UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARACTERIZACIONES DE DENDRITAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

MIRIAM TORRES FLORES

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MARIA ISABEL PUGA ESPINOSA.

295227

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNºMA DE MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Caracterizaciones de Dendritas

realizado por Torres Flores Miriam

con número de cuenta 9554337-4 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario	Dra. María Isabel Puga Espinosa
Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía
Propietario	Dr. Raúl Escobedo Conde
Suplente	Dra. María de Jesús López Toriz
Suplente	M. en C. Félix Capulín Pérez

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Dedicatorias

A la memoria de Daniel

Por ser parte de mi vida, por todo lo que compartimos juntos, también por su admirable paciencia y por todos los gratos recuerdos.

Dedicatorias

A mi madre.

Evodia Flores

Con mucho amor y admiración. Por darme la vida y dedicar la suya a mis hermanos y a mí. Por sus constantes esfuerzos y sacrificios para hacer de mí la persona que ahora soy.

Por tus valiosas enseñanzas...Gracias mamá.

A mi padre.

Roberto Torres.

Con mucho cariño. Por todo el apoyo y facilidades que me ha brindado a lo largo de esta carrera.

A mis hermanos.

Victor, Roberto y Marco Antonio.

Por haber vivido una infancia juntos y por ser un claro ejemplo de responsabilidad y trabajo.

A Perlita.

Por compartir su alegría, cariño, inocencia y travesuras conmigo

A Fernando López.

Por su gran ayuda para terminar este trabajo.

A mis amigos.

Fernando, Maritza, Francisco, Beatriz, Nancy, Norma, Carlos, Juan Gabriel, Susana y Félix. Por el tiempo que todos y cada uno de ustedes me ha dedicado.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, gracias por permitirse ser parte ella.

A la Facultad de Ciencias, por formarme como matemática

A todos los profesores, gracias por compartir su conocimiento

A la Dra. Isabel Puga Espinosa, gracias por creer en mi, por la paciencia, el estimulo y el apoyo incondicional.

Al Dr. Alejandro Illanes, por brindarme apoyo económico mediante el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e innovación Tecnológica. Agradezco también el tiempo que dedico a la revisión de este trabajo de tesis y la sus valiosas e importantes observaciones.

A todos y cada uno de mis sinodales, Dra. María Isabel Puga Espinosa, Dr. Alejandro Illanes Mejía, Dr. Raúl Escobedo Conde, Dra. Maria de Jesús López Toriz y M. en C. Félix Capulín Pérez.

Índice general

INTRODUCCIÓN. 1

Ejemplos de dendritas. 3

Ejemplos de espacios que no son dendritas 6

1 PRELIMINARES 8

1.1 Límites de subconjuntos de un espacio topológico 8

1.2 Hiperespacios de X con la métrica de Hausdorff. 11

1.3 Conexidad local, conexidad en pequeño y continuos de convergencia. 15

1.4 Conexidad local y semilocal 20

1.5 Conexidad y cortes 22

2 DOS CARACTERIZACIONES 25

2.1 Cualesquiera dos puntos de X están separados por un tercer punto de X. .. 25

2.2 Caracterización de dendrita con puntos finales y de corte. 27

3 CARACTERIZACIONES EN DENDROIDES 33

3.1 Caracterización de dendrita mediante conexidad local. 33

3.2 Caracterizacion de dendrita con suavidad en todo punto. 35

3.2.1 El concepto de suavidad 35

3.2.2 Conexidad local y suavidad 41

3.3 Caracterización de dendrita con retracciones monótonas. 45

3.3.1 Retracciones monótonas y preservadoras de orden 45

3.4 Caracterización de dendrita con retracciones preservadoras de orden. 50

3.4.1 Ultrasuavidad 50

Referencias 59

INTRODUCCIÓN.

Un **continuo** es un espacio métrico, conexo, compacto y no degenerado. Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples. Un espacio topológico X es **localmente conexo** en p (*lc en p*) si toda vecindad de p contiene una vecindad abierta y conexa de p. Decimos que X es localmente conexo, si es localmente conexo en todo punto. Una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a S^1.

A un espacio localmente conexo le llamaremos de Peano. Si además, este espacio es un continuo, le llamaremos **continuo de Peano**.

Un espacio topológico X es **localmente arco conexo** en p (lac en p) si toda vecindad de p contiene una vecindad arco conexa de p. Decimos que X es localmente arco conexo, si es localmente arco conexo en todo punto.

En el presente trabajo se desarrollan las siguientes caracterizaciones de dendritas:

1. Un continuo X es una dendrita si y sólo si cualesquiera dos puntos de X están separados por un tercer punto de X.

2. Un continuo X es una dendrita si y sólo si todo punto de X es punto de corte o punto final de X.

3. Un continuo X es una dendrita si y sólo si X es un dendroide localmente conexo.

4. Un continuo X es una dendrita si y sólo si X es un dendroide suave en todos sus puntos.

5. Un dendroide X es una dendrita si y sólo si todo subcontinuo Y de X admite una retracción monótona.

6. Un dendroide es una dendrita si y sólo si existe $p \in X$ tal que todo subcontinuo admite una retracción preservadora de orden $(\leq_p)$.

La tesis está organizada como sigue:

En el capítulo I daremos los conceptos y resultados necesarios para las caracterizaciones, en el capítulo II expondremos las caracterizaciones 1 y 2, mientras que el capítulo III lo reservamos para las caracterizaciones $3, 4$, 5 y 6, las cuales se dan en dendroides.

Algunos teoremas cuya demostración se encuentra en [5] serán utilizados en la tesis. Estos son:

0.1. Sea X un espacio métrico compacto. Entonces 2^X es compacto [Teorema 4.12, p. 59].

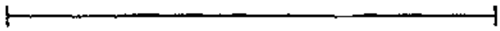
0.2. Sea X un continuo, U un abierto no vacío de $X, U \subsetneq X$ y K una componente de $\overline{U}$. Entonces $K \cap Fr(U) \neq \varnothing$ [Teorema 5.4, p. 73].

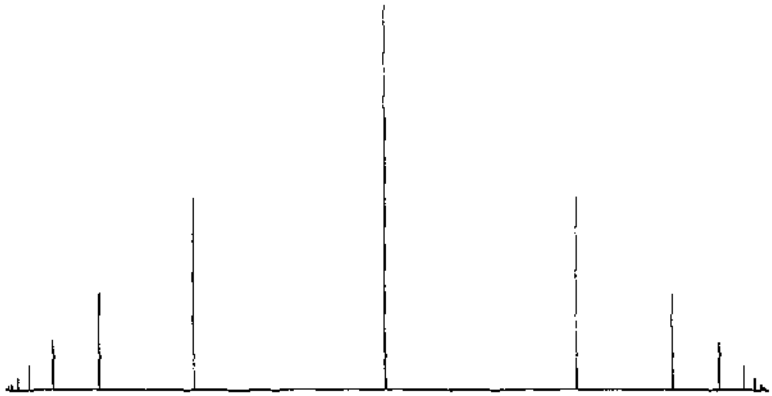
0.3. Sea X un continuo de Peano. Entonces X es arco conexo [Teorema 8.23, p. 130].

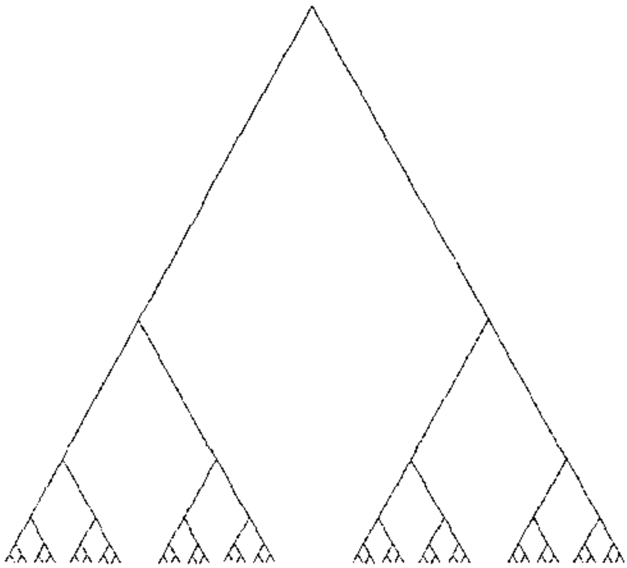
0.4. Sea X un continuo de Peano y U un abierto de X. Entonces U es lac [Teorema 8.25 p. 131].

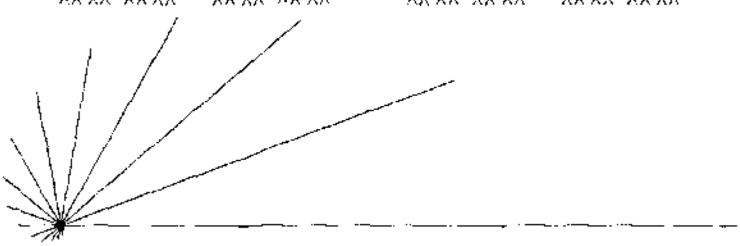
0.5. Sea X un continuo de Peano y U un abierto conexo de X. Entonces U es arco conexo [teorema 8.26, p.132].

Ejemplos de dendritas.

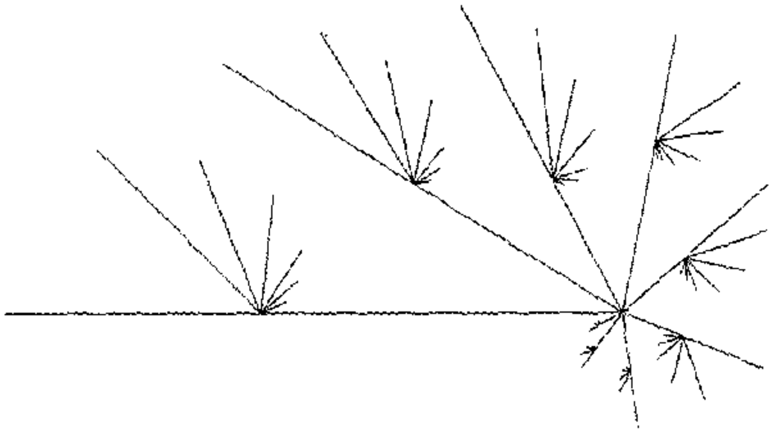






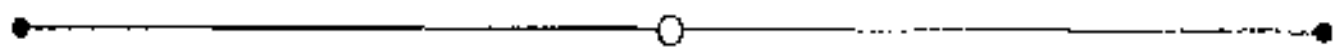


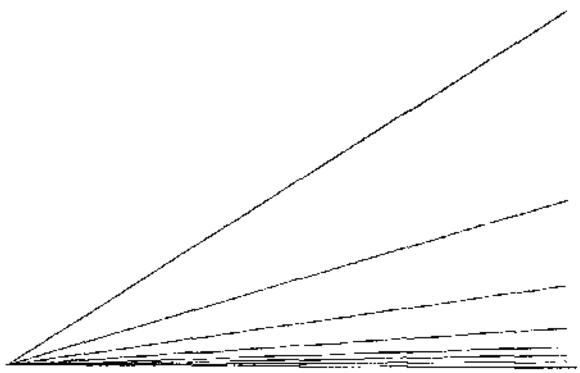
INTRODUCCIÓN.

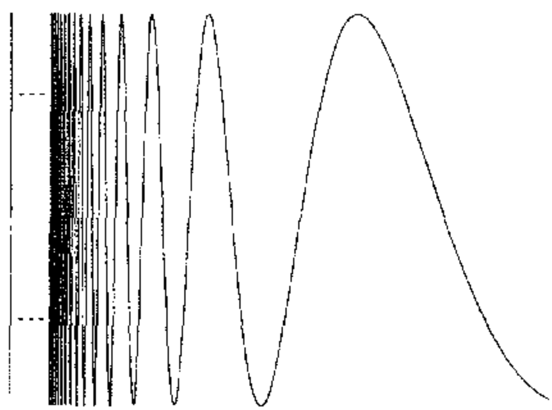


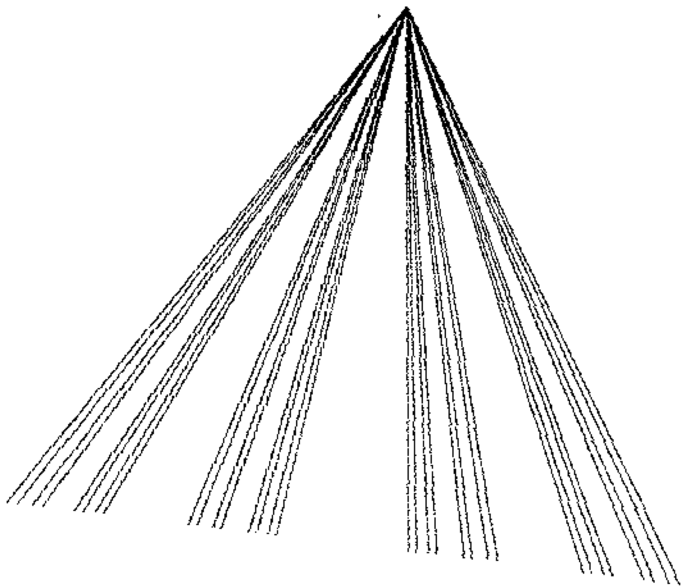
id

Ejemplos de espacios que no son dendritas









PRELIMINARES

1.1 Límites de subconjuntos de un espacio topológico

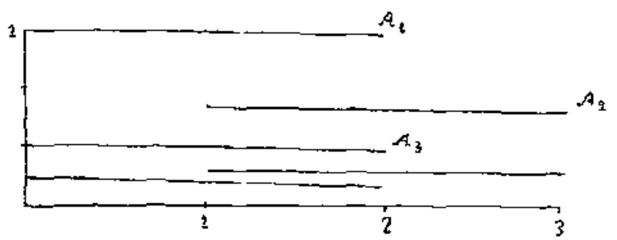
1.1. **Definición**. Sea (X,T) un espacio topológico y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión se subconjuntos de X, definimos $límin fA_i$ y $límsupA_i$ como sigue:

$límin fA_i = \{x \in X$: para todo $U \in T$ tal que $x \in U, U \cap A_i \neq \varnothing$, para toda i excepto un número finito$\}$

$límsupA_i = \{x \in X$: para todo $U \in T$ tal que $x \in U, U \cap A_i \neq \varnothing$, para una infinidad de números $i\}$

1.2. **Ejemplo:**

Sea $X = [0,3] \times [0,1]$. Para cada entero positivo impar i, sea $A_i = [0,2] \times \{\frac{1}{i}\}$ y para cada entero positivo par i, sea $A_i = [1,3] \times \{\frac{1}{i}\}$



$límsupA_i = [0,3] \times \{0\}$ $\qquad$ $límin fA_i = [1,2] \times \{0\}$

Es claro que no siempre $límsupA_i = límin fA_i$, sin embargo $límsupA_i \subset límin fA_i$.

1.3. **Definición**. Sean (X,T) un espacio topológico y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Decimos que $A = límA_i$ si $límin fA_i = A = límsupA_i$

La sucesión del ejemplo 1.2 no tiene límite.

El siguiente resultado caracteriza al $líminfA_i$ y al $límsupA_i$, y lo usaremos posteriormente para algunas demostraciones. La prueba de éste resultado se encuentra en [1, Teorema 1.5, p.12].

Sea $\{A_i\}$ una sucesión de conjuntos en un espacio topológico X. entonces

a) $x \in líminfA_i$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_i\}$ en X tal que $x_i \in A_i$ para todo i número natural y $\lim_{i\to\infty} x_i = x$.

b)$x \in límsupA_i$ si y sólo si existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 ...$ y puntos $x_{i_k} \in A_{i_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tales que $\lim_{k\to\infty} x_{i_k} = x$.

1.4. **Proposición.** Sea X un continuo, $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, entonces $líminfA_i$ y $línsupA_i$ son ambos compactos.

Demostración. Sea $A = líminfA_i$. Como X es compacto es suficiente mostrar que A es cerrado, es decir que contiene a todos sus puntos de acumulación.

Sea x un punto de acumulación de A. Demostraremos que $x \in A$. Sea U abierto tal que $x \in U$. Como x es punto de acumulación de A, entonces $(U - \{x\}) \cap A$ contiene un punto x_0. Ahora tenemos que U es un abierto que contiene a x_0 y $x_0 \subset A$, así que $U \cap A_i \neq \varnothing$ para casi toda i y por definición de límite inferior $x \in líminfA_i = A$ y por lo tanto A es cerrado.

La demostración de que $límsupA_i$ es compacto es análoga.✠

1.5. **Corolario.** $límA_i$ es compacto.

1.6. **Proposición**. Sea X un espacio métrico compacto y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Supongamos que A_i es conexo, para cada $i = 1, 2, 3, ..$ y $\textit{líminf}A_i \neq \varnothing$, entonces $\textit{límsup}A_i$ es conexo.

Demostración. Sea $K = \textit{límsup}A_i$. Supongamos que K no es conexo, entonces existen dos conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos G y H tales que $K = G \cup H$. Se sigue de la normalidad de X que existen abiertos ajenos U y V tales que $G \subset U$ y $H \subset V$.

Dado que $\textit{líminf}A_i \neq \varnothing$, existe $p \in \textit{líminf}A_i$, entonces $p \in U$ ó $p \in V$.

Supongamos que $p \in U$. Entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_j \cap U \neq \varnothing$ para toda $j \geq j_0$. Como $K \cap V \neq \varnothing$, hay una infinidad de índices $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$ tales que $A_j \cap V \neq \varnothing$, llamemosle $\mathcal{I}$ al conjunto de dichos índices. Como A_j es conexo, para todo $j \in \mathcal{I}$ existe $x_j \in (X - (U \cup V)) \cap A_j$. Además $X - (U \cup V)$ es cerrado y por tanto compacto, entonces la sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathcal{I}}$ tiene una subsucesión convergente a un punto $x \in X - (U \cup V)$, es claro que $x \in \textit{límsup}A_i$, lo cual es una contradicción.✠

1.7. **Corolario**. Sea X un continuo y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos conexos de X tal que $\textit{lím}A_i = A$, entonces A es conexo.

1.2 Hiperespacios de X con la métrica de Hausdorff.

Sea X un espacio topológico. Definimos a los conjuntos 2^X y $C(X)$ como sigue:

$2^X = \{A \subset X\colon A$ es cerrado y no vacío$\}$

$C(X) = \{A \in 2^X : A$ es conexo$\}$

1.8. **Definición.** Si X es un espacio métrico, compacto, con métrica d y $A \subset X$, definimos $N(A, \varepsilon) = \bigcup\limits_{a \in A} B_\varepsilon(a)$ y se llama la **nube** de A de radio ε. Definimos la siguiente función:

$H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$

$H(A, B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon)$ y $B \subset N(A, \varepsilon)\}$, que resulta

ser una métrica para 2^X, la llamamos la **métricade Hausdorff**.

1.9. **Teorema.** La función H es métrica.

Demostración. Por definicoón $H(A, B) \geq 0$.

Supongamos que $H(A, B) = 0$. Sea $x \in A$, entonces $x \in N(B, \varepsilon)$ para toda $\varepsilon > 0$. Supongamos que $x \notin B$, entonces $\delta = d(x, B) > 0$ y $x \notin N(B, \frac{\delta}{2})$, con esta contradicción deducimos que $A \subset B$.

Analogamente $B \subset A$, y por lo tanto $A = B$.

$H(A, B) = H(B, A)$ por la definición de H.

Sean $A, B, C \in 2^X$, demostraremos que

$H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$.

Observemos primero que para cada $x \in A$, $d(x, B) = d(x, y)$, para algún $y \in B$ (por la compacidad de B). Ahora siempre que $A \subset N(B, \varepsilon)$, se tiene que $\varepsilon > d(x, y)$. Entonces $H(A, B) \geq d(x, y)$.

Asi que para cada $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x,y) \leq H(A,B)$. Análogamente, dado $y \in B$, existe $z \in C$ tal que $d(y,z) \leq H(B,C)$, entonces

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq H(A,B) + H(B,C)$ y de aquí se sigue que

$A \subset N(C, H(A,B) + H(B,C) + \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. De manera análoga

$C \subset N(A, H(A,B) + H(B,C) + \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces

$H(A,C) \leq H(A,B) + H(C,B)$.✠

A 2^X le damos la topología inducida por la métrica de Hausdorff H.

1.10. **Teorema.** Sea X *un espacio métrico compacto*, $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* elementos en 2^X, entonces $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = A$ (respecto a la métrica de Hausdorff) si y sólo si $lím sup A_i = A = lím inf A_i$.

Demostración.⇒] Veremos que $A \subset lím inf A_i$. Sean $x \in A$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_i) < \varepsilon$ para toda $i \geq N_0$. Sea U abierto tal que $x \in U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \subset B_\varepsilon(x) \subset U$, así que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq N_0$, existe $x_i \in A_i$ tal que $d(x, x_i) \leq H(A, A_i) < \varepsilon$, entonces $x_i \in B_\varepsilon(x) \subset U$, de aquí que $A_i \cap U \neq \varnothing$ para toda $i \geq N_0$

Por lo tanto $x \in lím inf A_i$.

Ahora veamos que $lím sup A_i \subset A$. Supongamos que existe $x \in lím sup A_i$ tal que $x \notin A$. Como A es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$ y como $x \in lím sup A_i$, entonces $B_\varepsilon(x) \cap A_i \neq \varnothing$ para una infinidad de números i. Sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq N_0$, $H(A_i, A) < (\frac{\varepsilon}{2})$, entonces $A_i \subset N(A, \frac{\varepsilon}{2})$ y $A \subset N(A_i, \frac{\varepsilon}{2})$ para toda $i \geq N_0$, así que podemos encontrar un $n > N_0$ tal que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_n \neq \varnothing$.

Sea $z \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_n$, entonces $d(x,z) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $z \in A_n \subset N(A, \frac{\varepsilon}{2})$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(a,z) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pero $d(x,a) \leq d(x,z)+d(z,a) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, por lo que $a \in B_\varepsilon(x)$ y $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción.

$\Longleftarrow$] Supongamos que $límin f A_i = A = límsup A_i$.

Demostraremos que para toda $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_i) < \varepsilon$ para toda $i \geq N_0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Veamos primero que existe N_1 tal que $A \subset N(A_i, \varepsilon)$ para toda $i \geq N_1$.

Para toda $a \in A$, existe $N_a \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(a) \cap A_i \neq \varnothing$ para toda $i \geq N_a$. Por otra parte $A = \bigcup\limits_{a \in A} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$, como A es compacto, existen $a_i, a_2, ..., a_m \in A$ tales que $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_k)$. Sea $N_1 = máx\{N_{a_k} : k = 1, 2, ..., m\}$, tenemos que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_k) \cap A_i \neq \varnothing$ para toda $i \geq N_1$ y $k \in \{1, 2, ..., m\}$. Entonces para cada $k \in \{1, 2, ..., m\}$ y cada $i \geq N_1$ existen $a_i^k \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_k) \cap A_i$, de aquí que $a_k \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_k) \subset N(A_i, \frac{\varepsilon}{2})$ para toda $i \geq N_1$.

Sea $a \in A$, $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_k)$ para alguna $k \in \{1, 2, ..., m\}$, entonces

$d(a, a_i^k) \leq d(a, a_k) + d(a_k, a_i^k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Así que $a \in B_\varepsilon(a_i^k) \subset N(A_i, \varepsilon)$ y esto indica que $A \subset N(A_i, \varepsilon)$ para toda $i \geq N_1$.

Ahora demostraremos que existe N_2 tal que $A_i \subset N(A, \varepsilon)$ para toda $i \geq N_2$.

Supongamos que no es así, entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $i_n > n$ tal que $A_{i_n} \not\subset N(A, \varepsilon)$, lo cual indica que existe $x_n \in A_{i_n}$ tal que $x_n \notin N(A, \varepsilon)$. Como X es compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Supongamos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Para toda vecindad abierta U de x, $x_{n_k} \in U$ a partir de algun $k_0 \in \mathbb{N}$ y $x_{n_k} \in A_{i_{n_k}}$, con lo que $x \in límsup A_i$, pero $límsup A_i = A$, entonces $x \in A$. Ahora $x_{n_k} \in B_\varepsilon(x)$ para

$k \geq k_\varepsilon$ y $B_\varepsilon(x) \subset N(A, \varepsilon)$. Así tenemos $x_{n_k} \in N(A, \varepsilon)$ para $k \geq k_\varepsilon$, esto contradice el hecho de que $x_n \notin N(A, \varepsilon)$.

Por lo que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \subset N(A, \varepsilon)$ para toda $i \geq N_2$.

Sea $N_0 = máx\{N_1, N_2\}$. Concluimos que $H(A, A_i) < \varepsilon$ para $i \geq N_0$.✠

1.11. **Teorema.** *Si X es un espacio métrico y compacto, entonces $C(X)$ es compacto.*

Demostración. Por 0.1, 2^X es compacto, como $C(X) \subset 2^X$ basta demostrar que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Esto se sigue del corolario 1.7 y el teorema 1.10.✠

1.12. **Corolario.** Sea X un espacio métrico y compacto. Entonces toda sucesión de subcontinuos de X tiene una subsucesión convergente a un subcontinuo de X.

1.3 Conexidad local, conexidad en pequeño y continuos de convergencia.

1.13. **Definición.** Sea X un espacio métrico. Un subcontinuo no degenerado A de X es llamado **continuo de convergencia** de X si existe una sucesión de subcontinuos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de X tal que $A = límA_i$ y $A \cap A_i = \varnothing$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

1.14 **Definición.** Sea (X, T) un espacio topológico y sean $A, B, C \subset X$. Decimos que C **separa a** A y B en X si $X - C = U \cup V$, donde U y V son disconexion de $X - C$, tal que $A \subset U$ y $B \subset V$

1.15. **Proposición.** Sea X un espacio métrico. Si K es un continuo de convergencia de X y $x, y \in K$, entonces ningún subconjunto de K puede separar a $\{x\}$ y $\{y\}$ en X.

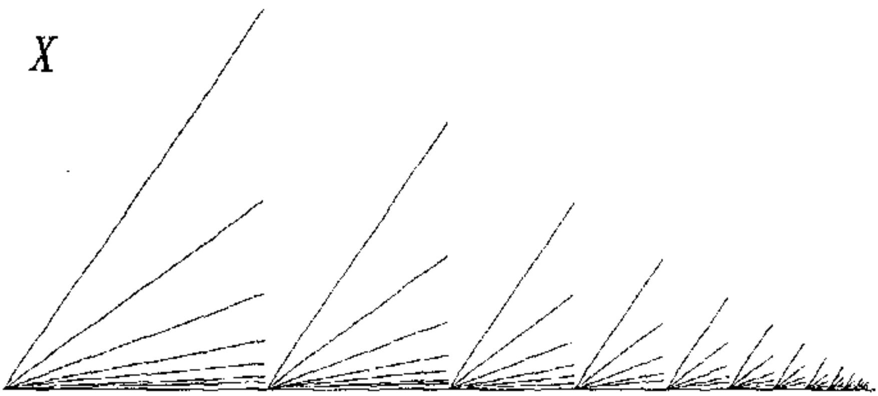
Demostración. Sea K un continuo de convergencia de X. Entonces existe una sucesión de subcontinuos $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $límK_i = K$ y $K \cap K_i = \varnothing$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y $x, y \in K$. Supongamos que existe un subconjunto C de K tal que C separa a $\{x\}$ y $\{y\}$ en X. Entonces existen abiertos U, V en $X - C$, ajenos y no vacíos tales que $X - C = U \cup V$, con $x \in U$ y $y \in V$.

Como $C \subset K$ y $K \cap K_i = \varnothing$ tenemos que $C \cap K_i = \varnothing$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $K_i \subset (X - C)$. Como U es abierto en $X - C$, existe un abierto W de x tal que $x \in U = W \cap (X - C)$. Entonces $W \cap K_i \neq \varnothing$ para toda $i \in \mathbb{N}$, excepto un número finito. Así $U \cap K_i \neq \varnothing$ y $K_i \subset U$ para toda $i \in \mathbb{N}$ excepto un número finito numeros i (lo anterior se debe a que K_i es conexo). Con un razonamiento análogo tenemos que $K_i \subset V$ para toda i excepto un número finito. Entonces $K_i \subset (U \cap V)$ para una infinidad de números i, lo que contradice que U y V son ajenos.✠

1.16. **Definición**. Sea (X,T) un espacio topológico y sea $p \in X$. Decimos que X es **conexo en pequeño** en p si toda vecindad de p contiene una vecindad conexa de p.

Observación. Localmente conexo en p implica conexo en pequeño, el regreso no necesariamente es cierto.

1.17. **Ejemplo**



X es conexo en pequeño en p.

X no es localmente conexo en p.

1.18. **Teorema**. Sea X un continuo y

$N = \{x \in X : X$ no es conexo en pequeño en $x\}$. Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K \subset N$.

Demostración. Sea $p \in N$, entonces existe una vecindad V de p tal que si U es vecindad de p y $U \subset V$, tenemos que U no es conexo.

Por otro lado $p \in Int(V)$ por lo que existe un abierto W tal que $p \in W$ y $\overline{W} \subset V$ (por que X es regular). El conjunto $M = \overline{W}$ no es conexo. Sea C la componente de p en M. Entonces $p \notin Int(C)$, ya que si $p \in Int(C)$, entonces C sería una vecindad conexa de p contenida en $M \subset V$.

Se sigue que $p \in \overline{M - C}$, por lo tanto existe una sucesión $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos de $M - C$ tal que

1. $\lim\limits_{i \to \infty} p_i = p$.

Sea C_i la componente de p_i en M, entonces

2. $C \cap C_i = \varnothing$ para toda $i \in N$.

Esto es porque si $C \cap C_i \neq \varnothing$ para alguna i, $C \cup C_i$ sería un subconjunto conexo de M, pero C es una componente de M, entonces tendríamos que $C \cup C_i \subset C$ y $p_i \in C$, lo cual es una contradicción ya que $p_i \in M - C$.

Sea Q una vecindad cerrada de p tal que $Q \subset Int(M)$. Podemos suponer que $p_i \in Q$ para toda i. Sea K_i la componente de p_i en Q. Es claro que

3. $K_i \subset C_i$ para toda i.

Por el corolario 1.12 la sucesión $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{K_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, a un subcontinuo K de X. Como $p_{i_j} \in K_{i_j}$ para toda j, usando 1, y que $\lim\limits_{j \to \infty} K_{i_j} = K$ tenemos que

4. $p \in K$.

Dado que $K_{i_j} \subset Q$, Q es cerrado en X y $\lim\limits_{j \to \infty} K_{i_j} = K$ se sigue que

5. $K \subset Q \subset Int(M) \subset M$.

Como K es conexo, usando 4, llegamos a que

6. $K \subset C$.

Por 6, 3 y 2, $K \cap K_{i_j} = \varnothing$ para toda $j = 1, 2, 3, ...$ Por tanto si K no es degenerado, K es un continuo de convergencia.

Veamos que K no es degenerado.

Por 0.2, $K_{i_j} \cap (\overline{X - Q}) \neq \varnothing$ para toda j, y como $K = \lim\limits_{j \to \infty} K_{i_j}$, $K \cap (\overline{X - Q}) \neq \varnothing$. Como $p \in Int(Q)$, entonces $p \notin \overline{X - Q}$, de aquí tenemos que existe $q \in \overline{X - Q}$ tal que $q \in K$ y $p \neq q$, asi K es un continuo no degenerado.

Falta mostrar que $K \subset N$. Supongamos que existe $x \in K$ tal que $x \notin N$. Por 5 tenemos que

7. M es vecindad de x

y por 6

8. C es la componente de x en M.

Como $x \notin N$, entonces X es conexo en pequeño en x, por 7 existe una vecindad conexa G de x tal que $G \subset M$, y por 8

9. $G \subset C$.

Por 3, $x \in límsupK_i \subset límsupC_i$ y como $x \in Int(G)$, entonces existe un abierto U tal que $x \in U \subset G$. por definición de $límsup$ tenemos $U \cap C_i \neq \varnothing$ para casi toda i, entonces $G \cap C_i \neq \varnothing$ para casi toda i. Por 9, $C \cap C_i \neq \varnothing$ para casi toda i, lo cual contradice 2. Por lo tanto $K \subset N$.♱

1.19. **Proposición.** Sea (X, T) un espacio topológico. Entonces X es localmente conexo si y sólo si las componentes de los abiertos son abiertos.

Demostración. $\Longrightarrow$] Sean $U \in T$ y C una componente de U. Sea $p \in C$, como $p \in U$ y X es lc en p existe $V \in T$ tal que $p \in V \subset U$ y V es conexo. Entonces $p \in V \subset C$, es decir $p \in Int(C)$, por lo tanto C es abierto.

$\Longleftarrow$] Sea $U \in T$ y $p \in U$. Sea C la componente de p en U, C es abierto (por hipótesis) y conexo, entonces C es vecindad conexa y abierta de p con $C \subset U$. Por lo tanto X es lc en p.♱

1.20. **Proposición.** Sea (X, T) un espacio topológico. Entonces X es conexo en pequeño en todo punto si y sólo si X es localmente conexo en todo punto.

Demostración. $\Longrightarrow$] Sean $U \in T$ no vacío y C una componente de U. Sea $p \in C$, por hipótesis X es conexo en pequeño en p, por lo que existe un conjunto conexo V con $p \in Int(V)$ y $V \subset U$. Como C es el conexo más grande que contiene a p, $V \subset C$. Entonces $p \in Int(V) \subset C$, esto nos dice que C es abierto, y (por 1.19) X es localmente conexo.

$\Longleftarrow$] Inmediato.♱

1.4 Conexidad local y semilocal

1.21. **Definición**. Un espacio topológico (X, T) es **semilocalmente conexo** en $p \in X$ (slc) si para cualquier vecindad V de p, existe una vecindad U de p, tal que $U \subset V$ y $X - U$ tiene sólo una cantidad finita de componentes.

Decimos que X es semilocalmente conexo si X es slc en todo punto.

1.22. **Observación**. En la definición anterior, podemos pedir que U sea abierto

Demostración. Sean $p \in X$ y V una vecindad de p. Entonces existe un subconjunto W de x tal que $p \in Int(W) \subset V$ y $X - W$ tiene una cantidad finita de componentes.

Sean $C_1, C_2, C_3, ...C_m$ las componentes de $X - W$ y $U = Int(W)$, $(X - W \subset X - U)$.

Entonces $X - U = X - Int(W) = \overline{(X - W)} = \overline{C_1} \cup \overline{C_2} \cup ... \cup \overline{C_m}$. De manera que $X - U$ es una union finita de conjuntos conexos. Esto implica que $X - U$ tiene una cantidad finita de componentes.✠

1.23. **Proposición**. Sea X es un continuo de Peano. Entonces X es slc.

Demostración. Supongamos que existe $p \in X$ tal que X no es slc en p. Entonces existe una vecindad V de p tal que para toda vecindad abierta U de p tal que $U \subset V$, $X - U$ tiene una cantidad infinita de componentes, digamos $C_i, i \in \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es un conjunto de índices. En particular lo anterior es cierto para una vecindad abierta U de p tal que $\overline{U} \subset V$.

Ahora supongamos que sólo hay una cantidad finita de componentes $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}, ..C_{i_n}$ que intersectan a $X - V$. Sea $N = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ (N es cerrado). Sea $W = X - N = U \cup \{C_i : C_i \subset V\}$, W es abierto y $p \in W$, es claro que $W \subset V$. Además $X - W = N$, lo cual contradice que X no es slc en p.

Por lo tanto hay una cantidad *infinita* de componentes de $X - U$ que intersectan a $X - V$. Sea $\mathbb{K}$ el conjunto de dichas componentes. Como $X - U$ es compacto existe una sucesión $\{C_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} C_{i_k} = L \subset C_{i_0} \in \mathbb{K}$. Dado que $C_{i_k} \cap (X - V) \neq \varnothing$ y $\overline{U} \subset V$ *tenemos que existen* $x \in L$ tal que $x \in Int(X - U)$ y una vecindad abierta W de x tal que $W \subset (X - U)$. Por la definición de límite W intersecta a C_{i_k} para una infinidad de números k, además la componentes son ajenas, lo cual indica que X no es localmente conexo en x. Con esta contradicción queda demostrada la proposición.$\maltese$

1.5 Conexidad y cortes

1.24. **Definición.** Sea X un espacio métrico conexo. Decimos que C es un **corte** (cerrado) de X si $C \subset X$ (C cerrado) y $X - C$ no es conexo.

Cuando hablamos de un conjunto X que no es conexo, con frecuencia escribimos $X = U \mid V$. Este símbolo significa que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos (o cerrados), ajenos y no vacíos.

1.25. **Proposición.** Sea X un espacio métrico conexo y separable.

a) Supongamos que $\mathfrak{C}$ es una colección no numerable de cortes cerrados mútuamente ajenos de X, indexados por el conjunto $\mathcal{I}$. Entonces existe $C \in \mathfrak{C}$ tal que $X - C = U \mid V$, donde $U \cap (\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha) \neq \varnothing$ y $V \cap (\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha) \neq \varnothing$.

b) Si K es un continuo de convergencia de X, entonces K no contiene colecciones no numerables de cortes cerrados mutuamente ajenos de X.

c) Sea Y el conjunto de todos los puntos de corte de X. Si $Z \subset X$ y Z es conexo, entonces todos los puntos de $Y \cap Z$ son puntos de corte de Z excepto una cantidad numerable de ellos.

Demostración de a). Sea $\mathfrak{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ una colección de subconjuntos de X tales que cada C_α es un corte cerrado de X y para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$, $C_\alpha \cap C_\beta = \varnothing$. Donde $\mathcal{I}$ es un conjunto no numerable de índices.

Supongamos que no existe un C que satisfaga a), entonces para toda $\alpha \in \mathcal{I}$ podemos escribir

$X - C_\alpha = U_\alpha \mid V_\alpha$ donde $\bigcup_{j \neq \alpha} C_j \subset U_\alpha$ o $\bigcup_{j \neq \alpha} C_j \subset V_\alpha$.

Es decir, para toda $\alpha \in \mathcal{I}$, se puede expresar a $X - C_\alpha$ como la unión de dos conjuntos, donde uno de ellos, digamos V_α no intersecta a ningún elemento de $\mathfrak{C}$.

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, tales que

$X - C_{\alpha_1} = U_{\alpha_1} \mid V_{\alpha_1}$, $X - C_{\alpha_2} = U_{\alpha_2} \mid V_{\alpha_2}$, con

$\bigcup\limits_{\alpha \neq \alpha_1} C_\alpha \subset U_{\alpha_1}$ y $\bigcup\limits_{\alpha \neq \alpha_2} C_\alpha \subset U_{\alpha_2}$

Afirmación: $X = (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2}) \cup (V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2})$

$\supseteq$] Es clara

$\subseteq$] Sea $x \in X$, entonces

$x \in (U_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_1} \cup C_{\alpha_1}) \subset (U_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2})$ y

$x \in (U_{\alpha_2} \cup V_{\alpha_2} \cup C_{\alpha_2}) \subset (U_{\alpha_2} \cup V_{\alpha_2} \cup U_{\alpha_1})$.

Así $x \in (U_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2}) \cap (U_{\alpha_2} \cup V_{\alpha_2} \cup U_{\alpha_1})$

$= ((U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2}) \cup V_{\alpha_1}) \cap ((U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2}) \cup V_{\alpha_2}) = (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2}) \cup (V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2})$.

Por lo tanto $X = (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2}) \cup (V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2})$.

Observemos que $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}$ son abiertos de X por lo que $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}$ es abierto.

Notemos que $(U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2}) \cap (V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}) = (U_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}) \cup (U_{\alpha_2} \cap V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}) = \varnothing$.

Tenemos que $(U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2})$ y $(V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2})$ formarían una disconexión de X. Como X es conexo concluimos que $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} = \varnothing$ para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I}$.

Sabemos que existe un denso numerable D de X, entonces para cada $\alpha \in \mathcal{I}$, $D \cap V_\alpha \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción, ya que D no sería numerable.

Demostración de b). Sea $\mathfrak{C}$ como en a). Supongamos que $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha \subset K$. Por a), existe $C \in \mathfrak{C}$ tal que $X - C = U \mid V$ donde $U \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha) \neq \varnothing$ y $V \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha) \neq \varnothing$.

Sea $x \in U \cap (\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha) \neq \varnothing$ y $y \in V \cap (\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} C_\alpha) \neq \varnothing$, entonces, como $x \in U$ y $y \in V$, tenemos que C separa a $\{x\}$ de $\{y\}$ en X, entonces K no es un continuo de convergencia (por 1.15).

Lo anterior implica que a lo más una cantidad numerable de puntos de K pueden ser puntos de corte de X, y entonces, K contiene una cantidad no numerable de puntos que no son de corte de X.

Demostración de c). Sea $A = \{p \in Y \cap Z : Z - \{p\}$ es conexo$\}$. Demostraremos que A es numerable.

Supongamos que A no es numerable. Sea $\mathcal{C} = \{\{p\} : p \in A\}$. Entonces $\mathcal{C}$ satisface las condiciones del inciso a). Por lo tanto existe $p_0 \in A$ tal que $X - \{p_0\} = U \mid V$, $U \cap A \neq \varnothing$ y $V \cap A \neq \varnothing$. Por otro lado $Z - \{p_0\}$ es conexo, entonces $Z - \{p_0\} \subset U$ o $Z - \{p_0\} \subset V$. Supongamos que $Z - \{p_0\} \subset U$, entonces $(Z - \{p_0\}) \cap V = \varnothing$ y $A - \{p_0\} \subset Z - \{p_0\}$. Por lo que $(A - \{p_0\}) \cap V = \varnothing$. Además $p \notin V$. Por tanto $A \cap V = \varnothing$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto A es numerable.✠

DOS CARACTERIZACIONES

2.1 Cualesquiera dos puntos de X están separados por un tercer punto de X.

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema siguiente:

2.1. **Teorema** *Un continuo* X *es dendrita si y sólo si* cualesquiera dos puntos de X están separados por un tercer punto de X

Demostración. $\Longrightarrow$] Supongamos que X es una dendrita. Sean $a, b \in X$, con $a \neq b$. Como X es continuo localmente conexo, usando 0.3 tenemos que X es arco conexo. Así, existe un arco A de a a b. Sea $r \in A - \{a, b\}$ y U la componente de a en $X - \{r\}$.

Supongamos que $b \in U$. Observemos que $X - \{r\}$ es abierto. Por 1.19 U es abierto y además es conexo. Se sigue de 0.5 que U es arco conexo, así que existe un arco $B \subset U$, de a a b. Notemos que $A \neq B$ ya que $r \in A$ y $r \notin B$, se sigue de aquí que $A \cap B$ es disconexo, por lo que $A \cup B$ contiene una curva cerrada, contrario a la hipótesis de que X es dendrita.

Entonces $b \notin U$, b debe de estar en otra componente de $X - \{r\}$, por tanto r separa a a y b.

$\Longleftarrow$] Supongamos que cualesquiera dos puntos de X están separados por un tercer punto de X. Por 1.15, X no contiene continuos de convergencia y por 1.18 el conjunto

$N = \{x \in X : X$ no es conexo en pequeño en $x\}$ es vacío.

Por lo tanto X es conexo en pequeño en todo punto. Se sigue de 1.20 que X es localmente conexo.

Supongamos que existe una curva cerrada simple S tal que $S \subset X$, entonces si $p, q \in S$ no existe ningún punto en X que separe a p de q. Por lo tanto X es una dendrita.✠

2.2 Caracterización de dendrita con puntos finales y de corte.

El resultado principal de esta sección es:

Un continuo X es una dendrita si y sólo si cualesquiera dos puntos de X están separados por un tercer punto de X.

Antes de la caracterización veremos algunos resultados que nos hacen falta para la prueba de ésta.

2.2. **Proposición**. Sean X un continuo, E un subconjunto propio y no vacío de X y K una componente de E. Entonces K y $X - E$ no son mutuamente separados, es decir que $\overline{K} \cap (X - E) \neq \varnothing$ o $K \cap \overline{(X - E)} \neq \varnothing$.

Demostración. Por 0.2, $\varnothing \neq \overline{K} \cap Fr(E) = [K \cup Fr(K)] \cap Fr(E) = [K \cap Fr(E)] \cup [Fr(K) \cap Fr(E)]$. Se sigue de aquí que o bien

1) $K \cap Fr(E) \neq \varnothing$ ó

2) $Fr(K) \cap Fr(E) \neq \varnothing$.

Si se cumple 1), entonces $K \cap \overline{(X - E)} \neq \varnothing$.

Si se cumple 2), hay un punto $p \in Fr(K) \cap Fr(E)$. Consideramos dos casos:

Caso 1) Si $p \notin E$, entonces $p \in (X - E)$ y $p \in \overline{K}$, por lo tanto $\overline{K} \cap (X - E) \neq \varnothing$.

Caso 2) Si $p \in E$. Como $p \subset Fr(K)$, entonces $\{p\} \cup K$ es conexo y $\{p\} \cup K \subset E$. Como K es una componente de E, entonces $p \in K$, además $p \in Fr(E) \subset \overline{(X - E)}$. Por lo tanto $K \cap \overline{(X - E)} \neq \varnothing$.✠

2.3. **Proposición**. Sean X un continuo, C un subconjunto conexo de X y L una componente de $X - C$. Entonces $X - L$ es conexo.

Demostración. Sea $\{K_i\ i \in \mathcal{I}\}$ la familia de las componentes de $X - C$. Dada $i \in \mathcal{I}$, por la roposición 1.24 $\overline{K_i} \cap (X - (X - C)) \neq \varnothing$ o $K_i \cap \overline{(X - (X - C))} \neq \varnothing$, es decir $\overline{K_i} \cap C \neq \varnothing$ o $K_i \cap \overline{C} \neq \varnothing$, entonces $K_i \cup C$ es conexo para toda $i \in \mathcal{I}$ y como $X - L = \bigcup_{i \in \mathcal{I}, K_i \neq L} (K_i \cup C)$.

Es unión de conexos que se intersectan en C. Por lo tanto $X - L$ es conexo.✠

2.4. **Proposición**. Sean X un continuo de Peano y $p \in X$, *un punto que no es de corte*. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $U \subset X$, abierto y conexo tal que $p \in U$, $diam(U) < \varepsilon$ y $X - U$ es conexo.

Demostración. Sea $p \in X$ un punto que no es de corte y $V = B_{\frac{\varepsilon}{3}}(p)$. Por 1.23 y 1.22 existe una vecindad abierta W de p, contenida en V, tal que $X - W$ tiene una cantidad finita de componentes $C_1, C_2, ..., C_n$.

Como $X - \{p\}$ es abierto y conexo, entonces es arco conexo (0.5). Elegimos puntos $a_1 \in C_1, ..., a_n \in C_n$. Para cada $i \in \{1, ...n - 1\}$, elegimos un arco $A_i \subset X - \{p\}$ que une a a_i con a_{i+1}.

El Conjunto $C = (\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$ es cerrado y conexo (porque cada C_i es cerrado y los arcos son cerrados). Entonces X-C es abierto y $p \in X - C$. Sea U la componente de p en $X - C$, U es abierto (por 1.19) y conexo. Por la proposición 1.25, $X - U$ es conexo. Observemos que $X - C \subset W$, entonces $diam(X - C) < \varepsilon$. Por lo tanto $diam(U) < \varepsilon$.✠

Recordemos la definición de localmente arco conexo.

2.5. **Definición**. Sean (X, T) un espacio topológico y $p \in X$. Se dice que$X$ es **localmente arco conexo** (*lac*) en p, si toda vecindad de p contiene una vecindad arco conexa de p. Decimos que X es localmente arco conexo, si X es localmente arco conexo en todo punto.

2.6. **Definición**. Sean X un espacio topológico $Z \subset X$, y $p \in X - Z$. Decimos que p es **arco accesible** desde Z si existe un arco en $Z \cup \{p\}$, teniendo a p como punto final.

2.7. **Proposición**. Sea X un espacio lac y $U \subset X$, U abierto, entonces el conjunto de puntos de $Fr(U)$ que son arco accesibles desde U es denso en $Fr(U)$.

Demostración. Sea $D = \{x \in Fr(U) : x$ es arco accesible desde $U\}$. Sea W_0 un abierto de X tal que $W_0 \cap Fr(U) \neq \varnothing$. Sea $W = W_0 \cap Fr(U)$ ($W \neq \varnothing$ y W es abierto en $Fr(U)$).

Demostraremos que $D \cap W \neq \varnothing$.

Sea $p \in W$, por ser X lac existe una vecindad arco conexa V de p tal que $V \subset W_0$. Como $p \in Fr(U)$, $U \cap V \neq \varnothing$. Sea $q \in U \cap V$, entonces existe un arco A de p a q. tal que A$\subset V$ y $A \cap W \neq \varnothing$. Elegimos $t \in A \cap W$, de tal manera que t es el primer punto del arco de p a q que está en $Fr(U)$, entonces $t \in D$ y $D \cap W \neq \varnothing$. Por lo tanto D es denso en $Fr(U)$.✠

2.8. **Definición**. Sea X un continuo. Decimos que X es **hereditariamente localmente conexo** (*hlc*) si todo subcontinuo de X es un continuo de Peano.

2.9. **Teorema**. Si X es una dendrita, entonces X es hlc.

Demostración. Sea X una dendrita. Por 2.1, cualesquiera dos puntos están separados por un tercer punto. Por 1.15, X no contiene continuos de convergencia. Sea A un subcontinuo de X.

Sea $N = \{x \in A : A$ no es conexo en pequeño en x$\}$. Por 1.18, $N = \varnothing$. Entonces A es conexo en pequeño en todos sus puntos, entonces (por 1.20) A es localmente conexo en todo punto. Por lo tanto A es un continuo de Peano y X es hlc.$\maltese$

2.10. **Corolario.** Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Entonces Y es una dendrita.

2.11. **Definición.** Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que p es un $punto final$ de X si para toda vecindad abierta V de p existe un abierto U de X tal que $p \in U \subset V$ y $| Fr(U) |= 1$.

Ahora ya tenemos toda la herramienta para demostrar la caracterización que nos interesa

2.12. **Teorema.** Un continuo X es una dendrita si y sólo si todo punto de X es un punto de corte o un punto final de X

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que X es una dendrita. Sea $p \in X$, un punto que no es de corte y sea $\varepsilon > 0$. Por 2.4, existe un abierto y conexo $U \subset X$ tal que $p \in U$, $diam(U) < \varepsilon$, $X - U$ es conexo y $U \neq X$.

Supongamos que $| Fr(U) |\geq 2$. Como X es lac (0.4) y U es un subconjunto abierto, entonces de 2.7 se sigue que existen q, $r \in Fr(U)$ $q \neq r$ tales que existe un arco en $U \cup \{q\}$ con q como punto final y un arco en $U \cup \{r\}$ con r como punto final. Por otra parte, U es arco conexo (0.5), entonces existe un arco A en $U \cup \{q, r\}$ de q a r.

Por otro lado $X - U$ es conexo y compacto (por ser cerrado), por lo tanto es un continuo y es un continuo de Peano (por 2.9). Además $X - U$ es arco conexo (0.3). Como

$q, r \in (X - U)$, entonces existe un arco B en $X - U$ de q a r. De manera que $A \cap B = \{q, r\}$ y $A \cup B$ es una curva cerrada simple. Esto contradice el hecho de que X es una dendrita.

Entonces $| Fr(U) | \leq 1$. Como U es conexo y no vacío, se sigue que $Fr(U) \neq \varnothing$. Entonces $| Fr(U) | = 1$, como $p \in int(U)$, se sigue de aquí que p es un punto final de X.

$\Leftarrow]$ Supongamos que X es un continuo y que todo punto de X es punto de corte o es punto final de X.

Sea $N = \{x \in X : X$ no es conexo en pequeño en $x\}$. Supongamos que existe un punto $x \in N$, entonces por 1.18, X contiene un continuo de convergencia K. Sean $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la sucesión de continuos que converge a K y x un punto final de X, entonces para todo abierto V tal que $x \in V$, existe un abierto U tal que $x \in U \subset V$ y $| Fr(U) | = 1$. Supongamos que $x \in K$, por ser K continuo existe $x_0 \in K$, $x_0 \neq x$, Sean V y V_0 dos conjuntos abiertos y ajenos tales que $x \in V$ y $x_0 \in V_0$ (estos conjuntos existen porque X es Hausdorff). Entonces para cualesquiera abiertos U y U_0 conteniendo a x y x_0, respectivamente tales que $U \subset V$ y $U_0 \subset V_0$, tenemos que $U \cap K_i \neq \varnothing$ y $U_0 \cap K_i \neq \varnothing$, para toda i *mayor que un número* $N \in \mathbb{N}$, con lo que $| Fr(U) | \neq 1$ para toda vecindad abierta U de x, lo cual es una contradicción. De lo anterior concluimos que $x \notin K$. Entonces para todo $x \in K$, x es punto de corte de X.

Sea $\mathfrak{C} = \{\{x\} : x \in K\}$, entonces $\mathfrak{C}$ es una colección no numerable de cortes cerrados mutuamente ajenos,.lo cual contradice 1.25 b). Esto demuestra que X no contiene continuos de convergencia. Entonces $N = \varnothing$, con lo que X es conexo en pequeño para todo $x \in X$, y por lo tanto localmente conexo.

Supongamos que X contiene una curva cerrada simple Z. Sean $z \in Z$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < diam(Z)$. Entonces para toda vecindad abierta V de z tal que $diam(V) < \varepsilon$ se tiene que $|\mathrm{Fr}(V)| \geq 2$, entonces z no es punto final de X. Se sigue que z es punto de corte de X. Por 1.25 c), existe $z_0 \in Z$ tal que z_0 es punto de corte de Z (no puede ser, porque Z es curva cerrada simple). Entonces X no contiene curvas cerradas simples. Por lo tanto X es una dendrita.✠

CARACTERIZACIONES EN DENDROIDES

3.1 Caracterización de dendrita mediante conexidad local.

En está parte demostraremos que un continuo X es una dendrita si y sólo si X es un dendroide localmente conexo. Esta caracterización es la más simple de las caracterizaciones en dendroides que veremos en el capitulo 3.

3.1. **Definición.** Sea X un continuo.

a) Decimos que X es **unicoherente** si para cualesquiera dos subcontinuos propios A y B tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.

b) Decimos que X es **hereditariamente unicoherente** si cada uno de sus subcontinuos es unicoherente. Es fácil ver que un continuo es hereditariamente unicoherente si y sólo si la intersección de cualesquiera dos subcontinuos de X es conexa.

3.2. **Definición.** Sea X un continuo. Decimos que X es **dendroide** si X es hereditariamente unicoherente y arco conexo.

3.3. **Lema.** Sean X un dendroide y Z un subcontinuo de X. Entonces Z es un dendroide.

Demostración. Sean Z subcontinuo de X y A, B subcontinuos de Z, note que A y B son subcontinuos de X, entonces $A \cap B$ es conexo, en consecuencia Z es hereditariamente unicoherente.

Veamos que Z es arco conexo.

Sean $x, y \in Z$. Como $Z \subset X$ existe $[x, y]$ arco de x a y. Supongamos que existe $r \in [x, y]$ tal que $r \notin Z$, entonces $[x, y] \cap Z$ es disconexo. Se sigue que $[x, y] \subset Z$, con lo que Z es arco conexo. Por lo tanto Z es dendroide.✠

El teorema siguiente es la tercera caracterización.

3.4. **Teorema.** Un continuo X es dendrita si y sólo si X es un dendroide localmente conexo.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea X una dendrita. Como X es localmente conexo, por 0.3, X es arco conexo.

Demostraremos ahora que X es hereditariamente unicoherente. Supongamos que existen subcontinuos propios A y B de X tales que $A \cap B$ no es conexo. Entonces existen abiertos U, y V de $A \cap B$, ajenos, y no vacíos tales que $A \cap B = U \cup V$. Sean $x \in U$ y $y \in V$. Como A y B son dendritas (por 2.10), A y B son arco conexos.

Sean T_0 un arco de x a y en A y T_1 un arco de x a y en B. $T_0 \cup T_1 \subset A \cup B \subset X$, y $T_0 \cup T_1$ contiene una curva cerrada simple, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto X es un dendroide localmente conexo.

$\Leftarrow$] Demostraremos que X no contiene curvas cerradas simples. Supongamos que existe una curva cerrada simple $S \subset X$. Sean A y B subcontinuos propios de S, y por tanto de X, tales que $A \cup B = S$. Entonces $A \cap B$ es disconexo, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto X es dendrita.✠

3.2 Caracterizacion de dendrita con suavidad en todo punto.

El objetivo de ésta sección es demostrar que un dendroide X es una dendrita si y sólo si X es suave en todos sus puntos.

3.2.1 El concepto de suavidad

Es fácil ver que si X es un dendroide y $x \neq y$ son puntos de X. Entonces existe un único arco de x a y, el cual denotaremos por $[x, y]$. También denotaremos $[x, x] = \{x\}$.

3.5. **Definición.** Sean X un dendroide y $p \in X$. Definimos un **orden parcial** con respecto a p (denotado por $\leq_p$) de la siguiente manera.

$x \leq_p y$ si $x \in [p, y]$

Demostraremos que $\leq_p$ es efectivamente un orden parcial. Sean $x, y, z \in X$.

1) $x \leq_p x$, ya que $x \in [p, x]$, por lo tanto $\leq_p$ es reflexiva

2) Supongamos que $x \leq_p y$ y $y \leq_p z$. Tenemos entonces que $x \in [p, y]$ y $y \in [p, z]$. Además $x \in [p, y] \subset [p, z]$, por lo tanto $x \leq_p z$.

3) Supongamos que $x \leq_p y$ y $y \leq_p x$. De que $x \in [p, y]$ y $y \in [p, x]$, tenemos que $[p, y] \subset [p, x]$, análogamente $[p, x] \subset [p, y]$, entonces $[p, x] = [p, y]$ y $x = y$.$\maltese$

3.6. **Lema.** Sean X un dendroide y $p \in X$. Si $x \leq_p y$ en X, entonces $[x, y] = \{z \in X : x \leq_p z \leq_p y\}$.

Demostración. Supongamos que $x \leq_p y$. Entonces, por definición, $x \in [p, y]$.

$\subseteq]$ Sea $z \in [x, y] \subset [p, y]$, lo cual indica que $z \leq_p y$. Además $[x, z] \subset [p, z]$, entonces $x \leq_p z$. Por lo tanto $x \leq_p z \leq_p y$.

$\supseteq$] Sea $z \in X$ tal que $x \leq_p z \leq_p y$. De que $z \leq_p$ y, tenemos que $z \in [p, y]$, y como $x \leq_p z$, entonces $x \in [p, z]$, por lo que $z \in [x, y]$.✠

3.7. **Proposición**. Sean X un dendroide y $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos conexos de X. Supongamos que $l\acute{\imath}minf A_i = A$. Entonces A es conexo.

Demostración. Supongamos que A no es conexo. Sean p y q en componentes diferentes de A. Como $l\acute{\imath}msupA_i$ es conexo y cerrado (por 1.4 y 1.6), entonces $[p, q] \subset l\acute{\imath}msupA_i$. Entonces existe $x \in [p, q] - A$, una vecindad abierta V de x y una sucesión $\{A_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $A_{n_k} \cap V = \varnothing$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Sea $\{A_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{A_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a A'. Note que A' es cerrado, conexo y $x \notin A'$. Como $A' \subset l\acute{\imath}msupA_i$,, entonces $p, q \in A'$. Esto es una contradicción, ya que A' es un dendroide que contiene a p y a q, pero no contiene al arco $[p, q]$, pues no contiene a x.✠

3.8. **Definición**. Sea X dendroide. Decimos que X es suave en $p \in X$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

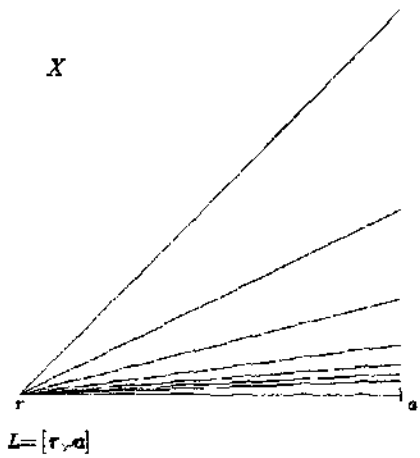
1) $\Gamma_p = \{(x, y) \in X \times X : x \leq_p y\}$ es cerrado en $X \times X$.

2) Para toda $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, se tien $\lim\limits_{n \to \infty} [p, x_n] = [p, x]$.

3.9. Ejemplos.

a)

X



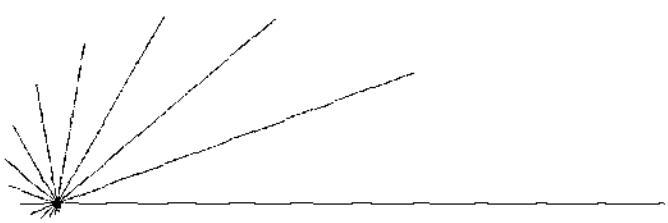
$L = [r, a]$

El dendroide X no es suave en p si $p \in L - \{r\}$.

X es suave en p si $p \in (X - L) \cup \{r\}$.

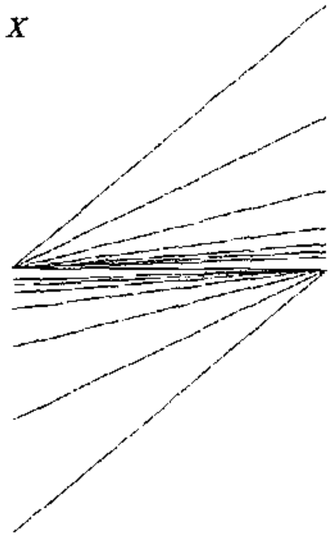
b)

X



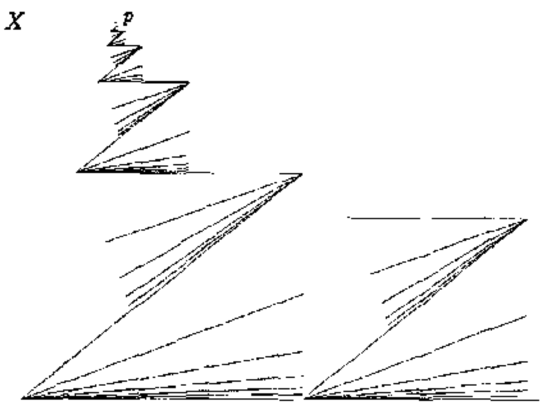
X es suave en todo punto.

c)



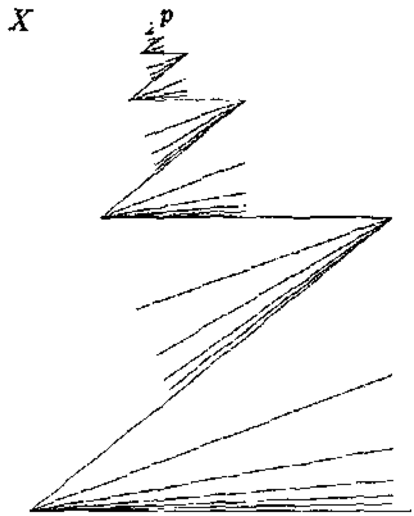
X no es suave en ningún punto

d)



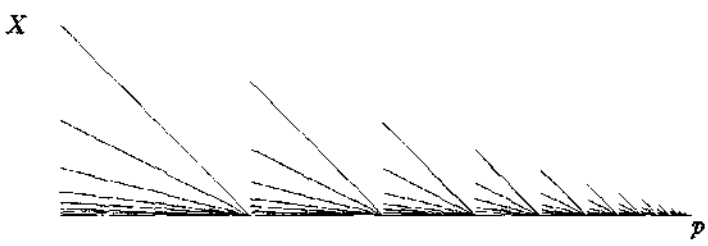
X no es suave en ningún punto.

e)



X es suave sólo en el punto p.

f)



X es suave sólo en el punto p.

Veamos que 1) y 2) de la definición anterior son en verdad equivalentes.

Demostración 1)⇒2). Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. De la definición de líminf tenemos que $p, x \in liminf[p, x_n]$, 3.7 nos dice que $liminf[p, x_n]$ es conexo, también es cerrado, por tanto conexo por trayectorias, entonces $[p, x] \subset liminf[p, x_n]$

Ahora veamos que $limsup[p, x_n] \subset [p, x]$.

Sea $z \in limsup[p, x_n]$. Entonces para todo abierto U tal que $z \in U$, $U \cap [p, x_n] \neq \varnothing$ para una infinidad de números n. De aqui que existe $z_k \in [p, x_{n_k}]$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z$. Como $z_k \leq_p x_{n_k}$, $(z_k, x_{n_k}) \in \Gamma_p$, y como Γ_p es cerrado, $(z, x) \in \Gamma_p$, es decir $z \leq_p x$. Por tanto $z \in [p, x]$. Entonces $limsup[p, x_n] \subset [p, x]$.

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} [p, x_n] = [p, x]$.

Demostración 2)⇒1). Sea (x, y) un punto de acumulación de Γ_p. Demostraremos que $(x, y) \in \Gamma_p$.

Como (x, y) es punto de acumulación existen sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales quet $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ y $(x_n, y_n) \in \Gamma_p$. Entonces $x_n \leq_p y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$,lo cual implica que $[p, x_n] \subset [p, y_n]$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} [p, x_n] \subset \lim\limits_{n\to\infty} [p, y_n]$. De 2), tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} [p, x_n] = [p, x]$ y $\lim\limits_{n\to\infty} [p, y_n] = [p, y]$. Por lo que $[p, x] \subset [p, y]$, de aquí que $x \leq_p y$ y $(x, y) \in \Gamma_p$.

Por lo tanto Γ_p es cerrado.✠

3.10. **Lema**. Sean X un dendroide, Z un subcontinuo de X y $p \in X - Z$. Entonces existe un único $q \in Z$ tal que $q \in [p, z]$ para todo $z \in Z$.

Demostración. Sea $z_0 \in Z$ y $[p, z_0]$ el arco de p a z_0. Sea $[q_0, z_0] = [p, z_0] \cap Z$.

Mostremos que q_0 no depende de z_0.

Sea $z \in Z$. Supongamos que $[p, z] \cap Z = [q', z]$, con $q \neq q'$. Sea $C = [p, q_0] \cup [p, q']$, Ces un subcontinuo de X. Pero $C \cap Z = \{q_0, q'\}$ es un conjunto disconexo, lo cual es una contradicción.✠

3.11. **Lema**. Sea X un dendroide suave y Z un subcontinuo de X. Entonces Z es suave.

Demostración. Supongamos que X es un dendroide suave, entonces existe $p \in X$ tal que para toda $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, se tiene que $\lim\limits_{n \to \infty} [p, x_n] = [p, x]$.

Si $p \in Z$, claramente Z es suave en p.

Si $p \notin Z$. Por el lema 3.10 existe un único $q \in Z$ tal que $q \in [p, z]$ para todo $z \in Z$. Veamos que Z es suave en q.

Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en Z tal que $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$. Demostraremos que $\lim\limits_{n \to \infty} [q, z_n] = [q, z]$. Sabemos que $\lim\limits_{n \to \infty} [p, z_n] = [p, z]$, además $q, z \in liminf[q, z_n]$. Esto implica que (ver 3.7) $[q, z] \subset liminf[q, z_n]$. Sea $x \in limsup[q, z_n]$, como $[q, z_n] \subset [p, z_n]$ se tiene que $x \in lim[p, z_n] = [p, z]$, pero $[q, z_n] \subset Z$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $limsup[q, z_n] \subset Z$, además $[p, x] \cap Z = [q, z]$, de aquí que $x \in [q, z]$. Entonces $\lim\limits_{n \to \infty} [q, z_n] = [q, z]$.

Por lo tanto Z es suave.✠

3.2.2 Conexidad local y suavidad

3.12. **Lema**. Sea X un dendroide suave en p. Entonces X es localmente conexo en p.

Demostración. Supongamos que X es un dendroide suave en $p \in X$. Sean V una vecindad abierta de p y $U = \{x \in X : [p,x] \subset V\}$. Como $p \in U$, $U \neq \varnothing$. Claramente U es arco conexo y en consecuencia conexo.

Veamos que U es abierto.

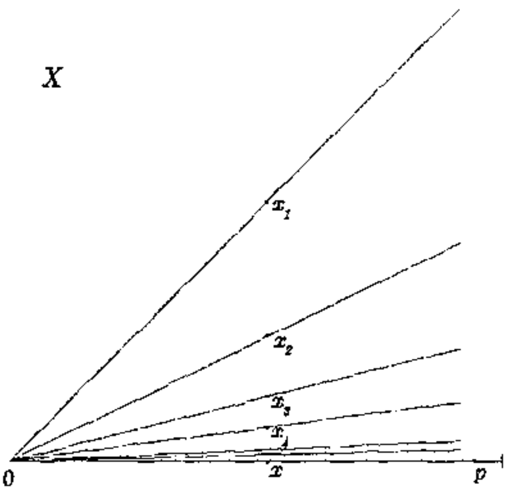
Sea $x \in U$. Supongamos que $x \notin Int(U)$, entonces $x \in \overline{X - U}$. Así que existe una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $X - U$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Como $x \in V$ y V es abierto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Además $x_n \notin U$ paara toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $[p, x_n] \nsubseteq V$. Entonces existe una sucesión $t_n \in [p, x_n]$ tal que $t_n \notin V$. Como $t_n \in X - V$ y $X - V$ es compacto, existe $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $X - V$ tal que $\lim_{n \to \infty} t_n = t \in X - V$.

Ya que $t_{n_k} \in [p, x_{n_k}]$, $t \in \lim_{n \to \infty} [p, x_n] = [p, x]$ (por ser X suave en p) y $[p, x] \subset V$, entonces $t \in V$. De esta contradicción se sigue que U es abierto.

Como $p \in U \subset V$ y U es abierto y conexo, concluimos que X es localmente conexo en p.✠

Un dendroide localmente conexo en p no necesariamente es suave en p.

3.13. **Ejemplo.**



X es localmente conexo en p

Sea $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión como en la figura, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} [p, x_n] = [p, 0] \neq [p, x]$. Así qye X no es suave en p.

3.14. **Teorema.** Sea X un dendroide localmente conexo. Entonces X es suave en todo punto $p \in X$

Demostración. Sean $p \in X$ y $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Demostraremos que $[p, x] = \lim\limits_{n\to\infty} [p, x_n]$.

Sabemos que $[p, x] \subset liminf[p, x_n]$

Supongamos que existe $a \in (limsup[p, x_n]) - [p, x]$. Como $a \neq x$, existen tanto una vecindad conexa y abierta V de x como una vecindad abierta W de a tales que $\overline{W} \cap (\overline{V} \cup [p, x]) = \emptyset$. Como $a \in limsup[p, x_n]$, existe una sucesión $n_1 < n_2 < \ldots$ y existen puntos

$a_{n_k} \in [p, x_{n_k}]$ tales que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, por lo que para algún indice $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} \in W$ y $x_{n_k} \in V$. Por ser $\overline{V}$ conexo, $[x, x_{n_k}] \subset \overline{V}$. Además $[p, x] \cup [x, x_{n_k}]$ no contiene a a_{n_k}. Pero $[p, x] \cup [x, x_{n_k}]$ es un subcontinuo de X que tiene a p y a x_{n_k}, por lo que $a_{n_k} \in [p, x_{n_k}] \subset [p, x] \cup [x, x_{n_k}]$. Con esta contradicción se demuestra que $a \in [p, x]$, lo cual indica que $\limsup [p, x_n] \subset [p, x]$.

Por lo tanto $[p, x] = \lim_{n\to\infty} [p, x_n]$.

El teorema 3.15 es nuestra cuarta caracterización

3.15. **Teorema.** Sea X un dendroide. Entonces X es una *dendrita* si y sólo si X es suave en todos sus puntos.

Demostración. $\Leftarrow]$ Sea X un dendroide suave en todos sus puntos, por 3.12, X es localmente conexo en todos sus puntos. Por ser X hereditariamente unicoherente no contiene curvas cerradas simples. Por lo tanto X es una dendrita

$\Rightarrow]$ Es inmediato del teorema 3.14. ✠

Observaciones:

En dendroides

Suave en un punto $p \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ localmente conexoen $p \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ conexo en pequeño en p.

En continuos

Conexo en pequeño en todo punto $\Leftrightarrow$ localmente conexo en todo p.

En dendroides

Localmente conexo en todo punto $\Leftrightarrow$ suave en todo punto.

3.3 Caracterización de dendrita con retracciones monótonas.

En la presente sección se demostrará que un dendroide X es una dendrita si y sólo si todo subcontinuo de X admite una retracción monótona.

3.3.1 Retracciones monótonas y preservadoras de orden

3.16. **Definición.** Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua

a) Decimos que f es **monótona** si para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es conexo.

b) Sean X, Y dendroides y $f : X \to Y$ una función continua. La función f es **preservadora de orden** ($\leq_p$) si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ tales que $x \leq_p y$, se tiene que $f(x) \leq_{f(p)} f(y)$ en Y.

3.17. **Definición.** Sean X un espacio topológico, $Y \subset X$ y $r : X \to Y$ una función continua. Decimos que r es una **retracción** de X a Y si $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.

3.18. **Lema.** Sean X, Y dendroides y f una función de X a Y. Entonces f es monótona si y sólo si f es preservadora de orden ($\leq_p$) para todo $p \in X$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $p \in X$. Supongamos que f es monótona. Sean $x, y \in X$ tal que $x \leq_p y$. Queremos demostrar que $f(x) \leq_{f(p)} f(y)$, es decir $f(x) \in [f(p), f(y)]$.

Supongamos que $f(x) \notin [f(p), f(y)]$. De aquí podemos considerar dos casos:

1) $f(x)$ y $f(y)$ no se pueden comparar con el orden $\leq_{f(p)}$, es decir $f(y) \notin [f(p), f(x)]$ (en particular, $f(x) \neq f(p) \neq f(y)$ y $f(x) \neq f(y)$). Consideramos dos subcasos.

1 a) $f(p) \in [f(x), f(y)]$.

Como $f(x), f(y) \in f([x, y])$, f es continua y $[x, y]$ conexo, entonces $[f(x), f(y)] \subset f([x, y])$.

De manera que $f(p) \in [f(x), f(y)] \subset f([x, y])$. Entonces existe $t \in [x, y]$ tal que $f(t) = f(p)$, de aquí que$p, t \in f^{-1}(f(p))$. Como $f^{-1}(f(p))$ es conexo, $x \in [p, t] \subset f^{-1}(f(p))$. Así que $f(x) \neq f(p)$, lo cual es absurdo. Por tanto este caso es imposible.

1 b) $f(p) \notin [f(x), f(y)]$.

Supongamos que $f^{-1}(f(p)) \cap [p, y] = [p, p']$,

$f^{-1}(f(x)) \cap [p, y] = [a, a'], x \in [a, a']$ y

$f^{-1}(f(y)) \cap [p, y] = [y, y']$.

Note que $[f(p), f(x)] \cap [f(x), f(y)] = [s, f(x)]$, para algún $s \in Y$. Como $s \in [f(p), f(x)] \subset f([p, x])$ existe $t_1 \in [p', a]$ tal que $f(t_1) = s$, además $s \in [f(x), f(y)] \subset f([x, y])$ por lo que existe $t_2[a\prime, y\prime]$ tal que $f(t_2) = s$.

Como $f^{-1}(s)$, $x \in [t_1, t_2] \subset f^{-1}(s)$. De aquí que $f(x) = s$. Entonces $f(x) \in [f(p), f(y)]$, lo cual es una contradicción.

2) $f(y) \leq_{f(p)} f(x)$.

Con un razonamiento análogo al del caso 1 a) tenemos $f(y) \in [f(p), f(x)] \subset f([p, x])$. Entonces existe $t \in [p, x]$ tal que $f(t) = f(y)$, con lo que $y, t \subset f^{-1}(f(y))$. Pero $x \in [t, y]$ y $f(x) \neq f(y)$. Entonces $f^{-1}(y)$ no es conexo.

Por lo tanto $f(x) \leq_{f(p)} f(y)$ para todo $p \in X$.

$\Leftarrow$] Supongamos que f es una función preservadora de orden $(\leq_p)$ para todo $p \in X$.

Sea $y \in Y$. Supongamos que $f^{-1}(y)$ no es conexo, es decir $f^{-1}(y) = U \mid V$. Sean $p \in U$ y $x \in V$. Entonces existe $t \in [p, x]$ tal que f(t)$\neq$y. Como $t \leq_p x$, entonces $f(t) \leq_{f(p)} f(x)$, es decir $f(t) \in [f(p), f(x)] = [y, y] = \{y\}$. Con esta contradicción queda demostrado que f es monótona.✠

3.19. Teorema. Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Entonces Y admite una retracción monótona.

Demostración. Sean Y un subcontinuo de X y $p \in Y$. Por 2.10, Y es una dendrita y por 3.12, X y Y son dendroides suaves en p.

Para todo $x \in X$, $[p, x] \cap Y$ es un subcontinuo de $[p, x]$ (ya que X es hereditariamente unicoherente) y $[p, x] \cap Y$ es un arco que tiene a p como uno de su puntos extremos.

Definimos la función $r : X \to Y$ mediante la siguiente ecuación:

$[p, x] \cap Y = [p, r(x)]$

•) Es claro que, si $x \in Y$, entonces $[p, x] \cap Y = [p, x]$, por lo tanto $r(x) = x$

•) r es continua.

Sea $x \in X$. Supongamos que $x \in X - Y$. Tomemos una vecindad abierta y conexa V de $r(x)$, por otra parte, existe una vecindad abierta y conexa U de x tal que $\overline{U} \cap Y = \varnothing$. Sea $x' \in U$, como U es arco conexo, $[x, x'] \subset U$. Supongamos que $r(x) \neq r(x')$. Como Y es continuo, el arco $[r(x'), r(x)] \subset Y$. Observemos que $[r(x'), r(x)] \cup [r(x'), x'] \cup [r(x), x]$ contiene una curva cerrada simple, lo cual es una contradiccón. Por lo tanto $r(x) = r(x')$ y r es continua en $X - Y$.

Sea $x \in Y$. Supongamos que $x \in Fr(Y)$ (si $x \in Int(Y)$, r es la identidad, que es continua). Sea V una vecindad abierta y conexa de $r(x)$, como $r(x) = x$, V es una vecindad de x. Sea $y \in V$. Note que $r(y) \in [y, y']$, donde y' es cualquier punto en Y (ver lema 3.10). Por otra parte el arco $[x, y] \subset V$ y $[x, y] \cap Y \neq \varnothing$, lo cual indica que $r(y) \subset [x, y] \subset V$. Por lo que r es continua en $Fr(Y)$.

Por lo tanto r es continua.

•) r es monótona

Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de las componentes de $X - \{y\}$ que no intersectan a Y. Demostraremos que $r^{-1}(y) = \cup\mathbb{C} \cup \{y\}$.

$\subseteq$] Sea $x \in r^{-1}(y)$, tal que $x \neq y$ (si $x = y$, es claro que $x \in \cup\mathbb{C} \cup \{y\}$). Sea C_x la componenete de $X - \{y\}$ que contiene a x. Supongamos que existe un punto $s \in C_x \cap Y$, en particular $s \in C_x$, además $x \in C_x$, entonces $[s, x] \subset C_x$. Tenemos que $s \in Y$ y $x \in X - Y$, por el lema 3.10, existe un único punto q en Y tal que para todo $p' \in Y$ $[p', x] \cap Y = [p', q]$, pero $[p, x] \cap Y = [p, y]$. Entonces $[s, x] \cap Y = [s, y]$, por lo que $y \in [s, x] \subset C_x$, con lo que $y \in C_x$, con esta contradicción queda demostrado que $C_x \cap Y = \varnothing$ y $x \in \cup\mathbb{C} \cup \{y\}$. Por lo tanto $r^{-1}(y) \subseteq \cup\mathbb{C} \cup \{y\}$.

$\supseteq$] Sea $x \in \cup\mathbb{C} \cup \{y\}$. Supongamos que $x \in \cup\mathbb{C}$ (cuando $x = y$, claramente $x \in r^{-1}(y)$). Entonces existe $C \in \mathbb{C}$ tal que $x \in C$.

Demostraremos la siguiente igualdad $[p, x] \cap Y = [p, y]$. Supongamos que $y \notin [p, x]$, entonces $[p, x] \subset C$, como $p \in Y$ se tiene que $C \cap Y \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción. Entonces $y \in [p, x]$ y $[p, y] \subseteq [p, x] \cap Y$.

Supongamos que existe un punto $z \in [p, x] \cap Y$ tal que $z \notin [p, y]$. Entonces $y \notin [z, x]$, lo anterior nos dice que $[z, x] \subset C$, por otro lado $z \in Y$, de aqui que $z \in C \cap Y$. Esta contradicción muestra que $[p, x] \cap Y \subseteq [p, y]$. concluimos que $[p, x] \cap Y = [p, y]$ y $x \in r^{-1}(y)$.

Es claro que $\cup\mathbb{C} \cup \{y\}$ es un conjunto conexo. Por lo tanto r es monótona.✠

3.20. **Lema.** Sean X dendroide y $p \in X$. Si todo subcontinuo de X de la forma $Y = [p, x] \cup [p, y]$ admite una retracción preservadora de orden $(\leq_p)$. Entonces X es suave en p.

Demostración. Sean $p \in X$, y $\Gamma_p = \{(x, y) \in X \times X : x \leq_p y\}$. Demostraremos que Γ_p es cerrado en $X \times X$. Sea (x, y) un punto de acumulación de Γ_p. Entonces existen sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tales que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim_{n \to \infty} y_n = y$ y $x_n \leq_p y_n$ para toda n.

Sean $Y = [p, x] \cup [p, y]$ y r: $X \to Y$ una retracción preservadora de orden. Como $x_n \leq_p y_n$, entonces $r(x_n) \leq_{r(p)} r(y_n)$, pero $\lim_{n \to \infty} r(x_n) = r(x)$ y $\lim_{n \to \infty} r(y_n) = r(y)$, entonces $r(x) \leq_{r(p)} r(y)$. Además $x, p, y \in Y$, por lo que $x \leq_p y$. Así que $(x, y) \in \Gamma_p$. Por lo tanto Y es suave en p.✠

Ahora ya tenemos lo necesario para la quinta caracterización

3.21. **Teorema.** Un dendroide X es una dendrita si y sólo si todo subcontinuo Y de X admite una retracción monótona.

Demostración.⇒] Es claro del Teorema 3.19

⇐] Sean X un dendroide, $p \in X$ y Y un subcontinuo de la forma $Y = [p, x] \cup [p, y]$. Por hipótesis Y admite una retracción monótona r. Por 3.18, r es preservadora de orden. Usando 3.20, X es suave en p. para todo $p \in X$. Por lo tanto X es una dendrita (por 3.15).✠

En la caracterización anterior pedimos retracciones monótonas, pero también es cierto si pedimos retracciones preservadoras de orden $(\leq_p)$ para alguna p, que es una hipótesis más débil.✠

3.4 Caracterización de dendrita con retracciones preservadoras de orden.

Desarrollamos esta sección con la finalidad de llegar al siguiente resultado:

Sea X un dendroide. Entonces X es una dendrita si y sólo si existe $p \in X$ tal que todo subcontinuo Y que contiene a p admite una retracción preservadora de orden $(\leq_p)$.

3.4.1 Ultrasuavidad

3.22. **Definición**. Sea X un dendroide. Decimos que X es **ultrasuave** en $p \in X$ si todo subcontinuo Y de la forma $Y = [p,x] \cup [p,y]$ admite una retracción preservadora de orden $(\leq_p)$. Diremos simplemente que X es ultrasuave , si X es ultrasuave en alguno de sus puntos.

3.23. **Teorema**. Sea X un dendroide ultrasuave en p. Entonces X es suaveen p.

Demostración. Es inmediato del lema 3.20■

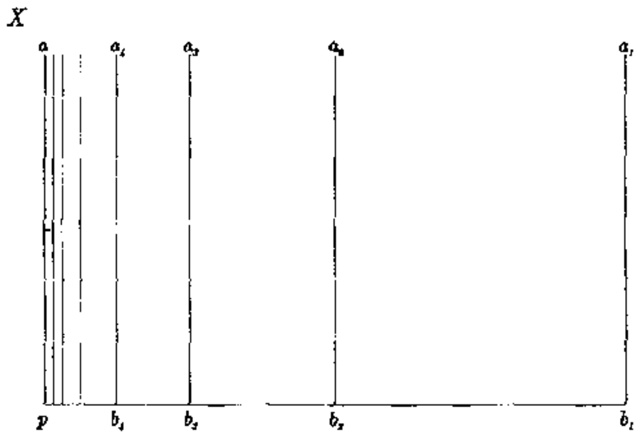
3.24. **Teorema**. Sea X una dendrita. Entonces X es ultrasuave en todos sus puntos.

Demostración. Se sigue del teorema 3.19 y lema 3.18■

La clase de las dendritas (D) está contenida propiamente en la clase de los dendroides que son ultrasuaves (US), que a su vez está contenida propiamente en la clase de los dendroides suaves (S), es decir $D \subsetneq US \subsetneq S$.

Los ejemplos 3.27 y 3.28 que daremos más adelante muestran que las contenciones son propias.

3.25. **Ejemplo.** En el plano, sean $p = (0,0)$, $a = (0,1)$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ $a_n = (\frac{1}{n}, 1)$, $b_n = (\frac{1}{n}, 0)$. Sea X el dendroide que se obtiene al unir p con a y con b_1, y cada a_n con su respectivo b_n mediante segmentos de líneas rectas.



Es fácil ver que X es suave en p.

Afirmación. X no es ultrasuave en p.

Demostración. Sea $Y = [p, a] \cup [p, b_1]$. Demostraremos que Y no admite una retracción preservadora de orden.

Sea $r : X \to Y$ una retracción. Como $a, b_n \in Y$, $r(b_n) = b_n$ y $r(a) = a$. Sabemos que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Por continuidad de r, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r(a_n) \in [p, a]$ para cada $n \geq n_0$. Como $b_n \in [p, a_n]$, $b_n \leq a_n$. Pero $b_n = r(b_n) \notin [p, r(a_n)] \subset [p, a]$ para tosa $n \geq n_0$, es decir $r(b_n) \not\leq_p r(a_n)$. Entonces r no es preservadora de orden. Por lo tanto X no es ultrasuave en p.✠

Hemos encontrado un dendroide suave en p y no ultra suave en p. Note que las definiciones de suave y ultra suave requieren la existencia de algún punto que satisfaga las condiciones. En este sentido el dendroide del ejemplo anterior sí es ultra suave, ya que existe q en X tal que X es ultra suave en q.

3.26. **Afirmación.** Sea X el dendroide del ejemplo 3.25, $A = [p, a]$ y $q \in X - A$. Entonces X es ultrasuave en q.

Demostración. Sean $x_0, y_0 \in X$ y $Y = [q, x_0] \cup [q, y_0]$.

Caso 1. Supongamos que $x_0, y_0 \in (X - A) \cup \{p\}$.

Definimos $r : X \to Y$ de tal manera que para cada $x \in X$, $r(x)$ satisface la siguiente ecuación: $[q, x] \cap Y = [q, r(x)]$. *Con* un razonamiento análogo al que hicimos en la demostración del Teorema 3.19, se ve que r es continua.

Dada $x \in Y$, $[q, x] \cap Y = [q, x]$, con lo que $r(x) = x$ para todo $x \in Y$. Por *tanto* r resulta ser una retracción.

Veamos que r es preservadora de orden.

Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq_q y$, $[q, x] \subset [q, y]$, $[q, x] \cap Y \subset [q, y] \cap Y$, entonces $[q, r(x)] \subset [q, r(y)]$. Así que $r(x) \in [q, r(y)]$, lo cual indica que $r(x) \leq_q r(y)$. Por lo tanto r es retracción preservadora de orden.

Caso 2. Supongamos que $Y \cap A = [p, a_0]$ para algún $a_0 \in A$, $a_0 \neq p$.

Observemos que $a_0 = x_0$ ó $a_0 = y_0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_0 = x_0$, entonces $Y \cap A = [p, x_0]$. Llamémosle A_n al arco de a_n a b_n. Entonces $q \in A_s \cup [b_s, b_{s+1}]$ y $y_0 \in A_t \cup [b_t, b_{t+1}]$ para algunos $s, t \in \mathbb{N}$. Sea $n = máx\{s, t\}$. Definimos r de la siguiente manera:

Para $x \in Y$, $r(x) = x$.

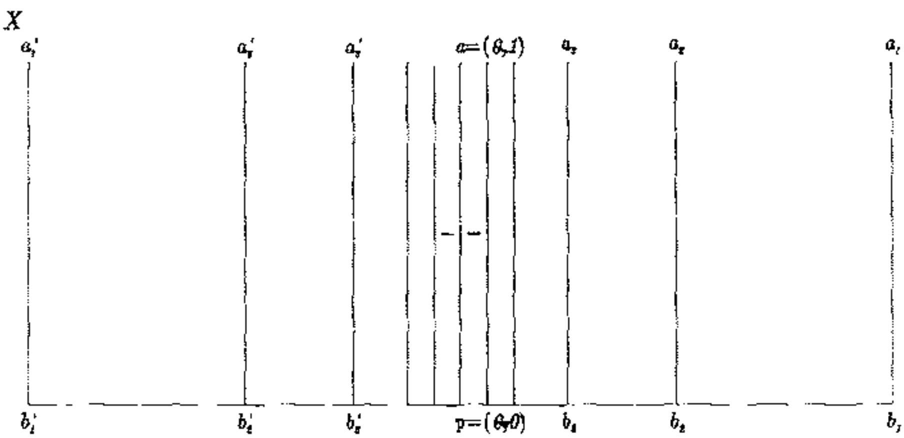
Para $x \in A_m \cup [b_m, b_{m+1}]$, donde $m \leq n$, definimos $r(x)$ como en el caso 1.

Para $x \in A_m$ m > n . Sea $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_j \in A_{n+j} - \{b_{n+j}\}$ y $\lim\limits_{j \to \infty} x_j = p$. Definimos $r(b_{n+j}) = b_{n+j}$ $(b_{n+j} \in Y)$, $r(x_j) = p$, $r(a_{n+j}) = x_0$ y r manda a $[b_{n+j}, x_j]$ en $[b_{n+j}, p]$ y a $[x_j, a_{n+j}]$ en $[p, x_0]$ de manera lineal.

Entonces r resulta una retracción preservadora de orden por la forma en que se construyó. Por lo tanto X es ultrasuave en todo punto de $X - A$.✠

Daremos ahora un ejemplo de un dendroide X que no es ultrasuave, es decir, para todo p∈X, X no es ultrasuave en p.

3.27. **Ejemplo**. En el plano. Sean $p = (0,0)$, $a = (0,1)$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ $b_n = (\frac{1}{n},0)$, $b_n' = (-\frac{1}{n},0)$, $a_n = (\frac{1}{n},1)$ y $a_n' = (-\frac{1}{n},1)$. Entonces X es el dendroide que se obtiene al unir p con b_1 y b_1', cada b_n con a_n y cada b_n' con a_n'.(como se ve en la figura). Sea $A = [a, p]$.



Observe que en cada punto de $A - \{p\}$, X no es localmente conexo. Se sigue de 3.12 y 3.23 que X no es ultrasuave en los elementos de $A - \{p\}$.

La demostración de que X no es ultrasuave en p es identica a la del ejemplo 3.25.

Sea $q \in X - A$. Supongamos que q tiene su primera coordenada negativa. Sea $Y = [q, b_1] \cup [q, a]$. Supongamos que existe una retracción $r : X \to Y$. Por la continuidad de r existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r(a_n) \in [p, a]$ para toda $n \geq n_0$. Es claro que $b_n \leq_q a_n$. Por otro lado $r(q) = q$ y $r(b_n) = b_n$ ($b_n \in Y$).

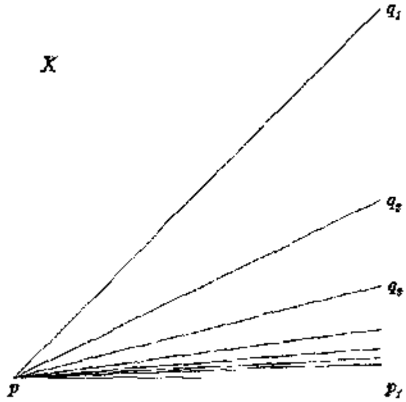
Como $b_n \notin [q, r(a_n)] \subset [q, a]$ para toda $n \geq n_0$. Entonces $b_n \not\leq_q r(a_n)$ para toda $n \geq n_0$. Por lo tanto r no es preservadora de orden.

Si la primera coordenada de q es positiva la demostración de que X no es ultrasuave en q es análoga, intercambiando a_n yb_n por a_n' y b_n', respectivamente.✠.

X no es ultrasuave, sin embargo X es suave (por ejemplo en a_1), es decir $X \in S$ y $X \notin US$

3.28. **Ejemplo.** El abanico armónico es un dendroide ultrasuave, pero no es dendrita. Se construye de la siguiente forma:

En el plano. Sean $p = (0,0)$, $p_1 = (1,0)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $q_n = (1, \frac{1}{n})$. El dendroide X se optiene de unir p con p_1 y p con cada q_n con segmentos de línea recta



Sea $I = [p, p_1]$.

Afirmación. X es ultrasuave en cada punto de $(X - I) \cup \{p\}$.

Demostración. Sean $q \in (X - I) \cup \{p\}$, $x_0, y_0 \in X$, $Y = [q, x_0] \cup [q, y_0]$.

Caso 1. Supongamos que $Y \cap I \subset \{p\}$. Definimos $r : X \to Y$ mediante la ecuación $[q, x] \cap Y = [q, r(x)]$, que ya vimos anteriormente que es retracción preservadora de orden.

Caso 2. Supongamos que $Y \cap I = [p, a]$. Note que $a = x_0$ ó $a = y_0$. Supongamos que $a = x_0$. Entonces $q \in [p, q_s]$, y $y_0 \in [p, q_t]$, para algunas $s, t \in \mathbb{N}$. Sea $n = máx\{s, t\}$. Definimos $R : X \to Y$ de la siguiente manera:

Si $z = (x, y) \in [p, q_m]$ $m > n$ $R(z) = r((x, 0))$.

Si $z \in [p, q_m]$ para $m \leq n$, $R(z) = r(z)$.

R resulta ser retracción preservadora de orden por como fue definida. Por lo tanto X resulta ultrasuave en todos los punto de $(x - I) \cup \{p\}$.✠

X es ultra suave (X$\in US$),

X no es dendrita ($X \notin D$.).

3.29. **Teorema**. Sea X un dendroide suave en un punto $p \in X$. Supongamos que todo subcontinuo Y de X admite una retracción de X a Y. Entonces X es una dendrita.

Demostración. Supongamos que existe $x \in X$ tal que X no es localmente conexo en x, entonces (por 1.20) existe $x_0 \in X$ tal que X no es localmente conexo en x_0. Note que $x_0 \neq p$ (por 3.12). Por el teorema 1.18 existe un continuo de convergencia, el cual contiene a x_0. Sean $R > 0$ tal que $p \notin B_R(x_0)$ y una sucesión de componentes $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\overline{B_R(x_0)}$ tales que $\lim_{n \to \infty} Y_n = Y_0 \subset \overline{B_R(x_0)}$ $x_0 \notin Y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in Y_0$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \in Y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Para cada $n \in \{0,1,2,...\}$, el conjunto $[p, x_n] \cap Y_n$ es un subcontinuo de $[p, x_n]$. Digamos que $[p, x_n] \cap Y_n = [z_n, x_n]$.

Afirmación 1. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Sea $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, convergente a un punto $z' \in \overline{B_R(x_0)}$. Como $z_0 \in Y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$, existen puntos $y_n \in Y_n$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = z_0$. Se sigue de la definición de z_n que $z_{n_k} \leq_p y_{n_k}$. De la suavidad en p, se tiene $z' \leq_p z_0$. Además $z' = \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}$ y $z_{n_k} \in Y_n$, entonces $z' \in Y_0$. Por lo tanto $z' = z_0$.

Como X es suave en p y $z_n \leq_p x_n$ tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} [z_n, x_n] = [z_0, x_0]$.

Sea t un número real positivo tal que $\overline{B_t(x_0)} \subset B_R(x_0)$ y sea Y_n' la componente de x_n en $\overline{B_t(x_0)}$ (algunas Y_n' pueden ser vacías). Es claro que $Y_n' \subset Y_n$ y que $[z_n, x_n] \cap Y_n'$ es un subcontinuo de $[z_n, x_n]$. Digamos que $[z_n, x_n] \cap Y_n' = [p_n, x_n]$ para cada $n \in \{0,1,2,...\}$.

Como en la afirmación 1, podemos probar que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$, además $p_n \leq_p x_n$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} [p_n, x_n] = [p_0, x_0]$.

Sea $M = \{x \in X : v \leq_p x$ para algún punto $v \in \overline{B_t(x_0)}\}$.

Definimos $Y = \overline{X - M} \cup [p, x_0]$.

Afirmación 2. Y es un subcontinuo propio de X.

El conjunto Y es subconjunto propio ya que $x_n \notin Y$ a partir de alguna n.

Además Y es cerrado y por tanto compacto.

Veamos que $X - M$ es conexo por trayectorias. Sea $w \in X - M$. Supongamos que existe $w_1 \in [w, p]$ tal que $w_1 \notin X - M$. Entonces $w_1 \in M$, por lo que existe $v \in \overline{B_t(x_0)}$ tal que $v \leq_p w_1 \leq_p w$. Entonces $w \in M$ (lo cual es una contradicción).

Como $X - M$ es conexo, $\overline{X - M}$ es conexo, además $p \in \overline{X - M}$. De aquí que Y es conexo.

Por lo tanto Y es un subcontinuo de X.

Afirmación 3. $p_n \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $p_n \in Y_n' \subset \overline{B_t(x_0)}$, es claro que $p_n \in M$. Supongamos que $p_n \in Int(M)$ para alguna n. Entonces existe $m \in M$, tal que $m \neq p_n$ y $m \leq_p p_n$. Entonces existe $v \in \overline{B_t(x_0)}$ tal que $v \leq_p m$ y $v \in [z_n, p_n] \subset [z_n, x_n]$. Además $v \in Y_n'$. Esto contradice la definición de p_n y demuestra que $p_n \notin Int(M)$ para toda n, es decir $p_n \in \overline{X - M} \subset Y$.

Afirmación 4. Y no es un retracto de X.

Supongamos que existe una retracción r: X→Y. Entonces $r(p_n) = p_n$ para toda n y $r(x_0) = x_0$. Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, entonces a partir de alguna n_0, $r(x_n) \in [p_0, x_0] \subset [z_0, x_0] - \{z_0\}$, por lo que $z_0 \in r([p_n, x_n])$ para toda $n \geq n_0$. Entonces $z_0 \in \lim\limits_{n\to\infty} r([p_n, x_n]) = r(\lim\limits_{n\to\infty} [p_n, x_n]) = r([p_0, x_0]) = [p_0, x_0] \subset \overline{B_t(x_0)}$, pero el que $z_0 \in \overline{B_t(x_0)}$ es una contradicción, ya que $z_0 \in Fr(B_R(x_0))$ (por la manera en que lo definimos) y a t lo tomamos de tal forma que $\overline{B_t(x_0)} \subset B_R(x_0)$. Por lo tanto Y no es una retracción de X.

De la afirmación 4, obtenemos que X es conexo en pequeño en todos sus puntos. Entonces X es localmente conexo en todos sus puntos. Por ser X hereditariamente unicoherente, no contiene curvas cerradas sinples. Por lo tanto X es una dendrita.✠

La caracterización 6 es un corolario del teorema anterior

3.30. Corolario. *Sea X un dendroide. Entonces X es una dendrita sí y sólo si existe $p \in X$ tal que todo subcontinuo Y tal que $p \in Y$ admite una retracción preservadora de orden* $(\leq_p)$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea X una dendrita. Por 3.19, todo subcontinuo Y tal que $p \in Y$ admite una retracción monótona r. Por 3.18 r es preservadora de orden para todo $p \in X$.

$\Leftarrow$] Supongamos que existe p tal que todo subcontinuo Y admite una retracción preservadora de orden $(\leq_p)$. En particular los subcontinuos de la forma $Y = [p,x] \cup [p,y]$, para todo$x, y \in X$. Por lema 3.20, X es suave en p, con el teorema 3.29 concluimos que X es una dendrita.✠

Referencias

[1] G. Acosta, Hiperespacios y la propiedad de Kelley, tesis de licenciatura, (1994).

[2] J.J Charatonik and W. J. Charatonik, Dendrites, Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, Serie comunicaciones 22 (1998) p. 227-253.

[3] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston, (1996)

[4] L. Lum, A Characterization of local conectivity in dendroids, Studies in topology (Proc. Conf. Unive. North Carolina), Charlote, NC 1974, Academic Press, New York, p. 331-338.

[5] S. B. Nadler, Jr., Continuum Theory, An Introductiom, Pure and Applied Mathematics, A series of monographs and Textbooks, 159, Marcel Dekker, Inc., New York, (1992).

[6] G. T. Whyburn, Analytic Topology, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 28 (1971).