MOVIMIENTO SISMICO EN CAÑONES
DE FORMA ARBITRARIA

T E S I S

Que para optar por el grado de doctor en
ingeniería (estructuras) presenta:

FRANCISCO JOSE SANCHEZ SESMA

Supervisor
EMILIO ROSENBLUETH

División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Noviembre 1978

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
SECCION DE ESTRUCTURAS

MOVIMIENTO SISMICO EN CAÑONES DE FORMA ARBITRARIA

T E S I S

que presenta

FRANCISCO JOSE SANCHEZ SESMA

para obtener el grado de:

DOCTOR EN INGENIERIA (ESTRUCTURAS)

JEFE DE LA SECCION

Ing. Julio Damy Ríos

SECRETARIO ACADEMICO

Dr. Ubaldo Bonilla D.

JURADO

Dr. Emilio Rosenblueth D.
Dr. Porfirio Ballesteros B.
Dr. Luis Esteva Maraboto
Dr. Roberto Meli Piralla
Dr. Eduardo Rukos Manzur
Dr. Raúl Flores Berrones
Dr. Gustavo Ayala Milián

C. U., México., D.F.
Noviembre 1978

Para que pueda ser he de ser otro,
salir de mí, buscarme entre los otros,
los otros que no son si yo no existo,
los otros que me dan plena existencia.

OCTAVIO PAZ

A MI MADRE

A MIS HERMANOS

A MIS MAESTROS

A MIS AMIGOS

I N D I C E

ABSTRACT

A method is presented to compute the scattering and diffraction of plane seismic waves by a canyon of arbitrary shape. The problem is formulated in terms of Fredholm integral equations of the first kind in which the integration paths are defined outside the boundary, thus obtaining regular kernels. A class of discretization schemes using line source solutions is employed. Boundary conditions are satisfied in a collocation-least-squares sense. Numerical results are presented for amplification spectra for different geometries. Comparisons are provided for some known analytic and nuemrical solutions. Some extensions and possible applications are discussed.

RESUMEN

Se presenta un método para calcular la difracción de ondas sísmicas planas por cañones de forma arbitraria. El problema se formula en términos de ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie en las cuales las trayectorias de integración se definen en curvas diferentes de la que define la frontera del cañón. De esta manera se obtienen núcleos regulares. La discretización se hace con soluciones para fuentes lineales y las condiciones de frontera se satisfacen empleando un criterio de colocación y mínimos cuadrados. Se presentan espectros de amplificación para diferentes geometrías, así como comparaciones de los resultados con algunas soluciones analíticas y numéricas conocidas. Se discuten algunas extensiones y posibles aplicaciones del método.

1. INTRODUCCION

Se ha reconocido la influencia de la topografía y la naturaleza del suelo locales en las características de los sismos en un sitio dado como un factor de interés en diseño sísmico (9, 29, 30). Las condiciones locales pueden modificar apreciablemente el movimiento en sitios relativamente cercanos entre sí en los que otros parámetros, como la distancia a la fuente sísmica o los ángulos de incidencia predominantes sean sensiblemente similares. En algunos sitios estas diferencias se han manifestado por aumentos o reducciones de la intensidad de un temblor y, consecuentemente, en la distribución espacial del daño (18,27).

En los últimos años los efectos de la topografía local y de las características del suelo superficial en la amplificación de las ondas sísmicas han sido estudiadas por numerosos autores. La construcción de importantes obras civiles y la necesidad de estimar parámetros para diseño confiables ha reforzado este interés (9).

El asunto se ha tratado en la literatura como un problema de difracción de ondas elásticas por irregularidades en la superficie de un semiespacio elástico. Se han empleado métodos de perturbaciones (12,23), en que los resultados están restringidos a regiones lejanas de la irregularidad.

El ajuste de desarrollos asintóticos (32) permite tratar sólo longitudes de onda mucho mayores que el tamaño de la zona irregular. El empleo de diferencias finitas ha permitido calcular el movimiento en la irregularidad misma; se ha encontrado que los efectos topográficos son significativos cuando la longitud de onda incidente es comparable con la dimensión característica de la zona irregular (4). Para cañones semicirculares y semielípticos se han obtenido soluciones analíticas cuando inciden ondas de cortante planas polarizadas horizontalmente, o SH (46,50). Dichas soluciones se han extendido para tratar difracción de ondas SH por depósitos aluviales con secciones semicircular y semielíptica (44,51). La difracción de ondas SH por cañones de forma arbitraria ha sido formulada en términos de una ecuación integral de Fredholm de segunda especie y aplicada para estudiar los efectos topográficos en el cañón de Pacoima, California (49). Un método que consiste en considerar que la irregularidad es periódica y así discretizar las integrales que resultan de las condiciones de frontera se ha empleado para estudiar difracción de ondas SH en medios estratificados con interfase irregular (2) y para calcular los efectos de la topografía en la superficie (5). Este método está restringido a pendientes pequeñas. Para medios acústicos se ha obtenido solución exacta para una cavidad semiesférica y un cañón semicircular (41). Recientemente se ha propuesto, para ondas P y SV, un procedimiento que consiste en superponer ondas planas y satisfacer las condiciones de frontera, en la irregularidad y en la superficie del semiespacio, empleando un criterio de mínimos cuadrados (31). El método de los elementos finitos se ha empleado en problemas de propagación de ondas y amplificación recurriendo a la discretización de un dominio finito y especificando condiciones de frontera que tienden a reproducir la continuidad con el material fuera de la región de interés (3,22,28,42). En este contexto el empleo de las *fronteras activas eficientes* (3) ha permitido calcular amplificaciones en la superficie de depósitos aluviales y cañones ante incidencia de ondas planas SH.

En esta tesis se desarrolla un método alternativo para calcular la difracción de ondas sísmicas por cañones con sección transversal de forma arbitraria. Se hace uso de representaciones integrales de las ondas difractadas en las cuales la trayectoria de integración se localiza fuera de la frontera, obteniéndose así núcleos regulares. La inclusión de condiciones de frontera libre conduce a ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie. La discretización se hace directamente con soluciones para fuentes lineales.

La idea de usar curvas de integración diferentes de la frontera ha sido empleada por De Mey (8) en la solución del programa interior de Laplace. De Mey resuelve el problema usando un criterio de colocación únicamente; requiere entonces de igual número de fuentes y puntos de colocación. Planteamientos similares han sido propuestos para problemas de la elastostática (7,13,26).

Aparentemente la idea en la que se basa la obtención de núcleos regulares no ha sido empleada en la solución de problemas de la elastodinámica. En este estudio dicha idea tiene la virtud de conducir a una formulación bastante simple, pues no hay que tratar explícitamente con las singularidades como ocurre con los métodos clásicos de ecuaciones integrales. Adicionalmente se emplea un criterio variacional de colocación y mínimos cuadrados que hace expedita la solución numérica.

La construcción de soluciones para fuentes lineales de ondas SH es inmediata; basta suponer funciones de Hankel para satisfacer condiciones de frontera libre en la superficie del semiespacio. Para tratar fuentes lineales de ondas P o SV en un semiespacio elástico el procedimiento no es tan simple, debido al acoplamiento de los potenciales al tratar condiciones de frontera. Lamb (19) obtuvo soluciones en términos de integrales desde principios del siglo; no obstante su evaluación numérica es complicada, aún con el empleo de calculadoras electrónicas. Se ha concentrado un esfuerzo considerable en este problema. Baste mencionar las soluciones asintóticas obtenidas por Lapwood (20), válidas para grandes distancias de la fuente, y la elegante solución de Garvin (11) para los desplazamientos en la superficie cuando se tiene una fuente de ondas P que radía en el tiempo como una función de Heaviside. Recientemente Aki y Larner (2) han ideado un método aproximado que consiste en suponer periodicidad espacial de las fuentes y obtener así representaciones en serie.

Dicho método ha sido aplicado por Bouchon y Aki (6) para modelar distintas clases de fuentes sísmicas y será usado en este trabajo para construir representaciones semianalíticas de fuentes de ondas P o SV.

Surgen preguntas sobre lo completo del conjunto de funciones y la convergencia del método. Los resultados son buenos y la convergencia se ilustra numéricamente. No se intentará aquí un tratamiento riguroso. Sin embargo, hay indicadores promisorios en esa dirección. Podría demostrarse, usando la teoría de la conectividad de Herrera (14,15), que el conjunto de fuentes es completo. El argumento sería similar al empleado para construir bases para algunos problemas relacionados con los que interesan (16). La misma teoría (14,15) probablemente permita demostrar que la solución empleando el criterio de mínimos cuadrados, como se hace aquí, converge a la exacta cuando el número de fuentes tiende a infinito. Estas ideas están relacionadas con un procedimiento propuesto por Millar (24), quien describe condiciones para la validez de la hipótesis de Rayleigh en problemas de difracción de ondas acústicas.

En los capítulos siguientes se presentan la formulación del problema, la solución numérica y se muestran resultados para cañones con distintas geometrías, en algunos casos dichos resultados se comparan con soluciones obtenidas mediante otros procedimientos. Más adelante se discuten algunas extensiones y aplicaciones del método, así como sus ventajas y limitaciones.

Parte del material que aquí se presenta ha sido ya publicado (36,39) o está por serlo (35, 40).

2. FORMULACION DEL PROBLEMA

Se establece a continuación la formulación para incidencia de ondas planas SH y P o SV recurriendo a la superposición de soluciones para fuentes lineales que satisfagan condiciones de frontera libre en la superficie del semiespacio. Dicha superposición de soluciones particulares se hace en términos de ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie. Se presenta en cada caso la expresión del error cuadrático y se indica que se busca la solución que lo hace mínimo.

2.1 *Incidencia de ondas SH*

En la propagación de ondas armónicas SH, los desplazamientos en la dirección de z (fig 1) satisfacen la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + k_S^2\, u_z = 0 \qquad (1)$$

donde $k_S = \omega/\beta$ = número de onda S, ω = frecuencia circular, $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ = velocidad de propagación de ondas S, μ = módulo de rigidez al cortante y ρ = densidad del medio. La dependencia con respecto al tiempo está dada por $\exp(i\omega t)$, donde $i = \sqrt{-1}$, y t = tiempo.

La condición de frontera libre implica que en la superficie libre

$$t_z = \mu \frac{\partial u_z}{\partial n} = 0 \tag{2}$$

donde t_z = componente de esfuerzo en la dirección z y n = vector normal a la superficie del semiespacio o a la frontera del cañón (fig 2).

Considérese una onda plana de amplitud unitaria que asciende hacia la superficie del semiespacio elástico

$$u_z^{(i)} = \exp i\omega(t - \frac{x}{c_x} + \frac{y}{c_y}) \tag{3}$$

donde $c_x = \beta/\text{sen}\ \theta$, $c_y = \beta/\cos\theta$ y θ = ángulo de incidencia (fig 3). Para satisfacer la condición de frontera libre en y = 0, se deberá tener una onda reflejada dada por

$$u_z^{(r)} = \exp i\omega(t - \frac{x}{c_x} - \frac{y}{c_y}) \tag{4}$$

La solución de campo libre, en ausencia de irregularidad, $u_z^{(0)}=u_z^{(i)}+u_z^{(r)}$ puede escribirse como

$$u_z^{(0)} = 2\cos(\frac{\omega y}{c_y}) \exp i\omega(t - \frac{x}{c_x}) \tag{5}$$

Supóngase que la solución, incluyendo la influencia de la topografía, tiene la forma

$$u_z = u_z^{(0)} + u_z^{(d)} \tag{6}$$

donde $u_z^{(d)}$ = desplazamientos debidos a las ondas difractadas. Supóngase que $u_z^{(d)}$ puede expresarse como un potencial de capa simple (47) en una curva interior C; entonces

$$u_z^{(d)}(P) = \int_C f(Q)\ G(P,Q)\ dS_Q \tag{7}$$

donde $Q \in C$, $P \in E \cup \partial E$ (fig 4), f(Q) = densidad de capa simple, una función que se determinará a partir de las condiciones de frontera, y

$G(P,Q)$ = función de Green para el punto Q en el semiespacio, esto es, $G(P,Q)$ satisface

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_S^2\right) G(P,Q) = - \delta(|\bar{r} - \bar{r}_o|) \qquad (8)$$

con la condición de superficie libre

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0$$

donde $\delta(\cdot)$ = función delta de Dirac, $\bar{r}$ = vector de posición del punto P, y $\bar{r}_o$ = vector de posición del punto Q.

La función de Green está dada por

$$G(P,Q) = \frac{i}{4} \{H_o^{(2)}(k_S r_1) + H_o^{(2)}(k_S r_2)\} e^{i\omega t} \qquad (9)$$

donde $H_o^{(2)}(\cdot)$ = función de Hankel de la segunda clase y orden cero, $r_1 = \overline{PQ}$ = distancia entre P y Q, $r_2 = \overline{PQ'}$ = distancia entre P y Q', Q' es el punto imagen de Q en el semiespacio superior. La ec 9 constituye una *fuente* de ondas SH en el punto Q; más precisamente las funciones de Hankel representan ondas SH cilíndricas que se propagan al infinito con velocidad β y satisfacen la condición de radiación de Sommerfeld (43).

De las ecs 6 y 7 se puede escribir

$$u_z(P) = u_z^{(0)}(P) + \int_C f(Q)\, G(P,Q)\, dS_Q \qquad (10)$$

donde $P \in E \cup \partial E$. Sustituyendo la ec 10 en la 2 para $P \in \partial E$ se obtiene

$$\int_C f(Q) \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P} dS_Q = - \frac{\partial u_z^{(0)}(P)}{\partial n_P} \quad , \qquad P \in \partial E \qquad (11)$$

donde n_P = vector normal a la frontera ∂E en el punto P. Se trata de una ecuación integral de Fredholm de primera especie en la función incógnita $f(Q)$.

Para evitar dificultades numéricas debidas a la posible coincidencia de

k_S con los eigenvalores de un problema interior en la región limitada por C y Γ (Apéndice B), la solución se obtiene en el sentido de mínimos cuadrados, esto es, una solución para la cual el error medio cuadrático

$$\int_{\partial E} \left| \frac{\partial u_z^{(d)}(P)}{\partial n_P} + \frac{\partial u_z^{(0)}(P)}{\partial n_P} \right|^2 dS_P \tag{12}$$

sea mínimo.

2.2 *Incidencia de ondas P o SV*

Para formular el problema de propagación de ondas armónicas P o SV considérense los potenciales usuales ϕ y ψ (10), que satisfacen la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + k_P^2\,\phi = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + k_S^2\,\psi = 0 \tag{14}$$

donde $k_P = \omega/\alpha$ = número de onda P, $\alpha = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ = velocidad de propagación de ondas P y λ = constante de Lamé. Los desplazamientos u_x y u_y en términos de ϕ y ψ están dados por

$$u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{15}$$

$$u_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{16}$$

Los esfuerzos en el medio pueden escribirse como

$$\sigma_x = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{17}$$

$$\sigma_y = \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{18}$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{19}$$

Las condiciones de frontera libre implican que en la superficie libre

$$t_x = \sigma_x \cos \theta_n - \tau_{xy} \text{ sen } \theta_n = 0 \tag{20}$$

$$t_y = \tau_{xy} \cos \theta_n - \sigma_y \text{ sen } \theta_n = 0 \tag{21}$$

donde t_x, t_y = componentes de esfuerzo en las direcciones x, y respectivamente, θ_n = ángulo medido de la dirección positiva del eje x al vector n (fig 2).

Los potenciales $\phi^{(0)}$ y $\psi^{(0)}$ de la solución de campo libre, omitiendo el factor $\exp(i\omega t)$, pueden escribirse como

$$\phi^{(0)}=A_1\exp[-ik_p(x \cos e-y \text{ sen } e)]+A_2\exp[-ik_p(x \cos e+y \text{ sen } e)] \tag{22}$$

$$\psi^{(0)}=B_1\exp[-ik_s(x \cos f-y \text{ sen } f)]+B_2\exp[-ik_s(x \cos f+y \text{ sen } f)] \tag{23}$$

donde A_1, A_2 = amplitudes de las ondas P incidente y reflejada, B_1,B_2 = amplitudes de las ondas SV incidente y reflejada, y e,f = ángulos de incidencia y reflexión (fig 5). Para ondas incidentes P es claro que $B_1 = 0$. Con objeto de lograr que $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = 0$ en $y = 0$ las amplitudes de las ondas reflejadas deben satisfacer las relaciones

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4 \tan e \tan f - (\tan^2 f - 1)^2}{4 \tan e \tan f + (\tan^2 f - 1)^2} \tag{24}$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4 \tan e \ (\tan^2 f - 1)}{4 \tan e \tan f + (\tan^2 f - 1)^2} \tag{25}$$

De manera similar, para ondas incidentes SV ($A_1 = 0$) las expresiones correspondientes para amplitudes de las ondas reflejadas son

$$\frac{A_2}{B_1} = \frac{4 \tan f \ (\tan^2 f - 1)}{4 \tan e \tan f + (\tan^2 f - 1)^2} \tag{26}$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4 \tan e \tan f - (\tan^2 f - 1)^2}{4 \tan e \tan f + (\tan^2 f - 1)^2} \tag{27}$$

La relación entre los ángulos f y e está dada por $\cos f = (\beta/\alpha) \cos e$.

Supóngase que la solución, incluyendo las ondas difractadas por el cañón, tiene la forma

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}^{(0)} + \underset{\sim}{u}^{(d)} \tag{28}$$

donde $\underset{\sim}{u} = [u_x, u_y]^T$, $\underset{\sim}{u}^{(0)} = [u_x^{(0)}, u_y^{(0)}]^T$, $\underset{\sim}{u}^{(d)} = [u_x^{(d)}, u_y^{(d)}]^T$, $u_x^{(0)}$, $u_y^{(0)}$ = desplazamientos de la solución de campo libre en términos de $\phi^{(0)}$ y $\psi^{(0)}$, y $u_x^{(d)}$, $u_y^{(d)}$ = desplazamientos debidos a las ondas difractadas en términos de potenciales difractados $\phi^{(d)}$, $\psi^{(d)}$.

Extendiendo las ideas del caso SH se tiene que

$$\phi^{(d)}(P) = \int_{C_1} g(Q)\phi_1(P,Q)dS_Q + \int_{C_2} h(Q)\phi_2(P,Q)dS_Q \tag{29}$$

$$\psi^{(d)}(P) = \int_{C_1} g(Q)\psi_1(P,Q)dS_Q + \int_{C_2} h(Q)\psi_2(P,Q)dS_Q \tag{30}$$

donde $P \in E \cup \partial E$, $Q \in C_1$ ó $Q \in C_2$ (fig 5), $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ = densidades de capa simple, funciones desconocidas por determinarse, ϕ_1, ψ_1 = potenciales para una fuente lineal de ondas P y ϕ_2, ψ_2 = potenciales para una fuente lineal de ondas SV. En el Apéndice C se dan las expresiones para ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 y ψ_2 y se describe brevemente el procedimiento para su uso numérico.

Sustituyendo las ecs 29 y 30 en las 15 y 16 y tomando en cuenta la ec 28, se obtiene

$$\underset{\sim}{u}(P) = \underset{\sim}{u}^{(0)}(P) + \int_{C_1} g(Q)\, \underset{\sim}{u}^{(1)}(P,Q)dS_Q + \int_{C_2} h(Q)\, \underset{\sim}{u}^{(2)}(P,Q)dS_Q \tag{31}$$

donde $P \in E \cup \partial E$, $\underset{\sim}{u}^{(1)}(P,Q)$, $\underset{\sim}{u}^{(2)}(P,Q)$ = vectores de desplazamiento en el punto P debidos a fuentes unitarias de ondas P y SV respectivamente, localizadas en el punto Q. Para el vector $\underset{\sim}{t} = [t_x, t_y]^T$ puede escribirse una expresión similar y para $P \in \partial E$, la frontera del cañón, las ecs 20 y 21 conducen a

$$\int_{C_1} g(Q)\underset{\sim}{t}^{(1)}(P,Q)dS_Q + \int_{C_2} h(Q)\underset{\sim}{t}^{(2)}(P,Q)dS_Q = -\underset{\sim}{t}^{(0)}(P), \quad P \in \partial E \tag{32}$$

Esta expresión constituye un sistema de ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie. Como en el caso SH, se resuelve el sistema de manera que el error cuadrático

$$\int_{\partial E} |\underset{\sim}{t}^{(d)}(P) + \underset{\sim}{t}^{(0)}(P)|^2 \, dS_P \qquad (33)$$

sea mínimo. En la expresión 33, $\underset{\sim}{t}^{(d)}$ = vector esfuerzo debido a las ondas difractadas.

3. SOLUCION NUMERICA

En la solución numérica se empleará discretización puntual con fuentes lineales, y para satisfacer las condiciones de frontera, se emplea un criterio de colocación y mínimos cuadrados. El énfasis se pone en la representación del campo más que en la solución de las ecuaciones integrales mismas.

3.1 *Ondas SH*

Sea $f(\cdot)$ de la forma

$$f(Q) = \sum_{m=1}^{M} f_m \, \delta(|Q - Q_m|) \qquad Q,\ Q_m \in C \tag{34}$$

donde M = número de fuentes SH de amplitud f_m en puntos $Q_m \in C$, y $\delta(\cdot)$=función delta de Dirac. Así las ecs 10 y 11 se pueden escribir como

$$u_z(P) = u_z^{(0)}(P) + \sum_{m=1}^{M} f_m \, G(P,Q_m) \tag{35}$$

y

$$\sum_{m=1}^{M} f_m \frac{\partial G(P,\ Q_m)}{\partial n_P} = - \frac{\partial u_z^{(0)}(P)}{\partial n_P} \tag{36}$$

Para encontrar las M incógnitas f_m, $m = 1,2,\ldots,M$ impóngase la condición de la ec 36 en L puntos P_ℓ de la frontera del cañón; así

$$\sum_{m=1}^{M} f_m \frac{\partial G(P_\ell,\, Q_m)}{\partial n_{P_\ell}} = - \frac{\partial u_z^{(0)}(P_\ell)}{\partial n_{P_\ell}}, \quad \ell = 1,2,\ldots,L \qquad (37)$$

Esta expresión representa un problema estándar de álgebra lineal de L ecuaciones con M incógnitas. Si L = M el sistema está completamente determinado, pero la solución sólo satisface la condición de frontera en L puntos de colocación en la superficie del cañón y se requieren valores de L y M muy grandes para lograr soluciones aceptables. No obstante, haciendo L > M, esto es, sin modificar el número de fuentes se aumenta el número de puntos de colocación, se introduce más información de la frontera y se resuelve el sistema de manera que el error cuadrático sea mínimo. El sistema de ecuaciones de la ec 37 puede escribirse como

$$[A_{\ell m}]\ \{f_m\} = \{b_\ell\} \qquad (38)$$

La solución que minimiza el error cuadrático (Apéndice D) se obtiene de resolver el sistema

$$[A^*_{\ell m}]^T [W]\ [A_{\ell m}]\ \{f_m\} = [A^*_{\ell m}]^T\ [W]\ \{b_\ell\} \qquad (39)$$

donde $[A^*_{\ell m}]^T$ = transpuesta conjugada de la matriz de coeficientes y $[W]$ = matriz diagonal de *pesos* para cada ecuación. El sistema resultante es de orden M x M.

Una vez obtenidos los valores de f_m, m = 1,2,...,M, la ec 35 permite calcular el desplazamiento en cualquier punto de la región E y su frontera. La solución de la ec 39 es la equivalencia discreta de la obtención del mínimo en la expresión 12. En el Apéndice E se describe el programa para calculadora digital que se ha elaborado para realizar los cálculos.

3.2 *Ondas P o SV*

Sean g(·) y h(·) de las formas

$$g(Q) = \sum_{m=1}^{M} g_m\ \delta(|Q-Q_m|) \qquad Q, Q_m \in C_1 \qquad (40)$$

$$h(Q) = \sum_{n=1}^{N} h_n \, \delta(|Q-Q_n|) \qquad Q, Q_n \in C_2 \tag{41}$$

donde M = número de fuentes de ondas P con amplitud g_m en puntos $Q_m \in C_1$, N = número de fuentes de ondas SV con amplitud h_n en puntos $Q_n \in C_2$, y $\delta(\cdot)$ = función delta de Dirac. Las ecs 31 y 32 quedan

$$\underset{\sim}{u}(P) = \underset{\sim}{u}^{(0)}(P) + \sum_{m=1}^{M} g_m \underset{\sim}{u}^{(1)}(P, Q_m) + \sum_{n=1}^{N} h_n \underset{\sim}{u}^{(2)}(P, Q_n) \tag{42}$$

y

$$\sum_{m=1}^{M} g_m \underset{\sim}{t}^{(1)}(P, Q_m) + \sum_{n=1}^{N} h_n \underset{\sim}{t}^{(2)}(P, Q_n) = - \underset{\sim}{t}^{(0)}(P) \tag{43}$$

Al imponer la condición de la ec 43 en L puntos P_ℓ de la frontera ∂E, se obtiene

$$\sum_{m=1}^{M} g_m \underset{\sim}{t}^{(1)}(P_\ell, Q_m) + \sum_{n=1}^{N} h_n \underset{\sim}{t}^{(2)}(P_\ell, Q_n) = - \underset{\sim}{t}^{(0)}(P_\ell), \quad \ell = 1, 2, \ldots, L \tag{44}$$

que es un sistema de $2L$ ecuaciones con $M + N$ incógnitas. Se toma $2L > M+N$ y se resuelve como antes en el sentido de mínimos cuadrados. Conocidos g_m, $m = 1, 2, \ldots, M$, h_n, $n = 1, 2, \ldots, N$ la expresión 42 permite calcular los desplazamientos en cualquier punto de la región E y su frontera. Los cálculos numéricos se hacen con un programa que se describe brevemente en el Apéndice E.

4. RESULTADOS

Para apreciar la precisión del método, se han calculado desplazamientos en puntos de la superficie libre de un cañón con sección semicircular cuando inciden ondas planas SH con diferentes ángulos de incidencia y frecuencias normalizadas

$$\eta = \frac{k_S\, a}{\pi} = \frac{2\,\alpha}{\Lambda} \qquad (45)$$

donde Λ = longitud de la onda incidente, a = radio del cañón y η = relación del ancho del cañón a la longitud de onda incidente.

En las tablas 1-3 se presentan las partes real e imaginaria de u_z para $\eta = 0.5,\ 1.0,\ 2.0$, y $\theta = 30°,\ 60°,\ 90°$. En los cálculos se han usado distintos valores de M, el número de fuentes SH. En dichas tablas se presentan, a manera de comparación, los valores exactos calculados con la solución de Trifunac (46). Se usó una semicircunferencia con radio $0.8a$ como curva interior C y se tomaron 99 puntos de colocación en la frontera. Puede apreciarse la convergencia de las soluciones a medida que el número de fuentes aumenta.

El método se ha aplicado también para estudiar incidencia de ondas SH en un cañón semielíptico (39); la concordancia observada con la solución exacta (50) es excelente.

La fig 7 muestra las partes real e imaginaria del campo difractado $u_z^{(d)}$ en una porción de la superficie de un cañón triangular para dos diferentes profundidades, ángulo de incidencia $\theta = -45°$ y frecuencia normalizada $\eta = 0.1/\pi$. Estos resultados se comparan con los obtenidos por medio de ajuste de desarrollos asintóticos (32). Las curvas muestran tendencias similares; la concordancia en el caso del cañón poco profundo es bastante buena. Aunque no se puede asegurar que la solución, empleando desarrollos asintóticos ajustados, sea exacta para $\eta = 0.1/\pi$, el error en el campo total es pequeño.

En las figs 8-10 se exhiben las amplitudes $|u_z|$ en la superficie de un cañón triangular con taludes a 45° y ancho $2a$, para $\eta = 0.25$, 0.5, 1.0 y $\theta = 0°$, 45°, 90°. Se colocaron fuentes a lo largo de líneas paralelas a los taludes separadas de estos una distancia $0.07a$. Se tomaron 99 puntos de colocación en la frontera. El vértice del triángulo se ha suavizado con un segmento de circunferencia tangente a los bordes.

Para el mismo cañón triangular la fig 11 muestra la comparación de resultados obtenidos con el presente método y con el método del elemento finito usando fronteras activas eficientes (3) para dos frecuencias normalizadas $\eta = 0.25$, 0.5 e incidencia vertical. En la misma figura se aprecia el tamaño relativo del dominio discretizado. La concordancia entre las soluciones es satisfactoria.

Para ondas incidentes P y SV se han calculado los desplazamientos horizontal y vertical. Se han tomado en cada caso una longitud de onda incidente $\Lambda = 4\pi a$ y tres diferentes ángulos de incidencia $\theta = 0°$, 30°, 60° ($\theta = 90° - e$ para ondas incidentes P y $\theta = 90° - f$ para ondas incidentes SV). En todos los casos se usaron 15 fuentes de 50 puntos de colocación en la frontera. Las curvas C_1 y C_2 fueron semicircunferencias con radios $0.6a$ y $0.7a$ respectivamente. Se supuso $\lambda = \mu$ lo que da un módulo de Poisson de 0.25. Las figs 12 y 13 presentan las amplitudes normalizadas de los desplazamientos horizontal y vertical.

En la fig 14 se muestran también amplitudes normalizadas de los desplazamientos vertical y horizontal en la superficie de un cañón triangular, de ancho $2a$ y profundidad $h = 0.62a$, ante incidencia vertical de ondas P con dos diferentes longitudes de onda $\Lambda = 4h$, 10h. Se usaron 17 fuentes en total y 50 puntos de colocación en la frontera.

La influencia de la pendiente en el espectro de amplitudes se ilustra en las figs 15 y 16 para cañones senoidales y triangulares, respectivamente, con distintas profundidades. Se consideraron ondas SH de incidencia vertical y se mantuvo la longitud de onda $\Lambda = 5h$, donde h = profundidad. En estos casos se usaron 19 fuentes y 99 puntos de colocación en la frontera. Como antes, se ha suavizado el vértice en los cañones triangulares.

Las tendencias generales en amplificaciones y reducciones previamente observadas para otras geometrías (5,46,49,50) se presentan también en cañones triangulares ante incidencia de ondas SH y P, y para el cañón semicircular cuando inciden ondas P y SV. Para el intervalo de los parámetros considerado, en general se aprecian reducciones en el fondo y amplificaciones en los bordes para incidencia vertical.

A medida que el ángulo de incidencia aumenta, el cañón actúa más como una barrera de ondas sísmicas, pudiendo notarse reducciones en uno de los bordes y grandes amplificaciones en el otro. Este efecto de barrera se incrementa para cañones profundos y, especialmente, para altas frecuencias. En las tablas 1-3 se pueden apreciar amplificaciones cercanas a 100 por ciento en un borde del cañón semicircular. Dicho borde, para altas frecuencias, tiende a comportarse como el vértice de un cuarto de espacio, lo que explica la amplificación observada. En un trabajo reciente (33) se han encontrado, ante incidencia de ondas SH, amplificaciones superiores a 100 por ciento en uno de los bordes de un cañón con sección rectangular. Ante incidencia de ondas P o SV el efecto de barrera es notable; para la longitud de onda estudiada se encontró una amplificación superior a 100 por ciento en el movimiento horizontal de uno de los bordes del cañón semicircular en el caso de incidencia de ondas P a 60°. En el caso SV la amplificación apreciada fue de 60 por ciento en uno de los bordes. En el fondo se encontró una reducción de 80 por ciento. En ambos casos los des plazamientos horizontales son los que experimentan mayores variaciones.

La influencia de la profundidad del cañón es significativa. Este efecto se aprecia en las figs 15 y 16 donde las reducciones aumentan con la pendiente.

Los errores en las soluciones calculadas para ondas SH no exceden de 1 por ciento. Esto se logró modificando el número de fuentes y puntos de colocación hasta alcanzar convergencia. El número de fuentes necesario en el rango de frecuencias estudiado es aproximadamente $10 + 3\eta$, donde η = frecuencia normalizada.

Para ondas P o SV no pudo obtenerse una regla empírica semejante. Los cálculos son largos y emplean un tiempo de máquina que, por el momento, hace prohibitivos los experimentos numéricos. No obstante, en las soluciones calculadas los errores relativos para los esfuerzos no exceden a 10 por ciento y los desplazamientos calculados con más fuentes no indican diferencias significativas. Debe notarse que estos resultados se refieren a frecuencias bajas.

La forma de las curvas en que se localizaron las fuentes fue en todos los casos la misma que la de la frontera. Unas pocas experiencias numéricas permitieron definir distancias medias entre las curvas y la frontera para las que los resultados eran aceptables. Definir los valores óptimos para dichas distancias requerirá escrutinio adicional.

Las formas oscilatorias de las funciones de Hankel y de la excitación, hacen pensar que el criterio de colocación y mínimos cuadrados podría dar lugar a grandes variaciones de la solución en los segmentos comprendidos entre puntos de colocación. En efecto, esto ocurre particularmente para altas frecuencias. Sin embargo, debe notarse que esta dificultad también se presenta en otros métodos al integrar sobre la frontera ya que, estando las funciones de Hankel involucradas, necesariamente la integración debe ser numérica. El procedimiento usado es equivalente a integrar con una regla trapezoidal o, usando factores de peso apropiados en los puntos de colocación, con una regla parabólica de Simpson. En la fig 17 se exhibe la variación del error absoluto entre tres puntos de colocación situados en el fondo del cañón semicircular, para ondas incidentes SH con $\theta = 30°$. Las variaciones que se muestran ahí son típicas entre puntos de colocación. Puede apreciarse que los errores máximos aumentan sensiblemente de manera exponencial con Δ/Λ, donde Δ = longitud de la frontera entre puntos de colocación y Λ = longitud de onda incidente. Para mantener errores inferiores a 0.01, $\Delta/\Lambda \approx 0.15$ es una regla conservadora.

5. EXTENSIONES Y APLICACIONES

Se ha aplicado con éxito una extensión del método para determinar amplificaciones en la superficie de depósitos aluviales ante incidencia de ondas SH (36). La extensión consiste en establecer para los problemas exterior e interior representaciones del campo similares a las empleadas aquí y construir un sistema de ecuaciones integrales al imponer las condiciones de continuidad y equilibrio en la interfase. La fig 18 muestra la definición de las curvas y regiones de los problemas exterior e interior para esta extensión. La concordancia con soluciones analíticas para depósitos semicircular (44) y semieliptico (51) es excelente (36). De manera similar se podría tratar difracción por topografías salientes.

El método puede usarse para estudiar las amplificaciones en depósitos aluviales y, con algunas modificaciones, empujes dinámicos en muros de retención ante incidencia de ondas P o SV. Para este mismo tipo de incidencia se podrían calcular presiones hidrodinámicas en presas considerando interacción agua-vaso, podría validarse la solución aproximada que se ha obtenido para un depósito con sección semicircular ante incidencia vertical de ondas P (34).

El estudio de la difracción de ondas SH por túneles es factible de inmediato (37). La aplicación del método permitirá obtener soluciones para factores de concentración de esfuerzos en túneles a distintas profundidades e investigar los efectos de las reflexiones en la superficie. Aparentemente para este problema no hay soluciones analíticas publicadas. Con algunas modificaciones al método se estará en condiciones de analizar túneles con recubrimiento.

En problemas bidimensionales de interacción suelo-estructura el método se podría aplicar para investigar la influencia de la forma de la base. Existen soluciones analíticas para bases rígidas con secciones semicircular y semielíptica (45,21). La comparación con ellas permitiría apreciar la bondad del método.

El método parece ser particularmente apropiado para resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones (38). Falta, sin embargo, demostrar sus ventajas sobre otros procedimientos.

El método presentado comparte las ventajas de los métodos de integrales de frontera, se reduce en uno la dimensión del problema, sin algunas de sus dificultades; como el tratamiento explícito de las singularidades. La reducción de las dimensiones hace que el método sea más eficiente que otros en los que se discretiza el dominio. La ventaja se acentúa si la única frontera que hay que discretizar es la de la irregularidad.

Debido a que cada fuente lleva consigo *su* singularidad, el método es una herramienta versátil y permite, por ejemplo, el tratamiento de difracción por túneles, cosa que no es posible con métodos que mantienen las singularidades en la superficie.

El método es limitado para muy altas frecuencias debido a que habría que usar un gran número de fuentes. El empleo de aproximaciones asintóticas permitiría reducir esta desventaja. Por otra parte, la definición de las distancias óptimas entre las fuentes y la frontera depende de cada problema particular. No se dan aquí reglas precisas; estas dependen de los criterios de convergencia y de las características del problema. Unas pocas experiencias han sido suficientes para los casos analizados.

6. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método para resolver el problema de difracción de ondas sísmicas planas por cañones de forma arbitraria. El método se basa en el principio de superposición; se combinan soluciones particulares para formular ecuaciones integrales de Fredholm. Con objeto de trabajar con núcleos regulares se seleccionan curvas de integración fuera de la frontera.

La discretización con fuentes lineales y el criterio de colocación y mínimos cuadrados simplifican el tratamiento numérico y conduce a soluciones estables y precisas.

Se han obtenido soluciones para distintas geometrías en las que se aprecian, en general, reducciones en el fondo para incidencia vertical. Ante incidencia oblicua se encontraron grandes amplificaciones en un borde y reducciones en el otro. Este efecto de barrera debe tomarse en cuenta en diseño de puentes, o presas pues los movimientos de sus apoyos pueden presentar grandes diferencias.

Se han discutido extensiones y posibles aplicaciones del método. Este promete ser una herramienta útil para tratar algunos problemas de difracción en elastodinámica y en otros campos en que se pueda construir una función de Green o soluciones equivalentes.

7. RECONOCIMIENTOS

Se agradece a E Rosenblueth la supervisión de este trabajo así como su alentadora y estimulante atención durante el desarrollo del mismo, a G R Aranda, G Ayala, L Esteva, R Flores, I Herrera, R Melí, A A Minzoni, E Rukos, S E Ruiz, F J Sabina y S K Singh sus observaciones y sugerencias; a J A Esquivel su amplia colaboración en varios aspectos de la investigación. G R Aranda prestó el programa para los cálculos con el método de elementos finitos y J N Dyer facilitó la subrutina para el cálculo de las funciones de Hankel.

8. REFERENCIAS

1. Abramowitz, M y Stegun, I A, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications Inc, Nueva York (1970)

2. Aki, K y Larner, K L, "Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves", *J Geophys Res*, 75, 5 (1970), 933-954

3. Aranda, G R y Ayala, G A, "Modelo numérico eficiente de aplicación en estudios de amplificación dinámica", presentado en la *Conferencia Centro Americana de Ingeniería Sísmica*, San Salvador, El Salvador (ene 1978)

4. Boore, D M, "A note on the effect of simple topography on seismic SH waves", *Bull Seism Soc Am*, 62, 1 (1972), 275-284

5. Bouchon, M, "Effect of topography on surface motion", *Bull Seism Soc Am*, 63, 3 (1973), 615-632

6. Bouchon, M y Aki, K, "Discrete wave-number representation of seismic-source wave fields", *Bull Seism Soc Am*, 67, 2 (1977), 259-277

7. Chicurel, R y Suppiger, E W, "The reflection method in elasticity and bending of plates", ZAMP, 15 (1964), 629-638

8. De Mey, G, "Integral equations for potential problems with the source function not located on the boundary", *J Computers & Structures*, 8, 1 (1978), 113-115

9. Esteva, L, "Microzoning: models and realtiy", *Proc 6th World Conf on Earthq Engrg*, New Delhi, India (ene 10-14, 1977)

10. Ewing, W M, Jardetzky, W S y Press, F, *Elastic waves in layered media*, McGraw-Hill Book Co, Nueva York (1957)

11. Garvin, W W, "Exact transient solution of the buried line source problem", *Phil Trans Roy Soc London, Ser A*, 234 (1956), 528-541

12. Gilbert, F y Knopoff, L, "Seismic scattering from topographic irregularities", *J Geophis Res*, 65 (1960), 3437-3444

13. Heise, U, "Numerical properties of integral equations in which the given boundary values and the sought solutions are defined on different curves", *J Computers & Structures*, 8, 2 (1978), 199-205

14. Herrera, I, "General variational principles applicable to the hybrid element method", *Proc National Academy of Sciences*, USA, 74 (1977), 2595-2597

15. Herrera, I, "Theory of connectivity for formally symetric operators", *Proc National Academy of Sciences*, USA, 74 (1977), 4722-4725

16. Herrera, I y Sabina, F J, "Connectivity as an alternative to boundary integral equations. Construction of bases", *Proc National Academy of Sciences*, USA, 75 (1978), 2059-2063

17. Hsu, H P, *Anállisis de Fourirer*, Fondo Educativo Interaméricano, Nueva York (1973)

18. Hudson, D E, "Local distribution of strong earthquake motion", *Bull Seism Soc Am*, 62 (1972), 1765-1786

19. Lamb, H, "On the propagation of tremors at the surface of an elastic solid", *Phil Trans Roy Soc London, Ser A*, 203 (1904), 1-42

20. Lapwood, E R, "The disturbance due to a line source in a semi-infinite elastic medium", *Phil Trans Roy Soc London, Ser A, 242* (1949), 63-100

21. Luco, J E, Wong, H L y Trifunac, M D, "A note on the dynamic response of rigid embedded foundations", *Earthq Engrg and Structl Dyn*, 4, (1975), 119-127

22. Lysmer, J y Kuhlemeyer, R L, "Finite dynamic model for infinite media", *J of the Engrg Mechs Division, Proc ASCE*, 95, EM4 (1969), 859-877

23. McIvor, I K, "Two dimensional scattering of a plane compressional wave by surface imperfections", *Bull Seism Soc Am, 59* (1969), 1349-1364

24. Millar, R F, "The Rayleigh hypothesis and a related least-squares solution of scattering problems for periodic surfaces and other scatterers", *Radio Science*, 8 (1973), 785-796

25. Ng, S F, "A collocation least square solution of boundary value problems in applied mechanics", en *Computer aided engineering*, Gladwell, G M L ed, *University of Waterloo Press*, Ontario, Canadá (1971), 395-402

26. Oliveira, E R, "Plane stress analysis by a general integral method", *J Eng Mech Div, Proc ASCE*, 94, EM1 (1968), 79-101

27. Poceski, A, "The ground effects on the Skopje July 26, 1969 earthquake", *Bull Seism Soc Am*, 59, 1 (1969), 1-29

28. Robinson, A R, "The transmitting boundary again", *en Structural and Geotechnical mechanics*, W J Hall ed, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N J (1977), 163-177

29. Rosenblueth, E, "Soil and rock mechanics in earthquake engineering", *Proc Int Symp on Dynamical Methods in Soil and Rock Mechanics* (DMSR 77), en *Rock dynamics and geophysical aspects, Vol 3*, G W Borm, ed, Karlsruhe, Alemania (sep 5-16,1977), 3-62

30. Ruiz, S E, "Influencia de las condiciones locales en las características de los sismos", *Instituto de Ingeniería, UNAM* 387 (1977)

31. Ruiz, S E y Esteva, L, "Efecto de la topografía en los movimientos del suelo provocados por ondas planas P y SV", en *Evaluación del riesgo-efectos locales, etapa I,* Instituto de Ingeniería, UNAM (mar 1978)

32. Sabina, F J y Willis, J R, "Scattering of SH waves by a rough half-space of arbitrary slope", *Geophys J R Astr Soc, 42* (1975), 685-703

33. Sabina, F J, Herrera, I e England, R ,"Theory of connectivity: applications to scattering of seismic waves. I. SH wave motion", *Proc of the 2nd Int Conf on Microzonation,* San Francisco, California (nov 26-dic 1°, 1978) (en prensa)

34. Sánchez-Sesma, F J, "Presión hidrodinámica con interacción agua-vaso", *Ingeniería,* 47, 3 (1977), 228-233

35. Sánchez-Sesma, F J, "Ground motion amplification due to canyons of arbitrary shape", *Proc of the 2nd Int Conf on Microzonation,* San Francisco, California (nov 26-dic 1°, 1978) (en prensa)

36. Sánchez-Sesma, F J y Esquivel, J A, "Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves", presentado en el *Twelfth International Symposium on Mathematical Gephysics,* Caracas, Venezuela (ago 14-24, 1978)

37. Sánchez-Sesma, F J y Esquivel, J A, "Scattering of SH waves by tunnels", en preparación, *Instituto de Ingeniería, UNAM* (1978)

38. Sánchez-Sesma, F J, Esquivel, J A y Palencia, V J, "Una solución numérica de la ecuación de Laplace", presentado en el *XIII Congreso Nal de Matemáticas,* Puebla (nov 5-11, 1978)

39. Sánchez-Sesma, F J y Rosenblueth, E, "Movimiento del terreno en depresiones bidimensionales de forma arbitraria ante incidencia de ondas SH planas" en *Evaluación del riesgo-efectos locales, etapa I,* Instituto de Ingeniería, UNAM, México (mar 1978), *Ingeniería Sísmica* (en prensa)

40. Sánchez-Sesma, F J y Rosenblueth, E, "Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves", sometido para su posible publicación en *Earthq Engrg Structl Dyn* (1978)

41. Singh, S K y Sabina, F J, "Ground-motion amplification by topographic depressions for incident P wave under acoustic approximation", *Bull Seism Soc Am*, 67, 2 (1977), 345-352

42. Smith, W D, "A nonreflecting boundary for wave propagation problems", *J of Computational Physics*, 15, 4 (1974), 492-503

43. Sommerfeld, A, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, Inc, Nueva York (1949)

44. Trifunac, M D, "Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valleys for incident plane SH-waves", *Bull Seism Soc Am*, 61, 6 (1971), 1755-1770

45. Trifunac, M D, "Interaction of a shear wall with the soil for incident plane SH waves", *Bull Seism Soc Am*, 62, 1 (1972), 63-83

46. Trifunac, M D, "Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon", *Earthq Engrg and Structl Dyn*, 1 (1973), 267-281

47. Ursell, F, "On the exterior problems of acoustics", *Proc Camb Phil Soc*, 74 (1973), 117-125

48. Waas, G, "Analysis method for footing vibrations through layered media", US Army Engineer Waterways Experiment Station, Soils and Pavements Laboratory, Tech Report S-71-14, Vicksburg, Mississippi (sep 1972)

49. Wong, H L y Jennings, P C, "Effects of canyon topography on strong ground motion", *Bull Seism Soc Am*, 65,5 (1975), 1239-1257

50. Wong, H L y Trifunac, M D, "Scattering of plane SH waves by a semi-elliptical canyon", *Earthq Engrg and Structl Dyn*, 3 (1973), 157-169

51. Wong, H L y Trifunac, M D, "Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves", *Bull Seism Soc Am*, 64, 5 (1974), 1389-1408

Tabla 1. Comparación de resultados con la solución exacta, cañón semicircular, $\eta = 0.50$

$\eta = 0.50$ $\theta = 30.00$

X/A	M= 10		15		20		EXACTA	
-1.50	1.58050	2.34561	1.58499	2.34411	1.58567	2.34345	1.58597	2.34345
-1.00	1.78212	2.50086	1.79853	2.51549	1.80367	2.52048	1.80367	2.52048
-0.50	0.26967	1.18741	0.27035	1.18490	0.27065	1.18443	0.27064	1.18443
0.00	-0.37513	1.32332	-0.37752	1.33098	-0.37746	1.33235	-0.37746	1.33235
0.50	0.11779	1.13952	0.11346	1.15365	0.11203	1.15642	0.11202	1.15643
1.00	1.33354	-1.04309	1.32919	-1.12375	1.32788	-1.14951	1.32787	-1.14951
1.50	1.17565	-1.51192	1.16390	-1.52688	1.16050	-1.52934	1.16050	-1.52934

$\eta = 0.50$ $\theta = 60.00$

X/A	M= 10		15		20		EXACTA	
-1.50	-0.35111	2.76297	-0.36179	2.77166	-0.36363	2.77404	-0.36363	2.77404
-1.00	0.05580	3.42918	0.00487	3.43468	-0.01118	3.43636	-0.01119	3.43634
-0.50	1.34090	1.89831	1.35122	1.89879	1.35326	1.89902	1.35327	1.89901
0.00	1.55088	0.68743	1.56362	0.68570	1.56577	0.68548	1.56577	0.68549
0.50	0.97520	-0.20820	0.98511	-0.20577	0.98698	-0.20502	0.98699	-0.20502
1.00	-0.66929	-0.76096	-0.72590	-0.76897	-0.74373	-0.77164	-0.74373	-0.77164
1.50	-0.94689	-0.60061	-0.96035	-0.59339	-0.96288	-0.59116	-0.96288	-0.59116

$\eta = 0.50$ $\theta = 90.00$

X/A	M= 10		15		20		EXACTA	
-1.50	-1.00549	2.57714	-1.02199	2.58653	-1.02516	2.58821	-1.02516	2.58821
-1.00	-0.69753	3.53787	-0.76532	3.52327	-0.78662	3.51835	-0.78662	3.51835
-0.50	1.79185	2.51528	1.80165	2.51953	1.80362	2.52052	1.80365	2.52050
0.00	2.69832	0.36766	2.71540	0.36239	2.71774	0.36164	2.71774	0.36164
0.50	1.31194	-1.14324	1.32482	-1.14875	1.32782	-1.14953	1.32785	-1.14954
1.00	-1.50072	-0.25680	-1.56074	-0.21942	-1.57964	-0.20761	-1.57965	-0.20761
1.50	-1.62852	0.25712	-1.63677	0.27342	-1.63765	0.27722	-1.63765	0.27722

Tabla 2. Comparación de resultados con la solución exacta, cañón semicircular, $\eta = 1.0$

$\eta = 1.00$ $\theta = 30.00$

X/A	M= 10		15		20		EXACTA	
-1.50	-0.63367	1.93452	-0.57891	1.99894	-0.56649	2.00745	-0.56649	2.00745
-1.00	-0.27270	2.90126	-0.42421	3.17473	-0.47423	3.25607	-0.47425	3.75604
-0.50	-2.17119	-1.09776	-2.18913	-1.07495	-2.19088	-1.07481	-2.19089	-1.07480
0.00	-2.12876	0.57789	-2.19232	0.65095	-2.20223	0.66019	-2.20222	0.66020
0.50	0.27455	1.93222	0.27639	1.95458	0.27938	1.95399	0.27932	1.95397
1.00	-0.20900	-1.91136	-0.49837	-1.75527	-0.59183	-1.71278	-0.59190	-1.71278
1.50	-1.51268	-1.51789	-1.48657	-1.44253	-1.47878	-1.42857	-1.47877	-1.42856

$\eta = 1.00$ $\theta = 60.00$

X/A	M= 10		15		20		EXACTA	
-1.50	-1.14891	-0.38026	-1.11820	-0.33940	-1.11216	-0.33234	-1.11216	-0.33234
-1.00	-3.42344	0.88232	-3.55026	0.99850	-3.59159	1.03019	-3.59159	1.03019
-0.50	-0.45780	0.64924	-0.45267	0.67753	-0.45104	0.67898	-0.45104	0.67898
0.00	-0.47612	0.69691	-0.52651	0.76313	-0.53307	0.77163	-0.53307	0.77163
0.50	0.94607	0.30089	0.93891	0.31092	0.93835	0.30893	0.93833	0.30895
1.00	-0.56992	-0.07240	-0.75248	0.20648	-0.81286	0.29022	-0.81285	0.29021
1.50	-0.63866	0.75647	-0.58768	0.81934	-0.57536	0.82815	-0.57536	0.82815

$\eta = 1.00$ $\theta = 90.00$

X/A	M= 10		15		20		EXACTA	
-1.50	-0.30442	-0.66994	-0.27899	-0.65685	-0.27456	-0.65505	-0.27456	-0.65505
-1.00	-3.75639	-0.54895	-3.78081	-0.46217	-3.78995	-0.43683	-3.78994	-0.43682
-0.50	-0.47112	3.23936	-0.47485	3.25487	-0.47436	3.25603	-0.47430	3.25604
0.00	2.69676	0.28322	2.69189	0.32237	2.68953	0.32773	2.68952	0.32773
0.50	-0.58142	-1.72149	-0.59171	-1.71117	-0.59201	-1.71276	-0.59197	-1.71278
1.00	1.12496	0.44336	1.05657	0.60338	1.03279	0.65191	1.03282	0.65190
1.50	1.29966	-0.13729	1.33270	-0.11293	1.31959	-0.10967	1.31959	-0.10967

Tabla 3. Comparación de resultados con la solución exacta, cañón semicircular, $\eta = 2.0$

$\eta = 2.00$ $\theta = 30.00$

X/A	M= 10		15		20		EXACTA	
-1.50	0.74091	-1.15704	0.70448	-1.13299	0.70317	-1.12942	0.70319	-1.12941
-1.00	-3.40383	-0.18822	-3.46605	-0.37223	-3.47828	-0.42692	-3.47834	-0.42714
-0.50	1.28720	0.48138	1.25202	0.49594	1.25098	0.49759	1.25097	0.49748
0.00	1.62731	-1.78459	1.59742	-1.76556	1.59831	-1.76382	1.59843	-1.76378
0.50	-1.79672	0.20781	-1.76972	0.20801	-1.76331	0.20677	-1.76347	0.20669
1.00	1.43898	0.38959	-1.42650	0.63539	-1.42391	0.72468	-1.42407	0.72470
1.50	-0.12401	2.04079	-0.05495	2.06556	-0.05054	2.06386	-0.05053	2.06384

$\eta = 2.00$ $\theta = 60.00$

X/A	M= 10		15		20		EXACTA	
-1.50	-1.83283	2.46628	-1.76901	2.55157	-1.76450	2.55561	-1.76450	2.55559
-1.00	2.92025	-3.02770	2.85687	-2.74221	2.80912	-2.63566	2.80893	-2.63559
-0.50	2.64131	-1.31221	2.72037	-1.24558	2.73097	-1.24294	2.73078	-1.24296
0.00	-2.40835	0.07178	-2.44644	0.14278	-2.45132	0.14889	-2.45120	0.14878
0.50	1.51314	-0.37793	1.51624	-0.37835	1.52035	-0.37156	1.52027	-0.37135
1.00	0.70125	-0.67166	0.47134	-0.86228	0.38808	-0.89220	0.38792	-0.89198
1.50	-0.94335	-0.85681	-0.99280	-0.74464	-0.99267	-0.73442	-0.99266	-0.73446

$\eta = 2.00$ $\theta = 90.00$

X/A	M= 10		15		20		EXACTA	
-1.50	-3.41897	-0.42424	-3.40347	-0.18771	-3.39576	-0.17178	-3.39574	-0.17174
-1.00	4.70441	0.08372	4.13223	0.19777	3.92585	0.27071	3.92598	0.27041
-0.50	-3.53599	-0.48741	-3.48763	-0.44017	-3.47836	-0.42708	-3.47834	-0.42725
0.00	2.60129	0.04269	2.66496	0.13720	2.65254	1.49088	2.65257	0.14950
0.50	-1.53581	0.61482	-1.43244	0.71927	-1.42397	0.72545	-1.42407	0.72483
1.00	-0.06127	0.69389	-0.01917	0.76622	-0.04852	0.84105	-0.04860	0.84038
1.50	0.95417	0.13408	0.99010	0.23138	0.99196	0.24013	0.99201	0.24020

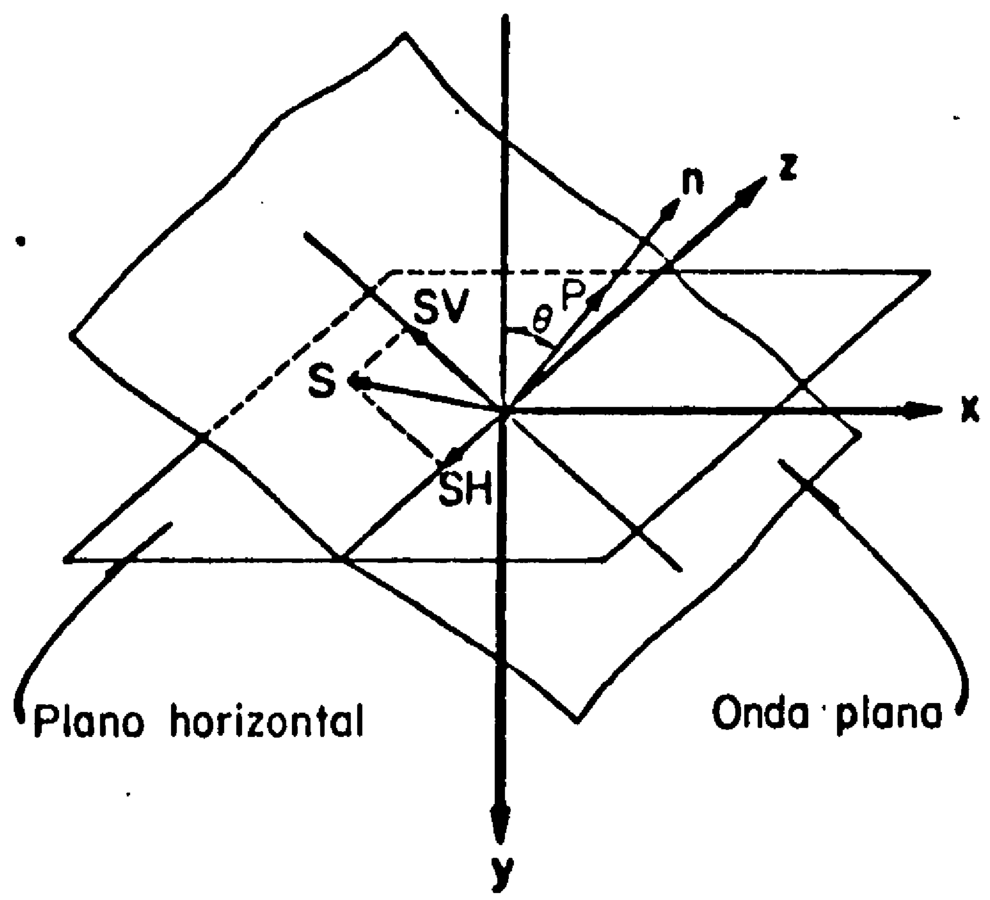


Fig 1. Tipos de ondas planas y ejes de referencia

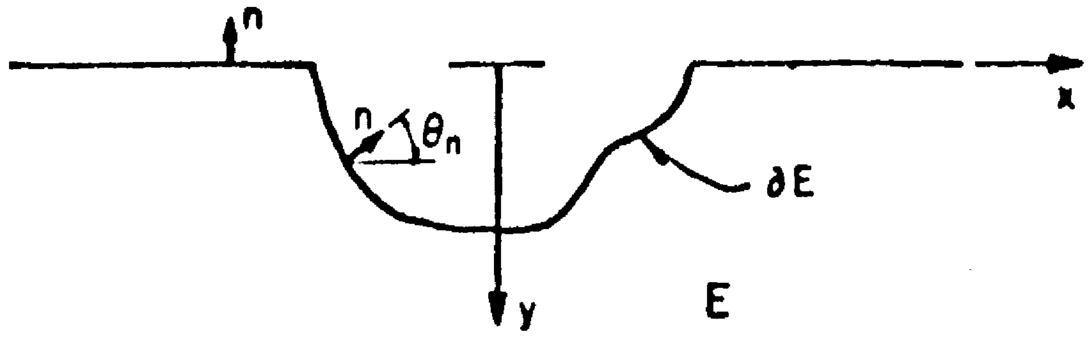


Fig 2. Geometría del problema

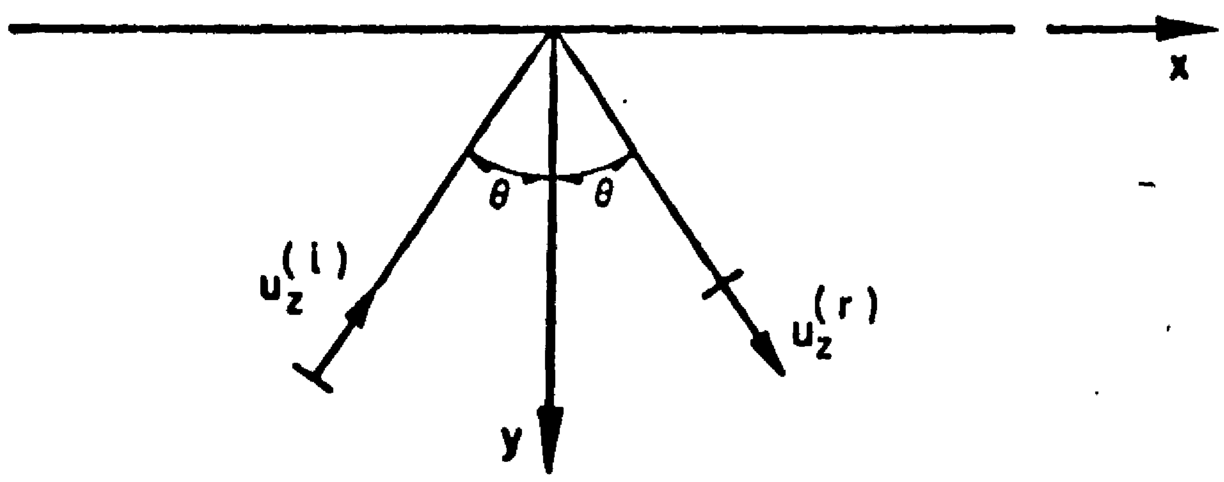


Fig 3. Ondas SH incidente y reflejada, solución de campo libre

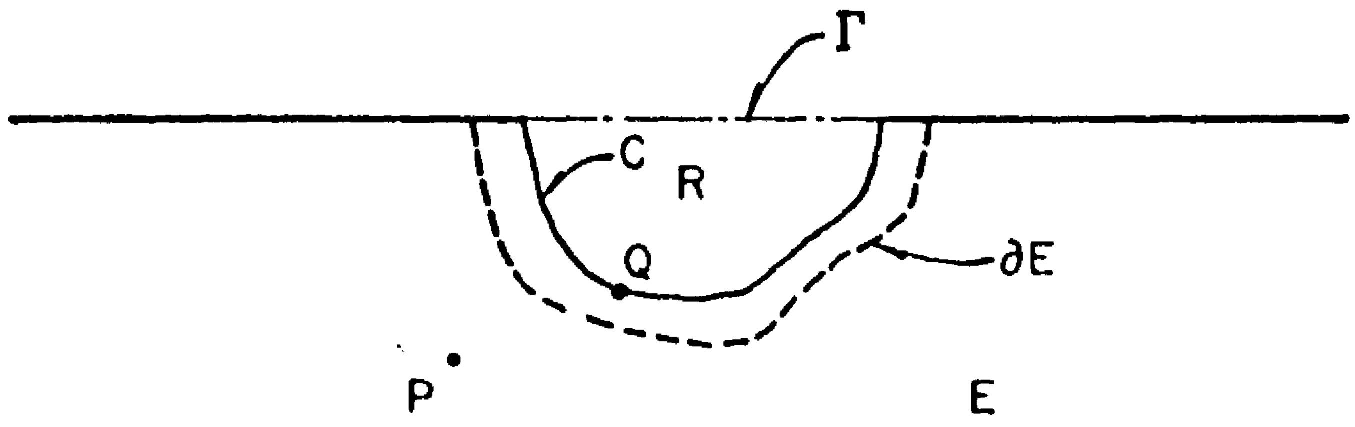


Fig 4. Definición de las regiones R y E y las curvas C, Γ y ∂E

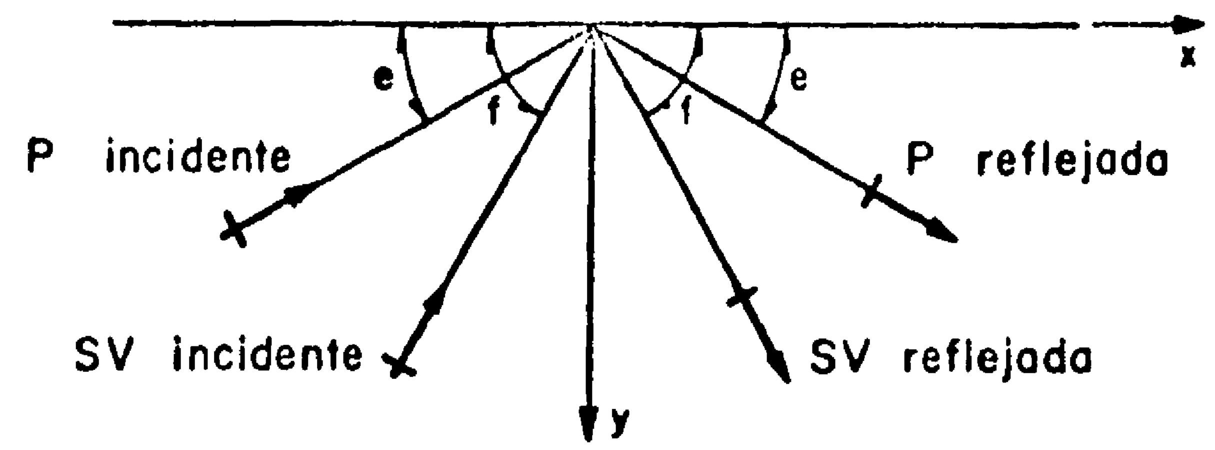


Fig 5. Ondas P y SV incidentes y reflejadas, solución de campo libre

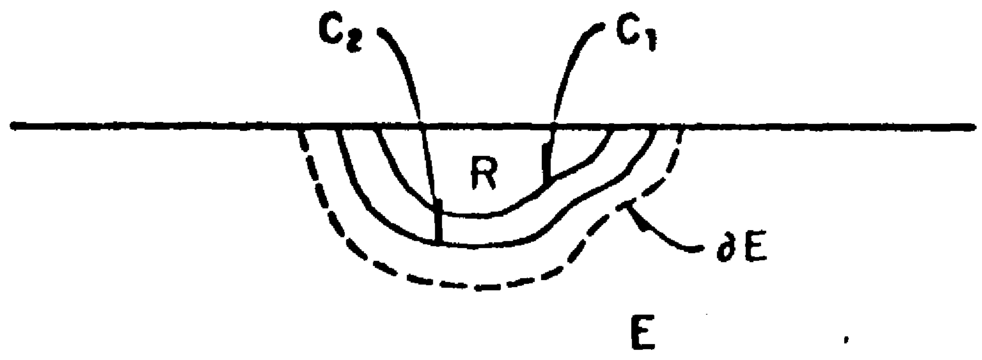
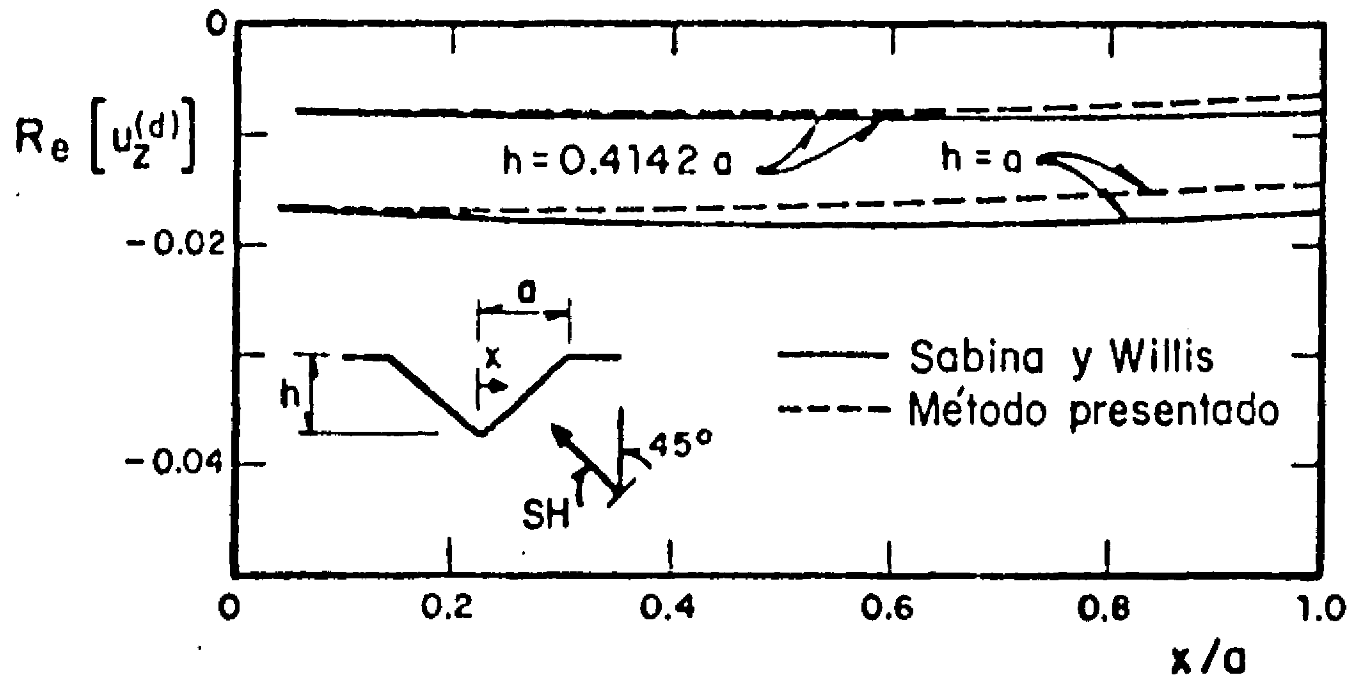


Fig 6. Definición de la región E y las curvas C_1, C_2 y ∂E



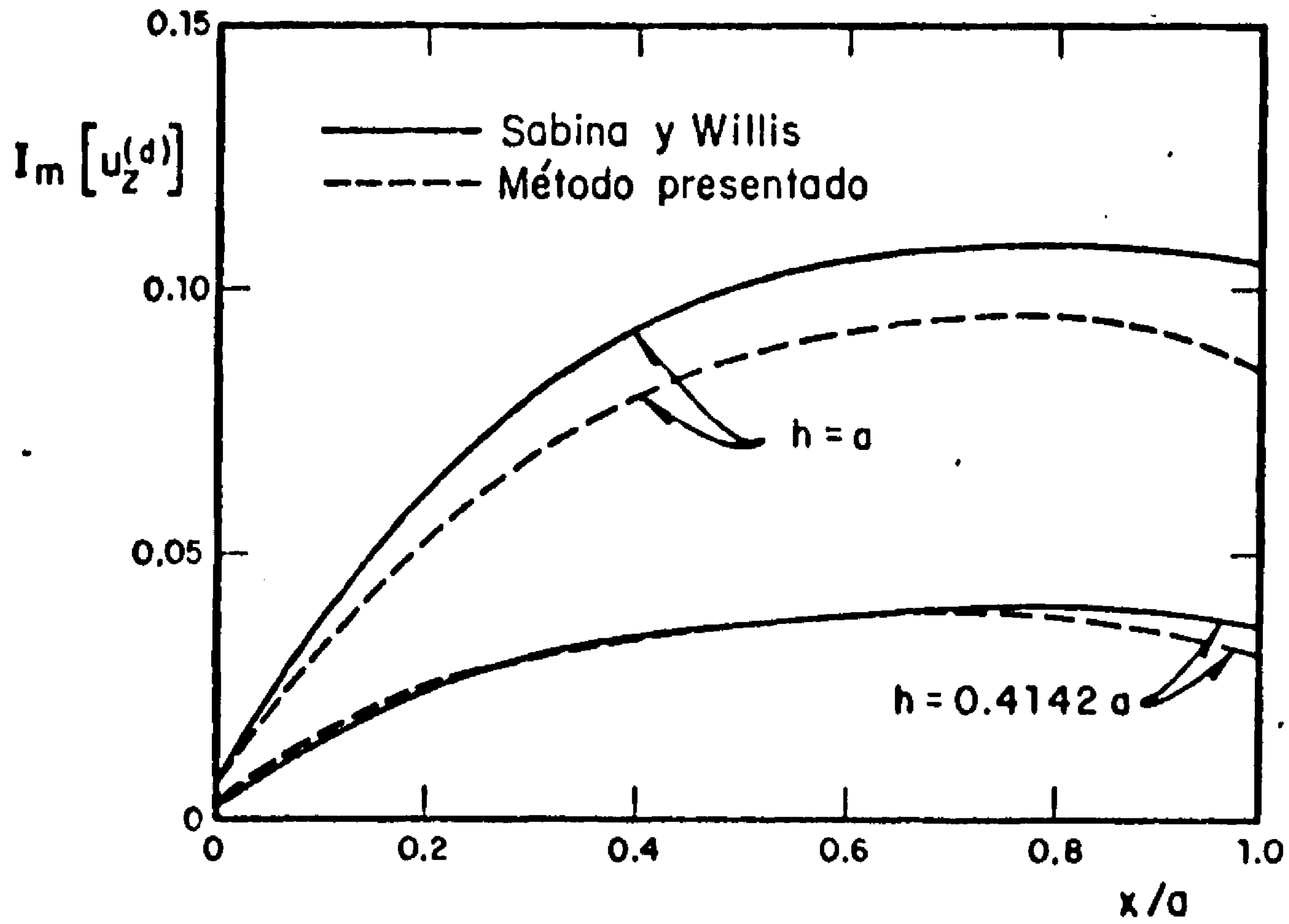


Fig 7. Comparación para las partes real e imaginaria de $u_z^{(d)}$ entre la solución numérica presentada y la obtenida con desarrollos asintóticos ajustados (32). Frecuencia normalizada $\eta = 0.1/\pi$. Incidencia de ondas SH

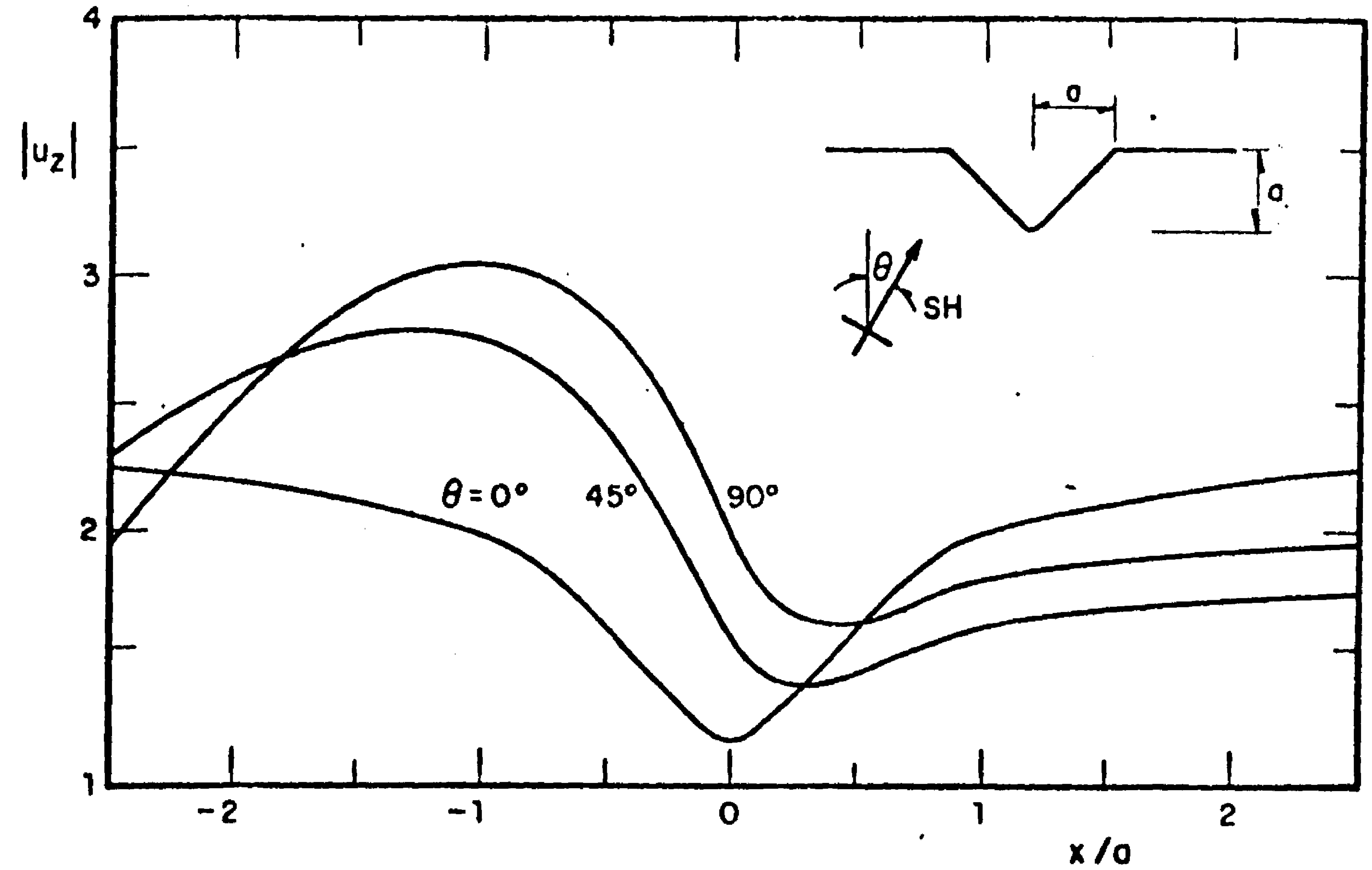


Fig 8. Amplitudes del desplazamiento u_z en la superficie de un cañón triangular con taludes de 45° para diferentes ángulos de incidencia θ. Frecuencia normalizada $\eta = 0.25$. Incidencia de ondas SH

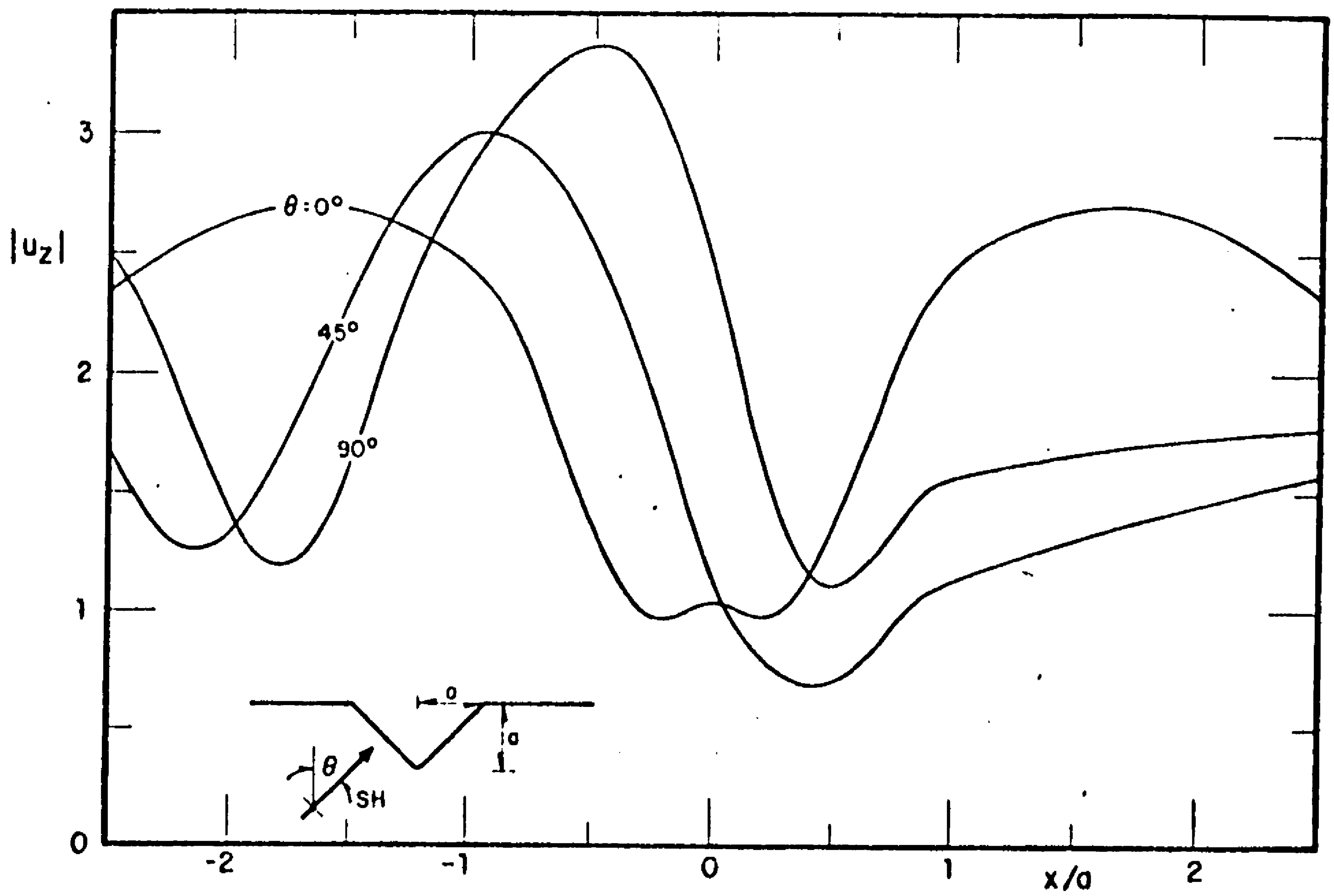


Fig 9. Amplitudes del desplazamiento u_z en la superficie de un cañón triangular con taludes a 45° para diferentes ángulos de incidencia θ. Frecuencia normalizada $\eta = 0.5$. Incidencia de ondas SH

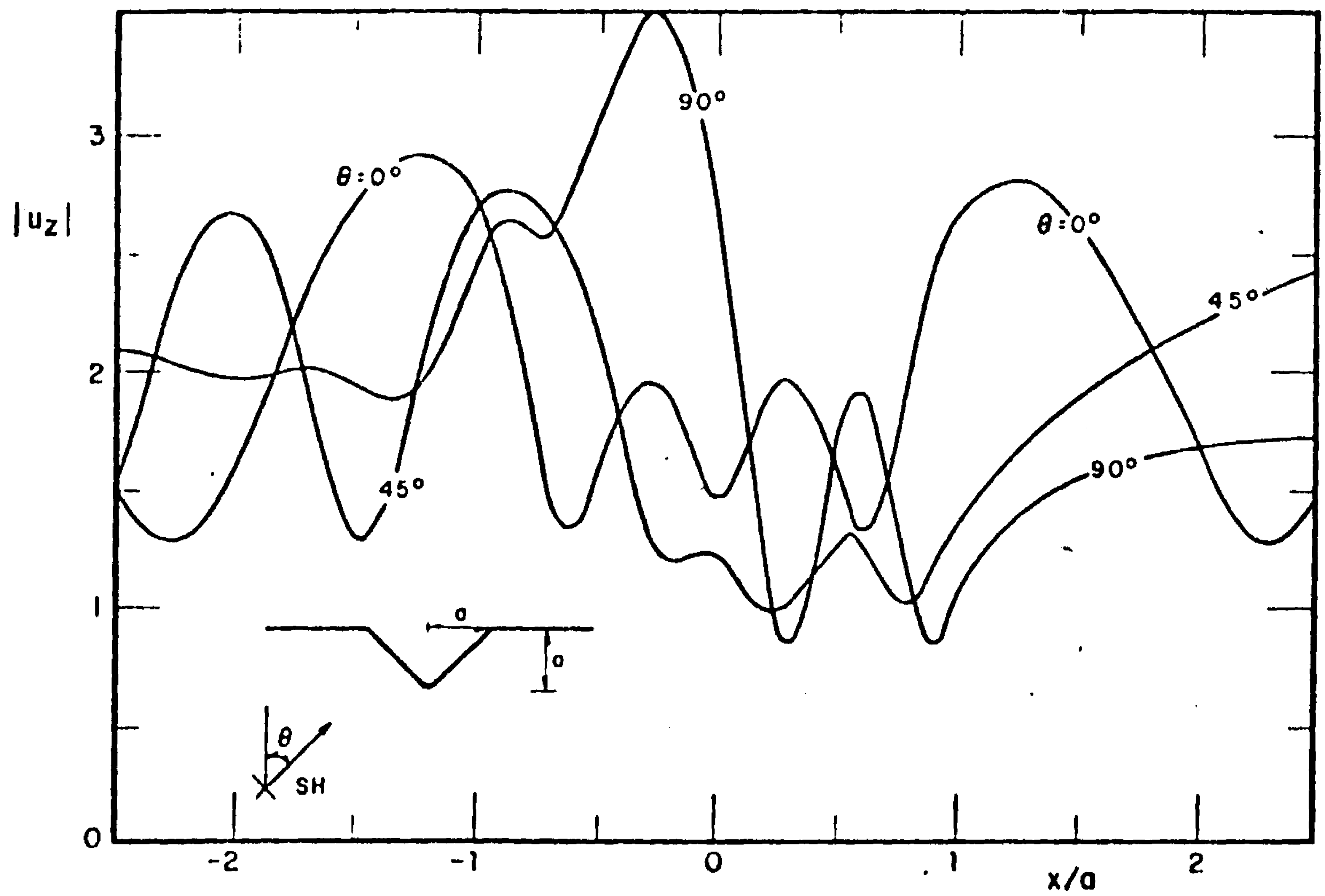


Fig 10. Amplitudes del desplazamiento u_z en la superficie de un cañón triangular con taludes a 45° para diferentes ángulos de incidencia θ. Frecuencia normalizada $\eta = 1.0$. Incidencia de ondas SH

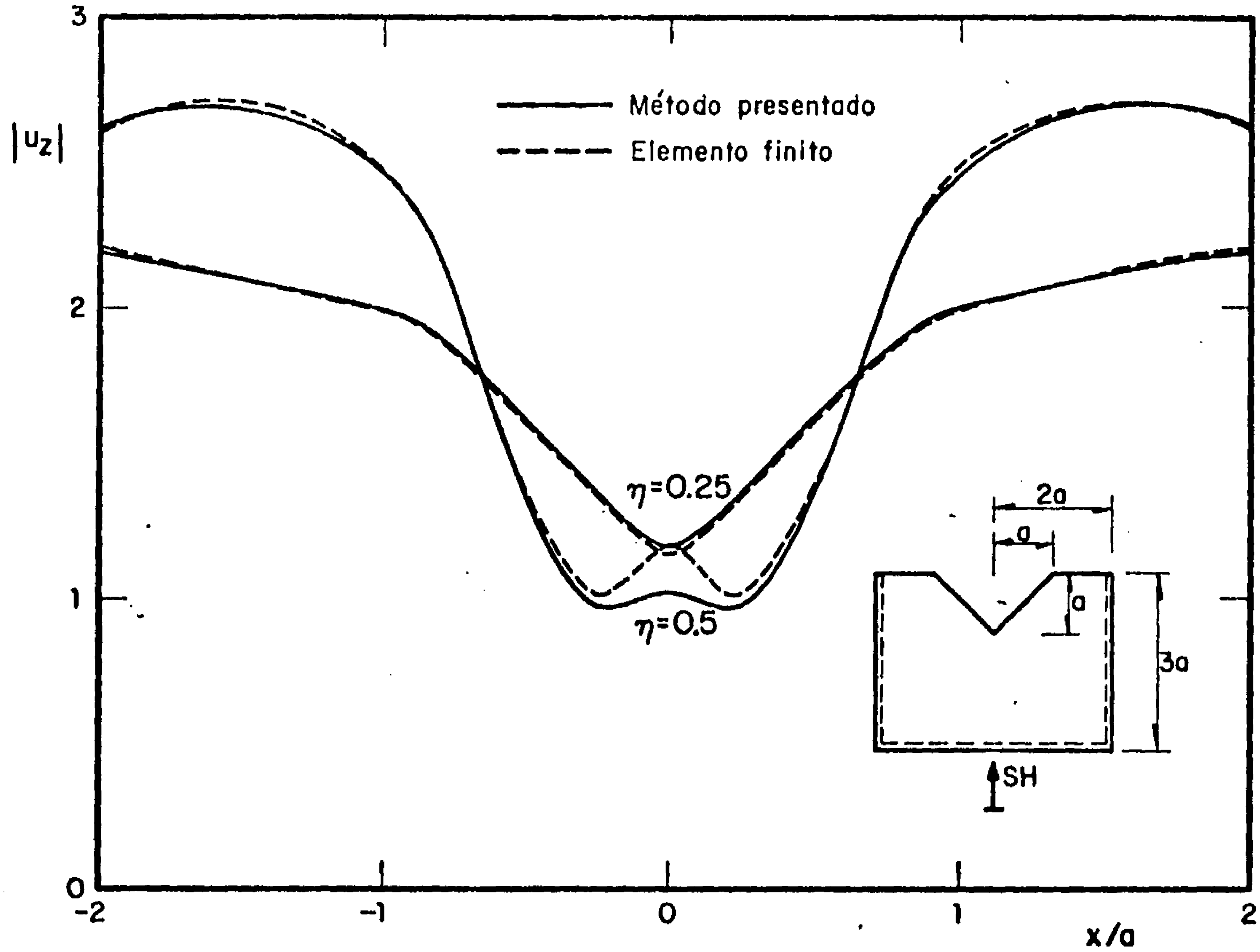


Fig 11. Comparación de las amplitudes de los desplazamientos obtenidos con el método presentado y con el de elementos finitos con fronteras activas eficientes (3). Incidencia vertical. $\eta = 0.25, 0.5$

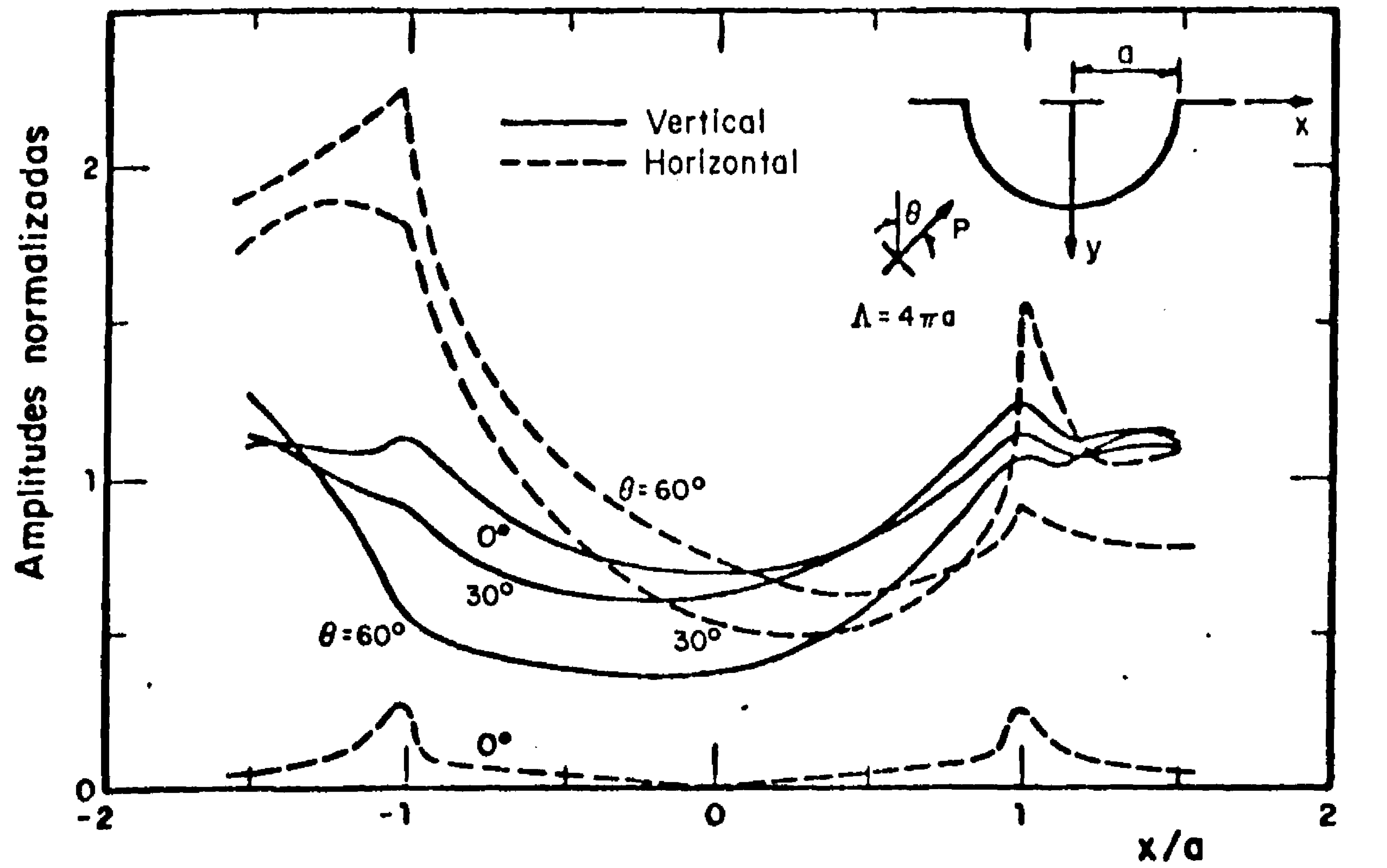


Fig 12. Amplitudes normalizadas de desplazamientos vertical y horizontal en un cañón semicircular. Incidencia de ondas P, longitud de onda $\Lambda = 4\pi a$

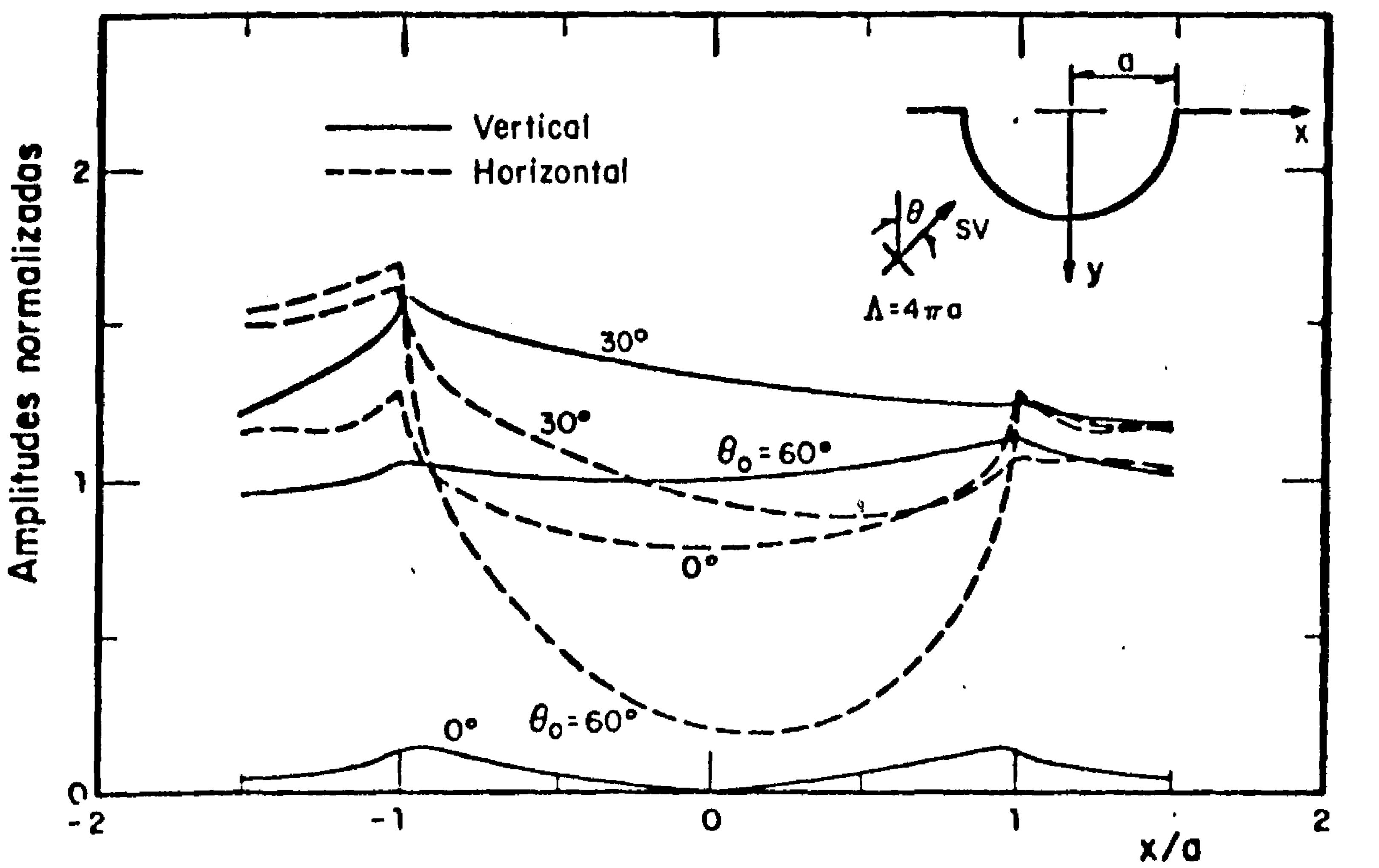


Fig 13. Amplitudes normalizadas de desplazamientos vertical y horizontal en un cañón semicircular. Incidencia de ondas SV, longitud de onda $\Lambda = 4\pi a$

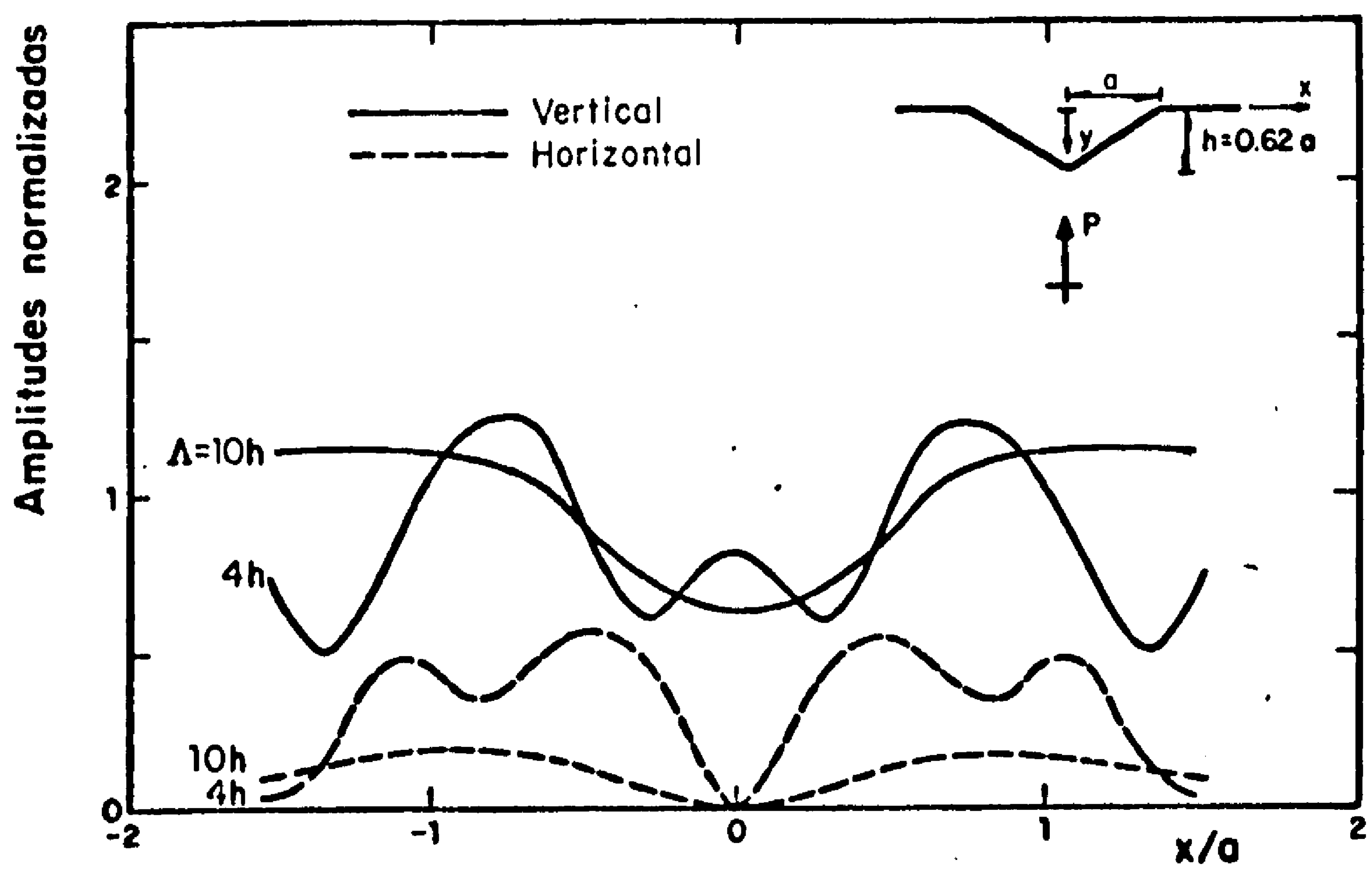


Fig 14. Amplitudes normalizadas de desplazamiento vertical y horizontal en un cañón triangular ante incidencia vertical de ondas P

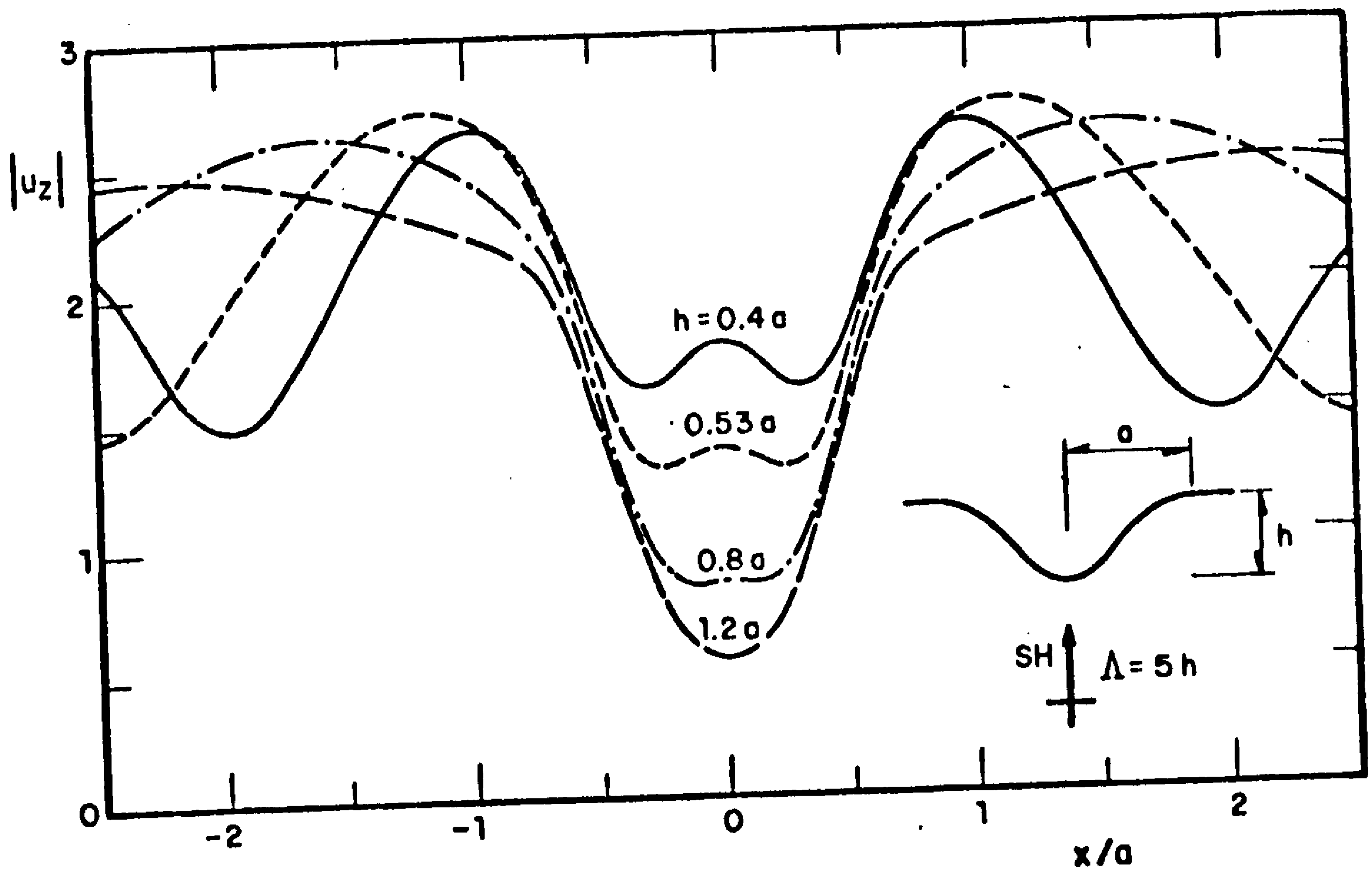


Fig 15. Amplitudes del desplazamiento u_z en la superficie de cañones senoidales con diferentes profundidades. Incidencia vertical de ondas SH

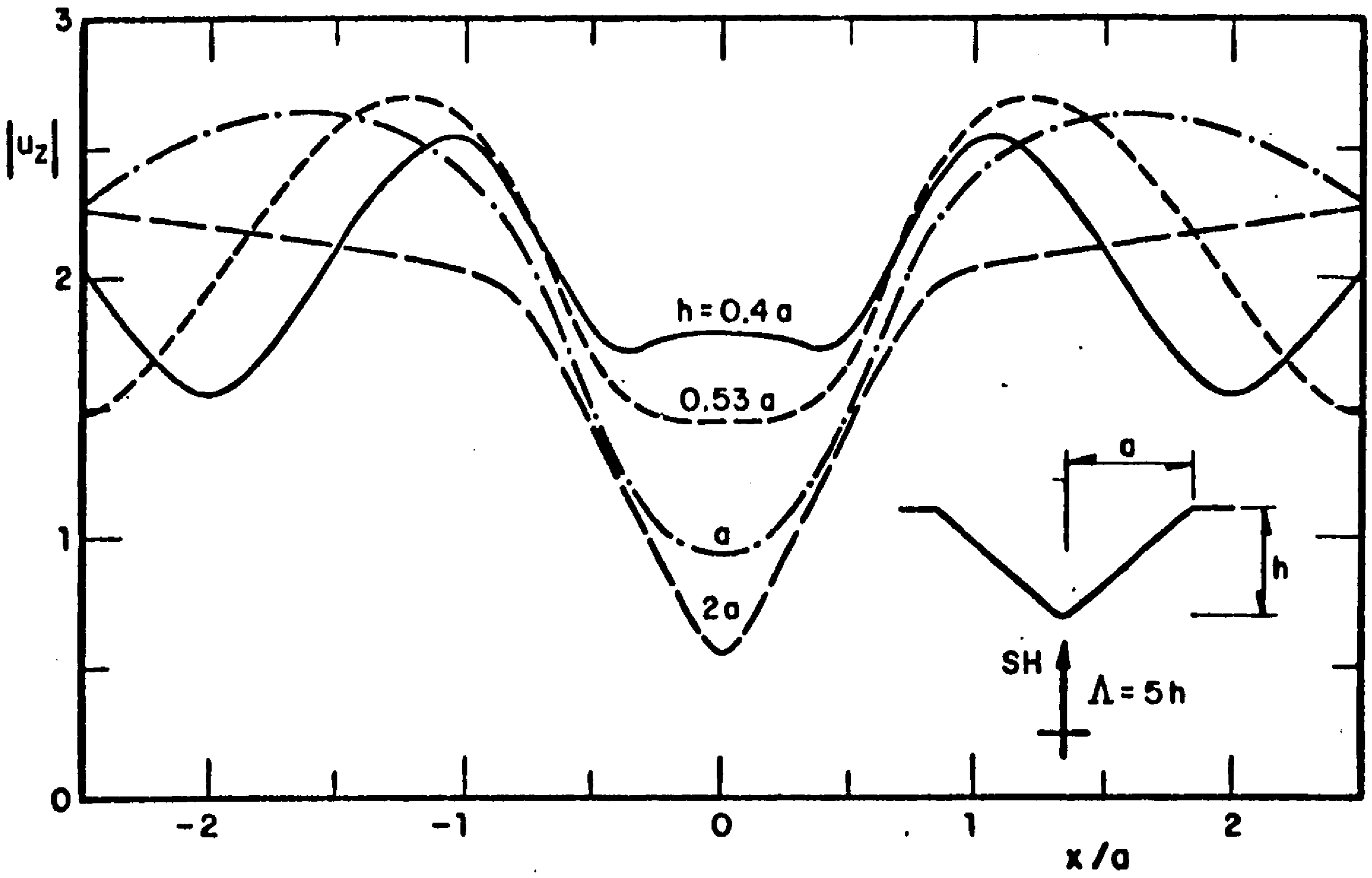


Fig 16. Amplitudes del desplazamiento u_z en la superficie de cañones triangulares con diferentes profundidades. Incidencia vertical de ondas SH

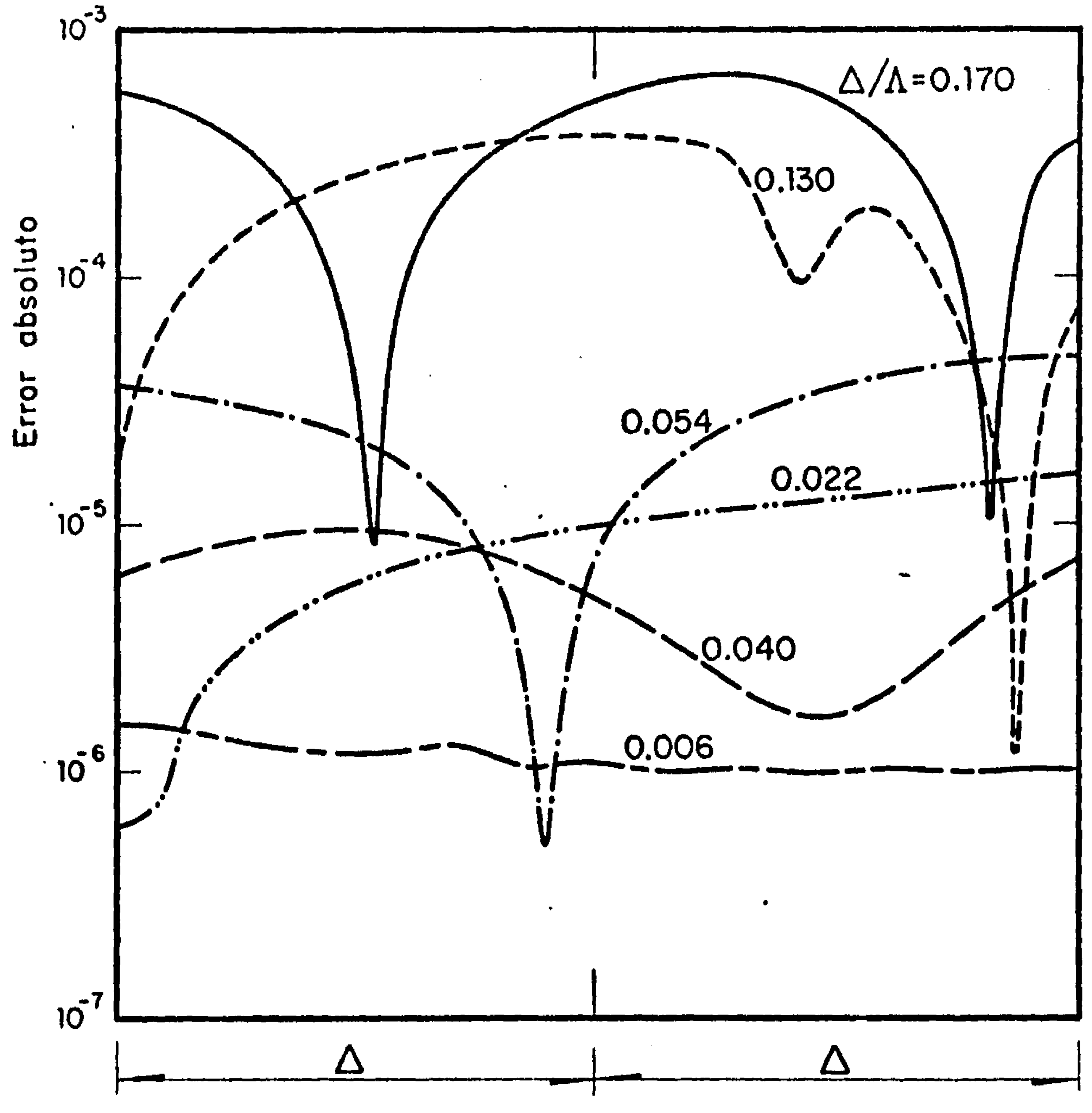


Fig 17. Variación típica del error absoluto, calculado como la diferencia entre la solución numérica y la exacta en valor absoluto, entre puntos de colocación para distintos valores de Δ/Λ

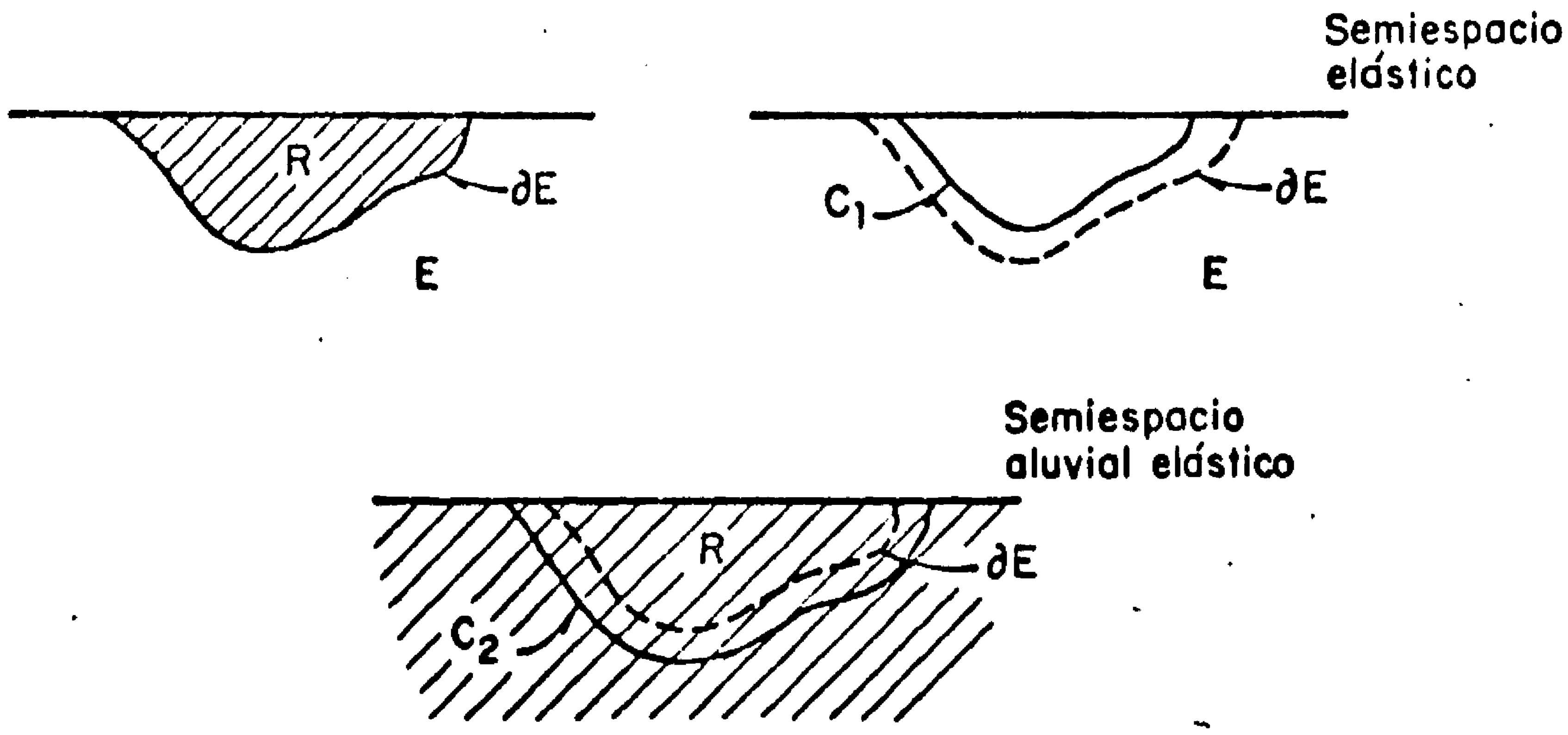


Fig 18. Regiones R y E y curvas $\partial E, C_1$ y C_2. C_1 y C_2 se usan para la representación en el exterior y en el interior, respectivamente

APENDICE A. NOTACION

En este escrito se emplean los siguientes símbolos:

$[A]$	=	matriz de coeficientes complejos
A_1, A_2	=	amplitudes de onda P incidente y reflejada, respectivamente
a	=	mitad de ancho del cañón, radio del cañón semicircular
B_1, B_2	=	amplitudes de onda SV incidente y reflejada, respectivamente
$\{b\}$	=	vector de términos independientes
C_1, C_2	=	curvas interiores
C	=	curva interior
$c_x = \beta/\operatorname{sen}\theta$	=	velocidad aparente en x
$c_y = \beta/\cos\theta$	=	velocidad aparente en u
E	=	semiespacio con irregularidad
e, f	=	ángulos de incidencia o reflexión, ondas P o SV
$f(\cdot)$	=	densidad de capa simple
f_m	=	coeficiente
G	=	función de Green
$g(\cdot)$	=	densidad de capa simple
g_m	=	coeficiente
$H_0^{(2)}(\cdot)$	=	función de Hankel de segunda especie y orden cero
$h(\cdot)$	=	densidad de capa simple
h_n	=	coeficiente
h	=	profundidad del cañón
$i = \sqrt{-1}$	=	unidad imaginaria
k	=	número de onda
$k_S = \omega/\beta$	=	número de onda S
$k_P = \omega/\alpha$	=	número de onda P
L	=	número de puntos de colocación
ℓ, m, n	=	subíndices
M, N	=	números de fuentes
n	=	normal a la frontera o a la superficie del semiespacio
P	=	punto en E o en la curva ∂E
P_ℓ	=	punto de colocación en la curva ∂E
Q	=	punto en la curva C

Q'	=	imagen de Q
Q_m, Q_n	=	puntos que definen la posición de fuentes
r_1	=	distancia de P a Q
r_2	=	distancia de P a Q'
$\bar{r}$	=	vector de posición del punto P
$\bar{r}_o$	=	vector de posición del punto Q
t	=	tiempo
t_x, t_y, t_z	=	componentes del vector esfuerzo
$\underset{\sim}{t}=[t_x, t_y]^T$	=	vector esfuerzo plano (*vep*)
$\underset{\sim}{t}^{(1)}$	=	*vep* debido a una fuente de ondas P
$\underset{\sim}{t}^{(2)}$	=	*vep* debido a una fuente de ondas SV
$\underset{\sim}{t}^{(0)}$	=	*vep* de campo libre
$\underset{\sim}{t}^{(d)}$	=	*vep* difractado
u_x, u_y, u_z	=	componentes del vector desplazamiento
$\underset{\sim}{u}=[u_x, u_y]^T$	=	vector desplazamiento plano (*vdp*), caso P o SV
$u_z^{(0)}$	=	solución de campo libre, caso SH
$u_z^{(d)}$	=	solución difractada, caso SH
$\underset{\sim}{u}^{(0)}$	=	*vdp* de campo libre
$\underset{\sim}{u}^{(d)}$	=	*vdp* difractado
$[W]$	=	matriz diagonal de pesos
x, y, z	=	coordenadas cartesianas
α	=	velocidad de ondas P
β	=	velocidad de ondas S
Δ	=	distancia entre puntos de colocación, medida sobre ∂E
$\delta(\cdot)$	=	delta de Dirac
ε	=	pertenece a, está en
η	=	frecuencia normalizada
θ	=	ángulo de incidencia
θ_n	=	ángulo medido de la dirección positiva de x al vector n en sentido antihorario
Λ	=	longitud de onda incidente
λ	=	constante de Lamé
μ	=	constante de Lamé
ρ	=	densidad del medio
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	=	componentes del tensor esfuerzo

ϕ, ψ	=	potenciales de ondas P y SV respectivamente
$\phi^{(0)}, \psi^{(0)}$	=	potenciales de campo libre
ϕ_1, ψ_1	=	potenciales de una fuente de ondas P
ϕ_2, ψ_2	=	potenciales de una fuente de ondas SV
$\phi^{(d)}, \psi^{(d)}$	=	potenciales difractados
ω	=	frecuencia circular
∂E	=	frontera del cañón

APENDICE B. PROBLEMA INTERIOR EN EL CASO SH

Para investigar las condiciones para las cuales la solución de la ec 11 no es única, se buscarán las soluciones no triviales del problema homogéneo

$$\int_C f(Q)\,\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\,dS_Q = 0, \quad P \in \partial E \tag{B1}$$

Sea ϕ la solución de la expresión

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + k^2\phi = 0 \tag{B2}$$

en la región R, limitada por C y Γ (fig 4). Aplicando el teorema de Green (43), para un punto P fuera de esta región, se obtiene

$$\int_{C\cup\Gamma} \left\{\frac{\partial\phi(Q)}{\partial n_Q}\,G(P,Q) - \phi(Q)\,\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}\right\} dS_Q = 0 \tag{B3}$$

Sea $\phi = 0$ en C y $\partial\phi/\partial n = 0$ en Γ; esto es, ϕ es una eigenfunción del problema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + k^2\phi = 0 && \text{en } R \\ &\phi = 0 && \text{en } C \\ &\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 && \text{en } \Gamma \end{aligned}\right\} \tag{B4}$$

Además, por construcción

$$\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q} = 0 \quad \text{en } \Gamma \tag{B5}$$

Entonces, de la ec B3, para P fuera de R se obtiene

$$\int_C \frac{\partial\phi(Q)}{\partial n_Q}\,G(P,Q)\,dS_Q = 0 \tag{B6}$$

Para $P \varepsilon \partial E$, de la ec B6 puede escribirse

$$\int_C \frac{\partial\phi(Q)}{\partial n_Q} \quad \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P} \; dS_Q = 0 \tag{B7}$$

Esto es, hay soluciones no triviales $f(Q) = \partial\phi(Q)/\partial n_Q$ cuando k_S coincide con los eigenvalores k del problema definido por las ecs B4.

En particular, cuando R es un semicírculo con radio a_o los eigenvalores están dados por

$$k_{m,n} = \frac{j_{m,n}}{a_o} \tag{B8}$$

donde $j_{m,n}$ = n-ésima raíz de la ecuación $J_m(j) = 0$, $J_m(\cdot)$ = función de Bessel de primera especie y orden m, m = 1,2,..., y n = 1,2,...

Dada una región arbitraria, existe una secuencia infinita de eigenvalores k para los cuales el problema de las ecs B4 tiene una solución continua (43).

Cuando k_S coincide con, o está cercano a los eigenvalores del problema interior definido en las ecs B4, surgen dificultades numéricas debidas al mal condicionamiento de la matriz de coeficientes. Esto puede evitarse modificando la selección de la curva C; el problema interior cambia y también los eigenvalores, removiendo la singularidad del operador en la ec 11. Para evitar este cambio pueden usarse dos curvas, dígase C y C', y obtener la solución en el sentido de mínimos cuadrados.

APENDICE C. EXPRESIONES PARA FUENTES DE ONDAS P o SV

En este apéndice se presentan las expresiones de los potenciales para fuentes lineales de ondas P y SV respectivamente y se aplica el método de Aki y Larner (2) para la discretización de las integrales. Pueden encontrarse detalles adicionales en el trabajo de Bouchon y Aki (6).

Los potenciales ϕ_1 y ψ_1 para una fuente lineal de ondas P puede escribirse como (19,20)

$$\phi_1=\pi i\{H_0^{(2)}(k_p r_1)-H_0^{(2)}(k_p r_2)\}+\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp[-iy\nu]\exp[-i(x-x_0)k]dk \qquad (C1)$$

$$\psi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} B(k)\ \exp[-iy\gamma]\ \exp[-i(x-x_0)k]\ dk \qquad (C2)$$

donde $\nu = \sqrt{k_p^2 - k^2}$, $\mathrm{Im}(\nu) < 0$, $\gamma = \sqrt{k_S^2 - k^2}$, $\mathrm{Im}(\gamma) \leq 0$,

$$r_1 = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]^{1/2} ,$$

$$r_2 = \left[(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2\right]^{1/2} ,$$

x, y = coordenadas del punto P

x_0, y_0 = coordenadas de la fuente en el punto Q,

$$A(k) = \frac{4ik^2\gamma}{f(k)}\ \exp\left[-iy_0\nu\right]\ ,\quad B(k) = \frac{2ik(2k^2 - k_S^2)}{F(k)}\ \exp[-y_0\ \nu]$$

donde $F(k) = (2k^2 - k_S^2) + 4_k^2\nu\gamma$ = función de Rayleigh, y
$H_0^{(2)}(\cdot)$ = función de Hankel de segunda especie y orden cero.

Para una fuente lineal de ondas SV se tiene que las potenciales ϕ_2 y ψ_2 están dados por (20)

$$\phi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\ \exp[-iy\nu]\exp[-i(x-x_0)k]dk \qquad (C3)$$

$$\psi_2=\pi i\{H_0^{(2)}(k_S r_1)-H_0^{(2)}(k_S r_2)\} + \int_{-\infty}^{\infty} D(k)\exp[-iy\gamma]\exp[-i(x-x_0)k]dk \qquad (C4)$$

donde

$$C(k) = - \frac{2ik(2k^2 - k_S^2)}{F(k)} \exp[-iy_o\gamma], \quad y$$

$$D(k) = \frac{4ik^2\nu}{F(k)} \exp[-iy_o\gamma]$$

La radiación armónica de una fuente lineal puede representarse como una superposición continua de ondas planas, homogéneas e inhomogéneas. Así los potenciales de las ecs C1-C4, los desplazamientos o los esfuerzos pueden escribirse en la forma

$$F(x,y,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k,y) \exp[-ikx]\, dk \tag{C5}$$

donde la integración es con respecto al número de onda horizontal. Para transformar la integral en una suma, considérese un número infinito de tales fuentes distribuidas uniformemente a lo largo del eje horizontal x, con igual intervalo L. La ec C5 queda

$$F(x,y,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k,y)\exp[-ikx] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[ikmL]\, dk \tag{C6}$$

como (17)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[ikmL] = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k-k_n) \tag{C7}$$

donde $k_n = \frac{2\pi}{L} n$ y $\delta(\cdot)$ = función delta de Dirac. Entonces de las ecs C6 y C7 se obtiene

$$F(x,y,\omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_n,y) \exp[-ik_nx] \tag{C8}$$

Si la serie converge, puede aproximarse mediante una suma finita

$$F(x,y,\omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-N}^{N} f(k_n,y) \exp[-ik_nx] \tag{C9}$$

Para calcular la suma deben quitarse del eje Re(k) las singularidades de $f(k_m,y)$, que en este problema son los ceros de la función de Rayleigh y sus puntos de ramificación. Esto puede hacerse dando a la frecuencia una pequeña parte imaginaria, esto es

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \qquad \text{(C10)}$$

donde ω_R, ω_I = partes real e imaginaria de ω, con $\omega_I < 0$. Entonces las singularidades quedan en el segundo y cuarto cuadrantes del plano complejo k, en una línea recta que pasa por el origen. El uso de la frecuencia compleja tiene el efecto de suavizar el espectro y resaltar los primeros movimientos con relación a los últimos. Esta atenuación minimiza la influencia de las fuentes ficticias.

APENDICE D. COLOCACION Y MINIMOS CUADRADOS

El método de colocación y mínimos cuadrados ha sido aplicado con éxito en la solución de problemas de valores en la frontera (25). El método consiste en usar un número de puntos de colocación, donde se imponen las condiciones de frontera, mayor que el número de parámetros libres de la solución aproximada; se obtienen así sistemas de ecuaciones sobredeterminados. La solución se obtiene al minimizar el error cuadrático. Cuando se trata con sistemas complejos se procede de la siguiente manera:

Considérese el sistema de ecuaciones sobredeterminado

$$Az = C \tag{D1}$$

donde

- A = matriz de coeficientes complejos = a + i b
- z = vector de incógnitas = x + i y
- C = vector de términos independientes = c + i d
- a,b = partes real e imaginaria de A
- x,y = partes real e imaginaria de z
- c,d = partes real e imaginaria de C

Las partes real e imaginaria, respectivamente del vector error asociado al sistema D1 son

$$\varepsilon_1 = ax - by - c \tag{D2}$$

$$\varepsilon_2 = bx - ay - d \tag{D3}$$

Sea E el error cuadrático definido por

$$E = \varepsilon_1^T \varepsilon_1 + \varepsilon_2^T \varepsilon_2 \tag{D4}$$

Las condiciones de mínimo para E son

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 \tag{D5}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0 \tag{D6}$$

Sustituyendo las ecs D2 y D3 en D4 y aplicando las ecs D5 y D6 se obtiene

$$(a^T a + b^T b)\ x - (a^T b - b^T a)\ y = a^T c + b^T d \tag{D7}$$

$$(a^T b + b^T a)\ x + (a^T a + b^T b)\ y = a^T d - b^T c \tag{D8}$$

lo que es equivalente a la ecuación

$$A*^T A\ z = A*^T C \tag{D9}$$

donde A* = matriz conjugada de A. El sistema resultante tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Si se desea dar *pesos* diferentes a cada una de las ecuaciones del sistema de la ec D1 se puede obtener que

$$A*^T\ W\ A\ z = A*^T\ W\ C \tag{D10}$$

donde W = matriz diagonal que contiene los pesos asociados a cada ecuación.

APENDICE E. PROGRAMAS PARA CALCULADORA

En este apéndice se presenta una breve descripción de los programas para calculadora digital utilizados. Se definen en cada caso las principales variables *de entrada* y se comentan las características de los distintos componentes de los programas. En la fig E.1 se presenta un *diagrama de flujo* que ilustra un esquema general de los cálculos. Se incluyen listados de los programas en lenguaje FØRTRAN IV, así como resultados de una corrida típica. Se utilizó la calculadora digital Burroughs B7700 del Centro de Servicios de Cómputo de la UNAM.

Los progamas calculan los desplazamientos en la frontera del cañón y la superficie del semiespacio esto lo hacen en *puntos de control* que se generan o entran como datos. Para dichos puntos se calculan también los componentes de esfuerzo para fines de comprobación.

E.1 *Incidencia de ondas SH*

El programa para tratar incidencia de ondas SH consta de seis subrutinas y un programa principal.

En la subrutina LECTØR se leen valores para las siguientes variables:

ING	=	indicador de geometría, igual a 1,2 o 3 si el cañón es triangular, cosenoidal o elíptico, respectivamente
INP	=	indicador de puntos de control, si es igual a 1 se lee el número de puntos de control, sus coordenadas y el ángulo que forma la normal con la horizontal; si es 2 genera dicha información
N	=	número de puntos de colocación en la frontera del cañón
NF	=	número de fuentes
GAM	=	ángulo de incidencia, en grados
CØ	=	separación promedio entre las fuentes y la frontera, como fracción del semiancho del cañón, a

AK1	=	frecuencia adimensional inicial (AK = k*a*)
AK2	=	frecuencia adimensional final
DAK	=	incremento en la frecuencia adimensional
XI,XL,DX	=	abscisas inicial y final e incremento horizontal para localizar puntos de control, como fracción de *a*
NPC	=	número de puntos de control
XC,YC,TC	=	coordenadas normalizadas y ángulo en radianes (que forma la normal con la horizontal), en un punto de control
K	=	punto de colocación en el que se introduce un *peso* diferente de la unidad
P	=	*peso* en el punto K
B	=	profundidad del cañón como fracción de *a*
EP	=	radio de la circunferencia tangente a los bordes, cañón triangular

Las subrutinas ERREFE y EREFCO son auxiliares en el cálculo de las derivadas en puntos de colocación en la frontera y en puntos de control.

La subrutina SYM premultiplica el sistema de ecuaciones original por la traspuesta conjugada de la matriz de coeficientes. Introduce en el arreglo los *pesos* requeridos.

La subrutina SØLUCØ resuelve el sistema factorizando la matriz de coeficientes como el producto de dos matrices *triangulares*, una inferior y otra superior. Emplea en la solución dos sustituciones recursivas, una *hacia adelante* y otra *hacia atrás*, respectivamente. La solución queda en el vector de términos independientes.

La subrutina HANKEL calcula las funciones de Hankel de segunda especie, de órdenes cero y uno. Dicha subrutina es una adaptación para argumentos reales de la versión desarrollada por Waas (47). Se emplean las expresiones para los desarrollos asintóticos de las funciones de Hankel (1).

El programa principal ordena la secuencia de operaciones y sigue el esquema del *diagrama de flujo* de la fig E.1. Se imprimen los datos del programa, así como el desplazamiento UZ, su amplitud UZR, su fase FASE, la derivada normal DUN y la derivada normal normalizada. Los cálculos dependen de la frecuencia adimensional ka. Se toma siempre a = 1.0.

Los datos se introducen de la siguiente manera:

Tarjeta	*Variables*	*Campos*	
1a.	ING. INP	2I5	
2a.	N,NF,GAM,B,CØ	2I5,3F10.0	
3a.	AK1,AK2,DAK	3F10.0	
4a.	NPC	I5	si INP=2
5a.	XC,YC,TC	3F10.0	
⋮	⋮	⋮	
(4+NPC)a.	XC,YC,TC	3F10.0	
4a.	XI,XL,DX	3F10.0	si INP=1
4a.	EP	F10.0	si ING=1
5a.	Como la cuarta cuando INP=1,2		
⋮			

Si hay pesos diferentes de la unidad estos se introducen a continuación:

Tarjeta	*Variables*	*Campos*
Tantas como pesos	K,P	I5,F10.0

La última tarjeta de la serie irá en blanco.

En la fig E.2 se muestra el listado del programa y los resultados de una corrida típica.

E.2 *Incidencia de ondas P o SV*

Este programa consta de doce subrutinas y un programa principal.

La subrutina LECTØR es una modificación de la correspondiente del programa anterior. Se leen valores para las siguientes variables:

ING,INP = indicadores de geometría y puntos de control, respectivamente

IND = indicador del tipo de onda incidente, si es igual a 1 se trata de ondas P, si es 2 de ondas SV

N = número de puntos de colocación

NFS	=	número de fuentes SV
NFP	=	número de fuentes P
NINC	=	número de ángulos incidencia
B	=	profundidad
CØZ	=	separación promedio entre las fuentes SV y la frontera
CØP	=	separación promedio entre las fuentes P y la frontera
GAM(I)	=	ángulos de incidencia
WR	=	frecuencia circular (parte real)
WI	=	frecuencia circular (parte imaginaria)
CP	=	velocidad de ondas P
CS	=	velocidad de ondas S
AL	=	distancia entre fuentes ficticias
MSER	=	número de términos en las sumas para los esfuerzos y desplazamientos de las fuentes

Las variables que se dan a continuación tienen el mismo significado que en el caso HS: XI,XL,DX,NPC,XC,YC,TC,K,P y B.

ASA es una subrutina para impresión de matrices.

En FREE se evalua la solución de campo libre, depende de ID la evaluación de desplazamientos (ID=1) o esfuerzos (ID=2). Se emplean las expresiones dadas en el capítulo 2.

DERS es una subrutina auxiliar en el cálculo de derivadas.

Las subrutinas ESFP, ESFS, DESPFP y DESPFS calculan esfuerzos y desplazamientos asociados a las fuentes sin considerar reflexiones en la superficie libre. Se emplean las expresiones del Apéndice D y del capítulo 2.

CØMPLE es la subrutina que calcula esfuerzos y desplazamientos debidos a las reflexiones en la superficie libre. Ahí se agregan esas contribuciones a la matriz de coeficientes.

SYM y SØLUCØ son las mismas que en el programa para ondas SH, excepto por modificaciones para incluir varios términos independientes.

HANKEL es en esencia la misma subrutina que en el caso SH, salvo porque aquí calcula $H_o^{(2)}(\cdot)$ y su primera y segunda derivadas.

Los datos entran de una manera similar al caso SH.

Se calculan desplazamientos vertical y horizontal normalizados con respecto al que se tendría en la solución de campo libre.

La fig E.3 exhibe el listado del programa.

Fig E.1 . Diagrama de flujo general

```
      COMMON/FP/H1,H2,F1,F2,F3,F4,IC,JP
      COMMON /LEC/ N, NF, NPC, GAMR ,AK1,AK2,DAK
      COMMON/LE/ X(1000),Y(1000),T(1000),XF(100),YF(100),XC(100),
     1          YC(100),TC(100),H
      COMPLEX A(1000,30) , B(1000),H1,H2,HP1,HP2,UNC,U,V,UZ(100),
     1DUN(100)
      COMMON/SOL1/ A
      COMMON/SOL2/ U,NN
      DIMENSION UZR(100),FASE(100)
C
C              LEE O GENERA DATOS
C
  666 CALL LECTUR
      IF(AK1.EQ.0.0) GO TO 661
      PI=3.14159264
      SGAM=SIN(GAMR)
      CGAM=COS(GAMR)
      NN=NF
      UNO=(0.0 ,1.0)
C
C              CALCULA LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA PARA LA FRECUENCIA AK
C
      DO 95 AK=AK1,AK2,DAK
      CGK=CGAM*AK
      SGK=SGAM*AK
      AKPI=AK/3.1415926
C
      DO 90 JP=1,N
      STJ=SIN(T(JP))
      CTJ=COS(T(JP))
      UR=COS(SGK*X(JP))
      UI=-SIN(SGK*X(JP))
      VR=-SIN(CGK*Y(JP))*CGAM*STJ
      VI=COS(CGK*Y(JP))*SGAM*CTJ
      U=CMPLX(UR,UI)
      V=CMPLX(VR,VI)
C
      B(JP)=2.0*U*V
      DO 80 IC=1,NF
      CALL ERREFE
      R1K=AK*R1
      CALL HANKEL(R1K,HP1,H1)
      HP1=-HP1
      R2K=AK*R2
      CALL HANKEL(R2K,HP2,H2)
      HP2=-HP2
      A(JP,IC)=UNC/4.0*((HP1*F1+HP2*F2)*CTJ-(HP1*F3+HP2*F4)*STJ)
C
   80 CONTINUE
   90 CONTINUE
C
C              PREGUNTA SI EL SISTEMA ES SOBREDETERMINADO Y RESUELVE
C
      IF(N.GT.NF)CALL SYM(N)
      CALL SOLUCO(KLAN)
      IF(KLAN.EQ.0)GO TO 92
      WRITE(6,101)AK
  101 FORMAT(///,20("*"),5X,"PARA AK=",F12.4,"SE DIVIDE",
     1       2X,"POR CERO",5X,20("*"),//)
      GO TO 95
   92 CONTINUE
      WRITE(6,102)AK ,AKPI
  102 FORMAT(///,20X,"AK=",F12.4,10X,"AK/PI=",F12.4,///,
     1 11X,"PUNTO",20X,"UZ",20X,"UZR",10X,"FASE",18X,"DUN",14X,"ERD",/)
C
C              FORMA LA SOLUCION PARA LOS PUNTOS DE CONTROL
C              COMPRUEBA LA CONDICION DE FRONTERA
C
      DO 94 JP=1,NPC
      ARG1=CGK*YC(JP)
      ARG2=-SGK*XC(JP)
      FAC=2.0*COS(ARG1)
C
      U=CMPLX(COS(ARG2),SIN(ARG2))
      UZ(JP)=U*FAC
      STJ=SIN(TC(JP))    ;  CTJ=COS(TC(JP))
      DUN(JP)=-UNC*SGK*UZ(JP)*CTJ
      FAC2= 2.0*SIN(ARG1)*STJ
C
      DUN(JP)=DUN(JP)+CGK*FAC2*U
      DUNO=CABS(DUN(JP))
      DO 93 IC=1,NF
      CALL ERREFO
      R1K=AK*R1
      CALL HANKEL(R1K,HP1,H1)
      HP1=-HP1
      R2K=AK*R2
      CALL HANKEL(R2K,HP2,H2)
      HP2=-HP2
      UZ(JP)=UNC/4.0*(H1+H2)*B(IC)+UZ(JP)
C
       V=  AK* UNC/4.0*((HP1*F1+HP2*F2)*CTJ-(HP1*F3+HP2*F4)*STJ)*B(IC)
C
      DUN(JP)=DUN(JP)+V
   93 CONTINUE
      UZR(JP)=CABS(UZ(JP))
      RUZ=REAL(UZ(JP))
      YUZ=AIMAG(UZ(JP))
      FASE(JP)=ATAN2(YUZ,RUZ)/PI
      IF(DUNO.EQ.0.0) DUNO=1.0
      ERR=CABS(DUN(JP))/DUNO
C
      WRITE(6,103)JP,UZ(JP),UZR(JP),FASE(JP),DUN(JP),ERR
  103 FORMAT(11X,I3,5X,7E15.6,/)
   94 CONTINUE
   95 CONTINUE
      AK1=0.0
C
C              PASA A LEER OTROS DATOS
C
      GO TO 666
  661 CALL EXIT
      END
```

Fig E.2. *Listado del programa para incidencia de ondas SH y resultados de una corrida típica*

```
      SUBROUTINE DERFF(F1,F2,F3,F4,I,J)
      COMMON/FF/L1,L2,F1,F2,F3,F4,I,J
      COMMON /LEC/ N, NF, NPC, GAMR
      COMMON/LE/ X(1000),Y(1000),T(1000),XF(100),YF(100),XC(100),
     1YC(100),TC(100)
C
C          CALCULO DE LA DERIVADA PARA LOS PUNTOS EN LA FRONTERA
C
      A=XF(I)-X(J)
      B=YF(I)-Y(J)
      C=YF(I)+Y(J)
      R1=SQRT(A*A+B*B)
      R2=SQRT(A*A+C*C)
      F1=-A/R1
      F2=-A/R2
      F3=-B/R1
      F4=C/R2
      RETURN
      END


      SUBROUTINE DERFCO
      COMMON/FF/L1,L2,F1,F2,F3,F4,I,J
      COMMON /LEC/ N, NF, NPC, GAMR
      COMMON/LE/ X(1000),Y(1000),T(1000),XF(100),YF(100),XC(100),
     1YC(100),TC(100)
C
C          CALCULO DE LA DERIVADA PARA LOS PUNTOS DE CONTROL
C
      A=XF(I)-XC(J)
      B=YF(I)-YC(J)
      C=YF(I)+YC(J)
      R1=SQRT(A*A+B*B)
      R2=SQRT(A*A+C*C)
      F1=-A/R1
      F2=-A/R2           ;  F3=-B/R1
      F4=C/R2
      RETURN
      END


      SUBROUTINE LECTOR
C
C     ESTA RUTINA LEE O GENERA LOS DATOS
C
      COMMON /LEC/ N, NF, NPC, GAMR ,AK1,AK2,DAK
      COMMON/LE/ X(1000),Y(1000),T(1000),XF(100),YF(100),XC(100),
     1YC(100),TC(100),W
      COMPLEX LRC ,W(1000)
      READ(5,99) ING,INP,N,NF,GAM,B,CO
   99 FORMAT(2I5/(2I5,3F10.0))
      IF(ING.EQ.0) GO TO 104
      PI=3.14159265
      GAMR=GAM*PI/180.0
      COD=1.0-CC
      COD=B-CC
   71 FORMAT(/,30X,"PUNTOS DE CONTROL",///,15X,"PUNTO",7X,"XC",13X,"YC",
     113X,"TC",///)
C
C          LEE FRECUENCIAS
C
      READ(5,10) AK1,AK2,DAK
   10 FORMAT(3F10.0)
      WRITE(6,100)N,NF,GAM,B,CO
  100 FORMAT(//,20X,"NUMERO DE PUNTOS EN LA FRONTERA",I5,//,
     120X,"NUMERO DE FUENTES ",I5,//,
     220X,"ANGULO DE INCIDENCIA",F5.2,"GRADOS",//20X,"PROFUNDIDAD  B",
     3F5.2,//,20X,"DISTANCIA ENTRE LAS FUENTES Y LA FRONTERA",F6.3)
C
C          ELIGE GEOMETRIA
C          ING=1 TRIANGULO , ING=2 COSENO , ING=3 ELIPSE
C
      IF(ING-2) 3000,2000,1000
 1000 IF(B-1.0) 880,881,880
  881 WRITE(6,882)
      GO TO 883
  880 WRITE(6,80)
  883 WRITE(6,71)
  882 FORMAT(////,50X," C I R C U L O ",////)
   80 FORMAT(////,50X," E L I P S E ",////)
      BN=N+1   ;  BNF=NF+1
C
C          GENERA PUNTOS EN LA FRONTERA Y FUENTES
C
      DO 44 I=1,N
      AN=I  ;  ALF=PI*AN/BN
      CA=COS(ALF)
      SA=SIN(ALF)
      X(I)=CA
      Y(I)=B*SA
      T(I)=ATAN2(SA,-B*CA)
   44 CONTINUE
      DO 77 I=1,NF
      ANF=I
      ALF=PI*ANF/BNF
      XF(I)=COD*COS(ALF)
      YF(I)=COD*SIN(ALF)
   77 CONTINUE
C
```

Fig E.2. (Continuación)

```
C
C            INP=1 LEE PUNTOS DE CONTROL , INP=2 GENERA PUNTOS DE CONTROL
      IF(INP-1) 4,1500,1750
 1500 READ(5,78) NPC
   78 FORMAT(I5)
      DO 30 I=1,NPC
      READ (5,10)XC(I),YC(I),TC(I)
      WRITE(6,73)I,XC(I),YC(I),TC(I)
   30 CONTINUE
      GO TO 4
 1750 READ(5,10) XI,XL,DX
      NPC=(XL-XI)/DX+1.0
      BB=B*E
      DO 91 I=1,NPC
      AI=I
      XXC=XI+(AI-1.0)*DX
      IF(ABS(XXC)-1.0) 85,86,86
   85 YYC=B*SQRT(1.0-XXC*XXC)
      TC(I)=ATAN2(YYC,-XXC*BB)
      YC(I)=YYC
      XC(I)=XXC
      GO TO 87
   86 YC(I)=0.0
      TC(I)=PI/2.0
      XC(I)=XXC
   87 WRITE(6,73) I,XC(I),YC(I),TC(I)
   91 CONTINUE
      GO TO 4
 2000 WRITE(6,81)
   81 FORMAT(////,50X," C O S E N O I D E ",////)
      WRITE(6,71)
      ALFA=E
      AN=N
      ANF=NF
      DXP=2.0/(AN+1.0)
      DXF=2.0*CCO/(ANF+1.0)
C
C             GENERA PUNTOS EN LA FRONTERA Y FUENTES
C
      DO 11 I=1,N
      AI=I
      PX=-1.0+DXP*AI
      Y(I)=ALFA/2.0*(1.0+COS(PI*PX))
      T(I)=ATAN2(2.0,-ALFA*PI*SIN(PI*PX))
      X(I)=PX
   11 CONTINUE
      DO 111 I=1,NF
      AI=I
      XX=-CCO+DXF*AI
      YF(I)=CCC*ALFA/2.0*(1.0+COS(PI*XX/CCO))
      XF(I)=XX
  111 CONTINUE
C
C            INP=1 LEE PUNTOS DE CONTROL , INP=2 GENERA PUNTOS DE CONTROL
C
      IF(INP-1) 4,2500,2750
 2500 READ(5,78) NPC
      DO 130 I=1,NPC
      READ (5,10)XC(I),YC(I),TC(I)
      WRITE(6,73)I,XC(I),YC(I),TC(I)
  130 CONTINUE
      GO TO 4
 2750 READ(5,10) XI,XL,DX
      NPC=(XL-XI)/DX+1.0
      DO 12 I=1,NPC
      AI=I
      XXC=XI+(AI-1.0)*DX
      IF(ABS(XXC)-1.0) 13,14,14
   13 YC(I)=ALFA/2.0*(1.0+COS(PI*XXC))
      TC(I)=ATAN2(2.0,-ALFA*PI*SIN(PI*XXC))
      XC(I)=XXC
      GO TO 15
   14 YC(I)=0.0;XC(I)=XXC
      TC(I)=PI/2.0
   15 WRITE(6,73)I,XC(I),YC(I),TC(I)
   12 CONTINUE
      GO TO 4
 3000 WRITE(6,82)
   82 FORMAT(////,50X," T R I A N G U L O ",////)
      WRITE(6,71)
      F=N+1 ; FCX=2.0/F ; F=NF+1
      FCO=2.0*CCO/F
      T1=ATAN2(1.0,-B)
      T2=ATAN(1.0/B)
      XX=-1.0
      XE=-CCO
      READ(5,3001) EP
 3001 FORMAT(F10.0)
      B=D+EP ; CCB=B*CO
C
C             GENERA PUNTOS EN LA FRONTERA Y FUENTES
C
      DO 25 I=1,NF
      XE=XE+FCO
      IF(XE) 18,19,20
   18 XF(I)=XE
      YF(I)=CCB*(1.0+XE/COO)
      GO TO 25
   19 XF(I)=0.0
      YF(I)=CCC*B
      GO TO 25
   20 XF(I)=XE
      YF(I)=CCB*(1.0-XE/COO)
   25 CONTINUE
      DP=D-EP
      DL=1.0/D
      SDL=SQRT(1.0+DL*DL)
      RR=EP*DL*(DL+SDL)
      XA=RR/SEL
      DO 625 I=1,N
      XX=XX+FCX
      IF(ABS(XX).LE.1.0E-06) XX=0.0
      IF(ABS(XX)-XA) 46,47,47
   47 IF(XX) 616,620,620
  616 X(I)=XX
```

Fig E.2. (Continuación)

```
      Y(I)=R*(1.0+XX)
      T(I)=T2
      GO TO 625
  620 X(I)=XX
      Y(I)=R*(1.0-XX)
      T(I)=T1
      GO TO 625
   46 RAI=SQRT(RN*RN-XX*XX)
      Y(I)=RAI-RN+DP
      T(I)=ATAN2(RAI,-XX)
      X(I)=XX
  625 CONTINUE
C
C           INP=1 LEE PUNTOS DE CONTROL , INP=2 GENERA PUNTOS DE CONTROL
C
      IF(INP-1) 4,3500,3750
 3500 READ(5,78) NPC
      DO 230 I=1,NPC
      READ(5,10) XC(I),YC(I),TC(I)
      WRITE(6,73) I,XC(I),YC(I),TC(I)
  230 CONTINUE
      GO TO 4
 3750 READ(5,10) XI,XL,DX
      NPC=(XL-XI)/DX +1.0
      DO 37 I=1,NPC
      AI=I ; XX=XI+(AI-1.0)*DX
      IF(ABS(XX)-1.0) 32,33,33
   32 IF(ABS(XX)-XA) 35,39,39
   39 IF(XX) 34,36,36
   35 RAI=SQRT(RN*RN-XX*XX)
      YC(I)=RAI-RN+DP
      TC(I)=ATAN2(RAI,-XX)
      XC(I)=XX
      GO TO 31
   36 YC(I)=R*(1.0-XX) ; TC(I)=T1 ; XC(I)=XX ; GO TO 31
   34 YC(I)=R*(1.0+XX) ; TC(I)=T2 ; XC(I)=XX ; GO TO 31
   33 XC(I)=XX ; YC(I)=0.0 ; TC(I)=PI/2.0
   31 WRITE(6,73) I,XC(I),YC(I),TC(I)
   37 CONTINUE
C
C           LEE PESOS EN LOS PUNTOS
C
    4 READ(5,42) K,P
      UNO=(1.0,0.0)
      DO 312 L=1,N
      W(L)=UNO
      IF(L-K) 312,302,312
  302 W(L)=P*UNO
      READ(5,42) K,P
  312 CONTINUE
   42 FORMAT(I5,F10.0)
   73 FORMAT(/,13X,I5,3F15.6)
      WRITE(6,501)
  501 FORMAT(//,35X,"FUENTES",//,15X,"PUNTO",7X,"XF",13X,"YF",//)
      DO 504 I=1,NF
      WRITE(6,503) I,XF(I),YF(I)
  504 CONTINUE
      WRITE(6,502)
  502 FORMAT(//,35X,"PUNTOS",//,15X,"PUNTO",7X,"X",14X,"Y",14X,"T",14X,
     1"PESO",//)
      DO 505 I=1,N
      AW=CABS(W(I))
      WRITE(6,506) I,X(I),Y(I),T(I),AW
  505 CONTINUE
  506 FORMAT(/,13X,I5,4F15.6)
  503 FORMAT(/,13X,I5,2F15.6)
  104 RETURN
      END



      SUBROUTINE SYM(M)
      COMMON/SOL1/ A
      COMMON/SOL2/ B,NN
      COMMON/LE/ X(1000),Y(1000),T(1000),XF(100),YF(100),XC(100),
     1YC(100),TC(100),W
      COMPLEX C(100),D(100,100),W(1000)
      COMPLEX A(1000,30),B(1000),SUM,ZERO,SUMB,BALIN
C
C           EL SISTEMA DE ECUACIONES INICIAL DE M,NN QUEDA DE NN,NN
C           MULTIPLICA LA TRASPUESTA CONJUGADA DE A POR A Y POR B
C           W(L) ES EL PESO DEL PUNTO L
C
      ZERO=(0.0,0.0)
      DO 20 I=1,NN
      DO 10 J=1,NN
      SUM=ZERO
      DO 5 L=1,M
      BALIN=CONJG(A(L,I))
      SUM=SUM+BALIN*W(L)*A(L,J)
    5 CONTINUE
      D(I,J)=SUM
   10 CONTINUE
      SUMB=ZERO
      DO 15 L=1,M
      BALIN=CONJG(A(L,I))
      SUMB=SUMB+BALIN*W(L)*B(L)
   15 CONTINUE
      C(I)=SUMB
   20 CONTINUE
      DO 30 I=1,NN
      DO 25 J=1,NN
      A(I,J)=D(I,J)
   25 CONTINUE
      B(I)=C(I)
   30 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Fig E.2. (Continuación)

```
      SUBROUTINE SOLUCC(KBAN)
      COMMON/SOL1/ A
      COMMON/SOL2/ B,N
      COMPLEX A(1000,30) , B(1000), ZERO,SUM
C
C             LA SOLUCION QUEDA EN B
C
      ZERO=(0.0,0.0)
      EPS1=1.0E-20
C
C             TRIANGULARIZACION DE A
C
      DO 10 I=1,N
      DO 9 J=I,N
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1)GO TO 5
      DO 4 K=1,I-1
    4 SUM=SUM+A(I,K)*A(K,J)
    5 A(I,J)=A(I,J)-SUM
      IF(J.EQ.N)GO TO 9
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1)GO TO 7
      DO 6 K=1,I-1
    6 SUM=SUM+A(J+1,K)*A(K,I)
    7 IF(CABS(A(I,I)).LE.EPS1) GO TO 1062
      A(J+1,I)=(A(J+1,I)-SUM)/A(I,I)
    9 CONTINUE
   10 CONTINUE
C
C             DESPEJE DE LA TRIANGULAR INFERIOR
C
      DO 17 I=1,N
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1) GO TO 16
      DO 15 K=1,I-1
   15 SUM=SUM+A(I,K)*B(K)
   16 B(I)=B(I)-SUM
   17 CONTINUE
C
C             DESPEJE DE LA TRIANGULAR SUPERIOR
C
      DO 22 I=1,N
      II=N-I+1
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1) GO TO 19
      DO 20 K=1,I-1
      KK=N-K+1
   20 SUM=SUM+A(II,KK)*B(KK)
   19 IF(CABS(A(II,II)).LE.EPS1) GO TO 1062
      B(II)=(B(II)-SUM)/A(II,II)
   22 CONTINUE
      KBAN=0
      GO TO 1063
 1062 KBAN=1
 1063 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE HANKEL(X,H1,H0)
      COMPLEX H0,H1,C,A,E,E2,P
      IF(X)=0,50,60
   60 EPS1=1.0E-08
      EPS2=1.0E-16
      PI=3.14159265
      ULPI=1.0/PI
      IF(X.LE.10.0)GO TO 20
      C=(0.0,0.125)/X
      K=2
      P=C*C
      A=4.5*P
      B=7.5*P
      H0=1.0+C+A
      H1=1.0-3.0*C-B
   10 I=4*K
      K=K+1
      A=A*C*(I+1.0/K)
      B=B*C*(I-3.0/K)
      H0=H0+A
      H1=H1-B
      IF(ABS(AIMAG(B)).GT.EPS1) GO TO 10
      AR=0.25*PI-X
      E=SQRT(2.0*ULPI/X)*CMPLX(COS(AR),SIN(AR))
      H0=H0*E
      H1=H1*E*(0.0,1.0)
      GO TO 50
   20 ZH=X/2.0
      CC=-ZH*ZH
      E=CMPLX(0.0,ULPI)
      E2=E*2.0
      A=1.0-E2*(0.577215664901533+ALOG(0.5*X))
      PP=1.0
      K=1
      H0=A
      H1=A+E*(1.0-1.0/CC)
   30 A=A+E2/K
      PP=PP*CC
      H0=H0+A*PP
      K=K+1
      PP=PP/(K*K)
      H1=H1+(A*K+E)*PP
      IF(ABS(PP).GT.EPS2) GO TO 30
      H1=H1*ZH
   50 RETURN
      END
```

Fig E.2. (Continuación)

NUMERO DE PUNTOS EN LA FRONTERA 50
NUMERO DE FUENTES 10
ANGULO DE INCIDENCIA 0.00GRADOS
PROFUNDIDAD H 1.00
DISTANCIA ENTRE LAS FUENTES Y LA FRONTERA 0.500

C I R C U L O

PUNTOS DE CONTROL

PUNTO	XC	YC	TC
1	0.000000	1.000000	1,570796
2	-0.500000	0.866000	1,047198
3	-0.866000	0.500000	0,523599
4	-0.996200	0.087000	0,087267
5	-1.200000	0.000000	1,570796
6	-1.500000	0.000000	1,570796

FUENTES

PUNTO	XF	YF
1	0.479746	0.140866
2	0.420627	0.270320
3	0.327430	0.377875
4	0.207708	0.454816
5	0.071157	0.494911
6	-0.071157	0.494911
7	-0.207708	0.454816
8	-0.327430	0.377875
9	-0.420627	0.270320
10	-0.479746	0.140866

PUNTOS

PUNTO	X	Y	T	PESO
1	0.998103	0.061561	3,079993	1.000000
2	0.992421	0.122888	3,018393	1.000000
3	0.982973	0.183750	2,956793	1.000000
4	0.969797	0.243914	2,895193	1.000000
5	0.952942	0.303153	2,833593	1.000000
6	0.932472	0.361242	2,771994	1.000000
7	0.908465	0.417960	2,710394	1.000000
8	0.881012	0.473094	2,648794	1.000000
9	0.850217	0.526432	2,587194	1.000000
10	0.816197	0.577774	2,525594	1.000000
11	0.779081	0.626924	2,463994	1.000000
12	0.739009	0.673696	2,402394	1.000000
13	0.696134	0.717912	2,340795	1.000000
14	0.650618	0.759405	2,279195	1.000000
15	0.602635	0.798017	2,217595	1.000000
16	0.552365	0.833602	2,155995	1.000000
17	0.500000	0.866025	2,094395	1.000000
18	0.445738	0.895163	2,032795	1.000000
19	0.389786	0.920906	1,971195	1.000000
20	0.332355	0.943154	1,909596	1.000000
21	0.273663	0.961826	1,847996	1.000000
22	0.213933	0.976848	1,786396	1.000000
23	0.153392	0.988165	1,724796	1.000000
24	0.092268	0.995734	1,663196	1.000000
25	0.030795	0.999526	1,601596	1.000000
26	-0.030795	0.999526	1,539996	1.000000
27	-0.092268	0.995734	1,478397	1.000000
28	-0.153392	0.988165	1,416797	1.000000
29	-0.213933	0.976848	1,355197	1.000000
30	-0.273663	0.961826	1,293597	1.000000

Fig E.2.
(Continuación)

31	-0.332355	0.943154	1.231597	1.000000
32	-0.389786	0.920906	1.170397	1.000000
33	-0.445738	0.895163	1.108797	1.000000
34	-0.500000	0.866025	1.047198	1.000000
35	-0.552365	0.833602	0.985598	1.000000
36	-0.602635	0.798017	0.923998	1.000000
37	-0.650618	0.759405	0.862398	1.000000
38	-0.696134	0.717912	0.800798	1.000000
39	-0.739309	0.673696	0.739198	1.000000
40	-0.779081	0.626924	0.677598	1.000000
41	-0.816197	0.577774	0.615999	1.000000
42	-0.850217	0.526432	0.554399	1.000000
43	-0.881012	0.473094	0.492799	1.000000
44	-0.908465	0.417960	0.431199	1.000000
45	-0.932472	0.361242	0.369599	1.000000
46	-0.952942	0.303153	0.307999	1.000000
47	-0.969797	0.243914	0.246399	1.000000
48	-0.982973	0.183750	0.184800	1.000000
49	-0.992421	0.122888	0.123200	1.000000
50	-0.998103	0.061561	0.061600	1.000000

AK= 0.6000 AK/PI= 0.1910

NTC		UZ	UZR	FASE	DUII		ERO
1	.12413385E+01	.36854716E+00	.12948932E+01	.91866052E-01	.62317639E-03	-.22830091E-04	.62033819E-03
2	.14184498E+01	.36636671E+00	.14649998E+01	.80456823E-01	.36395045E-03	-.16870906E-04	.70607102E-03
3	.17005115E+01	.36200845E+00	.18169401E+01	.63847566E-01	-.58987325E-03	.18529151E-04	.33283917E-02
4	.19598078E+01	.35989962E+00	.19925798E+01	.57810395E-01	-.15569849E-02	.56941997E-04	.28551172E+00
5	.19773122E+01	.35709830E+00	.20092991E+01	.56873049E-01	-.27345570E-08	.70747547E-09	.98245927E-08
6	.20169167E+01	.34421620E+00	.20460786E+01	.53805824E-01	-.40224136E-08	.15614533E-08	.43148520E-08

AK= 0.8000 AK/PI= 0.2546

NTC		UZ	UZR	FASE	DUII		ERO
1	.78663294E+00	.56079455E+00	.96606517E+00	.19714033E+00	.11381455E-02	-.79413199E-04	.69402574E-03
2	.10973847E+01	.54902003E+00	.12270600E+01	.14745964E+00	.67000427E-03	-.56128849E-04	.75971838E-03
3	.17433879E+01	.52548072E+00	.18208601E+01	.93186209E-01	-.10775493E-02	.66767250E-04	.34654756E-02
4	.20685090E+01	.51408203E+00	.21314338E+01	.77537933E-01	-.28419104E-02	.19803018E-03	.93375649E+00
5	.20996398E+01	.50594978E+00	.21597389E+01	.75268118E-01	-.47750799E-08	.19983484E-08	.51763679E-08
6	.21674418E+01	.47009496E+00	.22178353E+01	.67985037E-01	-.67359686E-08	.42954539E-08	.79890048E-08

AK= 1.0000 AK/PI= 0.3183

NTC		UZ	UZR	FASE	DUII		ERO
1	.25390227E+00	.78068855E+00	.82039080E+00	.39991106E+00	.18135410E-02	-.21435889E-03	.10851031E-02
2	.72589219E+00	.73885614E+00	.10357740E+01	.25281717E+00	.10765027E-02	-.14642304E-03	.82342941E-03
3	.17286108E+01	.65521604E+00	.18482221E+01	.11532472E+00	-.17185591E-02	.18516953E-03	.36053693E-02
4	.22437566E+01	.61469933E+00	.23264349E+01	.85115737E-01	-.45246890E-02	.53414085E-03	.30081295E+00
5	.22907674E+01	.59627678E+00	.23671191E+01	.81055332E-01	-.69195583E-08	.43716742E-08	.61851914E-08
6	.23851506E+01	.51941930E+00	.24410530E+01	.66253369E-01	-.89550106E-08	.90555685E-08	.12735601E-07

AK= 1.2000 AK/PI= 0.3820

NTC		UZ	UZR	FASE	DUII		ERO
1	-.31524889E+00	.10524900E+01	.10986888E+01	.59263515E+00	.26076175E-02	-.46612744E-03	.11842097E-02
2	.32210971E+00	.94319439E+00	.99667965E+00	.39524713E+00	.15607218E-02	-.31209571E-03	.68036398E-03
3	.17158369E+01	.72463312E+00	.18625760E+01	.12719629E+00	-.24755759E-02	.40996926E-03	.37033658E-02
4	.24512718E+01	.61872795E+00	.25281530E+01	.78701019E-01	-.64997956E-02	.11601136E-02	.30289401E+00
5	.25131425E+01	.58413266E+00	.25801349E+01	.72694397E-01	-.84236838E-08	.78909732E-08	.11542353E-07
6	.26194830E+01	.44895833E+00	.26576785E+01	.54030782E-01	-.91661261E-08	.15576090E-07	.18072976E-07

Fig E.2. (Continuación)

```
      COMMON/LE/X(250),Y(250),T(250),XFUP(25),YFUP(25),
     1          XFUS(25),YFUS(25),XC(100),YC(100),TC(100),N
      COMMON/CCLN/FI,FP,XF,YF,XP,YP
      COMMON/BLAN/I,NI,NFS,NPC,NINC,MSER,INC
      COMMON/DLSFRL/UXFR,UYFR
      COMMON/ESFRL/SXXFR,SYYFR,SXYFR
      COMMON/FFUP/UXP,UYP
      COMMON/FFUS/UXS,UYS
      COMMON/PPEP/SXXP,SYYP,SXYP
      COMMON/PPES/SXXS,SYYS,SXYS
      COMMON/SOL1/A
      COMMON/SOL2/B,NN
      COMPLEX B(500)
      COMPLEX UX,UY,SX,SY
      COMPLEX UXP,UYP,UXS,UYS
      COMPLEX SXXP,SYYP,SXYP
      COMPLEX SXXS,SYYS,SXYS
      COMPLEX ZERO,SLN,ZCN,SCN,ZCM,BAL
      COMPLEX UXFR(5),UYFR(5),SXXFR(5),SYYFR(5),SXYFR(5)
      COMPLEX A(500,50),B(500,5),BC(200,5),UC(200,5)
      COMPLEX AC(200,50),AUC(200,50)
      ZERO=(0.0,0.0)
      CALL LECTOR
      DO 50 JP=1,N
      JPI=JP+N
      XP=X(JP)
      YP=Y(JP)
      TP=T(JP)
      CT=COS(TP)
      ST=SIN(TP)
      CALL FREE(2,INC,NINC)
      DO 45 INC=1,NINC
      B(JP,INC)=-(SXXFR(INC)*CT-SXYFR(INC)*ST)
      B(JPI,INC)=-(-SYYFR(INC)*ST+SXYFR(INC)*CT)
   45 CONTINUE
      DO 47 IR=1,NFP
      XF=XFUP(IR)
      YF=YFUP(IR)
      CALL ESFP
      A(JP,IR)=SXXP*CT-SXYP*ST
      A(JPI,IR)=-SYYP*ST+SXYP*CT
   47 CONTINUE
      DO 48 IQ=1,NFS
      IQQ=IQ+NFP
      XF=XFUS(IQ)
      YF=YFUS(IQ)
      CALL ESFS
      A(JP,IQQ)=SXXS*CT-SXYS*ST
      A(JPI,IQQ)=-SYYS*ST+SXYS*CT
   48 CONTINUE
   50 CONTINUE
      DO 60 JP=1,NPC
      JPI=JP+NPC
      XP=XC(JP)
      YP=YC(JP)
      TP=TC(JP)
      CT=COS(TP)
      ST=SIN(TP)
      CALL FREE(2,INC,NINC)
      DO 55 INC=1,NINC
      BC(JP,INC)=SXXFR(INC)*CT-SXYFR(INC)*ST
      BC(JPI,INC)=-SYYFR(INC)*ST+SXYFR(INC)*CT
   55 CONTINUE
      CALL FREE(1,INC,NINC)
      DO 57 INC=1,NINC
      UC(JP,INC)=UXFR(INC)
      UC(JPI,INC)=UYFR(INC)
   57 CONTINUE
      DO 58 IR=1,NFP
      XF=XFUP(IR)
      YF=YFUP(IR)
      CALL ESFP
      AC(JP,IR)=SXXP*CT-SXYP*ST
      AC(JPI,IR)=-SYYP*ST+SXYP*CT
      CALL DESPFP
      AUC(JP,IR)=UXP
      AUC(JPI,IR)=UYP
   58 CONTINUE
      DO 59 IQ=1,NFS
      IQQ=IQ+NFP
      XF=XFUS(IQ)
      YF=YFUS(IQ)
      CALL ESFS
      AC(JP,IQQ)=SXXS*CT-SXYS*ST
      AC(JPI,IQQ)=-SYYS*ST+SXYS*CT
      CALL DESPFS
      AUC(JP,IQQ)=UXS
      AUC(JPI,IQQ)=UYS
   59 CONTINUE
   60 CONTINUE
      CALL COMPLE(A,AC,AUC)
      NN=NFP+NFS
      NP=N*2
      CALL ASA(NP,NN,A)
      IF(NP.GT.NN)CALL SYM(NP)
      CALL SOLUCO(KBAN)
      IF(KBAN.EQ.0)GO TO 70
      WRITE(6,100)
  100 FORMAT(//,10X,"SE DIVIDE POR CERO O ALGO ASI...")
      CALL EXIT
   70 CONTINUE
      NTF=NN
      XP=0.0   ;  YP=0.0
      CALL FREE(1,INC,NINC)
      DO 95 INC=1,NINC
      WRITE(6,101)INC
  101 FORMAT(//,10X,"ANGULO DE INCIDENCIA NUMERO ",I3,/)
      FACX=CABS(UXFR(INC))
      FACY=CABS(UYFR(INC))
      WRITE(6,106)FACX,FACY
  106 FORMAT(/,17X,F10.4,10X,F10.4,/)
      IF(FACX.EQ.0.0)FACX=FACY
      IF(FACY.EQ.0.0)FACY=FACX
      WRITE(6,102)FACX,FACY
  102 FORMAT(10X,"FACX = ",F10.4,"     FACY = ",F10.4,//,
     16X,"PUNTO",10X,"SX",21X,"SY",22X,"UX",15X,"UXR",16X,
     2"UY",15X,"UYR",/)
      DO 90 JP=1,NPC
```

Fig E.3. Listado del programa para incidencia de ondas P o SV

```
      JPI=JP+NPC
      SUM=ZERO;ZUM=ZERO;SOM=ZERO;ZOM=ZERO
      DO 85 KF=1,NT
      BAL=B(KF,INC)
      SUM=SUM+AC(JP,KF)*BAL
      ZUM=ZUM+AC(JPI,KF)*BAL
      SOM=SOM+ALC(JP,KF)*BAL
      ZOM=ZOM+ALC(JPI,KF)*BAL
   85 CONTINUE
      SX=HC(JP,INC)+SUM
      SY=HC(JPI,INC)+ZUM
      UX=(LC(JP,INC)+SOM)/FACX
      UY=(LC(JPI,INC)+ZOM)/FACY
      UXR=CABS(UX)
      UYR=CABS(UY)
      WRITE(6,103)JP,SX,SY,UX,UXR,UY,UYR
  103 FORMAT(7X,I3,2(2X,E10.4,1X,E10.4),2(3X,E10.4,1X,E10.4,2X,E10.4),/)
   90 CONTINUE
   95 CONTINUE
      CALL EXIT
      END


      SUBROUTINE LECTOR
C
C     ESTA RUTINA LEE O GENERA LOS DATOS
C
     .COMMON/LE/X(250),Y(250),T(250),XFP(25),YFP(25),
     .      XFS(25),YFS(25),XC(100),YC(100),TC(100),N
      COMMON/READ/N,NFP,NFS,NPC,NINC,MSER,IND
      COMMON/LEC/AKP,AKS,CP,CS,HI,AL,ANG(5)
      COMPLEX UNO,B(500)
      DIMENSION GAM(5)
      READ(5,99)ING,INP,INC,N,NFS,NFP,NINC,B,COZ,COP
   99 FORMAT(3I5/(4I5,3F10.0))
      PI=3.14159265
      READ(5,10)(GAM(I),I=1,NINC)
      DO 98 I=1,NINC
   98 ANG(I)=(90.0-GAM(I))*PI/180.0
      IF(ING.EQ.0) GO TO 104
      COOZ=1.0-COZ
      COBZ=B-COZ
      COOP=1.0-COP
      COBP=B-COP
      IF(IND.EQ.2)GO TO 1009
      VARN=3H P
      GO TO 1008
 1009 VARN=3H SV
 1008 CONTINUE
   71 FORMAT(/,30X,"PUNTOS DE CONTROL",//,15X,"PUNTO",7X,"XC",13X,"YC",
     113X,"TC",///)
C
C              LEE FRECUENCIAS
C
   10 FORMAT(8F10.0)
      READ(5,10) WR,CP,CS,HI,AL,MSER
      AKP=WR/CP  ;  AKS=WR/CS
      WRITE(6,100) N,NFP,NFS,B,COZ,COP
      WRITE(6,197)
  197 FORMAT(//,20X,"ANGULOS DE INCIDENCIA",/)
      DO 198 I=1,NINC
      WRITE(6,199) GAM(I)
  198 CONTINUE
  199 FORMAT(20X,F8.2,3X,"GRADOS")
  388 FORMAT(5F10.0,I5)
  100 FORMAT(//,20X,"NUMERO DE PUNTOS EN LA FRONTERA",I5,//,20X,"NUMERO DE FUENTES SV ",I4,//,
     120X,"NUMERO DE FUENTES P ",I5,/,20X,
     220X,"PROFUNDIDAD  B",
     3F5.2,/,20X,
     4"DISTANCIA ENTRE LAS FUENTES PARA ONDAS S Y LA FRONTERA ",F6.3,
     5/,20X,"DISTANCIA ENTRE LAS FUENTES PARA ONDAS P Y LA FRONTERA ",
     6F6.3)
      WRITE(6,107) VARN
  107 FORMAT(/,20X,"INCIDENCIA DE ONDAS",1A3)
      AKPPI=AKP/PI   ;  AKSPI=AKS/PI
      WRITE(6,108)AKP,AKPPI,AKS,AKSPI,WR,HI,CP,CS,AL,MSER
  108 FORMAT(/,20X,"AKP = ",F7.4,"   AKP/PI = ",F7.4,
     1/,20X,"AKS = ",F7.4,"   AKS/PI = ",F7.4,
     2/,20X,"  WR = ",F7.4,"       HI = ",F7.4,
     3/,20X,"  CP = ",F8.4,"       CS = ",F8.4,
     4/,20X,"L/H = ",F8.2,"     MSER = ",I5,//)
C
C              ELIGE GEOMETRIA
C              ING=1 TRIANGULO , ING=2 COSENO , ING=3 ELIPSE
C
      IF(ING-2) 3000,2000,1000
 1000 IF(B-1.0) 880,881,880
  881 WRITE(6,882)
      GO TO 883
  880 WRITE(6,80)
  883 WRITE(6,71)
  882 FORMAT(////,50X," C I R C U L O ",////)
   80 FORMAT(////,50X," E L I P S E ",////)
      BN=N+1
      BNFS=NFS+1
      BNFP=NFP+1
C
C              GENERA PUNTOS EN LA FRONTERA Y FUENTES
C
      DO 44 I=1,N
      AN=I  ;  ALF=PI*AN/BN
      CA=COS(ALF)
      SA=SIN(ALF)
      X(I)=CA
      Y(I)=B*SA
      T(I)=ATAN2(SA,-B*CA)
   44 CONTINUE
      DO 77 I=1,NFS
      ANF=I
      ALF=PI*ANF/BNFS
      XFS(I)=COOZ*COS(ALF)
      YFS(I)=COBZ*SIN(ALF)
   77 CONTINUE
      DO 79 I=1,NFP
      AI=I
      ALF=PI*AI/BNFP
      XFP(I)=COOP*COS(ALF)
      YFP(I)=COBP*SIN(ALF)
```

Fig. E.3 (Continuación)

```
C          INP=1 LEE PUNTOS DE CONTROL ; INP=2 GENERA PUNTOS DE CONTROL
      IF(INP-1) 4,1500,1750
 1500 READ(5,78) NPC
   78 FORMAT(I5)
      DO 30 I=1,NPC
      READ (5,10)XC(I),YC(I),TC(I)
      WRITE(6,73)I,XC(I),YC(I),TC(I)
   30 CONTINUE
      GO TO 4
 1750 READ(5,10) XI,XL,DX
      NPC=(XL-XI)/DX+1.0
      BB=B*B
      DO 91 I=1,NPC
      AI=I
      XXC=XI+(AI-1.0)*DX
      IF(ABS(XXC)-1.0) 85,86,86
   85 YYC=B*SQRT(1.0-XXC*XXC)
      TC(I)=ATAN2(YYC,-XXC*BB)
      YC(I)=YYC
      XC(I)=XXC
      GO TO 87
   86 YC(I)=0.0
      TC(I)=PI/2.0
      XC(I)=XXC
   87 WRITE(6,73) I,XC(I),YC(I),TC(I)
   91 CONTINUE
      GO TO 4
 2000 WRITE(6,81)
   81 FORMAT(///,50X," C O S E N O I D E ",///)
      WRITE(6,71)
      ALFA=B
      AN=N
      DXP=2.0/(AN+1.0)
      AFS=NFS
      AFP=NFP
      DXFS=2.0*COOZ/(AFS+1.0)
      DXFP=2.0*COOP/(AFP+1.0)
C
C          GENERA PUNTOS EN LA FRONTERA Y FUENTES
C
      DO 11 I=1,N
      AI=I
      PX=-1.0+DXP*AI
      Y(I)=ALFA/2.0*(1.0+COS(PI*PX))
      T(I)=ATAN2(2.0,-ALFA*PI*SIN(PI*PX))
      X(I)=PX
   11 CONTINUE
      DO 111 I=1,NFS
      AI=I
      XX=-COOZ+DXFS*AI
      YFS(I)=COOZ*ALFA/2.0*(1.0+COS(PI*XX/COOZ))
      XFS(I)=XX
  111 CONTINUE
      DO 112 I=1,NFP
      AI=I
      XX=-COOP+DXFP*AI
      YFP(I)=COOP*ALFA/2.0*(1.0+COS(PI*XX/COOP))
      XFP(I)=XX
  112 CONTINUE
C
C          INP=1 LEE PUNTOS DE CONTROL ; INP=2 GENERA PUNTOS DE CONTROL
C
      IF(INP-1) 4,2500,2750
 2500 READ(5,78) NPC
      DO 130 I=1,NPC
      READ (5,10)XC(I),YC(I),TC(I)
      WRITE(6,73)I,XC(I),YC(I),TC(I)
  130 CONTINUE
      GO TO 4
 2750 READ(5,10) XI,XL,DX
      NPC=(XL-XI)/DX+1.0
      DO 12 I=1,NPC
      AI=I
      XXC=XI+(AI-1.0)*DX
      IF(ABS(XXC)-1.0) 13,14,14
   13 YC(I)=ALFA/2.0*(1.0+COS(PI*XXC))
      TC(I)=ATAN2(2.0,-ALFA*PI*SIN(PI*XXC))
      XC(I)=XXC
      GO TO 15
   14 YC(I)=0.0$XC(I)=XXC
      TC(I)=PI/2.0
   15 WRITE(6,73)I,XC(I),YC(I),TC(I)
   12 CONTINUE
      GO TO 4
 3000 WRITE(6,82)
   82 FORMAT(///,50X," T R I A N G U L O ",///)
      WRITE(6,71)
      F2=N+1 $ FDX=2.0/F2
      FS=NFS+1
      FP=NFP+1
      FCOS=2.0*COOZ/FS
      FCOP=2.0*COOP/FP
      B=H+EP
      T1=ATAN2(1.0,-B)
      T2=ATAN(1.0/B)
      XX=-1.0
      XFS=-COOZ
      XFP=-COOP
      READ(5,3001) EP
 3001 FORMAT(F10.0)
      COBS=B-COZ
      COBP=B-COP
C
C          GENERA PUNTOS EN LA FRONTERA Y FUENTES
C
      DO 25 I=1,NFS
      XFS=XFS+FCOS
      IF(XFS)18,19,20
   18 XFS(I)=XFS
      YFS(I)=COBS*(1.0+XFS/COOZ)
      GO TO 25
   19 XFS(I)=0.0
      YFS(I)=COBS
      GO TO 25
   20 XFS(I)=XFS
      YFS(I)=COBS*(1.0-XFS/COOZ)
   25 CONTINUE
      DO 26 I=1,NFP
      XFP=XFP+FCOP
      IF(XFP)21,22,23
```

Fig E.3. (Continuación)

```
   21 XFP(I)=XEP
      YFP(I)=CCBP*(1.0+XEP/CCCP)
      GO TO 26
   22 XFP(I)=0.0
      YFP(I)=CCBP
      GO TO 26
   23 XFP(I)=XEP
      YFP(I)=CCBP*(1.0-XEP/CDDP)
   26 CONTINUE
      RP=B-EP
      BL=1.0/B
      SBL=SQRT(1.0+BL*BL)
      RR=EP*BL*(BL+SBL)
      XA=RR/SBL
      DO 625 I=1,N
      XX=XX+FLX
      IF(ABS(XX).LE.1.0E-06) XX=0.0
      IF(ABS(XX)-XA) 46,47,47
   47 IF(XX) 618,620,620
  618 X(I)=XX
      Y(I)=B*(1.0+XX)
      T(I)=T2
      GO TO 625
  620 X(I)=XX
      Y(I)=B*(1.0-XX)
      T(I)=T1
      GO TO 625
   46 RAI=SQRT(RR*RR-XX*XX)
      Y(I)=RAI-RR+EP
      T(I)=ATAN2(RAI,-XX)
      X(I)=XX
  625 CONTINUE
C
C              INP=1 LEE PUNTOS DE CONTROL , INP=2 GENERA PUNTOS DE CONTROL
C
      IF(INP-1) 4,3500,3750
 3500 READ(5,70) NPC
      DO 230 I=1,NPC
      READ(5,10) XC(I),YC(I),TC(I)
      WRITE(6,73) I,XC(I),YC(I),TC(I)
  230 CONTINUE
      GO TO 4
 3750 READ(5,10) XI,XL,DX
      NPC=(XL-XI)/DX +1.0
      DO 37 I=1,NPC
      AI=I $ XX=XI+(AI-1.0)*DX
      IF(ABS(XX)-1.0) 32,33,33
   32 IF(ABS(XX)-XA) 35,39,39
   39 IF(XX) 34,34,36
   35 RAI=SQRT(RR*RR-XX*XX)
      YC(I)=RAI-RR+EP
      TC(I)=ATAN2(RAI,-XX)
      XC(I)=XX
      GO TO 31
   36 YC(I)=B*(1.0-XX) $ TC(I)=T1 $ XC(I)=XX $ GO TO 31
   34 YC(I)=B*(1.0+XX) $ TC(I)=T2 $ XC(I)=XX $ GO TO 31
   33 XC(I)=XX $ YC(I)=0.0 $ TC(I)=PI/2.0
   31 WRITE(6,73) I,XC(I),YC(I),TC(I)
   37 CONTINUE
C
C              LEE PESOS EN LOS PUNTOS
C
    4 READ(5,42) K,P
      UNO=(1.0,0.0)
      DO 312 L=1,N
      LN=L+N
      W(L)=UNO
      W(LN)=UNO
      IF(L-K) 312,302,312
  302 W(L)=P*UNO
      W(LN)=P*UNO
      READ(5,42) K,P
  312 CONTINUE
   42 FORMAT(I5,F10.0)
   73 FORMAT(/,13X,I5,3F15.6)
      WRITE(6,501)
  501 FORMAT(//,35X,"FUENTES PARA ONDAS S",//,15X,"PUNTO",
     *7X,"XFS",13X,"YFS",//)
      DO 504 I=1,NFS
      WRITE(6,503)I,XFS(I),YFS(I)
  504 CONTINUE
      WRITE(6,508)
  508 FORMAT(//,35X,"FUENTES PARA ONDAS P",//,15X,"PUNTO",
     *7X,"XFP",13X,"YFP",//)
      DO 507 I=1,NFP
      WRITE(6,503)I,XFP(I),YFP(I)
  507 CONTINUE
      WRITE(6,502)
  502 FORMAT(//,35X,"PUNTOS",//,15X,"PUNTO",7X,"X",14X,"Y",14X,"T",13X,
     1"PESO",//)
      DO 505 I=1,N
      AW=CABS(W(I))
      WRITE(6,506) I,X(I),Y(I),T(I),AW
  505 CONTINUE
  506 FORMAT(/,13X,I5,4F15.6)
  503 FORMAT(/,13X,I5,2F15.6)
  104 RETURN
      END


      SUBROUTINE ASA(L,LL,AM)
      COMPLEX AM(500,50)
      IK=(LL+4)/5
      DO 70 K=1,IK
      KK=K-1
      IIN=KK*5+1
      IF(K.EQ.IK) GO TO 71
      IFN=IIN+4
      GO TO 72
   71 IFN=LL
   72 WRITE(6,120) (J,J=IIN,IFN)
  120 FORMAT(/,10X,I3,4(17X,I3))
      DO 70 I=1,L
   70 WRITE(6,121) (I,(AM(I,J),J=IIN,IFN))
  121 FORMAT(/,7X,I3,3X,10E10.4)
      RETURN
      END
```

Fig E.3. (Continuación)

```
      COMPLEX ZERO,UNO
      COMPLEX FI1,FI2,PSI1,PSI2
      COMPLEX SE,TE,BAL,DEN,COE1,COE2,COE3,A2,B2,YSE
      COMPLEX UXFR(5),UYFR(5),SXXFR(5),SYYFR(5),SXYFR(5)
      COMMON/CCON/R1,R2,XF,YF,XP,YP
      COMMON/EE/AKP,AKS,CP,CS,H,AL,ANG(5)
      COMMON/DESPAL/UXFR,UYFR
      COMMON/ESFUL/SXXFR,SYYFR,SXYFR
      SIG=CS/CP ; SIG2=SIG*SIG ; PI=3.141592654 ; UNO=(0.0,1.0)
      ZERO=(0.0,0.0)
      DO 50 INC=1,NINC
      ANGIN=ANG(INC)
      IF(ABS(ANGIN-PI/2.0).LT.1.0E-05)GO TO 14
      IF(IND.EQ.2)GO TO 10
      E=ANGIN  ; CE=COS(E)  ; CF=SIG*CE
      GO TO 12
   10 F=ANGIN  ; CF=COS(F)  ; CE=CF/SIG
   12 CONTINUE
      GO TO 25
   14 IF(IND.EQ.2)GO TO 17
      ARG=AKP*YF
      IF(IC.EQ.2)GO TO 15
      UXFR(INC)=ZERO
      UYFR(INC)=CMPLX(COS(ARG),0.0)
      GO TO 50
   15 BAL=-G*AKP*SIN(ARG)/SIG2+ZERO
      BOL=REAL(BAL)
      CHAF=1.0-2.0*SIG2
      SYYFR(INC)=CMPLX(BOL,0.0)
      SXXFR(INC)=SYYFR(INC)*CHAF
      SXYFR(INC)=ZERO
   16 GO TO 50
   17 ARG=AKS*YP
      IF(IC.EQ.2)GO TO 18
      UXFR(INC)=CMPLX(-COS(ARG),0.0)
      UYFR(INC)=ZERO
      GO TO 50
   18 BAL=G*AKS*SIN(ARG)+ZERO
      BOL=REAL(BAL)
      SXXFR(INC)=ZERO
      SYYFR(INC)=ZERO
      SXYFR(INC)=CMPLX(BOL,0.0)
   19 GO TO 50
   25 CONTINUE
      IF(CE.LE.1.0) GO TO 26
      SE=-UNO*SQRT(CE*CE-1.0)
      GO TO 27
   26 SE=SQRT(1.0-CE*CE)+ZERO
   27 SF=SQRT(1.0-CF*CF)
      TE=SE/CE
      TF=SF/CF
      AUX=TF*TF-1.0    ;  AUX2=AUX*AUX
      BAL=4.0*TE*TF    ;  DEN=BAL+AUX2
      COE1=(BAL-AUX2)/DEN
      COE2= -4.0*TE*AUX/DEN
      COE3= 4.0*TF*AUX/DEN
      IF(IND.EQ.2)GO TO 30
      B1=0.0  ;   A1=1.0  ;  A2=COE1 ;  B2=COE2
      GO TO 31
   30 A1=0.0  ; B1=1.0  ; A2=COE3  ; B2=COE1
   31 CONTINUE
      XCE=XP*CE  ;  YSE=YP*SE
      XCF=XP*CF  ;  YSF=YP*SF
      FI1=-UNO*AKP*(XCE-YSE)
      FI1=A1*CEXP(FI1)
      FI2=-UNO*AKP*(XCE+YSE)
      FI2=A2*CEXP(FI2)
      PSI1=-UNO*AKS*(XCF-YSF)
      PSI1=B1*CEXP(PSI1)
      PSI2=-UNO*AKS*(XCF+YSF)
      PSI2=B2*CEXP(PSI2)
      IF(IC.EQ.2) GO TO 35
      UXFR(INC)=UNO*(-FI1-FI2-TF*(PSI1-PSI2))
      UYFR(INC)=UNO*(TE*(FI1-FI2)-PSI1-PSI2)
      GO TO 50
   35 CONTINUE
      SESE=REAL(SE*SE)
      AUX=(1.0-2.0*SIG2*SESE)/SIG2/CE/CE
      BAL=G*AKP*CE+ZERO
      SXXFR(INC)=-BAL*(AUX*(FI1+FI2)+2.0*TF*(PSI1-PSI2))
      SYYFR(INC)=-BAL*((TF*TF-1.0)*(FI1+FI2)-2.0*TF*(PSI1-PSI2))
      SXYFR(INC)=BAL*(2.0*TE*(FI1-FI2)+(TF*TF-1.0)*(PSI1+PSI2))
   50 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE DERS(ID)
      COMMON /PPO/ F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10
      COMMON /CCON/ R1,R2,XF,YF,XP,YP
      A=XP-XF
      B=YP-YF
      C=YP+YF
      R1=SQRT(A*A+B*B)
      R2=SQRT(A*A+C*C)
      F1=A/R1
      F2=B/R1
      F3=A/R2
      F4=C/R2
      IF(ID.EQ.1)RETURN
      F5=F2*F2/R1
      F6=F1*F1/R1
      F7=F4*F4/R2
      F8=F3*F3/R2
      F9=-F1*F2/R1
      F10=-F3*F4/R2
      RETURN
      END
```

Fig E.3. (Continuación)

```
SUBROUTINE LSFP
COMMON/CCOR/ R1,R2,XF,YF,XP,YP
COMMON/PPH/HC,H1,H2
COMMON /PPC/ F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10
COMMON/LEC/AKP,AKS,CP,CS,HI,AL,ANG(5)
COMMON /PPEP/ SXXP,SYYP,SXYP
COMPLEX HC,H1,H2,UNO
COMPLEX SXXP,SYYP,SXYP,DUXX,DUYY,DUXY,PIKP
UNO=(0.0,1.0)   ;   PI=3.141592654
PIKP=PI*UNO*AKP
CALL GENS(2)
A1=AKP*R1
A2=AKP*R2
CALL HANKEL (A1,2)
DUXX=H1*F5+AKP*H2*F1*F1
DUYY=H1*F6+AKP*H2*F2*F2
DUXY=H1*F9+AKP*H2*F1*F2
CALL HANKEL(A2,2)
DUXX=(DUXX-H1*F7-AKP*H2*F3*F3)*PIKP
DUYY=(DUYY-H1*F8-AKP*H2*F4*F4)*PIKP
DUXY=(DUXY-H1*F10-AKP*H2*F3*F4)*PIKP
SIG=CS/CP ; SIG2=SIG*SIG ; FACB=1.0/SIG2-2.0
SXXP=DUXX/SIG2+DUYY*FACB
SYYP=DUYY/SIG2+DUXX*FACB
SXYP=2.0*DUXY
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE CSFS
COMMON/CCOR/R1,R2,XF,YF,XP,YP
COMMON/PPH/HC,H1,H2
COMMON/PPC/F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10
COMMON/LEC/AKP,AKS,CP,CS,HI,AL,ANG(5)
COMMON/PPES/SXXS,SYYS,SXYS
COMPLEX HC,H1,H2,UNO
COMPLEX SXXS,SYYS,SXYS,DUXX,DUYY,DUXY,DUYX
UNO=(0.0,1.0)   ;   PI=3.141592654
CALL GENS(2)
A1=AKS*R1
A2=AKS*R2
CALL HANKEL (A1,2)
DUXX=-H1*F9-AKS*H2*F1*F2
DUYY=-H1*F6-AKS*H2*F2*F2
DUYX=H1*F5+AKS*H2*F1*F1
CALL HANKEL (A2,2)
DUXX=DUXX+H1*F10+AKS*H2*F3*F4
DUYY=-DUXX
DUXY=DUXY+H1*F8+AKS*H2*F4*F4
DUYX=DUYX-H1*F7-AKS*H2*F3*F3
SXXS=2.0*DUXX*PI*UNO*AKS
SYYS=-SXXS
SXYS=(DUXY+DUYX)*PI*UNO*AKS
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE DESPFP
COMMON /CCOR/ R1,R2,XF,YF,XP,YP
COMMON /PPH/ HO,H1,H2
COMMON /PPD/ F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10
COMMON /PPDP/ UXP,UYP
COMMON/LEC/AKP,AKS,CP,CS,HI,AL,ANG(5)
COMPLEX HC,H1,H2,UXP,UYP,UNO
PI=3.141592654 ; UNO=CMPLX(0.0,1.0)
CALL GENS(1)
A1=AKP*R1
A2=AKP*R2
CALL HANKEL(A1,1)
UXP=H1*F1
UYP=H1*F2
CALL HANKEL(A2,1)
UXP=(UXP-H1*F3)*PI*UNO*AKP
UYP=(UYP-H1*F4)*PI*UNO*AKP
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE DESPFS
COMMON/CCOR/R1,R2,XF,YF,XP,YP
COMMON/PPH/HO,H1,H2
COMMON/PPC/F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10
COMMON/PPDS/UXS,UYS
COMMON/LEC/AKP,AKS,CP,CS,HI,AL,ANG(5)
COMPLEX HC,H1,H2,UXS,UYS
COMPLEX UNO
PI=3.141592654 ;  UNO=CMPLX(0.0,1.0)
CALL GENS (1)
A1=AKS*R1
A2=AKS*R2
CALL HANKEL (A1,1)
UXS=-H1*F2
UYS=H1*F1
CALL HANKEL (A2,1)
UXS=(UXS+H1*F4)*PI*UNO*AKS
UYS=(UYS-H1*F3)*PI*UNO*AKS
RETURN
END
```

Fig E.3. (Continuación)

```
      SUBROUTINE COMPLE (A,AC,ALC)
      COMMON/LL/X(250),Y(250),T(250),XFP(25),YFP(25),
     *XFS(25),YFS(25),XC(100),YC(100),TC(100),H
      COMMON/REAU/NPF,NFP,NFF,NPC,NINC,N,IND
      COMMON/LEC/AKP,AKS,CP,CS,NI,AL,ANG(5)
      REAL NI,KN,KN2
      COMPLEX A(500,50),AC(200,50),ALC(200,50)
      COMPLEX UNO,FAC,AKPC,AKSC,AKP2,AKS2,ANU,GAM
      COMPLEX P,P2,GN,F,Q,R,EYN,EYG,EYRN,EYQG
      COMPLEX SUM1,SUM2,SUM3,SUM4
      DIMENSION CT(250),ST(250),CTC(100),STC(100)
      UNO=(0.0,1.0);PI=3.14159265
      FAKN=2.0*PI/AL;FAC=-FAKN*4.0*UNO
      AKPC=AKP-NI/CP*UNO
      AKSC=AKS-NI/CS*UNO
      AKP2=AKPC*AKPC
      AKS2=AKSC*AKSC
      DO 50 JP=1,NPF
      CT(JP)=COS(T(JP))
      ST(JP)=SIN(T(JP))
   50 CONTINUE
      DO 60 JP=1,NPC
      CTC(JP)=COS(TC(JP))
      STC(JP)=SIN(TC(JP))
   60 CONTINUE
      DO 500 I=1,N
      NI=I
      KN=FAKN*NI
      KN2=KN*KN
      ANU=AKP2-KN2
      GAM=AKS2-KN2
      ANU=CSQRT(ANU)
      BAL=AIMAG(ANU)
      IF(BAL.GT.0.0)ANU=-ANU
      GAM=CSQRT(GAM)
      BAL=AIMAG(GAM)
      IF(BAL.GT.0.0)GAM=-GAM
      P=2.0*KN2-AKS2
      P2=P*P
      GN=GAM*ANU
      F=P2+4.0*KN2*GN
      Q=2.0*ANU*ANU-AKS2
      R=4.0*KN2*GN
      DO 300 JP=1,NPF
      JPI=JP+NPF
      EYN=CEXP(-UNO*Y(JP)*ANU)
      EYG=CEXP(-UNO*Y(JP)*GAM)
      DO 200 IR=1,NFP
      EYRN=CEXP(-UNO*YFP(IR)*ANU)
      ARG=KN*(XFP(IR)-X(JP))
      CXK=COS(ARG)
      SXK=SIN(ARG)
      SUM1=-FAC*4.0*KN2*GAM*(Q*EYN+P*EYG)*CXK*EYRN/F
      SUM2=-FAC*2.0*UNO*KN*(P*EYN+P2*EYG)*SXK*EYRN/F
      SUM3=FAC*4.0*KN2*GAM*P*(EYN-EYG)*CXK*EYRN/F
      SUM4=-SUM2
      A(JP,IR)=A(JP,IR)+SUM1*CT(JP)+SUM2*ST(JP)
      A(JPI,IR)=A(JPI,IR)+SUM3*ST(JP)+SUM4*CT(JP)
  200 CONTINUE
      DO 250 IQ=1,NFS
      EYQG=CEXP(-UNO*YFS(IQ)*GAM)
      ARG=KN*(XFS(IQ)-X(JP))
      CXK=COS(ARG)
      SXK=SIN(ARG)
      SUM1=FAC*2.0*UNO*KN*(Q*P*EYN-R*EYG)*SXK*EYQG/F
      SUM2=FAC*4.0*KN2*ANU*P*(EYN-EYG)*CXK*EYQG/F
      SUM3=-FAC*2.0*UNO*KN*(P2*EYN+R*EYG)*SXK*EYQG/F
      SUM4=-SUM2
      IQQ=IQ+NFP
      A(JP,IQQ)=A(JP,IQQ)+SUM1*CT(JP)+SUM2*ST(JP)
      A(JPI,IQQ)=A(JPI,IQQ)+SUM3*ST(JP)+SUM4*CT(JP)
  250 CONTINUE
  300 CONTINUE
      DO 450 JP=1,NPC
      JPI=JP+NPC
      EYN=CEXP(-UNO*YC(JP)*ANU)
      EYG=CEXP(-UNO*YC(JP)*GAM)
      DO 350 IR=1,NFP
      EYRN=CEXP(-UNO*YFP(IR)*ANU)*FAC/F
      ARG=KN*(XFP(IR)-XC(JP))
      CXK=COS(ARG)
      SXK=SIN(ARG)
      SUM1=-4.0*KN2*GAM*(Q*EYN+P*EYG)*CXK*EYRN
      SUM2=-2.0*UNO*KN*(R*EYN+P2*EYG)*SXK*EYRN
      SUM3=4.0*KN2*GAM*P*(EYN-EYG)*CXK*EYRN
      SUM4=-SUM2
      AC(JP,IR)=AC(JP,IR)+SUM1*CTC(JP)+SUM2*STC(JP)
      AC(JPI,IR)=AC(JPI,IR)+SUM3*STC(JP)+SUM4*CTC(JP)
      EYRN=EYRN*UNO
      SUM1=2.0*UNO*KN*GAM*(2.0*KN2*EYN-P*EYG)*SXK*EYRN
      SUM2=2.0*KN2*(2.0*GN*EYN+P*EYG)*CXK*EYRN
      AUC(JP,IR)=ALC(JP,IR)+SUM1
      AUC(JPI,IR)=ALC(JPI,IR)+SUM2
  350 CONTINUE
      DO 400 IQ=1,NFS
      EYQG=CEXP(-UNO*YFS(IQ)*GAM)*FAC/F
      ARG=KN*(XFS(IQ)-XC(JP))
      CXK=COS(ARG)
      SXK=SIN(ARG)
      SUM1=2.0*UNO*KN*(Q*P*EYN-R*EYG)*SXK*EYQG
      SUM2=4.0*KN2*ANU*P*(EYN-EYG)*CXK*EYQG
      SUM3=-2.0*UNO*KN*(P2*EYN+R*EYG)*SXK*EYQG
      SUM4=-SUM2
      IQQ=IQ+NFP
      AC(JP,IQQ)=AC(JP,IQQ)+SUM1*CTC(JP)+SUM2*STC(JP)
      AC(JPI,IQQ)=AC(JPI,IQQ)+SUM3*STC(JP)+SUM4*CTC(JP)
      EYQG=EYQG*UNO
      SUM1=2.0*KN2*(-P*EYN-2.0*GN*EYG)*CXK*EYQG
      SUM2=2.0*UNO*KN*ANU*(-P*EYN+2.0*KN2*EYG)*SXK*EYQG
      AUC(JP,IQQ)=ALC(JP,IQQ)+SUM1
      AUC(JPI,IQQ)=ALC(JPI,IQQ)+SUM2
  400 CONTINUE
  450 CONTINUE
  500 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Fig E.3. (Continuación)

```
      SUBROUTINE SYM(H)
      COMMON/SOL1/ A
      COMMON/SOL2/ B,NN
      COMMON/READ/LPF,LCP,NES,NPC,NINC,N,IND
      COMMON/LE/X(250),Y(250),T(250),XFP(25),YFP(25),
     *XPS(25),YPS(25),XC(100),YC(100),TC(100),H
      COMPLEX C(100,5),D(100,100),H(500)
      COMPLEX A(500,50),B(500,5),SUM,SUMB,ZERO,BALIN
C
C           EL SISTEMA DE ECUACIONES INICIAL DE M,NN QUEDA DE NN,NN
C           MULTIPLICA LA TRASPUESTA CONJUGADA DE A POR A Y POR B
C           H(L) ES EL PESO DEL PUNTO L
C
      ZERO=(0.0,0.0)
      DO 20 I=1,NN
      DO 10 J=1,NN
      SUM=ZERO
      DO 5 L=1,M
      BALIN=CONJG(A(L,I))
      SUM=SUM+BALIN*H(L)*A(L,J)
    5 CONTINUE
      D(I,J)=SUM
   10 CONTINUE
      DO 16 K=1,NINC
      SUMB=ZERO
      DO 15 L=1,M
      BALIN=CONJG(A(L,I))
      SUMB=SUMB+BALIN*H(L)*B(L,K)
   15 CONTINUE
      C(I,K)=SUMB
   16 CONTINUE
   20 CONTINUE
      DO 30 I=1,NN
      DO 25 J=1,NN
      A(I,J)=D(I,J)
   25 CONTINUE
      DO 26 K=1,NINC
      B(I,K)=C(I,K)
   26 CONTINUE
   30 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SOLLCO(KBAN)
      COMMON/READ/NPE,NFP,NES,NPC,NINC,NSER,IND
      COMPLEX A(500,50),B(500,5),ZERO,SUM
      COMMON/SOL1/ A
      COMMON/SOL2/ B,N
C
C       RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES COMPLEJO TRIANGULARIZANDO A
C           LA SOLUCION QUEDA EN B
C
      ZERO=(0.0,0.0)
      EPSI=1.0E-20
C
C           TRIANGULARIZACION DE A
C
      DO 10 I=1,N
      DO 9 J=I,N
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1)GO TO 5
      DO 4 K=1,I-1
    4 SUM=SUM+A(I,K)*A(K,J)
    5 A(I,J)=A(I,J)-SUM
      IF(J.EQ.N)GO TO 9
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1)GO TO 7
      DO 6 K=1,I-1
    6 SUM=SUM+A(J+1,K)*A(K,I)
    7 IF(CABS(A(I,I)).LE.EPSI) GO TO 1062
      A(J+1,I)=(A(J+1,I)-SUM)/A(I,I)
    9 CONTINUE
   10 CONTINUE
C
C           SUSTITUCION EN LA TRIANGULAR INFERIOR
C
      DO 11 KB=1,NINC
      DO 17 I=1,N
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1) GO TO 16
      DO 15 K=1,I-1
   15 SUM=SUM+A(I,K)*B(K,KB)
   16 B(I,KB)=B(I,KB)-SUM
   17 CONTINUE
C
C           DESPEJE DE LA TRIANGULAR SUPERIOR
C
      DO 22 I=1,N
      II=N-I+1
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1) GO TO 19
      DO 20 K=1,I-1
      KK=N-K+1
   20 SUM=SUM+A(II,KK)*B(KK,KB)
   19 IF(CABS(A(II,II)).LE.EPSI) GO TO 1062
      B(II,KB)=(B(II,KB)-SUM)/A(II,II)
   22 CONTINUE
   11 CONTINUE
      KBAN=0
      GO TO 1063
 1062 KBAN=1
 1063 RETURN
      END
```

Fig E.3. (Continuación)

```
      SUBROUTINE HANKEL (X,IC)
      COMPLEX HO,H1,H2,C,A,E,E2,P
      COMMON /FFH/ HO,H1,H2
      IF(X)50,50,60
   60 EPS1=1.0E-06
      EPS2=1.0E-16
      PI=3.141592653
      UEPI=1.0/PI
      IF(X.LE.10.0)GO TO 20
      C=(0.0,0.125)/X
      K=2
      P=C*C
      A=4.5*P
      P=7.5*P
      HO=1.0+C+A
      H1=1.0-3.0*C-P
   10 I=4*K
      K=K+1
      A=A*C*(I+1.0/K)
      P=P*C*(I-3.0/K)
      HO=HO+A
      H1=H1-P
      IF(ABS(AIMAG(P)).GT.EPS1) GO TO 10
      AR=0.25*PI-X
      E=SQRT(2.0*UEPI/X)*CMPLX(COS(AR),SIN(AR))
      HO=HO*E
      H1=H1*E*(0.0,1.0)
      GO TO 50
   20 ZH=X/2.0
      CC=-ZH*ZH
      E=CMPLX(0.0,UEPI)
      E2=E*2.0
      A=1.0-E2*(0.577215664901533+ALOG(0.5*X))
      PP=1.0
      K=1
      HO=A
      H1=A+E*(1.0-1.0/CC)
   30 A=A+E2/K
      PP=PP*CC
      HO=HO+A*PP
      K=K+1
      PP=PP/(K*K)
      H1=H1+(A-K*E)*PP
      IF(ABS(PP).GT.EPS2) GO TO 30
      H1=H1*ZH
   50 CONTINUE
      H1=-H1
      IF(IC.EQ.1)RETURN
      H2=HO-H1/X
      RETURN
      END


      SUBROUTINE SOLUCO(KBAN)
      COMPLEX A(500,60),B(500),ZERO,SUM
      COMMON/SCL1/ A
      COMMON/SCL2/ B,N
C
C       RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES COMPLEJO TRIANGULARIZANDO A
C             LA SOLUCION QUEDA EN B
C
      ZERO=(0.0,0.0)
      EPS1=1.0E-20
C
C             TRIANGULARIZACION DE A
C
      DO 10 I=1,N
      DO 9 J=I,N
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1)GO TO 5
      DO 4 K=1,I-1
    4 SUM=SUM+A(I,K)*A(K,J)
    5 A(I,J)=A(I,J)-SUM
      IF(J.EQ.N)GO TO 9
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1)GO TO 7
      DO 6 K=1,I-1
    6 SUM=SUM+A(J+1,K)*A(K,I)
    7 IF(CABS(A(I,I)).LE.EPS1) GO TO 1062
      A(J+1,I)=(A(J+1,I)-SUM)/A(I,I)
    9 CONTINUE
   10 CONTINUE
C
C           SUSTITUCION EN LA TRIANGULAR INFERIOR
C
      DO 17 I=1,N
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1) GO TO 16
      DO 15 K=1,I-1
   15 SUM=SUM+A(I,K)*B(K)
   16 B(I)=B(I)-SUM
   17 CONTINUE
C
C             DESPEJE DE LA TRIANGULAR SUPERIOR
C
      DO 22 I=1,N
      II=N-I+1
      SUM=ZERO
      IF(I.EQ.1) GO TO 19
      DO 20 K=1,I-1
      KK=N-K+1
   20 SUM=SUM+A(II,KK)*B(KK)
   19 IF(CABS(A(II,II)).LE.EPS1) GO TO 1062
      B(II)=(B(II)-SUM)/A(II,II)
   22 CONTINUE
      KBAN=0
      GO TO 1063
 1062 KBAN=1
 1063 RETURN
      END
```

Fig E.3. (Continuación)