0200

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

EL METODO VARIACIONAL DE LA ENERGIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

PRESENTA

GONZALO ALDUNCIN GONZALEZ

MEXICO, D. F. FEBRERO 1975

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

R E C O N O C I M I E N T O

El presente estudio es parte de la investigación básica en apoyo a la docencia que viene realizando la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

El autor expresa su gratitud a los Profesores M. en I. Rafael Campusano Santana y Dr. Ismael Herrera Revilla por sus enseñanzas acerca del valor y naturaleza de las teorías variacionales. Así mismo al Dr. Javier Salazar Resines, quien fomentó y estimuló el espíritu de este trabajo. A la Srita. Lucía Avilés por su cuidadoso y eficiente trabajo mecanográfico.

I N D I C E

INTRODUCCION 1

I: ANALISIS Y POTENCIALIDAD DE CAMPOS EN ESPACIOS DE BANACH 5

1. Curva abstracta e integral curvilínea 7
2. Diferencial y derivada de un operador 11
3. Condiciones necesarias y suficientes de potencialidad 18

II: EL PROBLEMA DEL CALCULO DE VARIACIONES 27

4. Valores extremos de una funcional 29
5. Condiciones necesarias y suficientes de extremo 33
6. Condiciones de extremo de una funcional cuadrática 38
7. Espacios de energía 42
8. Existencia del mínimo de una funcional cuadrática 45

III: EL METODO VARIACIONAL DE LA ENERGIA 51

9. Potencialidad de campos distributivos 53
10. El método variacional de la energía 56
11. Sucesiones minimizantes 62
12. Formulación variacional de un problema de valores en la frontera 64

IV: PROBLEMA VARIACIONAL DE LA FUNCIONAL

$F(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}A_{ik}(x)u,_i u,_k + \frac{1}{2}C(x)u^2 - f(x)u\right]dx - \int_\Gamma g_2(x)\,u\,d\Gamma$ 69

13. El caso $g_2(x) \equiv 0$

14. Condiciones naturales y principales de frontera 77

V: FORMULACION VARIACIONAL DE LOS PROBLEMAS DE DIRICHLET Y NEWMANN 83

15. El problema de valores en la frontera 85

16. El problema de Dirichlet 89

17. El espacio de energía H_{U_1} 93

18. El problema de Newmann 95

REFERENCIAS 101

I N T R O D U C C I O N

Al operador de una ecuación que gobierna algún problema de la física matemática, el cual establece una correspondencia entre elementos de dos espacios de funciones, se le puede entender como la transformación que define un campo de funciones sobre su dominio de definición. Ahora bien, en términos de una forma bilineal, a este operador se le puede considerar como una transformación de - funciones en funcionales lineales. Entonces, el campo, así definido, es un campo de funcionales lineales, cuyo potencial, si éste existe, es la funcional de un principio variacional del problema en estudio. Esto es, todo punto extremo del potencial es un punto crítico del mismo, o sea, es un punto en el cual el gradiente del potencial (el operador que define el campo) se anula.

Así pues, el método variacional natural para estudiar la existencia, unicidad y naturaleza de la solución de una ecuación operacional, una vez establecida la potencialidad del campo y reconstruido su potencial, es estudiar los puntos críticos del potencial. Es claro que la selección que se haga de la forma bilineal condiciona la potencialidad del campo.

Los puntos esenciales del método, las condiciones necesarias y suficientes de potencialidad y la reconstrucción del potencial, han sido ya estudiados en su totalidad por Vainberg [1].

En este contexto, el método de la energía es el método variacional natural en el estudio de problemas lineales. Aquí, la simetría del operador resulta ser la condición de potencialidad. Magri [2] demuestra que toda ecuación operador lineal admite una formulación variacional, y da la manera explícita de construir la forma bilineal que lo permite.

La formulación variacional de un problema también da lugar a poder generar soluciones aproximadas en términos de los así llamados procesos variacionales. Estos procesos se diferencian unos de otros en cuanto a la forma de construir una sucesión minimizante del potencial en estudio. Los principales procesos variacionales son el de W. Ritz [3,4,5] y L. V. Kantorovich [3,7], los cuales transforman el problema del extremo del potencial en un problema de sistemas finitos de ecuaciones algebraicas y diferenciales, respectivamente.

La aportación del presente estudio es el integrar el método de la energía, ampliamente estudiado por Mikhlin [3,4,6], dentro de la teoría general de Vainberg [1].

En el capítulo I se presentan los conceptos y resultados del cálculo integral y diferencial en espacios lineales que serán utilizados en el desarrollo del tema. Se establecen las condiciones de potencialidad de campos en espacios de Banach y la manera explícita de reconstruir el potencial de un campo.

Para estudiar la relación que guarda un campo potencial con el campo escalar definido por su potencial, en el capítulo II se establecen las condiciones necesarias y suficientes de extremo de una funcional. Los teoremas de existencia y unicidad son estudiados al tratar el caso particular de funcionales cuadráticas en espacios de Hilbert. Para esto, se extiende a la funcional cuadrática a su correspondiente espacio de energía.

De aquí, en el capítulo III, se procede a analizar la potencialidad de campos distributivos, mostrándose que los conceptos de simetría y potencialidad son equivalentes y que el potencial del campo resulta ser una funcional cuadrática. Construyendo la funcional de energía del campo, y haciendo uso de los resultados del capítulo II, se da origen al método variacional de la energía. Por último, se introduce el concepto de sucesión minimizante y se muestra que por definición ésta converge en energía a la solución generalizada del problema. En conclusión, se dan los lineamientos generales en la formulación variacional de problemas lineales de valores en la frontera.

Como aplicación del método de la energía, en el capítulo V se estudia variacionalmente a los problemas de Dirichlet y Newmann de una expresión diferencial de segundo orden del tipo elíptico.

Los potenciales de estos problemas son estudiados primeramente, desde el punto de vista del cálculo de variaciones, en el capítulo IV.

FALTA PAGINA

No. 5

I: ANALISIS Y POTENCIALIDAD DE CAMPOS EN ESPACIOS DE BANACH

1. Curva abstracta e integral curvilínea.

Se entiende por función abstracta un operador definido en un espacio Euclideano m-dimensional y con valores en un espacio general de Banach.

Sean $v(t)$ y $u(t)$ dos funciones abstractas en la recta numérica R^1 y cuyos valores, respectivamente, son elementos de los espacios reales de Banach B_v y B_u. Consideremos al producto por la derecha de los elementos $v \in B_v$ por los elementos $u \in B_u$, el cual posee las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad v\,u \in B_w,\\
&2)\quad (a v_1+bv_2)u = av_1u+bv_2u,\\
&3)\quad v(au_1+bu_2) = avu_1+bvu_2,\\
&4)\quad ||vu|| \leq ||v||\ ||u||,
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

en donde B_w es un espacio real de Banach, a y b son cualesquiera números reales, y $v, v_1, v_2 \in B_v$, $u, u_1, u_2 \in B_u$ son elementos arbitrarios. Es importante señalar el hecho de que, todo producto por la derecha con las propiedades (1.1) es equivalente a un operador bilineal acotado $w = A(v, u) = v\,u$, de B_v y B_u en B_w, de norma menor o igual a la unidad: $||A|| \leq 1$.

Ahora bien, si las funciones $v(t)$ y $u(t)$ son acotadas en el intervalo real $[a, b]$, y está definido entre ellas el producto (1.1), entonces, subdividiendo al intervalo $[a, b]$ en los puntos $t_o = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, su correspondiente suma de Stieltjes queda definida por:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} v(\gamma_k) \left[u(t_{k+1}) - u(t_k)\right] ; \quad \gamma_k \in [t_k, t_{k+1}]. \tag{1.2}$$

Definición 1.1. Sea $\lambda = \max_k (t_{k+1} - t_k)$. Si el $\lim_{\lambda \to 0} S = I$ existe, entonces al límite $I \in B_w$ se le llama la integral de Stieltjes de la función $v(t)$ por la función $u(t)$, y se le denota por

$$\int_a^b v(t)\,du(t). \tag{1.3}$$

Es condición suficiente, para que la integral (1.3) exista, que la función abstracta $v(t)$ sea continua en el intervalo $[a,b]$ y la función abstracta $u(t)$ sea de variación acotada en $[a,b]$.*

Una función abstracta es de variación acotada, si su variación total, la cota superior de todas las posibles sumas $\Sigma||u(t_{k+1}) - u(t_k)||$,

* [1] Teorema 2.1, p. 25.

es acotada.

Definición 1.2. Al conjunto $L \subset B_u$ de los valores de una función abstracta simplemente valuada $u(t)$, definida en el intervalo $[a, b]$, se le denomina curva abstracta en B_u y, a la función $u(t)$, representación de la curva L. Los elementos $u(a)$ y $u(b)$ son, respectivamente, el punto inicial y el punto final de la curva abstracta.

Consideraremos como otras representaciones de una curva $L \subset B_u$ a aquéllas que resulten de substituir $t = \psi(\tau)$ en su representación $u(t)$, donde $\psi(\tau)$ es una función continua y creciente del argumento real $\tau \varepsilon [\alpha, \beta]$ y $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$. De esta forma, la variación total de la función $u(t)$ en $[a, b]$ es igual a la variación total de la función $u(\psi[\tau])$ en $[\alpha, \beta]$ y, de la definición de integral de Stieltjes 1.1,

$$\int_a^b v(t)du(t) = \int_\alpha^\beta v(\psi[\tau])du(\psi[\tau]), \tag{1.4}$$

si la primer integral existe.

Definición 1.3. La curva abstracta L se llama regular, si sus representaciones son funciones continuas de variación acotada en sus intervalos de definición.

Definición 1.4. Sea L una curva regular contenida en el conjunto abierto y conexo $U \subset B_u$ cuya representación, $u(t)$, está definida en el intervalo $[a, b]$. Considerando al operador continuo $v = A(u)$ de B_u en B_v y asumiendo que el producto por la derecha $v\ u$ resulta ser de la clase (1.1), entonces, si $v(t)$ es continua, la integral de Stieltjes

$$\int_a^b Au(t)d\ u(t) \tag{1.5}$$

existe. En cuanto que la integral (1.5) depende de la forma de la curva $L \subset U$, a ésta se le denomina integral curvilínea del campo Au.

De la conclusión (1.4), la integral curvilínea (1.5) no depende de la representación particular de la curva L, por lo que, también se le escribe en la forma

$$\int_L A\ u\ d\ u. \tag{1.6}$$

Consideremos ahora el siguiente caso. Sea A un operador el cual posee las propiedades, tales que, la integral curvilínea (1.6) no depende de la forma de la curva L, sino sólo de sus puntos extremos $u_0 = u(a)$ y $u_1 = u(b)$. Entonces, puesto que

$$\int_b^a A\ u(t)\ d\ u(t) = -\int_a^b A\ u(t)\ d\ u(t), \tag{1.7}$$

se concluye: toda integral curvilínea independiente de la trayectoria de integración, a lo largo de cualquier curva cerrada $(u_1 = u_0)$, es igual al elemento cero del espacio B_w.

Definición 1.5. Si la integral curvilínea (1.6) es independiente de la trayectoria de integración, para toda curva L contenida en un conjunto abierto y simplemente conexo $U \subset B_u$, entonces existe un operador F tal que

$$\int_{u_0}^{u_1} A\, u\, d\, u = F(u_1) - F(u_0), \quad \forall\, u_0, u_1 \in U. \tag{1.8}$$

Al operador F de B_u en B_w se le llama el potencial del campo A u, y al operador A de B_u en B_v el gradiente del potencial F. En este caso, al campo Au se le dice ser potencial en el conjunto U.

Antes de pasar a estudiar las condiciones necesarias y suficientes para que un campo sea potencial, o sea, para que la integral curvilínea (1.6) dependa sólo de los puntos extremos de la curva L, y no de su forma, introduzcamos los conceptos diferencial y derivada de un operador, así como algunas de sus propiedades, las cuales nos serán de utilidad.

2. Diferencial y derivada de un operador.

Expresemos primeramente lo que se entenderá por un operador lineal.

Definición 2.1. Se dice que el operador A de B_u en B_v es lineal, si posee las siguientes propiedades:

1) su dominio de definición $D(A)$ es todo el espacio B_u;

2) es aditivo: $A(u+h) = Au + Ah$, para todo $u, h \varepsilon B_u$;

3) es homogéneo: $A(au) = aAu$, para toda constante a y todo $u \varepsilon B_u$; y

4) existe una constante $C \geq 0$ tal que $||Au|| \leq C||u||$ para todo $u \varepsilon B_u$.

Si A es un operador lineal, al menor valor de C, suficiente para la condición 4, se le llama la norma del operador A y se le denota por $||A||$. Consecuentemente,

$$||A|| = \sup_{u \varepsilon B_u, ||u|| = 1} ||Au||. \tag{2.1}$$

Definición 2.2. Si en algún elemento $u \varepsilon B_u$ y para todo $h \varepsilon B_u$ el

$$\lim_{t \to 0} \frac{A(u+th) - A(u)}{t} = V\, A(u,h) \tag{2.2}$$

existe en el sentido de convergencia fuerte, entonces al operador $V\, A(u,h)$ se le llama la diferencial de Gateaux del operador A en el punto u, en la dirección h.

Supóngase que la diferencial de Gateaux del operador A en el punto u, la cual por definición es un operador homogéneo en

h, es lineal en la dirección h. En este caso, se conviene en denotarla por $D\,A(u,h)$, la cual, para u fijo, es un elemento del espacio de Banach B_{uv} constituido por los operadores lineales de B_u en B_v. A este operador lineal se le llama derivada de Gateaux del operador A en el punto u y se le denota por $A'(u)$. De este modo, toda diferencial lineal de Gateaux es de la forma

$$D\,A(u,h) = A'(u)h, \qquad h\varepsilon B_u, \tag{2.3}$$

donde el operador A' de B_u en B_{uv} es la derivada de Gateaux del operador A.

Definición 2.3. Si para el punto $u\varepsilon B_u$ existe un operador $d\,A(u,h)$ lineal en $h\varepsilon B_u$, tal que,

$$A(u+h)-A(u) = d\,A(u,h)-w(u,h), \tag{2.4}$$

donde el $$\lim_{||h||\to 0} \frac{||w(u,h)||}{||h||} = 0, \tag{2.5}$$

entonces al operador lineal $d\,A(u,h)$ se le llama la diferencial de Frechet del operador A en el punto u, y a $w(u,h)$ el residuo de la diferencial.

Así pues, para u fijo, $d\,A(u,.)$ es un operador lineal del espacio B_{uv} denominado derivada de Frechet del operador A en el punto u. Entonces, toda diferencial de Frechet es de la forma

$$d\ A(u,h) = A'(u)h, \qquad h \varepsilon B_u, \tag{2.6}$$

donde el operador A' de B_u en B_{uv} es la derivada de Frechet del operador A.

Asumamos que en el punto $u \varepsilon B_u$ existe el operador lineal diferencial de Frechet del operador A. De las definiciones 2.3 y 2.2,

$$\frac{A(u+th)-A(u)}{t} = d\ A(u,h) - \frac{w(u,th)}{t} \underset{t\to 0}{\to} D\ A(u,h),$$

esto es, si la diferencial de Frechet $d\ A(u,h)$ existe en el punto $u \varepsilon B_u$, entonces la diferencial de Gateaux $V\ A(u,h)$ también existe, es lineal en h, y $D\ A(u,h) = d\ A(u,h)$. Así mismo, de las relaciones (2.6) y (2.3), la existencia de la derivada de Frechet implica la existencia de la derivada de Gateaux. Para poder establecer las condiciones bajo las cuales estas implicaciones se cumplen en su sentido inverso, introduzcamos la fórmula de Lagrange para funcionales (operadores con valores en la recta numérica) y operadores.

Lema 2.1. Si la diferencial de Gateaux $V\ F(u,h)$ de la funcional F existe en todo punto u de algún conjunto convexo $U \subset B_u$, entonces la fórmula de Lagrange

$$F(u+h)-F(u) = V\ F(u+\theta h,h), \qquad \theta \varepsilon (0,1), \tag{2.7}$$

es válida en cualesquiera puntos u, $u+h \varepsilon U$.

Demostración. Definiendo la función $\psi(t) = F(u+th)$, y haciendo uso de la fórmula de Lagrange para funciones:

$$\psi(b)-\psi(a) = (b-a)\psi'(a+\theta[b-a]), \qquad \theta = \frac{c-a}{b-a} \varepsilon (0,1), c\varepsilon(a,b), \tag{2.8}$$

se sigue directamente que

$$F(u+h)-F(u) = \psi'(\theta), \quad \theta\varepsilon(0,1), \quad u, u+h\varepsilon U,$$

donde $$\psi'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{F(u+\theta h+\Delta\theta h)-F(u+\theta h)}{\Delta\theta} = V\, F(u+\theta h, h)$$

y $u+\theta h\varepsilon\, U$.

Lema 2.2. Si la diferencial de Gateaux $V\,A(u,h)$ del operador A existe en todo punto u de algún conjunto convexo $U \subset B_u$, entonces la fórmula de Lagrange

$$(A(u+h)-A(u), e) = (V\,A(u+\theta h, h), e), \quad \theta\varepsilon(0,1), \tag{2.9}$$

es válida en cualesquiera puntos u, $u+h\varepsilon\, U$, donde e es una funcional lineal arbitraria, de norma unitaria, del espacio conjugado B_v^*.

Demostración. Poniendo la funcional lineal $e\varepsilon B_v^*$ como $\psi(u,e) = (A\,u,e)$, su diferencial de Gateaux en el punto $u \,\varepsilon\, U$, en la dirección $h\varepsilon B_u$, resulta ser

$$V\psi(u,e,h) = \lim_{t\to 0} \frac{\psi(u+th,e)-\psi(u,e)}{t} = (V\ A(u,h),e),$$

y de la fórmula de Lagrange para funcionales (2.7), la cual es válida, se concluye (2.9):

$$\psi(u+h,e)-\psi(u,e) = V\psi(u+\theta h,e,h) = (V\ A(u+\theta h,h),e), \theta\varepsilon(0,1).$$

Teorema 2.1. Si la derivada de Gateaux A' del operador A existe en alguna vecindad $0(u)$ del punto u y es continua en u, entonces $d\ A(u,h)$ existe y es igual a $D\ A(u,h)$: A' es una derivada de Frechet.

Demostración. Sea h tal que $u+h\varepsilon 0(u)$. Definiendo la funcio nal

$$(w(u,h),e) = (A(u+h)-A(u),e)-(A'(u)h,e),$$

donde $A'(u)h = D\ A(u,h)$ y e es cualquier funcional unitaria del espacio conjugado B^*_V, de la fórmula de Lagrange (2.9) se obtiene:

$$(w(u,h),e) = ([A'(u+\theta h)-A'(u)]h,e), \ \theta\varepsilon(0,1).$$

Tomando la funcional arbitaria $e\varepsilon B^*_V$ de manera, que para h fijo,

$$|(w(u,h),e)| = ||w(u,h)||,$$

entonces, puesto que por hipótesis A' es continua en u,

$$\frac{||w(u,h)||}{||h||} \leq ||A'(u+\theta h)-A'(u)|| \underset{||h||\to 0}{\to} 0.$$

La condición (2.5) se satisface y, consecuentemente, $D\,A(u,h) = d\,A(u,h)$.

Por último, establezcamos el siguiente hecho. Sea A un operador con diferencial de Gateaux en el punto u_o, en la dirección h. Por definición

$$\lim_{t\to 0}||\frac{1}{t}[A(u_o+th)-A(u_o)]-V\,A(u_o,h)|| = 0,$$

esto es, dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que la desigualdad

$$||\frac{1}{t}[A(u_o+th)-A(u_o)]-V\,A(u_o,h)|| < \varepsilon$$

se satisface en todo punto $u = u_o+th$ de la vecindad $0(u_o,\delta)$. Así, para toda $u\varepsilon 0(u_o,\delta)$

$$|t|\{||V\,A(u_o,h)||-\varepsilon\}<||A(u_o+th)-A(u_o)||<|t|\{||\,V\,A(u_o,h)||+\varepsilon\}$$

y, tomando el límite para cuando $t \to 0$, se concluye: si el operador A posee diferencial de Gateaux en el punto u_o, entonces A es un operador continuo en el punto u_o, en toda dirección h:

$$\lim_{t\to 0}||A(u_o+th)-A(u_o)|| = 0. \qquad (2.10)$$

3. Condiciones necesarias y suficientes de potencialidad.

Estudiemos las condiciones necesarias y suficientes para que, dado un operador continuo A, la integral curvilínea (1.5) sea independiente de la trayectoria de integración.

Teorema 3.1*. Sea A un operador continuo definido en un conjunto abierto simplemente conexo $U\subset B_u$ y con valores en el espacio de operadores lineales B_{uw}. Para que la integral curvilínea

$$\int_L A\ u\ d\ u \qquad (3.1)$$

sea independiente de la forma de la curva $L \subset U$, es necesario y suficiente que el operador A sea la derivada de algún operador F diferenciable en U y con valores en B_w.

Necesidad. Por hipótesis (3.1) es independiente de la trayec - toria de integración en $U \subset B_u$. Entonces existe un operador F, de B_u en B_w, tal que

$$\int_{u_o}^{u} A\ u\ d\ u = F(u)-F(u_o), \qquad u_o, u\in U, \qquad (3.2)$$

donde u_o y u son los puntos extremos de la curva regular $L \subset U$. Probemos que el operador A es la derivada del operador F: $A = F'$. Tomemos como curva L al intervalo que une el punto

*[1] Teorema 6.1 (M.K. Gavurin), p. 60.

$u_o = u(t_o)$ con el punto $u = u(t)$,

$$u(\tau) = u(t)+(\tau-t)h, \qquad \tau\varepsilon[t_o, t],$$

y construyamos la diferencial de Gateaux de F. Se tiene entonces que

$$\frac{1}{\Delta t}[F(u+\Delta th)-F(u)] = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} Au(\tau)du(\tau), \qquad \tau\varepsilon[t,t+\Delta t],$$

donde Δt es tal que $u+\Delta th \varepsilon U$, y, de la identidad

$$A(u[t])h = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} A(u[t])du(\tau),$$

se obtiene:

$$\frac{1}{\Delta t}[F(u+\Delta th)-F(u)]-A(u)h = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\{A(u[\tau])-A(u[t])\}du(\tau). \quad (3.3)$$

Tomando ahora el límite de la norma de (3.3) cuando $\Delta t \to 0$, teniendo en cuenta la desigualdad

$$\left\|\int_a^b v(\tau)du(\tau)\right\| \leq \int_a^b ||v(\tau)||\,d\overset{\tau}{\underset{a}{V}}u(\tau) \leq \max_{[a,b]}||v(\tau)||\overset{b}{\underset{a}{V}}u(\tau),$$

donde, si la función $u(\tau)$ satisface la condición de Lipschitz $||u(\tau_1)-u(\tau_2)||\leq M|\tau_1-\tau_2|$, $\forall\tau_1,\tau_2\varepsilon[a,b]$, su variación total $\overset{b}{\underset{a}{V}}u(\tau) \leq M|b-a|$, se concluye que

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left\|\frac{1}{\Delta t}\left[F(u+\Delta th)-F(u)\right]-A(u)h\right\| \leq \lim_{\Delta t\to 0}\{\max_{\tau\varepsilon[t,t+\Delta t]}\|A(u[\tau])-A(u[t])\|\cdot\|h\|\}.$$

En este caso, puesto que $u(\tau)$ posee derivada acotada en $[t,t+\Delta t]$, $u(\tau)$ satisface la condición de Lipschitz*. Ahora bien, $A(u[\tau])$ es una función abstracta continua en $[t,t+\Delta t]$,

$$\lim_{\Delta t\to 0} \| A(u[\tau])-A(u[t])\| = 0,$$

y, de la definición 2.2, $A(u)h = D\,F(u,h) = F'(u)h$.

Suficiencia. El operador continuo A es la derivada de un operador F diferenciable en U. Luego entonces, tomando la integral curvilínea (3.1) a lo largo del intervalo arbitrario en U,

$$u(t) = u_0+t(u_1-u_0), \qquad t\varepsilon[0,1],$$

se obtiene:

$$\int_L A\,u\,d\,u = \int_0^1 A(u[t])du(t) = \int_0^1 F'(u[t])(u_1-u_0)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(u[t])dt.$$

Por lo tanto, puesto que la función abstracta $F(u[t])$ posee derivada continua,

$$\int_L A\,u\,d\,u = F(u_1)-F(u_0)$$

a lo largo de cualquier intervalo $L \subset U$ y, consecuentemente, la integral curvilínea (3.1) es independiente de la trayectoria**.

*[1] Teorema 1.5, p.21.

**[1] Corolario 2.1, p.34.

Definición 3.1. Se dice que un operador A de B_u en B_{uw} es un operador potencial en algún conjunto $U \subset B_u$, si existe un operador F de B_u en B_w con diferencial lineal de Gateaux en todo punto $u \in U$, tal que, $F' = A$. Al operador potencial A se le denomina el gradiente del operador F.

Definición 3.2. Al gradiente A del operador F se le dice ser fuertemente potencial, si la derivada de F es una derivada de Frechet. En este caso, al gradiente A se le llama el gradiente fuerte del operador F.

Entonces, del teorema 2.1, un operador potencial continuo es un operador fuertemente potencial y, un gradiente continuo es un gradiente fuerte.

De acuerdo a estas definiciones, el teorema 3.1 puede ser expresado de la siguiente manera: Para que la integral curvilínea (3.1) sea independiente de la trayectoria de integración en U, es necesario y suficiente que el operador continuo A sea fuertemente potencial en U, o sea, que exista un operador F diferenciable en U tal que grad $F = A$.

De la prueba de necesidad del teorema 3.1 se sigue que el potencial del operador A está dado en forma general por la fórmula (3.2). Así pues, puesto que ésta no depende de la forma de la curva L, tomando al intervalo que une los puntos u_o y u: $u(t) = u_o+t(u-u_o)$, $t\varepsilon[0, 1]$, y asumiendo que el conjunto U

es convexo, la fórmula (3.1) toma la forma

$$F(u) = F(u_o)+\int_0^1 A(u_o+t[u-u_o])(u-u_o)dt, \qquad u_o,u\varepsilon U. \tag{3.4}$$

Por lo tanto, la definición 1.5, dada con anticipación, queda formalmente justificada. La fórmula (3.4) nos permite reconstruir el potencial de cualquier campo $A\,u$, fuertemente potencial en un conjunto convexo $U C B_u$.

Pasemos ahora a establecer la condición necesaria y suficiente para la independencia en la trayectoria de integración de la integral curvilínea de un campo, en el caso particular en que el operador continuo A es diferenciable.

Teorema 3.2. Sea A un operador definido en un conjunto abierto convexo $U\ C\ B_u$ con valores en el espacio de operadores lineales B_{uw}, el cual posee una diferencial lineal de Gateaux $DA(u,h)$ en todo punto $u\ \varepsilon\ U$, y sea el operador bilineal $DA(u,h_1)(h_2)$ continuo en todo $u\ \varepsilon\ U$. Para que la integral curvilínea

$$\int_L A\,u\,d\,u \tag{3.5}$$

sea independiente de la trayectoria de integración en U, es necesario y suficiente que el operador bilineal $DA(u,h_1)(h_2)$ sea simétrico para todo $u\ \varepsilon\ U$:

$$DA(u,h_1)(h_2) = DA(u,h_2)(h_1), \qquad \forall h_1, h_2 \varepsilon B_u. \tag{3.6}$$

Necesidad. La integral (3.5) no depende de la forma de la curva $L \subset U$ sino sólo de sus puntos extremos, entonces, su valor a lo largo de cualquier curva cerrada es igual al elemento cero del espacio B_W. Sean los intervalos en U,

$$u_1(t) = u+tah_1, \qquad u_2(t) = u+ah_1+tbh_2,$$

$$u_3(t) = u+tbh_2, \qquad u_4(t) = u+bh_2+tah_1, \quad t\varepsilon[0,\ 1],$$

los cuales constituyen a la curva cerrada $u_1(t)$, $u_2(t)$, $-u_4(t)$, $-u_3(t)$ contenida en algún plano (definido por h_1 y h_2) que pasa por el punto u. Así,

$$\int_0^1 A(u_1[t])du_1(t)+\int_0^1 A(u_2[t])du_2(t) = \int_0^1 A(u_3[t])du_3(t)+\int_0^1 A(u_4[t])du_4(t),$$

pero del resultado concluído en (2.10) el operador A es continuo en todo punto $u \varepsilon U$ y, del teorema 3.1, A es la derivada continua de algún operador F diferenciable en U y con valores en B_W. Luego entonces,

$$[F(u+ah_1)-F(u)] + [F(u+ah_1+bh_2)-F(u+ah_1)]$$

$$= [F(u+bh_2)-F(u)] + [F(u+bh_2+ah_1)-F(u+bh_2)],$$

y poniendo

$$\Upsilon(u) = F(u+ah_1)-F(u), \qquad \psi(u) = F(u+bh_2)-F(u), \tag{3.7}$$

se obtiene,

$$\gamma(u+bh_2)-\gamma(u) = \psi(u+ah_1)-\psi(u). \tag{3.8}$$

Aplicando ahora la fórmula de Lagrange para operadores (2.9) en (3.8),

$$b(D\gamma(u+\theta_1 bh_2,h_2), \quad e) = a\ (D\psi(u+\theta_2 ah_1,h_1), \quad e),$$

donde e es cualquier funcional unitaria del espacio conjugado B_W^*, y, considerando en esta última igualdad las definiciones (3.7) y el que $F' = A$, se obtiene,

$$b([A(u+\theta_1 bh_2+ah_1)-A(u+\theta_1 bh_2)]h_2, \quad e)$$

$$= a([A(u+\theta_2 a h_1+bh_2)-A(u+\theta_2 ah_1)]h_1, \quad e).$$

Nuevamente aplicando la fórmula de Lagrange,

$$(DA(u+\theta_1 bh_2+\theta_3 ah_1,h_1)h_2, \quad e) = (DA(u+\theta_2 ah_1+\theta_4 bh_2,h_2)h_1, \quad e),$$

y por lo tanto

$$DA(u+\theta_1 bh_2+\theta_3 ah_1,h_1)(h_2) = DA(u+\theta_2 ah_1+\theta_4 bh_2,h_2)(h_1). \tag{3.9}$$

Finalmente, puesto que $DA(u,h_1)(h_2)$ es continuo en todo $u \in U$, al tomar el límite en (3.9) para cuando $a \to 0$ y, posteriormente, para cuando $b \to 0$, se concluye en la condición necesaria (3.6).

Suficiencia. El operador bilineal $DA(u,h_1)(h_2)$ es simétrico para todo $u \in U$. Construyamos la diferencial de Gateaux del operador F definido por (3.4) y, haciendo uso de la relación (3.6), probemos que el operador continuo A es la derivada del operador F. Para esto, tomando la diferencia de los valores de F en los puntos $u+h$, $u \in U$, se obtiene

$$F(u+h)-F(u) = \int_0^1 A(u(t)+th)h\,dt + I, \tag{3.10}$$

donde

$$I = \int_0^1 [A(u(t)+th)-A(u(t))](u-u_o)\,dt,$$

$$u(t) = u_o+t(u-u_o), \quad t \in [0, 1].$$

Escribiendo a I en la forma

$$I = \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} A(u(t)+sh)(u-u_o)\,ds = \int_0^1 dt \int_0^t DA(u(t)+sh,h)(u-u_o)\,ds,$$

de la hipótesis (3.6), intercambiando el orden de integración,

$$I = \int_0^1 ds \int_0^1 DA(u(t)+sh,u-u_o)h\,dt = \int_0^1 ds \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} A(u(t)+sh)h\,dt,$$

$$I = \int_0^1 [A(u+sh)-A(u(s)+sh)]h\,ds.$$

Substituyendo a esta última expresión de I en (3.10), y aplicando el teorema del valor medio,

$$F(u+h)-F(u) = \int_0^1 A(u+sh)h\,ds = A(u+\theta h)h, \quad \theta \in (0,1),$$

y, concecuentemente, puesto que A es un operador continuo en U,

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+th)-F(u)}{t} = DF(u,h) = F'(u)h = A(u)h,$$

esto es, A es la derivada continua del operador F diferenciable en U y con valores en B_w. Entonces, del teorema 3.1, la integral curvilínea (3.5) es independiente de la trayectoria de integración en U.

De los teoremas 3.1 y 3.2 concluimos con el siguiente hecho.

Teorema 3.3. Supóngase que las siguientes condiciones son satisfechas:

1. A es un operador de B_u en el espacio de operadores lineales B_{uw}.
2. A posee una diferencial lineal de Gateaux $DA(u,h)$ en todo punto u de algún conjunto abierto convexo $U \subset B_u$.
3. El operador bilineal $DA(u,h_1)(h_2)$ es continuo en todo punto $u \in U$.

Entonces, para que el operador A sea potencial en el conjunto U, es necesario y suficiente que el operador bilineal $DA(u,h_1)(h_2)$ sea simétrico para todo $u \in U$:

$$DA(u,h_1)(h_2) = DA(u,h_2)(h_1), \quad \forall h_1,h_2 \in B_u. \tag{3.11}$$

FALTA PAGINA

No. 27

II : EL PROBLEMA DEL CALCULO DE VARIACIONES

4. Valores extremos de una funcional.

Sea la funcional real F cuyo dominio de definición $D(F)$ está contenido en algún espacio de Banach B.

Definición 4.1. Se dice que el punto $u_o \varepsilon D(F)$ es un punto extremo absoluto de la funcional F, si alguna de las siguientes desigualdades se satisface en todo $u \varepsilon D(F)$:

$$F(u) \geq F(u_o), \qquad F(u) \leq F(u_o). \tag{4.1}$$

Así mismo, se dice que u_o es un punto extremo relativo, si alguna de las desigualdades (4.1) se satisface en aquellos puntos suficientemente cercanos a u_o.

Si la desigualdad satisfecha por un punto extremo es la primera o la segunda de (4.1), entonces se dice, respectivamente, que la funcional F tiene en ese punto un valor mínimo o un valor máximo.

Nuestro interés es estudiar el problema del valor extremo de una funcional, o problema del cálculo de variaciones, el cual consiste en establecer las condiciones necesarias y suficientes de extremo y los correspondientes teoremas de existencia y unicidad. Impongamos primero ciertas restricciones sobre el campo escalar en estudio $F(u)$.

Entenderemos por subespacio de un espacio de Banach, un subespacio lineal cerrado, esto es, $N \subset B$ es un subespacio si para todo u_1, $u_2 \varepsilon N$, $t_1 u_1 + t_2 u_2 \varepsilon N$, y N posee todos sus pun -

tos de acumulación. Es importante el hecho de que todo subespacio lineal en B de dimensión finita es cerrado: es un subespacio de B.

Definición 4.2. Sea $N \subset B$ un subespacio lineal y $\bar{u}$ cualquier punto fijo en B. Se define como subespacio afín de B, al conjunto de puntos

$$u = \bar{u} + h, \qquad h \in N. \tag{4.2}$$

En particular, si N es un subespacio n-dimensional de B, para $n = 1$, al subespacio afín se le llama una línea en B; para $n = 2$, un plano; y para $n > 2$, un hiperplano.

Obsérvese que un subespacio afín es la traslación de un subespacio lineal y, por consiguiente, éste no es necesariamente un subespacio lineal; puede o no contener al punto cero.

Restricción 4.1. El dominio de definición de la funcional F,D(F), es un subespacio afín de B siempre denso.

De las definiciones de subespacio afín y conjunto siempre denso ** se deduce que D(F) es siempre denso en B si, y sólo si, el subespacio lineal N es siempre denso en B * Así pues, ya que N es denso en B y B es de dimensión infinita, N es un subespacio lineal de dimensión infinita. Por otro lado, es claro, que todo subespacio afín es un conjunto convexo; D(F) es un conjunto convexo.

---

* [6] II.3.2, p. 38.
** [8] II.2.3, p.63

Una razón más de la necesidad de la restricción 4.1 es el hecho de que los elementos en $D(F)$ son tales que satisfacen las condiciones de frontera del problema variacional, ya sean éstas homogéneas o no homogéneas. Esto es, puesto que N es un conjunto lineal, los elementos $h \varepsilon N$ sólo podrán satisfacer condiciones del tipo homogéneo, en tanto que la inclusión del elemento fijo $\bar{u}$, permite satisfacer condiciones de frontera no homogéneas.

Restricción 4.2. Si h es cualquier elemento del subespacio n-dimensional $N_n \subset N$, entonces la funcional $F(u) = F(\bar{u}+h)$ es continuamente diferenciable un número suficiente de veces sobre N_n.

Teorema 4.1. Si la funcional F satisface las restricciones 4.1 y 4.2, entonces ésta posee una diferencial de Gateaux $VF(u, h)$ en todo punto $u \varepsilon D(F)$, distributiva en $h \varepsilon N$.

Demostración. Sea $u + th = \bar{u}+(h_o+th)$ un elemento del dominio de definición $D(F)$. Entonces, puesto que h_o+th es un elemento de un subespacio bidimensional de N, por hipótesis $\psi(t) = F(u+th)$ es una función diferenciable, esto es, la diferencial de Gateaux de la funcional F,

$$\left.\frac{d\psi(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{F(u+th)-F(u)}{t} = VF(u,h), \tag{4.3}$$

existe en el punto $u \varepsilon D(F)$, en la dirección $h \varepsilon N$. Ahora bien, de (4.3),

$$VF(u,a_ih_i) = \left.\frac{dF(u+ta_ih_i)}{dt}\right|_{t=0}$$

donde $h = a_ih_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es un elemento de un subespacio n-dimensional de N. Poniendo $b_i = ta_i$, donde t es una variable independiente y a_i son constantes arbitrarias, obtenemos

$$VF(u,a_ih_i) = \left.\frac{dF(u+b_ih_i)}{dt}\right|_{t=0} = a_j \left.\frac{\partial F(u+b_ih_i)}{\partial b_j}\right|_{b_k=0} = a_j\, VF(u,h_j),$$

donde $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. La diferencial de Gateaux $VF(u,h)$ es distributiva en $h \in N$.

Consideremos el siguiente resultado del análisis funcional*. Si el dominio de definición de un operador distributivo y acotado es siempre denso en B, entonces a dicho operador se le puede extender en forma única a todo el espacio B, preservándose su norma y su distributividad. Esto es, de la definición 2.1, todo operador distributivo y acotado con dominio de definición siempre denso en B posee una única extensión lineal en B.

Por lo tanto, si $VF(u,h)$ es la diferencial de Gateaux de la funcional F, la cual satisface las restricciones 4.1 y 4.2, y $U \subseteq D(F)$ es el conjunto de elementos u en los cuales $VF(u,h)$ es acotada en $h \in N$, entonces, de las definiciones (2.3) y 3.1:

$$VF(u,h) = DF(u,h) = F'(u)h = A(u)h, \qquad u\in D(A) = U, h \in B. \qquad (4.4)$$

---

* [9] IV. 97, Teorema 1, p. 287.

Aquí, al escribir $h \in B$, se entiende a $\nabla F(u,\cdot)$ como su correspondiente extensión a todo el espacio B. Así pues, el operador A, el gradiente de F, es una aplicación del conjunto de elementos $U \subseteq D(F)$ en el espacio dual de funcionales lineales B^*; $A(u)$, $u \in U$, es una funcional lineal en B. Es importante hacer notar que el dominio de definición, así como la forma explícita del grad $F = A$, dependen directamente del tipo de espacio B en el cual esté contenido $D(F)$.

Con estos resultados, podemos entender a las restricciones 4.1 y 4.2, como una forma menos restrictiva de pedir que la funcional en estudio esté definida en todo el espacio B y posea una diferencial distributiva de Gateaux en todo punto $u \in B$.

5. Condiciones necesarias y suficientes de extremo.

Teorema 5.1. Si la funcional F satisface las restricciones 4.1 y 4.2, y tiene un valor extremo relativo en el punto $u_o \in D(F)$, entonces u_o es un elemento del dominio de definición del grad $F = A$: $u_o \in D(A) = U$, y $A\,u_o$ es el elemento cero del espacio dual B^*. En otras palabras, u_o es solución del problema

$$A\,u = 0, \qquad\qquad u \in D(A). \tag{5.1}$$

A la ecuación (5.1) se le denomina ecuación de Euler de la funcional F, y a los elementos solución del problema (5.1), puntos críticos de la funcional F. Entonces, todo punto extremo de la funcional F es, necesariamente, un punto crítico de ella. Tén gase presente que todo punto extremo absoluto es necesariamente un punto extremo relativo.

Demostración. Sea $0(u_o, r)$ una vecindad del punto u_o de radio r. Por definición de extremo relativo, alguna de las desigualdades:

$$F(u_o+th) \geq F(u_o), \qquad F(u_o+th) \leq F(u_o),$$

se satisface para todo $u_o+th \in 0(u_o,r)$. Por lo tanto, asumiendo que $|t|$ es lo suficientemente pequeño para que $||(u_o+th)-u_o|| = |t|||h|| < r$, la función diferenciable $F(u_o+th)$ tiene un extremo relativo en $t = 0$ y, necesariamente

$$VF(u_o,h) = \left.\frac{dF(u_o+th)}{dt}\right|_{t=0} = 0, \qquad \forall h\varepsilon\ N. \tag{5.2}$$

Ahora bien, del teorema 4.1, $VF(u_o,h)$ es una funcional distributiva en h y, puesto que de (5.2) es idéntica a cero en todo $h \varepsilon N$, es una funcional acotada en N. Por consiguiente, de lo concluído en (4.4),

$$VF(u_o,h) = DF(u_o,h) = A(u_o)h = 0, \qquad u_o\varepsilon D(A), \quad \forall h\varepsilon B. \tag{5.3}$$

Esto es, $u_o\varepsilon D(\text{grad } F)$ y $A\ u_o = 0$.

Refiriéndonos al hecho ya expresado: El dominio de definición y la forma explícita del grad F dependen del espacio B en el cual esté contenido $D(F)$, es claro que el problema de Euler (5.1) también está sujeto a esta dependencia. Por otro lado, puesto que los puntos críticos $u \varepsilon D(A) = U \subseteq D(F)$ son elementos en los cuales $DF(u,h) = 0$, y ésta diferencial sólo depende del dominio $D(F)$ y de los puntos u, h, y no del espacio considerado, entonces se concluye: la solución del problema de Euler es independiente del espacio B que contenga a $D(F)$. A esta propiedad se le conoce como la invariancia de la ecuación de Euler. Las ecuaciones de Euler, resultantes de la consideración de diferentes espacios en un mismo problema variacional, son equivalentes entre sí: cualquiera de ellas puede ser derivada de alguna de las otras.

Estudiemos ahora una condición necesaria y suficiente de extremo. Sea F una funcional que satsiface las restricciones 4.1 y 4.2 y, consecuentemente, posee una diferencial de Gateaux $VF(u, h)$ en todo punto $u \varepsilon D(F)$, distributiva en $h \varepsilon N$; $D(F)$ es un conjunto convexo. De la fórmula de Lagrange para funcionales (2.7),

$$F(u+h)-F(u) = VF(u,h)+\left[VF(u+\theta'h,h)-VF(u,h)\right], \quad \theta'\varepsilon(0,1),$$

para todo u, $u+h \varepsilon D(F)$, y aplicando nuevamente la fórmula de Lagrange,

$$F(u+h)-F(u) = VF(u,h)+\theta' V^2F(u+\theta h,h,h), \theta', \theta\varepsilon(0,1), \tag{5.4}$$

en donde $V^2F(u+\theta h,h,h)$ es la segunda diferencial de Gateaux de la funcional F en el punto $u+\theta h$, en la dirección h. Sea u_o un punto crítico de la funcional F. De la relación (4.4), $VF(u_o,h) = 0$, y la ecuación (5.4), para $u = u_o$, se reduce en

$$F(u_o+h)-F(u_o) = \theta' V^2F(u_o+\theta h,h,h), \qquad \theta',\theta\varepsilon(0,1). \tag{5.5}$$

Así, si $V^2F(u_o+\theta h,h,h)$ es no negativa o no positiva para todo $h \varepsilon N$, entonces, de la definición 4.1 y de (5.5), F tiene un valor extremo absoluto en el punto crítico u_o. Inversamente, si en el punto crítico u_o, F tiene un valor extremo absoluto, entonces, es claro, $V^2F(u_o+\theta h,h,h)$ es no negativa o no positiva para todo $h \varepsilon N$. Similarmente, en el caso de un extremo relativo, la demostración procede en igual forma considerando sólo a aquellos elementos $h \varepsilon N$ de norma suficientemente pequeña.

Teorema 5.2. Sea F una funcional, la cual satisface las restricciones 4.1 y 4.2, y sea u_o un punto crítico de ella. Entonces, para que la funcional F tenga un valor extremo absoluto en el punto u_o, es necesario y suficiente que su segunda diferencial de Gateaux satisfaga en los puntos $u_o+\theta h$, $\theta\varepsilon(0,1)$, $h \varepsilon N$, alguna de las siguientes desigualdades:

$$V^2F(u_o+\theta h,h,h) \geq 0, \qquad V^2F(u_o+\theta h,h,h) \leq 0. \tag{5.6}$$

Así mismo, F tiene un valor extremo relativo en u_o si, y sólo si, alguna de las desigualdades (5.6) se satisface para todo $h \varepsilon N$ de norma suficientemente pequeña.

El valor extremo de F será un mínimo o un máximo, respectivamente, si la desigualdad satisfecha es la primera o la segunda de (5.6). En lo sucesivo nos referiremos sólo a puntos extremos mínimos; el problema del máximo de la funcional F es idéntico al del mínimo de la funcional $-F$.

Pasemos a establecer una condición suficiente de extremo menos restrictiva que la condición (5.6).

Teorema 5.3. Sea F una funcional, la cual satisface las restricciones 4.1 y 4.2, y u_o un punto crítico de ella. Si la segunda diferencial de Gateaux de la funcional F satisface la desigualdad,

$$V^2F(u,h,h) \geq 0, \qquad h \in N,\ h \neq 0, \qquad (5.7)$$

en todo punto $u \in D(F)$, entonces F tiene un mínimo absoluto en el punto crítico u_o.
Así mismo, si la desigualdad (5.7) se satisface en todo punto $u \in D(F)$ suficientemente cercano a u_o, entonces la funcional F tiene un mínimo relativo en el punto crítico u_o.

Demostración. La igualdad (5.5) se cumple. Si $V^2F(u_o+\theta h,h,h) \geq 0$, $\theta\varepsilon(0,1)$, para toda $h \in N$, $h \neq 0$, entonces, poniendo en (5.5) $u_o+h = u$, donde u es cualquier elemento de $D(F)$ distinto de $u_o, F(u) \geq F(u_o)$ para todo $u \in D(F)$. La funcional F tiene un mínimo absoluto en u_o. Por otro lado, si $V^2F(u,h,h) \geq 0$,

$h \neq 0$, en todo punto $u \varepsilon O(u_o, r)$, $u \neq u_o$, entonces, poniendo nuevamente en (5.5) $u_o + h = u$ y, puesto que $||(u_o+\theta h)-u_o|| = |\theta|\ ||h|| \leq ||u-u_o|| < r$, $F(u) \geq F(u_o)$ para todo $u \varepsilon O(u_o, r)$. La funcional F tiene un mínimo relativo en u_o.

En resumen, dada una funcional, la cual satisface las restricciones 4.1 y 4.2, ésta posee una diferencial distributiva de Gateaux en todo punto de su dominio de definición (teorema 4.1). Si u_o es un punto extremo de esta funcional, su diferencial de Gateaux es lineal es este punto y u_o es solución de su problema de Euler: u_o es un punto crítico (teorema 5.1). Además, si su segunda diferencial de Gateaux es no negativa en alguna vecindad del punto crítico u_o o en todo punto de su dominio de definición, entonces, respectivamente, la funcional tiene un valor mínimo relativo o absoluto en u_o (teorema 5.3).

Los teoremas de existencia y unicidad de extremo se estudiarán, en forma particular, al tratar el problema variacional de funcionales cuadráticas.

6. Condiciones de extremo de una funcional cuadrática.

Sea la funcional real

$$F(u) = A(u,u) + L(u)+C \tag{6.1}$$

en un espacio de Hilbert H, cuyas componentes son tales que: $A(u,v)$ es una funcional bidistributiva definida en un subespacio afín $D(A)$ siempre denso en H, $L(u)$ es una funcional distributiva cuyo dominio de definición $D(L) \supseteq D(A)$, y C es una constante. Demos las siguientes definiciones,

Definición 6.1. Se dice que la funcional bidistributiva A, definida en el subespacio afín $D(A) = \bar{u} + M$ siempre denso en H, es simétrica, si

$$A(h,h') = A(h',h), \qquad \forall h,h' \varepsilon M. \qquad (6.2)$$

A la expresión $A[h] = A(h,h)$, $h \varepsilon M$, se le llama funcional cuadrática homogénea, o forma cuadrática, de la funcional simétrica A.

Definición 6.2. A la forma cuadrática $A[h]$ se le dice ser positiva, si

$$A[h] \geq 0, \qquad \forall\ h \varepsilon M, \qquad (6.3)$$

y $A[h] = 0$ si y sólo si h es el elemento cero.

Definición 6.3. A la forma cuadrática $A[h]$ se le dice ser positiva definida, si

$$\inf_{h\varepsilon M, ||h|| = 1} A[h] > 0,$$

o, lo que es equivalente, si existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$A[h] \geq \gamma^2 \, ||h||^2, \qquad \forall \; h \in M. \qquad (6.4)$$

Definición 6.4. A la funcional (6.1) se le denomina funcional cuadrática, si su funcional A es simétrica, y se le dice ser positiva o positiva definida, si, respectivamente, $A[h]$ es positiva o positiva definida.

Para poder hacer uso directo de los resultados del punto anterior, probemos los dos siguientes lemas.

Lema 6.1. Toda funcional cuadrática en un espacio de Hilbert H, satisface las restricciones 4.1 y 4.2.

Demostración. Por definición de funcional cuadrática, la restricción 4.1 se satisface: $D(A)$ es un subespacio afín siempre denso en el espacio de Banach de dimensión infinita H. Por otro lado, si $h = a_i h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es un elemento del subespacio n-dimensional $M_n \subset M$, la función

$$\psi(a_k) = F(\bar{u}+a_k h_k) = a_i a_j A(h_i,h_j) + a_i A(\bar{u},h_i) + a_i A(h_i,\bar{u}) + a_i L(h_i) + \bar{C},$$

donde $\bar{C} = A(\bar{u},\bar{u}) + L(\bar{u}) + C = \text{cte.},$

es continuamente diferenciable, y la restricción 4.2 también se satisface.

Del teorema 4.1, como lo es evidente en este caso, la funcional cuadrática F posee una diferencial de Gateaux,

$$\nabla F(u,h) = A(u,h)+A(h,u)+L(h), \tag{6.5}$$

en todo punto $u \varepsilon D(A)$, distributiva en $h \varepsilon M$.

Lema 6.2. Si la funcional cuadrática F es positiva, entonces su segunda diferencial de Gateaux $\nabla^2 F(u,h,h)$ satisface la desigualdad

$$\nabla^2 F(u,h,h) \geq 0, \qquad \forall\ h \varepsilon M, \tag{6.6}$$

en todo punto $u \varepsilon D(A)$, y $\nabla^2 F(u,h,h) = 0$ si y sólo si h es el elemento cero.

Demostración. Calculando la segunda diferencial de Gateaux de la funcional cuadrática F, la diferencial de la funcional (6.5), y considerando la desigualdad de positividad (6.3):

$$\nabla^2 F(u,h,h) = 2\ A[h] \geq 0, \qquad \forall\ h \varepsilon M, \quad u \varepsilon D(A), \tag{6.7}$$

y $\nabla^2 F(u,h,h) = 0$ si y sólo si h es el elemento cero.

Por lo tanto, de acuerdo a los lemas 6.1 y 6.2, de los teoremas 5.1 y 5.3 se concluye el siguiente resultado.

Teorema 6.1. Sea F una funcional cuadrática positiva en un espacio de Hilbert H. Entonces, para que la funcional F tenga un mínimo absoluto en el punto $u_o \varepsilon D(A)$, es condición necesaria y suficiente que u_o sea un punto crítico suyo:

$$u_o \; \varepsilon \; D(\mathrm{grad}\ F), \qquad \mathrm{grad}\ F(u_o) = 0 \,. \tag{6.8}$$

El punto crítico u_o (si existe) es único.

La unicidad del punto u_o se sigue del lema 6.2 y de la relación de Lagrange (5.5).

7. Espacio de energía.

Sea $A(u,v)$ una funcional simétrica en el espacio de Hilbert H, cuya forma cuadrática, $A[h]$, es positiva. Definiendo

$$[h,h'] = A(h,h'), \qquad h,h' \; \varepsilon \; M, \tag{7.1}$$

de las definiciones 6.1 y 6.2, esta nueva funcional satisface los postulados de distributividad, simetría y positividad de un producto escalar. Por lo tanto, introduciendo a la funcional (7.1) como producto escalar en el subespacio lineal M siempre denso en H, M resulta ser un espacio Euclideano de dimensión infinita. Definiendo ahora en M, la norma

$$|||h||| = [h,h]^{\frac{1}{2}}, \qquad h \; \varepsilon \; M, \tag{7.2}$$

y realizando su completación en el sentido de la métrica

$$D[h,h'] = |||h-h'|||, \quad h,h' \; \varepsilon \; M, \tag{7.3}$$

entonces la completación $H_A = \bar{M}$ es un espacio de Hilbert. A este nuevo espacio de Hilbert H_A se le denomina espacio de energía asociado a la funcional simétrica y positiva A. Así pues, nombraremos a las funcionales (7.1), (7.2) y (7.3) como el producto escalar en energía, la norma en energía y la métrica en energía, respectivamente.

Consideremos al siguiente caso más restrictivo. Sea la funcional simétrica A, cuya forma cuadrática es positiva definida, y sea H_A su correspondiente espacio de energía. De la definición de positividad definida (6.4),

$$|||h|||^2 = A[h] \geq \gamma^2 \,||h||^2, \qquad h \in M,$$

y, consecuentemente, la relación entre la norma original en H y la norma en energía en H_A resulta ser

$$||h|| \leq \frac{1}{\gamma} \,|||h|||, \qquad h \in M. \tag{7.4}$$

Así, toda sucesión $\{h_k\} \in M$, fundamental en el sentido de la métrica en energía (7.3), es también fundamental en el sentido de la métrica original $D(u,v) = ||u-v||$. Por lo tanto, puesto que H_A es completo en energía y H es completo en el sentido original, la sucesión fundamental $\{h_k\} \in M$ converge en cada uno de estos espacios a los elementos h y h', respectivamente. De este hecho se deduce la existencia de un isomorfismo lineal entre los elementos del espacio de energía H_A y algunos elementos del espacio original H.

Teorema 7.1* Si la forma cuadrática de la funcional simétrica A es positiva definida, entonces todos los elementos de su correspondiente espacio de energía H_A pueden ser identificados con algunos elementos del espacio original H:

$$M \subset H_A \subset H. \tag{7.5}$$

Si la forma cuadrática $A[h]$ es meramente positiva, entonces la relación (7.4) no se cumple en todo punto $h \in M$ y (7.5) deja de ser cierto; la inclusión de H_A en H puede o no verificarse.

Ahora bien, si las condiciones del teorema 7.1 se cumplen, probemos que la relación (7.4) se cumple en todo punto $h \in H_A$:

$$||h|| \leq \frac{1}{\gamma} |||h|||, \qquad h \in H_A. \tag{7.6}$$

Sea $h \in H_A$. Puesto que M es siempre denso, tanto en H_A, como en H, y estos espacios son completos por definición, entonces existe una sucesión $\{h_k\} \in M$ la cual converge a h en el sentido de las métricas en energía y original. Por consiguiente, haciendo uso de la continuidad de la norma, el límite cuando $k \to \infty$ de la relación

$$||h_k|| \leq \frac{1}{\gamma} |||h_k|||, \qquad h_k \in M,$$

* [6] II. Teorema 5.3.1, p. 93.

prueba la desigualdad (7.6) en todo $h \in H_A$.

Teorema 7.2. Sea la funcional simétrica A con forma cuadrática positiva definida en H, y sea H_A su correspondiente espacio de energía. Entonces, para que el elemento $h \in H$ sea un elemento del espacio H_A, es necesario y suficiente que exista una sucesión $\{h_k\} \in M$ tal que

$$|||h_n-h_m||| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0, \qquad ||h_n-h|| \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{7.7}$$

Necesidad. El conjunto M es siempre denso en H_A, entonces existe una sucesión $\{h_k\} \in M$ la cual converge en energía al elemento $h \in H_A$ y, consecuentemente, es fundamental en energía y, de la relación (7.6), es tal que

$$||h_n-h|| \leq \frac{1}{\gamma}|||h_n-h||| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Suficiencia. Cumpliéndose las condiciones (7.7), puesto que H_A es completo, existe un elemento $h' \in H_A$ tal que $|||h_n-h'||| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, del isomorfismo lineal existente entre los espacios H_A y H, se sigue que $h = h'$ y $h \in H_A$.

8. Existencia del mínimo de una funcional cuadrática.

Consideremos el problema del mínimo de la funcional cuadrática positiva

$$F(u) = A(u,u)+L(u)+C, \qquad u \in D(A), \tag{8.1}$$

en el subespacio afín $D(A) = \bar{u}+M$, denso en algún espacio de Hilbert H. Del teorema 6.1, la condición (6.8) es necesaria y suficiente para el mínimo de $F(u)$, el cual, si existe, es único. Poniendo $u = \bar{u} + h$, donde $\bar{u}$ es un elemento fijo del dominio $D(A)$ y h está contenida en el subespacio lineal M, denso en H, la funcional (8.1) toma la forma:

$$G(h) = A[h]+\bar{L}(h)+\bar{C}, \qquad h \in M, \tag{8.2}$$

donde $\bar{L}(h) = L(h)+A(\bar{u},h)+A(h,\bar{u})$,

$$\bar{C} = A(\bar{u},\bar{u})+L(\bar{u})+C = \text{cte}.$$

Sea H_A el espacio de energía asociado a la funcional positiva A. Debido a que M es denso en H_A y $D(L) \supseteq D(A)$, $D(\bar{L})$ es siempre denso en H_A. Así, de las definiciones (7.2) y (7.1), $A[h] = |||h|||^2$, por lo que, escribiendo a la funcional (8.2) en la forma

$$G(h) = |||h|||^2+ \bar{L}(h)+\bar{C}, \tag{8.3}$$

ésta queda definida en el subespacio lineal $D(\bar{L})$ siempre denso en H_A. Analicemos los dos siguientes casos.

Caso 8.1. La funcional $\bar{L}(h)$ no es acotada en H_A. En este caso existirá una sucesión $\{h_k\} \in D(\bar{L})$ tal que $|||h_k||| = 1$ y $|\bar{L}(h_n)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Seleccionemos los signos de los elementos h_k de manera que $\bar{L}(h_n) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$. Entonces

$$G(h_n) = 1+\bar{L}(h_n)+\bar{C} \underset{n\to\infty}{\to} -\infty,$$

esto es, la funcional G(h) no es acotada por abajo y, consecuentemente, el problema del mínimo de la funcional (8.3) pierde su sentido.

Caso 8.2. La funcional $\bar{L}(h)$ es acotada en H_A. La funcional $\bar{L}(h)$ es, entonces, distributiva y acotada en un subespacio lineal denso en H_A, y puede ser extendida en forma única a una funcional lineal en H_A. Por lo tanto, considerando a $\bar{L}(h)$ como tal extensión, la funcional (8.3) queda extendida a todo el espacio de energía H_A, y el problema es, ahora, encontrar un elemento $h_o \varepsilon H_A$ en el cual la funcional

$$G(h) = |||h|||^2+\bar{L}(h)+\bar{C}, \qquad h \varepsilon H_A, \tag{8.4}$$

tenga un valor mínimo. Probemos que, en este caso, tal punto extremo sí existe.

Del teorema de F. Riesz*, existe un elemento $h_o' \varepsilon H_A$, y sólo uno, tal que la funcional lineal $\bar{L}$ puede ser expresada en la forma general:

$$\bar{L}(h) = [h,h_o'], \qquad h \varepsilon H_A. \tag{8.5}$$

*[10] II. 16, p.33.

Entonces,

$$G(h) = |||h|||^2 + [h, h_o'] + \bar{C} = [h,h] + [h, h_o'] + \left[\frac{h_o'}{2}, \frac{h_o'}{2}\right] - \left[\frac{h_o'}{2}, \frac{h_o'}{2}\right] + \bar{C},$$

$$G(h) = |||h + \tfrac{1}{2}h_o'|||^2 - |||\tfrac{1}{2}h_o'|||^2 + \bar{C}, \quad h \in H_A, \tag{8.6}$$

y, como es evidente,

$$\inf_{h \in H_A} G(h) = G(h_o) = -|||h_o|||^2 + \bar{C},$$

donde $h_o = -\frac{1}{2} h_o'$ existe y es único. Este mismo resultado se sigue también de la condición (6.8).

Teorema 8.1. En el espacio de energía H_A existe uno, y sólo un elemento, en el cual la funcional (8.4) tiene un valor mínimo absoluto.

La solución del problema variacional (8.4), $h_o \in H_A$, no necesariamente es un elemento del espacio original H ni, por consiguiente, del subespacio lineal M. Por otro lado, si la forma cuadrática $A[h]$ es positiva definida, del teorema 7.1, $M \subset H_A \subset H$, y el elemento solución h_o sí es un elemento del espacio original H: $h_o \in H_A \subset H$. Por esto, a $h_o \in H_A$ se le dice ser la solución generalizada del problema variacional (8.2). Si $h_o \in M \subset H_A$, entonces h_o es la solución ordinaria del problema (8.2).

Por lo tanto, la solución generalizada u_o del problema variacional (8.1), definida por,

$$u_o = \bar{u} + h_o, \tag{8.8}$$

existe y es única. Diremos que u_o es un elemento del espacio afín de energía $\bar{u} + H_A$.

Corolario 8.1. Sea la funcional cuadrática positiva (8.1) cuya funcional, $\bar{L}(h)$, es acotada en H_A. Entonces, en el espacio afín de energía, $\bar{u} + H_A$, existe un único elemento en el cual la funcional (8.1) tiene un valor mínimo absoluto.

Obsérvese que en el caso en que las condiciones de frontera del problema variacional (8.1) sean del tipo homogéneo, el elemento de traslación $\bar{u}$ está contenido en M. Entonces, si se procede a tomar a $\bar{u}$ como el elemento cero del subespacio lineal M, $F(u) = G(h)$; $u = h \in M$.

FALTA PAGINA

No. 50

FALTA PAGINA

No. 51

III : EL METODO VARIACIONAL DE LA ENERGIA

9. Potencialidad de campos distributivos.

Sea A un operador distributivo el cual mapea elementos de un espacio de Banach B en funcionales lineales del espacio conjugado B^*, y sea su dominio de definición $D(A)$ un subespacio afín siempre denso en B. Para estudiar la potencialidad del campo distributivo definido por A en B, analicemos primero su diferenciabilidad.

De la definición 2.2, el

$$\lim_{t \to 0} \frac{A(u+th)-A(u)}{t} = V\,A(u,h) = A\,h, \qquad h \in M, \tag{9.1}$$

existe para todo $u \in D(A)$, esto es, el operador A posee una diferencial de Gateaux en todo punto $u \in D(A)$, en la dirección $h \in M$. Observando (9.1), $V\,A(u,h)$ es un operador distributivo en h y, puesto que del resultado (2.10) A es continuo en $D(A)$, y todo operador distributivo y continuo es acotado, entonces A posee una diferencial lineal de Gateaux en $D(A)$:

$$V\,A(u,h) = DA(u,h) = A'(u)h = A\,h, \qquad u \in D(A), \quad h \in M. \qquad (9.2)$$

Así, la derivada de Gateaux del operador $A, A'(u) = A$, resulta ser un operador continuo y, por consiguiente, del teorema 2.1, ésta es una derivada de Frechet:

$$DA(u,h) = dA(u,h) = A\,h, \qquad u \in D(A), \quad h \in M. \qquad (9.3)$$

Por lo tanto, el operador distributivo y continuo A define en B el campo de funcionales lineales (continuas) $Au \in B^*$, y su correspondiente integral curvilínea,

$$\int_L (Au,\, du), \qquad (9.4)$$

existe a lo largo de cualquier curva regular $L \subset D(A)$. En lo sucesivo escribiremos $(Au,\cdot)$ para resaltar el hecho de que Au es una funcional lineal.

Ahora bien, como se vio en la definición 1.5, si el operador continuo A es tal que la integral curvilínea (9.4) no depende de la forma de la curva $L \subset D(A)$, sino sólo de sus puntos extremos u_o y u, entonces existe una funcional F, llamada el potencial del operador A, tal que

$$\int_{u_o}^{u} (Au, du) = F(u)-F(u_o), \qquad u_o, u \in D(A). \tag{9.5}$$

En este caso, al operador continuo A se le dice ser un operador fuertemente potencial, y se le llama, el gradiente fuerte del potencial F.

Definición 9.1. Se dice que el operador distributivo A de B en B^*, definido en el subespacio afín $D(A) = \bar{u} + M$ siempre denso en B, es simétrico, si

$$(Ah,h') = (Ah',h), \qquad \forall\ h,h' \in M. \tag{9.6}$$

De la relación (9.3) se sigue que la condición de simetría (9.6) es equivalente a que la funcional bilineal $(DA(u,h),h')$, continua en todo punto $u \in D(A)$, sea simétrica en todo $u \in D(A)$:

$$(DA(u,h),h') = (DA(u,h'),h), \qquad \forall\ h,h' \in M. \tag{9.7}$$

Con esto, de los teoremas 3.1, 3.2 y 3.3, las condiciones de potencialidad de un campo distributivo son:

Corolario 9.1. La integral curvilínea (9.4) es independiente de la trayectoria de integración en $D(A)$ si, y sólo si, el operador A es la derivada de alguna funcional F diferenciable en $D(A)$ (A es un operador potencial en $D(A)$).

Corolario 9.2. La integral curvilínea (9.4) es independiente de la trayectoria de integración en $D(A)$ si, y sólo si, el operador A es simétrico en el espacio B.

Corolario 9.3. Para que A sea un operador potencial en $D(A)$, es necesario y suficiente que sea un operador simétrico en el espacio B.

Una forma conveniente de reconstruir el potencial de un operador simétrico, definido en el subespacio afín $D(A) = \bar{u}+M$, es tomar por curva regular L en (9.5) al intervalo que une al punto fijo $\bar{u} \in D(A)$ con el punto arbitrario u de $D(A)$. Entonces, el potencial del operador simétrico A de B en B^* es la funcional

$$F(u) = F(\bar{u}) + \frac{1}{2}(A(u-\bar{u}),u-\bar{u}) + (A\bar{u},u-\bar{u}), \qquad u \in D(A). \tag{9.8}$$

A es el gradiente fuerte del potencial F.

10. El método variacional de la energía.

Sea A un operador simétrico del espacio de Hilbert H en su espacio dual H^*. De la extensión del teorema de F. Riesz al caso de funcionales bilineales*, y de las definiciones 9.1 y 6.1, podemos decir que todo operador simétrico tiene asociada una única funcional bilineal y simétrica de la forma

$$A(u,v) = (Au,v), \qquad u,v \in D(A), \tag{10.1}$$

---

* [10] II.21, p.42.

cuya forma cuadrática es,

$$A[h] = (Ah,h), \qquad h \in M. \tag{10.2}$$

En similitud a las definiciones 6.2 y 6.3, expresemos lo siguiente.

Definición 10.1. Al operador simétrico A se le dice ser positivo, si su forma cuadrática asociada es positiva:

$$A[h] = (Ah,h) \geq 0, \qquad \forall h \in M, \tag{10.3}$$

y $A[h] = 0$ si y sólo si h es el elemento cero.

Definición 10.2. Al operador simétrico A se le dice ser positivo definido, si su forma cuadrática asociada es positiva definida: existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$A[h] = (Ah,h) \geq \gamma^2 ||h||^2, \qquad \forall h \in M. \tag{10.4}$$

Del corolario 9.3, el operador simétrico A es potencial en $D(A)$ y, de (9.8), es el gradiente fuerte de la funcional

$$F(u) = \frac{1}{2}A(u-\bar{u},u-\bar{u})+A(\bar{u},u-\bar{u})+F(\bar{u}), \qquad u \in D(A). \tag{10.5}$$

Ahora bien, escribiendo al potencial $F(u)$ en la forma:

$$F(u) = \frac{1}{2} A(u,u)+L(u)+C, \qquad u \in D(A), \tag{10.6}$$

donde

$$L(u) = \frac{1}{2} A(\bar{u},u) - \frac{1}{2} A(u,\bar{u}),$$

$$C = -\frac{1}{2}A(\bar{u},\bar{u})+F(\bar{u}),$$

de la definición 6.4 se concluye: el potencial de un operador simétrico de H en H^* es una funcional cuadrática en H. Por lo tanto, del teorema 6.1, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 10.1. Sea A un operador positivo de H en H^*. Para que el potencial F de A tenga un mínimo absoluto en el punto $u_o \in D(A)$, es condición necesaria y suficiente que u_o sea un punto crítico suyo, o sea, que u_o sea solución de su problema de Euler

$$A\,u = 0, \qquad u \in D(A). \tag{10.7}$$

El punto crítico u_o (si existe) es único.

Poniendo ahora, al igual que para (8.2), $u = \bar{u}+h$ en (10.6), o simplemente, $u-\bar{u} = h$ en (10.5), la funcional $F(u)$ toma la forma:

$$G(h) = \frac{1}{2}A[h]+A(\bar{u},h)+F(\bar{u}), \qquad h \in M. \tag{10.8}$$

Definición 10.3. Si la funcional cuadrática

$$G(h) = \frac{1}{2}A[h]-\bar{L}(h) \qquad (10.9)$$

es tal que: $A[h]$ es la forma cuadrática asociada a un operador positivo en el espacio de Hilbert H, y $\bar{L}(h) = (\bar{f},h)$ es una funcional lineal del espacio dual H^*, entonces a $G(h)$ se le denomina la funcional de energía del operador A.

La funcional (10.8), si A es positivo, es entonces la funcional de energía del operador A, cuya funcional $\bar{f} = -A\bar{u}$. Es claro que la constante $F(\bar{u})$ es irrelevante.

Así pues, toda funcional de energía es una funcional cuadrática positiva, resultando ser su gradiente de la forma,

$$\text{grad } G(h) = A\,h-\bar{f}, \qquad h \in D(\text{grad } G) = M. \qquad (10.10)$$

Por lo tanto, del teorema 6.1, se concluye el siguiente resultado de gran trascendencia.

Corolario 10.2. Toda funcional de energía tiene un valor mínimo absoluto en el punto $h_o \varepsilon M$ si, y sólo si, h_o es solución de su correspondiente problema de Euler:

$$A\,h = \bar{f}, \qquad h \in M. \qquad (10.11)$$

El punto crítico h_o (si existe) es único.

Sea H_A el espacio de energía asociado a la funcional positiva A. Entonces, al igual que para (8.3), la funcional de energía (10.9), escrita en la forma,

$$G(h) = \frac{1}{2}|||h|||^2-\bar{L}(h),$$

queda definida en el subespacio lineal $D(\bar{L})$ siempre denso en H_A. Como se vio en el caso 8.1, si la funcional $\bar{L}(h)$ resulta no ser acotada en H_A, el problema variacional pierde su sentido: G no es una funcional acotada en energía. Asumamos entonces que $\bar{L}(h) = (\bar{f},h)$, $\bar{f} \in H^*$, es acotada en H_A, y considerémosla como su correspondiente extensión lineal a todo el espacio H_A. Entonces

$$G(h) = \frac{1}{2}|||h|||^2-\bar{L}(h), \qquad h \in H_A, \tag{10.12}$$

y, del teorema 8.1, se tiene el siguiente hecho.

Corolario 10.3. En el espacio de energía H_A existe uno y sólo un elemento en el cual la funcional de energía (10.12) tiene un valor mínimo absoluto.

Veamos cuando la hipótesis del corolario 10.3: $\bar{L}(h) = (\bar{f},h)$ es acotada en energía, se cumple para toda $\bar{f} \in H^*$.

Sea la funcional de energía (10.12) del operador positivo definido A. En este caso, la relación (7.6) entre la norma original y la norma en energía se cumple y, de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski*,

---

* [8] III.4.1, p.153.

$$|\bar{L}(h)| \leq ||\bar{L}||\cdot||h|| = ||\bar{f}||\cdot||h|| \leq \frac{||\bar{f}||}{\gamma}|||h|||, \ \forall \bar{f} \in H^*, \ h \in H_A, \tag{10.13}$$

esto es: si A es positivo definido, toda funcional lineal de H^* es acotada en energía.

Corolario 10.4. Para toda funcional de energía de un operador positivo definido existe uno y sólo un punto en H_A, el cual le asigna un valor mínimo absoluto.

Luego entonces, si $\bar{L}(h)$ es acotada en energía, al igual que en (8.4), existe un único elemento $h_o \in H_A$ tal que

$$\bar{L}(h) = [h_o, h], \qquad h \in H_A, \tag{10.14}$$

y, concecuentemente,

$$G(h) = \frac{1}{2}|||h|||^2 - [h_o,h] = \frac{1}{2}[h,h] - [h_o,h] + \frac{1}{2}[h_o,h_o] - \frac{1}{2}[h_o,h_o],$$

$$G(h) = \frac{1}{2}|||h-h_o|||^2 - \frac{1}{2}|||h_o|||^2, \qquad h \in H_A, \tag{10.15}$$

y el
$$\inf_{h\in H_A} G(h) = G(h_o) = -\frac{1}{2}|||h_o|||^2. \tag{10.16}$$

El elemento $h_o \in H_A$ es la solución generalizada del problema variacional (10.9) o, lo que es equivalente, del problema de Euler (10.11).

Por lo tanto, la solución generalizada u_o del problema variacional (10.6), o del problema de Euler (10.7), es el elemento

$$u_o = \bar{u}+h_o, \tag{10.17}$$

donde h_o es la solución generalizada del problema variacional (10.8). La solución (10.17), elemento del espacio afín de energía $\bar{u}+H_A$, existe y es única (corolario 8.1). En este caso $\bar{f} = -A\,\bar{u}$, por lo cual, el problema de Euler (10.11) es el correspondiente problema, con condiciones de frontera homogéneas, del problema de Euler original (10.7), con condiciones de frontera no homogéneas. Ambos problemas coinciden si $\bar{u} \in M$, y éste es tomado como el elemento cero en M.

De esta forma se ha dado origen al así llamado Método Variacional de la Energía, al cual se le puede definir en los siguientes términos: es aquel método que estudia la existencia, unicidad y naturaleza de la solución de un problema de Euler, estudiando al punto extremo de su correspondiente funcional de energía. Téngase presente que esta definición es puramente formal.

11. Sucesiones minimizantes.

Consideremos la funcional de energía (10.9), cuya funcional - $\bar{L}(h) = (\bar{f},h)$, $\bar{f} \in H^*$, es acotada en energía y, consecuentemente, puede ser extendida a todo el espacio de energía H_A. Del corolario 10.3, existe un único punto extremo $h_o \in H_A$, por lo que:

$$G(h) = \frac{1}{2}|||h|||^2-\bar{L}(h) = \frac{1}{2}|||h-h_o|||^2- \frac{1}{2}|||h_o|||^2, \qquad h \in H_A, \tag{11.1}$$

$$\inf_{h\varepsilon H_A} G(h) = G(h_o) = -\frac{1}{2}|||h_o|||^2. \tag{11,2}$$

Definición 11.1. Sea $\{h_k\}$ una sucesión de elementos del espacio de energía H_A. Se dice que $\{h_k\}$ es una sucesión minimizante de la funcional de energía (11.1), si

$$\lim_{n\to\infty} G(h_n) = \inf_{h\varepsilon H_A} G(h). \tag{11.3}$$

Luego entonces, si $\{h_k\}\varepsilon H_A$ es una sucesión minimizante, de (11.1) y (11.2),

$$\lim_{n\to\infty} G(h_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}|||h_n-h_o|||^2-\frac{1}{2}|||h_o|||^2\right] = -\frac{1}{2}|||h_o|||^2,$$

esto es:

Teorema 11.1. Toda sucesión minimizante de la funcional de energía (11.1) converge al punto crítico de ésta en el sentido de la norma en energía:

$$|||h_n-h_o|||\underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{11.4}$$

Más aún, si la forma cuadrática de la funcional $G(h)$ es positiva definida, de la relación entre las normas en energía y original (7.6), toda sucesión minimizante suya también converge en la media:

$$||h_n-h_o||\underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{11,5}$$

Así pues, el n-ésimo elemento $h_n \varepsilon H_A$ de una sucesión minimizante es la n-ésima aproximación de la solución generalizada $h_o \varepsilon H_A$ del problema variacional (10.9), o sea, del problema de Euler (10.11). Por lo tanto, el construir una sucesión minimizante es una forma natural, en el contexto del método variacional de la energía, de establecer una solución aproximada del problema. Entre los métodos más importantes para construir una sucesión minimizante, denominados procesos variacionales, se encuentran los procesos de W. Ritz [3,4,5] y L. V. Kantorovich [3,7].

12. Formulación variacional de un problema de valores en la frontera.

Sea el problema de valores en la frontera

$$A\,u = f, \qquad u \;\varepsilon\; D(A), \tag{12.1}$$

donde A es un operador distributivo del espacio de Hilbert H en sí mismo, y sea H, tal que, D(A) resulta ser un subespacio afín siempre denso. En la formulación variacional de este problema, una forma de razonar es la siguiente:

1. Dado el problema de valores en la frontera (12.1) y seleccionado el espacio de Hilbert H, en el cual D(A) resulta ser un subespacio afín siempre denso, en términos del producto escalar en H,

$$A(u,v) = (Au,v), \qquad u,v \;\varepsilon\; D(A), \tag{12.2}$$

es una funcional bilineal con forma cuadrática

$$A[h] = (Ah,h), \qquad h \in M. \tag{12.3}$$

Por lo tanto, el operador A es ahora, en este sentido, un operador distributivo de H en el espacio de funcionales lineales H^*.

2. Luego entonces, si el espacio seleccionado H es tal que, A resulta ser un operador simétrico:

$$A(h,h') = A(h',h), \qquad \forall h,h' \in M, \tag{12.4}$$

A es un operador potencial en $D(A)$ (corolario 9.3).

3. Esto es, el problema (12.1) es el problema de Euler de la funcional

$$F(u) = \int_0^1 (A[\bar{u}+t(u-\bar{u})]-f,u-\bar{u})dt+F(\bar{u})$$

$$= \frac{1}{2}A(u-\bar{u},u-\bar{u})-(f,u-\bar{u})+A(\bar{u},u-\bar{u})+F(\bar{u}), \qquad u \in D(A) \tag{12.5}$$

o,

$$F(u) = \frac{1}{2}A(u,u)-L(u)+C, \qquad u \in D(A), \tag{12.6}$$

donde $\quad L(u) = (f,u)-\frac{1}{2}A(\bar{u},u)+\frac{1}{2}A(u,\bar{u}),$

$$C = (f,\bar{u})-\frac{1}{2}A(\bar{u},\bar{u})+F(\bar{u}).$$

$F(u)$ es el potencial del campo $Au-f$, $u \in D(A)$, $f \in H^*$. La estacionareidad del potencial $F(u)$ es el principio variacional del problema de valores en la frontera (12.1).

4. Asumiendo que el operador simétrico A es positivo:

$$A[h] \geq 0, \ \forall \ h \in M, \ y \ A[h] = 0 \Leftrightarrow h = 0 \in M, \qquad (12.7)$$

$F(u)$ tiene un mínimo absoluto en el punto $u_o \in D(A)$ si y sólo si u_o es solución del problema de valores en la frontera (12.1) (corolario 10.1).

5. Poniendo $u = \bar{u}+h$ en (12.6) o, simplemente $u-\bar{u} = h$ en (12.5), la funcional de energía del operador positivo A resulta ser:

$$G(h) = \frac{1}{2} A[h] - \bar{L}(h) + F(\bar{u}), \qquad h \in M, \qquad (12.8)$$

donde $\bar{L}(h) = (f,h) - A(\bar{u},h)$.

La funcional $G(h)$ tiene un mínimo absoluto en el punto $h_o \in M$ si, y sólo si, h_o es solución del problema de valores en la frontera

$$A\,h = \bar{f}, \qquad h \in M; \qquad \bar{f} = f - A\,\bar{u} \qquad (12.9)$$

(corolario 10.2). Este es el correspondiente problema a (12.1) con condiciones de frontera homogéneas.

6. Ahora bien, si $\bar{L}(h) = (\bar{f},h)$ es una funcional acotada en el espacio de energía H_A, o si el operador positivo A es positivo definido:

$$A[h] \geq \gamma^2||h||^2, \qquad \gamma = cte > 0, \qquad \forall\ h \in M, \tag{12.10}$$

entonces la funcional de energía (12.8) puede ser extendida a todo el espacio de energía H_A:

$$G(h) = \frac{1}{2}|||h|||^2-\bar{L}(h), \qquad h \in H_A, \tag{12.11}$$

existiendo un único elemento $h_o \in H_A$ en el cual (12.11) tiene un valor mínimo absoluto (corolario 10.3 o 10.4).

7. Por lo tanto, cumpliéndose cada una de las asunciones hechas hasta ahora, la solución generalizada del problema variacional (12.6), o del problema de valores en la frontera (12.1):

$$u_o = (\bar{u}+h_o) \in (\bar{u}+H_A), \tag{12,12}$$

existe y es única (corolario 8.1). El elemento $h_o \in H_A$ es la solución generalizada del problema variacional (12.8), o del problema de valores en la frontera (12.9).

8. Finalmente, construyendo una sucesión minimizante de la funcional de energía (12.11), en términos del proceso variacional que se haya seleccionado, del teorema 11.1, el n-ésimo elemento de la sucesión es la n-ésima aproximación de la solución $h_o \in H_A$, la cual converge en energía, Si A es positivo definido, la

convergencia también es en el sentido de la norma original.

En conclusión, los 8 puntos acabados de expresar ofrecen una forma de la técnica del método variacional de la energía.

FALTA PAGINA

No. 69

IV : PROBLEMA VARIACIONAL DE LA FUNCIONAL

$$F(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} A_{ik}(x) u_{,i} u_{,k} + \frac{1}{2} C(x) u^2 - f(x) u \right] dx - \int_{\Gamma} g_2(x) u \, d\Gamma$$

13. El caso $g_2(x) \equiv 0$.

Sea la integral

$$F_1(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} A_{ik}(x) u_{,i} u_{,k} + \frac{1}{2} C(x) u^2 - f(x) u \right] dx \tag{13.1}$$

definida en un dominio finito Ω del espacio Euclideano m-dimensional E_m, y cuya frontera Γ es una superficie (m-1)-dimensional seccionalmente suave. Asumiremos que los coeficientes $A_{ik}(x) = A_{ki}(x)$, $C(x)$ y $f(x)$ son elementos del espacio lineal $C(\bar{\Omega})$, esto es, son funciones continuas y acotadas en $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Estudiemos el problema variacional de la funcional $F_1(u)$ en el espacio de Hilbert separable $L_2(\Omega)$, definida en el conjunto

$$D(F_1) = \{u : u \varepsilon C^{(1)}(\bar{\Omega}),\ u\big|_\Gamma = g_1(x)\}, \tag{13.2}$$

donde $g_1 \varepsilon C(\Gamma)$ es una función prescrita sobre la superficie Γ. Entonces, si existe al menos una función $\bar{u} \varepsilon D(F_1)$, $D(F_1)$ contiene un subespacio afín de la forma

$$u = \bar{u}+h, \qquad h \varepsilon N_1, \tag{13.3}$$

donde

$$N_1 = \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega) = \{h : h \varepsilon C^{(1)}(\bar{\Omega}),\ h\big|_\Gamma = 0\} \tag{13.4}$$

es un subespacio lineal en $L_2(\Omega)$. Probemos las dos siguientes proposiciones.

F_1 satisface la restricción 4.1: $D(F_1)$ es un subespacio afín siempre denso en $L_2(\Omega)$. El conjunto de funciones finitas en un dominio acotado Ω: funciones infinitamente diferenciables en Ω y diferentes de cero sólo en algún subdominio de Ω, es siempre denso en $L_2(\Omega)$*. Entonces $N_1 C L_2(\Omega)$ es siempre denso en $L_2(\Omega)$, y esto es condición necesaria y suficiente para que el subespacio afín $D(F_1)$ también lo sea.

F_1 satisface la restricción 4.2: $F_1(u) = F_1(\bar{u}+h)$ es continuamente diferenciable un número suficiente de veces sobre el subespacio n-dimensional $N_1^n \subset N_1$. Esto es, la función $F_1(u) = F_1(\bar{u}+a_i h_i)$, $a_i h_i \varepsilon N_1^n$, $i = 1,2,\ldots,n$, es continuamente diferenciable un número suficiente de veces con respecto a las variables

*[6] Teorema 1.3.4, p. 16.

a_i. Es claro que la función

$$F_1(\bar{u}+a_ih_i) = a_ra_s\int_\Omega\left[\frac{1}{2}A_{ik}h_{r,i}h_{s,k}+\frac{1}{2}Ch_rh_s\right]dx$$

$$+\ a_r\int_\Omega\left[A_{ik}\bar{u}_{,i}h_{r,k}+C\bar{u}h_r-fh_r\right]dx+\int_\Omega\left[\frac{1}{2}A_{ik}\bar{u}_{,i}\bar{u}_{,k}+\frac{1}{2}C\bar{u}^2-f\bar{u}\right]dx$$

es continuamente diferenciable con respecto a a_i.

Por lo tanto, del teorema 4.1, la funcional F_1 posee una diferencial de Gateaux

$$VF_1(u,h) = \int_\Omega\left[A_{ik}u_{,i}h_{,k}+Cuh-fh\right]dx \qquad (13.5)$$

en todo punto $u \in D(F_1)$, distributiva en $h \in N_1$.

Teorema 13.1. Los elementos del dominio de definición del gradiente de F_1 son aquéllos, y sólo aquéllos, que satisfacen las siguientes condiciones:

1) $u \in D(F_1)$, y
2) el vector $A_{ik}u_{,i}$ posee una divergencia generalizada en el dominio Ω, la cual es un elemento del espacio $L_2(\Omega)$.

Necesidad. El elemento $u \in D(\text{grad } F_1)$. Por definición del gradiente de una funcional, $D(\text{grad } F_1) \subseteq D(F_1)$ y $VF_1(u,h)$ es una funcional acotada en $h \in N_1$. Así, necesariamente, $u \in D(F_1)$ y $VF_1(u,h)$ es una funcional distributiva y acotada en el subespacio lineal N_1 denso en $L_2(\Omega)$. Entonces, del teorema de F.

Riesz, existe un único elemento $v \in L_2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega A_{ik}u,_i h,_k dx = (v,h) = -\int_\Omega -vhdx, \qquad h \in N_1. \qquad (13.6)$$

Por definición*, $-v \in L_2(\Omega)$ es la divergencia generalizada del vector $A_{ik}\, u,_i$ en el dominio Ω.

Suficiencia. Si se satisfacen las condiciones 1 y 2, de (13,5) y (13.6), la funcional

$$VF_1(u,h) = \int_\Omega [v+Cu-f]hdx = (v+Cu-f,h), \qquad h \in N_1, \qquad (13.7)$$

es distributiva y acotada en el subespacio lineal N_1 denso en $L_2(\Omega)$. Por lo tanto, al igual que en (4.4),

$$VF_1(u,h) = DF_1(u,h) = (\text{grad } F_1(u),h), \quad u \in D(\text{grad } F_1), \; h\varepsilon L_2(\Omega). \qquad (13.8)$$

Luego entonces, si convenimos en denotar a la divergencia generalizada en igual forma que en el caso ordinario: $-v = (A_{ik}u,_i),_k$, donde los elementos en dicha suma no poseen significado separadamente,

$$D(\text{grad } F_1) = D(U_1) = \{u{:}u\; C^{(1)}(\bar\Omega), \exists (A_{ik}u,_i),_k \varepsilon L_2(\Omega), u\big|_\Gamma = g_1(x)\}, \qquad (13.9)$$

y de (13.7) y (13,8),

---

*[6] II. 4.3, p.71.

$$\text{grad } F_1(u) = U_1u-f = -(A_{ik}(x)u,_i),_k+C(x)u-f(x). \tag{13.10}$$

Particularmente, si el vector $A_{ik}u,_i$ es continuamente diferenciable en $\bar{\Omega}$, su divergencia generalizada existe y coincide con su divergencia ordinaria*, por lo que, asumiendo a $A_{ik}\varepsilon C^{(1)}(\bar{\Omega})$,

$$D(U_1) \supset \{u: u\varepsilon C^{(2)}(\bar{\Omega}),\ u\big|_\Gamma = g_1(x)\}. \tag{13.11}$$

Del teorema 5.1 se sigue el siguiente resultado.

Corolario 13.1. Si la funcional F_1 tiene un valor extremo en el punto $u_o\varepsilon D(F_1)$, entonces u_o es solución de su correspondiente problema de Euler

$$U_1u = f, \qquad u\varepsilon D(U_1). \tag{13.12}$$

Lema 13.1. Si las funciones $A_{ik}(x)$ y $C(x)$ son tales que:

$$A_{ik}(x)t_it_k \geq \mu_o t_k t_k, \qquad C(x) \geq 0, \qquad \forall x\varepsilon\bar{\Omega}, \tag{13,13}$$

donde μ_o = cte > 0 y t_k son cualesquiera números reales, entonces la segunda diferencial de Gateaux de la funcional F_1 satisface la desigualdad

$$V^2F_1(u,h,h) \geq 0, \qquad h\varepsilon N_1, \tag{13,14}$$

en todo punto $u\varepsilon D(F_1)$, y $V^2F_1(u,h,h) = 0$ si y sólo

*[6] I.2.1, p.21.

si h es el elemento cero.

Demostración. Tomando la diferencial de Gateaux de la funcional (13.5), en la dirección $h \varepsilon N_1$,

$$V^2F_1(u,h,h) = \int_\Omega [A_{ik}h,_i h,_k + Ch^2] dx \geq \mu_o \int_\Omega h,_k h,_k dx \geq 0, \qquad (13.15)$$

en donde la condición $(13.13)_1$ se ha utilizado para $t_k = h,_k$. Por otro lado, si $V^2F_1(u,h,h) = 0$, entonces $h = cte$ y, puesto que $h\varepsilon N_1$, $h = 0$. Inversamente, si $h = 0$, $h,_k = 0$ y $V^2F_1(u,h,h) = 0$.

Con este resultado, de los teoremas 5.1 y 5.3, se concluye la siguiente condición necesaria y suficiente de extremo.

Teorema 13.2. Si las condiciones (13.13) se cumplen, entonces para que la funcional F_1 tenga un valor mínimo absoluto en el punto $u_o \varepsilon D(F_1)$, es condición necesaria y suficiente que u_o sea un punto crítico suyo: sea solución del problema de Euler (13.12).

El punto crítico u_o (si existe) es único.

La unicidad del punto u_o se infiere del lema 13.1 y de la relación de Lagrange (5.5).

Resumiendo: La funcional F_1 definida en el conjunto (13.2), el cual contiene un subespacio afín de la forma (13.3), satisface las restricciones 4.1 y 4.2, y posee una diferencial distributiva de Gateaux (13.5) en todo punto de su dominio de definición. Si u_o es un punto extremo de ella, entonces éste es solución de su correspondiente problema de Euler (13.12); u_o es un punto crí tico . Además, si las condiciones (13.13) se cumplen, su punto crítico (si existe) es único y le asigna un valor mínimo absoluto.

14. Condiciones naturales y principales de frontera.

Consideremos ahora el problema variacional de la funcional

$$F_2(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}A_{ik}(x)u,_i u,_k + \frac{1}{2}C(x)u^2 - f(x)u\right]dx - \int_\Gamma g_2(x)u\,d\Gamma \qquad (14.1)$$

definida en el subespacio lineal $D(F_2) = C^{(1)}(\bar{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$. Como antes, Ω es un dominio finito del espacio E_m, cuya frontera Γ es seccionalmente suave, y $A_{ik}(x) = A_{ki}(x)$, $C(x)$, $f(x)$ son funciones del espacio $C(\bar{\Omega})$. El elemento $g_2(x)\varepsilon C(\Gamma)$ es una función prescrita sobre Γ. A diferencia, en este caso, las funciones $u\varepsilon D(F_2)$ no están sujetas a ningún tipo de condiciones de frontera.

Al subespacio lineal $D(F_2) = C^{(1)}(\bar{\Omega})$ se le puede considerar como un subespacio afín lineal ($\bar{u}$ es el elemento cero), entonces, con lo ya establecido, F_2 satisface las restricciones 4.1 y 4.2, y posee una diferencial distributiva de Gateaux

$$VF_2(u,h) = \int_\Omega \left[A_{ik}u,_i h,_k + Cuh - fh\right]dx - \int_\Gamma g_2 h\,d\Gamma \qquad (14.2)$$

en todo punto $u\varepsilon D(F_2)$, en la dirección $h\varepsilon N_2 = D(F_2)$.

Mostremos que en este caso los elementos del dominio $D(\text{grad } F_2) \subset D(F_2)$ satisfacen una condición natural de frontera. Es claro que los elementos del dominio $D(F)$ no necesariamente satisfacen a ésta.

Teorema 14.1. Los elementos del dominio de definición del gradiente de F_2 son aquéllos, y sólo aquéllos, que satisfacen las siguientes condiciones:

1) $u\varepsilon D(F_2)$,
2) el vector $A_{ik}u,_i$ posee una divergencia generalizada $(A_{ik}u,_i),_k\varepsilon L_2(\Omega)$, y
3) u satisface la condición de frontera

$$A_{ik}u,_i n_k\Big|_\Gamma = g_2(x). \tag{14.3}$$

Los números n_k son los cosenos directores del vector unitario exterior, normal a la superficie Γ.

Necesidad. Sea $u\varepsilon D(\text{grad } F_2)$. Por definición de gradiente $D(\text{grad } F_2)\subseteq D(F_2)$ y, necesariamente, $u\varepsilon D(F_2)$. Así mismo, la diferencial $VF_2(u,h)$ es una funcional acotada en $h\varepsilon D(F_2)$. Entonces, para u fijo, $VF_2(u,h)$ es una funcional lineal en $L_2(\Omega)$ y, en particular, es una funcional distributiva y acotada en todo subespacio lineal denso en $L_2(\Omega)$. De acuerdo a esto, si consideramos momentaneamente a $VF_2(u,h)$ definida en $\mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$, entonces, del mismo razonamiento hecho para (13,6), el vector $A_{ik}u,_i$ posee una divergencia generalizada $(A_{ik}u,_i),_k\varepsilon L_2(\Omega)$. Ahora bien, continuando con $VF_2(u,h)$ definida en $D(F_2) = C^{(1)}(\bar{\Omega})$, e integrando por partes a (14,2) (la condición 2 se satisface), se obtiene

$$VF_2(u,h) = \int_\Omega \left[-(A_{ik}u,_i),_k+Cu-f\right]hdx+\int_\Gamma \left[A_{ik}u,_in_k-g_2\right]hd\Gamma, \tag{14.4}$$

la cual es una funcional acotada en $L_2(\Omega)$. Por lo tanto, necesariamente, (14.3) se satisface.

Suficiencia. Las condiciones 1, 2 y 3 se satisfacen. Integrando por partes a (14.2),

$$VF_2(u,h) = \int_\Omega \left[-(A_{ik}u,_i),_k+Cu-f\right]hdx. \tag{14.5}$$

Puesto que $\left[-(A_{ik}u,_i),_k+Cu-f\right]\varepsilon L_2(\Omega)$, (14.5) es una funcional lineal (acotada) en $L_2(\Omega)$. Entonces, $u\varepsilon D(\text{grad } F_2)$ y, de (4.4),

$$VF_2(u,h) = DF_2(u,h) = (\text{grad } F_2(u),h), \quad u\varepsilon D(\text{grad } F_2),\ h\varepsilon L_2(\Omega). \tag{14.6}$$

Por lo tanto,

$$D(\text{grad } F_2) = D(U_2) = \{u:u\varepsilon C^{(1)}(\bar{\Omega}), \exists(A_{ik}u,_i),_k\varepsilon L_2(\Omega), A_{ik}u,_in_k\big|_\Gamma=g_2(x)\}, \tag{14.7}$$

y de (14.5) y (14.6),

$$\text{grad } F_2(u) = U_2u-f = -(A_{ik}(x)u,_i),_k+C(x)u-f(x). \tag{14.8}$$

Particularmente, si el vector $A_{ik}u,_i$ es continuamente diferenciable en $\bar{\Omega}$ (si su divergencia generalizada es ordinaria), entonces, asumiendo a $A_{ik}\varepsilon C^{(1)}(\bar{\Omega})$,

$$D(U_2)\supset\{u:u\varepsilon C^{(2)}(\bar{\Omega}),\ A_{ik}u,_in_k\big|_\Gamma = g_2(x)\}. \tag{14.9}$$

Definición 14.1. A aquella condición de frontera del problema de Euler de una funcional dada, no satisfecha necesariamente por los elementos del dominio de definición de la funcional, se le denomina condición natural de frontera del problema variacional. Si ésto no es así, a tal condición se le denomina condición principal de frontera.

De acuerdo a esta definición: toda condición de frontera de un problema variacional es condición principal, en tanto que, toda condición de frontera de un problema de Euler es o condición principal o condición natural.

Como corolario del teorema 5.1, se tiene el siguiente hecho.

Corolario 14.1. Si la funcional F_2 tiene un valor extremo en el punto $u_o \varepsilon D(F_2)$, entonces u_o es solución de su correspondiente problema de Euler

$$U_2 u = f, \qquad u \varepsilon D(U_2). \tag{14.10}$$

La condición de frontera del problema de Euler (14.10) es condición natural de la funcional F_2. Así también, si $g_2(x) \equiv 0$, ésta es condición natural de la funcional F_1 (13.1). La condición de frontera en (13.9): $u\big|_\Gamma = g_1(x)$, es condición principal de las funcionales F_1 y F_2.

Lema 14.1. Si las funciones $A_{ik}(x)$ y $C(x)$ son tales que

$$A_{ik}(x)t_i t_k \geq \mu_o t_k t_k, \qquad C(x) \geq C_c, \tag{14.11}$$

donde μ_o y C_o son constantes positivas distintas de cero y t_k son cualesquiera números reales, entonces

$$V^2F_2(u,h,h) \geq 0, \quad h\varepsilon N_2 = D(F_2), \tag{14.12}$$

en todo punto $u\varepsilon D(F_2)$, y $V^2F_2(u,h,h) = 0$ si y sólo si $h = 0$.

Demostración. Tomando la diferencial de Gateaux de la funcional (14.2), en la dirección $h\varepsilon D(F_2)$,

$$V^2F_2(u,h,h) = \int_\Omega \left[A_{ik}h,_i h,_k + Ch^2\right]dx \geq \int_\Omega \left[\mu_o h,_k h,_k + Ch^2\right]dx \geq C_o\int_\Omega h^2 dx \geq 0,$$

y $V^2F_2(u,h,h) = 0$ si y sólo si $||h|| = 0$.

Por lo tanto, de los teoremas 5.1 y 5.2 y de la relación de Lagrange (5.5):

Teorema 14.2. Si las condiciones (14.11) se cumplen, entonces para que la funcional F_2 tenga un valor mínimo absoluto en el punto $u_o\varepsilon D(F_2)$, es condición necesaria y suficiente que u_o sea un punto crítico suyo: sea solución del problema de Euler (14.10).

El punto crítico u_o (si existe) es único.

Obsérvese la importante diferencia entre las condiciones suficientes (13.13) y (14.11).

FALTAN PAGINAS

De la: 82

A la: 83

V : FORMULACION VARIACIONAL DE LOS PROBLEMAS DE DIRICHLET Y NEWMANN

15. El problema de valores en la frontera.

Sea la expresión diferencial de segundo orden,

$$Lu = -A_{ik}(x)u,_{ik}+A_k(x)u,_k+A_o(x)u, \tag{15.1}$$

bajo las siguientes asunciones:

1. La variable independiente x es un punto en algún dominio finito Ω del espacio Euclideano m-dimensional E_m, cuya frontera Γ es una superficie (m-1)-dimensional seccionalmente suave: $x\epsilon\bar{\Omega} = \{\Omega\cup\Gamma\}CE_m$.
2. Los coeficientes $A_{ik}(x)$, $A_k(x)$ y $A_o(x)$, funciones definidas en $\bar{\Omega}$ $(i,k = 1,2,\ldots,m)$, son tales que: A_{ik}, $A_k\epsilon C^{(1)}(\bar{\Omega})$,

$A_o \varepsilon C(\bar{\Omega})$, $A_o(x) \geq 0 \ \forall \ x\varepsilon\bar{\Omega}$.

3. El dominio de definición del operador formal L es

$$D(L) = C^{(2)}(\bar{\Omega}). \tag{15.2}$$

4. La matriz de coeficientes $A_{ik}(x)$ es simétrica: $A_{ik}(x) = A_{ki}(x)$, $x\varepsilon\bar{\Omega}$.

5. La expresión diferencial Lu es del tipo elíptico en el dominio $\bar{\Omega}$, o sea, todos los valores propios $\lambda_i(x)$ de la matriz simétrica $A_{ik}(x)$ son funciones positivas o negativas en todo $x\varepsilon\bar{\Omega}$: $\lambda_i(x) > 0$ ó $\lambda_i(x) < 0$, $x\varepsilon\bar{\Omega}, i = 1,2,\ldots,m$. Asumiremos siempre el caso positivo; si esto no fuese así, bastaría con multiplicar por -1 a la expresión diferencial Lu.

6. Lu es una expresión diferencial formalmente autoadjunta. Esto es, Lu es idéntica a su correspondiente expresión diferencial formalmente adjunta

$$Mu = -(A_{ik}u)_{,ik} - (A_k u)_{,k} + A_o u. \tag{15.3}$$

Así pues, hechas estas asunciones, las siguientes proposiciones resultan ser válidas.

a) La condición 4 siempre puede ser asumida. De (15.2), $u\varepsilon C^{(2)}(\bar{\Omega})$, o sea, $u(x)$ posee segundas derivadas continuas en $\bar{\Omega}$, y consecuentemente, $u_{,ik} = u_{,ki}$, $i, k = 1,2,\ldots,m$. Entonces $A_{\underline{ik}} u_{,\underline{ik}} + A_{\underline{ki}} u_{,\underline{ki}} = (A_{\underline{ik}} + A_{\underline{ki}}) u_{,\underline{ik}}$, y a la expresión $A_{ik}+A_{ki}$ se le puede descomponer siempre en dos términos simétricos.

b) Lu es una expresión diferencial no degenerada, o sea, los valores propios $\lambda_i(x)$ de la matriz $A_{ik}(x)$ son tales que

$$\lambda_i(x) \geq \mu_o = \text{cte} > 0, \qquad \forall x \in \bar{\Omega},\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{15.4}$$

De la condición 5, y puesto que $A_{ik} \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, los valores propios $\lambda_i(x)$ resultan ser funciones continuas y positivas en el conjunto compacto (cerrado y acotado) $\bar{\Omega} \in E_m$. Consecuentemente, las funciones $\lambda_i(x)$ están acotadas por abajo en el dominio $\bar{\Omega}$ por alguna constante positiva μ_o. Por otro lado, de la desigualdad $A_{ik}(x)t_i t_k \geq \lambda_1(x)t_k t_k$, $x \in \bar{\Omega}, i,k = 1,2,\ldots,m$, donde t_k son cualesquiera número - ros reales y $\lambda_1(x)$ es el menor valor propio, a la condición (15.4) se le puede expresar por

$$A_{ik}(x)t_i t_k \geq \mu_o t_k t_k, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, i,k = 1,2,\ldots,m;\ \mu_o = \text{cte} > 0. \tag{15.5}$$

c) A la expresión diferencial (15.1) se le puede expresar en la forma

$$Lu = -(A_{ik}(x)u,_i),_k + C(x)u, \tag{15.6}$$

donde $C(x) = A_o(x)$. Definiendo $B_k(x) = A_k(x) + A_{ik}(x),_i$ y $C(x) = A_o(x)$, las expresiones diferenciales (15.1) y (15.3), mutuamente adjuntas, toman la forma

$$Lu = -(A_{ik}u,_i),_k + B_k u,_k + Cu,$$

$$Mu = -(A_{ik}u,_i),_k-(B_ku),_k+Cu.$$

Por lo tanto, de la condición 6, $Lu \equiv Mu$, y esto es si y sólo si $B_k(x) \equiv 0$.

d) La primera y segunda fórmula de Green para la expresión diferencial formalmente autoadjunta Lu resultan ser:

$$\int_\Omega vLudx = \int_\Omega \left[A_{ik}u,_i v,_k + Cuv \right] dx - \int_\Gamma A_{ik}u,_i vn_k d\Gamma, \tag{15.7}$$

$$\int_\Omega \left[vLu - uLv \right] dx = \int_\Gamma A_{ik} \left[v,_i u - u,_i v \right] n_k d\Gamma, \tag{15.8}$$

donde n_k son los cosenos directores del vector normal y exterior a la superficie Γ.

Pasemos ahora a estudiar dos casos del problema de valores en la frontera

$$Lu = f(x), \tag{15.9}$$

$$G_{\underline{k}}u \Big|_{\Gamma_{\underline{k}}} = g_k(x), \tag{15.10}$$

en donde: L es el operador diferencial acabado de definir, $u(x)$ es la función incógnita, $f(x)$ es el término libre de la ecuación diferencial, y (15.10) son las condiciones de frontera del problema. En este estudio se aplicará el método variacional de la energía, según los lineamientos dados en el punto 12.

16. El problema de Dirichlet.

Sea el problema de Dirichlet de la ecuación diferencial (15.9):

$$U_1 u = -(A_{ik}(x)u,_i),_k + C(x)u = f(x), \quad u \varepsilon D(U_1); \tag{16.1}$$

$$D(U_1) = \{u : u \varepsilon C^{(1)}(\bar{\Omega}), \exists (A_{ik}u,_i),_k \varepsilon L_2(\Omega),\ u\big|_\Gamma = g_1(x)\}. \tag{16.2}$$

La función $(A_{ik}\, u,_i),_k$ es la divergencia generalizada del vector $A_{ik}u,_i$ en el dominio Ω , y $g_1(x)\varepsilon C(\Gamma)$ es una función prescrita sobre la superficie Γ.

Considerando a U_1 como un operador en el espacio de Hilbert separable $L_2(\Omega)$, y asumiendo que existe al menos una función $\bar{u}\varepsilon D(U_1)$, entonces, al igual que para (13.2), $D(U_1)$ contiene un subespacio afín de la forma

$$u = \bar{u} + h, \qquad h\varepsilon M_1, \tag{16.3}$$

donde $M_1 = \{h : h\varepsilon C^{(1)}(\bar{\Omega}), \exists (A_{ik}h,_i),_k \varepsilon L_2(\Omega),\ h\big|_\Gamma = 0\}$ (16.4)

es un subespacio lineal siempre denso en $L_2(\Omega)$; $D(U_1)$ es siempre denso en $L_2(\Omega)$.

Ahora bien, de la segunda fórmula de Green (15.8),

$$U_1(u,v) - U_1(v,u) = \int_\Gamma A_{ik}(v,_i u - u,_i v) n_k d\Gamma, \quad u,v\varepsilon D(U_1), \tag{16.5}$$

donde $U_1(u,v) = (U_1 u, v)$ es una funcional bilineal en $L_2(\Omega)$, la igualdad

$$U_1(h,h') = U_1(h',h) \tag{16.6}$$

se cumple para todo h y $h' \varepsilon M_1$. Esto es, U_1 es un operador simétrico. Por lo tanto, U_1 es un operador potencial en $D(U_1)$ (corolario 9.3), y el problema de Dirichlet (16.1) es el problema de Euler de la funcional (12.6)

$$F_1(u) = \frac{1}{2}U_1(u,u)-(f,u)+ \frac{1}{2}U_1(\bar{u},u)- \frac{1}{2}U_1(u,\bar{u}), \quad u\varepsilon D(U_1). \tag{16.7}$$

Aplicando las fórmulas de Green (15.7) y (15.8), en los términos $U_1(u,u)$ y $U_1(\bar{u},u)-U_1(u,\bar{u})$,

$$F_1(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}A_{ik}(x)u,_i u,_k + \frac{1}{2}C(x)u^2-f(x)u\right]dx, \quad u\varepsilon D(F_1). \tag{16.8}$$

Téngase presente que los términos constantes son irrelevantes. Así, $F_1(u)$ es el potencial del campo U_1u-f, $f\varepsilon L_2^*(\Omega)$, y la estacionareidad de $F_1(u)$ es el principio variacional asociado al problema de Dirichlet. Obsérvese que la funcional $F_1(u)$ es, precisamente, la funcional del problema variacional estudiado en el punto 13; $D(F_1)$ es el conjunto (13.2).

Probemos que el operador simétrico U_1 es positivo:

$$U_1[h] = (U_1h,h) \geq 0, \quad \forall h\varepsilon M_1, \quad y \quad U_1[h] = 0 \iff h = 0\varepsilon M_1. \tag{16.9}$$

De la primer fórmula de Green (15.7), y de la desigualdad (15.5) para $t_k = h,_k$,

$$U_1[h] = \int_\Omega [A_{ik}h,_i h,_k + Ch^2]dx \geq \mu_o \int_\Omega h,_k h,_k dx \geq 0, \quad \forall h \epsilon M_1, \qquad (16.10)$$

puesto que $C(x) = A_o(x) \geq 0$, $x \epsilon \bar{\Omega}$ (asunción 2 en 15). Si $U_1[h] = 0$, entonces $h = cte \; \epsilon M_1$ y $h = 0$. Inversamente, si $h = 0$, $h,_k = 0$ y $U_1[h] = 0$.

Por lo tanto, $F_1(u)$ tiene un mínimo absoluto en el punto $u_o \epsilon D(F_1)$ si y sólo si u_o es solución del problema de Dirichlet (16.1). El punto crítico u_o (si existe) es único (corolario 10.1). Por otro lado, la funcional (12.8)

$$G_1(h) = \frac{1}{2}U_1[h] - (\bar{f},h) = \int_\Omega [\frac{1}{2}A_{ik}h,_i h,_k + \frac{1}{2}Ch^2 - \bar{f}h]dx, \quad h \epsilon D(G_1), \qquad (16.11)$$

donde $\bar{f} = f - U_1\bar{u}$, es la funcional de energía del operador positivo U_1. $G_1(h)$ tiene un mínimo absoluto en el punto $h_o \epsilon D(G_1) = N_1$ (13.4) si, y sólo si, h_o es solución del problema de Dirichlet homogéneo

$$U_1^o h = -(A_{ik}(x)h,_i),_k + C(x)h = \bar{f}(x), \quad h \epsilon D(U_1^o) = M_1 \qquad (16.12)$$

(Corolario 10.2).

Probemos que el operador positivo U_1 es positivo definido:

$$U_1[h] \geq \gamma^2 ||h||^2, \quad \forall h \varepsilon M_1; \quad \gamma = \text{cte} > 0. \tag{16.13}$$

De la desigualdad de Friedrich*:

$$\int_\Omega h,_k h,_k dx \geq \frac{1}{K}\int_\Omega h^2 dx, \qquad K = \text{cte} > 0, \tag{16.14}$$

válida para toda función $h\varepsilon \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$ (13.4), y de la desigualdad de positividad (16.10), donde $h\varepsilon M_1 C \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$, se sigue la desi - gualdad de positividad definida (16.13):

$$U_1[h] \geq \mu_o \int_\Omega h,_k h,_k dx \geq \frac{\mu_o}{K}\int_\Omega h^2 dx = \gamma^2 ||h||^2, \forall h\varepsilon M_1; \gamma^2 = \frac{\mu_o}{K} = \text{cte} > 0.$$

Por lo tanto, a la funcional de energía (16.11), del operador positivo definido U_1, se le puede extender a todo el espacio de energía H_{U_1}:

$$G_1(h) = \frac{1}{2}|||h|||^2 - (\bar{f},h), \qquad h\varepsilon H_{U_1}, \tag{16.15}$$

existiendo un único elemento $h_o \varepsilon H_{U_1}$ en el cual (16.15) tiene un mínimo absoluto (corolario 10.4). El elemento $h_o \varepsilon H_{U_1}$ es la so - lución generalizada de los problemas (16.11) y (16.12).

La solución generalizada del problema variacional (16.8), o del problema de Dirichlet (16.1),

$$u_o = (\bar{u}+h_o)\varepsilon(\bar{u}+H_{U_1}),$$

---

*[6] V. 14.1, p. 290.

existe y es única (corolario 8.1).

Por último, del teorema 11.1 y del resultado (11.5), toda suce - sión minimizante de la funcional de energía (16.15) aproxima, tanto en energía, como en la media, a la solución generalizada $h_o \varepsilon H_{U_1}$.

17. El espacio de energía H_{U_1}.

Teorema 17.1. El espacio de energía H_{U_1} del operador U_1, positivo definido en $M_1 C L_2(\Omega)$, está constituido por aquellos elementos h, y sólo aquéllos, que satisfacen las siguientes condiciones:

1) $h \varepsilon L_2(\Omega)$,
2) posee primeras derivadas generalizadas $h,_i \varepsilon L_2(\Omega)$, y
3) satisface la condición de frontera en (16.4) en sentido generalizado: existe una sucesión de funciones $\{h_k\} \varepsilon M_1$ tal que

$$||h_n - h|| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad ||h_{n,i} - h,_i|| \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{17.1}$$

Necesidad. El elemento $h \varepsilon H_{U_1}$. Del teorema 7.1, $M_1 C\ H_{U_1} C L_2(\Omega)$, y, necesariamente, $h \varepsilon L_2(\Omega)$. Ahora bien, puesto que $h \varepsilon L_2(\Omega)$ y es un elemento del espacio de energía H_{U_1}, del teorema 7.2 se sigue la existencia de una sucesión $\{h_k\} \varepsilon M_1$ tal que

$$||h_n - h|| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad |||h_n - h_{n'}||| \underset{n,n'\to\infty}{\to} 0. \tag{17.2}$$

Probemos, pues, que $(17.2)_2$ es condición suficiente para que $h\varepsilon H_{U_1}CL_2(\Omega)$ posea primeras derivadas generalizadas $h,_i\varepsilon L_2(\Omega)$ y $(17.1)_2$ se satisfaga. De (15.5), para $t_k = h_{n,k}-h_{n';k}$,

$$|||h_n-h_{n'}|||^2 = U_1[h_n-h_{n'}] \geq \mu_o \sum_{k=1}^{m} ||h_{n,k}-h_{n';k}||^2 \underset{n,n'\to\infty}{\to} 0,$$

o sea, la sucesión de derivadas $\{h_{i,k}\}$ es fundamental en $L_2(\Omega)$ y, por consiguiente, converge a algún elemento $v_k\varepsilon L_2(\Omega)$. Por lo tanto, puesto que $\{h_i\}$ y $\{h_{i,k}\}$ convergen en $L_2(\Omega)$ a los límites h y v_k, la función $v_k\varepsilon L_2(\Omega)$ es la derivada generarizada de $h(x)$ en Ω^*: h posee primeras derivadas generalizadas $h,_k = v_k\varepsilon L_2(\Omega)$.

Suficiencia. Los coeficientes A_{ik}, $C\varepsilon C(\bar{\Omega})$ son funciones continuas y acotadas por alguna constante N en el dominio cerrado $\bar{\Omega}$. Así, los valores propios de $A_{ik}(x)$ resultan también ser funciones del espacio $C(\bar{\Omega})$. Denotando por $\bar{N}$ a la cota superior de dichos valores propios, entonces,

$$A_{ik}t_i t_k \leq \bar{N}t_k t_k$$

para cualesquiera números reales t_k. Por lo tanto, cumpliéndose las condiciones 1, 2 y 3,

$$|||h_n-h_{n'}|||^2 = U_1[h_n-h_{n'}] \leq \bar{N}\sum_{k=1}^{m} ||h_{n,k}-h_{n';k}||^2+N||h_n-h_{n'}||^2 \underset{n,n'\to\infty}{\to} 0,$$

*[6] Teorema 2.3.1, p.25.

esto es, la sucesión $\{h_i\}$ es fundamental en energía y converge a algún elemento $v \varepsilon H_{U_1}$. Por otro lado, de $(17.1)_1$, $h_n \to h$ y, consecuentemente, se concluye que $h = v$, $h \varepsilon H_{U_1}$.

Luego entonces, el espacio de energía H_{U_1} queda definido por el conjunto

$$H_{U_1} = \{h: h\varepsilon L_2(\Omega), \exists h,_i \varepsilon L_2(\Omega), \exists \{h_k\} \varepsilon M_1 \ni h_n \to h,\ h_n,_i \to h,_i\}, \tag{17.3}$$

siendo las funcionales,

$$[h,h'] = \int_\Omega [A_{ik}(x)h,_i h',_k + C(x)hh']dx, \tag{17.4}$$

$$|||h|||^2 = \int_\Omega [A_{ik}(x)h,_i h,_k + C(x)h^2]dx, \tag{17.5}$$

sus correspondientes producto en energía y norma en energía al cuadrado.

18. El problema de Newmann.

Estudiemos ahora el problema de Newmann de la ecuación diferencial (15.9):

$$U_2 u = -(A_{ik}(x)u,_i),_k + C(x)u = f(x), \qquad u\varepsilon D(U_2); \tag{18.1}$$

$$D(U_2) = \{u: u\varepsilon C^{(1)}(\bar{\Omega}), \exists (A_{ik}u,_i),_k \varepsilon L_2(\Omega),\ A_{ik}u,_i n_k\Big|_\Gamma = g_2(x)\}, \tag{18.2}$$

donde U_2 es un operador en $L_2(\Omega)$, $(A_{ik}u,_i),_k$ es la divergencia generalizada del vector $A_{ik}u,_i$ en Ω, $g_2(x)\varepsilon C(\Gamma)$ es una función prescrita sobre Γ, y n_k son los cosenos directores de la normal exterior a Γ. Asumiremos que el coeficiente

$$C(x) \geq C_o = \text{cte} > 0 \tag{18.3}$$

en todo punto $x\epsilon\bar{\Omega}$*, y que existe al menos una función $\bar{u}\epsilon D(U_2)$.

Entonces, de manera análoga que para (13.2), $D(U_2)$ contiene un subespacio afín siempre denso en $L_2(\Omega)$:

$$u = \bar{u}+h, \qquad h\epsilon M_2; \tag{18.4}$$

$$M_2 = \{h:h\epsilon C^{(1)}(\bar{\Omega}), \exists(A_{ik}h,_i),_k\epsilon L_2(\Omega),\ A_{ik}h,_i n_k\Big|_\Gamma = 0\}. \tag{18.5}$$

Probemos que el operador U_2 resulta ser positivo definido:

$$U_2[h] \geq \gamma^2||h||^2, \qquad \forall h\epsilon M_2; \quad \gamma = \text{cte} > 0. \tag{18.6}$$

De la primer fórmula de Green (15.7),

$$U_2[h] = \int_\Omega [A_{ik}h,_i h,_k + Ch^2]dx, \qquad h\epsilon M_2, \tag{18.7}$$

esto es, U_2 es un operador simétrico. Ahora bien, de la desi - gualdad (15.5) para $t_k = h,_k$, y de la asunción (18.3),

$$U_2[h] \geq \int_\Omega [\mu_o h,_k h,_k + Ch^2]dx \geq C_o\int_\Omega h^2dx = \gamma^2||h||^2,\ \forall h\epsilon M_2;\ \gamma^2 = C_o = \text{cte} > 0.$$

---

* Véase el caso $C(x) \equiv 0$ en [6] V. 16.2, p. 327.

Luego entonces, la asunción (18.3) es condición suficiente para la positividad definida del operador U_2. Obsérvese que en este caso la desigualdad de Friedrich (16.14) no es válida.

Por lo tanto, el potencial (12.6) del campo U_2u-f,

$$F_2(u) = \frac{1}{2}U_2(u,u)-(f,u)+\frac{1}{2}U_2(\bar{u},u)-\frac{1}{2}U_2(u,\bar{u}), \quad u\varepsilon D(U_2), \tag{18.8}$$

aplicando las fórmulas de Green (15.7) y (15.8), resulta ser de la forma

$$F_2(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}A_{ik}(x)u,_i u,_k + \frac{1}{2}C(x)u^2 - f(x)u\right]dx - \int_\Gamma g_2(x)u\,d\Gamma, \quad u\varepsilon D(F_2). \tag{18.9}$$

Obsérvese que ésta es la funcional del problema variacional estudiado en el punto 14. $F_2(u)$ tiene un mínimo absoluto en el punto $u_o\varepsilon D(F_2) = C^{(1)}(\bar{\Omega})$ si y sólo si u_o es solución del problema de Newmann (18.1) (corolario 10.1).

La funcional de energía (12.8) del operador positivo definido U_2,

$$G_2(h) = \frac{1}{2}U_2\left[h\right]-(\bar{f},h) = \int_\Omega\left[\frac{1}{2}A_{ik}h,_i h,_k + \frac{1}{2}Ch^2 - \bar{f}h\right]dx, \quad h\varepsilon D(G_2), \tag{18.10}$$

tiene un mínimo absoluto en el punto $h_o\varepsilon D(G_2) = C^{(1)}(\bar{\Omega})$ si, y sólo si, h_o es solución del problema de Newmann homogéneo

$$U_2^o h = -(A_{ik}(x)h,_i),_k + C(x)h = \bar{f}(x), \quad h\varepsilon D(U_2^o) = M_2, \tag{18.11}$$

$\overline{f} = f - U_2\overline{u}$ (corolario 10.2). Por otro lado, puesto que U_2 es positivo definido, $G_2(h)$ puede ser extendida a todo el espacio de energía H_{U_2}:

$$G_2(h) = \frac{1}{2}|||h|||^2 - (\overline{f},h), \qquad h\varepsilon H_{U_2}, \tag{18.12}$$

existiendo un único elemento $h_o \varepsilon H_{U_2}$ en el cual (18.12) tiene un valor mínimo absoluto (corolario 10.4); h_o es la solución generalizada de los problemas (18.10) y (18.11).

Por lo tanto, la solución generalizada del problema variacional (18.9), o del problema de Newmann (18.1):

$$u_o = (\overline{u}+h_o)\varepsilon(\overline{u}+H_{U_2}), \tag{18.13}$$

existe y es única (corolario 8.1).

Toda sucesión minimizante de la funcional de energía (18.12) converge en energía y en la media a la solución generalizada $h_o \varepsilon H_{U_2}$ (teorema 11.1 y resultado (11.5)).

Teorema 18.1. El espacio de energía H_{U_2} del operador U_2, positivo definido en $M_2 C L_2(\Omega)$, está constituido por aquellos elementos h, y sólo aquéllos, que satisfacen las siguientes condiciones:

1) $h\varepsilon L_2(\Omega)$,
2) posee primeras derivadas generalizadas $h_{,i}\varepsilon L_2(\Omega)$, y
3) satisface la condición de frontera en (18.5) en sentido generalizado:

existe una sucesión de funciones $\{h_k\}\varepsilon M_2$ tal que

$$||h_n-h|| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad |||h_{n,i}-h_{,i}||| \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{18.14}$$

La prueba de este teorema se sigue en términos análogos a la del teorema 17.1. Entonces, el espacio de energía H_{U_2} queda definido por el conjunto

$$H_{U_2} = \{h:h\varepsilon L_2(\Omega), \exists h_{,i}\varepsilon L_2(\Omega), \exists\{h_k\}\varepsilon M_2 \ni h_n\to h,\ h_{n,i}\to h_{,i}\}, \tag{18.15}$$

siendo las funcionales (17.4) y (17.5) sus correspondientes producto en energía y norma en energía al cuadrado.

FALTA PAGINA

No. 100

R E F E R E N C I A S

1. Vainberg, M. M., Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden Day, 1964.

2. Magri, F., Variational formulation for every linear equation

3. Mikhlin, S. G., Variational methods in mathematical physics, Pergamon, 1964.

4. Mikhlin, S. G., The problem of the minimum of a quadratic functional, Holden Day, 1965.

5. Mikhlin, S. G., The numerical performance of variational methods, Wolters Noordhoff, 1971.

6. Mikhlin, S. G., Mathematical physics, an advanced course, North Holland, 1970.

7. Kantorovich, L. V., Krylov, V. I., Aproximate methods of higher analysis, Interscience, 1958.

8. Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional, Mir, 1972.

9. Smirnov, V. I., A course of higher mathematics, Vol. V, Pergamon, 1964.

10. Arhiezer, N. I., Glazman, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, Frederick Ungar, 1966.