $\{X_1, X_2\}$ y la proposición III.1.3. Implica que el conjunto de valores de $K(P) \forall$ los planos P en $T_x(M)$ determina el tensor curvatura Riemanniano en X .

Si $K(P)$ es una constante $\forall P$ en $T_x(M)$ y para todos los puntos $x \in M$, entonces M es llamado un espacio de curvatura constante.

Teorema III.3.1. Sea M una variedad Riemanniana conexa de dimensión mayor que 3. Si la curvatura seccional $K(P)$, donde P es un plano en $T_x(M)$, depende sólo de x , entonces M es un espacio de curvatura constante.

Prueba: Definamos un campo tensorial covariante de R , de grado 4-covariante como sigue:

$$R_1(W, Z, X, Y) = \mathfrak{g}(W, X)\mathfrak{g}(Z, Y) - \mathfrak{g}(Z, X)\mathfrak{g}(Y, W), W, Z, X, Y \in T_x(M) \quad (82)$$

Por la proposición III.2.4. Tenemos que:

$$R = kR_1$$

donde k es una función sobre M . Por un lado g es paralelo en R_1 . De donde

$$(\nabla_U R)(W, Z, X, Y) = (\nabla_U k)R_1(W, Z, X, Y) \quad \forall U \in T_x(M) \quad (83)$$

Esto significa que para cualquier $X, Y, Z, U \in T_x(M)$ tenemos:

$$\left[(\nabla_U R)(X, Y) \right] Z = (Uk)(\mathfrak{g}(Z, Y)X) - \mathfrak{g}(Z, X)Y \quad (84)$$

Considerando la suma cíclica de la identidad anterior con respecto a (U, X, Y) , el lado izquierdo se anula por la segunda identidad de Bianchi. Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= (Uk)(\mathfrak{g}(Z, Y)X - \mathfrak{g}(Z, X)Y) + (Xk)(\mathfrak{g}(Z, U)Y \\ &\quad - \mathfrak{g}(Z, Y)U) + (Yk)(\mathfrak{g}(Z, X)U - \mathfrak{g}(Z, U)X). \end{aligned} \quad (85)$$

Para un X arbitrario elegimos Y, Z y U de tal forma que X, Y y Z sean mutuamente ortogonales y que $U = Z$ con $g(Z, Z) = 1$. Esto es posible porque $\dim M \geq 3$.

(37) Sea T y R la torsión y curvatura de una conexión lineal de M . Entonces para cualesquiera X, Y y $Z \in T_x(M)$ tenemos:

1ra Identidad de Bianchi:

$$\mathfrak{I} \{ R(X, Y)Z \} = \mathfrak{I} \{ T(X, Y)Z + (\nabla_X T)(Y, Z) \}$$

2da Identidad de Bianchi:

$$\mathfrak{I} \{ (\nabla_X R)(Y, Z) + R(T(X, Y), Z) \} = 0$$

donde \mathfrak{I} denota la suma cíclica con respecto a X, Y y Z . En particular si $T = 0 \Rightarrow$ la 1ra Identidad de Bianchi es

$$\mathfrak{I} \{ R(X, Y)Z \} = 0$$

y la 2da Identidad de Bianchi es

$$\mathfrak{I} \{ (\nabla_X R)(Y, Z) \} = 0$$

Entonces obtenemos

$$(X^k)Y - (Y^k)X = 0 \quad (86)$$

Por lo cual X y Y son linealmente independientes, teniendo $X^k=Y^k=0$, lo cual muestra que k es constante.

Corolario: Para un espacio de curvatura constante k, tenemos que

$$R(X, Y)Z = k(\mathcal{L}(Z, Y)X - \mathcal{L}(Z, X)Y). \quad (87)$$

Si R^i_{jkl} y g_{ij} son las componentes del tensor curvatura y el tensor métrico con respecto a un sistema de coordenadas locales, entonces las componentes R_{ijkl} del tensor curvatura Riemanniano están dadas por

$$R_{ijkl} = \sum_{\alpha} g_{\alpha i} R^{\alpha}_{jkl} \quad (88)$$

Si M es un espacio de curvatura constante con $K(P)=k$ entonces

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}) \quad (89)$$

$$R^i_{jkl} = k(\delta^i_k g_{jl} - g_{jk} \delta^i_l) \quad (90)$$

Definamos el conjunto de funciones \tilde{R}^i_{jkl} sobre $L(M)^{(2)}$ por

$$\Omega^i_j = \sum_{k,l} \frac{1}{2} \tilde{R}^i_{jkl} \theta^k \wedge \theta^l \quad (91)$$

donde $\Omega = (\Omega^i_j)$ es la forma de curvatura de la conexión Riemanniana. Para un punto arbitrario u de $U(M)$ elegimos un sistema de coordenadas locales x^1, \dots, x^n con origen $x = \pi(u)$ tal que u es el marco dado por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x$$

(92) Definimos un conjunto de funciones \tilde{T}^i_{jk} y \tilde{R}^i_{jkl} sobre $L(M)$ por

$$\Theta^i = \sum_{\mu, \nu} \frac{1}{2} \tilde{T}^i_{\mu\nu} \theta^\mu \wedge \theta^\nu, \quad \tilde{T}^i_{jk} = -\tilde{T}^i_{kj}$$

$$\Omega^i_j = \sum_{k,l} \frac{1}{2} \tilde{R}^i_{jkl} \theta^k \wedge \theta^l, \quad \tilde{R}^i_{jkl} = -\tilde{R}^i_{lkj}$$

Estas funciones son relacionadas a las componentes de la torsión T y la curvatura R como sigue. Sea $\sigma : U \rightarrow L(M)$ la sección a través de U definida como aquella sección a través de $L(M)$ la cual asigna a cada $x \in U$ un marco lineal $(\partial/\partial x^1)_x, \dots, (\partial/\partial x^n)_x$.

Entonces

$$\sigma^* \tilde{T}^i_{jk} = T^i_{jk}, \quad \sigma^* \tilde{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl}$$

Se siguen de:

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$$

$$R^i_{jkl} = (\partial \Gamma^i_{lj} / \partial x^k - \partial \Gamma^i_{kj} / \partial x^l) + \sum_{\alpha} (\Gamma^i_{\alpha l} \Gamma^{\alpha}_{jk} - \Gamma^i_{\alpha k} \Gamma^{\alpha}_{jl})$$

$$y \quad \sigma^* d\theta^i = -\sum_j \sigma^* \omega^j \wedge \sigma^* \theta^i + \sigma^* \Theta^i$$

$$\sigma^* d\omega^i = -\sum_k \sigma^* \omega^k \wedge \sigma^* \omega^i + \sigma^* \Omega^i_j$$

$$\sigma^* \theta^i = dx^i \quad y \quad \sigma^* \omega^j = \sum_k \Gamma^j_{ik} dx^k$$

(*) Nota: Los símbolos de Christoffel (que no son tensores)

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right\} = g_{il} \cdot \left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} k, j, l \\ i \end{matrix} \right\}$$

Son los coeficientes de la conexión Riemanniana.

Estos símbolos de Christoffel tienen el significado físico de representar aquellos elementos que son nulos en una referencia inercial lorentziana que permite poner la métrica en la forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Mientras que en un sistema arbitrario (no necesariamente inercial) no son nulos. Esta propiedad permite deducir que aquellos símbolos están en relación con fuerzas aparentes.

Así mismo Levi-Civita señaló acertadamente que el elemento de la teoría de la relatividad general que hace posible eludir el sistema inercial y sólo considerar a la métrica de Riemann como elemento fundamental de dicha teoría; fue considerar el campo de desplazamiento infinitesimal definido por los símbolos Γ^i_{jk} .

La métrica ó el tensor simétrico de campo g_{ij} que la define está sólo relacionada indirectamente con la posibilidad de evitar el sistema inercial en cuanto que determina un campo de desplazamiento.

Con respecto a este sistema de coordenadas tenemos

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

en x , de donde

$$R_{jkl}^i = R_{ijkl} = k(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}) \quad (92)$$

en x . Sea σ una sección local a través de $L(M)$ dada por el campo de marcos lineales

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

como se mostró en la nota de pie de página (38), tenemos que $\sigma^* \tilde{R}_{jkl}^i = R_{ijkl}$ de donde

$$\tilde{R}_{jkl}^i = k(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}) \quad (93)$$

en $u \in O(M)$ con $\Omega_j^i = k\theta^i \wedge \theta^j$ en $u \in O(M)$. Debido a que u es un punto arbitrario de $O(M)$, tenemos:

Proposición III.3.2. Si M es un espacio de curvatura constante con curvatura seccional k , entonces la forma de curvatura $\Omega = (\Omega_j^i)$ está dada por:

$$\Omega_j^i = k\theta^i \wedge \theta^j \quad (94)$$

sobre $O(M)$, donde $\theta = (\theta^i)$ es la forma canónica sobre $O(M)$.

Para el caso de una variedad hiperbólica, $k=-1$ y $\Omega_j^i = -\theta^i \wedge \theta^j$ (95)

Demostremos la proposición.

Prueba: Lo primero que es menester demostrar es que la relación (94) es una 2-forma de valor vectorial la cual es un mapeo de $\Lambda^2 T_x(M)$ en $\text{End}(T_x(M))$, identificado con $T_x(M) \otimes T_x(M)$, es el mapeo lineal definido como

$$\Omega_j^i(x)(\theta^i \wedge \theta^j) = k(x)((G_x \theta^i) \otimes \theta^j - (G_x \theta^j) \otimes \theta^i) \quad (96)$$

donde el mapeo lineal $G_x : T_x(M) \rightarrow T_x(M) \otimes T_x(M)$ es canónicamente identificado por

$$g(x) \left[\left(\theta^i | \theta^j \right) \right] = \left\langle G_x \theta^i, \theta^j \right\rangle \quad (97)$$

donde éste mapeo no depende de la elección de la base en $T_x(M)$, por lo cual la expresión para la 2-forma es consistente y k es independiente de i y j .

Ahora bien, si $\theta^i = \sum_l \xi^l \theta_l(x)$, $\theta^j = \sum_l \eta^l \theta_l(x)$ tenemos

$$\left\langle K(x), \theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^i \otimes \theta^j \right\rangle = \sum_{b,l,j,k} k_{b,l,j,k}(x) \xi^b \eta^l \xi^j \eta^k \quad (98)$$

y éste es igual a $k(x) \|\theta^i \wedge \theta^j\|^2 = k(x) \sum_{i < j} ((\xi^i)^2 (\eta^j)^2 + (\xi^j)^2 (\eta^i)^2 - 2\xi^i \xi^j \eta^i \eta^j)$; de lo

cual es claro que los números $K_{b,l,j,k}(x)$ son nulos excepto para $K_{llll}(x) = -K_{llll}(x) (i \neq j)$, los cuales son todos iguales a $k(x)$.

En virtud de $K_{bllk} = \varepsilon_k (\Omega_{bl}, \theta_j \wedge \theta_k)$ ó

$$\Omega_{bl} = \sum_{j,k} \varepsilon_b K_{bllk} \sigma_j \wedge \sigma_k \quad (99)$$

y del hecho de que $\sigma_j(x) \wedge \sigma_l(x)$ forma una base de $\Lambda^2 T_x(M) \otimes \Lambda^2 T_x(M)$ dual a la base

$$(\theta_i(x) \wedge \theta_j(x)) \text{ de } \Lambda^2 T_x(M),$$

se sigue que (99) es equivalente a (94). \square

CAPITULO IV

MEDICION DE LA
CURVATURA DE UN
UNIVERSO
MEDIANTE LA
TRANSFORMADA
DE RADON

4.1. El Cosmos y la Justificación del Uso de Elementos Electrodinámicos (Haces de Luz Provenientes de las Estrellas) en la Medición de su Curvatura.

Calibrar al universo a través de las ecuaciones de Maxwell es posible, ya que la estructura lorentziana debida a la hiperbolicidad de la métrica pseudoriemanniana del espacio-tiempo lo permite. Es decir el espacio-tiempo se asemeja mas geoméricamente a un espacio hiperbólico. Así mismo, la idea de obtener una teoria de campo del universo a través del campo electromagnético y las demás interacciones, posiblemente estas últimas detectadas por medio de estos campos electromagnéticos, puede ser viable en tanto que los efectos del campo gravitacional se puedan describir en términos de una conexión que especifica la relación entre marcos de referencia locales definidos en cada punto o suceso del espacio-tiempo.

Los coeficientes de conexión Γ_{ij}^k (símbolos de Christoffel) para este caso son los definidos por la conexión en una variedad Riemanniana de dimensión $n = 4$, los cuales constituyen el conjunto de parámetros de escala para la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en cada región del espacio-tiempo, siendo estas invariantes bajo las transformaciones calibre del grupo de holonomía $SO(4)$ en toda la región del cosmos.

Sea M el espacio de Minkowski 4-dimensional, es decir consideremos a M como la variedad \mathbb{R}^4 equipada con la métrica g sobre \mathbb{R}^4 de forma diagonal $(1, 1, 1, -1)$ en coordenadas (x, y, z, t) . El espacio sideral es un espacio de Minkowski el cual es una variedad hiperbólica inducida por la estructura diferencial definida por su tensor métrico g . Esto significa que en la vecindad de cualquier punto p del cosmos M existe un sistema de coordenadas cuadridimensionales $\{(x, y, z, t)\}$ para describir a M como un espacio-tiempo. Por otro lado la distancia infinitesimal entre dos puntos próximos en dicho espacio que se curva localmente, será medida por un tensor $g \in T_2^0(M)$ tal que para cualquier punto $p \in M$

$$g(p) = ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (100)$$

llamada la métrica lorentziana de M , la cual posee una invariancia de transformación bajo la acción de cualquier transformación $A \in \mathcal{L} = O(1, 3)^{(39)}$ y que tiene carácter de métrica pseudoriemanniana en M . Ahora bien, debido a que toda variedad lorentziana de dimensión n es isomorfa localmente a un espacio de Minkowski de dimensión n entonces la métrica es también métrica característica del espacio de Minkowski. Por definición $\mathcal{L} = \{A \in GL(\mathbb{R}^4) \mid g(Ax, Ay) = g(x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}^4\}$. El campo electromagnético de Maxwell es la 2-forma diferencial

$$F = F_{ab} dx_a \wedge dx_b \in \Omega^2(\mathbb{R}^4) \quad (101)$$

sobre M y cuya forma en el espacio de endomorfismos de M definido por el haz vectorial fibrado (haz tangente) $\mathcal{T} \otimes \mathcal{H}$ es la correspondiente forma matricial

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & E^1 \\ -B^3 & 0 & E & E^2 \\ B^2 & -B^2 & -0 & E^3 \\ -E^1 & -E^2 & -E^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (102)$$

El campo electromagnético de Maxwell es una sección diferenciable del haz tangente

$\cup \Lambda^2 T^*(M) \otimes E^3$ donde E^3 es el espacio euclideo de dimensión 3.

De tal manera, podemos definir al espacio $\mathcal{L} \otimes \mathcal{H}$ como el álgebra de Lie de los campos F invariantes bajo acciones euclideas del subgrupo ortogonal de Lie $\mathcal{L} = O(1, 3)$ del grupo de Lie $GL(\mathbb{R}^4)$, el cual como sabemos es un grupo analítico.

(39) Dicho grupo es un grupo de rotaciones y transformaciones mercales en \mathbb{R}^4 .

Dicha algebra de Lie es un algebra antisimétrica cuyo grupo de Lie correspondiente es el grupo $SU(2) \times T^n$ con $n=2$. Cabe mencionar que el algebra es antisimétrica tambien sobre R^3 . Asi mismo explicitamente

$$\mathbb{F} \otimes \mathbb{H} = \{F \in GL(R^4) \mid \mathbb{F}F = F\} \quad (103)$$

por lo cual cualquier sistema de ecuaciones deducido del haz tangente electromagnético $\mathbb{F} \otimes \mathbb{H}(M)$ es invariante bajo la acción euclidea del grupo de Lorentz \mathbb{L} . En otras palabras, siendo esta invariancia valida para todos los fenomenos electromagnéticos y considerando que el haz vectorial fibrado $\mathbb{F} \otimes \mathbb{H}$ es una variedad \mathbb{L} -invariante isomorfa a todo haz lineal de toda variedad lorentziana, entonces podemos calibrar todo campo sideral de M por medio de las ecuaciones de Maxwell a través de la conexión respectiva.

Asi pues, en primera instancia todo el espacio de Minkowski puede ser calibrado a través de las $U(1)$ -haz conexiones (potenciales vectoriales), pues parece natural medir la energía electromagnética en todo punto del espacio M a través de una geodesica donde este satisfice cierto funcional de estructura pseudo-riemanniana, y donde F es conservativo.

Ahora bien, la idea en segunda instancia es entender esta forma de conexión para calibrar otros campos tales como el campo gravitacional. Para ello se necesita saber si las 1-formas de conexión del haz $\mathbb{F} \otimes \mathbb{H}(M)$ dadas como operadores de conexión bajo el grupo $U(1)$ pueden escribirse al contexto de un grupo de Lie no abeliano y de tipo compacto, tal y como $SU(2)$ por ejemplo, o con mayor generalidad $SU(n)$ los cuales como sabemos son grupos holonómicos sobre la variedad M y como sabemos por el capítulo II del presente trabajo, las subvariedades totalmente geodésicas que son invariantes bajo el grupo $SO(n)$ conforman los grupos de isotropía $O(1, n)$ y $O(1, n-1)$ en M^n . Tales subvariedades totalmente geodésicas son los horociclos contenidos en M y que se mantienen fijos bajo las respectivas acciones de $SO(n)$.

Aceptando todo lo mencionado con amelación y por las observaciones en astrofísica⁽⁴⁰⁾, los campos intersidiales son en particular campos electromagnéticos y estos pueden ser medidos y/o detectados directamente por instrumentos de señales de energía finita. De esta manera resulta factible la medida de la curvatura de M a través de la deflexión de los haces de luz que provengan de fuentes compactas de luz distribuidas estas en alguna región del espacio.

En su trayectoria de viaje estos haces luminosos experimentan deflexiones cuando pasan cerca de campos gravitacionales, lo que de alguna manera sirve para corroborar que el espacio se curva en presencia de cuerpos siderales.

4.2. Transformada de Radon Vectorial.

Consideremos una región del espacio sideral con un número finito de estrellas, considerando estas estrellas, como puntos de la variedad M que modela nuestro universo. Debido a que las estrellas o fuentes de luz son cuerpos en movimiento en el espacio, es menester hablar del campo de velocidades de uno de estos elementos siderales para describir su posición en el espacio. Asi mismo, cualquier propiedad de localización, movimiento o brillo atribuible a la fuente de luz tendrá que ser expresado en función de dicho campo de velocidades.

Consideremos una región acotada simplemente conexa del espacio, $\Omega \subset M$ y X un campo definido en dicha región expresado como la función de los homeomorfismos pertinentes sobre R^4 , a saber,

$$X: R^n \rightarrow R^m \quad (n = m = 4)$$

y $X|_{n_s} = \delta$ sobre $\partial\Omega$ con n_s el vector normal en la frontera de Ω . Sea Λ un conjunto de líneas orientadas en la región $\Omega \subset M$ cuya estructura causal es la heredada por el haz principal identificado como el haz de líneas que definen proyectivamente a M , es decir el subhaz $\mathbb{F} \otimes \mathbb{H}(R^3)$ del algebra no simétrica $\mathbb{F} \otimes \mathbb{H}(M)$. Entonces la transformada

(40). Estudios realizados en magnetohidrodinámica establecen que la evolución y formación estelar, galáctica y de cualquier ente del espacio obedece a las leyes del comportamiento de un fluido electromagnético

de Radon del campo u sobre alguna de éstas líneas satisface que

$$R(u, L) = \int_L u \circ ds \quad (104)$$

Con ds una medida de Radón positiva. Así mismo si llamamos a \mathcal{G} el haz lineal vectorial de $\mathbb{T}_1 \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^3$, entonces el conjunto de medidas realizadas en \mathcal{G} será el conjunto de los valores en L :

$$ds(u, L, v) = \min \{ z \in L \mid v \leq C_L \circ u(z) \leq v + dv \} \quad (105)$$

Así mismo usando sólo la medida para funciones no decrecientes, i.e. que crecen con el tiempo (caso en el cual se considera la expansión del Universo la cual provoca un aumento gradual de la intensidad de campo de velocidades),

$$S(u, L, v) = \min \{ z \in L \mid e_L \circ u(z) \leq v \} \quad (106)$$

donde $S(u, L, -\infty) = 0$ y $S(u, L, \infty) = \min(L \cap \Omega)$ con $S(o, u, L) = \min(L \cap \Omega) h(v)$, donde $h(v)$ es la función escalón ó de Heaviside definida por la regla de correspondencia

$$h(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 1 & \text{si } v > 0 \end{cases} \quad (107)$$

entonces la integral de línea (104) toma la forma con ésta nueva medida de Radon:

$$R(u, L) = \int_L u \circ ds = \int_L v ds(u, L, v) = \int_L u ds_L \quad (108)$$

con $ds_L = e_L \circ ds$ donde e_L es el versor de línea que describe la orientación de cada línea en el espacio euclideo E^3 . Contrario al caso escalar la orientación de las líneas es importante cuando trabajamos con campos vectoriales E^3 . En este caso resulta natural tal orientación ya que cada campo vectorial de velocidades estelares es una fibra del haz vectorial respectivo (haz vectorial fibrado de la estrella).

Así mismo para este fin, dotaremos a cada línea en E^3 con una orientación g descrita por un vector unitario e_L paralelo a L y acorde con la estructura casual del espacio E^3 que es la inducida por la estructura causal en E^4 . (Recuérdese que toda conexión afin que define la estructura diferencial de una variedad que contiene una subvariedad inmersa en ella es inducida en la subvariedad si la variedad es de curvatura seccional constante; en este caso nuestra variedad es una variedad hiperbólica la cual es Riemanniana y de curvatura cte).

Finalmente diremos que el par (L, e_L) determina una línea orientada, denotada por \hat{L} . Si $\hat{L} = (L, e_L)$, entonces $-\hat{L} = (L, -e_L)$. De esta forma el conjunto de líneas orientadas es el conjunto ó haz vectorial lineal \mathcal{G} .

De tal manera se puede demostrar que cada cono de luz $C(p) \in \mathcal{G}$ en cada punto de $p \in M$ (Considerando además que cada uno de éstos puntos es la fuente de luz estrella ó galaxia), el cual además es un subespacio vectorial de cada espacio $T_p(M)$, conforma un álgebra de Lie Universal (41) \mathcal{G} isomorfa localmente al haz tangente $\mathbb{T}_1 \otimes \wedge^1$ el cual puede ser extendido a toda la variedad M .

En efecto, considérese $C(p) \in \mathcal{G}$, entonces $C(p) \subset T_p(M)$ (Ver apéndice B) de donde $UT_p(M) \supset UC(p) = \mathcal{G}$ donde \mathcal{G} es un álgebra de Lie, entonces como álgebra de Lie $\mathcal{G}_p \cong T_p(M) \forall p \in M$. Por otro lado $UA^2 T_p(E^4) \otimes E^3 = U\mathbb{T}_1 \otimes \wedge^1(p) = \mathbb{T}_1 \otimes \wedge^1$. Pero \mathcal{G} en un espacio de Minkowski es isomorfa a toda subvariedad lorentziana lineal y como se sabe $\mathbb{T}_1 \otimes \wedge^1$ es una subvariedad Lorentziana cuya conexión afin es la inducida por la conexión afin de la variedad lorentziana que modela el espacio sideral. Entonces $\mathbb{T}_1 \otimes \wedge^1 \cong \mathcal{G}_p \forall p \in M$. Esto nos permite adecuar la medida en algunas propiedades del Universo M al contexto de los haces de Luz que obedecen causalmente la estructura de \mathcal{G} .

Un problema difícil es el problema inverso de la transformada de Radon, es decir como recuperar el campo de velocidades u si se conocen sus valores espectrales sobre $L \subset \Omega$ donde Ω es la región acotada tomada en M .

(41) Aquí el término Universal se refiere a que el álgebra $\mathbb{T}_1 \otimes \wedge^1$ está dotada como álgebra modular (en el caso más general) de un producto tensorial del cual deriva una propiedad universal que tiene éste producto \otimes , el espacio de formas diferenciales respectivo para éste caso electrodinámico i.e. las 8 formas definidas en \mathbb{R}^4 como $F = F_{\alpha\beta} dx_\alpha \wedge dx_\beta$.

Para ello se utiliza el campo rotacional y deseado probar la biyectividad de R , se demuestra la unicidad de la transformada de Radon inversa, a través de la unicidad de dicho campo vectorial.

Sea L_s la línea obtenida por traslación de la línea orientada L por sn , donde n es un vector normal de L .

Def. IV.2.1. Sea Ω una región acotada en M y \mathcal{G} el respectivo haz vectorial de líneas L .

Definimos a la transformada directa de Radon del campo u sobre una línea L de \mathcal{G} como el mapeo

$$R_D: C^1(\bar{\Omega}) \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}(\mathbb{R})$$

con regla de correspondencia

$$(u, L) \longmapsto \int_L u \, ds_L$$

$$\text{Entonces } R^{-1} \left\{ \mathbb{R}(u, L) \right\} = \frac{d}{ds} \mathbb{R}(u, L_s) \Big|_{s=0} \in C^1(\bar{\Omega}) \times \{0\}.$$

Esta definición es de utilidad para fijar las correspondencias de la transformada de Radon en el teorema sobre la existencia de la transformada inversa de Radon, ya que sólo basta elegir líneas orientadas del haz vectorial lineal \mathcal{G} para demostrar su existencia en todo el haz tangente \mathcal{G} .

Teorema IV.2.1. Sea $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, con $\Omega \subset \mathbb{E}^3$.

(i) Sea $\text{rot}_1 u$ la componente de $\text{rot } u$ en la dirección $n \times e_L$.

Entonces

$$\frac{d}{ds} \mathbb{R}(u, L_s) \Big|_{s=0} = \int_L \text{rot}_1 u \, ds$$

(ii) Si $\mathbb{R}(v) = \mathbb{R}(u)$, entonces existe una única función

$\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, tal que $v = u + \text{grad } \varphi$ con $\varphi = 0$ sobre $\partial \Omega$

(iii) Si $\mathbb{R}(v) = \mathbb{R}(u)$, y v, u tienen componentes normales iguales a través de $\partial \Omega$, entonces

$$v(z) = u(z) + \iint \frac{\Delta \varphi}{\zeta - z} \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

con $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, $\varphi = 0$, $\text{grad } \varphi = 0$ sobre $\partial \Omega$.

(i) Prueba: Considérese el rectángulo Q_s formado por las líneas L_s y L_{s+1} , cortadas y conectadas en dos partes ó piezas fuera de Ω . Sea $P = v(\xi, \eta) \forall p \in \mathbb{E}^3$ del campo vectorial definido por la función $p \longmapsto u(p)$ conteniendo las variables x, y y z . Es claro que x, y , y z resultan funciones de ξ y η .

De tal manera la integral de línea que define $\mathbb{R}(u, L)$ toma la forma

$$\begin{aligned} \int_L u \, ds_L &= \int_{\Gamma^+} u \circ v(\xi, \zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial x} d\xi + \frac{\partial v}{\partial \zeta} d\zeta \right) \\ &= v^{-1}(L) \end{aligned} \quad (109)$$

es decir se ha tomado el homomorfismo v cuya imagen inversa es $V^{-1}(L) = \Gamma^+$. Hagamos entonces

$$P = u \circ v(\xi, \zeta) - \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \text{y} \quad Q = u \circ v(\xi, \zeta) \frac{\partial v}{\partial \zeta}$$

de donde por la fórmula de Green se tiene que

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) d\xi \wedge d\zeta. \quad (110)$$

Pero

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial(u \circ v)}{\partial \xi} \circ \frac{\partial v}{\partial \zeta} + u \circ v(\xi, \zeta) \circ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \zeta}$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{\partial(u \circ v)}{\partial \zeta} \circ \frac{\partial v}{\partial \xi} + u \circ v(\xi, \zeta) \circ \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \xi} \quad (111)$$

De donde sustituyendo en (110), ésta toma la forma:

$$\iint \wedge \left(\frac{\partial(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})}{\partial \xi} \circ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta} - \frac{\partial(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})}{\partial \zeta} \circ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} \right) d\xi d\zeta \quad (112)$$

Tomando un marco del espacio de Banach E^3 tomando éste marco por la base ortonormal $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ y expresando el punto \mathbf{p} con respecto a dicha base; a saber,

$$\mathbf{p} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3, \quad \forall \mathbf{p} \in E^3$$

resulta que

$$\frac{\partial(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})}{\partial \xi} \circ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \circ \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \hat{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \hat{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \hat{e}_3 \right)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})}{\partial \zeta} \circ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \circ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \hat{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial \xi} \hat{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial \xi} \hat{e}_3 \right)$$

Restando las dos desigualdades miembro a miembro tal y como se describe en (112), la diferencia puede escribirse en la forma:

$$\frac{D(\mathbf{y}, \mathbf{z})}{D(\xi, \zeta)} \left(\hat{e}_3 \frac{\partial u}{\partial y} - \hat{e}_2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{D(\mathbf{y}, \mathbf{z})}{D(\xi, \zeta)} \left(\hat{e}_1 \frac{\partial u}{\partial z} - \hat{e}_3 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{D(\mathbf{y}, \mathbf{z})}{D(\xi, \zeta)} \left(\hat{e}_2 \frac{\partial u}{\partial x} - \hat{e}_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (113)$$

de donde el teorema de Green con $\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \mathbf{u}(\mathbf{v}(\xi, \zeta))$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} R(\mathbf{u}, L_S) \Big|_{s=0} &= R(\mathbf{u}, L_S) - R(\mathbf{u}, L_0) = \\ &= \int_{\partial Q_s} \mathbf{u} \, ds = \iint_{Q_s} \left\{ \frac{D(\mathbf{y}, \mathbf{z})}{D(\xi, \zeta)} \left(\hat{e}_3 \frac{\partial u}{\partial y} - \hat{e}_2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{D(\mathbf{z}, \mathbf{x})}{D(\xi, \zeta)} \left(\hat{e}_1 \frac{\partial u}{\partial z} - \hat{e}_3 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{D(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{D(\xi, \zeta)} \left(\hat{e}_2 \frac{\partial u}{\partial x} - \hat{e}_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} d\xi d\zeta \end{aligned} \quad (114)$$

luego debido a que

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta} = \frac{D(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{D(\xi, \zeta)} \hat{e}_1 + \frac{D(\mathbf{z}, \mathbf{x})}{D(\xi, \zeta)} \hat{e}_2 + \frac{D(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{D(\xi, \zeta)} \hat{e}_3$$

y siendo por definición

$$\text{rot } \mathbf{u} = \hat{e}_1 \wedge \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{e}_2 \wedge \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{e}_3 \wedge \frac{\partial u}{\partial z}$$

entonces (113) es precisamente

$$\text{rot } \mathbf{u} \hat{\mathbf{n}} = \text{rot}_1 \mathbf{u}$$

Entonces dividiendo por S y pasando al límite cuando $S \rightarrow 0$, obtenemos que

$$\frac{d}{ds} R(\mathbf{u}, L_S) \Big|_{s=0} = \int_L \text{rot}_1 \mathbf{u} \, ds \quad \square$$

(ii) **Prueba:** Si $R(\mathbf{v}) - R(\mathbf{u}) = R(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \text{rot}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 0$, por (i). Indiquemos $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ para algún potencial $\varphi \in C^2(\Omega)$ (esto puede siempre hacerse por el teorema de Helmholtz el cual afirma que $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ donde $\mathbf{u} = \text{rot } U$ donde U es un potencial vectorial.

Denotando los puntos finales de $L \cap \Omega$ por P_1 y P_2 , se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_L (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, ds = \int_L (\text{grad } \varphi + \mathbf{u}) \, ds \\ &= \int_L \text{grad } \varphi \, ds + \int_L \mathbf{u} \, ds \\ &= \varphi(\mathbf{p}_1) - \varphi(\mathbf{p}_2) + R(\mathbf{u}) \\ &\Rightarrow R(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{p}_2) - \varphi(\mathbf{p}_1). \text{ Siendo } L \text{ arbitrario} \\ &\Rightarrow \varphi = \text{cte} \text{ sobre } \partial\Omega \quad \square \end{aligned}$$

4.3 GENERALIZACION

Sea G el grupo semisimple subyacente a la variedad M isomorfa canónicamente a \mathbb{R}^{n+1} y sea $G_{\mathbb{R}}$ el conjunto de puntos reales de dicho grupo semisimple. Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie de $G_{\mathbb{R}}$. Sabemos que en \mathfrak{g} existe siempre un álgebra de Cartan, de hecho, no es única. Consideremos las órbitas $G_0 \cdot x \forall x \in G$ del espacio cociente G/G_0 y también consideremos la orientación de G , la cual debido a que G es un grupo de Lie, siempre es posible darse.

Considérense las n -formas invariantes izquierdas sobre G . Una tal forma es unívocamente determinada por su valor en un punto y por otro lado la n -ésima potencia exterior de un espacio n -dimensional \mathfrak{h} es exactamente un espacio 1-dimensional de n -formas invariantes izquierdas sobre G . Este último hecho se da en forma natural para una subálgebra de Cartan del álgebra \mathfrak{g} de un grupo semisimple como lo es $G_{\mathbb{R}}$. Así mismo consideremos un álgebra de Cartan de \mathfrak{g} . El haz tangente determinado por la unión de espacios tangentes $\mathfrak{nd}(\mathfrak{g})_x$, a saber

$$\bigcup_{x \in G} \mathfrak{nd}(\mathfrak{g})_x = TM \quad (115)$$

está en correspondencia con el haz fibrado definido en $G_{\mathbb{R}}$ el cual como sabemos por la teoría de grupos reductivos reales, es una variedad algebraica en G cuyos puntos reales son las álgebras de Cartan del álgebra de Lie reductiva \mathfrak{g} .

Sea $X \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Entonces la integral sobre G viene dada como

$$\int_G X = \int_G X_\sigma = \int_G X \circ \ell_\sigma \quad \forall X \in \mathfrak{h} \quad (116)$$

donde ℓ_σ es la traslación izquierda por σ de G (es decir, la integral es invariante bajo traslaciones izquierdas).

Dicha integral puede escribirse para la parte compacta $G_{\mathbb{R}}$ a través de las clases laterales izquierdas sobre G con punto fijo $x \in G_{\mathbb{R}}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{G_0} X &= \int_{G_0 \cdot x} X = \int_{G_0 \cdot x} X \circ \omega \quad \forall X \in \mathfrak{h} \quad (117) \\ &= \int_{\text{Exp}(\mathfrak{h})} X \circ \omega \end{aligned}$$

Puesto que todo grupo compacto es unimodular, es inmediato que dicha integral también es invariante derecha bajo traslaciones r_σ por σ de G . Luego la integral

$$\int_{G_0} X = \int_{G_0} X \circ \omega \quad \forall X \in \mathfrak{h}$$

es consistente

En particular si consideramos las órbitas en G de un subgrupo de G conjugado a N y llamamos a una variedad Ξ como la variedad formada de todas las subvariedades totalmente geodésicas k -dimensionales con $(1 \leq k \leq n)$ de la variedad M y $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces las integrales para éstas clases específicas toman la forma

$$\int_{x \in \xi \in \Xi} X \, ds \, \xi = \hat{X}(x) = \int_{SO(n) \cdot x} X \, ds(\xi) \quad (118)$$

donde $S(\xi)$ es la medida definida positiva no decreciente sobre el horociclo ξ , invariante bajo rotaciones (acciones del grupo $SO(n)$) alrededor de $x \in \xi$ y cuya medida total es 1.

Dicha integral es un caso particular de (117) y es la generalización en variedades de la transformada de Radon de un campo vectorial continuo en M .

NOTA: Puesto que las órbitas ξ son esferas generalizadas en el grupo G éstas son traslaciones izquierdas y derechas de su clase correspondiente de donde la invariancia izquierda y derecha de la integral (118) es clara.

4.4. RECEPCION DE LAS SEÑALES DE LUZ

Sea $H_S^2(\Omega)$ el espacio de Hilbert H con estructura causal sentada en cada punto por un cono convexo $C \in \mathcal{C}$ definido sobre la región acotada Ω , y cuyas señales de energía finita bajo esta estructura causal sean las señales $\tau(t) = e^{i\omega_0 t}$ transmitidas a lo largo de una línea $-L \subset \tilde{C} \in \mathcal{C}(\omega)$ provenientes de alguna estrella situada en $P \in \Omega$, manifestadas éstas en forma de luz coincidente con la orientabilidad del álgebra de Lie $\mathfrak{F}_T \otimes \mathfrak{F}_I$ y que hereden su $SO(n)$ -invariancia en la variedad M con grupo subyacente G .

Puesto que se considera la expansión del Universo podemos suponer a v como el valor del campo de velocidades $u \in \mathfrak{X}^1(\Omega)$ en la dirección inversa a la de la propagación de la luz emitida por la fuente, entonces la frecuencia de la onda reflejada es aumentada por

$$\delta_\omega = \frac{2c \omega_0 v}{c^2 - v^2} \quad (119)$$

donde ω_0 es la frecuencia de la onda de luz proveniente de la estrella y captada por los instrumentos (ω) de exploración, c es la velocidad de la luz.

Observemos que la misma fórmula puede tomarse si la fuente se mueve en la misma dirección que la propagación de onda, con v y δ_ω negativos.

$$\text{Si } |v| \ll c \text{ se sigue } \delta_\omega = kv \text{ con } k = \frac{2\omega_0}{c}$$

Supóngase un sistema de observación telescópico de tipo óptico cuyo espejo principal u objetivo concentra la señal de luz en la forma $e^{i(\omega_0 + \omega)t}$ para toda ω la frecuencia de reflexión de la onda reflejada proveniente de la fuente de luz. Si la señal $\tau(t) = e^{i\omega_0 t}$ es transmitida a lo largo de $-L$ entonces por (119), la señal recibida después de una reflexión sobre el objetivo del instrumento de observación, considerando la velocidad v de la estrella, es $\sigma(t) = e^{i(\omega_0 + kv)t}$. Si consideramos un grupo de estrellas sobre la misma latitud celeste con diferentes velocidades a lo largo de L , el teorema de superposición de señales en $H_S^2(\Omega)$ es válido y puede aplicarse para las distintas frecuencias de ondas reflejadas para cada estrella en la forma:

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\omega_0 + kv)t} dS(u, L, v) \quad (120)$$

donde la integración se realiza con respecto a v , ds es la medida de Radon Positiva caracterizada por (105).

En particular si $u=0$ sobre un intervalo $I \subset L$ entonces ds contiene una medida de Dirac de magnitud un múltiple escalar de la identidad en G en el origen. Por el contrario fuera de Ω el medio interestelar se supone no reflejante y por lo cual no contribuye para la determinación de $\sigma(t) \in H_S^2(\Omega)$.

4.5 MEDICION DE LA CURVATURA MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE RADON

Sea $\text{Isom}(\mathfrak{F}_I \otimes \mathfrak{F}_I \times M, \mathcal{C})$ el haz principal asociado al haz vectorial $E^d \rightarrow M$ con grupo estructural el grupo semisimple G subyacente en la variedad Riemanniana M . Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie en G y sea $R_g: \mathfrak{F}_I \otimes \mathfrak{F}_I \rightarrow \mathfrak{F}_I \otimes \mathfrak{F}_I$ la acción de G en $\mathfrak{F}_I \otimes \mathfrak{F}_I$ definida como $s \mapsto sg \forall g \in G$. Dada una 1-forma $\omega: T(\mathfrak{F}_I \otimes \mathfrak{F}_I) \rightarrow \mathfrak{g}$; sea $R_g^*(\omega)$ el pullback de ω bajo el difeomorfismo R_g . Entonces la 2-forma de curvatura en M con valores en $\text{End}(\mathbb{R}^d) \cong \mathfrak{g}$ de la conexión ∇ es:

$$\Omega = R_g^* \omega = \nabla \omega \nabla_g \in G \quad (121)$$

(42) Existen dos tipos de instrumentos ópticos de observación telescópica: el reflector y el refractor: ambos instrumentos captan directamente los señales de luz de las fuentes estelares y a través de una reflexión ó refracción respectivamente concentran la luz en una frecuencia $\omega_0 + \omega$, donde ω es la frecuencia de la onda reflejada.

(43) \tilde{C} Aquí es el cono inverso al cono $C \in \mathcal{C}$ de L . El cono de todas las trayectorias de onda transmitidas por la fuente

(44) Por lo anteriormente expuesto en la sección 4.2. Se puede demostrar que $\text{Isom}(\mathfrak{F}_I \otimes \mathfrak{F}_I \times M, \mathcal{C}) \cong \text{Isom}(\mathbb{R}^d \times M, T(M))$.

La interpretación física del haz principal $\text{Isom}(\mathfrak{F}_I \otimes \mathfrak{F}_I \times M, \mathcal{C})$ es simplemente el 'racimo' ó torrente de señales de luz proveniente de la estrella que es medido como haz vectorial por $\text{Isom}(\mathbb{R}^d \times M, T(M))$. Y cuya conexión es

$$\Omega: \text{Isom}(\mathbb{R}^d \times M, T(M)) \rightarrow T(\text{Isom}(\mathbb{R}^d \times M, T(M)))$$

donde ∇ es la derivada exterior covariante de la 1-forma ω . Así mismo por la sección 4.3 la forma de curvatura Ω es invariante bajo la acción

$$(X, \sigma) \longrightarrow \text{Ad}(\sigma^{-1})X$$

definida de G sobre \mathfrak{g} .

El haz diferenciable $\mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M)$ es isométrico a todo haz $T(S^n)$ con n par. En efecto, sabemos que todo campo no es singular en una variedad diferenciable si ésta es isomorfa a S^n con n impar. En particular esto se cumple para una variedad Riemanniana.

Ahora bien, sabemos que todo haz fibrado es una variedad cuya estructura diferenciable es la inducida por la variedad de la cual es haz vectorial. Entonces la estructura diferenciable de la variedad Riemanniana dada por la fibra métrica g , también está dada por la misma fibra métrica en el haz fibrado de la variedad y puesto que por definición g define un producto interno g_x que depende diferenciablemente sobre $x \Rightarrow$ el haz es un haz vectorial diferenciable, el cual tiene una estructura Riemanniana y por lo cual es un haz vectorial Riemanniano.

Por la sección 4.1 y el Apéndice D, el haz vectorial $\mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M)$ que es un álgebra de Lie, sabemos que es isométrico a un álgebra de Lie del grupo $\mathfrak{k}(M)$ y además $SO(n)$ -invariante, el cual tiene equivalencia estructural de invariancia a las acciones del grupo ortogonal $O(1,3)$ sobre $M \cong \mathbb{R}^4$. En otras palabras $\mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M)$ tiene estructura de $O(1,3) \cong \mathfrak{k}(M)$ cuyo haz principal tiene como grupo $GL(\mathbb{R}^4)$ el cual se identifica por $T(S^4)$. Por lo tanto siguiendo ésta relación transitiva de isomorfismos heredada a través de los difeomorfismos respectivos (45) se satisface que

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{k}(M) & & T(S^4) \xrightarrow{\text{Exp}} S^4 \\ \parallel & \equiv & \text{III} \quad \uparrow \quad \downarrow \quad \text{III} \\ \mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M) & \equiv & T(M) \xrightarrow{\text{Exp}} M \cong \mathbb{R}^4 \end{array}$$

entonces $\mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M) \cong T(S^4)$.

Esto coincide con el hecho físico de que todo campo electromagnético de los haces de luz es singular en las fuentes donde se produce.

Ahora bien, considérese una región local del espacio sideral y en dicha región abierta del espacio considérese una subvariedad compacta N de dimensión $m+1=n$ en la variedad inmersa M^n en \mathbb{R}^{n+1} .

Sea $T(S^n)$ el haz de esferas unitarias normales sobre M . Sea U_ϵ una ϵ -vecindad cerrada de M . Para ϵ suficientemente pequeña U_ϵ es una variedad diferenciable con frontera (46).

Cabe mencionar que la estructura diferenciable de toda subvariedad de M es la deducida de la variedad Riemanniana a través de la restricción de su respectiva conexión (47) Riemanniana en el subhaz (48) del haz vectorial de esferas unitarias isomorfo al haz electrodinámico sobre M . Siendo M una variedad Riemanniana orientada (de hecho es una hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1}) el mapeo haz $\mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T} \times M \longrightarrow M$ induce un mapeo ϕ del espacio base M de $\mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M)$ en el espacio base S^n de $T(S^n)$ el cual es un mapeo esférico de Gauss.

(45) Para una variedad Riemanniana simplemente conexa de curvatura constante negativa como lo es nuestro espacio hiperbólico que modela nuestro cosmos, el espacio (Exp, M) es un cubriente diferenciable de M .

(46) Este es el caso análogo para variedades $n+k$ -dimensionales con $k=1$, cuando éstas son variedades orientadas 3-dimensionales Riemannianas, cuyas subvariedades son regiones 2-dimensionales simplemente conexas acotadas por una curva C diferenciable por partes consistente de ∞ -curvas diferenciables.

(47) Sea $M \cong \mathbb{R}^{n+1}$. El Haz $E(M) \equiv \mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M) = SO(n+1)$ sobre $\bar{S}(n,1) = S^n$ donde $\bar{S}(n,1)$ es la correspondiente identificación de Grassmann de la esfera S^n de $T(S^n)$ equivalente al espacio homogéneo $O(n+1)/O(n)$ con grupo $SO(n)$, puede ser identificado con el haz de marcos ortonormales orientados sobre S^n de una forma natural y por lo cual la conexión canónica en $\mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M)$ puede ser identificada con la conexión Riemanniana de S^n .

(48) Dicho subhaz es el conformado por el haz vectorial electrodinámico restringido a la subvariedad de dimensión m de la variedad M . Tal puede ser el caso por ejemplo del haz de señales de energía finita útiles (ya rectificadas) para los instrumentos de control de un aparato de observación astronómico cuyas señales se pueden medir a través de las potencias consumidas en los diferentes instrumentos del panel que lo conforma. Asimismo las fibras para éste subhaz del haz vectorial $\mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M)$ serán los vectores de Poynting. Dicho subhaz de señales de vectores de Poynting puede ser definido explícitamente como:

$$[S^c]_N(M) = \mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M) \Big|_N = \{ v \in \mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M) \mid \Pi(v) \in N \}$$

con grupo estructural $O(3)$. Recuérdese que la codim $N=1$ en M y $\pi: \mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M) \longrightarrow M$ es un haz principal fibrado sobre M con grupo estructural el grupo de Lorentz $\mathfrak{k}(M)$ en $GL(\mathbb{R}^4)$.

Puesto que M es orientable y orientada, podemos tomar aquellos marcos adaptados, los cuales son compatibles con las orientaciones de M obteniendo un subhaz del haz $\mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M) \longrightarrow M$ con grupo $SO(n+1)$. Físicamente podemos interpretar a dicho subhaz de una forma más universal y bajo las relaciones isomórficas restringidas a los correspondientes espacios tangentes que competen al haz $\mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M)$ y como el espacio de densidades de energía debido a los campos electromagnéticos, es decir; al espacio de vectores de Poynting. Este subhaz es $SO(n)$ -invariante en M . Desde un punto de vista estrictamente físico, éste puede ser definido como el espacio vectorial:

$$\left[S^c \right]_N(M) = \left\{ s = E_x \gamma \mid H \in \mathbb{T}_\epsilon \otimes \mathbb{T}(M) \Big|_N, \Pi(E_x H) = -\frac{\partial E}{\partial t} \right\}$$

Por lo cual considerando el mapeo esférico $U_\epsilon \rightarrow S^n$ y utilizando el lema de Hopf (49) sobre la ϵ -vecindad diferenciable U_ϵ , tenemos que el grado de dicho mapeo es $\chi(U_\epsilon)$ y puesto que éste es un invariante topológico sobre la variedad M que contiene U_ϵ e independiente de la elección de coordenadas tomado ó elegido, $\chi(U_\epsilon) = \chi(M)$. Luego el lema Hopf implica que el grado del mapeo esférico de Goursat $U_\epsilon \rightarrow S^n$ es igual al número de Euler $\chi(M)$ de M . Sea d el grado del mapeo esférico $M \rightarrow S^n$. Considerando que el número de Euler es un invariante topológico de cierta característica de la variedad relacionada con la determinación del área de su frontera ó de cualquier hipersuperficie inmersa en la variedad y que permite expresar el grado d a través de alguna expresión integral que utiliza una propiedad topológica deducida de las formas diferenciales del espacio $\Omega^2(M)$ que expresan la conexión Riemanniana de M , la expresión integral del grado para M puede encontrarse fácilmente.

Sea y^0, y^1, \dots, y^n un sistema de coordenadas en \mathbb{R}^{n+1} . El elemento de volumen de la esfera unitaria S^n está dado por

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i y^i dy^0 \wedge \dots \wedge dy^i \wedge \dots \wedge dy^n \quad (122)$$

Sea $\xi: M \rightarrow S^n$ dado por las $(n+1)$ -funciones ξ, ξ^1, \dots, ξ^n sobre M con métrica esférica euclidiana $(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + \dots + (\xi^n)^2 = 1$. Entonces

$$d = \int_M \sum_{i=0}^n \xi^i d\xi^0 \wedge \dots \wedge d\xi^i \wedge \dots \wedge d\xi^n \quad (123)$$

La fórmula de Weingarten establece que

$$\xi \cdot (X) = -A(X) \quad (124)$$

$\forall X$ un campo vectorial sobre M , donde $A = A_x$ es una transformación simétrica de cada espacio tangente $T_x(M)$ definido por la segunda forma fundamental.

Por un simple cálculo y utilizando el concepto de curvatura Gaussiana de M se llega a:

$$d = \frac{1}{\omega_n} \int_M k_n \, dv \quad (125)$$

donde ω_n es el volumen de la n -esfera unitaria, k_n es la curvatura Gaussiana de M y dv el elemento de volumen de M . Puesto que la dimensión de la variedad M que modela al cosmos es par, podemos reemplazar el número d por $1/2\chi(M)$ y expresar k_n como un polinomio de la curvatura Riemanniana, donde ésta curvatura Riemanniana se deberá calcular a través de las curvaturas seccionales respectivas sobre todas las secciones de M .

Luego el teorema de Gauss-Bonnet para éste caso establece que:

$$\sum_{i=1}^h \Omega_i \int_{S_i} \pi + \int_{\partial \tilde{M}} k \, dv_{\partial \tilde{M}} + \int_{\tilde{M}} k_n \, dv = \omega_n \quad (126)$$

donde se ha considerado una región \tilde{M} simplemente conexa sobre M acotada por una hipersuperficie diferenciable $\partial \tilde{M}$ excepto posiblemente por algunas secciones X y también singularidades de X del haz tangente de esferas unitarias de dimensión 4, el cual sabemos es isomorfo al haz electrodinámico $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}(M)$ y sus secciones y puntos singulares del propio haz $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}(M)$ (50). Así mismo considerando a \tilde{M} una región simplemente conexa y acotada sobre M por $\partial \tilde{M}$; ésta región puede considerarse de hecho, una variedad 4 dimensional Riemanniana compacta orientable cuyo haz asociado es el haz $T(S^n) \cong S(\tilde{M}) \cong \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}(\tilde{M})$. Sea $P: S(\tilde{M}) \rightarrow \tilde{M}$ su proyección sobre $S(\tilde{M})$. Construimos para éste caso las llamadas 3 formas de Chern sobre $S(\tilde{M})$ tal que $d\pi = p^*(\gamma) \forall \gamma \in S(M)^*$ y que la integral de π a lo largo de cada fibra de $S(\tilde{M})$ sea 1. Sea X un campo vectorial unitario sobre M con singularidades aisladas en x_1, \dots, x_h . Sea $\Omega_1, \dots, \Omega_h$ los índices de X en x_1, \dots, x_h . Por un Teorema de Hopf, $\Omega_1 + \dots + \Omega_h$ es igual al número de Euler $\chi(M)$ (51).

(49) NOTA: El lema de Hopf relativo a la generalización del teorema de Gauss-Bonnet afirma que el grado del mapeo esférico de una variedad compacta de dimensión $n \geq 2$ es igual su característica de Euler.

(50) NOTA: En el haz electrodinámico, dichos puntos singulares son las fuentes de luz que determina la fibración de señales de luz en toda la $\partial \tilde{M}$.

(51) NOTA: Ver 'Topology from the Differentiable Viewpoint' de Milnor, J.W., Univ. Virginia Press, 1965.

La sección X que atraviesa al haz $S(\tilde{M})$ puede ser considerada como una subvariedad de $S(\tilde{M})$ con frontera y su frontera ∂X está dada por $\alpha_1 \alpha_1 + \dots + \alpha_k \alpha_k$ donde $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son las fibras de $S(\tilde{M})$ en x_1, \dots, x_k . Por lo cual

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \int \alpha_i \pi = \sum_{i=1}^k \alpha_i = \chi(\tilde{M}) = \int_X P^\circ(\gamma) - \int_M \gamma - \int_X d\pi = \int_{\partial X} \pi \quad (127)$$

Luego el Teorema de Gauss-Bonnet toma la forma

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{M}} k_\alpha dV &= \omega_\alpha - \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \int \alpha_i \pi - \int_{\partial \tilde{M}} k_{\alpha-1} dV_{\partial \tilde{M}} \right] \\ &= \omega_\alpha - \left[\chi(\tilde{M}) - \left\{ 2\pi - \chi(\partial \tilde{M}) - \int_\gamma k_\alpha dS \right\} \right] \\ &= \omega_\alpha - \chi(\tilde{M}) + 2\pi - \chi(\partial \tilde{M}) - \int_\gamma k_\alpha dS \quad (128) \end{aligned}$$

de donde por el teorema de Hopf, los mapeos esféricos $\tilde{M} \rightarrow S^n$ y $M \rightarrow S^n$ tienen el mismo grado, a saber; $\chi(\tilde{M}) = \chi(M)$, de donde

$$\int_{\tilde{M}} k_\alpha dV = \int_M k_\alpha dV = \omega_\alpha - \chi(M) + 2\pi - \chi(\partial M) - \int_\gamma k_\alpha dS \quad (129)$$

donde k_α es la curvatura geodésica de la curva γ en la variedad M . Así mismo la integral $\int_\gamma k_\alpha dS$

relaciona la curvatura total de un 2-segmento con la cantidad total de flexión de su frontera.

Def. IV.5.1. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{N}$ con segmento regular de curva en una superficie geométrica orientada \mathcal{N} . La curvatura geodésica total de $\int_\gamma k_\alpha ds$ de γ es

$$\int_{s(a)}^{s(b)} k_\alpha(S) ds \quad (130)$$

donde $k_\alpha(S)$ es la curvatura geodésica de una reparametrización de rapidez unitaria de γ .

La curvatura geodésica total de γ en M^2 es por tanto la analogía de la curvatura Gaussiana total de una hipersuperficie \mathcal{N} en \mathbb{R}^{n+1} .

Las geodésicas son trayectorias minimales propias de una variedad M y relacionadas a través de su transporte paralelo al haz vectorial sentado en la variedad M , donde M es una variedad hiperbólica. El haz como se ha visto es un haz principal lineal cuyas fibras son los campos de tensión electromagnética. Así mismo y debido a que el haz de esferas unitarias el cual es isomórfico al haz electrodinámico (con grupo estructural $GL(\mathbb{R}^4)$ y cuyas clases son $SO(n)$ -invariantes), es un haz de direcciones normales (haz normal) entonces toda geodésica de la variedad M es perpendicular a toda geodésica paralela ó trayectoria sentada en el espacio tangente $T_x(M) \forall x \in M$, resultando entonces que ésta geodésica sobre la cual se realiza la medición de la desviación de la flexión de su transporte paralelo es un horociclo en M . De hecho dicho horociclo en M es una subvariedad totalmente geodésica en M y geodésica en una hipersuperficie M^2 de M . De este modo, debido a que M es una variedad completa, simplemente conexa, orientable e isométrica, toda hipersuperficie como subvariedad de M es completa, simplemente conexa e isométrica y la hiperbolicidad de M^2 es la inducida de la hiperbolicidad de M^{n+1} por ser ésta una subvariedad inmersa en M^{n+1} . Por lo cual los horociclos en M^{n+1} son horociclos unidimensionales en M^2 . Sobre dichos horociclos se realizará la medición de nuestra curvatura, usando la correspondiente adaptación del concepto de curvatura geodésica al ámbito de los horociclos en M . Para ello resulta útil definir lo siguiente:

Def: El horociclo caracterizado como una geodésica (horociclo unidimensional) es toda geodésica tangente a una geodésica paralela. Entonces la curvatura horociclo en $K_\alpha(S)$ simplemente será aquella curvatura geodésica que se mide sobre el tangente a través de las distintas direcciones normales del triedro móvil, sentado en el punto del espacio tangente (Es decir, los campos T, N y V). Por lo tanto la curvatura horociclo $K_\alpha(S)$ será la respectiva

curvatura normal calculada sobre la dirección del vector tangente unitario del vector T. (52)

Para dar precisión al término "dirección", vamos a definir una dirección tangente a M en $x \in M$ como un subespacio unidimensional L de $T_x(M)$, es decir, una recta que pasa por $0 \in T_x(M)$. Así cualquier vector tangente distinto de cero en x determina una dirección L. El haz contenido en este espacio vectorial es una sección del haz de líneas \mathcal{O} descrito en la sección 4.2. Pero es deseable usar una orientación positiva de L, por lo cual solo puede elegirse el vector unitario u tangente de dirección positiva. Así mismo si evaluamos k en vectores unitarios, en realidad obtenemos una función de valores reales definida en el conjunto de todas las direcciones tangentes a M. De esta manera si $u = T / \|T\|$ con T un vector tangente del triedro móvil situado en x de $T_x(M)$ y toda curvatura normal viene definida para esta dirección como

$$k(u) = \langle -\nabla_u U, u \rangle \quad (131)$$

donde U es el vector unitario normal, la curvatura geodésica expresada a lo largo de una de estas líneas orientadas en la sección sobre $T_x(M)$ de \mathcal{O} positivamente vendrá dada como:

$$\int_L K_g(u(s)) ds = \int_L \langle -\nabla_u U, u \rangle ds \quad (132)$$

donde $s \in \mathbb{R}$ es una parametrización de la curva L. De tal forma si deseamos calcular dicha curvatura, ésta será igual a 0 para este caso y al elegir una línea como subespacio del espacio $T_x(M)$, ésta última integral pueda escribirse haciendo recurso de la función especial $\delta(x)$ como:

$$\int_{T_x(M)} K_g(u(s)) \delta(L) ds = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \forall L \in \mathcal{O} \quad (133)$$

De tal modo si se ha dicho que la curvatura horociclo es una curvatura geodésica, calculada ésta sobre la dirección de todo vector u tangente unitario entonces, $\forall \xi \in \Xi$

$$K(u, \xi) = \int_{\xi} k_u(s) ds = \int_{\xi} k(u(s)) ds' = \int_{\xi} \langle -\nabla_u U, u \rangle ds' = \int_{M^2} \langle -\nabla_u U, u \rangle \delta(\xi) ds' \quad (134)$$

donde $ds' = \omega(\xi)$ la correspondiente medida de Radon positiva en un horociclo ξ en el espacio hiperbólico M^2 de M^{n+1} . La función así obtenida $K(u, \xi)$ es la transformada de Radon de la curvatura geodésica $K_g(S)$. Luego a través de la transformada inversa de Radon recuperamos toda la curvatura usando el caso par ya que $M \cong \mathbb{R}^4$.

Pasemos a la clase de las señales del espacio $H^2_g(\Omega)$ (Con Ω un dominio cerrado de M) subyacente en la estructura $H^{\infty} \cap H(\Xi)$, donde Ξ es una componente isotópica del espacio de Hilbert $H(s)$ inducido por la estructura diferenciable del producto interno $g_x \forall x \in M$ determinado por la métrica pseudoriemanniana propia de la variedad M.

Debido a que en toda variedad Riemanniana conexa y completa e isométrica existe una estructura de espacio de Hilbert inducida por la estructura diferenciable del producto interno $g_x \forall x \in M$ determinado por el tensor métrico g , es posible asignar una topología de espacio de Hilbert a la variedad M (54), permitiendo de esta manera que sea posible la medida de los campos vectoriales correspondientes a las secciones del haz fibrado $\mathcal{F} : \mathcal{O} \rightarrow M$ y de los respectivos subhaces, a través de un funcional que satisfaga $\|u\|_2 < \infty$. Sea $X \in (\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}_t)^2(M)$ donde $(\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}_t)^2(M)$ es un espacio de señales de luz finitas (espacio de Hilbert del haz electrodinámico) dotado de la estructura causal definida en el cosmos M. Por la teoría de Espacios de Hilbert tenemos que toda esfera de Riemann es difeomórfica a todo subespacio prehilbertiano cuya completación sea un espacio de Hilbert H. En Particular para señales de energía finita, la esfera de Riemann $B^2_c, n=3$ en $M \cong \mathbb{R}^4$ es difeomórfica a todo subespacio prehilbertiano cuya completación sea un espacio de señales de energía

(52) NOTA: Las señales de luz son las debidas a la de los campos electromagnéticos que son secciones del haz vectorial $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}_t$ situado en M y cuyas fibras son los vectores tangentes ó intensidades de campos electromagnéticos y que en el caso más general son los tenores Maxwellianos de tensión electromagnética evaluados en cada punto de $X \in M$.

Por lo cual la curvatura horociclo será la curvatura normal de los vectores tangentes en $T_x(M)$ cuya dirección normal sea T.

(53) NOTA: De hecho H es un espacio de Hilbert separable y como tal satisface que

$$H = \oplus H(\Xi) \\ H \in h^{\wedge}$$

donde h^{\wedge} es el dual a h un subgrupo orbital en G.

(54) NOTA: Ver Cita [15]

finita $H_s^2(\Omega)$, y originado por ciertas fuentes aisladas (singularidades del campo electromagnético). El espacio de señales de energía finita $H_s^2(\Omega)$ podemos definirlo como el espacio de Hilbert $H_s^2(\Omega_s) = \left\{ f(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{P}(\mathbb{I})) \mid \|f\|_2 < \infty \right\}$ (135)

con estructura causal determinada por la resolución de operadores en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{H})$. Así mismo todo campo de señales de energía finita como una sección diferenciable del haz tangente electrodinámico $\mathbb{U}_s \otimes \mathbb{P}^2(\mathbb{M})$ será todo mapeo

$$X: H_s^2(\Omega_s) \times H_s^2(\Omega_s) \times \dots \times H_s^2(\Omega_s) \longrightarrow H_s^2(\Omega_s \times \dots \times \Omega_s) \quad (136)$$

con regla de correspondencia

$$\left[f_1(t), \dots, f_n(t) \right] \longrightarrow X(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \quad (137)$$

Considerando a cada esfera tangente unitaria del haz $T(S^4)$ como una esfera de Riemann difeomórfica en cada punto a cada subespacio prehilbertiano de $H_s^2(\Omega)$ como completación en \mathbb{R}^4 Ladrillo de Hilbert) con estructura causal en \mathbb{U} en cada \mathbb{B}_α^0 , toda señal $\sigma(t) \in H_s^2(\Omega)$ mapeada a través de \mathbb{B}_α^0 toma la forma

$$\sigma(t) = e^{-k(c_0 + bv)t} \quad (138)$$

los cuales son fasores vectoriales cuyos campos de velocidad son v .

En particular los conos convexos de la estructura causal \mathbb{U} coinciden en convexidad a la convexidad del espacio de transformaciones $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ sobre el espacio \mathbb{B}_α^0 y los conos de luz son transformaciones conformes del espacio $H_s^2(\Omega_s)$ en \mathbb{B}_α^0 respetando su causalidad e invariancia bajo las acciones del subgrupo $\mathcal{L}(\mathbb{M})$ del grupo $GL(\mathbb{R}^4)$. De hecho por la teoría de Lovachevsky sobre el espacio hiperbólico, podemos identificar todos los puntos de nuestra variedad $M^{\sigma+1}$ por líneas que pasan a través del origen de un espacio euclideo E^{N+1} con $N=n+1$ y que caen dentro del cono $C(p): [x,x]=0 \forall x \in M$. Esto permite identificar a M dentro del interior de cada hipersfera unitaria (ss) del haz tangente $T(S^{\sigma+1}) \cong M^{\sigma+1}$ como el interior de una esfera n -dimensional de radio unitario. Esta región en la variedad $M^{\sigma+1}$ es una subvariedad totalmente geodésica en $M^{\sigma+1}$ identificada como una horoesfera, que para este caso particular resultan ser transitivas bajo la acción de los grupos $O(1, n+1)$ y $O(2, n)$ que actúan transitivamente sobre las componentes conexas de $M^{\sigma+1}$ que son Q_{-1} y Q_{+1} respectivamente (s7).

Considérese la orientación positiva de $M^{\sigma+1}$ tomando la componente conexas de $M^{\sigma+1}$ determinada por la cuádrice $Q_{+1}: [x,x]=1 \forall x \in M^{\sigma+1}$ (un hiperboloide en \mathbb{R}^{N+1}) (ss). La distancia r entre cualesquiera dos puntos está entonces dada por

$$\cosh r = [x, y]$$

donde para esta componente de orientación positiva de $M^{\sigma+1}$, consideramos que $[x,x] \geq 1$. De ésta fórmula obtenemos inmediatamente la expresión

$$k^2 ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$$

para el elemento diferencial de longitud de arco, donde las diferenciales dx_0, \dots, dx_n están relacionadas en virtud del hecho de que $[x,x]=1$. Por la ecuación

$$x_0 dx_0 - x_1 dx_1 - \dots - x_n dx_n = 0$$

dicha forma es definida positiva.

Realicemos nuevamente al espacio hiperbólico $M^{\sigma+1}$ a través del lápiz de líneas que pasan a través del origen de E^{N+1} con $n=N-1$ y que caen en el cono convexo $C(p): [x,x]=0 \forall x \in M^{\sigma+1}$.

Elijamos el sistema de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ con $[x,x] > 0$. En éste sistema de coordenadas homogéneo la ecuación de una esfera es

$$[x, \rho]^2 = c[\rho, \rho] [x, x] \quad (140)$$

donde $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ son las coordenadas de su centro. Desplacemos dicho centro al infinito.

(55) Esta atribución del espacio sideral ó cosmos M es debido a la existencia de una infinidad de atlas en S^4 difeomórficas a \mathbb{R}^4 (Ver "Topology from Differentiable Manifolds" Milnor, J.W. University Virginia Press, 1965).

(56) NOTA: Hipersferas difeomórficas a subespacios de $H_s^2(\Omega)$ con $\Omega = \mathbb{R} \times M^{\sigma+1}$.

(57) La cuádrice Q_1 es identificada como espacio homogéneo bajo la acción de éstos grupos como $O(2, n) \times O(1, n)$.

(58) NOTA: Recuerdese que $M^{\sigma+1}$ es localmente isométrica a $\mathbb{R}^{\sigma+1}, Q_{-1}$ y Q_{+1} .

En nuestra realización debida a la representación lineal que estamos haciendo de la variedad M^{p+1} , esto significa que n se aproxima a algún vector ξ de un cono de ecuación $[\xi, \xi]=0$. Podemos obtener este límite dejando $c = [n, n]$ constante. Entonces en el límite⁽⁵⁹⁾ obtenemos la ecuación:

$$[x, \xi]^2 = c_1 [x, x] \quad (141)$$

que es la ecuación de la correspondiente horoesfera, donde $c_1 > 0$ ya que $[x, \xi] \geq 0$ y $[x, x] > 0$ tal que $c_1 \geq 0$. Y añadiendo el hecho de que c_1 no se anula ya que no existe un punto $x \in M^{p+1}$ tal que $[x, \xi]=0 \Rightarrow c_1 > 0$. Su dirección de la horoesfera será el generador del cono que pasa a través de ξ . Luego la horoesfera en la cuádrica $Q_{+1}: [x, x]=1 \forall x \in M^{p+1}$ toma la forma bajo la correspondiente realización de la representación lineal de Q_{+1} como subvariedad de M^{p+1} ;

$$[x, \xi]^2 = \lambda^2 \quad (142)$$

donde nuevamente $[\xi, \xi]=0$, y $\lambda \neq 0$. Cabe notar que tal ecuación permanece invariante bajo el reemplazo de ξ por $-\xi$, y podemos considerar que ξ cae en la parte positiva del cono $[\xi, \xi]=0$. Ahora bien, si $x \in Q_{+1}$ y $\xi \in C(\bar{p}) \Rightarrow [x, \xi] > 0$ y la ecuación $[x, \xi]^2 = \lambda^2$ puede escribirse como

$$[x, \xi] = \lambda \quad (143)$$

$\forall \lambda > 0$. Si reemplazamos λ por $\alpha\lambda$ y ξ por $\alpha\xi \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ entonces la ecuación $[x, \xi]^2 = \lambda^2$ es una horoesfera. Si normalizamos la ecuación tomando $\lambda=1 \Rightarrow$

$$[x, \xi] = 1 \quad (144)$$

la cual es una horoesfera unitaria cuyo centro está en la parte positiva del cono $[\xi, \xi]=0$.

Y puesto que la geometría intrínseca de una horoesfera en una variedad hiperbólica M^{p+1} es completamente isomorfa en el sentido de las correspondientes relaciones y propiedades invariantes bajo la acción de los mismos grupos y subgrupos de isotropía; a la geometría intrínseca de los hiperplanos en \mathbb{R}^{p+1} , entonces las regiones de intersección de hiperplanos y horoesferas con los respectivos conos en cada caso (60) son isomorfas y puesto que éstas horoesferas en particular, son transitivas bajo la acción de los grupos $O(1, n+1), O(2, n)$ y sus subgrupos de isotropía son conexos entonces toda subvariedad totalmente geodésica en $\mathbb{D}_1^2 = M^{p+1} \cap C^+(p) = SU(1, 1)/SO(2)$ tal que $\mathbb{D}_1^2 \subset M^2 \subset M^{p+1}$ es un horociclo. De tal modo la medición de las señales de luz se realiza sobre dichos horociclos contenidos como "rayos de luz" en una esfera de Riemann \mathbb{B}_d^p localmente isométrica al espacio de señales de energía finita $\mathbb{H}_g^2(\Omega)$ y que modela a la variedad M^{p+1} y la cual proviene de la intersección $\{ \text{horoesferas} \} \cap C(p)$ de donde $\mathbb{B}_{d_1}^p$ resulta ser con estructura Riemanniana de curvatura negativa constante. Es importante resaltar que el negativo de la estructura Lorentziana de la variedad M^{p+1} es heredada por tales subvariedades totalmente geodésicas y en particular por los horociclos del disco de Poincaré \mathbb{D}_1^2 como sección transversal de la esfera unitaria \mathbb{B}_d^p la cual $\forall y \in M^{p+1}$ tiene una estructura Riemanniana de curvatura negativa constante. En efecto sea M^{p+1} el cosmos y considere la propiedad de isotropía propia de su hiperbolicidad, a través de todo subgrupo conexo del grupo $\mathbb{H} = O_0(1, n)$ que actúe transitivamente sobre toda esfera de luz $\mathbb{B}_d^p(o)$. Se sabe que tal subgrupo de isotropía que deja fija toda geodésica desde θ con vector $v_0 \in O_0(n)$. Pero $O_0(n)$ es el grupo de Lorentz $\mathcal{L}(M)$ cuyo grupo general lineal es $GL(\mathbb{R}^{p+1})$.

Sea $f(x) \in \text{Supp } C^\infty(\Omega)$, $(\Omega) \subset M^{p+1}$ recordemos por el capítulo II sección 2 que la integral de $f(x)$ sobre una horoesfera h^n cuya ecuación sea $[x, \xi]=1$ viene dada como:

$$\int_{h^n} f(x) d\sigma = \int_{M^{p+1}} f(x) \delta([x, \xi] - 1) dx \quad (145)$$

(59) NOTA:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} [x, n]^2 = [x, \xi]^2$

(60) NOTA:
 En \mathbb{R}^{p+1}
 $\{ \text{hiperplanos en } \mathbb{R}^{p+1} \} \cap C(p) = \mathbb{B}^n$
 \updownarrow
 En M^{p+1}
 $\{ \text{horoesferas} \} \cap C(p) = \mathbb{B}^n$

OBSERVACION: Obsérvese que el disco unitario \mathbb{D}_1^2 es completo y cerrado debido a la clausura que le dota la intersección del espacio interior $\{ \text{Horoesferas} \} \cap C(p)$ con la variedad Riemanniana M^{p+1} la cual hemos supuesto siempre completa, isométrica y conexa.

De donde en particular para el disco de Poincaré \mathbb{D}_1^2 es claro que en forma análoga

$$\int_{h^1} f(x) d\sigma = \int_{\mathbb{D}_1^2} f(x) \delta([\xi, x] - 1) dx \quad (146)$$

donde h^1 es un horociclo en \mathbb{D}_1^2 , el cual forma una órbita del grupo semisimple en \mathbb{D}_1^2 .

Como sabemos por el capítulo II de éste trabajo la integración sobre una órbita del espacio M^{p+1} tal como una horoesfera es invariante bajo las acciones del grupo semisimple que subyace en la variedad M^{p+1} en particular bajo las acciones del grupo que actúa transitivamente sobre los horociclos en \mathbb{D}_1^2 .

Así mismo tenemos entonces que las formas dx y $[x, \xi]$ permanecen invariantes bajo movimientos simultáneos de x y ξ y la integral definida es invariante bajo desplazamientos del horociclo. Esto significa que bajo un movimiento $g \in G$ del espacio hiperbólico M^{p+1} mapeando el horociclo h en el nuevo horociclo hg , obtenemos

$$\int_{hg} f(xg) d\sigma = \int_h f(x) d\sigma_g, \quad (147)$$

donde $d\sigma_g$ es la medida sobre hg . Si en particular g transforma h en sí mismo, \Rightarrow

$$\int_h f(xg) d\sigma = \int_h f(x) d\sigma, \quad (148)$$

de tal modo definimos la integración sobre un horociclo de 1er Orden como el definido en (146). Ahora es menester escribir la fórmula de curvatura horociclo usando las señales de luz descritas en $\mathbb{H}_s^2(\Omega)$ por (136). Usando la causalidad de M^{p+1} y tomando en cuenta en la resolución del espacio de Hilbert H subyacente en M^{p+1} para dotar a $\mathbb{H}_s^2(\Omega)$ como espacio vectorial topológico causal (ω) , tenemos que la transformada integral para las señales de luz puede expresarse como:

$$\begin{aligned} R(X, h) &= \int_h \mathbb{E} \exp(tX) S(X, h, v) \\ &= \int_{\mathbb{D}_1^2} \exp(t, x) S'(X, h, v) dv \quad (149) \\ &= \int_h e^{(\omega + kv)t} dS(X, h, v) \quad (149) \end{aligned}$$

donde $(\omega + kv) = X \in \mathfrak{X}^1(M)$, $M \cong \mathbb{R}^4$, $h \in \Xi$ y $S'(X, h, v)$ contiene la medida de Dirac de los puntos de discontinuidad de $S(X, h, v)$. v es la velocidad de expansión del espacio sideral.

Para el caso de nuestra 2 - variedad dimensional, la transformada de Radon es

$$R(X_{\nu}^{-}) = \int_{h: \xi(z, t)} e^{i(\omega + kv)t} dt = \int_{D^2(1)} e^{i(\omega + kv)t} \delta(\xi(z, t)) dS' \quad (150)$$

Proposición. IV.5.1. Considérese la variedad Riemanniana $D^2(1)$ y considérese el grupo de invariancia que actúa transitivamente sobre $D^2(1)$ dado por

$$SU(1, 1) = \{(a/b, b/a) \mid |a|^2 - |b|^2 = 1\} \quad (151)$$

cuyo subgrupo de isotropía es $SO(2)$. Toda geodésica en $D^2(1)$ es un arco circular.

Prueba: Debido a la función homográfica que define la acción de $SU(1, 1)$ sobre $D^2(1)$ definida por la correspondencia

$$z \mapsto az + b/(bz - a) \quad \forall z \in D^2(1), \quad (152)$$

se establece una correspondencia conforme del disco $D^2(1)$ en \mathbb{R}^2 isomorfo a \mathbb{C} teniendo que dicho mapeo, mapea círculos (y líneas) en círculos y líneas. Luego las líneas determinadas por cualesquiera par de puntos $z_1, z_2 \in D^2(1)$ satisfacen la condición de optimización de distancia sobre el arco determinado por tales puntos, a saber:

$$d(z_1, z_2) = \inf L(\gamma) \quad (153)$$

de lo cual se infiere que tales curvas son geodésicas en $D^2(1)$, y debido a que tales geodésicas están en $D^2(1)$, estas son arcos de círculos perpendiculares a la frontera $|z| = 1$. Puesto que tales puntos $z_1, z_2 \in D^2(1)$ se han tomado arbitrariamente, estos determinan una curva arbitraria, la cual es geodésica. Luego toda geodésica en $z_1, z_2 \in D^2(1)$ es un arco circular. \square

Proposición. IV.5.2. Si toda función en $D^2(1)$ definida por la correspondencia

$$z \mapsto e^{i(\alpha + b)} \quad (154)$$

$\forall z \in D^2(1), \mu \in \mathbb{C}$ y $b \in \xi \in \Xi$ es una onda bidimensional con normal b que es constante en cada geodésica perpendicular a b , entonces toda señal de luz que es una onda proveniente de la fuente localizada en b cuyo desplazamiento hasta el punto $z \in D^2(1)$, considerando la velocidad de expansión del universo: es

$$z \mapsto e^{i(\omega + kv)t} = e^{i\alpha t} \quad (155)$$

donde v es la velocidad de expansión del espacio sideral, ω la frecuencia angular del rayo luminoso determinado por la geodésica en $D^2(1)$.

Prueba: Ver cita [11].

4.6 CONSISTENCIA DE LA MEDIDA.

Ahora lo que sigue, es demostrar la consistencia de la medida obtenida. Para ello es menester demostrar que la medida de curvatura así obtenida es un invariante de observación, es decir, que la medida de curvatura es independiente del marco de referencia utilizado para medir el haz de luz. Esto nos lleva a que las medidas obtenidas a través de dichas señales de luz, las cuales son independientes del marco de referencia utilizado, son invariantes y por ende cualquier propiedad del espacio sideral deducida de estas señales, incluso la curvatura, será un invariante de observación, claro está; considerando una evolución causal de las señales a un tiempo $t \geq t_0$ para todo operador de evolución $T_t : H^2_s(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, en dicha región del universo enfocada por el sistema de observación.

Así mismo, si consideramos al funcional $T_t : H^2_s(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia

$$\sigma(t) \mapsto T_t \sigma(t) \quad (156)$$

$\forall \sigma(t) \in H^2_s(\Omega)$, donde $T_t \sigma(t)$ es el estado descrito por el sistema en el punto $\sigma(t)$ de $H^2_s(\Omega)$ (señal de luz)⁽⁶²⁾.

La medida realizada para una familia de observables sobre un dominio Ω_E del espacio sideral debe satisfacer $\forall K' \in \text{supp} C^\infty(\Omega_E)$ y $\sigma(t) \in H^2_s(\Omega)$ que

$$\mu(K') = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T K'(T_t \sigma(t)) dt < \infty \quad (157)$$

Es claro que cualquier medida realizada sobre alguna propiedad de una región del espacio Ω_E a través del observable E , debe ser una medida en $L^2(\Omega)$.

Proposición IV.5.3. La región de espacio-tiempo sobre la cual existe toda medida de una señal de energía finita es Ω_E .

Prueba: Debido a la propiedad de un espacio del cosmos (ver apéndice C, de esta obra), y teniendo por análisis funcional que toda medida realizada sobre un espacio de funciones continuas sobre un dominio medible es una medida intrínseca del espacio de funciones (i.e. una medida que no depende del observador), consideremos una región abierta⁽⁶³⁾ debido a la propiedad de cubriente del un espacio del espacio sideral, luego dicha región es medible y su medida debe ser algún observable de $H^2_s(\Omega)$ (teoría de la medida), en particular es Lebesgue-medible, y puesto que toda Lebesgue-medida se caracteriza por ser una medida construida a partir de una familia de abiertos medibles, aunado el hecho de que nuestra región de observación (región donde se realiza la medida) representa una familia de conjuntos cerrados medibles, entonces todo dominio abierto de Ω cuyo observable es la medida $E \in L^2(\Omega)$ es Ω_E . \square

(62) $\sigma(t)$ es la señal de luz sobre el disco $B^1_C = D^2(1)$ que en este caso es la superficie de energía o dominio del espacio $H^2_s(\Omega)$.

(63) Recuerdese que. Sea Ω el espacio total y Ω_E abierto en Ω cuya medida $\mu(\Omega_E) = E \in L^2(\Omega)$ y sean $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ cerrados, entonces toda Lebesgue-medida de Ω_E es $\mu(\Omega_E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(\Omega) \geq \mu(\cup_{k=1}^{\infty} \Omega_k)$.

Para probar la consistencia de la medida de la curvatura, es menester demostrar que si la curvatura

$$K^{\mu\nu}(\sigma) = \int \langle \nabla^{\mu} U, \sigma \rangle dt \quad (159)$$

que debiendo satisfacer que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T K^{\mu\nu}(\sigma(t)) dt < \infty \quad (159)$$

es decir, exista tal límite para una señal de luz $\sigma(t)$ tomada en forma arbitraria en la región de observación Ω^D , entonces exista una medida μ sobre Ω^D tal que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T K^{\mu\nu}(\sigma(t)) dt = \int_{\Omega^D} K^{\mu\nu}(\sigma(t)) d\mu(\sigma(t)) \quad (160)$$

Pero dicho límite es finito ya que $|\sigma(t)| \leq N(\epsilon) \forall t \in I$ y $\epsilon > 0$ puesto que $\sigma(t) \in \mathbb{D}^{1C}$ donde \mathbb{D}^{1C} es isomorfo al espacio de señales de energía finita $\mathbb{H}^2(\Omega)$ el cual es isomorfo al espacio funcional $L^2(\Omega)$. Aquí la bola riemanniana coincide con el disco $\mathbb{D}^{2(R)}$. Así mismo por la convexidad riemanniana, toda longitud de cualquier geodésica en $\mathbb{D}^{2(R)}$ es menor o igual a un valor N el cual expresa la longitud de tal arco geodésico determinado por dos puntos pertenecientes al disco de Poincaré $\mathbb{D}^{2(R)(C)}$.

En particular, si $a, b \in \mathbb{D}^{2(R)}$ y con tales que con centro de un horociclo, entonces

$$L(a, b) = L(a, b) \leq d(a, b) \leq (1/2) \log \left\{ \frac{(1 + |z|)^2 + |b - z|^2}{(1 + |z|)^2 + |b - z|^2} \right\} \quad (161)$$

Si w es un punto sobre el horociclo $\mathbb{H}(a, b) \in \mathbb{E}^1$ cerrado hacia o , entonces

$$e^{2(a, b)} = (1 + |w|)(1 - |w|) \quad (162)$$

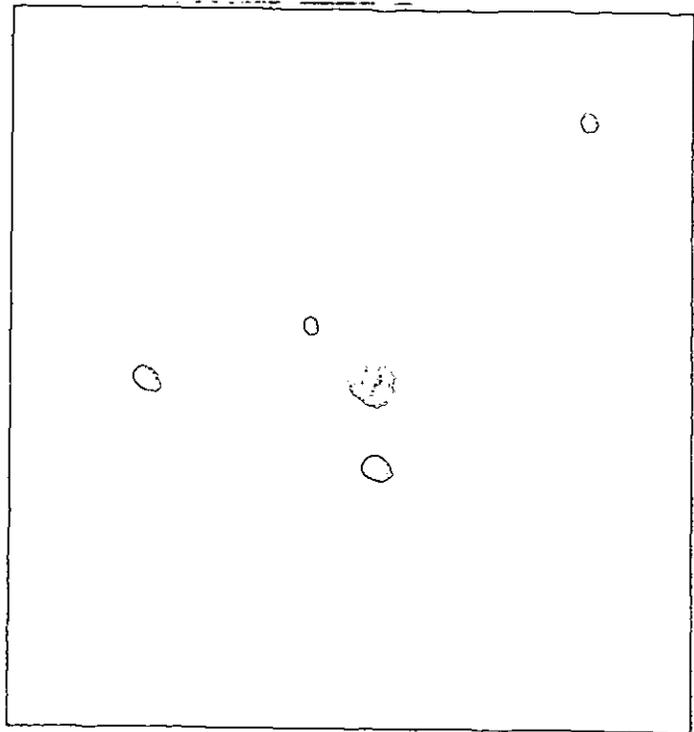
pero $|w|$ puede ser calculado por el uso de la relación cónica sobre los triángulos hiperbólicos cab y caz donde c es el centro del horociclo. Entonces obtenemos

$$\cosh(\rho_{ab}) = (1 + |w|^2 - |b - z|^2) / 2|z| = (|z|^2 + (1/2)(1 + |w|)^2 - (1/2)(1 - |w|)^2) / |z|(1 + |w|) \quad (163)$$

tal que $e^{2(a, b)} = (1 + |w|^2) / |z| - |z|$. Así mismo si $K^{\mu\nu}(\sigma) = \int \langle \nabla^{\mu} U, \sigma \rangle dt$ y si $\|\nabla^{\mu} \sigma(t)\| \leq C/R$

NUESTRO ABOLLADO SISTEMA SOLAR

Un modelo en barro muestra como el sol (amarillo) y los planetas que lo rodean, todos crean sus espacios curvos en el espacio como ya decía la teoría de Einstein. Este predijo que a causa de su curvatura, los rayos de luz que pasan cerca de los cuerpos celestes se torcerán. Algo muy parecido sucede a una nave espacial su trayectoria oscila a través de las "depressiones" del cosmos como si fuera una pelota de golf.



(64). Teorema. Sea M una variedad Riemanniana con métrica g . Para cada $p \in M$ corresponde un número $r(p) > 0$ tal que si $0 < \rho \leq r(p)$ entonces $D^2(\rho)$ tiene las siguientes propiedades: (a). $D^2(\rho)$ es una variedad normal de cada uno de sus puntos. (b). Sea $\alpha, \beta \in D^2(\rho)$ y con γ la línea geodésica.....

entonces $\|K^{\alpha}(\sigma(t))\| = \|K^{\alpha}(\sigma(t))\| \leq \exp(\|K^{\alpha}(z)\|) (C/R) N(\epsilon)$ con $|\sigma(t)| \leq N(\epsilon)$.
 En efecto, usando la representación $e^{2(z, b)} = (1 + bz^2)/(z - b)$ el cual es justamente el núcleo clásico de Poisson

$$P(z, b) = (1 + bz^2)/(z - b) = (1 - r^2)/(1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2) \quad (164)$$

donde $z = re^{i\phi}$, $b = e^{i\theta}$ y teniendo que toda señal de luz $z = \sigma(t)$ satisface para la conexión de M que

$$|V^{\alpha}\sigma(t)| \leq C/R \text{ para } |z| < 1 - R \quad (165)$$

$\forall z \in \mathbb{D}^{2(1)}$. En efecto, considerando a la función $K^{\alpha}(z)$ armónica

$$K^{\alpha}(z) = 1/2\pi \int_{\partial\mathbb{D}^2} (R^2 - |z|^2) / (Rz - z') \alpha(Rz') d\zeta \quad (165)$$

para el disco $|z| \leq R$, el cual implica la diferenciación

$$(\partial K^{\alpha} / \partial \bar{z})(z) = 1/2\pi \int_{\partial\mathbb{D}^2} (Rz - z') \alpha(Rz') d\zeta \quad (167)$$

y usando la desigualdad de Schwarz se tiene que

$$\|V(K^{\alpha}(z))\| \leq 2/R \text{ para } |z| \leq R \quad (168)$$

Luego teniendo que $\forall w \in \mathbb{D}^{2(1)}$, $w = z$, la ecuación (168) aplicada a la función $w \mapsto c(w+z)$, acota a $c(z) = K^{\alpha}(z)$ en $|z| \leq R$, entonces

$$\|K^{\alpha}(\sigma(t))\| \leq 2/R \text{ para } |K^{\alpha}(z)|, |z| \leq R \quad (169)$$

que es la cota pedida⁽⁶⁶⁾. En efecto;

Teo. I.V.5.1. La transformada de Radon de la curvatura gaussiana satisface que:

$$\iint_{\mathbb{D}^2} \text{MK}(z, L^{\zeta}, \cdot) \cdot K(z, L^{\zeta}, \cdot) \mu^{2-1} d\text{vol}(z) = (2/R) \iint_{\mathbb{D}^2} \text{MK}(\sigma(t)) d\text{vol}(t) \quad (170)$$

Prueba: Tomamos una sección transversal de una esfera unitaria del haz $T(S^2)$ isomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ y tomamos una línea del lápiz de líneas perteneciente al haz vectorial de líneas \mathbb{G} situado en la variedad M y causado por la estructura causal de M en la región de observación Ω^E de M , dicho horociclo tiene el aspecto siguiente

Sea $z = \sigma(\theta)$ una señal de luz sobre $\mathbb{D}^{2(1)}$. Fijamos un punto $\zeta \in L^{\zeta}$ tal que $z = z^{\alpha}$ ó $z = z^{\beta}$ donde α es un arco de longitud de L^{ζ} , y θ es el ángulo de la figura. Usando la función escalón unitario de Heaviside definida en la sección 3 de éste capítulo, podemos escribir la función curvatura sobre el campo de velocidades u como

$$K(u, L^{\zeta}, v) = \int_{L^{\zeta}} \mathbb{L}(v - e^{\mathbb{L}} u(z^{\alpha})) dS \quad (171)$$

donde la integración es realizada sobre la parte de L^{ζ} , donde u está definida, es decir, $L^{\zeta} \cap \Omega^E$. Haciendo lo mismo para el campo de velocidades v se tiene que

$$K(v, L^{\zeta}, v) = \int_{L^{\zeta}} \mathbb{L}(v - e^{\mathbb{L}} v(z^{\alpha})) dS \quad (172)$$

de donde entonces la diferencia de (171) y (172) se establece como

$$\begin{aligned} K(u, L^{\zeta}, v) - K(v, L^{\zeta}, v) &= \int_{L^{\zeta}} (\mathbb{L}(v - e^{\mathbb{L}} u(z^{\alpha})) - \mathbb{L}(v - e^{\mathbb{L}} v(z^{\alpha}))) dS = \\ &= \int_{\mathbb{D}^2} \langle -\nabla^{\alpha} u, u \rangle e^{\mathbb{L}} \delta(L^{\zeta}) dS = \int_{L^{\zeta}} \langle -\nabla^{\alpha} u, u \rangle e^{\mathbb{L}} dS = \\ &= \int_{L^{\zeta}} (\mathbb{L}(v - e^{\mathbb{L}} u(z^{\alpha})) - \mathbb{L}(v - e^{\mathbb{L}} \nabla^{\alpha} u(z^{\alpha}))) dS \quad (173) \end{aligned}$$

Si $v = 0$ entonces $S(\theta, L) = e^{\mathbb{L}}$, con $e = \text{min}(L^{\zeta} \cap \Omega^E)$. En este caso, para fijar la frecuencia ν ⁽⁶⁸⁾, el integrando no cambiará de signo en z^{α} a lo largo de $L^{\zeta} \cap \Omega^E$. Por lo cual

Sigue por la página (64).....en $\mathbb{D}^2(p)$ teniendo a y b . Entonces γ^{α} es el único segmento de curva en M de longitud $c(a, b)$ el cual une a y b .

Recordar que se ha considerado un haz de esferas normales $T(S^2)$ isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ donde localmente cada esfera como una región Ω^E es identificada con la bola \mathbb{B}^3 la cual es isomorfa a $\mathbb{R}^{2n}(\mathbb{O})$.

(65) Ya que la función curvatura puede tener la forma

$$K(u) = \int_{\mathbb{D}^2} e^{2(u, b)} \delta(L(b)) d\zeta = \int_{\mathbb{D}^2} (1 - |b|^2) \delta(L(b)) d\zeta$$

Los ventajas de tener esta integral de Poisson de la integral de distribución de Poisson para la misma función curvatura, es la de poder utilizar los conos $K(z) \leq C e^{-\alpha|z|}$ y $\sup_{|z| \leq R} \int_{|z| \leq R} K(z) dz < \infty$. (Ver Helgason, S. "Group and Integral Geometry" Academic Press, N.Y. 1974.

(65) El número $K^D(\sigma(t))$ es posible de obtenerse debido a que sobre una línea $L \in \mathbb{R}^2$, una norma natural es $K^D(\alpha, L) = K^D(v, L) e^{-\alpha|z|} \forall \alpha, v \in \mathbb{R}^2$.

(67) El disco de Poisson $D^D(z)$ cuyo horociclo sea el círculo C^z .

(68) Ver la ecuación respecto a recepción de señales de luz en el Cosmos.

$$K(\alpha, L^z, v) - K(v, L^z, v) = \int_{L^z} K(v - e^{\alpha z}(z^b)) - K(v) dS \quad (174)$$

Integrando con respecto a v obtenemos

$$K(\alpha, L^z) - K(v, L^z) e^{-\alpha|z|} = \iint K(v - e^{\alpha z}(z^b)) - K(v) e^{-\alpha|z|} dv = \int_{L^z} e^{\alpha z}(z^b) | dS \quad (175)$$

Otra integración sobre el \mathbb{R}^2 -plano, se tiene que

$$\iint K(\alpha, L^z) - K(v, L^z) e^{-\alpha|z|} d\xi d\eta / |K| = \iint \left(\int_{L^z} e^{\alpha z}(z^b) | dS \right) K(\xi, \eta) / |K| \quad (176)$$

Sobre el miembro derecho de la ecuación (176) integremos sobre $L^z \cap \Omega^D$, para fijar ζ , y entonces integremos sobre C con respecto a ζ . Usando una transformación polar en el \mathbb{R}^2 -plano, podemos integrar sobre el horociclo $C^z = C^{\alpha(z)}$ para fijar z . A saber, realizamos una parametrización de la línea L^z por medio del parámetro θ

$$\xi = \rho \cos \alpha$$

$$\eta = \rho \sin \alpha$$

entonces $\alpha = \rho \tan \theta$. Luego parametrizando al plano \mathbb{R}^2 -plano isomórfico al $D^D(z)$ -plano e introduciendo las coordenadas polares, tenemos que

$$\rho = r \cos \theta$$

$$\alpha = \alpha + \theta,$$

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

(donde $\rho = r \cos \theta$ es la ecuación para el círculo del horociclo $C^{\alpha(z)}$). Por lo cual

$$\begin{aligned} \iint \left(\int_{L^z} e^{\alpha z}(z^b) | dS \right) K(\xi, \eta) / |K| &= \iint \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\alpha z}(z^b) | |K| \cos^2 \theta d\theta \right) d\rho d\alpha = \\ &= \iint \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\alpha z}(z^b) | d\theta \right) r d\alpha \quad (177) \end{aligned}$$

Si $|K| \leq R$ con $R > 0$ y R el radio del círculo tangente en z al horociclo $C^{\alpha(z)}$ y denotando por $\gamma(z, K)$ el ángulo entre $K(z)$ y el radio vector en z , entonces

$$|e^{\alpha z}(z^b)| = |K(\sigma(t))| |\cos(\pi/2 + \theta - \gamma(z, \alpha))|$$

Para la integral intermedia de (177) tenemos que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\alpha z}(z^b) | d\theta = |K(\sigma(t))| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(\pi/2 + \theta - \gamma(z, \alpha))| d\theta = 2/R \iint |K^D(\sigma(t))| d\alpha d\gamma$$

ya que $|K(\sigma(t))| \leq 2/R \sup_{|z| \leq R} |K^D(z)|$, $|K| \leq R$. \square

Luego usando la relación existente entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier demostrada en la sección 1.2. de éste trabajo, se demuestra la invariancia de la medida realizada bajo la acción del operador de evolución T^t (que en este caso es la transformada de Fourier) demostrando con ello la variación temporal de la medida realizada, es decir, las señales utilizadas en la medida de la curvatura que son las salidas del sistema de observación, pertenecen a un sistema causal cuyas salidas varían solo en frecuencia.

De esta manera se concluye que la medida realizada de la curvatura por medio de la transformada de Radon es una medida consistente desde el punto de vista formal, es decir, es una medida matemática. Ahora es solo menester si dicha medida matemática es una medida real, acorde con las características físicas del universo. Para ello se recomienda tomar cualquier región del espacio sideral con alta definición para los instrumentos de observación, y utilizar las paralajes de las distintas estrellas que se identifique dentro de la región observable Ω^D para distinguir la familia de señales de

energía finita que provenga de cada estrella (ver apéndice E), y cuya posición relativa respecto a la Tierra y su eclíptica sirva para determinar los radios vectores de las esferas normales a los planos tangentes donde actúan las subvariedades totalmente geodésicas (horociclos)⁽⁶⁹⁾. La curvatura será la medida de la desviación del transporte paralelo, es decir, del isomorfismo

$$\phi^y : \mathbb{T}\mathbb{N}(\Omega^E) \rightarrow \mathbb{T}\mathbb{N}(\Omega^E) \quad (178)$$

(que depende de manera liza de la curva γ que une los puntos $p, q \in M$), respecto a la identidad cuando recorra un horociclo.

Así mismo, usando una identificación del espacio de distribuciones $\mathbb{D}(\Xi)$ en $\mathbb{D}(\Omega)$ ⁽⁷⁰⁾ ($\Omega \subseteq \Omega^E$) (ver Weiss (compilador) "Symmetric Spaces" Academic Press, 1970) puede obtenerse una distribución continua y uniforme de valores reales en $L^2(\mathbb{R})$ que mediante la aplicación de un adecuado muestreo de las señales de luz, lleven a la aproximación del valor de la curvatura en dicha región del espacio sideral el cual debe variar entre -1 y 1. Cabe mencionar que para regiones locales siderales, tal valor obtenido por esta aproximación debe ser un valor que varía entre -1 e ∞ .

Otros posibles métodos seguidos a través de mediciones estadísticas que pueden ser útiles para tal medición de la curvatura real, es la elección de paralajes de tipo espectroscópico, fotométrico o las deducidas de los movimientos propios. En tal confirmación de la medida de la curvatura, se eligen las señales de luz emitidas por distintas fuentes (estrellas) pertenecientes a la región observable Ω^E y se clasifican en el espectro de luz según su índice de color de la estrella; esta determina el alejamiento de acuerdo a la fórmula de paralaje espectroscópica, y en apego al efecto Doppler observado en la resonancia de las señales debido a la expansión del universo. Se elige una distribución de tipo esférico, tal como la Gaussiana o la de Maxwell, y se procede a su medida.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

(69). Como sabemos todo horociclo es ortogonal a toda geodésica en el disco D^{2n} .

(70). De hecho la transformada de Radon es un isomorfismo entre los espacios de distribuciones $\mathbb{D}(\Xi)$ y $\mathbb{D}(\Omega)$. Desde el punto de vista de los álgebras de operadores diferenciales subyacentes en dichos espacios, tal isomorfismo es la extensión entre el isomorfismo subyacente entre los álgebras de operadores unitarios $\mathbb{D}(A)$ y el álgebra de operadores diferenciales de horociclos Ξ . (ver artículo de Helgason, S. "Contact Distributions and Group Representations" M.I.T., 1972 perteneciente al libro citado en el pie de página (69) de la página anterior).

Ejemplo. Sea M la variedad hiperbolica cuya curvatura seccional es $K_n = -1$. Demostremos este hecho a traves del algoritmo de geometria integral desarrollado por la transformada de Radon. En efecto, considerando la identidad integral

$$K = \int_M K_n \, dV = \omega_n - \chi(M) - \chi(\partial M) - \int_{\gamma} k_g \, ds + 2\pi$$

tenemos por el teorema de Hopf que el grado del mapeo esferico para este caso, dada la dimension par de la variedad isomorfa al espacio sideral, es $\chi(\partial M) = 2d$. Por otro lado, el area de un disco unitario de Poincare es $\omega_n = \pi$. La curvatura geodesica para este caso se calcula sobre cualquier horociclo (siendo estos espacios de codimension 1 ortogonales a toda geodesica del disco $D^2_{(1)}$) por medio de la transformada de Radon

$$\int_{\gamma} k_g \, ds = \int_h \langle \nabla_n U, u \rangle \, ds = 2\pi$$

Por lo que finalmente se tiene que $-1 = \pi - 2d - \chi(M)$ de donde $\chi(M) = -2d + (\pi + 1)$ [Se puede consultar Kobayachi, "Hiperbolic Manifolds" Academic Press, N.Y. 1969].

CAPITULO V
TRANSFORMADA DE RADON SOBRE
HOROCICLOS

5.1. EL DISCO DE POINCARÉ $D^2_{(1)}$

Definamos explícitamente al disco de Poincaré como la variedad hiperbólica 2-dimensional

$$D^2_{(1)} = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq 1\} \quad (179)$$

cuya estructura como variedad es la estructura riemanniana inducida por el tensor métrico

$$g(x, y) = \langle x, y \rangle = (x, y)(1 - |z|^2)^{-2} \quad (180)$$

En $D^2_{(1)}$ existe conservación de ángulos, es decir, $\forall u, v \in T_z(D^2_{(1)})$ entonces

$$\langle u, v \rangle^2 / \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle = (u, v)^2 / (u, u)(v, v) \quad (181)$$

donde $(,)$ es el producto interno en \mathbb{R}^2 y \langle , \rangle el producto interno en $H^2 \cong D^2_{(1)}$.

Así mismo toda longitud de una curva $\gamma(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) en $D^2_{(1)}$ viene dada en apego a la definición de longitud de una curva en una variedad riemanniana como

$$L(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} dt \quad (182)$$

y

$$d(z, w) = \inf_{\gamma} L(\gamma) \quad \forall z, w \in D^2_{(1)}.$$

Si $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \subset D^2_{(1)}$ y $s(t)$ es el arco de longitud del segmento de curva $\gamma(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) del producto interno de la estructura riemanniana en $D^2_{(1)}$ se tiene que

$$(ds/dx)^2 = (1 - x(\tau)^2 - y(\tau)^2)^{-2} [(dx/d\tau)^2 + (dy/d\tau)^2] \quad (183)$$

lo cual significa que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 / (1 - x^2 - y^2)^2 \quad (184)$$

En particular si $\gamma(\alpha) = 0 = \text{origen}$ y $\gamma(\beta) = x$ un punto sobre el eje x y denotamos por γ_c el segmento de línea que va de 0 a x , se tiene que de la desigualdad

$$x'(\tau)^2 / (1 - x(\tau)^2 - y(\tau)^2)^2 \leq x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 / (1 - x(\tau)^2 - y(\tau)^2)^2 \quad (185)$$

se desprende la desigualdad

$$L(\gamma_c) \leq L(\gamma) \quad (186)$$

Esto muestra, por el principio variacional que determina trayectorias mínimas en un espacio no euclideo: que las líneas rectas que pasan a través del origen son geodésicas en $D^2_{(1)}$. Así mismo se tiene que

$$d(0, x) = L(\gamma_c) = \int_0^1 |x| / (1 - t^2 x^2) dt = (1/2) \log [1 + |x| / (1 - |x|)] \quad (187)$$

Consideremos al disco de Poincaré como un espacio homogéneo $SU(1, 1)/SO(2)$ donde $SO(2)$ es un subgrupo cerrado en $SU(1, 1)$ cuyas acciones se mantienen fijas sobre el origen 0 y $SU(1, 1)$ se define explícitamente como

$$SU(1, 1) = \{(a/b, b/a) \mid |a| - |b| = 1\} \quad (188)$$

el cual actúa sobre el disco $D^2_{(1)}$ a través del mapeo

$$g : z \mapsto (az + b) / (\bar{c}z + \bar{a}) \quad \forall z \in D^2_{(1)}$$

y la acción de dicho grupo $SU(1, 1)$ sobre $D^2_{(1)}$ es transitiva.

La estructura riemanniana determinada por la forma bilineal $g(x, y) = \langle x, y \rangle_z$ es preservada por el mapeo anterior. Por ejemplo, siendo $z(t)$ la curva con $z(0) = z$ y $z'(0) = u$ entonces

$$g \cdot u = d/dt g(z(t))|_{t=0} = z'(0) \cdot (\bar{c}bz + a \bar{r})$$

en $g(z)$, cumpliéndose la relación

$$\langle g \cdot u, g \cdot u \rangle_{g \cdot z} = \langle u, u \rangle_z \quad (189)$$

El mapeo $z \mapsto (az + b)/(\bar{c}z + \bar{a})$ es un mapeo conforme y se puede enunciar que:

Proposición V.1.1. Considerese la variedad riemanniana $D^2_{(1)}$ y considérese el grupo de invariancia que actúa transitivamente sobre $D^2_{(1)}$ dado por (188), cuyo subgrupo de isotropía es $SO(2)$. Toda geodésica en $D^2_{(1)}$ es un arco circular.

Prueba: Debido a la función homográfica que define la acción de $SU(1, 1)$ sobre $D^2_{(1)}$ definida por la correspondencia

$$z \mapsto (az + b)/(\bar{c}z + \bar{a}) \quad \forall z \in D^2_{(1)} \quad (190)$$

se establece una correspondencia conforme del disco $D^2_{(1)}$ en $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ teniéndose que dicho mapeo, mapea círculos (y líneas) en círculos y líneas. Luego las líneas determinadas por cualesquiera par de puntos $z_1, z_2 \in D^2_{(1)}$ satisfacen la condición de optimización de distancia o longitud sobre el arco determinado por tales puntos, a saber,

$$d(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} L(\gamma) \quad (191)$$

de lo cual se infiere que tales curvas son geodésicas en $D^2_{(1)}$ y debido a que tales geodésicas están en $D^2_{(1)}$, estas son arcos de círculos perpendiculares a la frontera $|z| = 1$. Puesto que tales puntos $z_1, z_2 \in D^2_{(1)}$ se han tomado arbitrariamente, estos determinan una curva arbitraria, la cual es geodésica. Luego toda geodésica en $z_1, z_2 \in D^2_{(1)}$ es un arco circular. \square

Así mismo si $z_1, z_2 \in D^2_{(1)}$, la isometría

$$z \mapsto (z - z_1)/(1 - \bar{c}_{z_1}z) \quad (192)$$

mapea z_1 hacia el punto 0 y z_2 al punto $(z_2 - z_1)/(1 - \bar{c}_{z_1}z_2)$. Seguido esto de una rotación alrededor del origen 0, tal punto es mapeado en $|z_2 - z_1|/|1 - \bar{c}_{z_1}z_2|$ de donde por (187) se deduce que

$$d(z_1, z_2) = (1/2) \log [|1 - \bar{c}_{z_1}z_2| + |z_2 - z_1|/|1 - \bar{c}_{z_1}z_2| - |z_2 - z_1|] \quad (193)$$

5.2. LOS HOROCICLOS.

Estudiando la ecuación de Beltrami-Laplace en el contexto del plano hiperbólico, se deduce en particular que algunas funciones características del operador L de Beltrami-Laplace en dicho contexto (que son soluciones de la ecuación de onda en el plano hiperbólico) son ciertas funciones de la forma

$$e_{\mu, b} : z \mapsto e^{\mu \langle z, b \rangle} \quad \forall z_2 \in D^2_{(1)}$$

análogas a algunas funciones características de L para el caso en \mathbb{R}^n (soluciones de la ecuación de onda en el espacio euclideo).

Así mismo podemos observar las siguientes analogías para tales funciones características de L en \mathbb{R}^n y $D^2_{(1)}$ en cada caso:

En \mathbb{R}^n :

-Las funciones características del operador L que son soluciones de la ecuación de onda se definen como el mapeo

$$\mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$$

con regla de correspondencia

$$e_{x, \omega} : x \mapsto e^{-ix \cdot \omega}$$

($e_{x, \omega}$ son eigenfunciones del laplaciano $L_{\mathbb{R}^n}$ sobre \mathbb{R}^n).

-Las funciones $e_{x, \omega}$ son $SU(1, 1)$ -invariantes sobre \mathbb{R}^n .

- $e_{x, \omega}$ representa una onda hiperplana con normal ω , que es constante sobre cada hiperplano perpendicular a ω .

En $D^2_{(1)}$:

-Las funciones características del operador L que son soluciones de la ecuación de onda se definen como el mapeo

$$D^2_{(1)} \rightarrow \xi$$

cuya regla de correspondencia es

$$e_{z, b} : z \mapsto e^{i\langle z, b \rangle}$$

($e_{z, b}$ son eigenfunciones del laplaciano L_{H^2} sobre $D^2_{(1)}$).

-Las funciones $e_{z, b}$ son $SU(1, 1)$ -invariantes sobre $D^2_{(1)}$.

- $e_{z, b}$ representa una onda plana con normal b , que es constante sobre cada horociclo perpendicular a b .

En el capítulo II se estudiaron los horociclos como orbitas de una variedad hiperbólica para el caso general, encontrándose que dichas órbitas tenían propiedades similares a las órbitas en \mathbb{R}^n . En consecuencia se observó que horociclos en una variedad hiperbólica de dimensión n juegan el mismo papel que los hiperplanos en el espacio \mathbb{R}^n . Así mismo en \mathbb{R}^n , un hiperplano es ortogonal a una familia de líneas paralelas, mientras que en $D^2_{(1)}$ dicho papel lo juegan los horociclos, es decir, los círculos en $D^2_{(1)}$ tangentes a la frontera $\partial D^2_{(1)}$. Así mismo tales círculos ξ_z son ortogonales a toda geodésica en $D^2_{(1)}$ tendiendo un punto de contacto en b . De esta manera si z es un punto sobre un horociclo ξ_z , tenemos el producto interno $\langle z, b \rangle$ el cual define la distancia de o a ξ_z . Este producto interno, es de hecho el analogo no euclideano del producto interno euclideano $\langle x, \omega \rangle$, el cual geoméricamente significa la distancia dirigida del $0 \in \mathbb{R}^n$ al hiperplano en x con normal ω .

5.3. LA TRANSFORMADA DE RADON SOBRE LOS HOROCICLOS.

Con fundamento en el capítulo II, y usando la invariancia de la definición de la transformada de Radon en una variedad hiperbólica, podemos definir para el caso de nuestra 2-variedad dimensional hiperbólica a la transformada de Radon como:

$$R(z, \xi) = \int_{\xi(z, b)} f(z) dS(\xi(z, b)) = \int_{D^2(\mu)} f(z) \delta(\xi(z, b)) dz \quad (194)$$

donde $f(z)$ es una función analítica y holomorfa en $|z| \leq 1$, $\xi(z, b)$ es el horociclo tangente en b y que pasa por z en dicha región hiperbólica, dS es la medida de Radon positiva que coincide con la medida usual, en el caso hiperbólico; a la medida $ds = dz = (1 - x^2 - y^2)^{-2} dx dy$.

Considérese la función $f(z)$ holomorfa y de soporte compacto sobre el disco de Poincaré

$$D^2_{(1)} : |z| \leq 1$$

y supongase además que $f(z)$ converge absolutamente en $|z| \leq 1$. Entonces $f(z)$ tiene transformada de Radon sobre el disco de la forma (194). Determinemos su forma explícita de tal transformada de Radon a través de la evaluación de $f(z)$ sobre horociclos. Para ello tomemos uno de tales horociclos tangente en a a la frontera $\partial D^2_{(1)}$, entonces

$$F(z, b) = \int_{D^2(\mu)} f(z) \delta(\xi(z, b)) dz \quad (195)$$

siendo $dz = dx dy / (1 - x^2 - y^2)^2$ y puesto que la medida de Radon $\mu(f)$ esta determinada por la $SU(1, 1)$ -medida $dS(\xi(z, b)) = dz$ en $D^2_{(1)}$ entonces

$$\int_{D^2(\mu)} f(z) \delta(\xi(z, b)) dz = \int_{D^2(\mu)} f(z) \delta(\xi(z, b)) (1 - x^2 - y^2)^{-2} dx dy \quad (196)$$

Pero por la propiedad de escudriñamiento de δ en $z = a$ se satisface que

$$\begin{aligned} \delta(\xi(z, b)) &= \int_{D^2(\mu)} e^{\mu \langle z, b \rangle} \delta(b - a) (1 - |z|^2) db = \\ &= \int_S 1 \left[\int_S 1 e^{\mu \langle z_1, b_1 \rangle} (1 - b_1^2 + b_2^2)^{-2} \delta(a_1, 0) db_1 \right] e^{\mu \langle z_2, b_2 \rangle} (1 - b_1^2 + b_2^2)^{-2} \delta(0, a_2) db_2 \\ &= e^{\mu \langle z_1, a_1 \rangle} (1 - a_1^2 + b_2^2)^{-2} e^{\mu \langle z_2, a_2 \rangle} (1 - b_1^2 + a_2^2)^{-2} \\ &= e^{\mu \langle z, a \rangle} / (1 - a_1^2 + b_2^2)^2 (1 - b_1^2 + a_2^2)^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\xi(z, b)} f(z) dS(\xi(z, b)) &= \int_{D^2(\mu)} f(z) [e^{\mu \langle z, a \rangle} / (1 - a_1^2 + b_2^2)^2 (1 - b_1^2 + a_2^2)^2] (1 - x^2 - y^2)^{-2} dx dy = \\ &= 1 / [(1 - a_1^2 + b_2^2)^2 (1 - b_1^2 + a_2^2)^2] \int_{D^2(\mu)} f(z) e^{\mu \langle z, a \rangle} dz \end{aligned}$$

pero

$$\int_{D^2(\mu)} f(z) e^{\mu \langle z, a \rangle} dz = \mathcal{F}\{f(z)\} = f^\vee(\mu, B) \quad (197)$$

es la transformada de Fourier sobre $D^2_{(1)}$. Enunciemos una definición formal de la transformada de Fourier hiperbólica.

Def.V.3.1. Si $f(z)$ es una función de valor complejo sobre $D^2_{(1)}$ su transformada de Fourier está definida por

$$\Gamma(\mu, b) = \int_{D^2_{(1)}} f(z) e^{-\langle z, \mu \rangle} dz \quad (198)$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}$, $b \in B = \partial D^2_{(1)}$ para la cual esta integral existe.

Análogamente al caso real y euclidiano, se puede dar una condición de tipo exponencial para el decrecimiento uniforme de la transformada de Fourier hiperbólica. Así mismo, decimos que una función holomorfa $\phi(\mu, b)$ en $\mu \in \mathbb{C}^n$ en $D^2_{(1)}$, es de tipo exponencial uniforme R si $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que

$$\sup_{\mu \in \mathbb{C}, b \in B = \partial D^2_{(1)}} e^{-R \cdot \text{Im} \mu} (1 - |\mu|)^N |\phi(\mu, b)| < \infty \quad (199)$$

donde $\text{Im} \mu$ denota la parte imaginaria de μ .

Así mismo si consideramos en la mayor forma general posible que $f \in \mathcal{B}(D^2_{(1)})$, la transformada de Fourier cuya regla de correspondencia sea

$$f \mapsto \Gamma \quad (200)$$

es una biyección de $\mathcal{B}(D^2_{(1)})$ dentro del espacio de funciones holomorfas $\phi(\mu, b)$ de tipo exponencial uniforme satisfaciendo a la ecuación funcional

$$\int_{\mathbb{B}} e^{\mu \langle z, a \rangle} \phi(\mu, b) db = \int_{\mathbb{B}} e^{\mu \langle z, a \rangle} \phi(-\mu, b) db \quad (201)$$

lo cual es análogo para la transformada de Fourier de $\mathcal{B}(S^1)$ dentro del espacio de funciones continuas de tipo exponencial uniforme en \mathbb{R}^n .

Usando la transformada de Radon sobre líneas $SU(1, 1)$ -invariantes del disco $D^2_{(1)}$ se puede obtener una fórmula integral deducida del teorema de Fubini para determinar la transformada de Fourier hiperbólica sobre el disco $D^2_{(1)}$. En efecto, considerese a b_0 el punto de intersección de B con el eje x positivo. Consideremos los horociclos infinitesimalmente próximos

$$\xi_t = N a_t \cdot o, \quad \xi_{t+\Delta t} = N a_{t+\Delta t} \cdot o$$

y las geodesicas infinitesimalmente próximas que son perpendiculares a dichos horociclos

$$n_x A \cdot o, \quad n_{x+\Delta x} A \cdot o$$

tal y como se muestra en la siguiente figura

FIGURA II

Notemos (por un cálculo endomórfico) que $a_t^{-1} n_x a_t = n_{x e^{-2t}}$ y que a_t es una isometría en el disco $D^2_{(1)}$ mapeando $N \cdot o$ en $N a_t \cdot o$. El rectángulo sombreado en la figura tiene lados Δt , $e^{-2t} \Delta x$, Δt y $e^{-2(t+\Delta t)} \Delta x$ tal que el elemento de superficie dz está dado por

$$\int_{D^2_{(1)}} f(z) dz = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(n_x a_t \cdot o) e^{-2t} dx dt \quad (202)$$

y el elemento de arco $d\omega_t$ sobre el horociclo ξ_t está dado por

$$d\omega_t = e^{-2t} dx \quad (203)$$

Para el caso complejo, la fórmula (202) determina una forma diferencial dz igual a (203). Basta tomar

$$z = \alpha_x \alpha_y \cdot \theta = (\sin - ixe^{-t}) / (\cosh - ixe^{-t}) \quad (204)$$

lo cual da

$$dz = (1/2) [d\zeta / d\omega] / (1 - \zeta\bar{\omega})^2 = e^{-t} dx dt \quad (205)$$

Así mismo la fórmula integral (202) puede ser escrita como

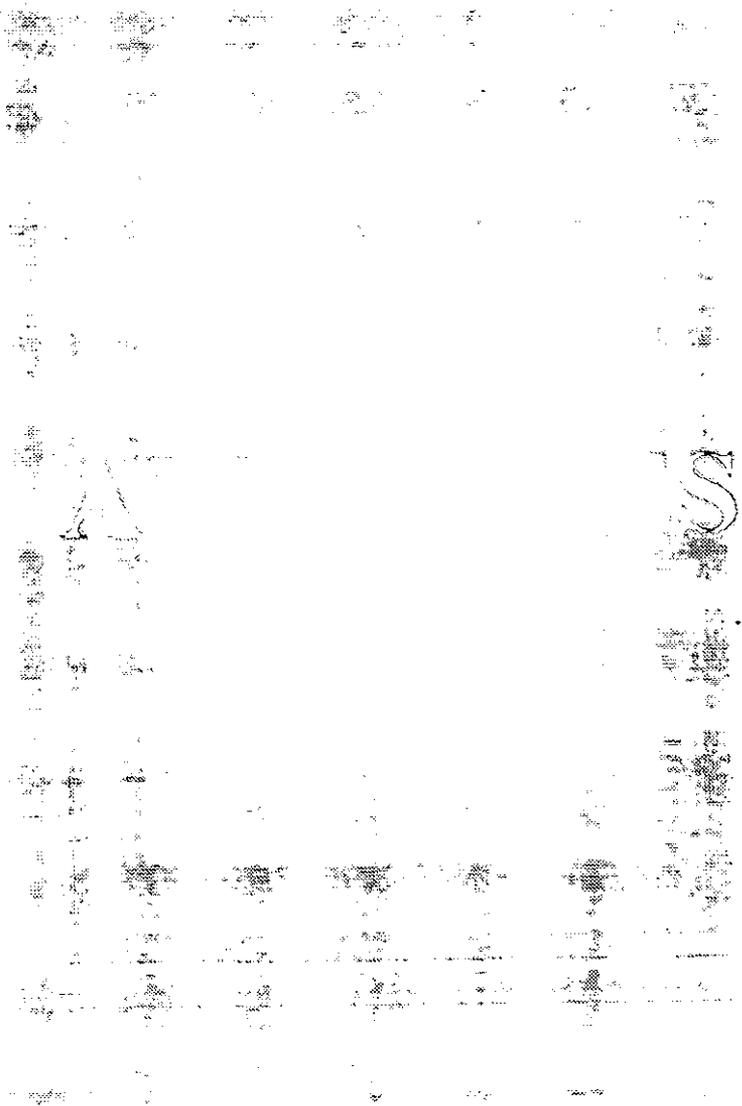
$$\int_{D^2} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} f(z) d\omega_t(z) \right) dt \quad (206)$$

Rotando θ unidades, podemos por lo tanto escribir a la transformada hiperbólica sobre el disco dada por (198) como

$$F(\mu, e^{i\theta}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha z} \alpha^{\alpha} \left(\int_{\Sigma(\tan \theta e^{i\theta}, e^{i\theta})} f(z) d\omega_t(z) \right) dt \quad (207)$$

la cual determina el valor de la transformada de Fourier hiperbólica (198).

De esta manera queda determinada la transformada de Radon sobre horociclos. Para recuperar a la función $f(z)$ sobre todo el disco, solo es menester aplicar el caso de dimensión par para la aplicación de la transformada inversa de Radon.



APENDICE A

Espacio Simétrico Homogéneo

Def.A.1. Un espacio simétrico es una tripleta (G, H, σ) consistente de un grupo de Lie G , un subgrupo cerrado H de G y un automorfismo involutivo σ de G tal que H cae entre G_σ y la componente identidad de G_σ , donde G_σ denota el subgrupo cerrado de G consistente de todos los elementos fijos ó σ invariantes bajo traslaciones izquierdas (clases laterales izquierdas).

Dado un espacio simétrico (G, H, σ) podemos construir para cada punto x del espacio cociente G/H un difeomorfismo S_x llamado la **simetría en x** , la cual tiene x como punto fijo aislado. Si se toma el origen $o \in G/H$, S_o está definiendo para ser el difeomorfismo involutivo de G/H en sí mismo inducido por el automorfismo $\sigma \in G$.

Para demostrar que o es un punto fijo aislado para ésta simetría S_o , sea $g(o)$ un punto fijo de S_o , donde $g \in G$. Esto significa que $\sigma(g) \in gH$. Luego teniendo que $h = g^{-1}\sigma(g) \in H$ de donde $\sigma(h) = h$ entonces tenemos $h^2 = h\sigma(h) = g^{-1}\sigma(g)\sigma(g^{-1}\sigma(g)) = g^{-1}\sigma(g)\sigma(g^{-1})g = 1$ por lo tanto hemos demostrado que h^2 es el elemento identidad.

Si g es suficientemente cercano al elemento identidad tal que h es también cercano al elemento identidad $\Rightarrow h$ es en sí mismo el elemento identidad y por lo tanto $\sigma(g) = g$.

Siendo invariante por σ y cercano al elemento identidad, g cae en la componente identidad de G_σ y por lo tanto en H . Esto implica que $g(o) = o$, y por lo tanto queda demostrada nuestra afirmación de que o es un punto fijo aislado de S_o .

Para $x = g(o)$, utilizamos $S_x = g \circ S_o \circ g^{-1} \Rightarrow S_x$ es independiente de la elección de g tal que $x = g(o)$.

Ahora bien la versión **infinitesimal de un espacio simétrico** viene dada por el álgebra de Lie del grupo de Lie G .

Def.A.2. Un Álgebra de Lie simétrica (algunas veces llamada un álgebra de Lie involutiva) es una tripleta $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$: considerando de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , una subálgebra de Lie \mathfrak{h} de \mathfrak{g} y un automorfismo involutivo σ de \mathfrak{g} tal que \mathfrak{h} consiste de todos los elementos de \mathfrak{g} los cuales son invariantes izquierdos por G_σ .

Sea un álgebra de Lie simétrica (i.e. un espacio simétrico infinitesimal). Por un lado, σ es involutiva, sus **eigenvalores** como transformación lineal de \mathfrak{g} son 1 y -1 y \mathfrak{h} es el **eigenespacio 1** .

Sea \mathfrak{m} el eigenespacio -1 . La descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

es llamada la descomposición canónica de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$.

Prop.A.1. Sea (G, H, σ) un espacio simétrico y $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ su álgebra de Lie simétrica.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ es la descomposición canónica de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$, \Rightarrow

$$\text{ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

Este hecho es de gran relevancia para demostrar la **G -invariancia** del tensor métrico Riemanniano \hat{g} sobre el espacio homogéneo G/H , el cual dotado de la forma bilineal simétrica que define tal tensor, es un **espacio homogéneo simétrico**.

Analicemos el caso más general el cual es el pseudoriemanniano. Consideremos primeramente al grupo G subyacente a la variedad pseudoriemanniana M .

La forma de **Killing** no degenerada del grupo analítico G subyacente en la variedad pseudoriemanniana M es el tensor métrico pseudoriemanniano. Por lo cual existe una estructura pseudoriemanniana en dicho grupo analítico G cuyo tensor métrico $\hat{g} \in T^0_2(G)$ satisface

$$\hat{g}(e) = B_{\mathfrak{t}}$$

el cual es invariante bajo los automorfismos (traslacio-derechas e izquierdas) de G .

En efecto: sea $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$. Por la propiedad de la variedad producto del espacio tangente en $e \in G$ se tiene que

$$T_e(G \times G) = T_e(G) \times T_e(G) \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}.$$

Entonces el mapeo definido sobre el subespacio $\mathfrak{m} : \Phi : \mathfrak{m} = T_e(\mathfrak{H}) \times T_e(\mathfrak{H}) \longrightarrow \mathbb{R}$

Con $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, con regla de correspondencia

$$(X_e, Y_e) \longmapsto \langle X_e, Y_e \rangle$$

es una métrica pseudoriemanniana en \mathfrak{G} . Considerando la representación lineal

$$U: \mathfrak{G} \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{E}),$$

tenemos que $B_{\mathfrak{L}}$ asociada canónicamente a U está dada por

$$B_{\mathfrak{L}}(X, Y) = B_{\text{Ad}}(X, Y) = \text{tr}[U_*(X_e) \circ U_*(Y_e)] \\ = \langle X_e, Y_e \rangle$$

donde $U_* = \text{ad}_{\mathfrak{L}}: \mathfrak{g}_e \longrightarrow \mathfrak{gl}_n(n, \mathbb{E})$

$$T_e(\mathfrak{G}) \longrightarrow T_{U(e)}(\text{GL}(n, \mathbb{E}), \circ)$$

y puesto que

$$T_e(\mathfrak{G}) \cong (\mathbb{R}^n)$$

con regla de correspondencia

$$X_e \longmapsto (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow T_e(\mathfrak{G}) \times T_e(\mathfrak{G}) \cong (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

con regla de correspondencia

$$= (X_e, Y_e) \longmapsto (b_1 a_1, \dots, b_n a_n) \\ = \langle X_e, Y_e \rangle = \text{tr}(\text{ad}(X_e), \text{ad}(Y_e))$$

por lo tanto dicha forma bilineal $\forall X_e, Y_e \neq 0 \in \mathfrak{g}_e$ satisface que $\langle X_e, Y_e \rangle = \Phi(X_e, Y_e) = \hat{g}(e)$ es decir es una métrica pseudoriemanniana. Dicha métrica pseudoriemanniana es invariante bajo traslaciones derechas e izquierdas de \mathfrak{G} , es decir:

Sea $\sigma \in \mathfrak{G} \Rightarrow$

$$r_{\sigma} \hat{g}(x) = \hat{g}(x) \circ \sigma = \hat{g}(x\sigma) = x \hat{g}(e) \sigma \\ = (x\sigma)(\sigma^{-1} \hat{g}(e) \sigma) \\ = x \sigma \hat{g}(e) = \hat{g}(x\sigma)$$

y por otro lado

$$l_{\sigma} \hat{g}(x) = \sigma \circ \hat{g}(x) = \sigma \circ \hat{g}(e)x \\ = \sigma \hat{g}(e) \sigma^{-1} (\sigma x) \\ = \hat{g}(e)(\sigma x) \\ = \hat{g}(\sigma x) \quad \square$$

Nota: $g_{ij} = \langle \hat{g}_i, \hat{g}_j \rangle$

$$\hat{g} = \sum g_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$$

Ahora bien, el grupo analítico con dicha estructura pseudoriemanniana es un grupo de Lie semisimple conexo el cual por la teoría de grupos semisimples se sabe que éste es de centro $\{e\}$. Entonces podemos demostrar que éste grupo es un espacio simétrico homogéneo.

NOTA: (Véase la nota de pie de página (19) de la página 16, CAPITULO II, Sección 2.1)

El cosmos como una variedad pseudoriemanniana ó Riemanniana tiene como grupo natural subyacente un grupo semisimple no compacto.

Esto es precisamente lo que se acaba de demostrar anteriormente con la identidad tensorial $\hat{g}(e) = B_{\mathfrak{L}}$.

Prop.A.2. Sea \mathfrak{G} un grupo de Lie conexo cuyo centro es $\{e\}$, y cuya forma bilineal asociada a su representación lineal en un espacio vectorial de dimensión finita es no degenerada. Entonces \mathfrak{G} puede ser considerado un **Espacio Homogéneo Simétrico**, cuyo tensor pseudoriemanniano es invariante bajo acciones del grupo \mathfrak{G} sobre elementos del espacio pseudoriemanniano del cual \mathfrak{G} es un grupo natural.

Prueba: Debido a que la forma bilineal asociada a la representación lineal U de \mathfrak{G} en $\text{GL}(\mathbb{E})$ con \mathbb{E} (un espacio vectorial de dimensión finita) es no degenerada ($B_{\mathfrak{L}}: \mathfrak{g}_e \times \mathfrak{g}_e \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{E})$) entonces consideremos el grupo producto $\mathfrak{g}_e \times \mathfrak{g}_e$. Sea $\sigma: \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ el automorfismo

involutorio con regla de correspondencia

$$(s,t) \longmapsto (t,s)$$

El conjunto de elementos σ -invariantes de G es el subgrupo diagonal de $G \times G$. Por lo cual el conjunto que caracteriza a G como un espacio homogéneo es el conjunto de clases laterales (cuya forma bilineal es invariante bajo la acción de automorfismos de G) $G \times G/D$ cuyo grupo transitivo de homeomorfismos es el grupo de automorfismos involutorios sobre elementos de la variedad inducida por la estructura topológica de G .

Así mismo el subgrupo diagonal de $G \times G$ formado por los elementos (s,s) es aquel que no contiene a un subgrupo normal distinto del no trivial de $G \times G$ (AI), porque

$$(s,t)(x,x)(s^{-1},t^{-1}) = (sx s^{-1}, tx t^{-1})$$

el cual vuelve a pertenecer a $D \forall (s,t) \in G \times G$ si y solo si x esta en el centro de G . El subespacio \mathfrak{m} de $\mathfrak{g}_e \times \mathfrak{g}_e$ formado por eigenvectores de σ , para el eigenvalor -1 es claramente el espacio de vectores $(\bar{u}, -\bar{u})$ donde $\bar{u} \in \mathfrak{g}_e$ y tenemos que

$$\text{Ad}(s, s) \circ (\bar{u}, -\bar{u}) = (\text{Ad}(s)\bar{u}, -\text{Ad}(s)\bar{u}) \forall s \in G.$$

Luego la estructura simétrica de G viene establecida por su forma bilineal la cual es de Killing y ésta es una forma bilineal simétrica no degenerada sobre \mathfrak{g}_e . Entonces el espacio así definido es un espacio homogéneo simétrico pues la restricción de la forma de Killing de \mathfrak{g} en \mathfrak{m} define una métrica pseudoriemanniana G -invariante sobre G/H (Kobayashi-Nomizu Vol. II Cap. X. Corolario 3.2).

Ahora bien, lo que sigue es demostrar que el tensor métrico definido por dicha forma de Killing es invariante bajo operadores $\text{Ad}(s) \in T_e(G) \cong \mathfrak{g}_e \forall s \in G$.

Sea G_0 el subgrupo $\{e\} \times G$ de $G \times G$. El mapeo $\varphi : (x, y) \longmapsto ((e, yx^{-1}), (x, x))$ es un difeomorfismo de $G \times G$ sobre $G_0 \times D$ y el difeomorfismo inverso es

$$\varphi^{-1} : ((e, t), (s, s)) \longmapsto (s, ts)$$

tenemos entonces que

$$\varphi : (xs, ys), ((e, yx^{-1}), (xs, xs)),$$

de donde si $\pi : G \times G \longrightarrow (G \times G)/N$ es la proyección canónica $\Rightarrow \exists$ un difeomorfismo $\Psi : (G \times G)/D \longrightarrow G_0$ tal que $\Psi(\pi(x, y)) = (e, yx^{-1})$ y φ es por lo tanto un isomorfismo del haz principal

$$(G \times G, (G \times G)/D, \pi).$$

Es el haz principal trivial $(G_0 \times D, G_0, \text{pr}_1)$ con el mismo grupo D . El mapeo lineal tangente $d_{(e,e)}(\varphi)$ es $(\bar{u}, \bar{v}) \longmapsto ((0, \bar{v} - \bar{u}), (\bar{u}, \bar{u}))$ define por restricción a \mathfrak{m} y la identificación canónica de Lie (G_0) con \mathfrak{g}_e a un isomorfismo

$$e(\bar{u}, \bar{u}) \longmapsto (-2\bar{u})$$

de \mathfrak{m} a \mathfrak{g}_e . Vemos por lo tanto que existe una única estructura pseudoriemanniana sobre G la cual es invariante bajo las traslaciones izquierdas por elementos de G y cuyo tensor métrico \hat{g} es tal que $\hat{g}(e) = \Phi$. La invariancia de Φ bajo la representación adjunta muestra además que \hat{g} es también invariante bajo

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) \circ s &= x \hat{g}(e) \circ s = (x s) (s^{-1} \hat{g}(e) \circ s) = (x \circ s) \hat{g}(e) \\ &= \hat{g}(x, s) \quad \square \end{aligned}$$

(AI) Sea \mathfrak{m} el conjunto de todos los vectores $(\bar{u}, \bar{u}) \in \mathfrak{g}_e \times \mathfrak{g}_e$ tales que $\sigma_*(\bar{u}) = (-\bar{u}, -\bar{u}) = -(\bar{u}, \bar{u})$ donde \mathfrak{m} sea un suplemento de $\mathfrak{h}_e \times \mathfrak{h}_e$ en $\mathfrak{g}_e \times \mathfrak{g}_e$ y puede ser identificado canónicamente con $\mathfrak{g}_e \times \mathfrak{g}_e / \mathfrak{m}_e \times \mathfrak{m}_e$ por proyección paralela a $\mathfrak{h}_e \times \mathfrak{h}_e$. Permiremos demostrar que con esta identificación, el automorfismo

$$(k, \bar{k}) \longmapsto (t, t)(k, \bar{k})$$

de $\mathfrak{g}_e \times \mathfrak{g}_e / \mathfrak{h}_e \times \mathfrak{h}_e$ donde $(t, t) \in D$ es identificado como el automorfismo

$$(\bar{u}, \bar{u}) \longmapsto \text{Ad}(t)\bar{u}, \text{Ad}(t)\bar{u}$$

de \mathfrak{m} . Si (\bar{k}, \bar{k}) es la clase de (\bar{u}, \bar{u}) módulo $\mathfrak{h}_e \times \mathfrak{h}_e$, entonces $(t, t)(\bar{k}, \bar{k})$ es la imagen bajo $d\pi$ de $(t, t)(\bar{u}, \bar{u}) \in T_{(t,t)}(G \times G)$ y

$$(t, t)(\bar{u}, \bar{u})(t^{-1}, t^{-1}) = \text{Ad}(t, t)(\bar{u}, \bar{u}) \in \mathfrak{m}$$

El hecho de que $G \times G$ actúa trivialmente sobre $(G \times G)/D$ implica que el homomorfismo ρ de D en $GL(\mathfrak{g}_e \times \mathfrak{g}_e / \mathfrak{h}_e \times \mathfrak{h}_e)$ definido y construido por medio de $G \times G/D$ es inyectivo. Pero éste puede ser identificado con el homomorfismo $(t, t) \longmapsto \text{Ad}(t, t)$ de D en $GL(\mathfrak{m})$, si N es su núcleo, donde N es un subgrupo normal de $G \times G$.

Entonces N centraliza a $\exp(\mathfrak{m})$ y por lo tanto $\exp(\mathfrak{h}_e \times \mathfrak{h}_e) \times C$ normaliza N , de esto se sigue que $\exp(\mathfrak{h}_e \times \mathfrak{h}_e) \exp(\mathfrak{m})^{(*)}$ genera al grupo conexo $G \times G$ viéndose de inmediato que $N \subset D$ es normal en $G \times G$, de donde $N = \{e\}$.

(*) NOTA: Puesto que $\mathfrak{g}_e \times \mathfrak{g}_e = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_e \times \mathfrak{h}_e$, el mapeo \exp es un difeomorfismo de una vecindad del $O \in \mathfrak{g}_e \times \mathfrak{g}_e$ en una vecindad del elemento idéntico $e \in G \times G$.

APENDICE B

CRONOGOMETRIA

Definamos primeramente la causalidad en un espacio vectorial lineal, considerando al espacio-tiempo como un espacio vectorial lineal de dimensión $n+1$, para después aplicar el concepto de causalidad a un contexto más general de modelación del espacio-tiempo como una variedad riemanniana o de tipo Lobachevski^(B1), para posteriormente desarrollar el concepto de causalidad sobre dichos espacios que son más generales que los euclidianos en la geometría.

Def.B.1. Sea E un espacio vectorial lineal $n+1$ -dimensional. E es causal si para todo $x \in E$, existe un cono convexo en E representando el futuro de x .

Fisicamente el cono representa el futuro de cada punto del espacio E .

Def.B.2. Un cono convexo en un espacio vectorial real E es un subespacio $C \subseteq E$ tal que $\forall x, y \in C$ y $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $ax + by \in C$. Tal cono es trivial si $C = E$ ó $C = \{0\}$; en otro caso se dice no trivial.

Def.B.3. (Causalidad). La causalidad en un espacio vectorial de espacio-tiempo, es la existencia de conos de luz cerrados y convexos para cada punto del espacio vectorial, representando fisicamente el futuro de todo punto del espacio vectorial.

El cono de luz C es un subespacio diferenciable del espacio vectorial E si y sólo si $\forall x \in C \subseteq E$, existe un conjunto finito

$$\Phi = \{f_i \in C^\infty(E) \mid f_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

(de funciones diferenciables en cada punto $x \in C \subseteq E$).

Debido a que la finalidad es utilizar una teoría de tipo no lineal, pues es la que describe de mejor forma a un universo isomorfo al espacio sideral, constituyamos a este como una variedad lisa (i.e. C^∞ en toda su extensión) excepto en un número finito de puntos donde radican las fuentes o sumideros materiales del universo (estrellas o galaxias), y dotado de una orientación causal infinitesimal.

Def.B.4. Una orientación causal infinitesimal en una variedad M es una asignación $p \mapsto C(p)$ de cada $p \in M$ a un cono de luz convexo cerrado no trivial (i.e. $\neq \{0\}$ ó M), $C(p) \in T_p(M)$, el cual definimos como el subespacio vectorial

$$C(p) = \{X_p \in T_p(M) \mid X \in C\}$$

Así mismo, la asignación a cada punto de un cono cerrado convexo en el espacio de cada punto de la variedad M , facilita la especificación de un futuro infinitesimal en el universo M , pues al menos en cada vecindad pequeña del universo M se puede determinar el conjunto de todas las direcciones futuras del punto.

Es decir, cada punto en una vecindad coordinada de M tiene todas sus direcciones futuras en el cono de luz (región infinitesimal de eventos futuros del punto). Esto equivale a decir que en cada punto p tiene una vecindad $U \subseteq M$ en la cual existe un sistema de coordenadas locales

(B1): Espacios geométricos no euclidianos y espacios topológicos más finos

$$x_1, \dots, x_n$$

y un conjunto finito de funciones continuas

$$\Phi = \{f_i \in C^0(M) \mid f_i: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}$$

tales que si elegimos un punto particular $q \in U$ y un vector tangente en el cono para el punto q : $X_q \in T_q(M)$ entonces cualquier vector tangente en q esta en el cono de q , es decir: $X_q \in C(p)$ si y solo si

$$X_q = \sum_k a_k (\partial/\partial x_k)_q, \quad f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0$$

para todo conjunto $\{\partial/\partial x_k\}_{1 \leq k \leq n}$; base canónica del espacio $T_q(M)$ y $f_i \in \Phi$.

Si la variedad M es diferenciable, excepto en un número finito de puntos (respectivamente analítica o algebraica), la orientación causal es también una orientación causal diferenciable (analítica o algebraica) excepto si esta está similarmente definida por un número finito de funciones $f_i \in C^\infty$ (respectivamente analíticas o algebraicas) excepto en el conjunto de puntos singulares.

Postulado. El cosmos está dotado con noción de causalidad.

Específicamente, (a) en cada punto del cosmos existe un cono convexo dado, de direcciones infinitesimales futuras en el espacio tangente a la variedad riemanniana que la representa, en cada punto. Así mismo sabemos que el cosmos es un espacio de Minkowski isomorfo al espacio $H(2)$, el cual a su vez es isomorfo a un grupo de Lie semisimple de tipo no compacto, cuya orientación causal es toda álgebra de Lie semisimple, (b) el futuro no puede emerger del pasado, es decir, no existe una trayectoria o curva cerrada en el futuro.

La aseveración de la convexidad de un cono futuro en el espacio tangente de cada punto del cosmos M no es una consideración de mera conveniencia técnica, pues está fundamentada por consideraciones de concepción general. Una consideración es que cualquier desplazamiento en el cosmos, el cual es el resultado de una sucesión de desplazamientos dentro del futuro, es en sí mismo un desplazamiento en el futuro.

Proposición. B.1. Sea $C(p) = \{X_p \in T_p(M) \mid X \in C\}$. $C(p)$ es convexo.

Prueba: Considérese el grupo causal subyacente en la variedad diferenciable M , cuya álgebra de Lie es el espacio vectorial de los campos direccionales C . Sean X y Y cualesquiera dos generadores infinitesimales de grupos de desplazamiento uniparamétricos en el futuro, es decir, grupos de la forma $\{e^{tX}\}$ generados por X , los cuales llevan a cada punto $p \in M$ (con M el cosmos) a un punto $q \in e^{tX}p(M)$ el cual es temporalmente precedido por p cuando $t > 0$. Entonces existe un arco γ_{ab} de p a q cuya trayectoria tangente en cada punto es en la dirección futura.

Entonces considerando la sucesión futura $(e^{tX/n} e^{tY/n})^n$ un desplazamiento en M , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{tX/n} e^{tY/n})^n = e^{tX} e^{tY} = e^{t(X+Y)}$$

cuyo generador es el elemento $X+Y$. Por lo tanto, si X y Y están en la dirección futura entonces también $X+Y$ está, lo cual significa que el conjunto de direcciones futuras infinitesimales en cada punto G es cerrado bajo adición, siempre con el evidente hecho de que tX está siempre en dirección futura, pues X es tal y $t > 0$. Finalmente esto significa que el conjunto de todas las direcciones futuras infinitesimales en cada punto expresado por el espacio vectorial $C(p)$ es convexo. \square

Def. B.5. Una orientación globalmente causal en un espacio topológico Hausdorff M es una relación transitiva $x \prec y$ definida para cualesquiera $x, y \in M$ llamada "presencia" en M ,

satisfaciendo además las propiedades del conjunto de puntos $(x, y) \in M \times M$ tal que $x \rightarrow y$ sea cerrada y que $x \rightarrow x \forall x \in M$.

Así mismo toda variedad riemanniana M tiene una orientación globalmente causal definida por el conoide $\Omega = \text{Lia}(K)$ con $K \subset G$ tal que $\forall e \in K, K^2 \subset K$ y G semisimple. Dicho conoide puede ser descrito formalmente como el espacio

$$\Omega = \text{Lia}\{yx^{-1} \in K \mid ax \rightarrow sy \forall e \in G\}$$

Tal orientación es G -invariante si y solo si $aks^{-1} \subset K \forall e \in G$

EL UNIESPACIO
(CUBRIENTE UNIVERSAL)

Def. C.1. Sea M una variedad Riemanniana, conexa y completa. Definimos \tilde{M} el cubriente universal de M (uniespacio de M) como el espacio cubriente cuyo grupo de transformaciones causales y conformes es un grupo universal.

Proposición.C.1. Sea \tilde{M} el uniespacio de M , donde M es isomorfa a \mathbb{R}^4 es el cosmos.
Si \tilde{M} esta hecho todo de energía entonces M es todo de energía.

Prueba: Sea \tilde{M} un cubriente universal del cosmos M , este es isomorfo localmente a un espacio de Minkowski $(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^3)$ ó $(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4)$ (c1) cuyas componentes conexas son grupos de Lie compactos y no compactos. Entonces dichos conjuntos de transformaciones del espacio forman un conjunto de generadores temporales (c2) (es decir, energías) (subvariedades del espacio sideral), y debido a que este cubriente universal cubre homeomórficamente a todo el cosmos (es decir , en cada punto del cosmos M existe una fibra del haz tangente fibrado $\xi_\tau \otimes \mathbb{N}$ cuya conexión(c3) es una C- forma lineal) entonces se concluye que el cosmos esta hecho de energía. Dicha energía cambia según el parámetro τ de tiempo definido por la dirección del fotón, según la mecánica cuántica y teoría de Spinores. \square

De la demostración anterior surgen como naturales las siguientes cuestiones:

¿Cuál es el grupo de Lie isomorfo a dicho espacio cubriente universal ? El grupo de Lie \tilde{G} de acciones causales sobre \tilde{M} . Para la teoría de sistemas en espacios de Hilbert, los grupos de Lie son espacios de resolución cuyas acciones causales son operadores de resolución en E^1 .

¿ Por qué se necesita ? Se necesita para establecer que \tilde{G} (el grupo de Lie de \tilde{M}) actúa causalmente sobre el uniespacio \tilde{M} . De esta manera, si G actúa causalmente sobre M y \tilde{G} sobre \tilde{M} , se puede establecer un conjunto de morfismos causales conocidos como automorfismos causales de $G \rightarrow \tilde{G}$ y $M \rightarrow \tilde{M}$ respectivamente, lo cual finalmente ayuda a establecer un comportamiento endomórfico para la composición de cualquier transformación con la transformación de Lorentz. La transformación de Lorentz en una transformación causal.

(C1) Pues son idénticos como variedades causales localmente.

(C2) En cada punto de \tilde{G} " El grupo cubriente de G " donde G es el grupo de Lie isomorfo a la variedad de M existe un grupo uniparamétrico cuyos elementos ó acciones son operadores de evolución.

(C3) Y calibra los desplazamientos por la presencia de materia.

EL ALGEBRA NO SIMÉTRICA \mathfrak{L}_4

D.1. Introducción y discusión general.

El estudio del universo nos lleva a que el álgebra de Lie que corresponde al grupo de Lie semisimple que subyace en la variedad riemanniana que modela al espacio es un álgebra no simétrica cuyo grupo correspondiente es un grupo de tipo no compacto y no abeliano.

Sin embargo para las aplicaciones de control y manipulación de señales, así como su medida en los instrumentos de lectura de un panel de mando; aunado el hecho de aceptar el lema del uniespacio o espacio cubriente universal del cosmos, es deseable obtener una representación de éste grupo semisimple en un álgebra de Lie, que aun siendo de tipo no simétrico en la dimensión del espacio de Minkowski, éste admita una descomposición en álgebras de Lie de menor dimensión que sean simétricas y de tipo compacto.

Este álgebra de Lie no simétrica debe ser isomorfa a un haz vectorial fibrado cuyas fibras sean los vectores tangentes en cada punto de las líneas de fuerza (subvariedades integrales) del campo que se desea controlar a voluntad (crear o destruir) y que tenga todas las características de conexión del campo no simétrico general. Aceptando la teoría de " calibres " debida a H. Weyl y la gran teoría de unificación de fuerzas en la electrodinámica cuántica, se puede deducir que el campo que tenga ésta propiedad de representación del campo general es el campo electromagnético.

D.2 $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{H}(M)$

Sea G un grupo reductivo real cuya álgebra de Lie correspondiente $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus i(\mathbb{R}^4)$ y $U(\mathfrak{g})$ el álgebra envolvente universal correspondiente de G ; cuya subálgebra simétrica compacta es

$$S(\rho) = U(\rho) / [\rho, \rho]$$

Sea M isomorfa a \mathbb{R}^4 una variedad diferenciable con métrica Lorentziana (i.e. pseudoriemanniana) g sobre \mathbb{R}^4 de $\text{Diag}(g) = (1, 1, 1, -1)$ en el sistema de coordenadas canónicas

$$\phi(V, \{x, y, z, t\})$$

y consideremos a los módulos \mathfrak{F}_1 y \mathfrak{H} como \mathbb{R} -módulos, es decir, módulos pertenecientes al anillo conmutativo con elemento identidad \mathbb{R} entonces

$$\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{H} = \{F \in \Omega^2(M) \mid \mathfrak{L}F = F\}$$

donde $\mathfrak{L} = \mathcal{O}(1, 3) \subset GL(\mathbb{R}^4)$, es decir,

$$\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{H} / [F_1, F_2] = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{H} / \mathcal{J} = (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{H}) = \wedge \mathfrak{F}_1(M) \wedge \mathfrak{F}_1(M) \circ$$

puesto que

$$\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{H} = \{F_1 \otimes F_2 - F_2 \otimes F_1 - [F_1, F_2]\}$$

Considérese el anillo conmutativo con elemento identidad \mathbb{R} . Sean \mathfrak{F}_1 y \mathfrak{H} los \mathbb{R} -módulos definidos explícitamente como:

$$\mathfrak{F}_1 = \{E \in \mathfrak{E}(M) \mid E^b = -i \partial / \partial t F\}$$

$$\text{y } \mathfrak{H} = \{B \in \mathfrak{E}(M) \mid B^b = -i \partial / \partial t *F\}$$

Proposición. D.1. Dichos \mathbb{R} -módulos son invariantes bajo los movimientos euclidianos del grupo $\mathcal{O}(1, 3)$ y por lo cual son \mathfrak{L} -módulos.

Prueba: Por definición

$$\mathfrak{F}_1 = \{E \in \mathfrak{E}(M) \mid E^b = -i \partial / \partial t F\}$$

Luego $\forall A \in \mathfrak{L}$ definido por la correspondencia

$$A : F \mapsto A^* F$$

se tiene que

$$A(F) = A^*(\partial / \partial t)F$$

de donde

$$(E^*)^b = -i_{A^*}(\partial / \partial t)A^* F$$

$$= A^*(-i \partial / \partial t F) = A^* E^b$$

pero $(E^*)^b = A^* E^b \in \mathfrak{F}_1$, entonces $\mathfrak{L} \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1$. Luego \mathfrak{F}_1 es un \mathfrak{L} -módulo (módulo \mathfrak{L} invariante). Análogamente, si

$$\mathfrak{H} = \{B \in \mathfrak{E}(M) \mid B^b = -i \partial / \partial t *F\}$$

es claro que $\mathfrak{L} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ por lo cual \mathfrak{H} es un \mathfrak{L} -módulo bajo A en el álgebra de Banach a a $a(M) \square$.

Proposición. D.2. El espacio electrodinámico $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{H}$ es un álgebra cerrada bajo la ley de composición $[,]$.

Prueba: En efecto, sean $F_1 = \nabla_a^1 A_b^1 - \nabla_b^1 A_a^1$, $F_2 = \nabla_a^2 A_b^2 - \nabla_b^2 A_a^2 \in \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{H} \forall A \in U(1) \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{H}_p$

$\forall p \in M \rightarrow \mathbb{R}^4$. Entonces la composición $[F_1, F_2]$ toma la forma en función de las $U(1)$ -
haz conexiones:

$$\begin{aligned}
 [F_1, F_2] &= (\nabla_a^1 A_b^1 - \nabla_b^1 A_a^1)(\nabla_a^2 A_b^2 - \nabla_b^2 A_a^2) - (\nabla_a^2 A_b^2 - \nabla_b^2 A_a^2)(\nabla_a^1 A_b^1 - \nabla_b^1 A_a^1) \\
 &= \nabla_a^1 A_b^1 \nabla_a^2 A_b^2 - \nabla_b^1 A_a^1 \nabla_a^2 A_b^2 - \nabla_a^1 A_b^1 \nabla_b^2 A_a^2 + \nabla_b^1 A_a^1 \nabla_b^2 A_a^2 - (\nabla_a^2 A_b^2 \nabla_a^1 A_b^1 - \\
 &\quad \nabla_b^2 A_a^2 \nabla_a^1 A_b^1 - \nabla_b^1 A_a^1 \nabla_a^2 A_b^2 + \nabla_b^2 A_a^2 \nabla_b^1 A_a^1) \\
 &= \nabla_a^1 A_b^1 (\nabla_a^2 A_b^2 - \nabla_b^2 A_a^2) - \nabla_b^1 A_a^1 (\nabla_a^2 A_b^2 - \nabla_b^2 A_a^2) - [\nabla_a^2 A_b^2 (\nabla_a^1 A_b^1 - \nabla_b^1 A_a^1) - \\
 &\quad - \nabla_b^2 A_a^2 (\nabla_a^1 A_b^1 - \nabla_b^1 A_a^1)] - \nabla_a^1 A_b^1 \nabla_b^2 A_a^2 - \nabla_a^1 A_b^1 \nabla_a^2 A_b^2 - \nabla_b^1 A_a^1 \nabla_b^2 A_a^2 + \\
 &\quad + \nabla_b^1 A_a^1 \nabla_b^2 A_a^2 - \nabla_a^2 A_b^2 \nabla_a^1 A_b^1 + \nabla_a^2 A_b^2 \nabla_b^1 A_a^1 + \nabla_b^2 A_a^2 \nabla_a^1 A_b^1 - \nabla_b^2 A_a^2 \nabla_b^1 A_a^1 \\
 &\quad = \nabla_b^1 A_a^1 \nabla_b^2 A_a^2 + \nabla_b^2 A_a^2 \nabla_b^1 A_a^1
 \end{aligned}$$

puesto que $F_{ab} = -F_{ba}$ en \mathbb{R}^4 entonces

$$\nabla_b^1 A_a^1 \nabla_b^2 A_a^2 + \nabla_b^2 A_a^2 \nabla_b^1 A_a^1 = \nabla_a^1 A_b^1 \nabla_a^2 A_b^2 - \nabla_b^2 A_a^2 \nabla_b^1 A_a^1 \in \overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}}$$

por lo cual $[F_1, F_2] \in \overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}} \forall F_1, F_2 \in \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H} \square$

Proposición. D.3. El álgebra cerrada $(\overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}}, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie.

Prueba: $[F, F] = \nabla_a A_b \nabla_b A_a - \nabla_b A_a \nabla_a A_b - [\nabla_a A_b \nabla_b A_a - \nabla_b A_a \nabla_a A_b] = 0$. Luego las demás propiedades de álgebra de Lie se satisfacen trivialmente. Por lo tanto $\overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}}$ tiene estructura de un álgebra de Lie bajo la operación $[\cdot, \cdot]$. \square

Proposición. D.4. $\overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}}$ es un haz vectorial fibrado, cuyas fibras son los vectores tangentes en cada punto de las líneas del campo electromagnético (geodésicas).

Prueba: Puesto que como álgebra de Lie el espacio $\overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}(M)}$ satisface $\overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}} \cong T_o(\mathbb{E}(M)) \times \mathbb{E}(M) \cong T_o(\mathbb{E}(M)) \times T_o(\mathbb{E}(M)) \forall e \in \mathbb{E}(M)$, entonces a lo largo de toda la variedad, $\forall p \in M$,

$$\bigcup_{p \in M} [T_o(\mathbb{E}(M)) \times T_o(\mathbb{E}(M))]_p = T\mathbb{E}(M)$$

Por lo cual $\overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}(M)} \cong T\mathbb{E}(M)$. De donde entonces por la proposición .D.1. $\overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}(M)}$ es el haz vectorial fibrado de los vectores tangentes $E^b = -1 \partial/\partial t F$ y $B^b = -1 \partial/\partial t {}^*F$ los cuales son vectores en \mathbb{R}^3 y son las fibras del espacio $T\mathbb{E}(M)$ cuyas secciones son los campos $E, B \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$. \square

Proposición. D.5. $\overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}}$ es un álgebra involutiva.

Prueba: Basta tomar todas las líneas de fuerza del campo electromagnético, las cuales son subvariedades integrales, (soluciones de las ecuaciones diferenciales sobre cada sección del haz vectorial $\overline{\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{H}}$, según el teorema de Frobenius) de la variedad hiperbólica $M \cong \mathbb{R}^4$ donde está sentado el haz $T\mathbb{E}(M)$ y demostrar que las secciones $E, B \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$ satisfacen la propiedad de álgebra involutiva. Pero esto es trivial según la proposición. D.3. \square

Paralajes

El concepto de *distancia* suele substituirse por el de *paraleje*. En astronomía estelar se designa así el ángulo, siempre muy pequeño, bajo el cual se vería la *unidad astronómica de distancia* desde la estrella. Esta unidad se define a su vez como el radio de la órbita circular que describiría alrededor del sol un planeta de masa despreciable, sustraído a cualquier perturbación, y cuyo periodo de traslación, expresado en días medios, fuese:

$$R_0 = 365d, 25309 83263$$

(El semieje mayor de la órbita terrestre mide 1,000 000 23 unidades astronómicas.)
 La paralaje se expresa en segundos de arco; si es igual a un segundo, la correspondiente distancia r_0 vendrá dada por:

$$\frac{a}{r_0} = \text{sen } 1'' = \frac{1}{203 265},$$

siendo a la unidad astronómica de distancia, o sea:

$$149,5 \times 10^6 \text{ km};$$

y se tendrá:

$$\begin{aligned} r_0 &= 203265 \times 149,5 \times 10^6 \text{ km.} \\ &= 30,84 \times 10^{12} \text{ km.} \end{aligned}$$

En distancia r_0 se toma como unidad de distancia en astronomía estelar y se le denomina *parsec* (distancia correspondiente a una *paralaje* de un segundo); si π es la paralaje de una estrella en segundos de arco, y r su distancia en parsecs, se tiene:

$$r \times \text{sen } \pi = \text{sen } 1''.$$

$$r \times \pi = 1.$$

Un año-luz vale 0,307 parsecs (el año-luz es una verdadera unidad de distancia, mientras que el parsec sólo sirve para expresar distancias *relativas*, independientes de todo patrón material)

APENDICE F

TRANSFORMADA DE RADON DE LA DOBLE FIBRACION.

F.1. La doble fibricación en el problema de generalización de la transformada de Radon.

Sea G un grupo localmente compacto, N, Ξ dos espacios de clases de G , a saber

$$X = G/H_X, \quad \Xi = G/H_\Xi \quad (1)$$

donde H_X y H_Ξ son subgrupos cerrados de G . Entonces son validas las siguientes afirmaciones:

(i). Los grupos $G, H_\Xi, H_X, H_X \cap H_\Xi$ son todos unimodulares.

(ii). Si $h_X H_\Xi \subset H_\Xi H_X$ entonces $h_X \in H_\Xi$

Si $h_\Xi H_X \subset H_X H_\Xi$ entonces $h_\Xi \in H_X$

(iii). El conjunto $H_X H_\Xi \subset G$ es cerrado.

Notese que (iii) es satisfecho si uno de los subgrupos H_Ξ, H_X es compacto.

Todas estas afirmaciones son satisfechas para ambos espacios de clases X y Ξ asi definidos.

Asi mismo, dos elementos $x \in X$ y $\xi \in \Xi$ se dicen ser incidentes si como clases en G estos se intersectan. Por lo cual definimos explicitamente

$$\underline{x} = \{\xi \in \Xi \mid x \text{ y } \xi \text{ inciden}\}$$

$$\underline{\xi} = \{x \in X \mid x \text{ y } \xi \text{ inciden}\}.$$

Usando la notacion $A^g = gA^{-1}g^{-1}, g \in G, A \subset G$ consideremos el siguiente lema:

Lema. F1. Sea $g \in G, x = gH_X, \xi = gH_\Xi$. Entonces

a). x es una órbita de $(H_X)^g$ y tenemos la correspondiente identificación de espacios de clases

$$\underline{x} = (H_X)^g / (H_X \cap H_\Xi)^g$$

b). ξ es una órbita de $(H_\Xi)^g$ y tenemos la correspondiente identificación de espacios de clases

$$\underline{\xi} = (H_\Xi)^g / (H_X \cap H_\Xi)^g$$

Prueba: Por definición

$$\underline{x} = \{h_X H_\Xi \mid h_X H_\Xi \cap gH_X \neq \emptyset\} \quad (2)$$

lo cual podemos reescribir como

$$\underline{x} = \{gh_X H_\Xi \mid h_X \in H_X\}.$$

Esta es la órbita del punto gh_Ξ en Ξ bajo el grupo $gH_X g^{-1}$. El subgrupo que deja fijo el punto gh_Ξ es $(gH_\Xi g^{-1}) \cap (gH_X g^{-1})$. Esto demuestra a). Para el inciso b), se sigue la misma demostración, definiendo a la clase $\underline{\xi}$ en forma analoga a (2). \square

Sean $x_0 = \{H_X\}$ y $\xi_0 = \{H_\Xi\}$ denotando los orizontes en X y Ξ respectivamente. Entonces por (2) se tiene que

$$\underline{x} = g \cdot \underline{x}_0, \quad \underline{\xi} = g \cdot \underline{\xi}_0$$

donde el punto \cdot denota la acción del grupo G sobre el espacio homogéneo X y sobre el espacio homogéneo Ξ respectivamente.

Lema B.2. Los mapeos $x \rightarrow \underline{x}$ y $\xi \rightarrow \underline{\xi}$ son inyectivos.

Prueba: Supóngase que $x_1, x_2 \in X, \underline{x}_1 = \underline{x}_2$. Sean además $g_1, g_2 \in G$ tales que $x_1 = g_1 \cdot H_X, x_2 = g_2 \cdot H_X$. Entonces por (2) $g_1 \cdot \underline{x}_0 = g_2 \cdot \underline{x}_0$, tal que escribiendo $g = g_1^{-1} g_2$ tenemos que

$$g \cdot \underline{x}_0 = \underline{x}_0.$$

En particular, $g = \xi_0 \in \underline{x}_0$, tal que si \underline{x}_0 es la órbita de $\xi_0 \in \Xi$ bajo H_X se tiene que

$$g \cdot \xi_0 = h_X \xi_0$$

para alguna $h_X \in H_X$, donde $h_X^{-1} g \in h_X \in H_X$. Se sigue que $h_X \cdot \underline{x}_0 = \underline{x}_0$ tal que

$$h_X H_X \cdot \xi_0 = H_X \cdot \xi_0$$

tal que $h_X H_X \subset H_X H_X$. Por la afirmación (ii) de la unimodularidad $h_X \in H_X$, lo cual nos permite tener que $x_1 = x_2$. Lo cual demuestra la inyectividad de ambos mapeos. \square

En virtud de este lema, los espacios homogéneos X y Ξ son espacios homogéneos del mismo grupo G tal que cada punto en Ξ puede ser visto como una clase en X y cada punto de X puede ser visualizado como una clase de Ξ . De esta manera X y Ξ se dicen ser espacios homogéneos en dualidad (Problema de dualidad en geometría integral).

Los mapeos $x \rightarrow \underline{x}$ y $\xi \rightarrow \underline{\xi}$ son también convenientemente descritos por el significado de la siguiente doble fibrición,

$$\begin{array}{ccc} G/(H_X \cap H_\Xi) & & \\ p \downarrow & \cong \pi & \downarrow \\ X = G/H_X & & \Xi = G/H_\Xi \end{array} \quad (3)$$

donde los mapeos p y π son dados por $p(gH_X \cap H_\Xi) = gH_X, \pi(gH_X \cap H_\Xi) = gH_\Xi$. Entonces por (2) se tiene que

$$\underline{x} = \pi(p^{-1}(x)), \quad \underline{\xi} = p(\pi^{-1}(\xi)).$$

F.II. La transformada de Radon para la doble fibrición.

De acuerdo con la afirmación de unimodularidad dada anteriormente, fijemos medidas invariantes dg, dh_X, dh_Ξ y dh sobre los grupos G, H_X, H_Ξ y $H = H_X \cap H_\Xi$, respectivamente. Por el teorema de existencia para medidas invariantes sobre espacios homogéneos existe una única H_X -medida $d\mu = d(h_X)_H$ sobre $\underline{x}_0 = H_X/H$ satisficndo

$$\int_{\underline{x}_0} f(h_X) dh_X = \int_{\underline{x}_0} \left(\int_H f(h_X \cdot h) dh \right) d\mu(h_X H) \quad (4)$$

$\forall f \in C_c(H_X)$. Similarmente, esta definida una H_Ξ -medida invariante $d\nu$ sobre $\underline{\xi}_0 = H_\Xi/H$. Por traslaciones podemos obtener una medida invariante consistentemente definida sobre cada clase \underline{x}_0 .

Lema B.3. Existe una medida no nula sobre cada \underline{x} , coincidiendo con $d\mu$ sobre \underline{x}_0 tal que $g \cdot \underline{x} = \underline{x}_0$ corresponden dondequiera bajo g .

Prueba: Si $\underline{x} = g \cdot \underline{x}_0$ transferimos la medida $d\mu$ sobre \underline{x}_0 subyacente a \underline{x} debido al homeomorfismo $\underline{x} \rightarrow g \cdot \underline{x}$. Esta da una medida $(H_X)^{-1}$ -invariante sobre \underline{x} , pero por un lado tales medidas son solo determinadas salvo un factor constante al cual puede demostrarse independiente de la elección de g . Pero si $g' \cdot \underline{x}_0 = g \cdot \underline{x}_0$ tenemos que $(g \cdot \underline{x}_0) = (g' \cdot \underline{x}_0)$. Por el lema B. 2.,

$$g \cdot \underline{x}_0 = g' \cdot \underline{x}_0$$

de donde $g \in H_X$. Siendo $d\mu$ sobre \underline{x}_0 H_X -invariante el lema se sigue.

Las medidas sobre \underline{x} y $\underline{\xi}$ definidas por el lema B.3. pueden ser denotadas por $d\mu$ y $d\mu$ respectivamente. También denotemos por $d\mu_{H_X}$ y $d\mu_{H_\Xi}$ las medidas G -invariantes sobre X y Ξ respectivamente, las cuales son normalizadas por las relaciones

$$\int_G F(g) dg = \int_X \left(\int_{H_X} F(gh_X) dh_X \right) d\mu_{H_X} \quad (5)$$

$$\int_G \phi(g) dg = \int_\Xi \left(\int_{H_\Xi} F(gh_\Xi) dh_\Xi \right) d\mu_{H_\Xi} \quad (6)$$

Por simplicidad tengamos que $dx = d\mu_{H_X}$ y $d\xi = d\mu_{H_\Xi}$ entonces definimos la transformada de Radon $f \rightarrow \hat{f}$ y su dual $\phi \rightarrow \hat{\phi}$ por las fórmulas

$$\hat{f}(\xi) = \int_X f(x) d\mu(x), \quad \hat{\phi}(x) = \int_\Xi \phi(\xi) d\mu(\xi) \quad (7)$$

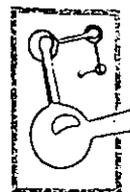
para $f \in C_c(X)$, $\phi \in C_c(\Xi)$.

Proposición B.1. Sea $f \in C_c(X)$, $\phi \in C_c(\Xi)$. Entonces \hat{f} y $\hat{\phi}$ son continuas y

$$\int_X \hat{f}(x) \hat{\phi}(x) dx = \int_\Xi \hat{f}(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi$$

REFERENCIAS

- [1] Chevalley, A. "Theory of Lie Groups" Princeton University, Princeton N. J., 1946.
- [2] Dieudonné, J. "Treatise on Analysis" Vol. IV. Academic Press, N. Y., 1974.
- [3] Dieudonné, J. "Treatise on Analysis" Vol. V. Academic Press, N. Y., 1976.
- [4] Eddington, A. Observatory, 58, 37.
- [5] Einstein, A. "The Meaning of Relativity" Princeton University, Princeton N. J., 1950.
- [6] Fedintsch, A. "System Theory a Hilbert Space Approach" Academic Press, N. Y., 1982.
- [7] Flódorov, N. "Fundamentos de Electrodinámica Clásica" Mir Moscú, 1982.
- [8] Gelfand "Generalized Functions" Vol. I. Academic Press, N. Y., 1952.
- [9] Gelfand "Generalized Functions" Vol. V. Academic Press, N. Y., 1952.
- [10] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. "The Large Scale Structure of Space-Time" Cambridge University, Cambridge Press, 1973.
- [11] Helgason, S. "Differential Geometry and Symmetric Spaces" Academic Press, N. Y., 1962.
- [12] Helgason, S. "The Radon Transform" Academic Press, N. Y., 1972.
- [13] Helgason, S. "Integral Geometry, Groups and Analysis" Academic Press, N. Y., 1982.
- [14] Kobayashi, S. and Nomizu, K. "Foundations of Differential Geometry" Vol. I. Interscience Publisher John Wiley and Sons, N. Y., 1969.
- [15] Kobayashi, S. and Nomizu, K. "Foundations of Differential Geometry" Vol. II. Interscience Publisher John Wiley and Sons, N. Y., 1969.
- [16] Landau, L. D. and Lifschitz, E. M. "The Classical Theory of Fields" Pergamon Oxford, 1971.
- [17] Marsden, J. E. and Abraham, R. "Manifolds, Tensor Analysis and Applications" Addison-Wesley, Massachusetts, 1983.
- [18] Milnor, J. "Topology from the Differential Viewpoint" University of Virginia, 1965.
- [19] Rudin, W. "Functional Analysis" Academic Press, N. Y., 1970.
- [20] Rudin, W. "Real and Complex Analysis" Academic Press, N. Y., 1966.
- [21] Schwarzschild, M. "Structure and Evolution of the Stars" Dover Publications, 1958.
- [22] Segal, I. E. "Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy" Academic Press, 1974.
- [23] Shimura, K. "Hiperbolic Manifolds" Princeton University, Princeton N. J., 1967.
- [24] Shklovski, J. S. "Soviet Astronomy" Moscow, 1967.
- [25] Simon, B. and Reed, M. "Methods of Modern Mathematical Physics (I. FUNCTIONAL ANALYSIS)" Academic Press, N. Y., 1970.
- [26] Tijonov, V. and Zamarski, K. "Ecuaciones de la Física Matemática" Mir Moscú, 1980.
- [27] Weinberg, S. "The First Three Minutes" Basic Books, N. Y., 1977.
- [28] Weyl, H. "Raum, Zeit, Materie" Springer, 1918.



INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Noviembre 28, 2000

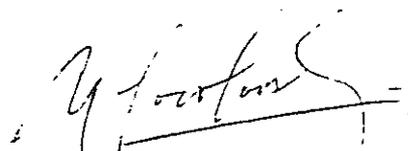
Dr. Federico Sánchez
Coordinador de Posgrado de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Presente

Me dirijo a usted en relación con el trabajo "Transformada de Radón y Curvatura",
presentado por el Mat. Francisco Bulnes como Tesis de Maestría en el Departamento de
Matemáticas de la Facultad de Ciencias.

Luego de leer el manuscrito, he hecho algunas sugerencias de cambios menores en su
Capítulo IV, donde se realiza una aplicación a la medición de la curvatura de un modelo de
Universo.

Considero que el trabajo satisface los requisitos para la obtención de dicho grado.

Atentamente,



Dr. Miguel Socolovsky

c.c.p. Dr. Fernando Brambila



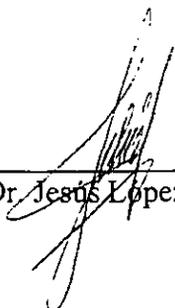
REPUBLICA NACIONAL
ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Cd. Universitaria
04510 México D. F.

Dr. Fernando Brambila Paz
Profesor-Investigador
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
P r e s e n t e:

Después de haber leído cuidadosamente el trabajo de tesis "*TRANSFORMADA DE RADON Y LA CURVATURA DEL UNIVERSO*", que para obtener el grado de Maestría en Ciencias (Matemáticas) presenta el **Mat. Francisco José Bulnes Aguirre**, bajo su dirección. Y también de haber tenido varias sesiones de exposición sobre dicho trabajo, por parte del sustentante, me permito comunicarle que tal trabajo de tesis reúne todos los méritos de una tesis de maestría en Matemáticas.

Atenta mente,
Cd. Universitaria, a 22 de mayo de 2001.


Dr. Jesús López Estrada



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

20 de Mayo de 2001
Facultad de Ciencias, UNAM
México D.F.

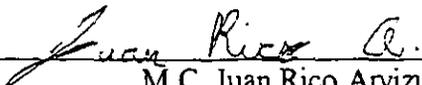
Dr. Fernando Brambila Paz
PRESENTE:

Reciba un cordial saludo de mi parte. Le escribo en relación al trabajo del Matemático Francisco Bulnes, **Transformada de Radon y Curvatura**, trabajo de investigación que será presentado por el Mat. Bulnes para obtener el grado de Maestro en Ciencias.

Considero que el material es lo suficientemente completo para considerarse una tesis de maestría. Por mi parte estoy muy conforme con el contenido del trabajo y doy mi aprobación a dicho trabajo.

Sin mas por el momento me despido.

Atte.


M.C. Juan Rico Arvizu
Profesor de la Facultad de Ciencias.



REPÚBLICA NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

INSTITUTO DE MATEMATICAS

AREA DE LA INVESTIGACION CIENTIFICA
CIRCUITO EXTERIOR
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO, D. F. C. P. 04510
<http://www.matem.unam.mx>

21 de Mayo de 2001

Dr. Fernando Brambila Paz
Profesor-Investigador
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
U. N. A. M.

Estimado Dr. Brambila:

Por este conducto me permito comunicarle lo siguiente: el haber tenido acceso al manuscrito de la que sería la Tesis de Maestría del Sr. Mat. Francisco José -- Bulnes Aguirre, de buena hora, me dió la oportunidad de poder apreciar sus bondades como trabajo exigido para obtener el Grado de Maestro en Ciencias (en Matemáticas) en nuestra Facultad de Ciencias.

La versión final, que ahora tengo a la mano, me parece más accesible, lo que permitirá a los estudiosos leer con mayor facilidad el Capítulo IV, MEDICION DE LA -- CURVATURA DE UN UNIVERSO MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE RADON y encontrar una clara exposición de las ideas del autor. Estas consideraciones me hacen pensar que este trabajo es suficiente para obtener el Grado de Maestro en Ciencias (en Matemáticas) de nuestra Facultad.

Agradeciendo la atención que se sirva prestar a la presente, que de usted atto. y s. s.

Dr. Félix Recillas Juárez

FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento de Matemáticas



Dr. Fernando Brambila Paz
Presente:

Por este medio hago de su conocimiento que he leído el trabajo "Transformada de Radon y curvatura" que realizó el Mat. Francisco José Bulnes Aguirre y considero que satisface los requisitos para la obtención del grado de Maestría.

Sin otro asunto, quedo de usted

Atentamente
Cd. Universitaria, D. F., a 29 de mayo de 2001

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Flor de María Aceff Sánchez', written over a horizontal line.

Dra. Flor de María Aceff Sánchez
Profra. de T. C. del
Departamento de Matemáticas



FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

REPÚBLICA NACIONAL
ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

Exp. núm. 55
V. A. DEP. 06

JEFE DE LA DIVISIÓN
DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Presente.

En contestación a su OFICIO FCIE/DEP/ 0853/01 de fecha 20 de Junio del
2001, me permito informarle que después de haber revisado el
trabajo presentado por el(a) Mat. Francisco Bulnes Aguirre

titulado "Transformada de Radon y la Curvatura de un Universo"

considero que Si reúne los méritos necesarios para obtener el grado de Maestro
SI/NO
en Ciencias Matemáticas

Atentamente.

Dr. Fernando Brambila Paz
Grado, nombre completo y firma

Departamento de Matemáticas de Facultad de Ciencias UNAM
Lugar de trabajo

Fecha 25/VI/01



FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Exp. núm. 55
V. A. DEP. 05

JEFE DE LA DIVISIÓN
DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Presente.

En contestación a su OFICIO FCIE/DEP/CEP3/01 de fecha 20 de Junio del
2001

me permito informarle que después de haber revisado el
trabajo presentado por el(a) Mat. Francisco Bulnes Aguirre

titulado "Transformada de Radon y la Curvatura de un Universo"

considero que SI reúne los méritos necesarios para obtener el grado de Maestro
SI/NO
en Ciencias Matemáticas

Atentamente.

Dr. Jesús López Estrada
Grado, nombre completo y firma

Departamento de Matemáticas de Facultad de Ciencias UNAM
Lugar de trabajo

Fecha 26/VI/01



FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

REPÚBLICA NACIONAL
ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

Exp. núm. 55
V. A. DEP. 05

JEFE DE LA DIVISIÓN
DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Presente.

En contestación a su OFICIO FCIE/DEP/ 0853/01 de fecha 20 de junio del
2001, me permito informarle que después de haber revisado el
trabajo presentado por el(a) Mat. Francisco Bulnes Aguirre

titulado "Transformada de Radon y la Curvatura de un Universo"

considero que Si reúne los méritos necesarios para obtener el grado de
Maestro SI/NO
en Ciencias Matemáticas

Atentamente.

Dr. Miguel Soccolovski Vajovsky

Grado, nombre completo y firma

Instituto de Ciencias Nucleares UNAM

Lugar de trabajo

Fecha 25/VI/01



FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Exp. núm. 55
V. A. DEP. 05

JEFE DE LA DIVISIÓN
DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Presente.

En contestación a su OFICIO FCIE/DEP/ 0857/01 de fecha 20 de Junio del
2001

, me permito informarle que después de haber revisado el
trabajo presentado por el(a) Mat. Francisco Bulnes Aguirre

titulado "Transformada de Radon y la Curvatura de un Universo"

considero que Si reúne los méritos necesarios para obtener el grado de Maestro
SI/NO
en Ciencias Matemáticas

Atentamente.

M. en C. Agustín Ontiveros Fineda

Grado, nombre completo y firma

Departamento de Matemáticas de Facultad de Ciencias UNAM

Lugar de trabajo

Fecha 25/VI/01



FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Exp. núm. 55
V. A. DEP. 05

JEFE DE LA DIVISIÓN
DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Presente.

En contestación a su OFICIO FCIE/DEP/0853/01 de fecha 20 de Junio del
2001

, me permito informarle que después de haber revisado el
trabajo presentado por el(a) Mat. Francisco Bulnes Aguirre

titulado "Transformada de Radon y la Curvatura de un Universo"

considero que Si reúne los méritos necesarios para obtener el grado de
Maestro SI/NO Matemáticas
en Ciencias

Atentamente.

Dr. Félix Recillas Juárez

Félix Recillas Juárez

Grado, nombre completo y firma

Instituto de Matemáticas UNAM

Lugar de trabajo

Fecha 25/VI/01



FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Exp. núm. 55
V. A. DEP. 05

JEFE DE LA DIVISIÓN
DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Presente.

En contestación a su OFICIO FCIE/DEPI 0853/01 de fecha 20 de Junio del
2001

me permito informarle que después de haber revisado el
trabajo presentado por el(a) Mat. Francisco Bulnes Aguirre

titulado "Transformada de Radon y la Curvatura de un Universo"

considero que Si reúne los méritos necesarios para obtener el grado de Maestro
SI/NO
en Ciencias Matemáticas

Atentamente.

M. en C. Juan Rico Arvizu Juan Rico A.
Grado, nombre completo y firma

Departamento de Matemáticas de Facultad de Ciencias UNAM
Lugar de trabajo

Fecha 25/VI/01