

01149

0403

139

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DEL DOCTORADO



CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES
DINAMICAS DE UNA ESTRUCTURA MEDIANTE
EXCITACION CON FRECUENCIA VARIABLE

T E S I S

Que para obtener el grado de:
MAESTRO EN INGENIERIA
(ESTRUCTURAS)

P R E S E N T A

Kenji Shibayama Yoshida

México, D. F.

1964

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

C O N T E N I D O

	Pág
Introducción	1
Objeto	2
Descripción del edificio	2
Antecedentes de los resultados experimentales	3
Planteamiento del problema	5
Resultados y discusión	10
Conclusiones	12
Nomenclatura	11
Apéndice	15
Referencias	17

N O M E N C L A T U R A

- c : constante de amortiguamiento viscoso, kg seg/cm
- k : constante del resorte, kg/cm
- m : masa del brazo del vibrador, $\text{kg seg}^2/\text{cm}$
- M : masa de la estructura, $\text{kg seg}^2/\text{cm}$
- p_1 : frecuencia circular de la estructura de un grado de libertad no amortiguada, rad/seg
- p_1' : frecuencia circular de la estructura de un grado de libertad amortiguada, rad/seg
- P : fuerza de excitación, kg
- $q(z)$: fuerza de excitación variable en el tiempo, kg
- r : radio de giro del brazo del vibrador, cm
- t : tiempo, seg
- T : periodo fundamental de la estructura, seg
- x : desplazamiento de la masa en el instante t , cm
- x_s : deformación estática, cm
- \ddot{x}_0 : aceleración de excitación, cm/seg^2
- Los puntos sobre las literales denotan derivadas respecto al tiempo.

- α : aceleración angular, rad/seg²
 β : coeficiente en el método β de Newmark
 Δt : incremento de tiempo, seg
 θ : desplazamiento angular, rad
 ξ : fracción de amortiguamiento crítico
 z : tiempo variable de integración, seg
 φ : ángulo de fase, rad
 ω : frecuencia circular del excitador, rad/seg

INTRODUCCION

Una de las propiedades dinámicas más importantes de las estructuras es la capacidad de disipación de energía que tienen los elementos estructurales que resisten fuerzas horizontales. Esta capacidad puede deberse a comportamiento no lineal o a amortiguamiento propiamente dicho y usualmente se mide como porcentaje del amortiguamiento crítico.

Cuando una estructura se somete a una excitación dinámica, las magnitudes de las deformaciones y los esfuerzos en los elementos estructurales dependen, entre otros factores, de su amortiguamiento, de manera que, mientras más pequeño sea este, las respuestas tienden a ser más grandes. De aquí la importancia de conocer el porcentaje de amortiguamiento crítico de las estructuras, como una mejor base para el análisis sísmico.

Generalmente al amortiguamiento se determina mediante ensayos de vibración forzada con un excitador mecánico o bien pruebas de vibración mediante la aplicación de un desplazamiento o una velocidad inicial a la estructura. De los registros de desplazamiento o aceleración obtenidos de estos

ensayos es posible estimar con buena aproximación el amortiguamiento de la estructura mediante las expresiones que se describen en el Apéndice.

En el presente trabajo se consignan los resultados experimentales obtenidos en las pruebas de vibración forzada y de desplazamiento inicial de un edificio del Conjunto Urbano Nonoalco Tlalteolco, así como el procedimiento seguido y la discusión de los resultados. En la parte final se incluyen algunas conclusiones.

OBJETO

La finalidad del presente trabajo es el análisis de un sistema con un grado de libertad, sujeto a una fuerza de excitación cuya variación con el tiempo se asemeja a la de la excitación producida por un vibrador en una estructura real. Los resultados de este análisis son las respuestas de aceleraciones, velocidades y desplazamientos, los cuales se discuten a la luz de los obtenidos experimentalmente.

El estudio se enfoca únicamente al modo fundamental del edificio en la dirección transversal.

DESCRIPCION DEL EDIFICIO

El edificio que se ha seleccionado para los ensayos es el tipo B que se localiza en la Calle Manuel González No.114

en el Conjunto Urbano Nonoalco Tlaltelolco, México, D. F. Consta de dos cuerpos altos y tres cuerpos bajos de ocho niveles formando medios niveles como se muestra en la fig 1. El edificio en planta tiene 9.15 x 63.15 m y tiene una altura de 20.95 m . La estructura es de concreto reforzado con losas aligeradas con bloques, diagonales de contraventeo y muros de carga de tabique.

La cimentación está resuelta a base de cascarones cilíndricos y trabes. Parte de su carga está compensada por excavación y parte se toma mediante pilotes de fricción. El edificio se destina a habitaciones.

Una descripción más completa del edificio se encuentra en la ref 2.

ANTECEDENTES DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para la determinación de las propiedades dinámicas del edificio en estudio, se realizaron pruebas de vibración forzada mediante un excitador mecánico, así como ensayos de vibración mediante excitación por tracción o de desplazamiento inicial. De esta manera se obtuvieron las frecuencias de vibración y el porcentaje de amortiguamiento crítico. Una descripción detallada de las pruebas se encuentra en la ref 2 y los resultados se resumen en la tabla I.

Una aproximación al porcentaje de amortiguamiento crí-

tico se determinó de la curva de resonancia de la fig. 2 obtenida de la prueba de vibración forzada y mediante la expresión descrita en la sección c del Apéndice.

El vibrador utilizado en las pruebas mencionadas consta de un brazo con una masa en el extremo que al girar alrededor de un eje vertical produce una fuerza centrífuga que se transmite al edificio. El movimiento del brazo es producido por un motor de combustión interna con sistemas de ejes y engranes para conseguir las velocidades requeridas³.

En el edificio ensayado se ha observado que cuando se lleva el vibrador a su máxima velocidad y a partir de esta se deja el brazo en movimiento libre, sin la acción del motor, hasta el reposo, la frecuencia de excitación a través del tiempo tiene una ley de variación que depende de la masa colocada en el extremo del brazo.

Para obtener la frecuencia fundamental del edificio, la masa total del brazo fue 95 kg. Al revisar los registros se observó que la ley de variación de la frecuencia fue aproximadamente lineal con el tiempo, como se muestra en la fig 3. Sin embargo, para obtener los periodos de los modos superiores (segundo y tercero) la masa del brazo se disminuyó hasta 39 kg observándose una variación de la frecuencia como la que se muestra en la fig 4.

La ley de variación de la fig 3 se utilizó para el es-

tudio que a continuación se describe.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Aunque el edificio en estudio tiene varios grados de libertad, en la proximidad a la frecuencia de resonancia la estructura oscila como si fuese de un solo grado de libertad, por lo que así se considera en este estudio. En la fig 5 se muestra un sistema de un grado de libertad excitado por una fuerza P . Esta fuerza, para el caso de frecuencia constante vale $P = m \omega^2 \cos \omega t$.

El análisis de la estructura de la fig 5 consiste en determinar sus respuestas al llevar la frecuencia de excitación más allá de la frecuencia natural del sistema, en donde permanece constante algún tiempo, y empieza después a variar con la misma ley que la observada en los ensayos. Por tanto se tiene en la primera parte un estado estacionario de vibración y luego un estado transitorio durante el cual la frecuencia necesariamente pasa por la frecuencia de resonancia. Estos dos estados están representados esquemáticamente en la fig 6.

La pendiente de la recta A-B representa la desaceleración del brazo del vibrador. El valor utilizado en este estudio es el de la pendiente de la recta media definida por los puntos de la fig 3, o sea $-0.12590 \text{ rad/seg}^2$ y la frecuen

cia natural del sistema es aquella obtenida de los ensayos, $f = 1.00$ cps.

Se estudian tres niveles de excitación máxima, con la misma ley de desaceleración hasta la frecuencia circular $\omega_f = 3.7748$ rad/seg y para cada caso se suponen diferentes porcentajes de amortiguamiento crítico para obtener curvas de resonancia que son comparadas con la curva experimental de la fig 2. Los datos de los problemas analizados se encuentran en la tabla II. En cada problema se supone un amortiguamiento y se obtiene una curva de resonancia.

Inicialmente se valúa el estado estacionario y al final de éste se tienen las condiciones iniciales del estado transitorio. Para el estudio de esta parte se traslada el eje ω (fig 6) al instante en que comienza la variación de la frecuencia de excitación y se considera $t_1 = 0.0$ seg.

Para valuar las respuestas del estado estacionario para una estructura de un grado de libertad como la representada en la fig 5 se parte de la siguiente ecuación diferencial de movimiento⁴.

$$\ddot{x} + 2\xi p_1 \dot{x} + p_1^2 x = \frac{m\omega_b^2 r}{M} \cos \omega_0 t \quad (1)$$

cuya solución es:

$$x = A \cos (\omega_0 t - \varphi) \quad (2a)$$

donde:

$$A = \frac{mr}{M} \frac{\omega_0^2/p_1^2}{\sqrt{(1-\omega_0^2/p_1^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2/p_1^2}} \quad (3a)$$

$$\varphi = \text{ang tan } \frac{2\zeta\omega_0/p_1}{1 - \omega_0^2/p_1^2} \quad (3b)$$

Para la segunda parte o sea el estado transitorio, la respuesta está dada por la integral de Duhamel⁵:

$$x = - \frac{1}{Mp_1'} \int_0^t e^{-\zeta p_1'(t-z)} q(z) \text{sen } p_1'(t-z) dz \quad (4a)$$

En esta ecuación, $q(z)$ es la fuerza variable del excitador que está dada por el producto de la masa y la aceleración en la dirección estudiada.

La fig 7 representa el excitador en planta. El movimiento de la masa proyectado sobre la dirección "y" es armónico y el desplazamiento en esa dirección está dada por:

$$y = r \text{cos } \theta \quad (5a)$$

En esta expresión r es constante y θ varía a través del tiempo de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \omega_0 - \alpha t \quad (6a)$$

de donde:

$$\theta = \int_0^t (\omega_0 - \alpha z) dz = \omega_0 t - \frac{\alpha}{2} t^2 \quad (6b)$$

y

$$\ddot{\theta} = -\alpha \quad (6c)$$

De la ec 5a:

$$y = -r (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \quad (5b)$$

Sustituyendo en ésta las ecs 6a, 6b y 6c, y multiplicando por la masa del brazo se obtiene la fuerza de excitación:

$$q(z) = m\ddot{y} = mr \left[-(\omega_0 - \alpha z)^2 \cos(\omega_0 z - \frac{\alpha}{2} z^2) + \alpha \sin(\omega_0 z - \frac{\alpha}{2} z^2) \right] \quad (7)$$

Sustituyendo esta expresión en la ec 4a se obtiene:

$$x = \frac{mr}{M p_1} \int_0^t e^{-\xi p_1 (t-z)} \left[(\omega_0 - \alpha z)^2 \cos(\omega_0 z - \frac{\alpha}{2} z^2) - \alpha \sin(\omega_0 z - \frac{\alpha}{2} z^2) \right] \sin p_1 (t-z) dz \quad (4b)$$

Esta ecuación resulta de solución bastante complicada. Por lo tanto se optó por una integración numérica haciendo uso de un programa existente para valuar dicha integral en una computadora electrónica. Para este programa es necesario conocer el valor de la función $q(z)$, cuyos valores en los

instantes analizados se generaron por medio de una subrutina en la computadora.

La valuación numérica programada emplea el método β de Newmark. Este consiste en una integración paso a paso de las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio.

Las fórmulas básicas para el caso general del método son las siguientes⁶:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \frac{\Delta t}{2}$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + (\frac{1}{2} - \beta) \ddot{x}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{x}_{i+1} (\Delta t)^2$$

$$\ddot{x} = -2\xi p_1 \dot{x} - p_1^2 (x - x_g) - \ddot{x}_0 \quad (8a)$$

El programa está hecho para $\beta = 1/6$ o sea que, la variación de $q(z)$ en un intervalo Δt es lineal. Para tal caso resultan las siguientes expresiones para el problema planteado:

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{6} (2\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$$

$$\ddot{x} = -2\xi p_1 \dot{x} - p_1^2 x - \frac{m\Gamma}{M} \left[-(\omega_0 - \alpha t)^2 \cos(\omega_0 t - \frac{\alpha}{2} t^2) + \right]$$

$$+ \alpha \text{sen}(\omega_0 t - \frac{\alpha}{2} t^2) \quad (8b)$$

Los valores de x , \dot{x} y \ddot{x} fueron obtenidos por este procedimiento para cada intervalo de tiempo especificado en la tabla II.

RESULTADOS Y DISCUSION

El resultado del procedimiento descrito es la historia del movimiento de la estructura a través del tiempo de excitación expresada como aceleración, velocidad o desplazamiento. Un representativo tramo de la curva de respuesta se muestra en la fig 8, correspondiente a la aceleración de la estructura para el nivel inicial de excitación de $\omega_0 = 12.7549$ rad/seg y 4.0 % de amortiguamiento crítico. Se obtuvieron curvas semejantes para los otros problemas analizados.

A partir de estas curvas de aceleración se trazaron las curvas de resonancia que se muestran en las figs 9 a 11 correspondiente a cada nivel de excitación y a cada fracción del amortiguamiento crítico. Para los casos analizados, las máximas amplitudes para los distintos valores del amortiguamiento supuesto quedan alojadas a la izquierda de la frecuencia fundamental de la estructura de 1.00 cps, obtenida de la curva de resonancia de varios estados estacionarios y empleada como dato de partida en el análisis teórico. Este resul-

tado coincide con los de otra investigación en donde se estudió un caso análogo, obteniéndose además, corrimientos a la derecha de la frecuencia de resonancia cuando la velocidad del vibrador tiene una variación lineal creciente. A medida que la desaceleración es mayor el corrimiento de la máxima amplitud aumenta respecto al máximo de la curva de resonancia obtenida de estados estacionarios. Respecto a las amplitudes máximas se observa que mientras el amortiguamiento y la desaceleración angular son pequeños, las amplitudes resultan un poco menores que las obtenidas con velocidad constante¹.

Sin embargo, para el caso particular del edificio en estudio puede observarse en la fig 2 que la amplitud en la frecuencia de resonancia cuando el brazo del vibrador se encuentra en desaceleración resulta bastante menor a aquella cuando la velocidad es constante; además la frecuencia de resonancia tiene un pequeño corrimiento a la izquierda en ambos casos.

En las curvas de resonancia de las figs 9a y 9b, correspondiente a un nivel de excitación semejante al nivel alcanzado con el vibrador en el prototipo, la frecuencia crítica o de resonancia tiende notablemente a la frecuencia fundamental de la estructura, a medida que el porcentaje de amortiguamiento crítico aumenta.

De las curvas de las figs 9 a 11 se estimaron los porcentajes de amortiguamiento crítico mediante el método descrito en "c" del Apéndice. Se utilizó este método, ya que se obtiene una mejor aproximación que los descritos en "a" o "b". Con los valores de ξ calculados y los ξ supuestos en los datos de los problemas analizados se trazaron las curvas de la fig 12. En ésta se observa que, mientras mayor sea el nivel de excitación y el porcentaje de amortiguamiento crítico el error que se comete en el mismo tiende a reducirse.

En la fig 13 se hace la comparación de las curvas de resonancia experimental (curva b, fig 2) y la teórica del problema 18. En los dos casos resultaron la misma fracción de amortiguamiento crítico o sea de 10.5 aproximadamente; sin embargo la forma de la curva teórica resultó un poco diferente a la de la experimental debido a que en la primera se consideró la estructura como si fuese de un solo grado de libertad. Puede observarse también que en estos dos casos, las frecuencias de resonancia prácticamente coinciden.

CONCLUSIONES

Cuando se realiza una prueba de vibración forzada en una estructura de varios grados de libertad mediante un excitador mecánico y este varía su velocidad con una ley lineal al dejar libre la masa excéntrica, sin la acción del motor,

puede determinarse la curva de resonancia de la estructura, con la que se estima el porcentaje de amortiguamiento crítico con la aproximación necesaria, con ciertas consideraciones, para ser utilizado en el análisis sísmico de la misma. El porcentaje de amortiguamiento así obtenido resulta un poco mayor a aquel obtenido de la curva de resonancia con varios estados estacionarios. Por lo tanto hay que tener en cuenta que la fracción de amortiguamiento crítico que se obtenga depende del nivel de excitación máxima que se logre con el vibrador. También varía ligeramente la frecuencia de resonancia de la estructura.

Cuando la magnitud de desaceleración es del orden de 0.13 rad/seg^2 , el porcentaje de amortiguamiento crítico resultará mayor en 20% y la frecuencia fundamental de la estructura disminuye 2% respecto a los obtenidos cuando las velocidades son constantes.

Generalmente, para obtener valores satisfactorios y tomando en cuenta las consideraciones anteriores, es necesario alcanzar un nivel de excitación suficientemente elevado, de preferencia mayor que vez y media la frecuencia fundamental de la estructura.

AGRADECIMIENTO

El autor agradece sinceramente al Dr. Emilio Rosenblueth, al Ing. Jorge Prince y al Ing. Luis Esteva por sus valiosos consejos en la realización del presente trabajo; también a la Sección de Análisis Numérico del Instituto de Ingeniería y a la División del Doctorado, así como a todas aquellas personas que directa o indirectamente colaboraron.

Finalmente expresa su agradecimiento al Instituto Nacional de la Investigación Científica y a Fundación Ingeniería, A. C. por haberle proporcionado las becas que permitieron realizar los estudios de la maestría y la presente tesis.

A P E N D I C E

METODOS PARA LA DETERMINACION DEL PORCIENTO DE AMORTIGUAMIENTO CRITICO DE LAS ESTRUCTURAS

Cuando el edificio se sujeta a vibración mediante un excitador mecánico, se obtienen curvas de resonancia como la que se muestra en la fig 2. La determinación del amortiguamiento se basa en estas curvas y a continuación se enumeran los siguientes métodos:

a). Mediante la aplicación de la siguiente expresión⁹:

$$\xi = \frac{c}{c_0} = \frac{\Delta f}{2f_n}$$

en donde:

ξ = fracción de amortiguamiento

c = coeficiente de amortiguamiento

c_0 = coeficiente de amortiguamiento crítico

Δf = ancho de la curva de resonancia a 0.707 de la amplitud máxima

f_n = frecuencia natural de la estructura

- b). Una variante de la anterior es la aplicación de la siguiente expresión⁹:

$$\xi = \frac{c}{c_0} = \frac{f_2^2 - f_1^2}{4f_n^2}$$

en donde; f_1 y f_2 son las frecuencias antes y después de la frecuencia de resonancia medida en 0.07 de la amplitud máxima.

- c). Mediante la curva de variación del amortiguamiento para diferentes relaciones de amplitud máxima y la amplitud mínima posterior a la frecuencia de resonancia⁸. Esta curva es la que se muestra en la fig 14.

R E F E R E N C I A S

1. Timoshenko, S., "Vibration Problems in Engineering", D. Van Nostrand Co., Inc., Nueva York. Tercera edición, enero 1955.
2. Del Valle, E. y Prince, J., "Analytical and Experimental Studies of Vibration in Two Buildings", 3er. Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Nva. Zelandia, 1965.
3. Shibayama, K., "Ensayos Dinámicos en un Edificio de Tres Pisos", Tesis Profesional, UNAM. México, 1964.
4. Myklestad, N. O., "Fundamentals of Vibration Analysis", McGraw-Hill Book Co., Inc. Nueva York, 1956.
5. Newmark, N. M. y Rosenblueth, E., "Earthquake Engineering", Inédito. Se edita en 1964 por Prentice-Hall, Inc.
6. Newmark, N. M., "A Method of Computation for Structural Dynamics", Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 85, No. EM3, julio 1959.
7. Norris, C., Hansen, R. y Otros, "Structural Design for Dynamic Loads", McGraw-Hill, Nueva York, 1959.

8. Keightley, W. O., Housner, G. W. y Hudson, D. E., "Vibration Tests of the Encino Dam Intake Tower", California Institute of Technology, Pasadena, Calif., julio 1961.
9. Szapsik, C., "Estudio crítico de la literatura sobre pruebas de vibración forzada", Tesis profesional, UNAM. México, 1961.

Tabla I Propiedades dinámicas del edificio en la dirección transversal

Ensayo	Modo fundamental		ξ
	f cps.	T seg.	
Vibración forzada	1.00 ± 0.02	1.00 ± 0.02	0.08 - 0.09
Desplazamiento inicial	1.04	0.96	---



Tabla II Datos de los problemas analizados

Excitación No.	Valores de ξ supuestos								Nivel de excitación ω ₀ (rad/seg)	α rad/seg ²	T seg.	t ₁ seg.	t _f seg.	Δt seg.
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06	0.08	0.10						
I	1	2	3	4	5	16	17	18	9.56617	0.1259	1.00	0.00	46.00	0.10
II	6	7	8	9	10	---	---	---	12.75490	0.1259	1.00	0.00	72.00	0.10
III	11	12	13	14	15	---	---	---	19.13234	0.1259	1.00	0.00	122.00	0.05

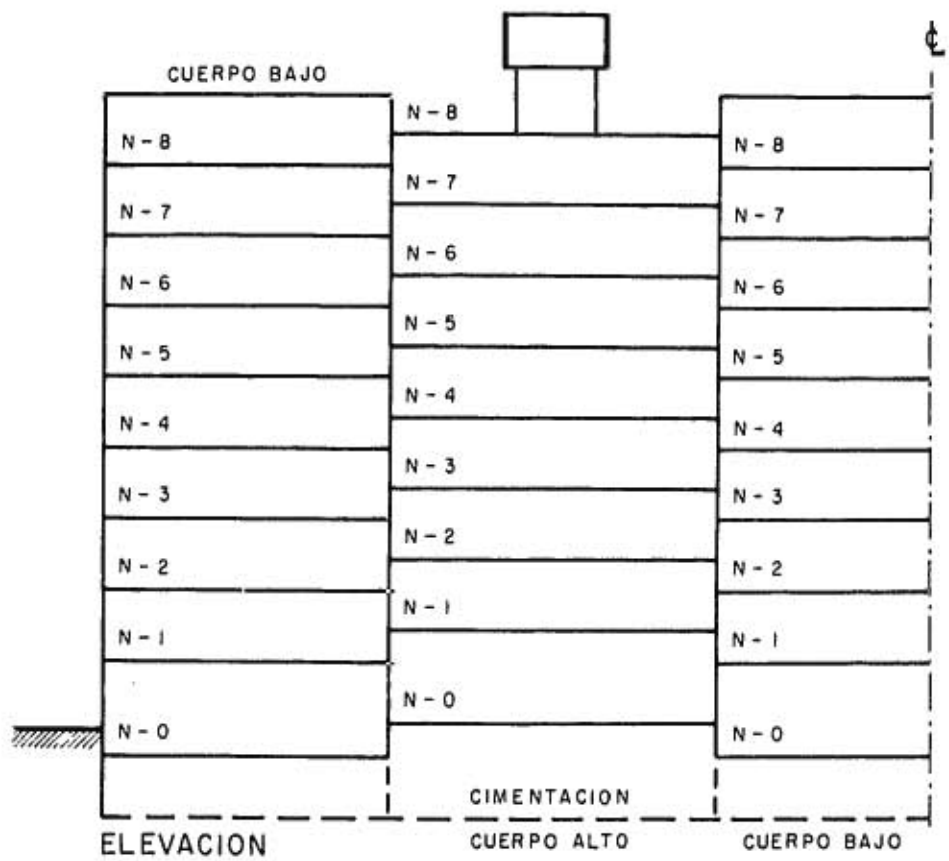
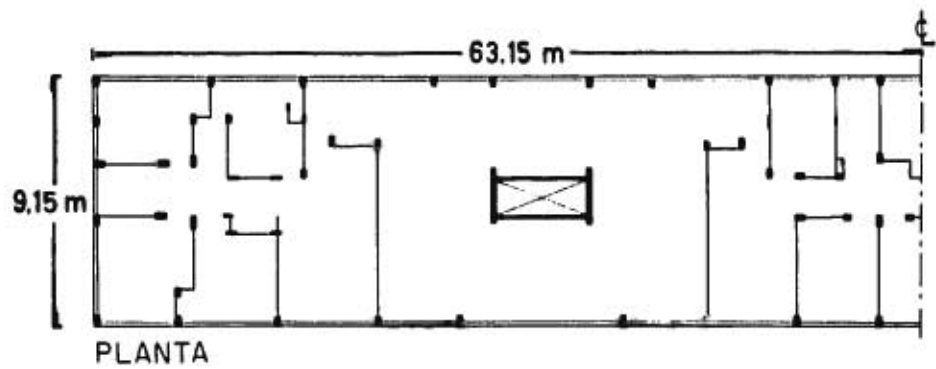


FIG.1 EDIFICIO B

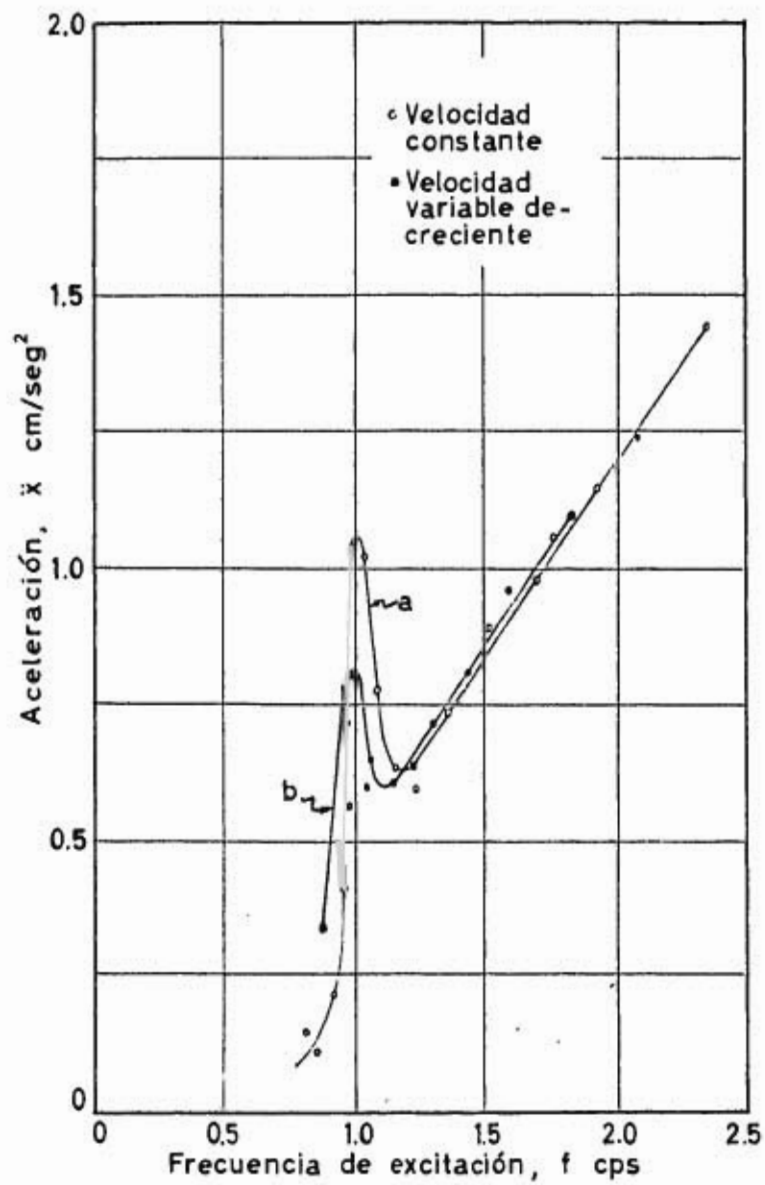


FIG. 2 CURVAS DE RESONANCIA EN LA DIRECCION TRANSVERSAL

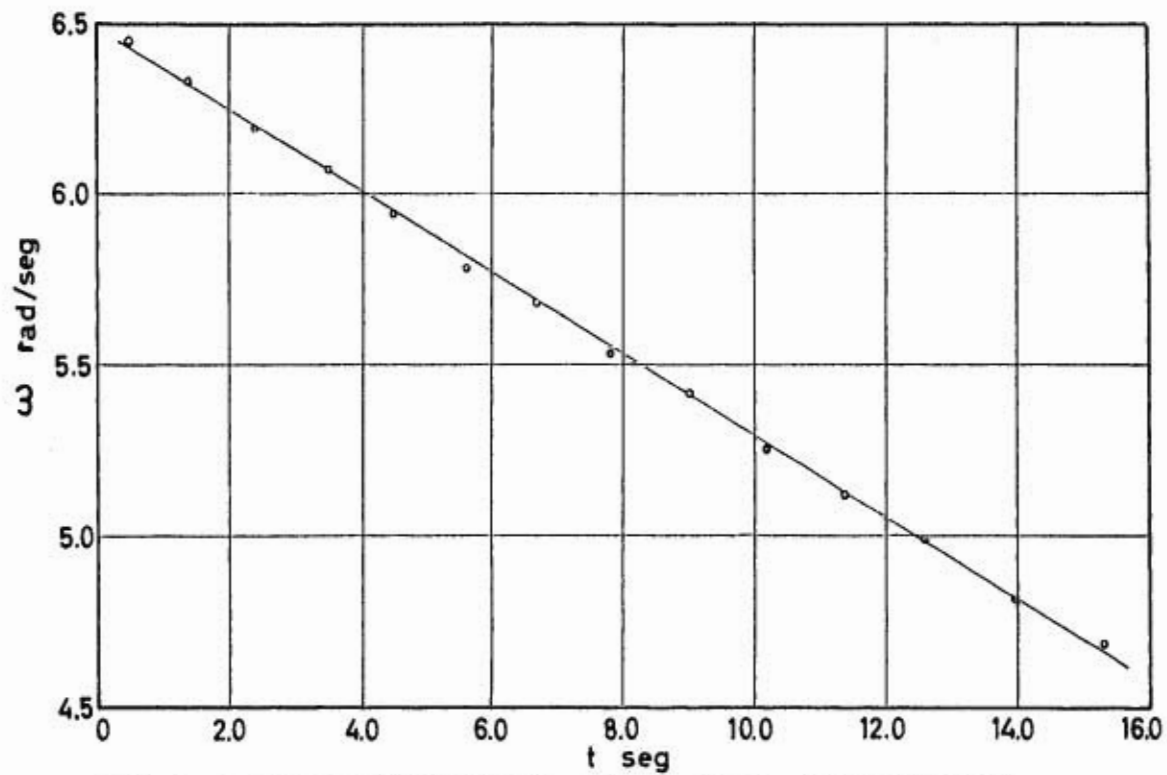


FIG. 3 LEY DE VARIACION $\omega - t$ DEL VIBRADOR

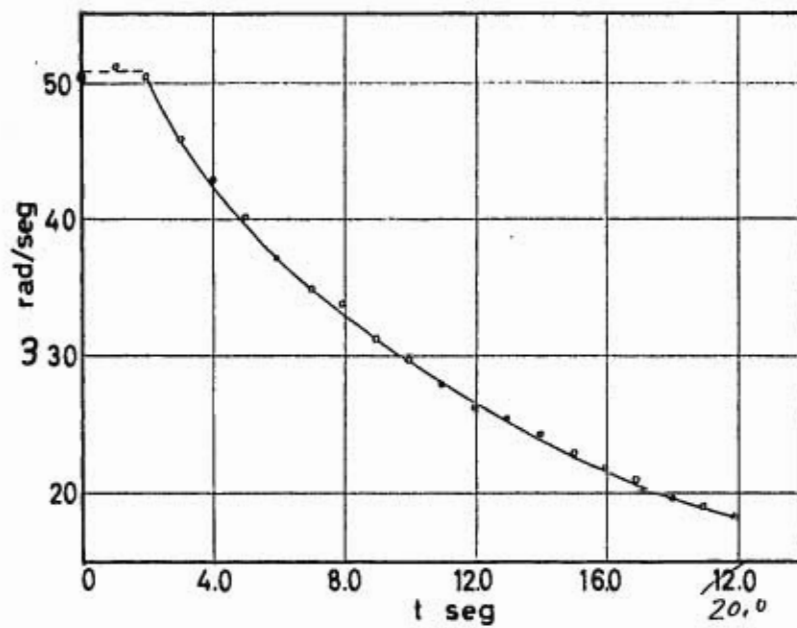


FIG. 4 LEY DE VARIACION $\omega - t$ DEL VIBRADOR

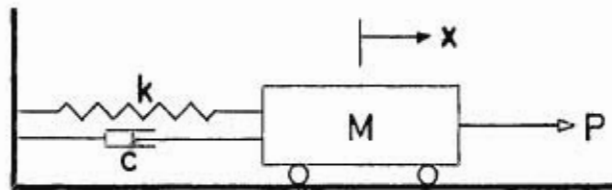


FIG. 5 REPRESENTACION DE UNA ESTRUCTURA DE UN GRADO DE LIBERTAD

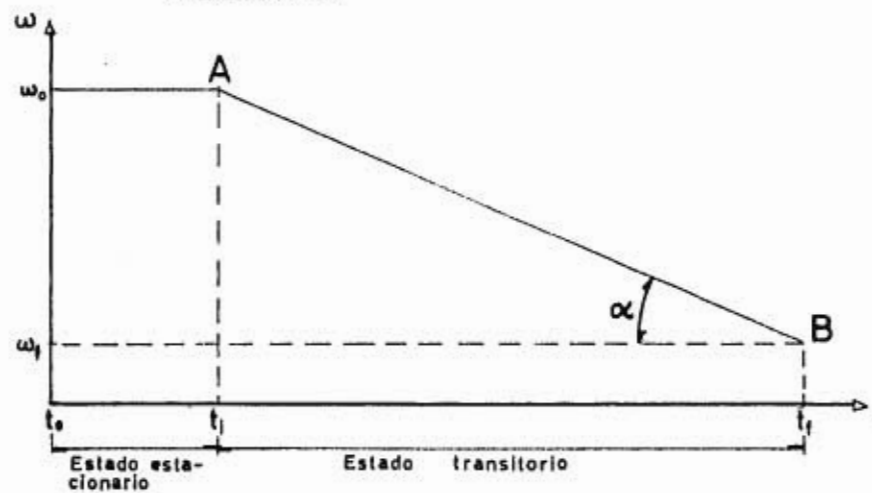


FIG. 6 DIAGRAMA ω - t DE LOS PROBLEMAS

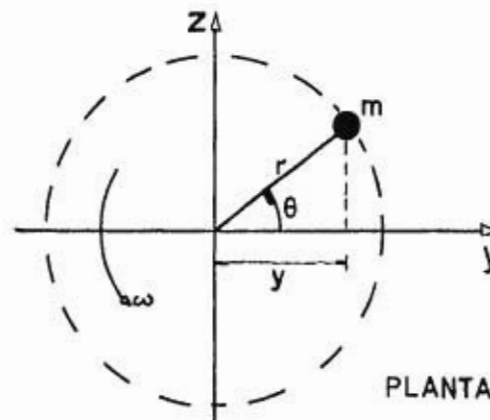


FIG. 7 DIAGRAMA DEL MOVIMIENTO DE LA MASA EXCENTRICA DEL VIBRADOR

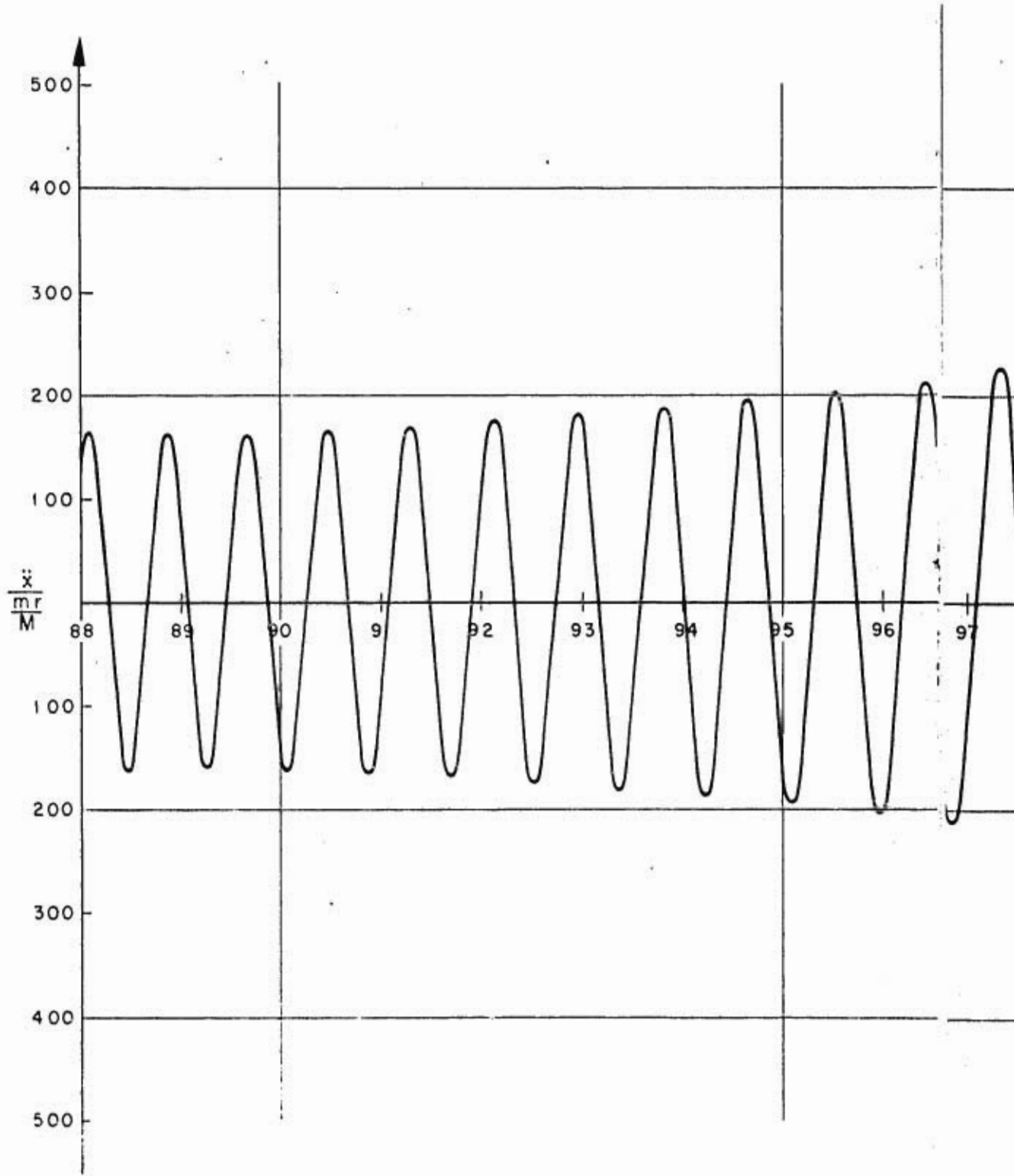


FIG. 8 RESF

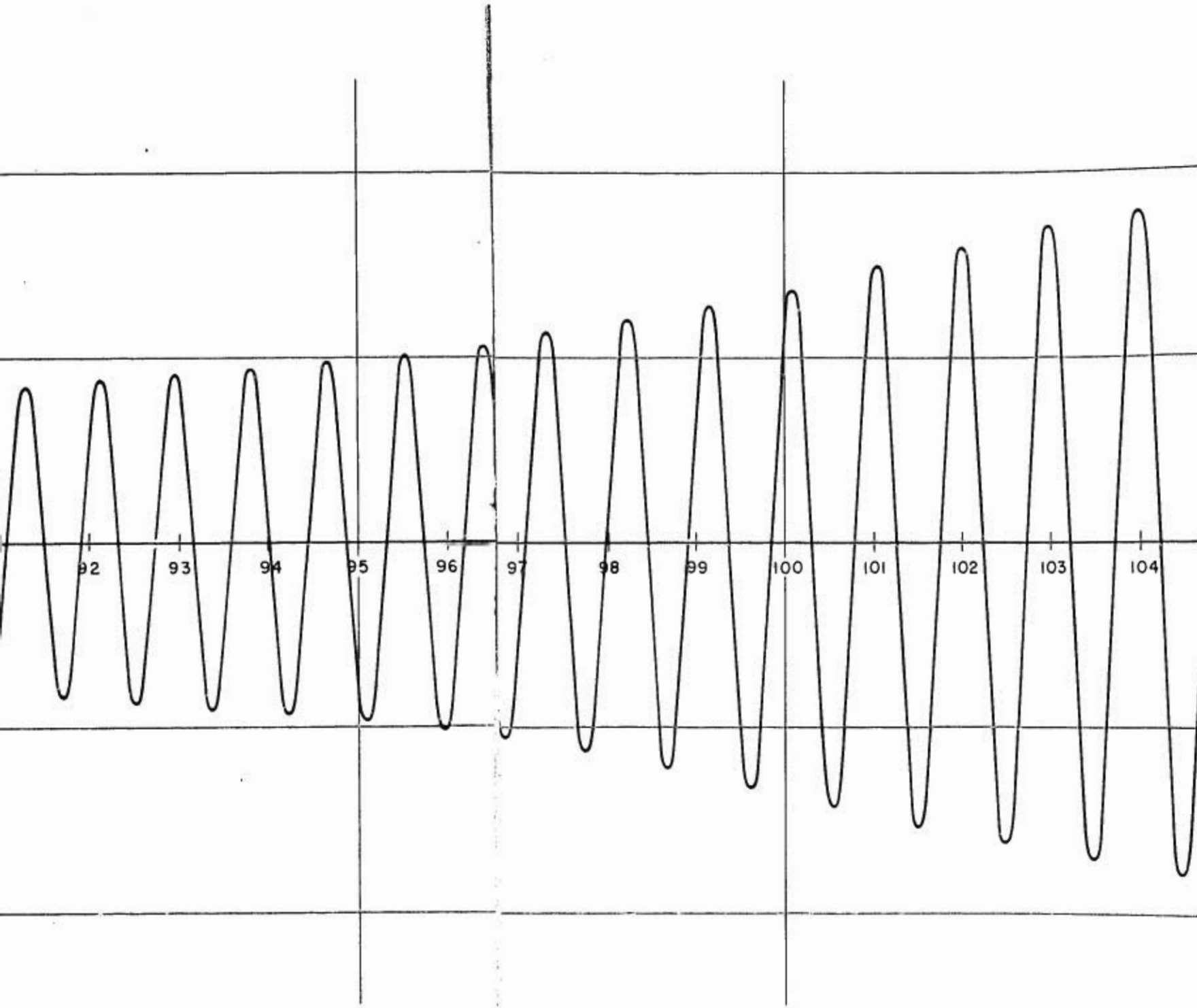
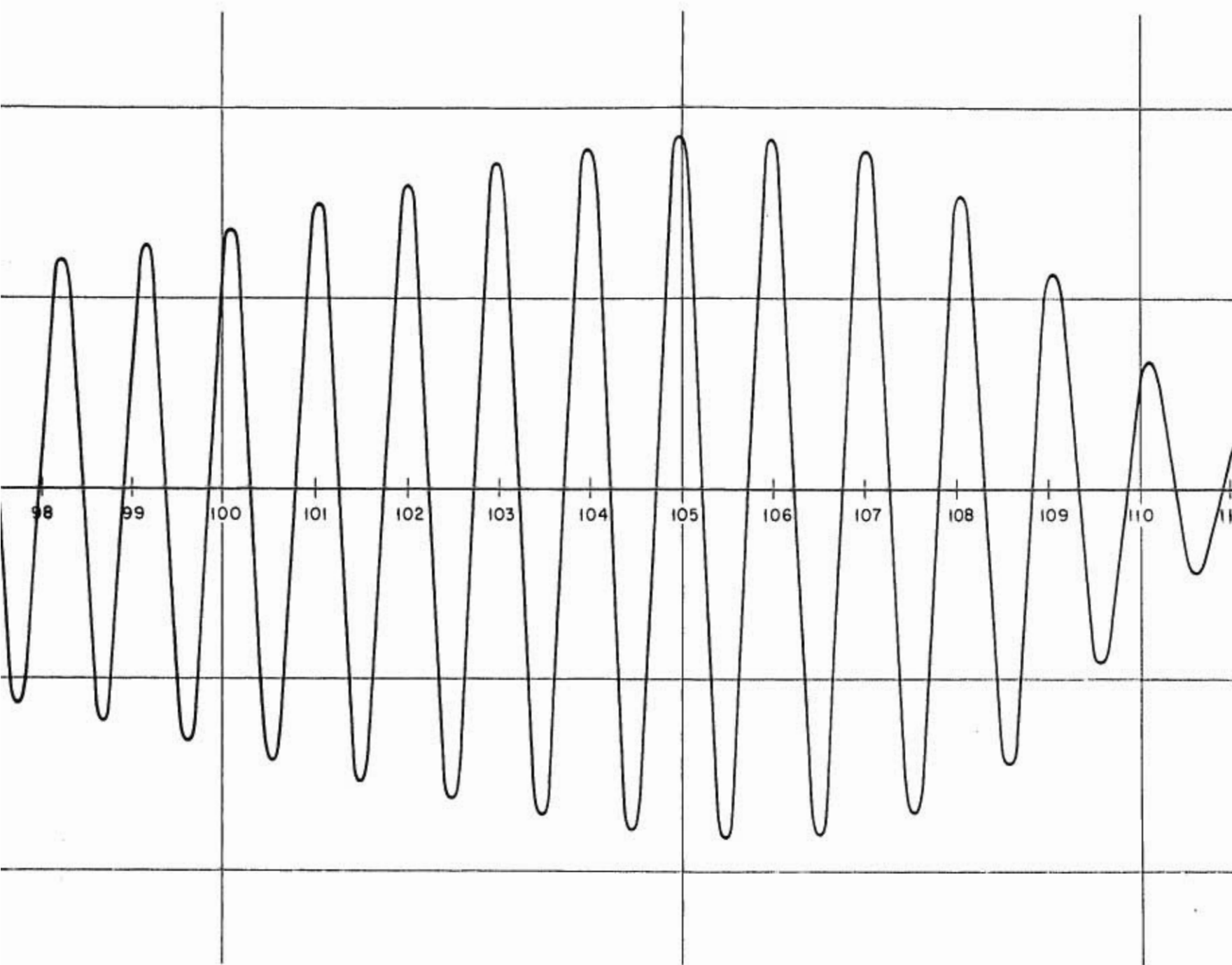
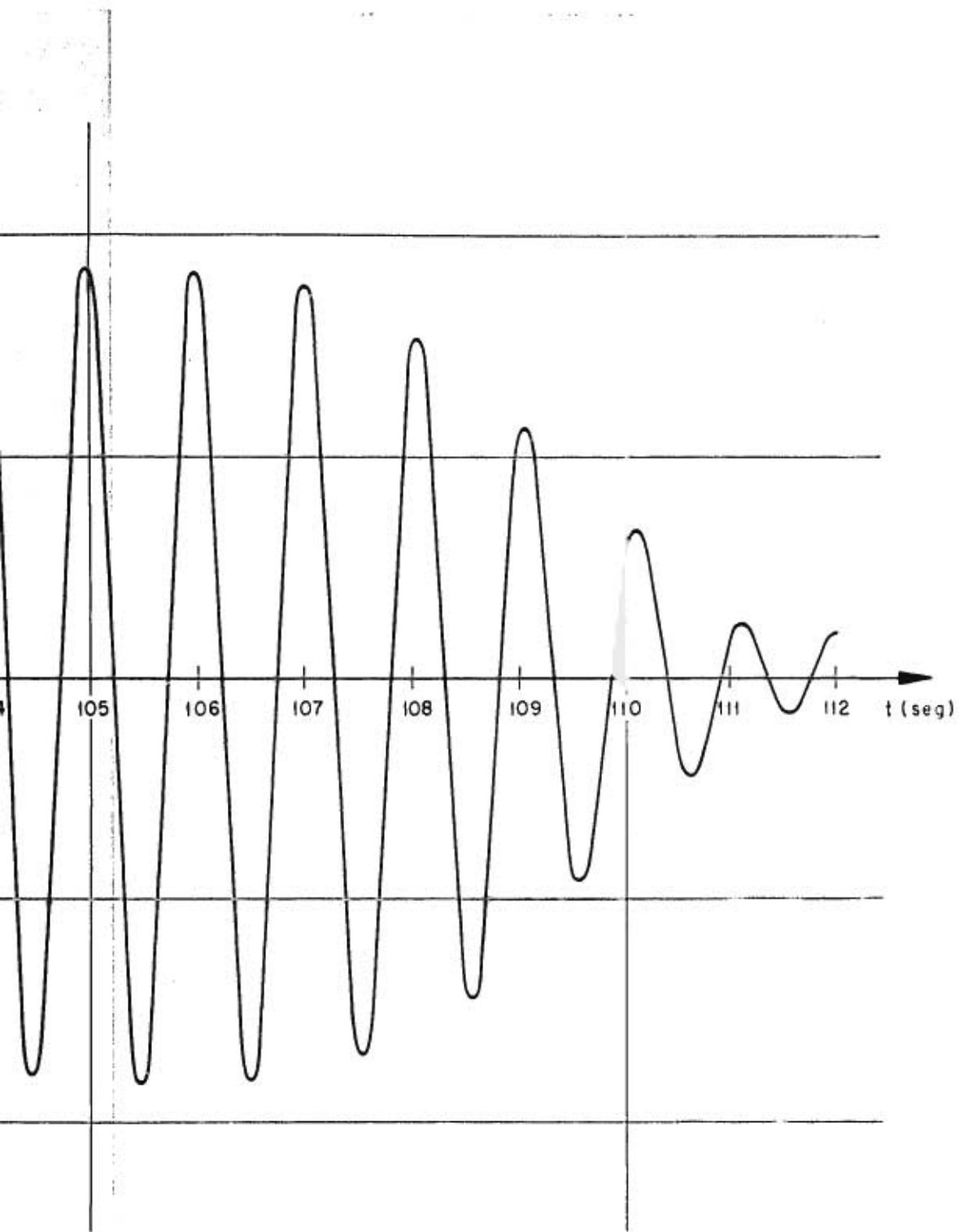


FIG. 8 RESPUESTA DEL PROBLEMA No. 15, $\xi=0.04$



UESTA DEL PROBLEMA No. 15, $\xi = 0.04$



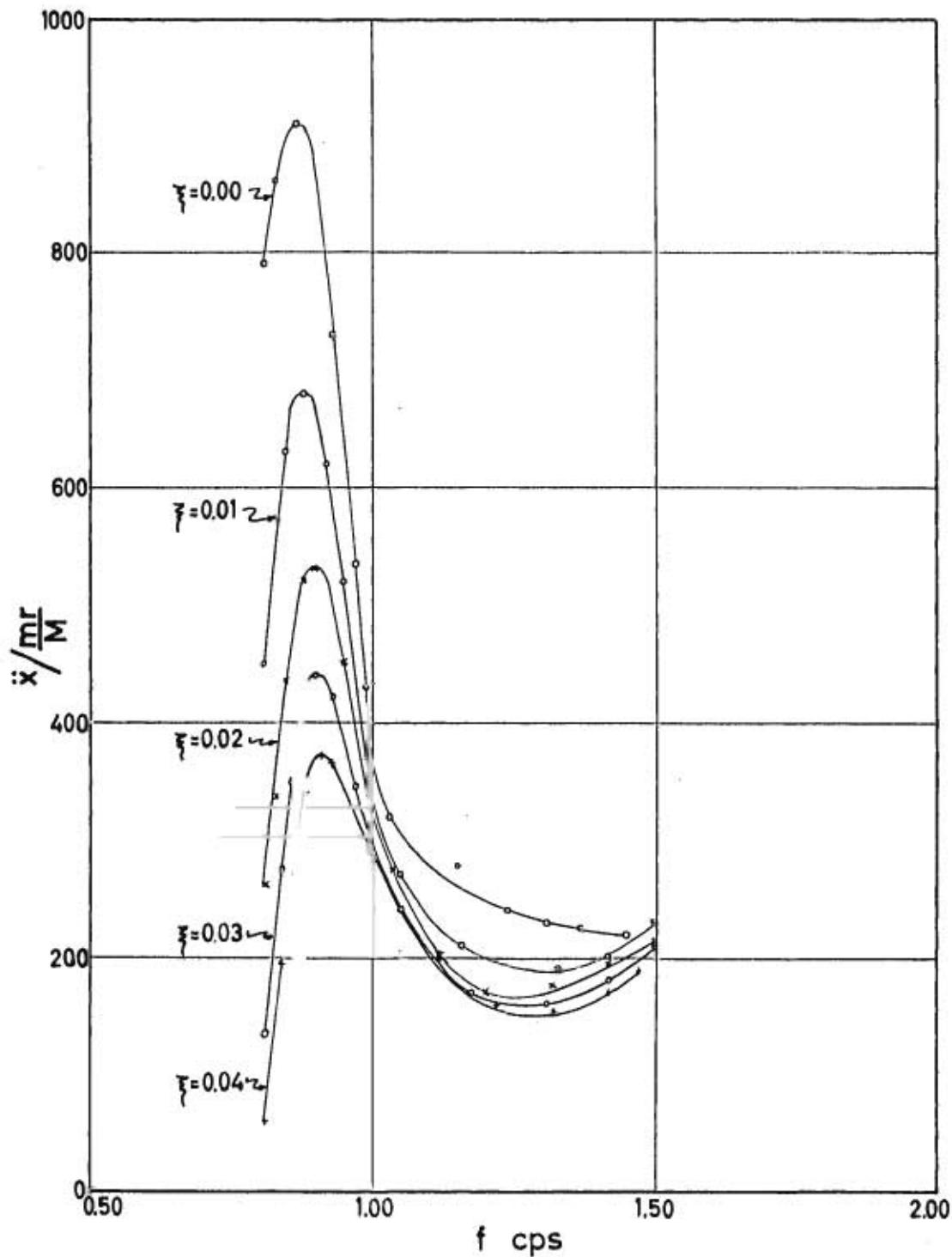


FIG. 9a CURVAS DE RESONANCIA DE LOS PROBLEMAS NOS. 1, 2, 3, 4 y 5. EXCITACION I

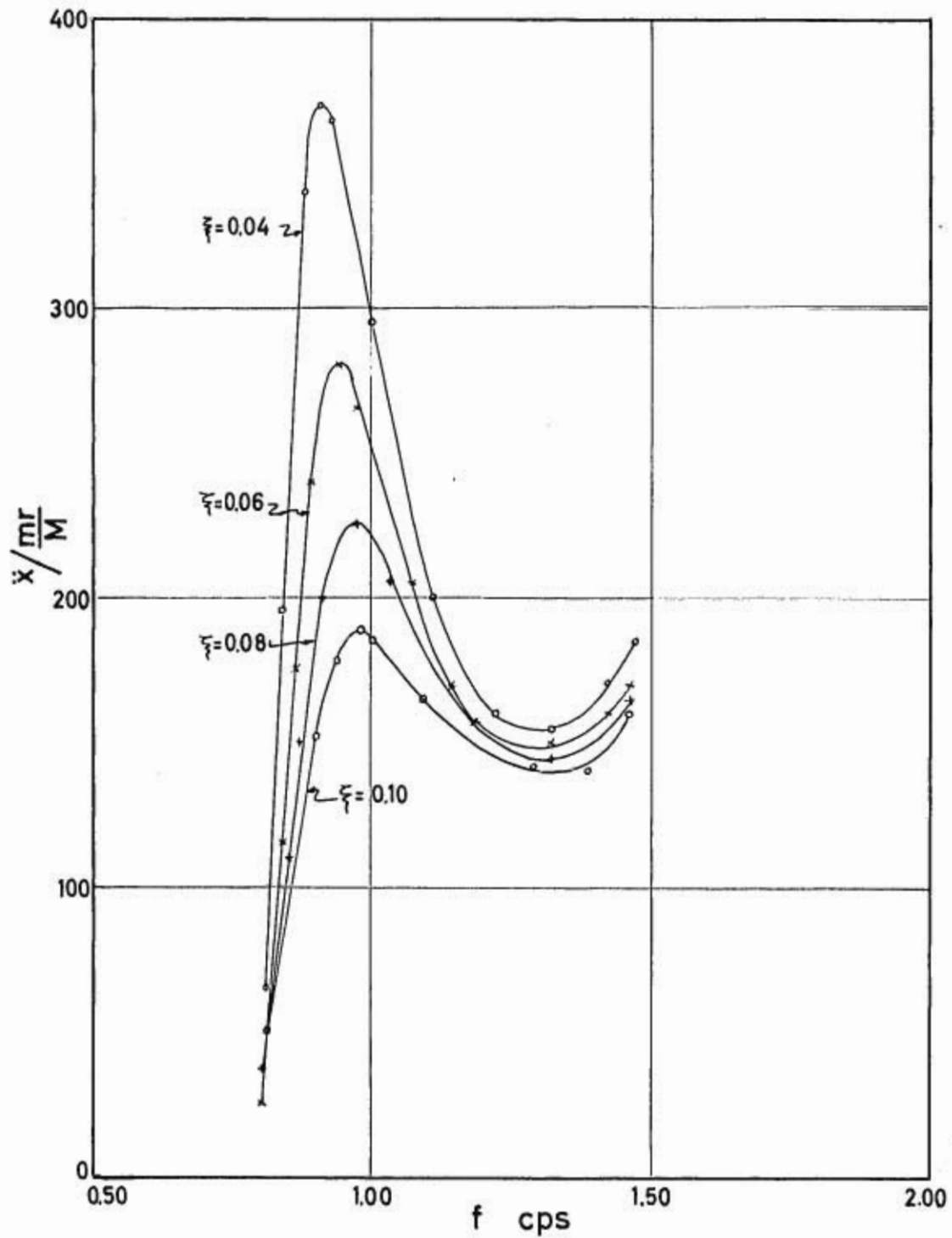


FIG. 9b CURVAS DE RESONANCIA DE LOS PROBLEMAS NOS. 5, 16, 17 y 18. EXCITACION I

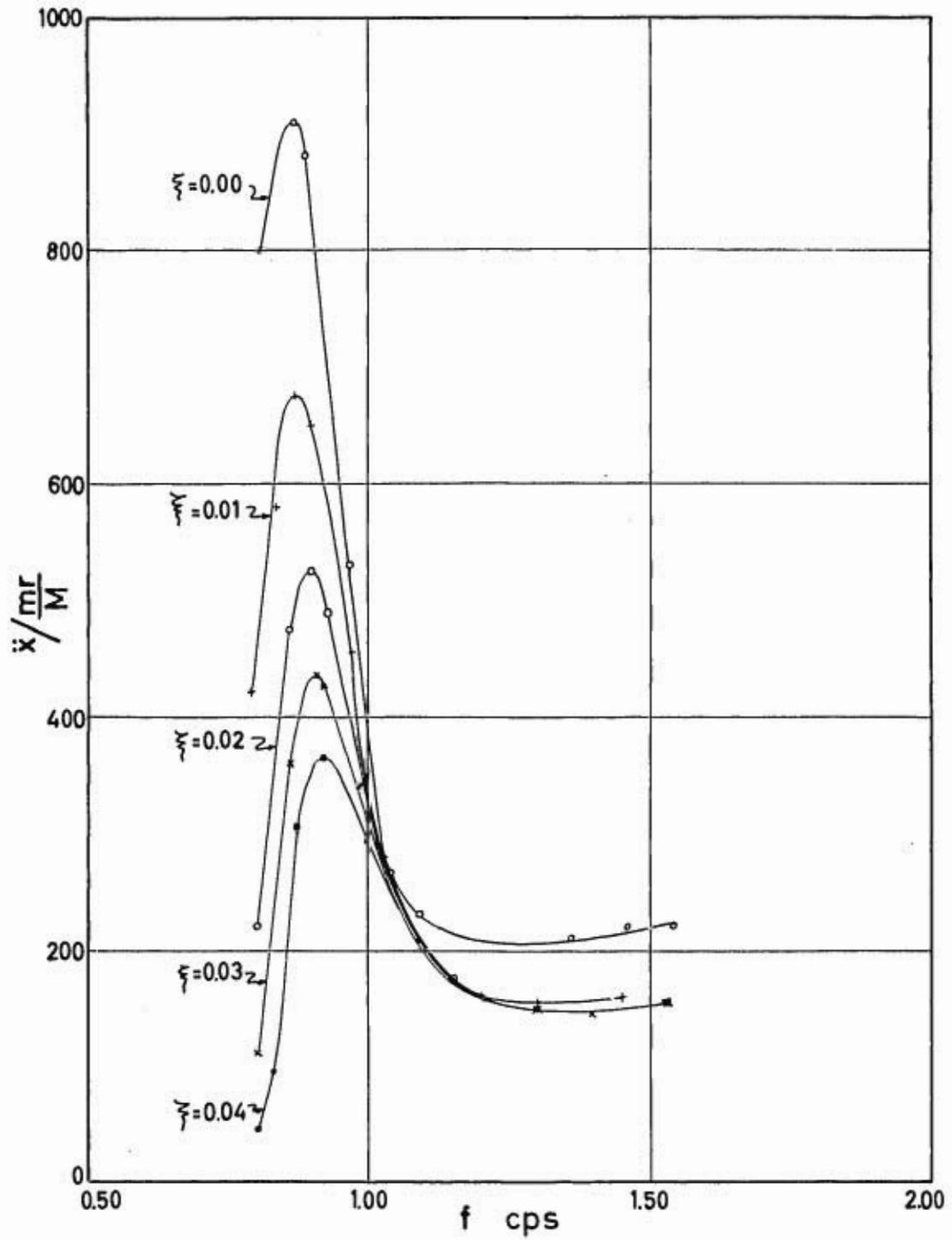


FIG. 10 CURVAS DE RESONANCIA DE LOS PROBLEMAS NOS. 6, 7, 8, 9 y 10. EXCITACION II

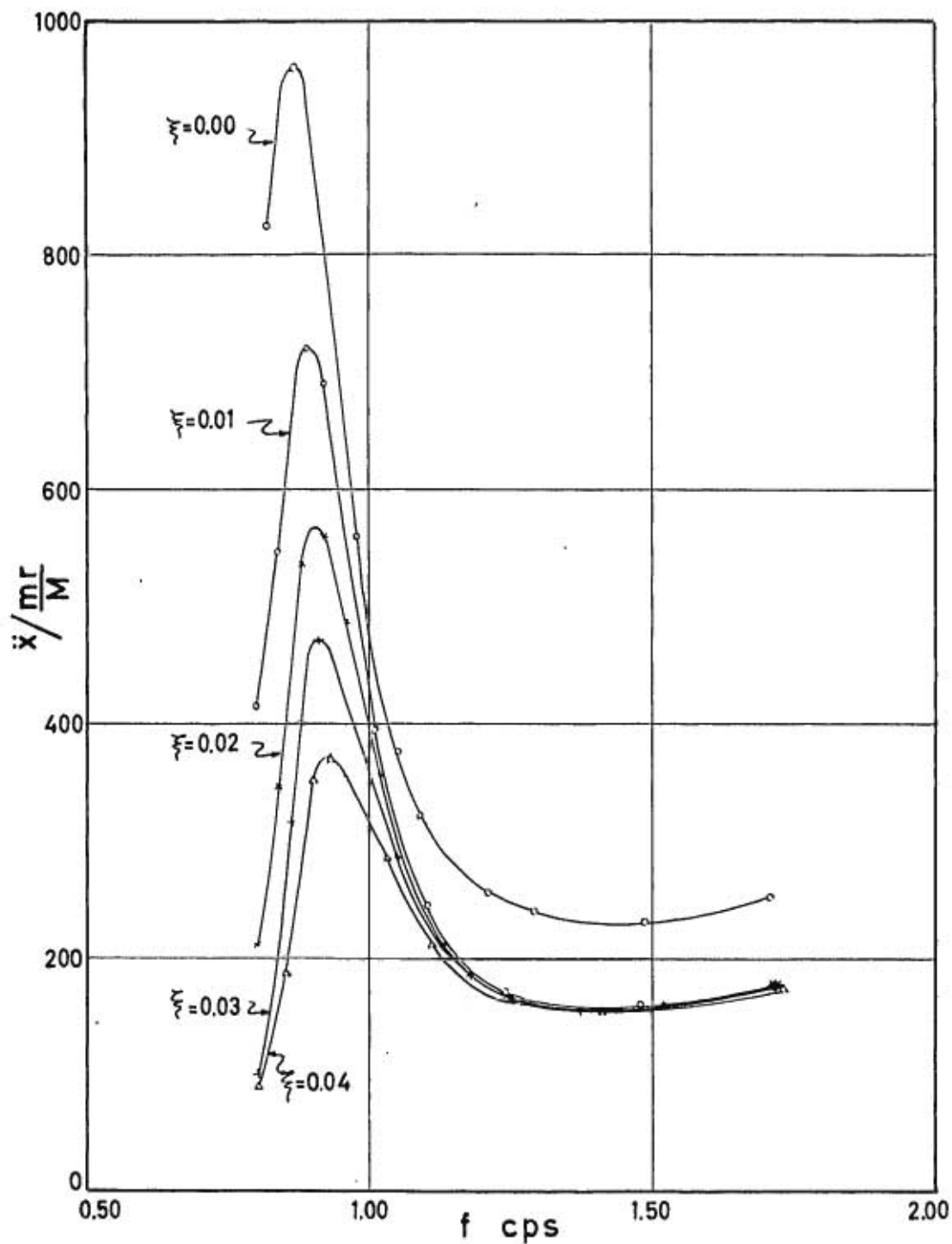


FIG. 11 CURVAS DE RESONANCIA DE LOS PROBLEMAS NOS. 11, 12, 13, 14 y 15. EXCITACION III

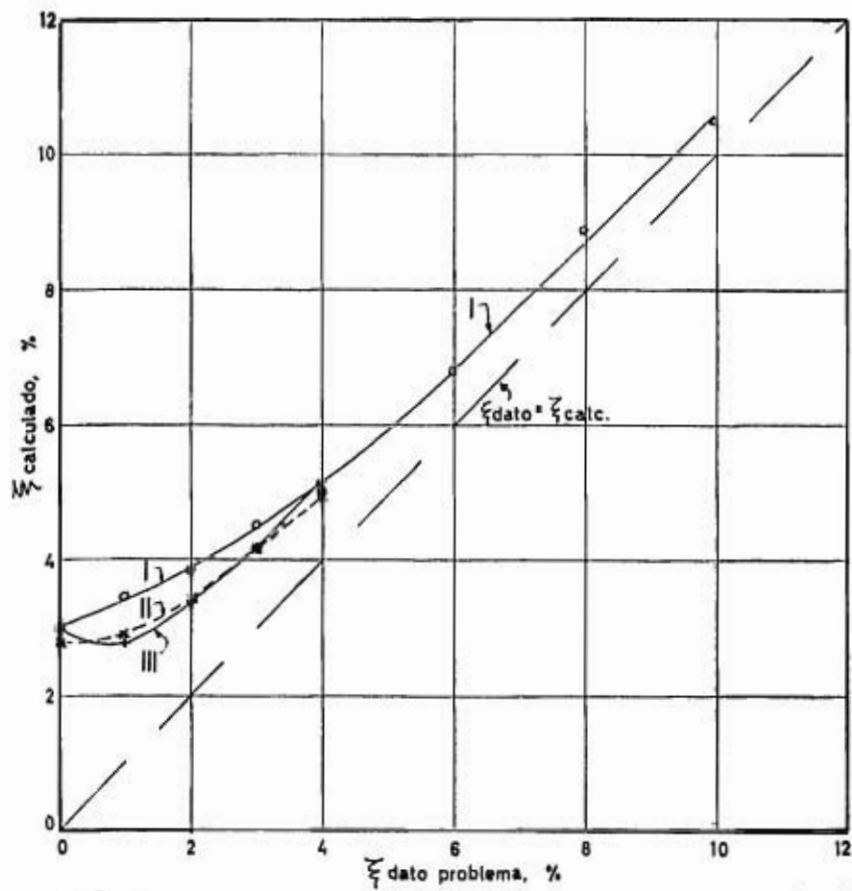


FIG. 12 CURVAS DE $\xi_{\text{dato problema}} - \xi_{\text{calculado}}$ PARA LAS EXCITACIONES I, II y III

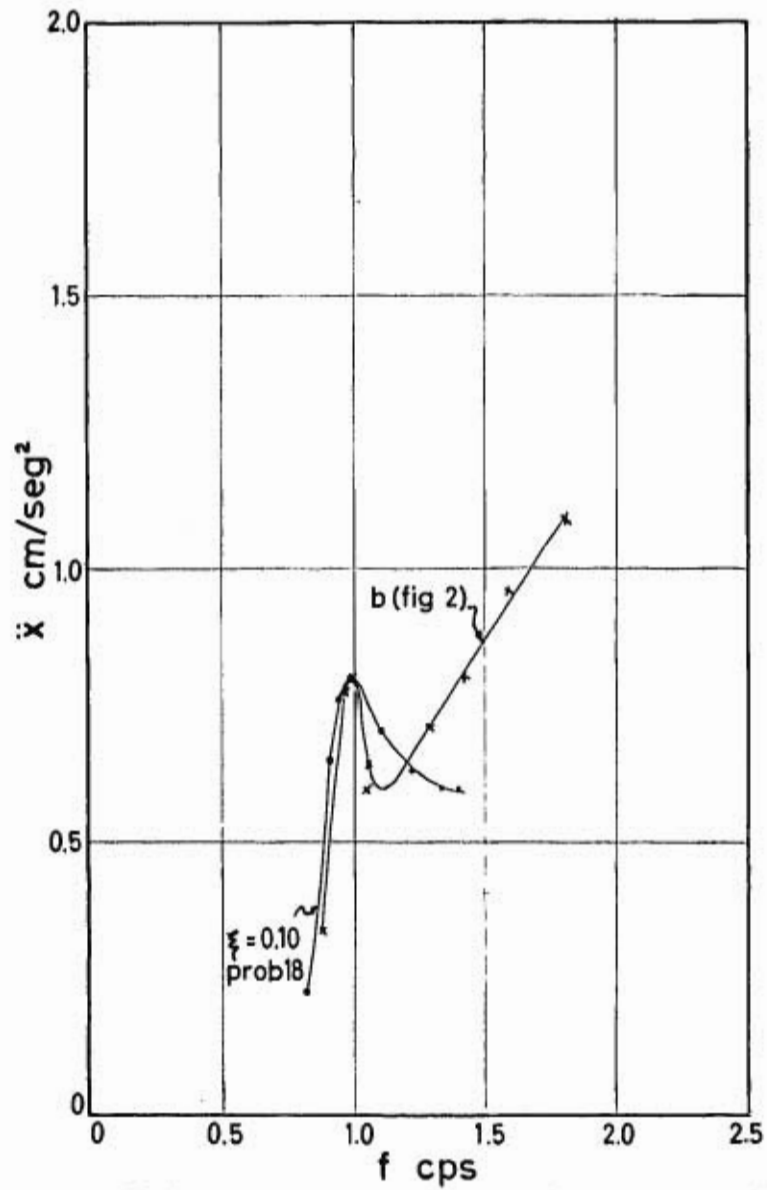


FIG. 13 CURVAS DE RESONANCIA DEL
 PROB. 18 y b DE LA FIG. 2

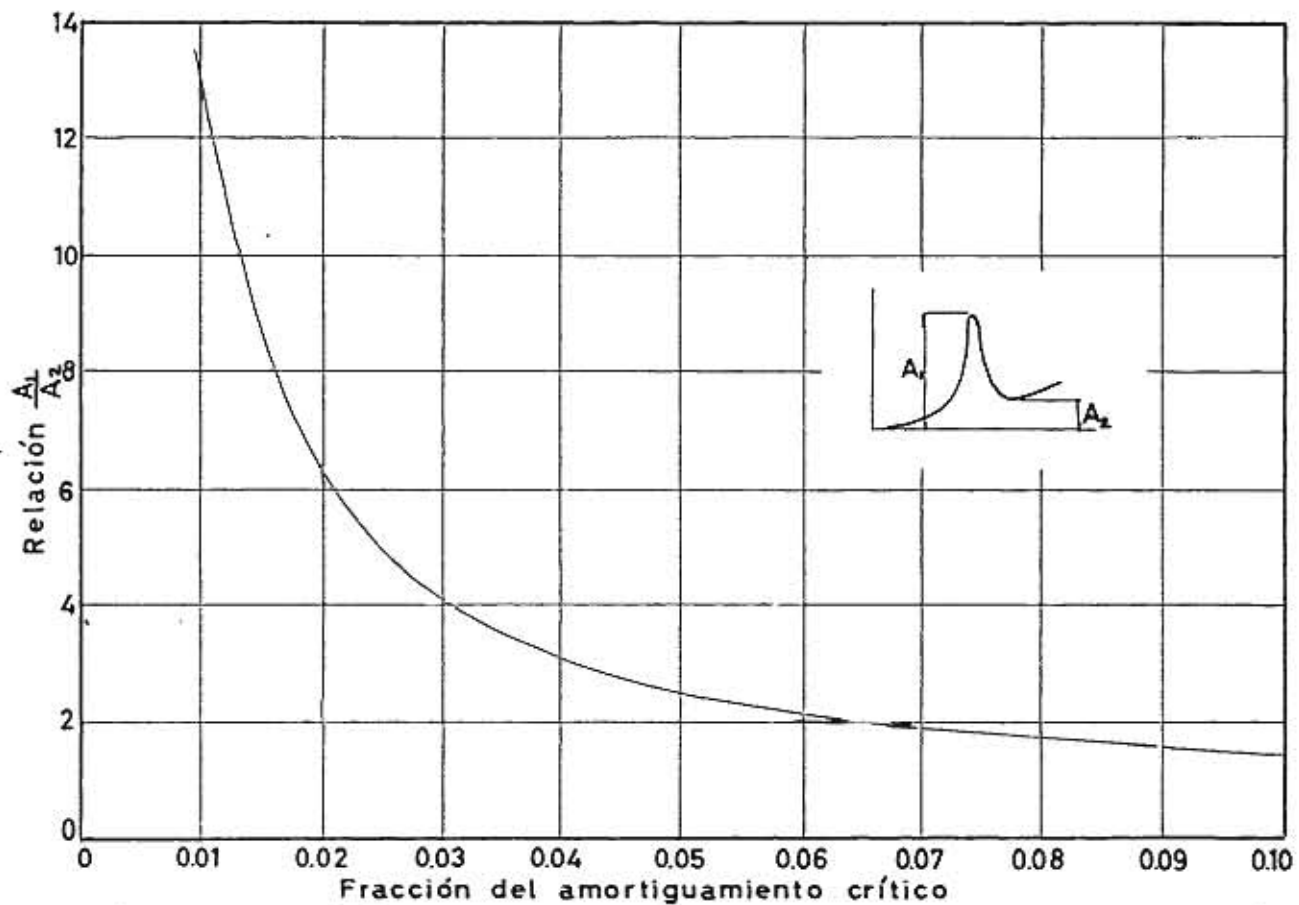


FIG.14 RELACION DE LA AMPLITUD MAXIMA A LA AMPLITUD MINIMA POSTERIOR A LA FRECUENCIA DE RESONANCIA PARA DISTINTOS PORCENTAJES DE AMORTIGUAMIENTO CRITICO