



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA PROPAGACION DE UN HAZ
DE LUZ EN UN MEDIO DIELECTRICO

T E S I S

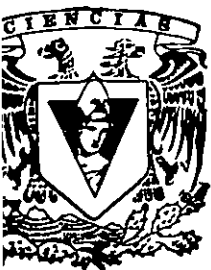
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C A

P R E S E N T A :

ELIZABETH MARTINEZ GOMEZ

295732



ASESOR: DR. LUIS FERNANDO MAGAÑA SOLIS



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Estudio de la propagación de un haz de luz en un medio dieléctrico"

realizado por **MARTINEZ GOMEZ ELIZABETH**

con número de cuenta **9450354-4**, pasante de la carrera de **Física**.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

[Firma]
DR. LUIS FERNANDO MAGARA SOLIS

Propietario

DR. ARTURO ZURIGA SEGUNDO

Propietario

DR. PABLO DE LA MORA Y PALOMAR ASKINASY

Suplente

DR. GERARDO JORGE VAZQUEZ FONSECA

Suplente

M. EN C. MARCELA DOLORES GREYHER GONZALEZ

Consejo Departamental de Física

[Firma]
DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENAGHE
Coordinadora de Licenciatura



FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

No debo buscar mi dignidad en el espacio, sino en el gobierno de mi pensamiento. No tendré más aunque posea mundos. Si fuera por el espacio, el universo me rodearía y se me tragaría como un átomo, pero por el pensamiento yo abrazo el mundo.

Blaise Pascal, Pensées



A mis padres:

Elizabeth y Gerardo por darme la oportunidad de habitar este planeta y enseñarme que la vida es el tesoro más preciado que existe.

A mi hermano:

Gerardo (o Reno) por todo el amor y apoyo incondicional que me ha brindado desde que tengo uso de razón

A mis abuelitas, tíos y primos:

Por los útiles consejos que han acercado la luz a mi camino.

A mis profesores y amigos:

Por las múltiples enseñanzas y el cariño que me han dado y demostrado desde que comencé la carrera.



Agradecimientos

Dedicaré este pequeño espacio para agradecer a todas aquellas personas que de alguna u otra manera contribuyeron a mi formación tanto académica como personal. Prometo ser breve pues de lo contrario la extensión de esta tesis sería comparable con el de un tratado.

En primer lugar a mi familia por apoyarme en todas -o casi todas mis locuras- y también por compartir mis éxitos y fracasos.

A todos mis profesores, desde la profesora que me enseñó a leer y a escribir, hasta los que me hicieron sufrir en la licenciatura. Sin ellos, no estaría ahora sustentando mi examen profesional. Algunos han dejado una huella tan profunda que sería una torpeza de mi parte no mencionarlos.

Gracias al Dr. Luis Fernando Magaña Solís, director de la Facultad, por ser el asesor de este trabajo y por enseñarme a ser independiente.

Al Dr. Gerardo Jorge Vázquez Fonseca por su gran amistad, su constante preocupación, su apoyo y por los sabios consejos que siempre me dio. Él me auxilió en la parte de programación.

Al Dr. Arturo Zúñiga Segundo del Departamento de Física de la Escuela Superior de Físico-Matemáticas (Instituto Politécnico Nacional) le agradezco infinitamente su asesoría. Con él ultimé detalles numéricos y conceptuales del problema.

También agradezco a la M. en C. Marcela Grether González y al Dr. Pablo de la Mora y Palomar Askinsky, ambos de la Facultad de Ciencias de la UNAM, por haber revisado minuciosamente este trabajo y por las aportaciones realizadas al mismo.

A mi queridísimo y consentido Dr. Juan Manuel Lozano Mejía -el físico y amigo más admirable- por mostrarme que la Física (y la Ciencia en general) no es sólo establecer leyes y teorías, sino toda una vida llena de pasión.

Al Fis. Juan Américo González Menéndez y familia por su invaluable amistad y ayuda desde el inicio de la carrera. Y también fue el primer afortunado en tenerme como ayudante (jejejejeje que modesta soy!).

Una mención especial merece el Dr. Luis Emilio Guerrero Yanes - Presidente de la Sociedad Venezolana de Física- por TODO el apoyo brindado desde el comienzo de mi tesis. Constantemente me enviaba información e inclusive comentarios personales (vía correo electrónico) sobre solitones. A pesar de no conocernos en persona se portó divinamente. No tengo palabras para agradecer todo lo que hizo por mí. Lo más padre es que seguimos en contacto y hemos entablado una bonita amistad.

A mis amigos del IFUNAM: Pilar Ovalle, Carlos Mendoza, Héctor Verdiguél y Fernando Camacho; a Oscar Mendoza "El Pollo" y a José Pliego "El Demonio" del departamento de cómputo por su infinita paciencia y por hacerme pasar momentos súper agradables; al Dr. Jorge Fujioka Rojas del Departamento de Materia Condensada por ayudarme y alentarme siempre que lo necesité.

A "La familia"- como cariñosamente llamo a mi grupo de amigos de la Facultad de Ciencias- integrada por: Tania Santiago, Carlos Barragán, Alejandro Lugo, Armando Resendiz, Walter Galván, Elio Martínez, Fernando Guadalupe, Felipe Rivera, Marco Barragán, David Bucio, Roberto "La güera", Norma Sánchez, Orlando Baca, Pedro Cervera, Orlando Hernández, Germán Pérez (el orden no indica preferencia, eh?). A Alejandro Ricardez, Odín Reyes, Miguel Muñoz, Carlos Alemán, también de la facultad. A Patrick Bakker, a Dennis Bakker y a Mart Rentmeester gracias por sus buenas vibras enviadas desde el viejo continente.

Finalmente agradezco a las instalaciones del IFUNAM por las facilidades prestadas para el desarrollo de mi tesis, así como a la Fundación UNAM y a la Dirección General de Apoyo del Personal Académico (DGAPA) por el apoyo económico brindado durante este periodo.

CONTENIDO

RESUMEN

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICAS

CAPÍTULO 1	INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2	ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN UN MEDIO DIELECTRICO	6
	2.1 Ondas electromagnéticas monocromáticas	14
	2.1.1 Ondas planas	16
	2.1.2 Ondas esféricas	17
	2.1.3 Ondas gaussianas	21
	2.2 Los materiales fotorrefractivos	25
	2.3 Las ecuaciones de Kukhtarev o ecuaciones del material	42

CAPÍTULO 3	SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN DE UN HAZ DE LUZ GAUSSIANO EN UN MATERIAL FOTORREFRACTIVO APLICADO AL ÓXIDO DE SILICIO Y BISMUTO ($\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$)	49
	3.1 Configuración experimental para el grabado de un material fotorrefractivo	49
	3.2 Descripción del Beam Propagation Method (BPM)	56
CAPÍTULO 4	RESULTADOS Y CONCLUSIONES	64
APÉNDICE A	FUNDAMENTOS DE ÓPTICA ELECTROMAGNÉTICA	i
APÉNDICE B	TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)	x
APÉNDICE C	ONDAS LLAMADAS SOLITONES	xv
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS		

ÍNDICE DE FIGURAS

- Figura 2.1:** El medio dieléctrico responde a un campo eléctrico aplicado E y con ello se crea una densidad de polarización P . 9
- Figura 2.2:** a) Un medio lineal, homogéneo, isotrópico y no dispersivo está caracterizado completamente por una constante, la susceptibilidad eléctrica χ . b) La relación entre los vectores P y E . 9
- Figura 2.3:** a) En un medio no lineal isotrópico, homogéneo y no dispersivo, el vector de polarización P es una función del vector campo eléctrico E . b) La relación entre los vectores P y E es no lineal. 13
- Figura 2.4:** Propagación de un haz gaussiano. 24
- Figura 2.5:** Al aplicarse un campo eléctrico en un material electro-óptico cambia el índice de refracción. Esto a su vez, cambia el efecto del material sobre la luz que pasa a través de él. El campo eléctrico controla la luz. 28
- Figura 2.6:** Diagrama de las bandas de energía de un material BSO a temperatura ambiente. 33
- Figura 2.7:** Los mecanismos involucrados más importantes en el efecto fotorrefractivo 35
- Figura 2.8:** El efecto fotorrefractivo 41
- Figura 2.9:** Modelo del transporte por bandas que explica el efecto fotorrefractivo 44

Figura 3.1: Arreglo experimental básico para el mezclado de dos haces "two-wave mixing" en materiales fotorrefractivos. Los dos haces inciden y generan un patrón de intensidad senoidal, **b)** Un patrón de interferencia con vector de onda K es creado por los vectores de onda de estos haces, k_1 y k_2 . 51

Figura 3.2: Configuración experimental "four-wave mixing" para el grabado de un material fotorrefractivo. 55

Figura 3.3: **a)** Superior. Arreglo de lentes equivalente a la transformación expresada en la ecuación (3.25) Una sección consiste de un medio uniforme de longitud $\Delta z/2$, una lente delgada, y un medio uniforme de longitud $\Delta z/2$ (desde (1)). **b)** Inferior. Intervalo i -ésimo en donde las flechas punteadas indican las propagaciones libres y los ejes coordenados las direcciones de propagación. 62

Figura 3.4: Diagrama de flujo del algoritmo numérico Beam Propagation Method 65

Figura A.1: Dependencia del índice de refracción con el campo eléctrico: **a)** Medio Pockels; **b)** Medio Kerr ix

Figura B.1: **a)** La función continua $h(t)$ donde el tiempo está discretizado, **b)** la correspondiente transformada de Fourier discretizada xii

Figura C.1: Se muestran dos ondas solitarias viajando con velocidad y perfil constantes. Al sufrir una interacción no lineal, se fusionan en un solo paquete y éste a su vez se divide en dos ondas solitarias que preservan tanto la velocidad como su perfil aún después de la interacción, salvo por un corrimiento de fase. A las ondas solitarias que cumplen con esta propiedad se les llama solitones. xix

Figura C.2: **a)** En un medio lineal los haces tienen la tendencia natural de ensancharse durante la propagación debido a la difracción; **b)** Un solitón ocurre cuando el perfil de intensidad coincide con el modo de la guía de onda autoinducida. xxi

Figura C.3: En la fotografía superior se muestra la simulación por computadora de la colisión entre dos solitones ópticos. En la fotografía inferior se muestra experimentalmente la misma situación. xxiii

Figura C.4: Propagación de una onda plana en un medio no lineal tipo Kerr. xxv

Figura C.5: a) La fotografía superior muestra a un solitón "bright", b) En la fotografía inferior se ilustra a un solitón "dark". Ambos son soluciones de la ecuación de Schrödinger No Lineal (NLS). xxvii

Figura C.6: Formación de un solitón fotorrefractivo "bright" xxx

Figura C.7: Formación de un solitón fotorrefractivo "dark" xxxi

ÍNDICE DE GRÁFICAS

<i>Gráfica 1: Variación en el índice de refracción con el espesor en un cristal fotorrefractivo BSO.</i>	71
<i>Gráfica 2: Perfil del haz gaussiano incidente.</i>	72
<i>Gráfica 3: Variación de la anchura de un haz gaussiano con el espesor para medios de distinto índice de refracción.</i>	73
<i>Gráfica 4: Extrapolación numérica para la variación en el índice de refracción con el espesor en un cristal fotorrefractivo BSO.</i>	74
<i>Gráfica 5: Variación hipotética de la anchura de un haz gaussiano con el espesor para distintos medios de propagación.</i>	75
<i>Gráfica 6: Comparación de la variación hipotética de la anchura de un haz gaussiano con el espesor para distintos medios de propagación.</i>	76

RESUMEN

La fotónica es una tecnología que tiene aplicaciones potenciales muy interesantes en computadoras. Se refiere al diseño de materiales, dispositivos y sistemas básicamente electrónicos que involucran la interacción de luz con la materia, por efectos electroópticos, de amplificación óptica y de mezclado de ondas, y otros efectos de óptica no lineal.

El objetivo en este trabajo es investigar el poder de enfocamiento o de dispersión espacial (esto es, disminución o crecimiento de la anchura del haz de luz incidente) de un material fotorrefractivo como el $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO) que tiene un índice de refracción, $\Delta n(z)$, grabado previamente.

Para abordar este problema se utilizó el Beam Propagation Method (BPM) con transformadas rápidas de Fourier (FFT). Partiendo de la ecuación de Helmholtz para el campo electromagnético del haz de luz gaussiano y de un índice de refracción previamente grabado que varía con la profundidad en el material, $\Delta n(z)$, se establecen las relaciones útiles necesarias para la aplicación del algoritmo numérico del BPM.

Se encuentra que, para las condiciones de grabado del material, el haz de luz gaussiano que se propaga en su interior presenta una tendencia a enfocamiento, esto es, la anchura del haz tiende a disminuir. Para verificar esta tendencia, se compara el efecto sobre el haz de materiales con índice de refracción constante ($n=1$, $n=2.5$ y $n=3$). Los resultados obtenidos para estos casos contrastan con la tendencia a enfocamiento obtenido para el índice de refracción no constante y previamente grabado.

Los resultados obtenidos sugieren que se abre un camino para una Ingeniería de materiales no dispersivos.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Los tres desarrollos más importantes en la óptica que han tenido lugar en los últimos treinta años y que además han sido los responsables del creciente interés hacia ella son: la invención del láser, la fabricación de fibras ópticas, y la introducción de dispositivos semiconductores a la tecnología moderna. El resultado de esto fue el origen de nuevas disciplinas, tales como la Electroóptica, la Optoelectrónica, la Electrónica cuántica, y la Óptica cuántica.

En años recientes la *fotónica* [1] ha diseñado materiales, dispositivos y sistemas básicamente electrónicos que involucran la interacción de la luz con la materia. Con esto es posible: a) la generación de luz coherente e incoherente por medio de láseres o fuentes luminiscentes respectivamente; b) la transmisión de luz en el espacio libre a través de elementos ópticos convencionales tales como lentes, sistemas de imágenes, guías de ondas etc.; c) la modulación, el cambio, y la exploración de luz por el uso de aparatos eléctricos, acústicos u ópticos; d) la amplificación y la conversión de frecuencia de luz por las interacciones de ondas en materiales no lineales y; e) la detección de luz.

Estas áreas han encontrado diversas aplicaciones en la comunicación óptica, procesamiento de señales, estimación, detección, visualización, impresión y transporte de energía. Por estas razones el futuro de la óptica no lineal es alentador ya que revolucionará a las telecomunicaciones y a la tecnología en materia computacional.

Actualmente es posible estudiar los efectos no lineales en sistemas ópticos y en guías de ondas mediante la utilización de poderosos láseres. Entre las estructuras más importantes e interesantes destaca la *fibra óptica*.

Es bien sabido que en un sistema de transmisión óptico, la razón de transmisión está limitada por el carácter dispersivo del material, el cual provoca que eventualmente la información se vaya perdiendo. Para evitar esto, Hasegawa y Tappert [2] propusieron compensar el efecto dispersivo del material con un cambio no lineal (efecto Kerr) en el índice de refracción, o con la respuesta dieléctrica. Cuando se logra, el pulso inicial tiende a formar un pulso estable no lineal denominado "solitón óptico" (Apéndice B).

Investigadores de los Laboratorios Bell AT&T han estado experimentando con la propagación de solitones en fibras ópticas desde 1980 con la finalidad de mejorar la transmisión de información a través de grandes distancias [3].

Por otro lado se tienen a los materiales fotorrefractivos.

El efecto fotorrefractivo fue descubierto como un daño óptico no deseado en cristales electro-ópticos y no lineales¹ [4]. Se observó que la luz incidente en un determinado material producía cambios en el índice de refracción.

Estos cambios se deben a que cuando la luz incide sobre el cristal se generan portadores de carga libres (electrones o huecos) los cuales se difunden de las posiciones de alta intensidad (donde fueron generados), dejando detrás cargas fijas de signo opuesto (asociadas con los iones). Los portadores libres pueden ser atrapados en otros sitios y eventualmente se recombinan. El resultado es la creación de una distribución inhomogénea de carga espacial dentro del material que via el efecto electro-óptico Pockels, modula el índice de refracción.

La teoría fundamental que describe precisamente esta interacción entre la luz incidente y la respuesta no lineal del material a la iluminación fue desarrollada en 1979 por Kukhtarev [5]. Esta teoría está basada en el modelo de transporte por bandas (*band transport model*) y considera los efectos de un campo eléctrico externo aplicado, el efecto fotovoltaico volumétrico así como los efectos del campo de carga espacial. Dependiendo del número de portadores de carga y de las especies fotoactivas surgen otras versiones de este modelo².

¹ Aunque el efecto fotorrefractivo fue descubierto primero en materiales ferroeléctricos inorgánicos, en los últimos años los cristales orgánicos altamente polarizables y fotoconductivos así como los materiales poliméricos han sido presentados como posibles candidatos para aplicaciones fotorrefractivas.

² Para más detalles el lector puede consultar el Capítulo 2.

Entre los materiales fotorrefractivos más importantes destacan el titanato de bario (BaTiO_3), el óxido de silicio y bismuto ($\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$), el niobato de litio (LiNbO_3), el niobato de potasio (KNbO_3), el arseniuro de galio (GaAs), y el niobato de estroncio y bario (conocidos simplemente como SBN por las siglas en inglés de Strontium Barium Niobate).

La cualidad que tienen estos materiales de almacenar información mediante un patrón de índice de refracción³ hace que el interés hacia ellos vaya incrementándose por las numerosas aplicaciones a la óptica, ya sea para el desarrollo de sistemas de procesamiento de información ópticos y memorias masivas o para aplicaciones en redes neuronales y procesadores de señales [6].

Sin embargo, los materiales fotorrefractivos no son los únicos que poseen tal cualidad pues se han desarrollado otro tipo de materiales conocidos como GRIN⁴ ("graded-index") [7]. Estos materiales se caracterizan porque tienen un índice de refracción que varía con la posición, $n(r)$ y también porque las trayectorias que siguen los rayos ópticos son curvas. Por ejemplo si se tiene una placa GRIN y se hace una adecuada elección de $n(r)$, es posible crear el mismo efecto sobre la luz que ejerce cualquier componente óptico como un prisma o una lente delgada⁵.

En este trabajo nos interesa estudiar la propagación de un haz de luz -cuyo perfil es del tipo gaussiano- en una placa de material fotorrefractivo BSO ($\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$) con un índice de refracción previamente grabado.

³ Este puede permanecer grabado durante varias horas, días, meses o incluso hasta años dependiendo del tipo de material. Bajo iluminación uniforme o tratamiento térmico, es posible borrarlo.

⁴ Estos materiales son frecuentemente fabricados mediante la incorporación controlada de impurezas.

⁵ El vidrio con el que se fabrican las lentes tiene un rango de longitud de onda, λ , entre 0.36-2.5 μm . Es por ello que se está investigando la posibilidad de elaborar lentes con materiales que exhiban una variación Δn en la dirección longitudinal o transversal. Si esto tiene éxito, los materiales GRIN reemplazarán a las superficies esféricas de las lentes.

En el **Capítulo 2** se discuten los principios físicos que gobiernan la propagación de ondas electromagnéticas en un medio dieléctrico lineal y en un medio dieléctrico no lineal. Dentro de los medios no lineales se encuentran los materiales fotorrefractivos, tema central de este trabajo. El capítulo finaliza con la descripción del modelo de Kukhtarev que explica al efecto fotorrefractivo.

Dadas las condiciones experimentales de grabado para una muestra de cristal fotorrefractivo, en el **Capítulo 3** se plantea la ecuación de propagación de un haz de luz. También se explica el método numérico empleado para la resolución de este problema.

El **Capítulo 4** está dedicado al análisis y discusión de los resultados obtenidos, estableciendo las conclusiones a las que se llegaron.

Capítulo 2

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN UN MEDIO DIELÉCTRICO

Un *dieléctrico* es un material aislante o que conduce muy poco la corriente eléctrica. Cuando está bajo la acción de un campo eléctrico, prácticamente no hay corrientes que fluyan en su interior porque, a diferencia de un metal, el dieléctrico no tiene electrones libres que puedan ser arrastrados a través del material. En su lugar ocurre la polarización eléctrica¹.

La presencia de un material dieléctrico afecta a los fenómenos eléctricos, por ejemplo, la fuerza entre dos cargas eléctricas en un medio dieléctrico es menor que cuando están en el vacío, mientras que la cantidad de energía almacenada en un campo eléctrico por unidad de volumen del dieléctrico es mucho mayor.

La naturaleza de un medio dieléctrico está relacionada con la densidad de polarización P y con el campo eléctrico E (Apéndice A) a través de la llamada *ecuación del medio*. Es útil pensar a dicha relación como un sistema en el cual E es considerado como el campo aplicado y P como la respuesta (Figura 2.1). Nótese que ambas cantidades son funciones del tiempo y de la posición, es decir, $P = P(r, t)$ y $E = E(r, t)$. La relación matemática entre estos vectores definen al sistema físico y queda gobernada por las características del medio.

Un medio dieléctrico es *lineal* si el vector de campo $P = P(r, t)$ está linealmente relacionado con el vector de campo $E = E(r, t)$, esto sucede cuando el principio de superposición es aplicable. Además si la respuesta del mismo ante un campo eléctrico externo es instantánea, en otras palabras que el vector P está determinado por el vector E al mismo tiempo t y no por valores previos de E se dice que es *temporalmente no dispersivo* y análogamente se define para la situación espacial.

¹ Esto significa que las cargas positivas se desplazan en la dirección del campo eléctrico, mientras que las cargas negativas lo hacen en la dirección opuesta. Esta separación de cargas, o polarización, reduce el campo eléctrico dentro del dieléctrico.

Ahora bien, si la relación entre estos vectores es independiente de la posición r entonces el medio es además *homogéneo*. Por otro lado, el medio será *isotrópico* si la relación entre los vectores P y E es independiente de la dirección del vector E , de tal forma que en todas direcciones el medio se vea igual.

Considerando este caso, los vectores P y E en cualquier posición y en cualquier instante de tiempo son paralelos y proporcionales, tal que,

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (2.1)$$

donde χ es una constante escalar llamada *susceptibilidad eléctrica* (Figura 2.2)

Sustituyendo la ecuación (2.1) en (A.5), se sigue que D y E son también paralelos y proporcionales,

$$D = \epsilon E \text{ con } \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) \quad (2.2)$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica del medio, y la razón entre ϵ/ϵ_0 es la constante dieléctrica.

Para un medio lineal, homogéneo, isotrópico, no dispersivo y sin fuentes, las ecuaciones de Maxwell son (Apéndice A):

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (2.6)$$



Figura 2.1 El medio dieléctrico responde a un campo eléctrico aplicado E y con ello se crea una densidad de polarización P .

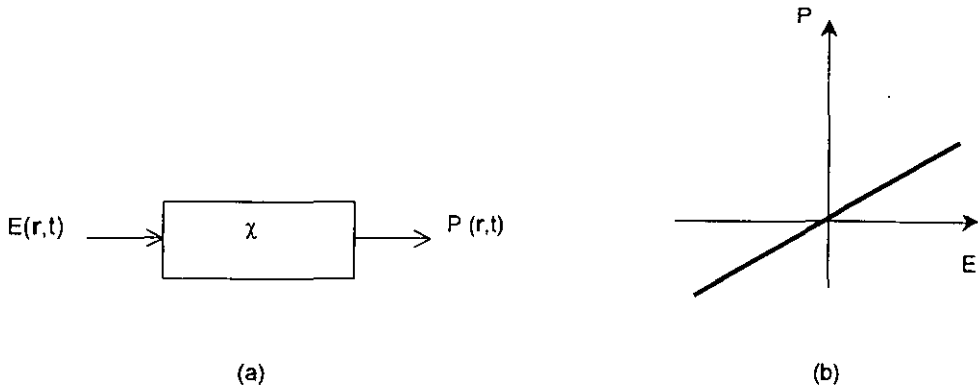


Figura 2.2 a) Un medio lineal, homogéneo, isotrópico y no dispersivo está caracterizado completamente por una constante, la susceptibilidad eléctrica χ . b) La relación entre los vectores P y E

Cada una de las componentes del campo electromagnético satisface la ecuación de onda (Apéndice A):

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7)$$

con una velocidad $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu_0}$. Los diferentes componentes de los campos eléctrico y magnético se propagan como ondas cuya velocidad está dada por,

$$c = \frac{c_0}{n} \quad (\text{velocidad de la luz en un medio}) \quad (2.8)$$

donde, n es el índice de refracción del medio,

$$n = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{1/2} = (1 + \chi)^{1/2} \quad (2.9)$$

y c_0 es la velocidad de la luz en el espacio libre,

$$c_0 = \frac{1}{(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}} \quad (2.10)$$

NOTA: La constante n es la razón entre la velocidad de la luz en el espacio libre y la velocidad de la luz en el medio; y representa el índice de refracción del medio.

En un medio dieléctrico *no lineal*, la relación entre P y E es no lineal (Figura 2.3). Si se tiene un medio homogéneo, isotrópico y no dispersivo entonces P es alguna función no lineal de E , es decir, $P = \varphi(E)$, para cada posición y tiempo; por ejemplo, $P = a_1 E + a_2 E^2 + a_3 E^3$, donde a_1 , a_2 y a_3 son constantes. Es importante notar el hecho de que la ecuación de onda (2.7) no es aplicable a ondas electromagnéticas que se propagan a través de un medio no lineal.

La no linealidad puede ser de origen microscópico o macroscópico.

A nivel microscópico se debe a que la densidad de polarización P es igual al producto del número total de momentos dipolares N y del momento dipolar individual β (inducido por el campo eléctrico aplicado). La relación entre β y E es lineal cuando E es pequeño y será no lineal cuando E adquiere valores comparables con los campos eléctricos interatómicos (típicamente del orden de 10^5 a 10^8 V/m).

Macroscópicamente el origen de la respuesta no lineal del material óptico a la luz está basada en la dependencia del número N con el campo eléctrico.

Si los campos eléctricos aplicados son pequeños en comparación con los campos interatómicos o cristalinos, el efecto de la no linealidad es débil, entonces la relación entre P y E es entonces aproximadamente lineal. Bajo estas circunstancias, es posible hacer una expansión en series de Taylor de la función que relaciona a P y E alrededor de $E = 0$,

$$P = a_1 E + \frac{1}{2!} a_2 E^2 + \frac{1}{3!} a_3 E^3 + \dots \quad (2.11)$$

Los coeficientes a_1, a_2, a_3 corresponden a la primera, segunda y tercera derivada de P con respecto a E , en $E = 0$, y son las constantes características del medio.

Es conveniente reescribir a la ecuación (2.11) en términos de la susceptibilidad eléctrica χ , la cual está relacionada con la constante dieléctrica y con el índice de refracción mediante la expresión (2.9). Entonces,

$$P = \varepsilon_0 \chi E + 2dE^2 + 4\chi^{(3)}E^3 + \dots \quad (2.12)$$

donde $d = \frac{1}{4}a_2$ y $\chi^{(3)} = \frac{1}{24}a_3$, son los coeficientes que describen a los efectos no lineales de segundo y tercer orden, respectivamente.

Ecuación de onda

Es posible derivar (Apéndice A) -a partir de las ecuaciones de Maxwell- la ecuación de onda que gobierna la propagación de la luz en un medio no lineal:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) es aplicable a todos los medios dieléctricos homogéneos e isotrópicos. Si además es *no dispersivo*, resultará una ecuación diferencial parcial no lineal en el campo eléctrico E ,

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \phi(E)}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

Como P se expresa en términos de una parte lineal y de otra no lineal, esto es:

$$P = \varepsilon_0 \chi E + P_{NL} \quad (2.15)$$

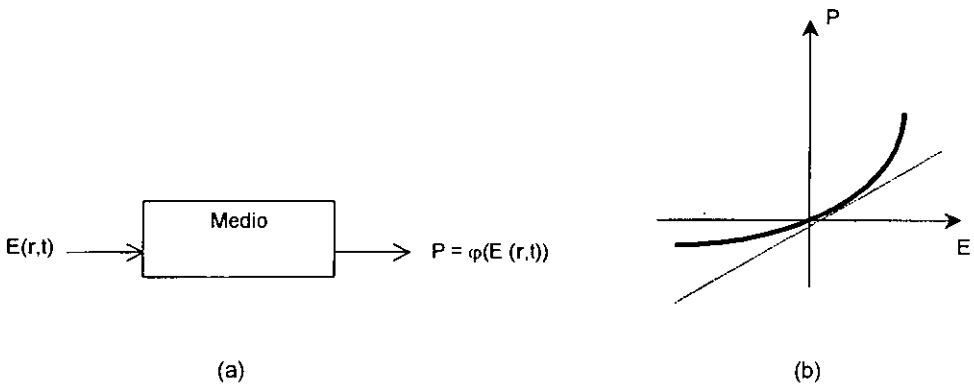


Figura 2.3 a) En un medio no lineal isotrópico, homogéneo y no dispersivo, el vector de polarización P es una función del vector campo eléctrico E . b) La relación entre los vectores P y E es no lineal.

$$P_{NL} = 2dE^2 + 4\chi^{(3)}E^3 + \dots \quad (2.16)$$

A partir de (2.15) y de las relaciones (2.8), (2.9) y (2.10), la ecuación (2.13) se escribe finalmente como,

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \quad (\text{ecuación básica de la óptica no lineal}) \quad (2.17)$$

Dada la no linealidad de la ecuación de onda (2.17), el principio de superposición no es válido.

Para resolver este tipo de ecuación existen dos métodos de aproximación. El primero es un método iterativo que se conoce como la *aproximación de Born*; y el segundo está basado en la *teoría de ondas acopladas* (ver Ref. 1).

2.1 Ondas electromagnéticas monocromáticas

Se dice que una onda electromagnética es *monocromática* cuando todas las componentes de los campos eléctrico y magnético son funciones armónicas del tiempo y están caracterizadas por tener la misma frecuencia.

Las componentes de una onda monocromática -en términos de sus amplitudes complejas- se expresan de la siguiente manera;

$$E(r, t) = \text{Re}\{E(r)\exp(j\omega t)\} \quad (2.18)$$

$$H(r, t) = \text{Re}\{H(r)\exp(j\omega t)\} \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ son las amplitudes complejas de los campos eléctrico y magnético respectivamente, $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia angular. A partir de las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre es fácil obtener las correspondientes al caso de luz monocromática. Estas son:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (2.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.23)$$

El flujo de energía electromagnética por unidad de área está determinada por el vector de Poynting complejo:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (2.24)$$

Si el medio de propagación es lineal, no dispersivo, homogéneo e isotrópico las componentes de las amplitudes \mathbf{E} y \mathbf{H} deben satisfacer la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad (2.25)$$

con,

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} = nk_0 \quad (2.26)$$

La función escalar $U = U(\mathbf{r})$ representa a cualquiera de las seis componentes de los vectores del campo eléctrico \mathbf{E} y del campo magnético \mathbf{H} .

2.1.1 Ondas planas

Las soluciones más simples a las ecuaciones de Maxwell están en términos de ondas planas. Se define a una onda plana como una onda que, en un instante dado, presenta la misma fase en todos los puntos que están sobre cada plano perpendicular a alguna dirección específica. Si se supone una onda electromagnética monocromática cuyas componentes son ondas planas descritas por;

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp(-j(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})) \quad (2.27)$$

$$B(\mathbf{r}, t) = B_0 \exp(-j(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})) \quad (2.28)$$

donde E_0 y B_0 son vectores constantes. Cada una de las componentes debe satisfacer la ecuación (2.25) si la magnitud de $\boldsymbol{\kappa}$ está determinada por la relación (2.26).

Sustituyendo las ecuaciones (2.27) y (2.28) en las ecuaciones de Maxwell (2.20) a (2.23) se sigue que los vectores E , H y $\boldsymbol{\kappa}$ deben ser mutuamente ortogonales. Dado que los vectores E y H permanecen en un plano que es normal a la dirección de propagación $\boldsymbol{\kappa}$, entonces la onda es conocida como *onda transversal electromagnética (TEM)*.

La intensidad de una onda TEM es proporcional a la norma al cuadrado de la amplitud E_0 , esto es,

$$I = \frac{|E_0|^2}{2\eta} \quad (2.29)$$

donde η es la impedancia del medio, $\eta = \frac{1}{n} \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2}$

En particular cuando una onda monocromática plana se propaga a través de un medio cuyo índice de refracción es variable, su frecuencia ω permanece igual mientras que su velocidad c , su longitud de onda λ y su número de onda k cambian,

$$c = \frac{c_0}{n}, \lambda = \frac{\lambda_0}{n}, k = nk_0 \quad (2.30)$$

2.1.2 Ondas esféricas

Como ejemplo de una onda electromagnética con características parecidas a las de una onda esférica escalar se tiene al campo radiado por un dipolo eléctrico oscilante [8].

Para conocer las soluciones de ondas esféricas se considera la ecuación de onda escalar

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.31)$$

donde $\psi(\mathbf{x}, t)$ es un campo escalar que puede ser analizada en el tiempo con la transformada de Fourier como:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.32)$$

Cada componente de Fourier satisface la ecuación de onda de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (2.33)$$

con $k^2 = \omega^2/c^2$. Para problemas que posean simetría alrededor del origen, es conveniente utilizar el sistema de coordenadas esférico. Entonces (2.33) queda expresado como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (2.34)$$

Para resolver (2.34) se utiliza el método de separación de variables [9], esto es, se supone que ψ tiene la forma:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (2.35)$$

A partir de lo cual resultan tres ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\phi^2} + m^2 \Phi_m = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta_{lm}}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta_{lm} = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR_l}{dr} - [l(l+1) - k^2 r^2] R_l = 0 \quad (2.38)$$

Las soluciones correspondientes a cada una son:

$$\Phi_m = e^{\mp i m \phi} \quad (2.36')$$

$$P_l^m(\cos \theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l(\cos \theta) \quad (2.37')$$

donde $P_l^m(\cos\theta)$ son los polinomios asociados de Legendre para $m \leq l$ arbitrario. Es evidente que $P_l^0(\cos\theta) = P_l(\cos\theta)$, el polinomio ordinario de Legendre [10].

Finalmente, si en la ecuación (2.38) se hace el cambio de variable $\xi = kr$ y se sustituye $R_l = \xi^{-1/2} Z_l$ se llega a:

$$\xi^2 \frac{d^2 Z_l}{d\xi^2} + \xi \frac{dZ_l}{d\xi} - \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \xi^2 \right] Z_l = 0 \tag{2.38a}$$

A la ecuación (2.38a) se le conoce como ecuación de Bessel [10]. Las soluciones comunes se representan con $J_{l+1/2}(kr)$ y $N_{l+1/2}(kr)$ y se les conoce como función de Bessel y función de Neumann respectivamente. O bien, para los propósitos de la ecuación de onda se tienen la función de Bessel esférica, $j_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr} J_{l+1/2}(kr)$, y la función de Neumann esférica, $n_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr} N_{l+1/2}(kr)$.

Una forma general para ψ puede escribirse como²:

$$\psi_{lm}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\pi/2kr} Z_l(kr) P_l^m(\cos\theta) e^{\mp im\phi} \tag{2.39}$$

Los campos vectoriales correspondientes a las ondas TE (transversal eléctrica) se calculan a partir de las relaciones [11]:

$$E = r \times \nabla \psi \tag{2.40}$$

$$B = -i \frac{1}{\omega} \nabla \times (r \times \nabla \psi) \tag{2.41}$$

² El hecho de que la expresión tenga una singularidad en $r = 0$ es de poca importancia práctica porque el término $1/r$ sirve como un factor de atenuación. Al contrario de una onda plana, una onda esférica disminuye en amplitud, con lo cual cambia su perfil, cuando se expande y se aleja del origen.

Y para las ondas TM (transversal magnética) se calculan a partir de las relaciones [11]:

$$E' = \frac{ic}{\omega} \nabla \times (r \times \nabla \psi) \quad (2.42)$$

$$B' = \frac{1}{c} (r \times \nabla \psi) \quad (2.43)$$

Lo más simple es considerar ψ_{10} , que es: $\psi_{10} = (1/kr)e^{ikr}(1+i/kr)\cos\theta$. En este caso particular se tiene:

$$E = r \times \nabla \psi_{10} = -E_0 e^{ikr} \left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} \right) \text{sen} \theta \hat{\phi} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} B &= -i \frac{1}{\omega} \nabla \times (r \times \nabla \psi_{10}) \\ &= i \frac{1}{\omega} E_0 e^{ikr} \left(\frac{1}{kr^2} + \frac{i}{k^2 r^3} \right) 2 \cos \theta \hat{r} - i \frac{1}{\omega} E_0 e^{ikr} \left(\frac{i}{r} - \frac{1}{kr^2} - \frac{i}{k^2 r^3} \right) \text{sen} \theta \hat{\theta} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Las ecuaciones (2.44) y (2.45) son justamente los campos (TE) producidos por un dipolo magnético radiante. Obsérvese que sólo las partes de \mathbf{E} y \mathbf{B} que son proporcionales a $1/r$ contribuyen a la radiación neta.

Las soluciones de la onda esférica son especialmente importantes al considerar la radiación procedente de fuentes limitadas [8-9].

En resumen las ondas planas y esféricas representan los dos extremos del confinamiento espacial y temporal. Mientras que en la onda plana los frentes de onda normales (o rayos) son paralelos a la dirección de la onda y la energía se extiende espacialmente, las ondas esféricas tienen su origen en un punto y sus frentes de onda (superficies de igual fase, $kr = cte$) divergen en todas direcciones.

Pero existen otros tipos de onda cuyos frentes de onda forman ángulos pequeños con la dirección de propagación y son conocidas como *ondas paraxiales*. Éstas deben satisfacer la ecuación paraxial de Helmholtz³. De las soluciones a la misma la más simple es la *onda paraboloidal* y la más útil es la *onda gaussiana*.

2.1.3 Ondas gaussianas

En diversas aplicaciones láser es necesario enfocar, modificar o dar forma al haz mediante el empleo de lentes y de otros elementos ópticos⁴. En general, la propagación de un haz láser puede ser aproximado por un perfil de intensidad tipo gaussiano, correspondiente al modo TEM₀₀. Desafortunadamente esto no necesariamente es cierto, excepto en el caso de láseres de He-Ne y de Argón-ión, y es por ello que se ha definido un factor de calidad, M^2 , que describe la desviación de un haz láser cualquiera con respecto a un perfil gaussiano ideal. De hecho, para un haz gaussiano ideal se cumple que $M^2 = 1$; mientras que para un haz láser real, $M^2 > 1$.

Para caracterizar completamente a la onda gaussiana no es suficiente con conocer su amplitud, su dirección, y/o la localización de su origen. También queda representada adicionalmente a través de otros parámetros tales como la ubicación de la "cintura", el radio de la "cintura" W_0 o bien por el rango de Rayleigh z_0 . Todos ellos están relacionados mediante las expresiones que a continuación se escriben.

³ La ecuación paraxial de Helmholtz es: $\nabla_r^2 A - j2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0$, donde $\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

⁴ La relación directa entre la cintura del haz y la divergencia angular θ_0 debe ser siempre considerada cuando se enfoca un haz láser.

Partiendo de la ecuación paraxial de Helmholtz una de las soluciones más simples corresponde a la de la onda paraboloidal [1],

$$A(r) = \frac{A_1}{z} \exp\left(-jk \frac{\rho^2}{2z}\right) ; \rho^2 = x^2 + y^2 \quad (2.46)$$

Otra solución a la ecuación paraxial de Helmholtz es la onda gaussiana. Esta se obtiene a partir de la onda paraboloidal mediante una simple transformación: $z \rightarrow z - \xi$ donde ξ es una constante.

$$A(r) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left(-jk \frac{\rho^2}{2q(z)}\right) ; q(z) = z - \xi \quad (2.47)$$

Cuando ξ es complejo la solución (2.47) adquiere dramáticamente distintas propiedades. En particular si ξ es un imaginario puro, $\xi = -jz_0$, la ecuación (2.47) resulta en la amplitud compleja de la onda gaussiana.

$$A(r) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left(-jk \frac{\rho^2}{2q(z)}\right) ; q(z) = z + jz_0 \quad (2.48)$$

El parámetro z_0 es conocido como *intervalo de Rayleigh*.

Asumiendo que, $\psi(r) = A(r) \exp(-jkz)$ se reescribe (2.48) con la finalidad de separar la amplitud y la fase de la envolvente para así obtener:

$$\psi(r) = \frac{A_1}{jz_0} \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk \frac{\rho^2}{2R(z)} + j\xi(z)\right] \quad (2.49)$$

$$\text{donde: } W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad ; \quad \xi(z) = \tan^{-1} \frac{z}{z_0} \quad (2.50)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad ; \quad W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi} \right)^{1/2}$$

La forma del haz gaussiano fundamental es como se muestra en la ecuación (2.49) y sus propiedades tales como: la intensidad, la potencia, el radio, la divergencia, la profundidad del foco, la fase y los frentes de onda se determinan a partir de las ecuaciones (2.49) y (2.50).

En resumen todo haz gaussiano exhibe las siguientes propiedades (Figura 2.4)

- a) La potencia del haz está concentrada principalmente dentro de un pequeño cilindro que rodea a su eje,
- b) La distribución de la intensidad en cualquier plano transversal es una función gaussiana de simetría circular centrada alrededor del eje,
- c) La anchura de esta función es mínima en la "cintura" del haz y crece gradualmente en ambas direcciones,
- d) Los frentes de onda son aproximadamente planos cerca de la "cintura", pero se van haciendo curvos y llegan a ser casi esféricos lejos de la misma,
- e) La divergencia angular⁵ de los frentes de onda normales es el mínimo permitido por la ecuación de onda para una anchura dada.

⁵ La divergencia angular de un haz gaussiano es directamente proporcional a la razón entre la longitud de onda λ y el diámetro de la "cintura" $2W_0$. Esto es, $\theta_0 = \frac{2 \lambda}{\pi 2W_0}$

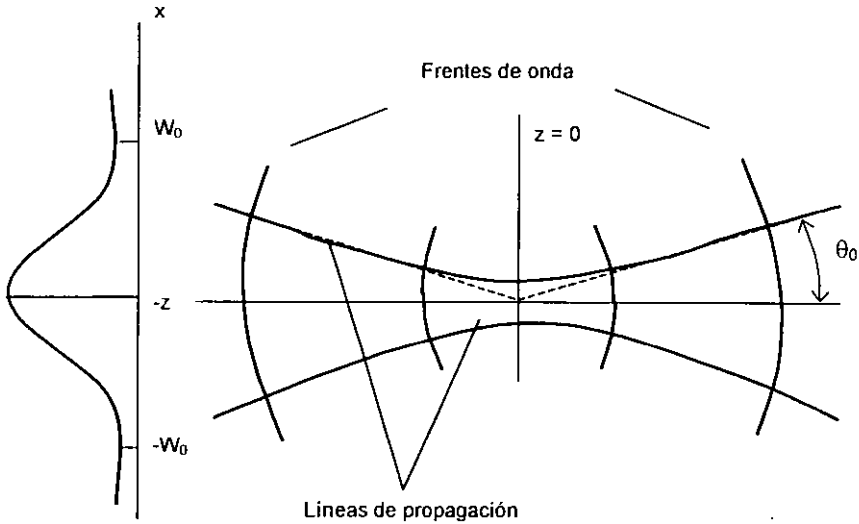


Figura 2.4 Propagación de un haz gaussiano. Aún si el frente de onda de un haz láser fuera perfectamente plano en alguna dirección, con todos los elementos moviéndose paralelamente a él, este haz rápidamente adquiriría curvatura y comenzaría a ensancharse de acuerdo con las ecuaciones (2.50). El plano $z = 0$ marca la localización de la cintura de la gaussiana, o el lugar donde el frente de onda es plano, y W_0 es el radio de la cintura del haz. Las líneas punteadas representan al cono asintótico que tiene como vértice al centro de la cintura.

2.2 Los materiales fotorrefractivos

Mientras que en un metal es posible introducir –vía una carga eléctrica– un exceso de portadores, en un semiconductor se puede alterar profundamente la concentración de portadores de carga en el material sin introducir ninguna densidad de carga eléctrica importante. Esto se logra gracias a que pueden tenerse simultáneamente tanto electrones como huecos. Si los huecos y los electrones se introducen en pares, se pueden crear grandes desviaciones de los valores de equilibrio térmico de la concentración volumétrica de portadores sin que se forme ninguna densidad de carga neta. Ahora, si se extraen huecos y electrones en pares, se pueden obtener concentraciones volumétricas de portadores inferiores a los valores de equilibrio, con la misma facilidad con que se crean concentraciones en exceso mediante la introducción de portadores de carga.

Los portadores excedentes pueden crearse⁶ cuando se ilumina una muestra de material con una radiación de longitud de onda lo suficientemente larga que permita ser absorbida sólo ligeramente al pasar por el cristal; pero, al mismo tiempo, lo suficientemente corta para crear una concentración medible de pares electrón-hueco. Esto es, se necesita que la energía del fotón sea igual o mayor que la energía de la banda prohibida. Bajo estas condiciones, los fotones incidentes tienen la suficiente energía para romper los enlaces covalentes de la red de pares de electrones, liberando así electrones y dejando los huecos en los sitios de excitación (ionización). Nótese que los portadores de carga así formados (electrones y huecos) se encuentran en desequilibrio⁷.

Estos pares contribuyen a la conductividad del cristal, que luego se incrementa bajo la iluminación, siendo el aumento proporcional a la intensidad de ésta. A este fenómeno se le denomina *efecto fotoconductor*.

⁶También es posible crearlos en cristales semiconductores por medio de haces de partículas de alta energía tales como, protones, electrones, partículas alfa; por rayos X, radiación γ y mediante contactos metal-semiconductor debidamente polarizados o uniones *p-n*

⁷Después de la ionización estos portadores pueden tener una energía considerablemente mayor que la energía media de los portadores en equilibrio. Sin embargo, debido a la interacción con los fonones y los defectos de la red cristalina los portadores en desequilibrio adquieren rápidamente la temperatura de la red, y su energía se hace igual a la energía térmica media de los portadores en equilibrio.

Una vez que cesa la iluminación, el proceso de fotogeneración de cargas culmina y la conductividad regresa a su valor inicial dándose la recombinación de portadores.

Los materiales fotoconductivos pueden clasificarse en dos tipos [12]: los *idiocromáticos* y los *alocromáticos*.

Los *idiocromáticos* son aquellos que presentan en su estado puro el efecto fotoconductor que está asociado directamente con las propiedades intrínsecas del material, es por esta razón que también se les conoce como *materiales fotoconductivos intrínsecos*.

Los *alocromáticos* son aquellos que deben su fotoconductividad a las impurezas e imperfecciones del cristal. Se les llama también *materiales fotoconductores de impurezas o imperfecciones*.

Las impurezas e imperfecciones pueden determinar otro tipo de propiedades, haciendo que un mismo material presente las características de un idiocromático y de un alocromático.

Por otro lado también existen ciertos materiales que cambian sus propiedades ópticas cuando son sometidos a la acción de un campo eléctrico, campo magnético, o bien, de esfuerzos mecánicos. Esto es causado por fuerzas que deforman las posiciones, orientaciones o formas de las moléculas que constituyen al material.

En el caso particular de la aplicación de un campo eléctrico dc o de baja frecuencia a un material absorbente se observa que los valores principales del índice de refracción son complejos y que las dos componentes están influenciadas por este campo. Esto es, la parte real del índice de refracción cambia en Δn (*electrorefracción*) y la parte imaginaria en Δk (*electroabsorción*). A tal material se le denomina *electro-óptico*.

Mientras que la electrorefracción provee un método físico para modificar de manera controlable la fase, la dirección y la polarización de un haz de luz, la electroabsorción permite el control directo de la intensidad de la luz en su paso a través del material. La respuesta electro-óptica (Figura 2.5) es el efecto local asociado con la distorsión de las nubes electrónicas debido a la acción del campo. De hecho, los electrones son los únicos portadores de carga que pueden ser excitados a frecuencias luminosas. Cuánticamente esto significa que el campo modifica las funciones de onda electrónicas así como los niveles de energía del sistema y en consecuencia la respuesta dieléctrica.

La reorientación molecular y la relajación atómica determinan indirectamente contribuciones adicionales al efecto electro-óptico. Esto se debe a que el campo atómico inducido o el nuevo arreglo molecular causa un cambio en la distribución de carga espacial y en consecuencia en el comportamiento del material.

La dependencia del índice de refracción ante la presencia de un campo eléctrico toma una de las dos siguientes formas:

- ❖ Si el índice de refracción cambia en proporción lineal al campo eléctrico aplicado, el efecto es conocido como efecto electro-óptico lineal o efecto Pockels.

- ❖ Si el índice de refracción cambia en proporción cuadrática al campo eléctrico aplicado, el efecto es conocido como efecto electro-óptico cuadrático o efecto Kerr.

Las ecuaciones que los describen se encuentran en más detalle en el Apéndice A.

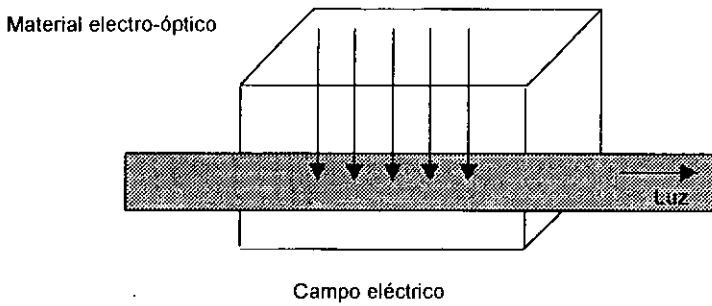


Figura 2.5 Al aplicarse un campo eléctrico en un material electro-óptico cambia el índice de refracción. Esto, a su vez, cambia el efecto del material sobre la luz que pasa a través de él. El campo eléctrico controla la luz.

Los materiales electro-ópticos son muy útiles en la fabricación de dispositivos ópticos controlados eléctricamente, por ejemplo: a) lentes con distancia focal controlable, b) dispositivos de exploración óptica hechos con prismas controlados, c) moduladores de fase óptica, d) retardador de onda controlable (utilizado para alterar las propiedades de la polarización de la luz).

Los materiales fotorrefractivos son típicamente cristales dieléctricos simples no-centrosimétricos⁸ (llamados también PRC, Photorefractive Crystals) que presentan no-linealidades de segundo orden. Éstos poseen dos características importantes: son fotocónductivos y exhiben el efecto electro-óptico Pockels, además de tener la habilidad de detectar y almacenar distribuciones de intensidad óptica en la forma de patrones espaciales con índice de refracción alterado.

El efecto fotorrefractivo, primero considerado como daño luminoso, es ampliamente usado en la grabación de hologramas volumétricos para aplicaciones como el almacenamiento óptico de datos y espejos conjugados de fase [13]. Inclusive, este efecto puede ser inducido por radiación ultravioleta, visible o infrarroja dependiendo de la brecha de energía del material y de los niveles de energía del donador (o de los niveles de aceptores de las impurezas involucradas).

Las principales cualidades que deben ser consideradas al escoger un material fotorrefractivo son:

- a) *Sensibilidad fotorrefractiva*. Ésta se define como el cambio en el índice de refracción por unidad de energía absorbida y de volumen.

⁸ Un material se dice que es *no-centrosimétrico* si carece de centro de inversión, esto es, que la estructura molecular no tiene simetría central.

b) *Rango dinámico (máximo cambio en el índice de refracción). Determina la eficiencia de difracción⁹ más grande que puede ser grabada en un cristal con un espesor dado, y el número de hologramas diferentes que pueden ser grabados en un cierto volumen.*

c) *Corrimiento de fase entre el índice de refracción y la distribución de la intensidad luminosa; el grabado fotorrefractivo y el tiempo de borrado; la dependencia en la frecuencia espacial, en el campo eléctrico y en la longitud de onda para inducir cambios en el índice de refracción.*

d) *Resolución espacial, razón entre la señal y el ruido y la operación a temperatura ambiente.*

Existe una amplia variedad de ellos, por ejemplo:

- I. cristales inorgánicos: BaTiO_3 , KNbO_3 , $\text{BaNaNb}_5\text{O}_{15}$, GaAs , $\text{Bi}_{12}(\text{Si}, \text{Ge}, \text{Ti})\text{O}_{20}$ ¹⁰, LiNbO_3 ;
- II. cerámicos electro-ópticos: $(\text{Pb}_{1-x}\text{La}_x)(\text{Zr}_y\text{Ti}_z)\text{O}_3$ ó en su forma abreviada $\text{PLZT}_{x/y/z}$;
- III. cristales orgánicos: ciclooctilamino nitropiridina (COANP) contaminado con tetracianoquinodimetano (TCNQ);
- IV. cristales líquidos y polímeros

⁹ La *eficiencia de difracción* se define como el cociente entre la intensidad luminosa que se le aplica a la muestra para leer la información grabada previamente y la intensidad luminosa que es difractada a través de la muestra.

¹⁰ Estos tres son materiales paraeléctricos electro-ópticos y fotoconductivos. Esto es porque si se les aplica un campo eléctrico llegan a ser birrefringentes debido a que los coeficientes de Pockels son distintos de cero. Además se caracterizan por ser cristales con una actividad óptica alta.

En este trabajo la muestra bajo estudio es un cristal de óxido de silicio y bismuto ($\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$) conocido simplemente como BSO.

Cristal BSO (Óxido de Silicio y Bismuto)

El cristal $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO) es un material fotorrefractivo que forma parte del grupo de las silenitas¹¹. Cuando se aplica un campo eléctrico externo se vuelve birrefringente debido a que el coeficiente electro-óptico Pockels es diferente de cero (ver Tabla 1).

Es ampliamente utilizado en la fabricación de dispositivos ópticos de información como las fibras ópticas, conjugadores de fase, y guías de onda.

Gracias a su eficiencia en el transporte de cargas este cristal es altamente sensible en el visible, junto con el KNbO_3 .

Su estructura cúbica permite la manipulación de su estado de polarización en dos maneras: two-wave y four-wave mixing. En el siguiente capítulo se tratará este último aspecto. Las propiedades principales¹² se muestran en la Tabla 1:

El diagrama de las bandas de energía para el BSO [4] se muestra en la Figura 2.6

¹¹ A este grupo también pertenecen los materiales: $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO) y el $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO).

¹² Para incrementar sus propiedades regularmente es sometido a la aplicación de campos eléctricos externos.

Tabla 1: Parámetros importantes para el cristal fotorrefractivo BSO

Fórmula	$\text{Bi}_{12}\text{S O}_{20}$
Estructura y simetría cristalina	cúbica, 23 ¹³
Índice de refracción (633 nm.)	2.54
Coefficiente electro-óptico	$r_{41} = 3.4 \text{ pm/V} - 5 \text{ pm/V}$
Coefficiente del acoplamiento de dos haces	5-12/cm
Tiempo de respuesta	1-10 ms
Actividad óptica (514.5 nm.)	$\rho_0 = 45^\circ \text{ mm}^{-1}$
Color	amarillo pálido
Densidad	9.20 g/cm ³
Rango óptico de transmisión	0.42 -7.5 μm
Constante dieléctrica	56
Transmitancia (633 nm.)	69%
Fotoconductividad (633 nm.)	40 mW/cm ²
Resistividad	$5 \cdot 10^{11} \Omega \text{ cm}$
Coefficiente de absorción (633 nm.)	2 cm ⁻¹
Portadores fotoinducidos	electrones
Parámetro de la red	10.103 Å

¹³ El punto de grupo ("point group") representa a todas las simetrías posibles de la estructura cristalina, esto es, la reflexión, la inversión y la rotación. El número total de ellos es 32 siendo el cristal BSO el 23.

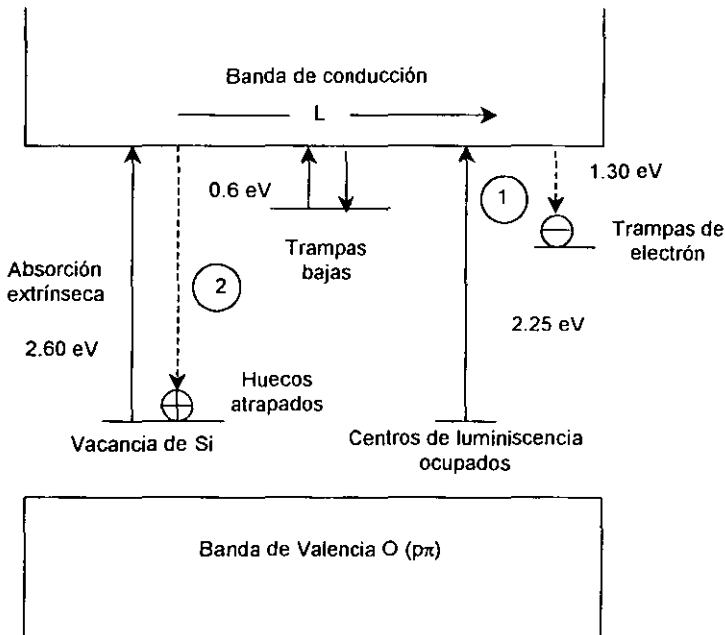


Figura 2.6 Diagrama de bandas de energía de un material BSO a temperatura ambiente. La brecha de energía es $E_g = 3.25$ eV. La vacancia del silicio está situada a 2.60 eV por debajo de la banda de conducción, cuando está ocupada por un electrón. Ha sido identificado también un centro de luminiscencia a 1.30 eV, y se cree que participa en el proceso de transferencia de carga; su nivel de energía es 2.25 ó 1.3 eV debajo de la banda de conducción, dependiendo si está ocupado o no por un electrón.

Cuando un material fotorrefractivo es iluminado con una intensidad I que varía en la dirección x , el índice de refracción cambia en una proporción $\Delta n(x)$. A continuación se describirán los cinco procesos básicos que intervienen en este efecto (Figura 2.7): I. fotoionización de las impurezas y la generación de portadores de carga; II. mecanismos de transporte de los portadores de carga; III. captura de los portadores de carga y la formación de una densidad de carga espacial; IV. formación de un campo eléctrico de carga espacial; V. formación de un patrón de índice de refracción vía el efecto electro-óptico Pockels [4, 6].

I. Fotoionización de las impurezas y la generación de portadores de carga

Para tener una eficiencia fotorrefractiva alta, se necesitan de donadores o trampas adecuados así como de un excelente mecanismo de migración de cargas. En un cristal no contaminado las trampas son originadas por las pequeñas trazas de impurezas que se introduzcan en él.

Al iluminar este cristal, el fotón es absorbido en la posición x llevando a un electrón del nivel de los donadores a la banda de conducción. La razón de fotoionización $G(x)$ es proporcional tanto a la intensidad óptica como a la densidad de donadores no ionizados. Entonces,

$$G(x) = s(N_D - N_D^+)I(x) \tag{2.51}$$

donde N_D es la densidad total de donadores, N_D^+ es la densidad de donadores ionizados y s es la constante de fotoionización de sección transversal. Para el BSO los valores típicos son: $s = 1.06 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \text{J}^{-1}$; $N_D = 10^{25} \text{m}^{-3}$; $N_D^+ = 10^{22} \text{m}^{-3}$.

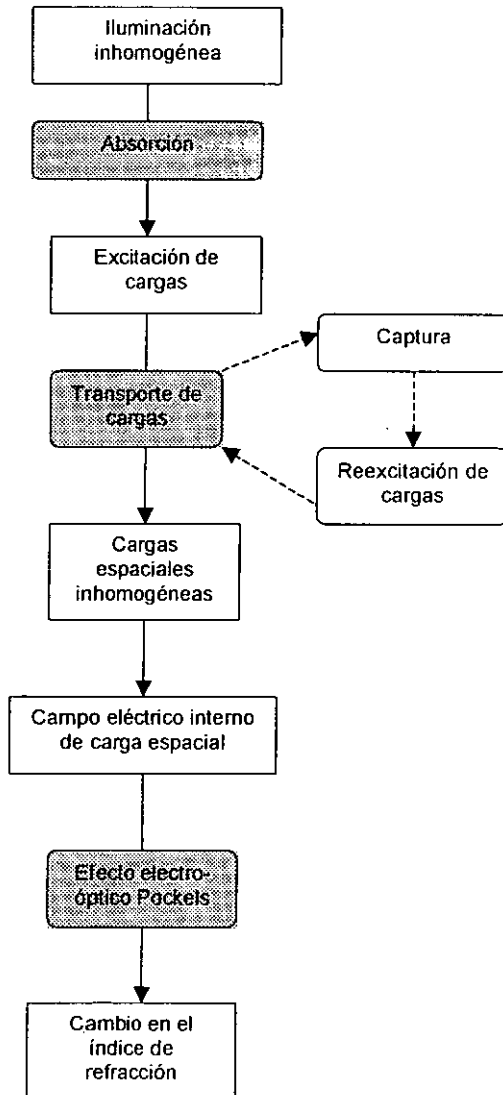


Figura 2.7 Los mecanismos involucrados más importantes en el efecto fotorrefractivo.

II. Mecanismos de transporte de los portadores de carga

El movimiento de los portadores de carga fotoexcitados puede efectuarse por tres mecanismos distintos. Estos son: difusión, acarreo (cuando se aplica un campo eléctrico externo) y el efecto fotovoltaico.

- a) Difusión: Como la iluminación $I(x)$ es no uniforme, la densidad de electrones excitados $n(x)$ también lo es. El resultado de esto es que en las zonas luminosas del patrón de interferencia los electrones son expulsados hacia las regiones de menor concentración (zonas oscuras). Los electrones se difunden de manera que la amplitud espacial de la densidad electrónica es pequeña comparada con la amplitud espacial de los donadores ionizados. Esta diferencia en amplitudes aumenta la separación de la distribución de cargas espacial que está modulada en fase con la intensidad luminosa. El campo de carga espacial, denotado como E_{sc} , estará desfasado un cuarto de periodo de malla ($\lambda/4$) en contraste con la intensidad luminosa.

- b) Acarreo: Si aplicamos un campo eléctrico a un material fotorrefractivo, estamos contribuyendo a direccionar el movimiento de las cargas a través del mismo. Considerando que la razón de excitación de los donadores es proporcional a $\cos Kx$, la razón de excitación por acarreo de electrones es, entonces, proporcional a $\cos(Kx + \phi)$. Donde K es el vector de malla y ϕ el corrimiento de fase. Ahora bien, para el caso donde los desplazamientos son suficientemente pequeños, la densidad de carga espacial es proporcional a $\sin Kx$ y el campo eléctrico resultante proporcional a $-\cos Kx$, que corresponde a la distribución de la intensidad excepto por el cambio de signo.

Resumiendo: un campo eléctrico modulado espacialmente es generado por la variación de las densidades de los portadores de carga libres.

- c) Efecto fotovoltaico: Este efecto es la capacidad que presentan ciertos materiales para generar una diferencia de potencial como resultado de la absorción de radiación ante la presencia de un campo electromagnético. En otras palabras, la fotocorriente generada por la incidencia de ese campo es una consecuencia de un proceso de transferencia de carga asimétrico. En general esta fotocorriente depende de un tensor de tercer orden (conocido como tensor fotovoltaico):

$$j^{ph} = \beta_{ijk} E_i E_k^* \tag{2.52}$$

donde E_i y E_k son componentes fuertes del campo eléctrico del haz de luz (Notación: E_k^* es el complejo conjugado de E_k) y β_{ijk} es el tensor fotovoltaico de tercer orden que obedece $\beta_{ijk} = \beta_{jik}^*$.

La corriente fotovoltaica (en su forma escalar)¹⁴ usualmente se escribe como:

$$j^{ph} = -\kappa_p \alpha I \tag{2.52a}$$

donde α es la constante de atenuación y κ_p es una constante fotovoltaica. Dado que la atenuación es proporcional a la densidad de donadores no ionizados, conviene escribir a (2.52a) como:

$$j^{ph} = pI(N_D - N_D^*) \tag{2.52b}$$

donde N_D es la densidad total de donadores, N_D^* es la densidad de donadores ionizados y p es la constante fotovoltaica.

¹⁴ Esa relación es válida solamente para longitudes de transporte electrónicas cortas (la longitud de transporte electrónica se define como la distancia promedio que los electrones recorren antes de que su velocidad se vuelva azarosa).

III. Captura de los portadores de carga y la formación de una densidad de carga espacial

Cada electrón fotogenerado deja detrás una carga iónica positiva. Cuando el electrón es atrapado (proceso de recombinación) su carga negativa es depositada en un sitio diferente. La tasa de recombinación, $R(x)$, es proporcional a la densidad de electrones excitados, $\Pi(x)$ y a la densidad de donadores ionizados (trampas) N_D^+ esto es,

$$R(x) = \gamma_R \Pi(x) N_D^+ \quad (2.53)$$

donde γ_R es la constante de recombinación. En equilibrio, los electrones dejan de moverse de las regiones de alta densidad a las de baja densidad porque la corriente de arrastre balancea exactamente a la corriente de difusión. La densidad de donadores ionizados deja de aumentar porque su tasa de recombinación iguala a su tasa de fotoionización, $R(x)=G(x)$, tal que:

$$sI(x)(N_D - N_D^+) = \gamma_R \Pi(x) N_D^+ \quad (2.54)$$

de lo cual se obtiene:

$$\Pi(x) = \frac{s}{\gamma_R} \frac{N_D - N_D^+}{N_D^+} I(x) \quad (2.54')$$

En consecuencia se forma una distribución de carga espacial no uniforme.

IV. Formación de un campo eléctrico de carga espacial

Debido a la distribución de carga espacial se genera un campo eléctrico dependiente de la posición $E_{sc}^{(0)}(x)$, el cual puede ser determinado a partir del hecho de que en el estado estacionario las densidades de corriente electrónica -carreo y difusión- deben ser igual en magnitud y de signo opuesto, de tal manera que la densidad de corriente total se anule, es decir,

$$J = e\mu_e n(x)E_{sc}^{(0)}(x) - k_B T \mu_e \frac{d n}{dx} = 0 \tag{2.55}$$

donde μ_e es la movilidad electrónica, k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura. Entonces,

$$E_{sc}^{(0)}(x) = \frac{k_B T}{e} (n(x))^{-1} \frac{d n}{dx} \tag{2.56}$$

V. Formación de un patrón de índice de refracción vía el efecto electro-óptico Pockels

Dado que el material fotorrefractivo es electro-óptico, el campo eléctrico interno $E_{sc}^{(0)}(x)$ modifica localmente al índice de refracción de acuerdo con la relación:

$$\Delta n(x) = -\frac{1}{2} n^3 \Gamma E_{sc}^{(0)}(x) \tag{2.57}$$

donde n y Γ son los valores apropiados del índice de refracción y el coeficiente electro-óptico Pockels del material.

La relación entre la intensidad del haz incidente $I(x)$ y el cambio en el índice de refracción $\Delta n(x)$ se obtiene asumiendo que la razón $(N_D/N_D' - 1)$ en la ecuación (2.54') es aproximadamente constante, independiente de x . En ese caso $\Delta n(x)$ es proporcional a $I(x)$, por lo que la ecuación (2.56) da:

$$E_{sc}^{(0)}(x) = -\frac{k_B T}{e} \frac{1}{I(x)} \frac{dI}{dx} \quad (2.58)$$

Finalmente de las ecuaciones (2.57) y (2.58):

$$\Delta n(x) = -\frac{1}{2} n^3 \Gamma \frac{k_B T}{e} \frac{1}{I(x)} \frac{dI}{dx} \quad (2.59)$$

Nótese que el patrón de índice de refracción $\Delta n(x)$, está desfasado con respecto al patrón de luz incidente $I(x)$ como una consecuencia de la derivada en la ley de Gauss (Ver siguiente sección).

La Figura 2.8 ilustra la variación espacial de la intensidad luminosa, la densidad de carga espacial, el campo de carga espacial y el cambio en el índice de refracción.

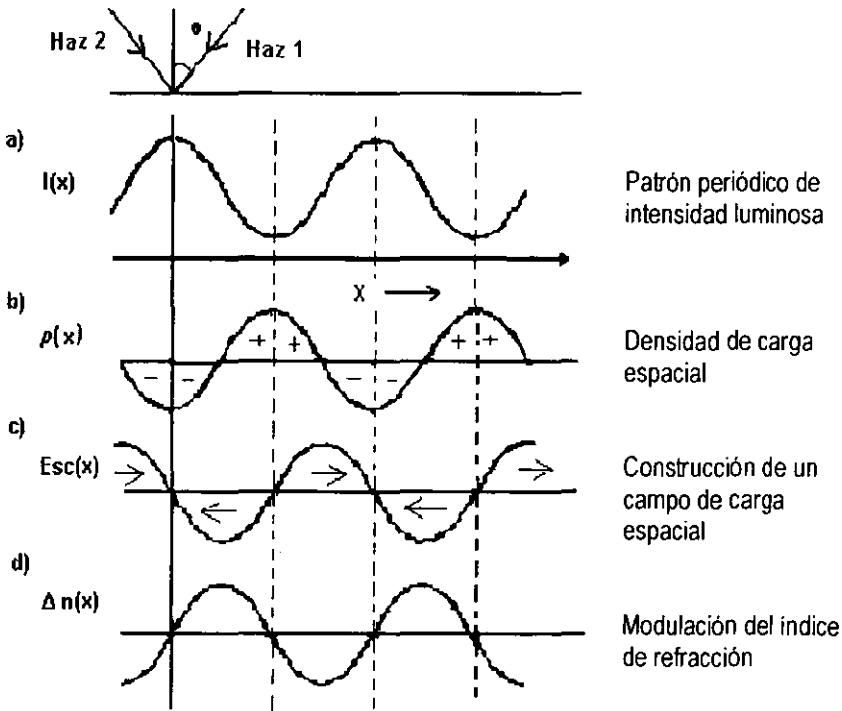


Figura 2.8 El efecto fotorrefractivo. Consiste en la siguiente secuencia de eventos: luz que tiene un patrón que varía espacialmente $I(x)$ (Figura 2.8a) redistribuye las cargas -por acarreo y difusión- a través del cristal para formar una densidad de carga $\rho(x)$ (Figura 2.8b). Esto a su vez genera un campo eléctrico interno de carga espacial $E_{sc}(x)$ que distorsiona a la red cristalina indicado por las flechas (Figura 2.8c). Con ello se crea una variación en el índice de refracción, $\Delta n(x)$ vía el efecto electro-óptico Pockels (Figura 2.8d).

2.3 Las ecuaciones de Kukhtarev o ecuaciones del material

Lo que actualmente se sabe sobre el efecto fotorrefractivo tuvo su origen en el trabajo realizado por Chen en 1967 [15]. En éste se sugiere que el campo de carga espacial interno -responsable de la modulación del índice de refracción del material- es un precursor del campo fotovoltaico.

Para Amodei [16] este campo de carga espacial tiene dos contribuciones. La primera se debe a la aplicación de un campo eléctrico externo E_0 , mientras que la segunda se refiere a la difusión térmica de los portadores de carga libres E_D , así $E_{sc} = E_0 + iE_D$. Más tarde a este modelo se le incorporó la teoría de ondas acopladas para mostrar que el proceso de difusión podría conducir a una transferencia de energía unidireccional.

A pesar de la gran cantidad de artículos publicados sobre las soluciones analíticas y numéricas de estas ecuaciones, no fue sino hasta 1979 que Kukhtarev et.al. [5] publicaron la teoría fundamental que describe la interacción entre el haz incidente y la respuesta no lineal del material fotorrefractivo a la iluminación a través de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales basadas en el *modelo de transporte por banda (Band Transport Model)*.

En este modelo -el más completo para explicar el efecto fotorrefractivo- Kukhtarev et.al. asumieron que el medio fotorrefractivo contiene cargas (electrones, huecos o ambos) que son atrapadas en sitios localizados de la banda de energía prohibida y son fotoexcitadas hacia la banda de conducción y/o a la banda de valencia; aquí migran -por difusión y acarreo- hasta recombinarse en la región oscura.

De acuerdo con este modelo, si el tiempo de vida de la carga libre es corto, la densidad modulada de carga libre es despreciable en comparación con la densidad de carga atrapada. La contribución de las cargas libres al campo de carga espacial puede entonces ser despreciada también.

El proceso completo puede ser considerado como un salto fotoinducido de cargas desde el sitio de una trampa a otro. Esta es la suposición básica de los modelos por salto (*hopping models*) [17].

A continuación se escribirán -siguiendo el modelo de transporte por bandas- las ecuaciones de Kukhtarev válidas tanto para electrones como para huecos. Es importante aclarar que, la corriente piroeléctrica, la corriente debida a la captura anisotrópica de electrones y la corriente de desplazamiento iónica, regularmente son despreciadas.

1. Ecuación de continuidad para los donadores ionizados e inmóviles

La razón de generación de electrones libres es $(N_D - N_D^+)(sI + \beta)$, mientras que la razón de recombinación de electrones libres viene dada por $\gamma N_D^+ n$; donde N_D es la densidad total de donadores, N_D^+ es la densidad total de donadores ionizados inmóviles, I es la intensidad de la luz, s es la sección transversal de fotoionización, β es la probabilidad de excitación térmica, γ es la constante de recombinación y n es la densidad de electrones en la banda de conducción. Entonces,

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = (N_D - N_D^+)(sI + \beta) - \gamma N_D^+ n \quad (2.60)$$

La ecuación anterior es conocida como la *ecuación de continuidad para los donadores ionizados e inmóviles*.

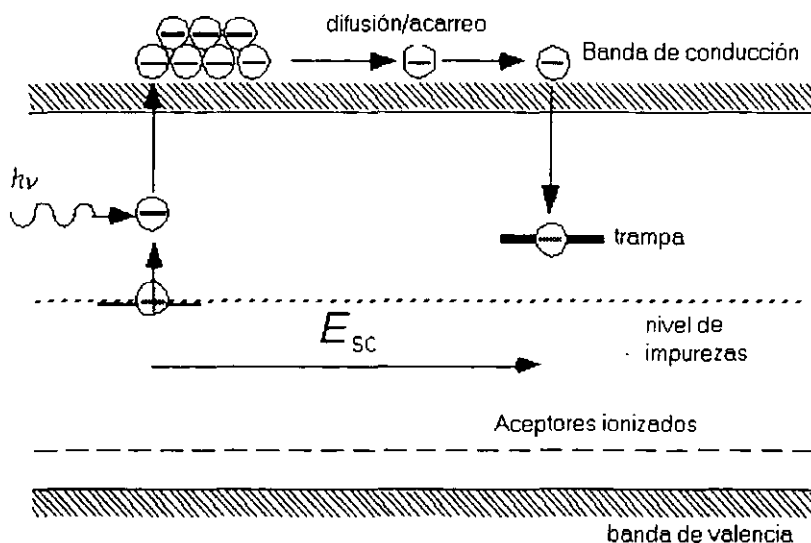


Figura 2.9 Modelo del transporte por bandas que explica el efecto fotorrefractivo. En este modelo se asume que el material contiene cierto tipo de impurezas (o imperfecciones). Por simplicidad se considera que todas las impurezas¹⁵ son idénticas y tienen exactamente el mismo estado de energía (Ver texto).

¹⁵ Estas impurezas pueden ser *donadores* o *aceptores*. La densidad de donadores es a menudo más grande que la de aceptores. Aquí se supone que ambas son idénticas. En el caso cuando no hay electrones en la banda de conducción ni huecos en la banda de valencia, la densidad de donadores ionizados es igual a la de aceptores. Los donadores neutros son capaces de ceder electrones mediante fotoexcitación y los ionizados de capturarlos. Los aceptores no participan directamente en el efecto fotorrefractivo pues su presencia hace posible que la neutralidad eléctrica se mantenga.

Observación 1: La densidad de estados de la banda de conducción es mucho más grande que la densidad de electrones libres, es decir, la probabilidad de que un estado de la banda de conducción esté desocupado es prácticamente 1.

Observación 2: Esta ecuación solamente toma en cuenta las excitaciones fotónicas o térmicas de los electrones por lo que no contiene términos de corriente.

2. Ecuación de continuidad para los electrones móviles de la banda de conducción

La razón de generación de electrones libres es la misma que la de los donadores ionizados, excepto que los electrones son móviles en tanto que los donadores son estacionarios. Esto es esencial para el efecto fotorrefractivo. Para este caso, se tiene:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (sI + \beta)(N_D - N_D^*) - \gamma n N_D^* + \frac{1}{e} \nabla \cdot J \quad (2.61)$$

La ecuación (2.61) es la *ecuación de continuidad para los electrones móviles de la banda de conducción*.

La presencia de estos portadores de carga (electrones) conduce a un campo de carga espacial, que a su vez, afecta el transporte de los portadores.

La *densidad de corriente* J , es la suma de las tres contribuciones correspondientes a cada uno de los mecanismos de transporte, esto es, la componente de difusión J_D , la componente de arrastre J_A y la componente fotovoltaica J_{PH} ,

$$J = J_D + J_A + J_{PH}$$

- La *densidad de corriente de difusión* establece que siempre que haya un gradiente de concentración, ∇n , se tiene un flujo neto de corriente de electrones de las regiones de alta concentración a las de baja concentración. Matemáticamente está dada por: $J_D = eD\nabla n$. Donde D es el coeficiente de difusión $D = k_B T / e$ (k_B es la constante de Boltzmann, T la temperatura, e la carga electrónica).
- La *densidad de corriente de arrastre* es la corriente de conducción originada por la aplicación de un campo eléctrico E. Este campo es la suma de un campo eléctrico externo aplicado E_0 y el campo de carga espacial inducido en el cristal E_{sc} , esto es, $E = E_0 + E_{sc}$. Matemáticamente viene representada mediante la relación, $J_A = e\mu_e nE$ (μ_e es el tensor de movilidad electrónica).
- La *densidad de corriente fotovoltaica* se debe a un proceso antisimétrico de transferencia de carga y, a los corrimientos de Frank Condon [18] de los iones excitados a lo largo del eje polar de algunos cristales ferroeléctricos que carecen de simetría. Así los fotoelectrones son expulsados, bajo la iluminación I, a ciertas direcciones preferenciales. La relación es: $J_{PH} = p(N_D^* - N_D)I$ (p es la constante fotovoltaica).

De esta manera la densidad de corriente J queda expresada, finalmente como:

$$J = eD\nabla n + e\mu_e nE + p(N_D^* - N_D)I \quad (2.62)$$

3. Ley de Gauss para el campo de carga espacial

$$\nabla \cdot (\epsilon E_{sc}) = \rho(r) = e(N_D^* - N_A - n) \quad (2.63)$$

Donde ϵ es el tensor dieléctrico, $\rho(r)$ es la densidad de carga y N_A es la densidad de aceptores. La ecuación (2.63) es la *ley de Gauss para el campo de carga espacial*.

El término correspondiente a la densidad numérica de cargas N_A compensa a la densidad de carga de donadores ionizados N_D^+ bajo las condiciones de las regiones oscuras (se asume que $N_D \gg N_A$). Estos niveles de aceptores son llenados completamente y además no están involucrados en los procesos de fotoexcitación.

Finalmente para tener un análisis más completo del efecto fotorrefractivo es necesario considerar la ecuación de onda para el campo eléctrico E de los haces de luz coherente.

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 (E \epsilon_H)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.64)$$

ϵ_H es la constante dieléctrica de alta frecuencia.

Las ecuaciones (2.60-2.64) son ecuaciones diferenciales no lineales acopladas que determinan el desarrollo temporal y la distribución espacial de la densidad de donadores ionizados, la densidad electrónica libre, el campo de carga espacial y el campo eléctrico. Para resolverlas es necesario establecer condiciones iniciales y en la frontera.

El *modelo de dos portadores de carga y una sola especie* [17] es una variante del modelo de transporte por bandas. Predice la existencia de sólo una constante temporal decreciente e inversamente proporcional a la intensidad.

Existe un segundo modelo para describir al efecto fotorrefractivo. Se trata del *modelo de salto de cargas (Charge Hopping Model)*. Éste fue propuesto por Feinberg y establece que el transporte de cargas de un sitio donde se encuentra un donador hacia una impureza vacía puede darse por medio de saltos fotoinducidos. Es posible demostrar que ambos modelos son matemáticamente equivalentes, siendo este último un caso particular del modelo de transporte por bandas de Kukhtarev [17].

Capítulo 3

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE
PROPAGACIÓN DE UN HAZ DE LUZ GAUSSIANO EN
UN MATERIAL FOTORREFRACTIVO APLICADO AL
ÓXIDO DE SILICIO Y BISMUTO ($\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$)**

Para almacenar información de un haz de luz en las rejillas holográficas se requiere que dos haces de luz (haz de señal y un haz de referencia) interfieran sobre un medio que va desde una placa fotográfica convencional hasta cristales fotorrefractivos. A este patrón de interferencia grabado se le conoce como *holograma*.

Los hologramas se dividen en dos grandes familias: a) hologramas superficiales, b) hologramas volumétricos. Los primeros tienen como propósito archivar la modulación superficial y se producen por ejemplo por la exposición y grabado de un fotoresistor. En cambio un holograma de volumen es una rejilla holográfica cuya "profundidad"¹ no puede ser despreciada. La difracción de un holograma con estas características obedece a la condición de Bragg² y en consecuencia sólo puede ser reconstruido por haces de referencia que inciden a ciertos ángulos y que poseen una determinada longitud de onda.

Dentro de la familia de los hologramas volumétricos se encuentran las rejillas fotorrefractivas que a su vez se clasifican en: dinámicas (cuando sus propiedades dependen del tiempo) y estáticas (cuando son independientes del haz de entrada y del tiempo).

3.1 Configuración experimental para el grabado de un material fotorrefractivo

Las dos configuraciones básicas que resultan interesantes para los experimentos de holografía con materiales fotorrefractivos son: el two-wave mixing (2WM) y el four-wave mixing (4WM). Es importante darse cuenta de que, debido al acoplamiento de los haces durante la escritura del holograma, éste puede exhibir cierta deformación espacial cuando se le compara con el registrado en un medio holográfico típico (por ejemplo, las placas holográficas) donde no ocurre tal acoplamiento.

¹ La profundidad dentro de este contexto se entiende como la dirección de propagación de los haces de luz.

² La condición de Bragg es: $n\lambda = 2\Lambda \sin\theta$ ($n=1,2,3,\dots$) donde λ es la longitud de onda del haz incidente y Λ es el periodo de la rejilla. Esta condición debe cumplirse para que los rayos difractados estén en fase.

a) Mezclado de dos haces (*two-wave mixing*)

Considérese ahora que dos haces de luz coherente (con la misma frecuencia), están incidiendo sobre una muestra de material fotorrefractivo (Figura 3.1). El campo eléctrico está dado por:

$$E = E_a \exp(i\omega t - i\vec{k}_a \cdot \vec{r}) + E_b \exp(i\omega t - i\vec{k}_b \cdot \vec{r}) \quad (3.1)$$

donde E_a y E_b son las amplitudes; \vec{k}_a y \vec{k}_b son los vectores de onda.

Si el estado de polarización de estas dos ondas no es ortogonal, formarán un patrón de interferencia sinusoidal con una intensidad,

$$I(\vec{r}) = \langle |E|^2 \rangle_t = I_0 + \text{Re} \left\{ I_1 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\} \quad (3.2)$$

donde:

$$I_0 = |E_a|^2 + |E_b|^2 = I_a + I_b \quad (3.3)$$

$$I_1 = 2E_b \cdot E_a^* = 2\sqrt{I_b I_a} \quad (3.4)$$

La expresión (3.2) también se puede escribir como:

$$I(\vec{r}) = I_0 + \frac{2I_0 \sqrt{I_b I_a}}{I_0} \cos(Kr) = I_0 (1 + m \cos(Kr)) \quad (3.5)$$

Donde se ha definido al contraste o modulación de las franjas m :

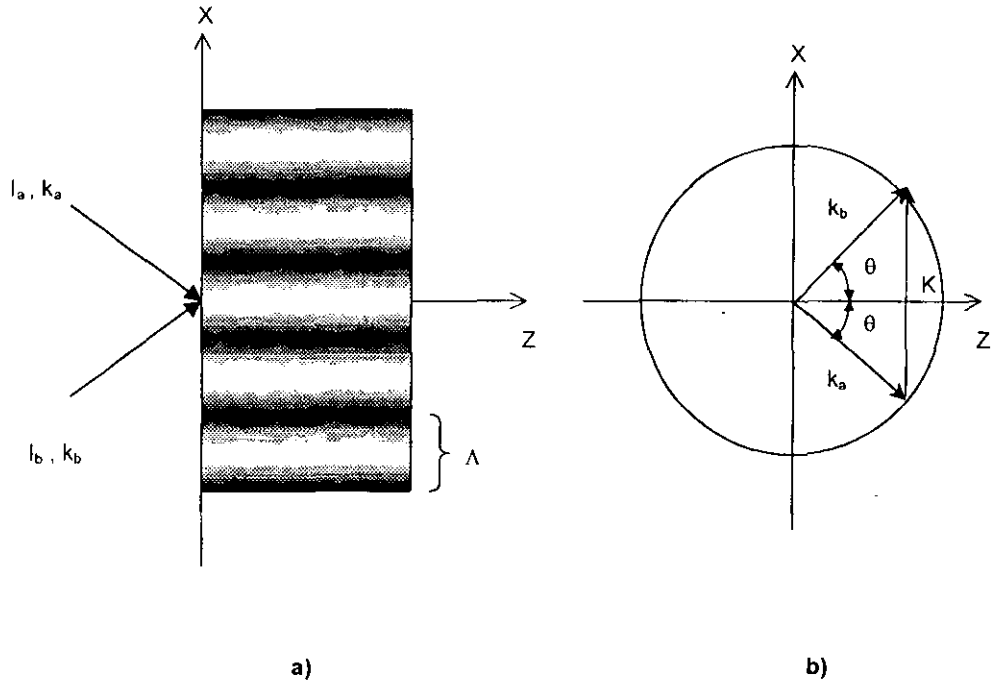


Figura 3.1 a) Arreglo experimental básico para el mezclado de dos haces "two-wave mixing" en materiales fotorrefractivos. Los dos haces inciden y generan un patrón de intensidad senoidal, b) Un patrón de interferencia con vector de onda K es creado por los vectores de onda de estos haces, k_a y k_b .

$$m = \frac{2\sqrt{I_b I_a}}{I_0} ; 0 \leq m \leq 1 \quad (3.6)$$

El vector de onda de la rejilla K viene dado por: $K = k_b - k_a$. La magnitud de este vector está relacionada con el periodo Λ del patrón de interferencia, esto es,

$$K = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (3.7)$$

El máximo del patrón de interferencia ocurre cuando las dos ondas están polarizadas en la misma dirección y tienen la misma magnitud, es decir, cuando $E_a = E_b$. Entonces la intensidad para este caso es:

$$I = I_0 (1 + \cos K \cdot r) \quad (3.8)$$

Esto representa un arreglo de franjas de interferencia. Las franjas oscuras ocurren en $K \cdot r = (2n+1)\pi$ donde $n = 0$.

Ahora supóngase que al incidir un haz con esa intensidad sobre el material fotorrefractivo, en las regiones brillantes cercanas a $\cos K \cdot r = 1$ y de $I = 2I_0$, las cargas fotoionizadas pueden alejarse de las regiones brillantes dejando atrás donadores ionizados. Si estos portadores son atrapados en las regiones oscuras, permanecerán allí porque no hay luz que los pueda reexcitar. Esto lleva hacia una separación de cargas -las regiones oscuras están cargadas negativamente y las brillantes positivamente (Figura 2.8)-. Y continúa hasta que la corriente de difusión es contrarrestada por la corriente de acarreo.

La componente fundamental de la densidad de carga espacial puede ser escrita como,

$$\rho = \rho_0 \cos K \cdot r \quad ; \quad \rho_0 = cte \tag{3.9}$$

Sustituyendo (3.9) en la ecuación para la ley de Gauss (2.63) e integrando se llega a que³,

$$E_{sc} = \rho_0 \frac{K}{K \cdot \epsilon R} \text{sen}(K \cdot r) \tag{3.10}$$

Nótese que el campo de carga espacial tiene un corrimiento de fase de $\pi/2$ con respecto al patrón de intensidad. Este campo de carga espacial inducirá un cambio en el índice de refracción vía el efecto electroóptico Pockels (Figura 2.8).

Para esta configuración la transferencia de energía -vía interferencia constructiva o destructiva- en una cierta dirección entre los haces que interaccionan dentro del cristal es conocida como el acoplamiento de haces (*Beam Coupling*). Las ecuaciones que describen al acoplamiento de haces son:

$$\frac{dI_a(z)}{dz} + \Gamma \text{sen}\varphi \frac{I_a I_b}{I_0} = 0 \tag{3.11}$$

$$\frac{dI_b(z)}{dz} - \Gamma \text{sen}\varphi \frac{I_a I_b}{I_0} = 0 \tag{3.12}$$

³ Otros autores [4] escriben al campo de eléctrico de carga espacial E_{sc} como:

$$E_{sc}(x) = \text{Re} \left\{ im \xi(K) \frac{k_B T}{e} \cdot \frac{K}{1 + (K/k_0)^2} \exp(iK \cdot x) \right\}$$

donde $\xi(K)$ es un factor que toma en cuenta la posibilidad de que compitan los electrones y huecos con los portadores de carga; $k_B T$ es la energía térmica por unidad de carga fotorrefractiva; k_0 es el vector de onda de la carga espacial, el escalar K es la magnitud del vector de la rejilla. De esta expresión es claro que el factor imaginario es el que da el corrimiento de fase -de 90°- entre el campo de carga espacial $E_{sc}(x)$ y el patrón de índice de refracción $\Delta n(x)$.

donde:

$I_0 = I_a + I_b$: es la intensidad promedio de las intensidades de los haces de grabado I_a e I_b

$\Gamma = \frac{2m^3 r E_{sc}}{\lambda \cos \theta}$: es la constante real de acoplamiento

φ : es la diferencia de fase entre E_{sc} y el patrón de iluminación

λ : es la longitud de onda de los haces de grabado

θ : es el ángulo de incidencia de los haces de grabado

b) Mezclado de cuatro haces (*four-wave mixing*)

En esta configuración aunque solamente son tres los haces incidentes, es un hecho que son cuatro los que interactúan pues este último se genera precisamente durante la interacción. Puede ser explicado como sigue (Figura 3.2): con los haces (P1) y (S) se graba el holograma, que a su vez es leído por un segundo haz (P2) proveniente de la dirección opuesta. Es entonces cuando se crea un haz conjugado (C). Si (P2) y (P1) son haces que no están modulados y además se propagan en direcciones opuestas, el haz C es exactamente su conjugado de fase. Por el contrario si (P2) es mucho mayor que (S), entonces C no es únicamente el conjugado de fase con respecto a S, sino que además es amplificado.

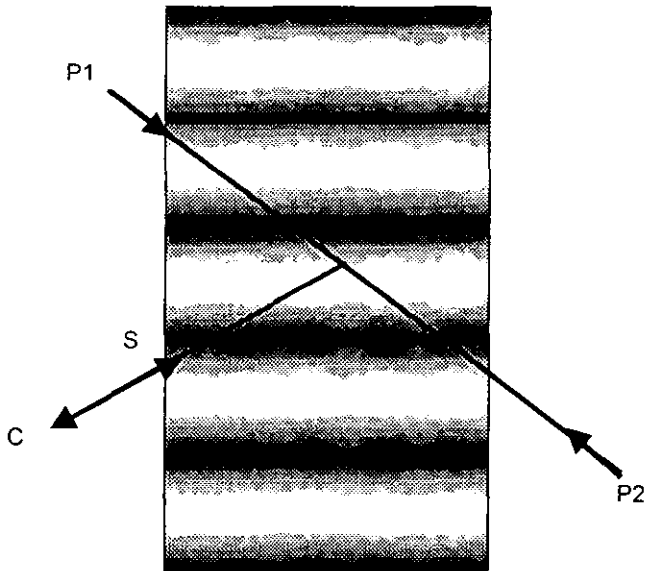


Figura 3.2 Configuración experimental "four-wave mixing" para el grabado de un material fotorrefractivo. Aunque solamente son tres los haces incidentes sobre el cristal, son realmente cuatro los haces que interaccionan entre si debido a que este último se genera durante la interacción.

Al resolver numéricamente el sistema de ecuaciones de Kukhtarev para cada m se obtiene, entre otras cosas, el campo de carga espacial $E_{sc}(x, m)$. En consecuencia se conoce también el cambio en el índice de refracción por el efecto Pockels $\Delta n(x, m)$. Luego de las ecuaciones del beam coupling para la configuración de dos haces se encuentra que las intensidades I_a e I_b son funciones de z . De lo cual se sigue que la modulación m también es una función de z . Por lo tanto se concluye que [19]:

$$E_{sc} = E_{sc}(x, m(z)) \quad \text{entonces} \quad \Delta n = \Delta n(x, z)$$

A partir de la información previamente grabada en el cristal, dada por la variación en el índice de refracción $\Delta n(z)$, se hará incidir un haz de luz cuyo perfil es gaussiano. El propósito es estudiar los efectos que sufre este haz -sin la aplicación de un campo eléctrico externo- debido a esta variación durante y después de que ha recorrido toda la muestra. Para resolverlo se empleará el método de propagación de haces (*Beam Propagation Method, BPM*).

3.2 Descripción del Beam Propagation Method (BPM)

El Beam Propagation Method (BPM) es una técnica matemática muy poderosa implementada por primera vez para la obtención de soluciones numéricas en problemas relacionados con la propagación de ondas sísmicas. Sin embargo, también ha sido utilizado con éxito en la Óptica para estudiar la propagación de haces luminosos en medios cuyas variaciones en el índice de refracción son pequeñas.

El método consiste básicamente en la propagación de un haz de entrada a través de un medio homogéneo y entonces corregirla -debido a la variación del índice de refracción- vía la ley de las lentes delgadas.

Para ello se realiza una transformación de Fourier de los campos electromagnéticos que son perpendiculares a la dirección de la propagación y posteriormente se utiliza un "método por pasos" para calcular el campo electromagnético a lo largo de la dirección de propagación⁴.

En este trabajo se considera que el campo eléctrico del haz de luz gaussiano incidente se propaga paralelamente al eje z y tiene una amplitud compleja $E(x, z)$ que se puede escribir como el producto de una función de x , esto es, $E_1(x)$, y una componente que expresa la propagación en la dirección z . De tal manera que:

$$E(x, z) = E_1(x) \exp[-i\beta(z)z] \quad (3.13)$$

Obsérvese que la constante de propagación β es una función de z . Sin embargo, si la variación en el índice de refracción es pequeña en comparación con la longitud de onda de la luz, se puede considerar que β es aproximadamente constante a lo largo de una pequeña distancia Δz . Sustituyendo (3.13) en (2.25), se obtiene:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2(z) + k_0^2 n^2(x, z) \right] E(x, z) = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(x, z) = -\beta^2(z) E(x, z) \quad (3.15)$$

Haciendo $\nabla_z^2 = \partial^2 / \partial z^2$,

$$\beta(z) = \left[\nabla_z^2 + k_0^2 n^2(x, z) \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

⁴ Para la correcta aplicación del método es importante suponer que en la propagación, sobre una pequeña distancia h , los efectos dispersivos y los no lineales actúan independientemente. Esto, en otras palabras significa que la propagación desde z hasta $z+h$ es llevada a cabo en dos pasos. En el primero sólo actúa la no linealidad (el cambio del índice de refracción) y en el segundo sólo actúa la dispersión ó propagación.

De aquí que la amplitud del campo eléctrico en el punto $z + \Delta z$ viene dada por:

$$E(x, z + \Delta z) = \exp\left\{-i\Delta z \left[\nabla_t^2 + k_0^2 n^2(x, z)\right]^{1/2}\right\} E(x, z) \tag{3.17}$$

Haciendo un poco de manipulación algebraica en el lado derecho de (3.15),

$$\left[\nabla_t^2 + k_0^2 n^2(x, z)\right]^{1/2} = \frac{\nabla_t^2}{\left[\nabla_t^2 + k_0^2 n^2(x, z)\right]^{1/2}} + k_0 n(x, z) \tag{3.18}$$

La siguiente aproximación es esencial para el método BPM. Considérese que $n(x, z)$ puede separarse en una constante n_0 y una parte variable $\Delta n(x, z)$, es decir,

$$n(x, z) = n_0 + \Delta n(x, z) \tag{3.19}$$

Donde n_0 es el índice de refracción promedio (o efectivo) representativo del medio y $\Delta n(x, z)$ es pequeña comparada con n_0 ,

$$\frac{\Delta n(x, z)}{n_0} \ll 1 \tag{3.20}$$

En el primer término de (3.18), $n(x, z)$ puede ser aproximado como n_0 con buena exactitud,

$$\left[\nabla_t^2 + k_0^2 n^2(x, z)\right]^{1/2} \approx \frac{\nabla_t^2}{\left[\nabla_t^2 + k_0^2 n_0^2\right]^{1/2}} + k_0 n_0 + k_0 \Delta n(x, z) \tag{3.21}$$

La amplitud compleja $E(x, z)$ se expresa como el producto de otra función $A(x, z)$ por un factor de propagación con velocidad constante, es decir,

$$E(x, z) = A(x, z) \exp(-ik_0 n_0 z) \tag{3.22}$$

Sustituyendo (3.22) en (3.17) y usando la aproximación dada por (3.21) se llega:

$$A(x, z + \Delta z) = \exp \left\{ -i \Delta z \left[\frac{\nabla_t^2}{\left[\nabla_t^2 + k_0^2 n_0^2 \right]^{1/2}} + k_0 n_0 \right] \right\} A(x, z) \tag{3.23}$$

$$\chi(x, z) = k_0 \Delta n(x, z) \tag{3.24}$$

Del primer término del factor exponencial en (3.23), es claro que se quiere calcular el campo eléctrico con la condición inicial $E(x, z) = A(x, z)$, para lo cual es necesario dividirlo en dos partes de tamaño $\Delta z/2$. Haciendo esto:

$$\begin{aligned} A(x, z + \Delta z) &= \exp \left\{ -i \frac{\Delta z}{2} \left[\frac{\nabla_t^2}{\left[\nabla_t^2 + k_0^2 n_0^2 \right]^{1/2}} + k_0 n_0 \right] \right\} * \exp(-i \chi(x, z) \Delta z) * \\ &* \exp \left\{ -i \frac{\Delta z}{2} \left[\frac{\nabla_t^2}{\left[\nabla_t^2 + k_0^2 n_0^2 \right]^{1/2}} + k_0 n_0 \right] \right\} A(x, z) + O(\Delta z^3) \end{aligned} \tag{3.25}$$

El término $O(\Delta z^3)$ se refiere al error cometido al dividir al factor exponencial en dos partes y también por cambiar la posición de uno de los operadores. Esto significa que los términos exponenciales en (3.25) no son coeficientes algebraicos pero sí son operadores diferenciales porque incluyen al operador Laplaciano ∇_t^2 . La ecuación (3.25) es la fórmula básica a seguir en el BPM.

Desde el punto de vista físico el primer factor está relacionado con la primera propagación libre, por lo que es equivalente a resolver la ecuación de onda para un medio homogéneo a una distancia $\Delta z/2$ con la condición inicial $E(x, z) = A(x, z)$.

Por tanto los tres factores exponenciales en (3.25) pueden ser representados como un medio homogéneo (de longitud $\Delta z/2$), con unas lentes que dan un corrimiento de fase $(-ik_0 \Delta n(x, z) \Delta z)$, y nuevamente con un medio homogéneo (de longitud $\Delta z/2$). En la Figura 3.3 se muestra más claramente este arreglo.

Mediante la aplicación consecutiva de la ecuación (3.24) se está avanzando a lo largo de la dirección z en la solución $A(x, z)$; lo que significa que el haz de luz se propaga a través de un arreglo periódico de lentes delgadas (estando la primera colocada a una distancia $\Delta z/2$ y, el resto de ellas separadas una de otra por una distancia de Δz).

Cada lente, además, provoca un corrimiento de fase $[ik_0 \Delta n(x, z) \Delta z]$ en el haz, mientras que la propagación entre las lentes está dada por la ecuación de onda para un medio homogéneo, es decir,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n_0^2 \right) E = 0$$

Así pues, la propagación del haz a través de un material puede ser tratada paso a paso.

Otra representación para la ecuación (3.25), es la obtenida a partir de la expansión en serie de Fourier de la amplitud $A(x, z)$:

$$A(x, z) = \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} A_m(z) \exp(ik_{xm} x) \tag{3.26}$$

donde k_{xm} representa las longitudes de onda discretas y está definida como,

$$k_{xm} = \frac{2\pi}{L} m \tag{3.27}$$

(L es la anchura del área que se calcula, m corresponde a la discretización y N se refiere al número total de particiones que se hacen en el medio).

De acuerdo con la Figura 3.3a), la componente n-ésima de Fourier A_n en el punto $z + (\Delta z/2)$, puede obtenerse sustituyendo $\chi(x, z) = 0$ en (3.23) y usando también el hecho de que $\nabla_x^2 = -k_{xm}^2$ para llegar a que:

$$A_m\left(z + \frac{\Delta z}{2} - o\right) = \exp\left[-i \frac{\Delta z}{2} \frac{-k_{xm}^2}{(-k_{xm}^2 + k_0^2 N_0^2)^{1/2} + k_0 N_0}\right] A_m(z) \tag{3.28}$$

Podemos reconstruir la función A en el espacio real "detrás de la lente", $A[x, z + (\Delta z/2) - o]$, sustituyendo la componente de Fourier $A_m[z + (\Delta z/2) - o]$ en (3.26) y luego multiplicándolo por el "término de efecto de la lente", $\exp[-ik_0 \Delta l(x, z) \Delta z]$ en (3.25), tenemos la función en el espacio real "frente a la lente" (en el punto $z = z + (\Delta z/2) + o$):

$$A\left(x, z + \frac{\Delta z}{2} + o\right) = \exp[-ik_0 \Delta l(x, z) \Delta z] A\left(x, z + \frac{\Delta z}{2} - o\right) \tag{3.29}$$

Las siguientes componentes de Fourier $A_m[z + (\Delta z/2) + o]$ son calculadas numéricamente usando el algoritmo FFT (Fast Fourier Transform)⁵. Las componentes A_m en el punto $z = z + \Delta z$, después de que el haz se ha propagado en la región con longitud $(\Delta z/2)$, son calculadas de nuevo mediante la aplicación de la ecuación (3.28). Finalmente la función $A(z + \Delta z)$ se obtiene de (3.26).

Es así como se calcula la propagación de un haz de luz sobre una rebanada del material. Por supuesto que el cálculo de (3.26) puede ser omitido si el perfil del haz (la distribución de su intensidad) en este punto, no es requerido. El cálculo continúa en la siguiente partición y así sucesivamente hasta recorrer toda la muestra (Figura 3.4).

⁵ Ver Apéndice C

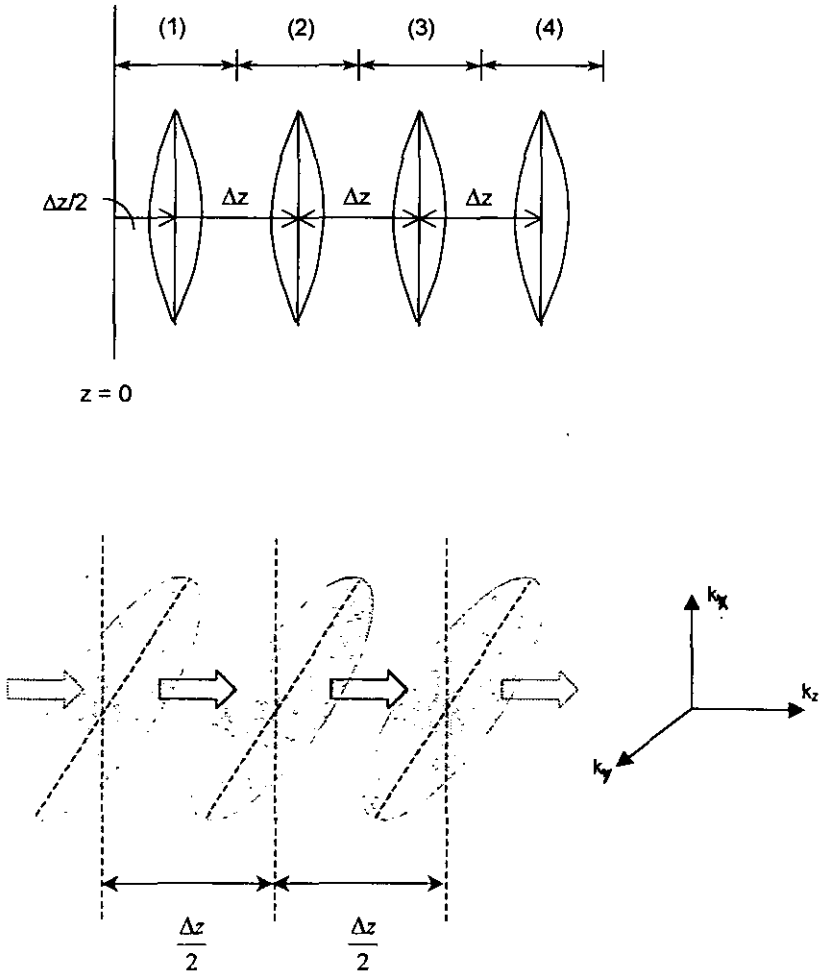


Figura 3.3 a) Superior. Arreglo de lentes equivalente a la transformación expresada en la ecuación (3.25) donde se han hecho 4 particiones en el material. Una sección consiste de un medio uniforme de longitud $\Delta z/2$, una lente delgada, y un medio uniforme de longitud $\Delta z/2$ (desde (1)). *Nota:* Las lentes sólo están representando el cambio de índice de refracción promedio, es decir, una corrección de fase. **b) Inferior.** Intervalo i -ésimo en donde las flechas punteadas indican las propagaciones libres y los ejes coordenados las direcciones de propagación.

Recapitulando: Se quieren investigar los efectos sufridos por un haz de luz gaussiano cuando éste se propaga en el interior de un medio previamente grabado. El problema básico es propagar un campo eléctrico a través de un material con un espesor finito $z = L$, sujeto a la condición inicial $z = 0$. Para resolverlo se utilizará el método de propagación de haces que consiste en dividir la distancia L en N intervalos de longitud Δz cada uno, y a su vez cada intervalo es dividido en dos.

Sea el i -ésimo intervalo el que se muestra en la Figura 3.3b). En la primera mitad de este intervalo se realiza una propagación libre a través de la siguiente expresión:

$$\text{propagador} = \exp \left[-i \frac{k^2 \Delta z}{2(k_0 + \sqrt{k_0^2 + k^2})} \right] \approx \exp \left[-i \frac{k^2 \Delta z}{2k_0} \right]; \quad k_0 = 2\pi/\lambda$$

Esto último se debe multiplicar por la transformada rápida de Fourier \mathfrak{F} del campo eléctrico inicial,

$$E(x, z=0) = E_0 \exp \left[\frac{-(x-x_0)^2}{W_0^2} \right]; \quad x_0 \text{ es el centro del haz y } W_0 \text{ la anchura inicial}$$

A continuación se aplica la transformada rápida de Fourier inversa \mathfrak{F}^{-1} para regresar al espacio de configuración. Con ello es posible calcular el valor del campo eléctrico: $E(x, z = \Delta z/2)$. Justamente en esta parte central se realiza una corrección o modulación de fase donde se incluyen los cambios de índice de refracción, esto es $n(x, z) = n_0 + \Delta n(x, z)$ y se ha supuesto, por ejemplo, que en la dirección x la variación es $m \cos kx$. Es decir, se multiplica este campo por la expresión:

$$\text{modulador} = \exp[-ik_0 \Delta z] \Delta n(x, z)$$

Finalmente se efectúa otra propagación libre entre los últimos dos planos tomando como condición inicial: $E(x, z = \Delta z/2)$ modulada en fase y así obtener $E(x, z = \Delta z)$. Esto se repite N veces hasta recorrer toda la muestra. El programa de cómputo basado en el algoritmo numérico del BPM se realizó en lenguaje FORTRAN.

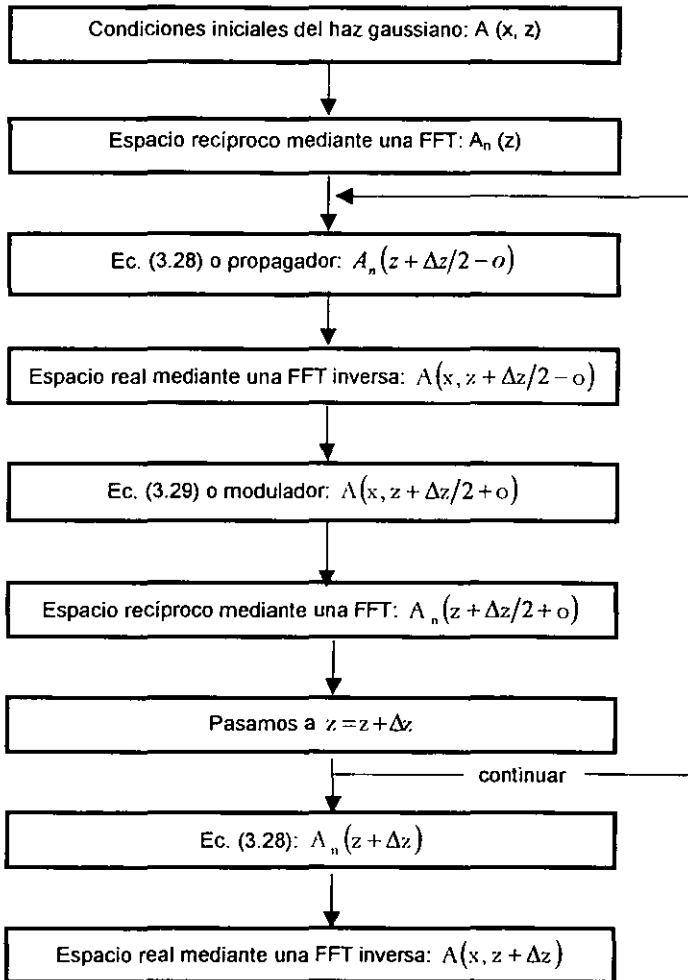


Figura 3.4 Diagrama de flujo del algoritmo numérico Beam Propagation Method

La información grabada en el cristal fotorrefractivo BSO se calcula previamente a través de la solución numérica de las ecuaciones de Kukhtarev (también conocidas como ecuaciones del material) y de la solución numérica de las ecuaciones del acoplamiento de los haces de grabado (beam coupling) en el material. Esta información queda contenida -vía el efecto electro-óptico Pockels- en la variación del índice de refracción, $\Delta n(z)$ [13]. La variación del índice de refracción utilizada está dada en la Gráfica 1.

El haz de luz incidente tuvo un perfil del tipo gaussiano cuyos parámetros más importantes se muestran en la Gráfica 2. La intensidad del haz se encuentra normalizada a la unidad.

Inicialmente se hace propagar este haz en un medio dieléctrico lineal con índice de refracción constante: $n = 1$, $n = 2.5$ y $n = 3$. En la Gráfica 3 se compara la variación de la anchura del haz con el espesor en cada uno de estos medios. Para todos los casos el haz tiende naturalmente a ensancharse, o bien a dispersarse.

La variación de la anchura del haz gaussiano con el espesor dentro de un material fotorrefractivo con índice de refracción variable previamente grabado también se muestra en la Gráfica 3. El efecto de este medio sobre el haz es apreciable, ya que exhibe una tendencia hacia el enfocamiento, es decir, una disminución en la anchura.

Este enfocamiento resulta entonces del efecto de la propagación del haz en el interior del material grabado y no por la interacción del haz con este medio, es decir, el haz no va alterando al índice de refracción. Si esto sucediera el haz se autoenfocaría gracias a la no linealidad del medio (recuérdese que el cristal BSO es un medio no lineal tipo Pockels).

Dado que no se está considerando un factor de absorción en los distintos medios de propagación es de esperarse que la energía del haz gaussiano se conserve, lo cual se ha verificado para todos los casos con sólo calcular la integral de la función gaussiana correspondiente.

Con el propósito de darle un seguimiento posterior al haz gaussiano se propuso - en principio- que la variación en el índice de refracción para espesores mayores a 2.5 cm. sería asintóticamente decreciente hasta los 6 cm. Tal extrapolación numérica se ilustra en la Gráfica 4.

En la Gráfica 5 se compara la variación de la anchura del haz con el espesor para un medio dieléctrico lineal con índice de refracción constante: $n=1$, $n=2.5$ y $n=3$ considerando la extrapolación anterior. En todos los casos se observa nuevamente que el haz tiende a ensancharse; sin embargo cuando el medio se vuelve ópticamente más denso (es decir, cuando el índice de refracción aumenta) el haz de luz se ensancha lentamente.

Partiendo de la extrapolación numérica para $\Delta n(z)$ mostrada en la Gráfica 4 es posible comparar la variación de la anchura del haz gaussiano con el espesor para cada uno de los medios con índice de refracción constante (Gráfica 6).

En esta misma gráfica para la propagación del haz en un medio fotorrefractivo se obtuvo que continúa su notable tendencia al enfocamiento, lo que parece indicar que el material grabado con este perfil de índice de refracción se comporta como un medio no dispersivo. Además de que este poder de enfocamiento (también llamado poder de dispersión espacial) se puede controlar dependiendo de las condiciones que se impongan sobre el medio. En cambio, si el haz se propaga a través de un medio con índice de refracción constante, nuevamente tiende a ensancharse por lo tanto es un medio dispersivo.

De los resultados obtenidos se concluye que cuando el haz se propaga en medios dieléctricos con índice de refracción constante tiende a ensancharse¹.

¹ Como la distancia de propagación a través del medio es grande, el pulso se dispersa en el tiempo y se ensancha.

El estudio relacionado con la propagación de pulsos en un medio dispersivo es útil en la transmisión de pulsos ópticos a través de fibras ópticas.

Un medio dispersivo está caracterizado por un índice de refracción dependiente de la frecuencia, por un coeficiente de absorción², y una velocidad de fase, tal que las ondas monocromáticas de diferentes frecuencias viajan en el medio con distintas velocidades y llevando a distintas atenuaciones.

En cambio cuando tenemos un material grabado cuyo perfil es como el de la Gráfica 1 -realista- el haz se enfocará. Esto sugiere que puede tenerse una manera alternativa de transmitir luz-sin que ésta sufra dispersión- con sólo grabar un perfil de índice de refracción en un material fotorrefractivo haciéndolo incidir a cualquier ángulo con la finalidad de aumentar o de disminuir el efecto dispersivo del material.

Teniendo un material fotorrefractivo con estas características es posible incluirlo dentro del grupo de materiales conocidos como GRIN ("graded-index") y así crear el mismo efecto sobre la luz que ejerce cualquier componente óptico como un prisma o una lente delgada. Esto nos permitiría:

- ✓ conducir luz de una manera más sencilla en comparación con la propagación de solitones (Apéndice C) en donde el arreglo experimental puede resultar más complicado. En el caso de grandes distancias se podría pensar en un arreglo de estos cristales, o bien, ser implementados en el diseño de sistemas ópticos.

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**

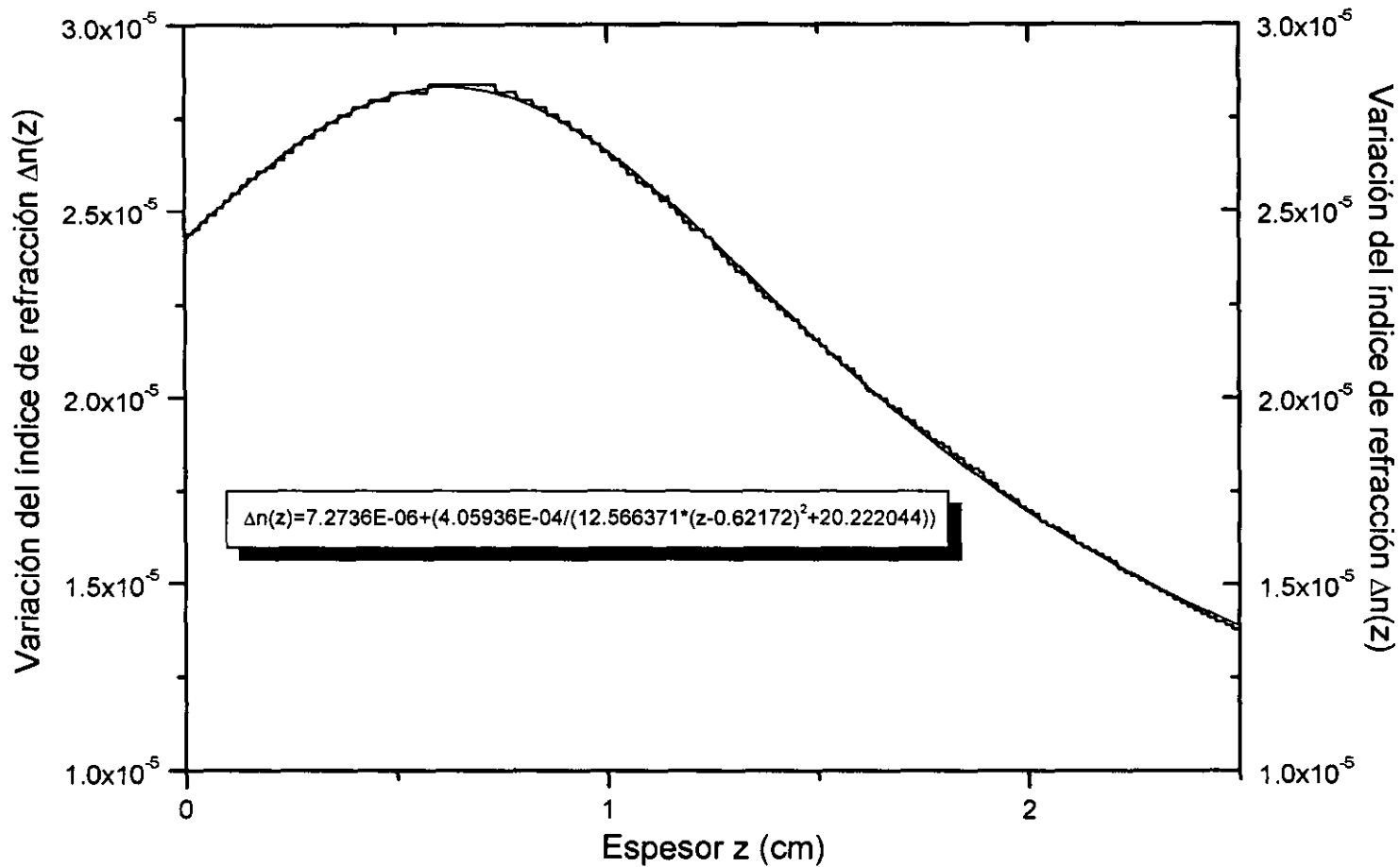
² También se le conoce como el coeficiente de absorción o coeficiente de extinción α y está dado por la expresión:

$$\alpha = \frac{2\omega n_1}{c}$$

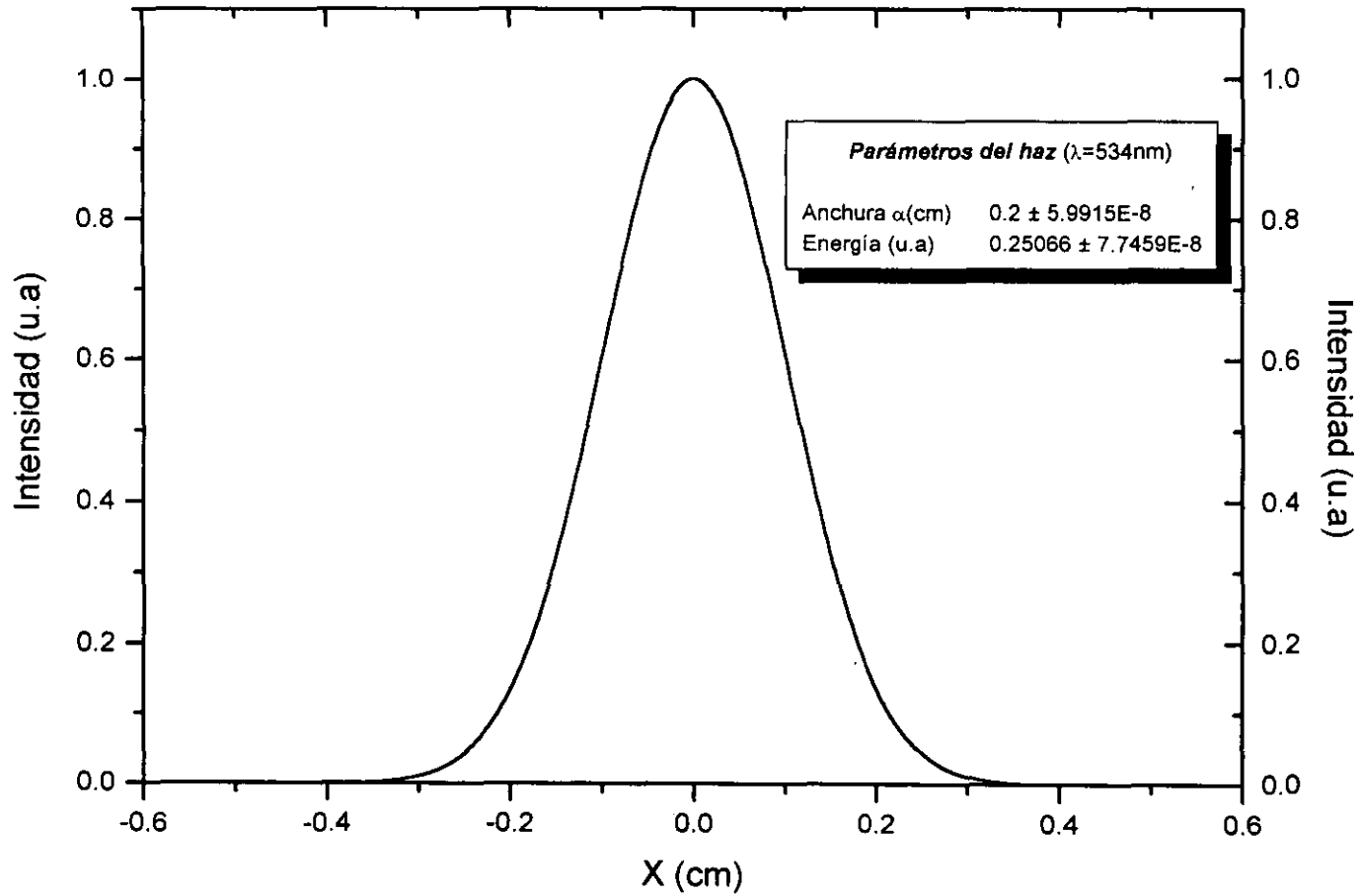
donde ω es la frecuencia de la onda; n_1 es la parte imaginaria del índice de refracción y c es la velocidad de la luz.

El método de propagación de haces³ (con transformada rápida de Fourier) permitió conocer el perfil del haz a una cierta distancia z y con ello medir su anchura. Es importante mencionar que para el tipo de problema que se estudió en este trabajo el método funciona adecuadamente siempre y cuando se excluyan los cambios abruptos en el índice de refracción y a las ondas reflejadas.

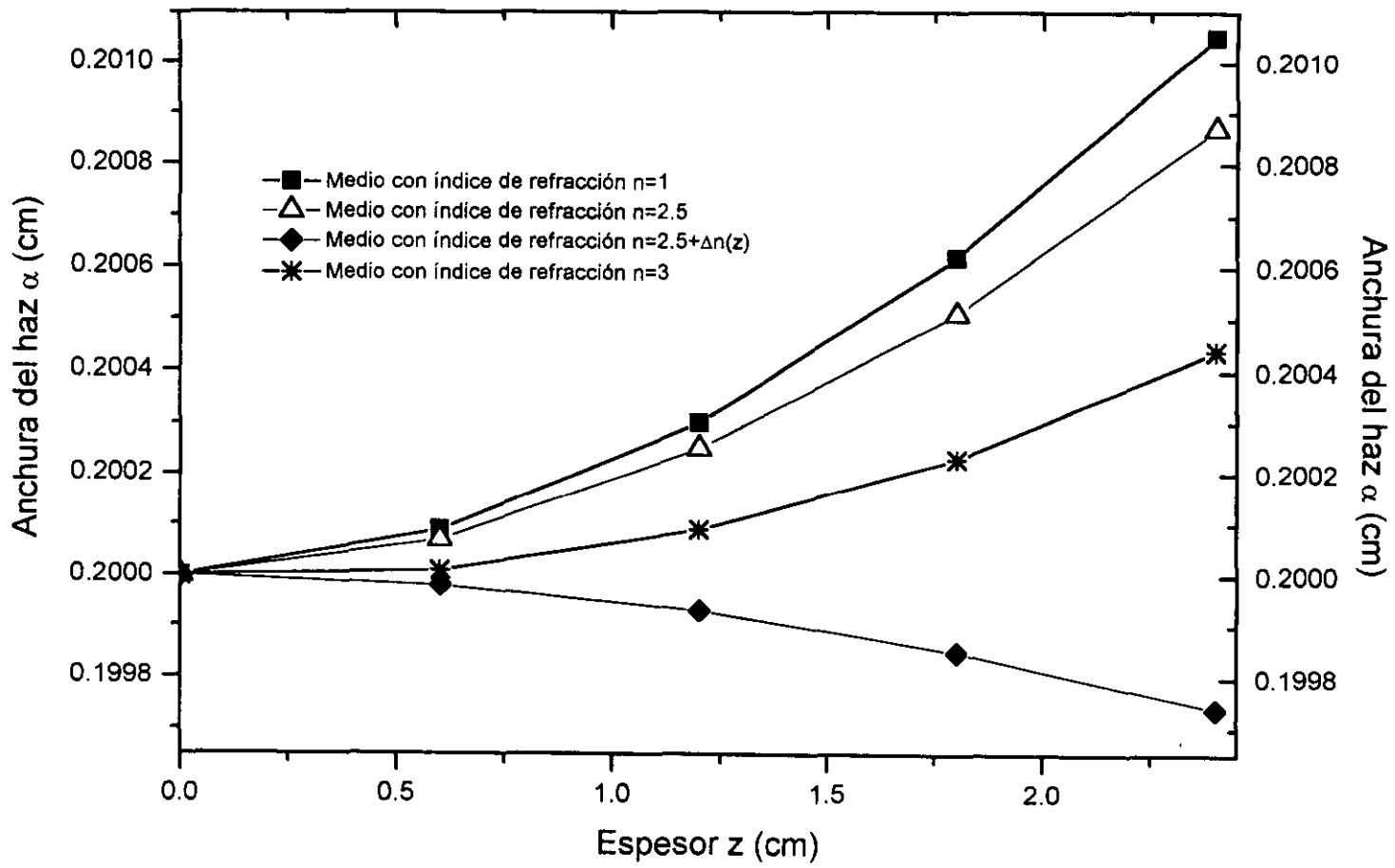
³ Algunos autores han hecho ligeras modificaciones al algoritmo -como el utilizar el método de diferencias finitas en lugar de la transformada rápida de Fourier- con la finalidad de estudiar la propagación de ondas en otros sistemas físicos como las guías de onda y las fibras ópticas.



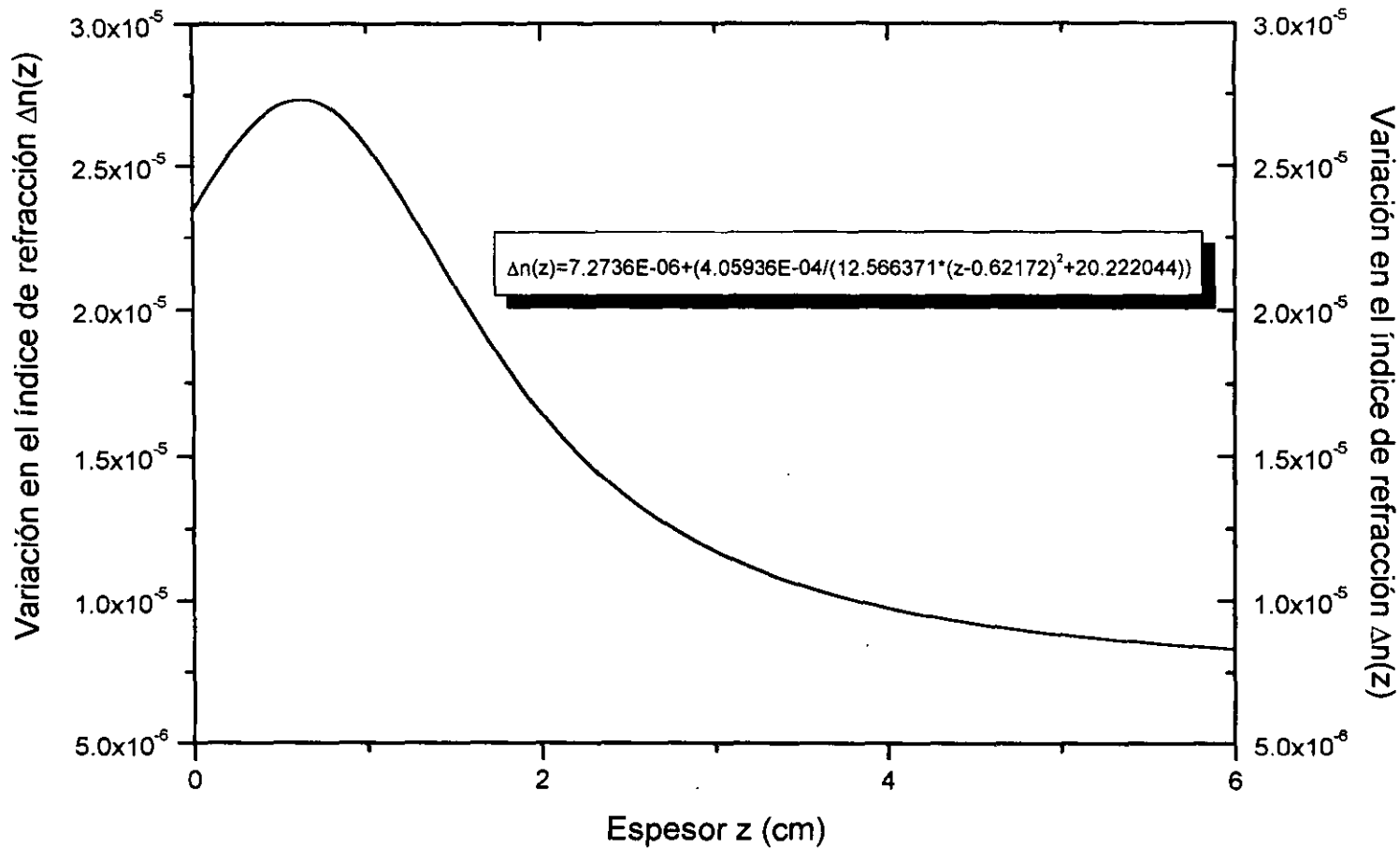
Gráfica 1: Variación del índice de refracción con el espesor en un cristal fotorrefractivo BSO



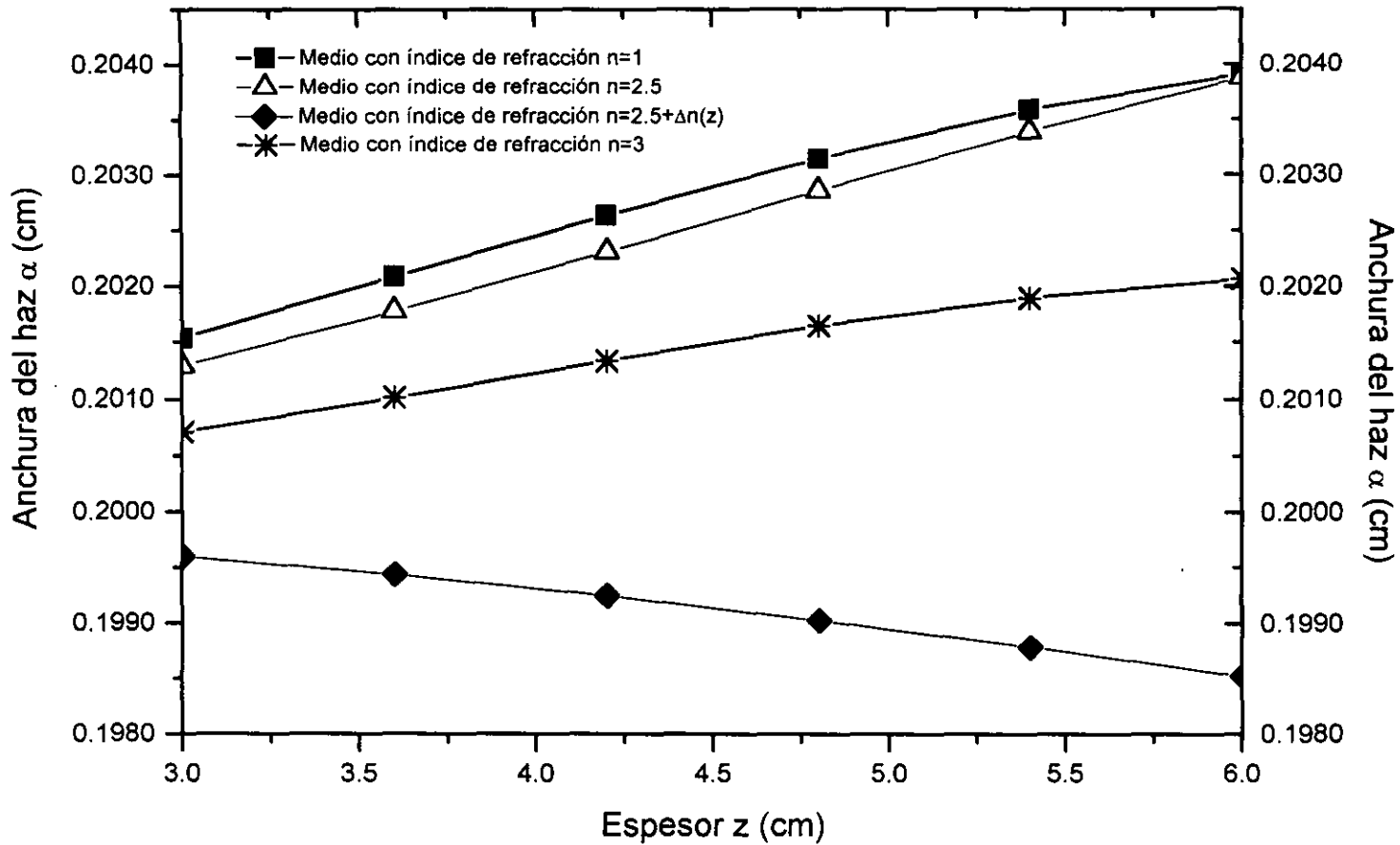
Gráfica 2: Perfil del haz de luz gaussiano incidente



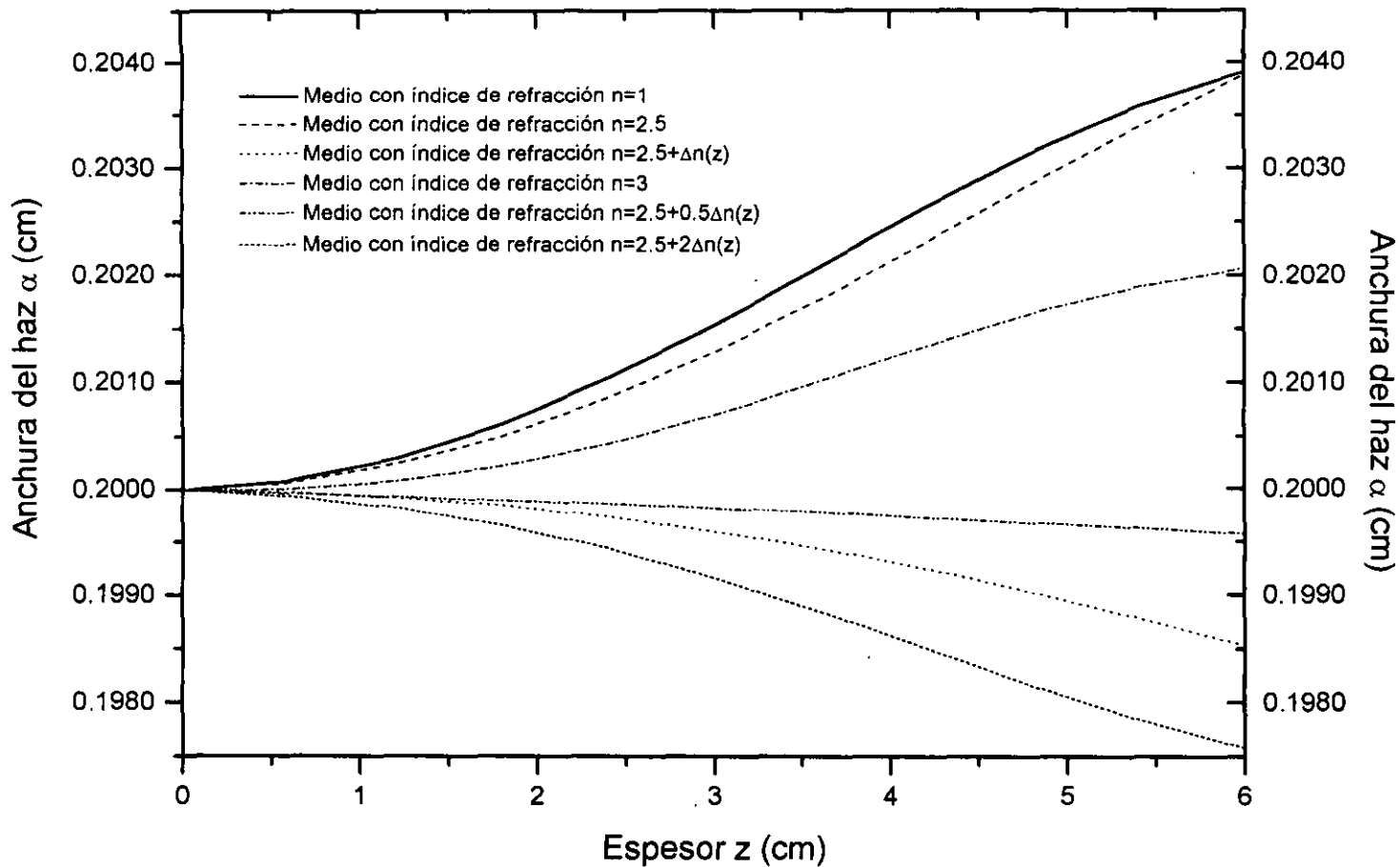
Gráfica 3: Variación de la anchura de un haz gaussiano con el espesor para medios de distinto índice de refracción.



Gráfica 4: Extrapolación numérica para la variación en el índice de refracción con el espesor en un cristal fotorrefractivo BSO. La extrapolación empieza en 2.5 cm.



Gráfica 5: Variación hipotética de la anchura de un haz gaussiano con el espesor para distintos medios de propagación. Se está utilizando la extrapolación mostrada en la Gráfica 4.



Apéndice A: FUNDAMENTOS DE ÓPTICA ELECTROMAGNÉTICA

La introducción de la corriente de desplazamiento, $\partial D/\partial t$, hace posible la existencia de las ondas electromagnéticas -como se demostrará más adelante- y es necesaria para mantener la conservación de la carga. De hecho esta es la gran contribución de Maxwell a la teoría electromagnética. Cuando se incluye al conjunto de ecuaciones, éstas ya cumplen la ecuación de continuidad. Por lo tanto:

LEY FÍSICA	FORMA DIFERENCIAL	FORMA INTEGRAL	
Ley de Gauss	$\nabla \cdot D = \rho$	$\oint D \cdot da = \int \rho dV$	(A.1)
Ley de Ampere	$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$	$\oint H \cdot ds = \int J \cdot da + \frac{\partial}{\partial t} \int D \cdot da$	(A.2)
Ley de Faraday	$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$	$\oint E \cdot ds + \frac{\partial}{\partial t} \int B \cdot da = 0$	(A.3)
Ausencia de monopolos magnéticos	$\nabla \cdot B = 0$	$\oint B \cdot da = 0$	(A.4)

Estas son las ecuaciones básicas (en el S.I.) que rigen los campos electromagnéticos producidos por fuentes de carga ρ y por densidades de corriente J . Si están presentes cuerpos materiales debe conocerse la relación entre la densidad del flujo eléctrico D y el campo eléctrico E ; similarmente la relación entre la densidad de flujo magnético B y el campo magnético H . Las dos ecuaciones que ayudan a definir estas relaciones son:

$$D = \epsilon_0 E + P \tag{A.5}$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} B - M \quad (\text{A.6})$$

en donde P es la *densidad de polarización*, y M es la *densidad de magnetización*¹.

Todo lo anterior junto con la ecuación de la fuerza de Lorentz, $F = q(E + v \times B)$, que describe la acción de los campos sobre partículas cargadas, da una descripción clásica completa de las partículas que interactúan electromagnéticamente.

Ecuación de onda

Una de los resultados más importantes al resolver las ecuaciones de Maxwell es la obtención de soluciones del tipo de ondas viajeras las cuales representan el transporte de energía de un punto a otro.

La ecuación de onda para H se deduce tomando el rotacional de (A.2):

$$\nabla \times \nabla \times H = \nabla \times J + \nabla \times \frac{\partial D}{\partial t}$$

Al tomar $D = \epsilon E$ y $J = gE$ y suponiendo que g y ϵ son constantes se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times H = g \nabla \times E + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times E$$

¹ En el espacio libre, $P = M = 0$, de tal forma que las ecuaciones (A.5) y (A.6) se reducen simplemente a $D = \epsilon_0 E$ y $B = \mu_0 H$. Mientras que en un medio dieléctrico, la densidad de polarización P es la suma macroscópica de los momentos dipolares eléctricos que el campo eléctrico induce, y análogamente se define para el caso de la densidad de magnetización M .

Si además se supone que E es una función bien comportada se puede intercambiar el orden de la derivada temporal y la derivada espacial. Se elimina el término $\nabla \times E$ usando la ecuación (A.3) y $B = \mu H$:

$$\nabla \times \nabla \times H = -g\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

Para las dos últimas ecuaciones se ha supuesto que el medio es lineal y no dispersivo ya que los parámetros (g , ϵ y μ) no dependen explícitamente del campo o de los valores del tiempo.

Al aplicar la identidad vectorial, $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ y restringir la aplicación de la ecuación a un medio libre de carga de modo que $\nabla \cdot D = 0$, se tiene,

$$\nabla^2 H - \epsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Análogamente se obtiene la ecuación de onda para E ;

$$\nabla^2 E - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Las ecuaciones de onda (A.7) y (A.8) rigen el campo electromagnético en un medio lineal homogéneo en el que la densidad de carga es cero, sea este un medio conductor o no.

Para la obtención de la ecuación de onda correspondiente a un medio dieléctrico no lineal y sin fuentes se aplica el operador rotacional a la ecuación (A.3), y usando la relación $B = \mu_0 H$ en la ecuación (A.2) se tiene:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \quad (\text{A.9})$$

Luego, de la relación (A.5) y de la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ se llega a:

$$\nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (\text{A.10})$$

Si además el medio es homogéneo e isotrópico se concluye que $\nabla \cdot E = 0$ y como $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c_0^2$ se tiene finalmente que:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (\text{A.11})$$

Óptica no lineal

Hasta hace unos pocos años, se pensó que todos los medios ópticos eran lineales. La suposición de la linealidad en un medio óptico tuvo sus consecuencias: las propiedades ópticas, como el índice de refracción y el coeficiente de absorción, son independientes de la intensidad luminosa; el principio de superposición se sostiene; la frecuencia de la luz no podía ser alterada en su paso a través del medio; y la luz no puede interactuar con luz (esto es, dos haces de luz en la misma región de un medio lineal no pueden tener efecto uno sobre el otro).

No fue sino hasta la invención del láser en 1960 que se logró examinar el comportamiento de la luz en materiales utilizando intensidades cada vez mayores.

Algunos de los experimentos diseñados para este fin mostraron claramente que los medios ópticos exhiben un comportamiento no lineal: el índice de refracción, y en consecuencia la velocidad de la luz en un medio óptico, cambian con la intensidad luminosa; se viola el principio de superposición; la luz puede alterar su frecuencia conforme pasa a través de un material óptico no lineal; y la posibilidad de que los fotones interactúen.

La linealidad (o no linealidad) es una propiedad del medio a través del cual la luz viaja, más que una propiedad intrínseca de la luz. La presencia de un campo óptico modifica las propiedades del medio, el cual modifica a su vez al campo original.

A continuación se explican la óptica no lineal de segundo y de tercer orden, efecto Pockels y efecto Kerr, respectivamente.

Efectos electro-ópticos

El índice de refracción de un medio electro-óptico es una función $n(E)$ del campo eléctrico aplicado E . Esta función varía ligeramente con E de tal manera que es posible hacer una expansión en series de Taylor alrededor de $E = 0$, esto es,

$$n(E) = n + a_1 E + \frac{1}{2} a_2 E^2 + \dots \quad (\text{A.12})$$

donde los coeficientes de expansión son $n = n(0)$, $a_1 = (dn/dE)|_{E=0}$ y $a_2 = (d^2n/dE^2)|_{E=0}$. Es conveniente expresar la ecuación (A.12) en términos de dos nuevos coeficientes conocidos como *coeficientes electro-ópticos*² siendo estos: $r = -2a_1/n^3$ y $s = -a_2/n^3$.

² Los valores de estos coeficientes dependen de la dirección del campo aplicado y de la polarización de la luz.

$$n(E) = n - \frac{1}{2} \Gamma n^3 E - \frac{1}{2} S n^3 E^2 + \dots \quad (\text{A.13})$$

Los términos de segundo y de orden más alto de las series anteriores son más pequeños que n en algunos órdenes de magnitud. Los términos más grandes que el tercero, pueden despreciarse.

Los valores de los coeficientes Γ y S dependerán de la dirección del campo eléctrico aplicado y de la polarización de la luz.

a) Efecto Pockels

En algunos materiales el tercer término de la ecuación (A.13) es despreciable en comparación con el segundo (Figura A.1a) por lo que:

$$n(E) \approx n - \frac{1}{2} \Gamma n^3 E \quad (\text{A.14})$$

El medio es entonces conocido como *medio Pockels* (o celda Pockels). El coeficiente Γ es llamado *coeficiente Pockels* o *coeficiente electro-óptico lineal*. Los valores de Γ caen dentro del rango de 10^{-12} a 10^{-10} m/V (1 a 100 pm/V).

Por ejemplo, si el medio que exhibe un comportamiento tipo Pockels es anisotrópico³, los coeficientes electro-ópticos correspondientes conforman un tensor de grado tres $\{\Gamma_{ijk}\}$.

³Un medio dieléctrico es *anisotrópico* si sus propiedades ópticas macroscópicas dependen de la dirección. Esto se debe a que las moléculas están organizadas en el espacio siguiendo un patrón periódico y orientados en la misma dirección (como en un cristal).

Los materiales más comúnmente utilizados como celdas Pockels incluyen $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ (ADP), KH_2PO_4 (KDP), LiNbO_3 , LiTaO_3 y CdTe .

b) Efecto Kerr

Si el material es centrosimétrico⁴, como en el caso de gases, líquidos y ciertos cristales, $n(E)$ debe ser una función par simétrica (Figura A.1b)). Su primera derivada se anula, entonces el coeficiente r debe ser cero,

$$n(E) \approx n - \frac{1}{2} s n^3 E^2 \quad (\text{A.15})$$

El material es conocido como medio Kerr (o celda Kerr). El parámetro s es llamado *coeficiente Kerr o coeficiente electro-óptico cuadrático*. Los valores de s caen dentro del rango de 10^{-18} a $10^{-14} \text{ m}^2/\text{V}^2$ en cristales y de 10^{-22} a $10^{-19} \text{ m}^2/\text{V}^2$ en líquidos.

La ecuación (A.15) también puede ser escrita como una función lineal de la intensidad óptica I :

$$n(I) = n + n_2 I \quad (\text{A.16})$$

donde⁵,

$$n_2 = \frac{3n_0}{n^2 \epsilon_0} \chi^{(3)} \quad (\text{A.17})$$

⁴Se dice que un material es centrosimétrico cuando tiene centro de inversión, esto es, que la estructura molecular posee simetría central.

⁵ Una manera alternativa de escribir a la ecuación (A.16) es: $n(I) = n + n_2 |E|^2 / 2$ con n_2 difiriendo de la ecuación (A.17) en un factor η .

El coeficiente $\chi^{(3)}$ representa la no linealidad de tercer orden y η_0 es la impedancia del espacio libre ($\approx 377\Omega$).

El orden de magnitud del coeficiente n_2 (en unidades de cm^2/W) es 10^{-16} a 10^{-14} en vidrios, 10^{-14} a 10^{-7} en vidrios contaminados, 10^{-10} a 10^{-8} en materiales orgánicos, y 10^{-10} a 10^{-2} en semiconductores.

Análogamente al caso anterior si el medio es anisotrópico los coeficientes electro-ópticos correspondientes son $\{S_{ijkl}\}$ conformando un tensor de grado cuatro.

Entre los dispositivos cuyo comportamiento es tipo Kerr sobresale el nitrobenzeno, sin embargo, también se utilizan cerámicas electro-ópticas transparentes y estructuras semiconductoras.



Figura A.1 Dependencia del índice de refracción con el campo eléctrico: a) Medio Pockels; b) Medio Kerr

Apéndice B: TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

Una gran variedad de problemas computacionales caen dentro de los llamados "métodos de transformada de Fourier" o "métodos espectrales". Para algunos de estos problemas, la transformada de Fourier es simplemente una herramienta bastante eficiente para conocer la evolución de un sistema con el tiempo. En otros casos, se tienen problemas para los cuales la transformada de Fourier sirve para "limpiar" la información de manera muy selectiva como es el caso de las comunicaciones. Si se utiliza la expresión analítica de la transformada de Fourier directamente en la computadora resulta muy ineficaz, en gran medida por la gran cantidad de tiempo empleado. Es por ello que a mediados de la década de los 60, J. W. Cooley y J. W. Tukey implementaron una rutina basada en el algoritmo de Danielson y Lanczos que hoy se conoce como FFT (Fast Fourier Transform). Este algoritmo calcula la transformada de Fourier entre dos intervalos conocidos como *frecuencias de corte*. Sólo se mencionarán algunos detalles del mismo que son importantes para entender cómo trabaja.

Un proceso físico puede ser descrito en el dominio de tiempo, a través de una función continua $h(t)$ donde el tiempo discretizado en N intervalos regulares Δ tomará los valores $t_k = k\Delta; k = 0, 1, \dots, N-1$, o bien en el dominio de las frecuencias, donde este proceso queda caracterizado por su amplitud H (generalmente es un número complejo que también indica la fase) como una función de la frecuencia f , es decir, $H(f)$ donde se debe cumplir que $-\infty < f < \infty$. Para algunos propósitos es útil pensar que $h(t)$ y $H(f)$ son dos representaciones diferentes de la misma función. Sin pérdida de generalidad la transformada de Fourier directa e inversa se calculan mediante las siguientes relaciones:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi ft} dt \quad (\text{B.1})$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-2\pi ft} df \quad (\text{B.2})$$

De las ecuaciones anteriores es evidente que la transformada de Fourier es una operación lineal: la transformada de una suma de dos funciones es igual a la suma de las transformadas y la transformada de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la transformada de la función.

Ahora se estimará la transformada de Fourier de una función a partir de un número finito de puntos. Para ello se suponen N valores consecutivos, tal que el intervalo sea Δ ,

$$h_k \equiv h(t_k) ; t_k \equiv k\Delta , k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{B.3})$$

En lugar de obtener la transformada de Fourier, $H(f)$ para todos los valores comprendidos en el intervalo $[-f_c, f_c]$, conviene calcular sólo los valores discretos,

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta} , n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (\text{B.4})$$

El siguiente paso es aproximar las integrales (B.1) y (B.2) por una suma discreta:

$$H(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi j f_n t} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi j f_n t_k} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi k n / N} \quad (\text{B.5})$$

Aquí se han usado las ecuaciones (B.3) y (B.4). De hecho la última suma en (B.5) es conocida como la *transformada discreta de Fourier* de los N puntos h_k , esto es:

$$H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi k n / N} \quad (\text{B.6})$$

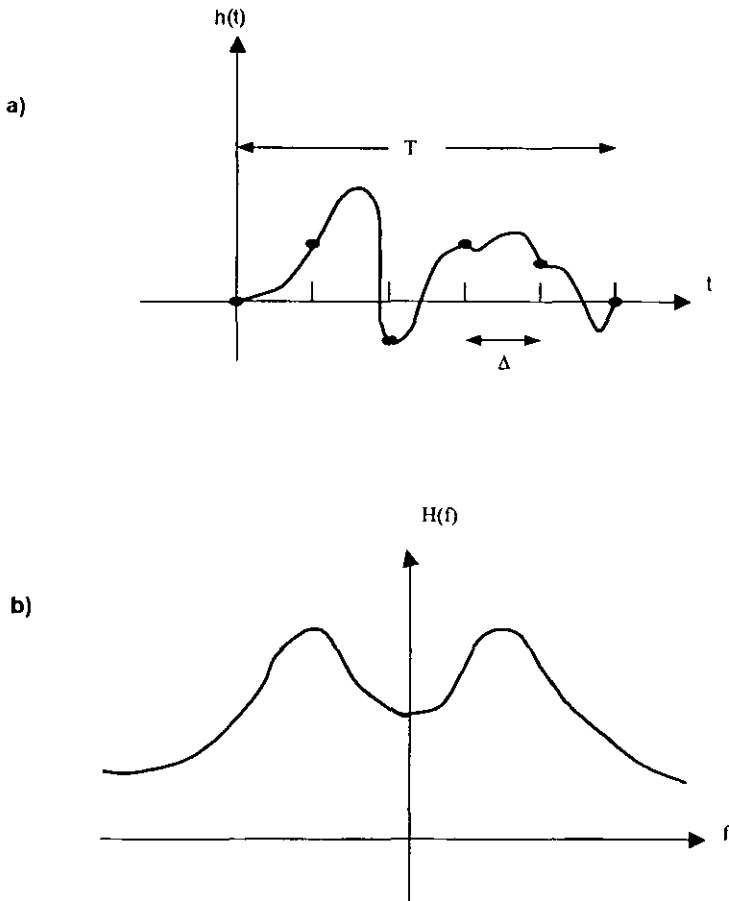


Figura B.1 a) la función continua, $h(t)$ donde el tiempo está discretizado, $t_k = \Delta k$, b) la correspondiente transformada de Fourier discretizada, $H(f_n)$, en el dominio de las frecuencias f_n con separación $1/N\Delta$. Obsérvese que la transformada está definida en el intervalo donde $f_c = 1/2\Delta$ es la llamada frecuencia de corte.

Con lo anterior se está mapeando N números complejos (h_k 's) en N números complejos (H_n 's). Esto no depende de algún parámetro adimensional, por ejemplo Δ .

La transformada inversa de Fourier discreta es:

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{2\pi kn/N} \quad (\text{B.7})$$

Obsérvese que las diferencias entre la ecuación (B.6) y (B.7) son el cambio de signo en la exponencial y la división entre N . Esto significa que se puede tener una rutina que calcule la transformada discreta de Fourier y, con una ligera modificación, calcular la correspondiente transformada inversa.

Generalmente al resolver un problema que involucra el cálculo de las transformadas de Fourier se comienza en el espacio de coordenadas. Una vez allí se utiliza (B.6) para realizar todas las operaciones requeridas por el problema en cuestión y después se regresa al espacio de las coordenadas a través de (B.7). El efectuar estos cambios de espacio real (coordenadas) a espacio recíproco (frecuencias) hace que sucesivamente se vaya eliminando la dependencia en Δ .

Para implementar la rutina comúnmente se define un número complejo W como, $W \equiv e^{2\pi/N}$; por lo que (B.6) queda escrita así:

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} h_k \quad (\text{B.8})$$

que es el producto del vector h_k por la matriz W^{nk} . Este producto matricial consume alrededor de N^2 multiplicaciones complejas, más un pequeño número de operaciones que generan las potencias requeridas para W .

Dada la gran cantidad de tiempo de cómputo que se invierte para calcular todas las operaciones anteriores, motivó a Danielson y Lanczos para plantear un algoritmo llamado Transformada Rápida de Fourier (FFT, *Fast Fourier Transform*).

Este algoritmo consiste en separar la transformada discreta en dos sumas, una sobre los índices pares y otra sobre los impares, esto es:

$$\begin{aligned}
 F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi kn/N} f_n \\
 F_k &= \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-2\pi k(2n)/N} f_{2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-2\pi k(2n+1)/N} f_{2n+1} \\
 F_k &= \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-2\pi kn/(N/2)} f_{2n} + W^k \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-2\pi kn/(N/2)} f_{2n+1} \\
 F_k &= F_k^{\text{pares}} + W^k F_k^{\text{impares}}
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

donde se ha reducido el cálculo a dos transformadas de tamaño $N/2$. Aplicando nuevamente el algoritmo, para cada una de las sumas, se tendrán cuatro transformadas de tamaño $N/4$, y así sucesivamente hasta llegar a una transformada de tamaño uno, que es el valor inicial.

La rutina FFT trabaja con N en múltiplos enteros de 2, pero si no se tienen datos suficientes se deben completar con ceros [XXVI].

Apéndice C: ONDAS LLAMADAS SOLITONES

Uno de los problemas actuales relacionados con la comunicación es la propagación de información a través de grandes distancias para lo cual se han diseñado fibras ópticas. Sin embargo, cuando la extensión de estas fibras es considerable la razón de transmisión va disminuyendo. Para evitarlo se ha propuesto que una señal de onda tipo solitón sea tomada en cuenta para la construcción de nuevos sistemas trasatlánticos de fibra óptica.

Dada la importancia que tendrá la generación y propagación de los solitones en el futuro se proporciona al lector una introducción al estudio de los mismos haciendo especial énfasis en los solitones fotorrefractivos.

Definición de "solitón"

La palabra "solitón" sugiere una onda solitaria¹ que actúa como partícula; es decir, mantiene una identidad localizada (coherente) aún cuando interacciona con otros objetos también localizados. Comúnmente se adoptan las dos siguientes definiciones para el "solitón"¹.

La *definición formal* establece que un solitón es una onda no lineal localizada que recupera asintóticamente su forma y velocidad originales después de interactuar con cualquier otra perturbación localizada; siendo el único efecto duradero un corrimiento de fase. La *definición no formal* describe al solitón como a un objeto (entiéndase onda solitaria) localizado espacialmente, coherente que es dinámica y estructuralmente estable.

¹ En la década de los 60's se adoptó el término, sin embargo la investigación científica de solitones había comenzado ya en el siglo XIX cuando John Scott Russell observó una gran onda solitaria en un canal cerca de Edimburgo.

Es importante subrayar el hecho de que no todos los sistemas físicos admiten como solución al solitón, en este caso se dice que el problema es *integrable* o *completamente integrable* y en el caso contrario se denomina *no integrable*.

Dentro del conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que aceptan a los solitones como posibles soluciones se encuentran más de cien. Una de ellas - la llamada Ecuación de Schrödinger No Lineal^{II}- describe, entre otros, procesos físicos como las vibraciones de alta frecuencia de una red cristalina en sólidos, las ondas de Langmuir en un plasma, las ondas superficiales en agua profunda y, el fenómeno que nos interesa en este trabajo, la propagación de ondas electromagnéticas en un medio que responde de manera no lineal a la presencia de un campo eléctrico.

Los solitones -desde el punto de vista mecánico- se clasifican en dos grandes categorías: *solitones no topológicos* y *solitones topológicos o kinks*. Las soluciones de *solitones no topológicos* para las teorías clásicas de campo fueron introducidas hace muchos años por Rosen^{III}, y por Friedberg, Lee, y Sirlin^{IV}.

Se caracterizan porque el sistema regresa a su estado inicial después de que la onda se ha propagado. Las propiedades básicas son:

- I. La amplitud del solitón no topológico aumenta con la velocidad.
- II. Su anchura es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su velocidad.
- III. Es un pulso unidireccional, es decir, su velocidad no puede ser negativa.

Las condiciones^V necesarias para tener soluciones de solitón *no topológicos* son: a) la conservación de un número cuántico adicional, Q ; b) la presencia de un campo escalar neutro ($Q = 0$); c) el campo asociado tenga las mismas condiciones de frontera en $+\infty$ que en $-\infty$.

Un *solitón topológico* o *kink*² representa una región transiente donde el pulso conecta dos diferentes estados del medio huésped³. En consecuencia, el campo de fuerzas asociado al solitón cumple con condiciones de frontera que son distintas en $+\infty$ con respecto de $-\infty$. Esto significa que en algunos casos la estructura del sistema es modificada después de que ha pasado la onda. Las propiedades básicas del kink son:^{VI}

- I. La amplitud del kink es independiente de su velocidad; es constante y sigue siendo la misma para la velocidad cero: el kink puede ser estático.
- II. Su anchura va disminuyendo conforme la velocidad aumenta.
- III. Tiene las propiedades de una partícula relativista.
- IV. El kink que tiene un comportamiento diferente es conocido como antikink.

Los *solitones ópticos (espaciales y temporales)*⁴ y los *solitones fotorrefractivos* son solitones topológicos. Definimos al *solitón óptico* como un pulso de luz que viaja en un medio no lineal tipo Kerr (Apéndice A) sin perder su forma ni dispersarse. Esto significa que el enfocamiento que sufre al desplazarse se compensa con el efecto de difracción del medio.

² La Topología es el estudio de la clasificación de los objetos en clases cuyas formas son equivalentes. Este tipo de solitones son muy estudiados en materia condensada y en teoría de campos. En Física del Estado Sólido describen fluxones (cuantos de flujo magnético) en uniones Josephson (superconductor-aislante-superconductor), paredes de dominio en materiales ferromagnéticos o ferroeléctricos, crecimiento y dislocaciones en cristales, ondas de densidad de carga, etc.

³ En realidad cualquier ecuación de movimiento que se derive de un potencial que exhiba al menos dos mínimos (inclusive tener infinitos mínimos como en el caso de la ecuación Seno de Gordon) pueden dar solitones topológicos, pues el solitón es precisamente una solución que conecta esos mínimos. Otros ejemplos incluyen al solitón "dark" en una fibra óptica.

⁴ Existe un tipo muy especial de solitones ópticos, **las bolas luminosas**. Éstas se comportan como solitones espaciales pero también como temporales y dado que su energía luminosa está confinada a las tres dimensiones formando una bola por eso se llaman así.

Cuando un pulso luminoso que contiene un ancho de banda de frecuencias amplio viaja por un medio sin sufrir dispersión cromática, tenemos un *solitón temporal*. Si, por el contrario, el pulso es monocromático y viaja sin sufrir difracción, esto es, que no cambia la anchura del haz, se dice que tenemos un *solitón espacial*.

Hace unos años el grupo de Segev^{vii} descubrió la existencia de *solitones fotorrefractivos* y éstos a diferencia de los anteriores modifican el índice de refracción a través del efecto electro-óptico Pockels (Apéndice A).

Estudiando a los solitones

Las manifestaciones visuales de fenómenos no lineales tales como los tsunamis y las olas de marea fascinaron a la gente hasta antes de 1834, cuando John S. Russell observó que "un montón de agua bien definido y rodeado suavemente" se propagaba en un canal estrecho sin cambiar su forma ni su velocidad^{viii}. Años más tarde los científicos Johannes Korteweg y Gustave de Vries se dieron cuenta que este fenómeno requiere que el medio sea *no lineal*.

En 1965, Norman Zabusky y Martin Krushal descubrieron que estos pulsos localizados o "paquetes de onda" exhiben la siguiente propiedad: Cuando dos de estas ondas con diferente amplitud están localizadas en extremos opuestos a gran distancia una de la otra, cada una de ellas es aproximadamente una onda viajera con perfil y velocidad constantes. Conforme estas dos ondas solitarias se van acercando (interacción no lineal), gradualmente se deforman y finalmente se fusionan en un paquete de onda; este paquete, sin embargo, rápidamente se divide en dos ondas solitarias con el mismo perfil y con la misma velocidad que tenían antes de la "colisión". Concluyeron pues, que estos pulsos se comportan como partículas llamándolas *solitones*⁵. (Figura C.1).

⁵ Es importante aclarar que mientras un solitón es una onda solitaria que actúa como una partícula, las ondas solitarias serán solitones solo si cumplen con la propiedad descrita anteriormente.

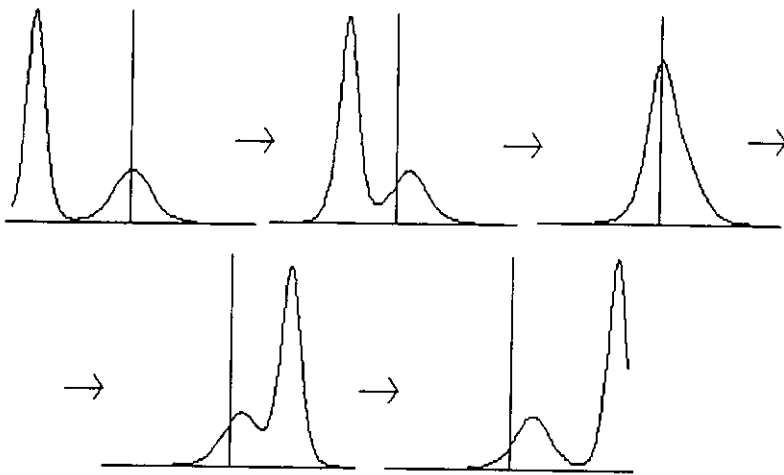


Figura C.1 Se muestran dos ondas solitarias viajando con velocidad y perfil constantes. Al sufrir una interacción no lineal, se fusionan en un solo paquete y éste a su vez se divide en dos ondas solitarias que preservan tanto la velocidad como su perfil aún después de la interacción, salvo por un corrimiento de fase. A las ondas solitarias que cumplen con esta propiedad se les llama solitones.

La estabilidad de los solitones proviene del balance entre la "no linealidad" y la "dispersión" en las ecuaciones que modelan fenómenos no lineales. La no linealidad lleva a la onda solitaria a concentrarse; la dispersión es el efecto que hace que tal onda se ensanche. Si uno de estos dos efectos se pierde, los solitones se hacen inestables y, eventualmente, dejan de existir.

a) Solitones con origen en el efecto Kerr

En la naturaleza los pulsos al propagarse en un medio lineal dispersivo tienden a ensancharse, en la óptica, un paquete de onda localizado en el espacio (un haz delgado) o en el tiempo (un pulso corto) generalmente se ensancha (Figura C.2(a))

La difusión espacial puede eliminarse usando guías de onda⁶. Cuando un intenso haz de luz pasa a través de un material homogéneo no lineal, el índice de refracción es alterado de manera no uniforme de tal forma que el medio puede actuar como una guía de onda con índice graduado. Entonces el haz puede crear su propia guía de ondas. Si la intensidad de este haz tiene la misma distribución espacial en el plano transversal como uno de los modos de la guía creada por el haz, éste se propaga sin cambiar su distribución espacial. Bajo estas condiciones la difracción es compensada por el efecto no lineal y el haz queda autoconfinado a un diámetro muy estrecho. A tales haces autoconfinados se les conoce como *solitones espaciales*^{ix} (Figura C.2(b)).

⁶ En el caso particular de guías dieléctricas cuando un haz se propaga -vía reflexión interna total- interfiere constructivamente con las reflexiones de tal manera que el haz queda confinado a permanecer entre las paredes.

Solitón espacial

El índice de refracción de un material no lineal está dado por:

$$n^2 = n_0^2 + n_2 f(I)$$

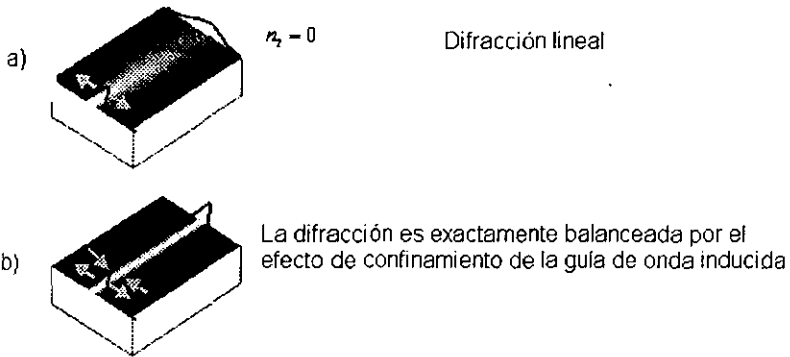


Figura C.2 a) En un medio lineal los haces tienen la tendencia natural de ensancharse durante la propagación debido a la difracción; b) Un solitón ocurre cuando el perfil de intensidad coincide con el modo de la guía de onda autoinducida.

Los *solitones ópticos*^x son un tipo de solitones espaciales que se pueden clasificar en dos tipos -según el fenómeno físico al que deben su ensanchamiento-: los *solitones ópticos temporales*⁷ y los *solitones ópticos espaciales*. Los primeros deben su anchura a la *dispersión cromática* (la dispersión de un prisma donde las diferentes longitudes de onda que constituyen a la luz no viajan a la misma velocidad). Los segundos se lo deben a la *difracción* (el hecho de que un haz luminoso de dimensión reducida converja naturalmente).

Para su estudio existen dos categorías principales: 1) solitones ópticos en medios resonantes; y 2) solitones ópticos en medios no resonantes⁸.

Los solitones ópticos tienen la peculiaridad de ser más estables que cualquier otro solitón previamente conocido. Es por ello que pueden viajar en otros tipos de medios -y no únicamente a través de fibras ópticas-. Dado el efecto de no linealidad elevado que presentan, estos solitones pueden ser también producidos con láseres de baja potencia. En la Figura C.3 se muestra la colisión entre dos solitones ópticos.

Posibles aplicaciones tecnológicas incluyen el almacenamiento óptico de grandes cantidades de información (usando luz con longitud de onda corta), y la fabricación de switches mucho más rápidos que los electrónicos^{x1}.

Si el medio en el cual se está propagando la onda es tipo Kerr, el efecto del que hemos estado hablando puede ser balanceado por la variación del índice de refracción n . Este índice de refracción es inducido por la acción del campo eléctrico E (Apéndice A):

⁷ Estos solitones fueron predichos por Hasegawa y Tappert y observados experimentalmente por Mollenauer et. al. El interés hacia ellos se ha incrementado en las últimas dos décadas ya que son considerados posibles candidatos para el diseño de sistemas de comunicación a grandes distancias.

⁸ Se dice que un medio dieléctrico es *resonante* cuando el movimiento de cada uno de sus enlaces interatómicos puede ser modelado fenomenológicamente por un oscilador armónico clásico. Y será *no resonante* en el caso que no sea posible tal aproximación.

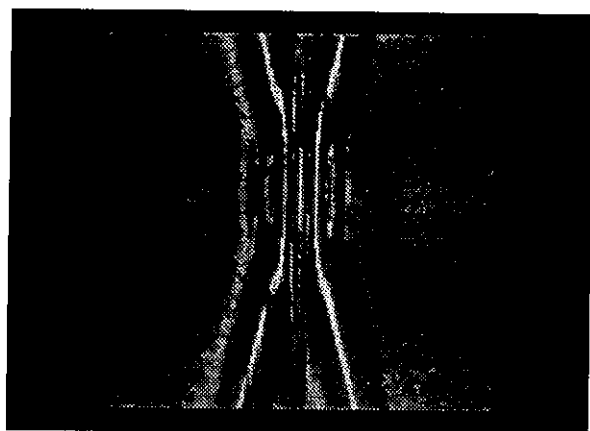
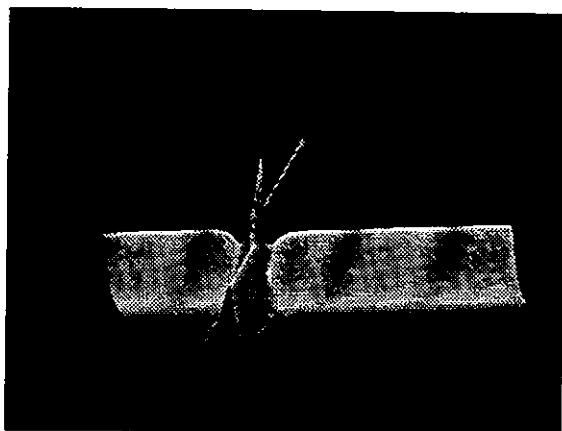


Figura C.3 En la fotografía superior se muestra la simulación por computadora de la colisión entre dos solitones ópticos. En la fotografía inferior se muestra experimentalmente la misma situación

$$n(I) = n + n_2 I; I = \frac{|E|^2}{2\eta} \tag{1}$$

donde n es el índice de refracción lineal, I es la intensidad del vector de Poynting, η es la impedancia del medio y n_2 es el coeficiente no lineal del material. Entonces para un valor de n_2 positivo, el efecto Kerr hace que la parte central del haz se retrase más en comparación con las orillas (Figura C.4).

Matemáticamente la luz autoguiada en este medio queda descrita a través de la ecuación de Helmholtz (2.25), y la relación (1). Esto resulta en una ecuación diferencial no lineal en E , que se simplifica escribiendo $E = A \exp(-jkz)$. Suponiendo que la envolvente $A = A(x, z)$ varía lentamente en la dirección z (en comparación con la longitud de onda) y que no varía en la dirección, usamos la siguiente aproximación: $(\partial^2/\partial z^2) [A \exp(-jkz)] \approx (-2jk \partial A/\partial z - k^2 A) \exp(-jkz)$ para obtener:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2jk \frac{\partial A}{\partial z} + k_0^2 [n^2(I) - n^2] A = 0 \tag{2}$$

Dado que el efecto no lineal es pequeño, la ecuación (2) se reduce a :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{n_2}{\eta_0} k^2 |A|^2 A = 2jk \frac{\partial A}{\partial z} \tag{3}$$

A la última se le conoce como ecuación no lineal de Schrödinger (NLS).

La solución para un solitón, *el solitón espacial fundamental*, corresponde a:

$$A(x, z) = A_0 \operatorname{sech} h \left(\frac{x}{W_0} \right) \exp \left(-j \frac{z}{4z_0} \right) \tag{4}$$

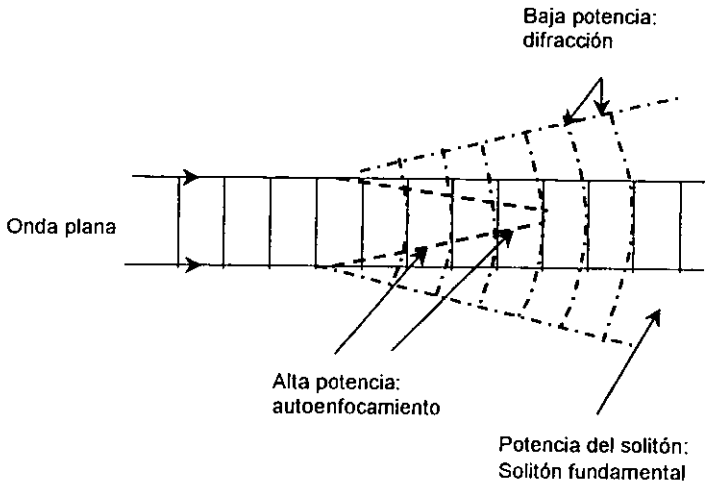


Figura C.4 Propagación de una onda plana en un medio no lineal tipo Kerr. A potencias bajas el haz se ensancha debido a la difracción. A potencias altas el haz se autoenfoca. A potencias de solitón el haz se propaga sin la variación de su dimensión transversal.

A este solitón se le conoce como "*bright*" ya que al propagarse tiende a concentrar más la luz en el centro, mientras que en los extremos se atenúa (Figura C.5a).

También es posible la solución en la que se tiene la periferia brillante y el centro oscuro. Este es el solitón "*dark*" cuya solución es una tangente hiperbólica. Experimentalmente también han sido observados y se identifican mediante descensos rápidos (de corta duración) en la intensidad de una onda de luz continua (Figura C.5b)

El uso de los solitones ópticos abre nuevas expectativas para la transmisión sin interferencia -ya que son altamente estables ante las perturbaciones causadas por irregularidades en la fibra óptica y a interferencia externa- además de ofrecer inmunidad ante el ruido.

Una aplicación bastante interesante y útil es el *láser de solitón* desarrollado en 1984 por Mollenauer y Stolen. La idea básica es usar la fibra óptica como elemento de retroalimentación no lineal en una cavidad láser. De esta forma es posible generar pulsos limitados de picosegundos de anchura arbitraria^{xii}.

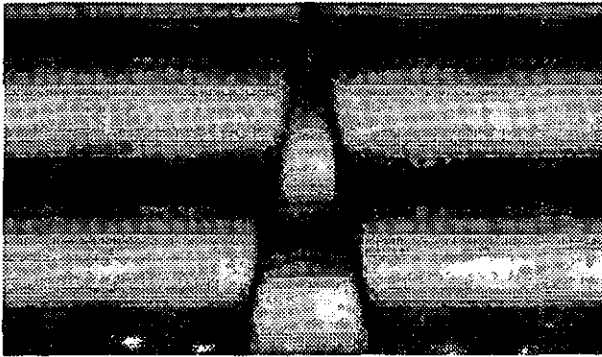
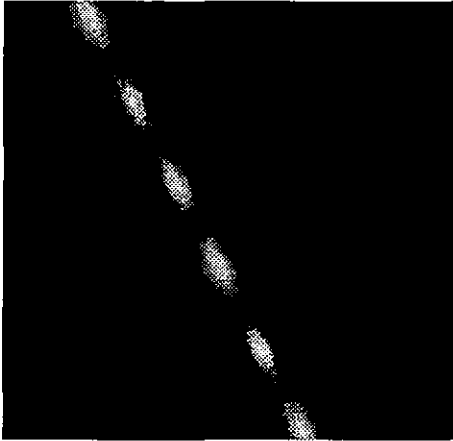


Figura C.5 a) La fotografía superior muestra a un solitón "bright" b) En la fotografía inferior se ilustra a un solitón "dark" Ambos son soluciones de la ecuación de Schrödinger no lineal (NLS).

b) Solitones con origen en el efecto fotorrefractivo

Mientras que los solitones espaciales tipo Kerr han sido objeto de estudio durante las últimas tres décadas, las primeras observaciones experimentales de solitones espaciales en medios fotorrefractivos fueron reportadas en cristales SBN^{xiii} por Duree et.al. y en cristales Bi₁₂TiO₂₀ (BTO) por el grupo de Fotónica en el INAOE, Puebla^{xiv}.

Recientemente se han descubierto tres tipos genéricos de estos solitones, siendo cada uno de ellos resultado de un mecanismo no lineal saturable⁹. Estos se caracterizan por exhibir diferentes dependencias de Δn sobre la intensidad óptica $I = |E|^2$. Por ejemplo, *los solitones cuasiestacionarios* se originan durante el lento proceso de apantallamiento de un campo externo aplicado^{xv}. *Los solitones de apantallamiento* ocurren en un material fotorrefractivo (SBN)^{xvi} cuando un campo externo aplicado es apantallado de manera no uniforme en un estado casi estacionario. *Los solitones fotovoltáicos* existen en materiales fotorrefractivos^{xvii} cuya corriente fotovoltáica es elevada (como el LiNbO₃) y utilizan la perturbación en el índice de refracción para guiar y confinar a los haces. Otro tipo de solitones tienen lugar en semiconductores fotorrefractivos, como el InP, en el cual los electrones y los huecos participan en la formación del campo de carga espacial.

En general todos estos solitones difieren de los tipo Kerr en que el efecto de enfocamiento es producido por un campo de carga espacial interno por lo que la preservación de su perfil es independiente de la potencia de entrada¹⁰.

⁹ Un medio no lineal saturable actúa como lente de enfoque a altas intensidades. Sin embargo dado que el cambio en el índice de refracción no puede exceder Δn_{sat} esta lente eventualmente se va ensanchando y tiene menos enfocamiento en el centro.

¹⁰ Experimentalmente son observables a potencias muy bajas del orden de 10_μW (intensidades alrededor de 200mW/cm²).

Este grado de autoenfocamiento -debido al cambio en el índice de refracción- es controlable a través de la aplicación de un campo eléctrico. Para pequeños voltajes la difracción excede al autoenfocamiento y el haz transmitido diverge en el cristal; en cambio para altos voltajes el efecto de enfocamiento fotorrefractivo excede a la difracción y el haz transmitido converge en el cristal.

Se ha observado que para un pequeño rango de voltajes el perfil se preserva dependiendo de los parámetros del cristal, tales como, los coeficientes electro-ópticos, la densidad de trampas, la constante dieléctrica, la longitud de onda y la polarización de la luz.

Los solitones fotorrefractivos se propagan tanto en medios (1+1)D como (2+1)D¹¹ y también es posible generar (utilizando láseres de He-Ne y campos eléctricos moderados (1-10kV/cm)) los correspondientes "dark" y "bright".

En la Figura C.6 se muestra el dispositivo experimental empleado para la observación de solitones fotorrefractivos "bright" así como su proceso de formación. La Figura C.7 para el caso de los solitones fotorrefractivos "dark".

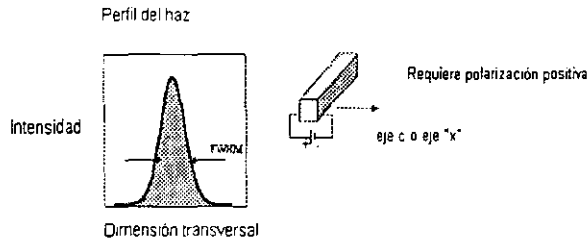
Hasta 1995, todos los estudios relacionados con solitones empleaban un pulso o paquete de onda coherente. En otras palabras, dada la fase en una posición determinada uno puede predecir la fase en cualquier otra región del haz.

Sin embargo, en 1996 el grupo de Segev^{xviii} encontró que un pulso incoherente de luz podía ser utilizado para confinar al haz dentro del cristal fotorrefractivo¹². Esto significa que, dada la fase en un punto específico del haz atrapado, uno puede predecir la fase a una distancia muy corta (la distancia de correlación, es mucho más corta que el diámetro del haz).

¹¹ Una guía de ondas plana es conocida como un medio (1+1)D ya que la propagación ocurre a lo largo de la coordenada (z), la difracción en (y) y la guía espacial en (x). Una fibra óptica es un medio (2+1)D con guía espacial en ambas dimensiones transversales. El tiempo es siempre una de las dimensiones.

¹² Los cristales fotorrefractivos son convenientes para este tipo de experimentos ya que su respuesta no lineal con el tiempo está completamente controlada por la intensidad del haz y así hacerla mayor que la razón de fluctuaciones del propio haz.

Soliton fotorrefractivo "bright" producido con luz coherente



Intensidad



Cargas



Campo



Indice

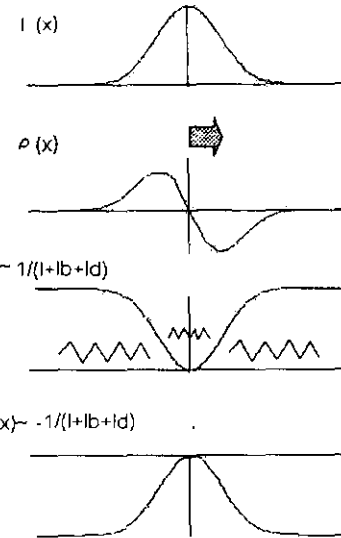
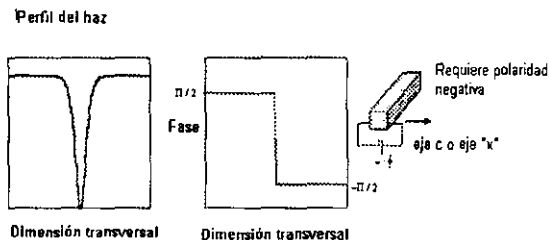


Figura C.6 Formación de un solitón fotorrefractivo "bright". Un haz de luz se propaga en el centro de un cristal fotorrefractivo. En la región iluminada, los electrones son excitados, y con ello la conductividad aumenta y la resistividad disminuye. La caída de voltaje ocurre primordialmente en las regiones oscuras llevando a la formación de un campo de carga espacial $E_{sc}(x)$. El cambio en el índice de refracción $\Delta n(x)$ es linealmente proporcional a $E_{sc}(x)$ vía el efecto electroóptico Pockels. Si $\Delta n > 0$, el haz no podrá ser guiado; en cambio si $\Delta n < 0$ entonces el haz será guiado a través del cristal. (El signo de Δn depende de la dirección de E_{sc} con respecto a los ejes principales del cristal y puede ser invertido mediante el cambio en la polaridad del voltaje aplicado).

Solitón fotorrefractivo "dark" producido con luz coherente



Intensidad



Cargas



Campo



Indice

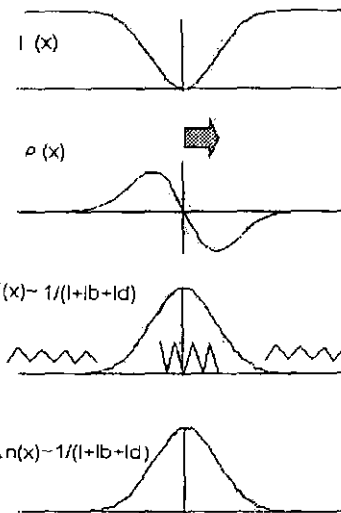


Figura C.7 Formación de un solitón fotorrefractivo "dark". Este proceso es contrario al expuesto para el solitón fotorrefractivo "bright". Sin embargo, los solitones "dark" pueden todavía guiar a un segundo haz (de diferente longitud de onda) y servir como una efectiva guía de luz inducida. Los parámetros l_b e l_d son conocidos como *irradiancia brillante* e *irradiancia oscura* respectivamente.

REFERENCIAS

- [1] Saleh, B. E. A. and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (John Wiley & Sons, Inc. USA, 1991)
- [2] Hasegawa, A. and F. Tappert, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142 (1973)
- [3] Mollenauer, L. F., R. H. Stolen and J. P. Gordon, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1095, (1980)
- [4] Günter, P. and J. P. Huignard, *Photorefractive materials and their applications I. Fundamental Phenomena*, (Springer-Verlag, Germany, 1988)
- [5] Kukhtarev, N. V., V. B. Markov, S. G. Odulov and V. L. Vinetskii, *Ferroelectrics* **22**, 949, (1979)
- [6] Solymar, L. D., J. Webb and A. Grunnet-Jepsen, *The physics and applications of photorefractive materials*, (Oxford University Press, USA, 1996)
- [7] Newell, A. C. and J. V. Moloney, *Nonlinear Optics*, (Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1992)
- [8] Marion, J. B. and M. A. Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, (Academic Press, USA, 1965)
- [9] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, USA, 1999)
- [10] Arfken, G. and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, (Academic Press, USA, 1995)
- [11] Reitz, J. R., F. J. Milford and R. W. Christy, *Fundamentos de la teoría electromagnética* (Addison-Wesley, USA, 1996)
- [12] Gudden, B. and R. Pohl, *Physik Z*, **1**, 365, (1920)
- [13] Günter, P. (Ed.), *Nonlinear optical effects and materials*, (Springer Verlag, Germany, 2000)
- [14] Günter, P. and J. P. Huignard, *Photorefractive materials and their applications II*, (Springer-Verlag, Germany, 1988)
- [15] Chen, F. S., *J. Appl. Phys.*, **38**, 3418 (1967)

- [16] Amodei, J. J., *Appl. Phys. Lett.*, **18**, 22 (1971)
- [17] Jun, H. and J. Robillard, *Nonlinear optical materials*, (CRC Press, USA, 1992)
- [18] Condon, E. U. and G. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, (Cambridge University Press, England, 1951)
- [19] Murillo, J. G., *Propiedades electromagnéticas de sólidos*, (Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1992)
- [20] Murillo, J. G., L. F. Magaña, M. Carrascosa and F. Agulló-López, *J. Appl. Phys.* **78**(9), 5686, (1995)

Bibliografía complementaria:

- I. Herman, R. L., *American Scientist* **80**(4), 350, (1992)
- II. Fujjoka Rojas, J., *Introducción a la Ecuación de Shrödinger No Lineal*, 1999 (en revisión)
- III. Rosen, G. J., *Math. Phys.* **9**, 996 (1968)
- IV. Friedberg, R., T. D. Lee and A. Sirlin, *Phys. Rev. D* **13**, 2739 (1976); Friedberg R. and T. D. Lee, *Phys. Rev. D* **15**, 1694 (1976)
- V. Lee, T. D., *Phys. Rep.* **23**, 254, (1976); Lee, T. D., *Phys. Rev. D*, **35**, 3637 (1987); Lee, T. D. and Y. Pang, *Phys. Rev. D* **35**, 3678 (1987); Friedberg, R., T. D. Lee and Y. Pang, *Phys. Rev. D*, **35**, 3640 (1987)
- VI. Guerrero, L.E. and A. Bellorín, *Phys. Rev. E* **54**(2), 1265, (1996); Mello, B. A., L. I. Reyes and L. E. Guerrero, *Phys. Rev. Lett.* **80**(7), 1361, (1998)
- VII. Segev, M., B. Crosignani, A. Yariv and B. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **68**(7), 923, (1992)
- VIII. Russell, J. S., *Proc. Roy. Soc. Eddimburg*, 319, (1844)
- IX. Segev, M. and G. Stegeman, *Phys. Today*, **71**(8), 42, (1998); Segev, M., *Optical and Quantum Electronics* **30**, 503 (1998)
- X. Abdullaev, F. S., Darmanyan, P. Khabibullaev, *Optical Solitons* (Springer-Verlag, Germany, 1993)
- XI. Agrawal, G. P., *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, USA, 1989); Remoissenet, M., *Waves Called Solitons. Concepts and Experiments* (Springer-Verlag, Germany, 1999)

- XII. Mollenauer, L.F. and R. H. Stolen, *Opt. Lett.* **9**, 13 (1984)
- XIII. Duree, G. C., J. L. Shultz, G. J. Salamo, M. Segev, A. Yariv, B. Crosignani, P. Di Porto, E. J. Sharp and R. R. Neurgaonkar, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(4), 533, (1993)
- XIV. Castillo, M. D., A. Márquez Aguilar, J. J. Sánchez-Mondragón, S. Stepanov and V. Vysloukh, *Appl. Phys. Lett.*, **64**, 408 (1994)
- XV. Segev, M. B. Crosignani, A. Yariv and B. Fischer, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 923 (1992)
- XVI. Segev, M. G., C. Valley, B. Crosignani, P. DiPorto and A. Yariv, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 3211 (1994)
- XVII. Taya, M., M. Bashaw, M. M. Fejer, M. Segev and G. C. Valley, *Phys. Rev. A* **52**, 3095 (1995)
- XVIII. Mitchell, M. and M. Segev, *Nature* **387**, 880 (1997)
- XIX. Muñoz, E. G., *Cálculo de la variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor, para un material fotorrefractivo (BSO)*, (Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1998)
- XX. Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, (John Wiley & Sons, Inc., USA, 1996)
- XXI. Agulló-López, F. J., M. Cabrera and F. Agulló-Rueda, *Electrooptics*, (Academic Press, Great Britain, 1994)
- XXII. Marcuse, D., *Theory of dielectric optical waveguides*, (Academic Press, Inc., USA, 1991)
- XXIII. Lamb, Jr., G. L., *Elements of soliton theory*, (John Wiley & Sons, USA, 1980); Drazin, P.G. and R. S. Johnson, *Solitons: an introduction*, (Cambridge University Press, Great Britain, 1989); Dodd, R. K., J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, (Academic Press, Great Britain, 1988); Lonngren, K. and A. Scott, *Solitons in action* (Academic Press, Inc., USA, 1978)
- XXIV. Merayo, F. G., *Lenguaje de programación FORTRAN 90*, (Paraninfo, España, 1999); Davis B., Gordon and Thomas R. Hoffmann, *Fortran 77. Un estilo estructurado y disciplinado*, (Mc. Graw-Hill, México, 1990); Borse, G. J., *Fortran 77 and numerical methods for engineers*, (PWS Publishers, USA, 1985); Chapman, S. J., *Introduction to FORTRAN 90/95*, (Mc. Graw-Hill, USA, 1998); Digital Equipment Corporation, *Compaq Fortran Language Reference Manual*, 1999, USA.
- XXV. Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992)
- XXVI. Brigham, E. O., *The Fast Fourier Transform*, (Prentice- Hall, USA, 1974)