Anexo 2. Demostración $S(t) = \left[S_o(t)\right]^{\exp(\sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j)}$

P.D. $S(t \mid x) = \left[S_o(t)\right]^{\exp(\sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j)}$

En el apartado 2.4.1.3 se probó que $S(t \mid x) = \exp - \left\{ \int_0^t h(s \mid X) ds \right\}$ (1)

Sabemos que $h(t \mid x) = h_0(t) \exp\{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p\}$ (2)

Entonces sustituyendo la ecuación (2) en (1) tenemos que,

$$S(t \mid x) = \exp\left\{ -\int_0^t h_0(s) \exp\{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p\} ds \right\}$$

$$S(t \mid x) = \exp\left\{ -\exp\{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p\} \int_0^t h_0(s) ds \right\} \quad (3)$$

En el apartado 2.4.1.3 también se probó que,

$$-\int_0^t h_0(s) ds = \ln(S_0(t)) \quad (4)$$

Entonces sustituyendo (4) en (3) tenemos,

$$S(t \mid x) = \exp\{\exp\{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p\} * \ln(S_0(t))\} \quad (5)$$

Sacándole logaritmo natural a ambas partes de la igualdad (5),

$$\ln(S(t \mid x)) = \{\exp\{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p\} * \ln(S_0(t))\}$$

$$\frac{\ln(S(t \mid x))}{\exp\{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p\}} = \ln(S_0(t))$$

$$\exp\left\{\frac{\ln(S(t\mid x))}{\exp\{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p\}}\right\} = (S_0(t))$$

$$\frac{\ln(S(t\mid x))}{\exp\{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p\}} = \ln(S_0(t))$$

$$\ln(S(t\mid x)) = \exp\{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p\}\ln(S_0(t)) \quad (6)$$

Y por propiedades del logaritmo natural (6) es equivalente a,

$$\ln(S(t\mid x)) = \ln(S_0(t))^{\exp\{\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p\}}$$

$$S(t\mid x) = \left[S_o(t)\right]^{\exp(\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_j)} \qquad \text{l.q.q.d.}$$