FACULTAD DE INGENIERIA U N A M

METODOS ANALITICOS Y NUMERICOS PARA CASCARONES GRUESOS

T E S I S

Que para obtener el grado de:
DOCTOR EN INGENIERIA (Estructuras)
p r e s e n t a

ALEJANDRO MARTINEZ MARQUEZ

MEXICO, D. F. 1964

PAGINACION

DISCONTINUA

PRELIMINARES

1. Generalidades

Actualmente se construye un buen número de cortinas de concreto en arco para presas. Estas construcciones originan un cierto tipo de problemas entre los cuales pueden citarse algunos relacionados con la cimentación, otros relacionados con el comportamiento estructural y algunos más relacionados con el funcionamiento hidráulico. Este aspecto de comportamiento se ha resuelto parcialmente por métodos experimentales y se ha hecho poco caso del aspecto analítico, tal vez debido a su complejidad. Efectivamente, en este tipo de cortinas de concreto, usualmente construidas como un cascarón de doble curvatura, dadas sus cualidades geométricas, la aplicación de las teorías usuales de cascarones, puede conducir a grandes errores. Por ejemplo, en estas cortinas, el espesor no es pequeño comparado con los radios de curvatura, de modo que las teorías existentes no resultan directamente aplicables. El efecto, quizá más importante, que es necesario considerar, es el de la deformación debida al cortante que actúa en las caras normales a la superficie. Este efecto, hace que dichas caras normales, no permanezcan planas durante la deformación.

Por otro lado la tendencia actual, en materia de cortinas formadas con cascarones de concreto, es hacer cada vez más pequeño el espesor. Esta tendencia observada también en otro tipo de construcciones, ha dado lugar a la necesidad de considerar la posibilidad de fenómenos de inestabilidad.

Así pues resulta que la construcción actual de cortinas, exige la consideración de otros efectos adicionales como son el de espesor y el de inestabilidad. Los caminos ingenieriles para su consideración, son el experimental y el analítico; en ambos casos se trata con idealización de las variables esenciales que son, el material, la forma de la superficie y las condiciones de apoyo. Y aunque parezca inverosímil, el hombre, el ingeniero, continúa buscando la solución a problemas con materiales que la naturaleza no le dió.

2. Finalidades

En el presente trabajo se pretende formular ciertas teorías para el análisis de cortinas consideradas como cascarones continuos y las características principales que se introducen son:

a) relación grande de espesor a radio

b) desplazamientos finitos

c) inestabilidad

Para la consideración de estas características se siguen dos caminos; uno esencialmente analítico y otro de análisis numérico basado en un modelo físico en que se pretende incorporar las variables consideradas en el estudio analítico.

En ambos casos las ecuaciones correspondientes, con diversos grados de aproximación, se plantean con el empleo del cálculo de variaciones. También se hacen consideraciones acerca de la inestabilidad elástica.

Se reconoce que el número de variables que aquí se consideran, no agota todas las que aparecen en el diseño de una cortina. Por ejemplo no se hace consideración alguna respecto a la elasticidad de los apoyos, ni se toman en cuenta los efectos que pudieran aparecer durante el comportamiento hidráulico del conjunto cortina-vaso.

3. Introducción

En este trabajo se presentan teorías de varios órdenes de aproximación que tienen por objeto plantear el análisis de cascarones como cuerpos tridimensionales. Se presenta también un modelo físico para el planteamiento discreto del problema.

En el primer capítulo, se hace una reseña de naturaleza histórica con objeto de agrupar el material bibliográfico relacionado con el tópico en cuestión. En este capítulo se presentan también los conceptos sobre el problema de inestabilidad, en su evolución histórica.

El capítulo [illegible] presenta una teoría que incluye los efectos de la deformación por cortante. Esta teoría se deduce con el empleo de una analogía y sus resultados aparecen en la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales en dos variables. Estos resultados se [illegible] al caso de coordenadas curvilíneas no ortogonales [illegible]. Los resultados en que se basa este análisis se presentan en forma detallada en los apéndices al final. El capítulo termina con una discusión del problema de inestabilidad.

Con base en la [illegible] de una función [illegible], en el capítulo 3 se presenta una teoría de cascarones gruesos con espesor variable, que toma en cuenta el efecto de la deformación por fuerza cortante. Los resultados que aquí se deducen quedan limitados a un sistema coordenado curvilíneo ortogonal y de curvatura casi principal. Estos resultados pueden generalizarse al caso de curvas coordenadas que no sean de curvatura principal. El sistema de ecuaciones que se deduce en este capítulo, queda expresado mediante las variables de desplazamiento u_1, u_2 y w y en términos de una función potencial ψ.

Los capítulos 2 y 3 presentan teorías de cierto orden de aproximación, que pretenden incorporar efectos como la deformación por esfuerzo cortante en las caras normales a la superficie, sin quedar resuelto el problema tridimensional. En el capítulo 4, se presenta una teoría de cascarones gruesos que puede llegar a representar completamente el cascarón como cuerpo tridimensional. Esta teoría se basa en el empleo de funciones especiales como son los polinomios de Legendre. En particular aquí se usa un número reducido de términos, pero para mejorar la precisión, pueden usarse más términos y el camino a seguir queda implícito. Los desarrollos de esta última teoría se limitan a cascarones cuyas curvas coordenadas son ortogonales y de curvatura principal; su extensión hacia el caso de curvas coordenadas cualesquiera solo puede hacerse sobre bases tensoriales.

En cuanto a la solución analítica o numérica, en el capítulo 5 se presenta un método basado en la teoría de perturbación, describiéndose los pasos a seguir en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, deducidas en los capítulos 2 y 3. También se hace una discusión somera sobre la solución del problema de inestabilidad. Como técnica más al alcance del ingeniero, se discute un método de diferencias finitas debido al autor soviético Tseitlin. La técnica en cuestión parece ser adecuada para el tratamiento numérico de los problemas de la teoría de cascarones. Para concluir, en este mismo capítulo, se presenta la formulación matricial del problema de inestabilidad elástica a la manera de Liapunov.

En el capítulo 6 se establece la formulación discreta de las teorías desarrolladas en los capítulos 2 y 3. En esta formulación se emplea un modelo físico, idealización del sistema contínuo. La discretización se establece para coordenadas ortogonales y se introduce el concepto de distancia paramétrica para poder formular el problema cuando las distancias de la malla son variables. Como caso particular de los resultados que corresponden al modelo contínuo del capítulo 3, se presenta además el sistema de ecuación para el modelo físico, cuando se utilizan únicamente las variables u_1, u_2 y w. Todos los desarrollos de este capítulo se establecen para cascarones de espesor variable y curvaturas cualesquiera. Este caso particular se aplica a la solución del problema de una cortina simétrica cuyos resultados se presentan en el capítulo 7.

La mayor parte de los desarrollos analíticos así como los resultados utilizados se presentan en forma resumida, en los apéndices A1 a A6.

4. Reconocimientos

El autor de este trabajo, hace patente su agradecimiento, así como su reconocimiento al Dr. Emilio Rosenblueth, director del Instituto de Ingeniería por su paciente labor de guía y su excelente buena disposición para que este trabajo viera su forma final.

El presente trabajo fue posible gracias a la ayuda proporcionada por el Instituto Nacional de La Investigación Científica a cuyo director actual el Lic. Hugo B. Margáin y a sus directivos, el autor desea manifestar su más profundo agradecimiento. La parte de aplicación fue desarrollada con ayuda de la Comisión Federal de Electricidad a cuyo director, el Ing. Manuel Moreno T., y Sub-director, el Ing. Fernando Hiriart se agradece su interés por el desarrollo de la ingeniería en México.

Las deducciones de las ecuaciones fueron revisadas por J. Antonio Nieto Ramírez a quien el autor agradece en lo que valen, todas sus interesantes sugerencias. El trabajo numérico fue posible gracias a Juan Casillas G. de L. a quien se agradece su interés para que este trabajo llegara a término. La labor numérica fue realizada por Víctor M. Pastor, Raúl Balcárcel, J. González L., Fernando Gómez, Francisco Queipo y Antonio Olvera quien además colaboró al igual que Jaime López en la elaboración de los programas para la computadora. A todos ellos se agradece sinceramente su valiosa ayuda.

1. RELACION HISTORICA

El propósito de esta nota es establecer una relación histórica de los trabajos que tienen conexión con el tema que aquí se discute. Los principales tópicos son:

a) Teoría de placas y cascarones

b) Cálculo de variaciones

c) Inestabilidad

d) Discretización

La primera vez que un tratamiento discreto se utilizó en la formulación variacional del problema de líneas curvas fue en 1744, con L. Euler[1].

Para la determinación de la condición

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (a \leq x \leq b) \tag{1.1}$$

que hace que la integral

$$I = \int_a^b F\,(y, y', x)\; dx \tag{1.2}$$

adquiera un valor estacionario, Euler introduce[2,3] una técnica de diferencias finitas haciendo

$$y'_k = z_k = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x = x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \tag{1.3}$$

quedando la ecuación 0.2 como

$$I = S = \sum_{k=0}^{n} F\,(y_k, z_k, x_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{1.4}$$

Aquí, F es un funcional "y" "x" "y" "y" con los ejes coordenados cartesianos en un plano. En estas condiciones el pro blema de valor estacionario de la integral se reduce al de una función de un número finito de variables que en el límite conduce a la ecuación (1.1).

Alrededor de 1760 Lagrange(1) publicó sus resultados acerca del cálculo de variaciones e hizo interesantes aportaciones al problema de la estabilidad de columnas iniciado por Euler. La discusión de Lagrange a este problema contiene la indicación de distintas configuraciones para cargas distintas como solución de la ecuación diferencial

$$C \frac{d^2y}{dx^2} = -P_y \qquad (1.5)$$

concluyendo que es posible tener un número infinito de curvas de pandeo(1).

El trabajo sobre inestabilidad fue continuado por T. Young con la consideración de un grupo de problemas particulares de barras publicados en 1807(1,4). Entre estos trabajos resalta el problema de una barra que se encuentra ligeramente deformada y que de hecho inicia el tratamiento de irregularidades o perturbaciones ocasionadas por la fabricación o inherentes a la condición natural de la barra. Young concibe el concepto de inestabilidad como aquel fenómeno ocasionado por "un valor particular de la carga axial que puede inducir desplazamientos infinitos cualquiera que sea la deflexión inicial o al menos producir una flexión grande". Otros problemas con distintas condiciones de frontera y de sección variable fueron también tratados por T. Young. Mucho después en 1930, Zimmer mann concluiría que la carga crítica es independiente de las imperfecciones (r. 16, p. 19).

La herramienta del cálculo de variaciones fue usada después en 1811 por Sophi Germain para la deducción de la ecuación de equilibrio en placas. Influenciada tal vez, por la consideración que sugirió J. Bernoulli en 1790, en cuanto a que una placa podría suponerse formada por unasistema ortogonal de vigas, S. Germain sugirió que el valor estacionario de la integral:

$$A\iint \left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2 ds \qquad (1.6)$$

conduciría a la ecuación de placas; en esta expresión,

ρ_1 = radio de curvatura en una dirección

ρ_2 = radio de curvatura en la dirección perpendicular

S = superficie

Sin embargo Germain no pudo justificar la elección del funcional (0.6) y, debido a un error, que después fue corregido por Lagrange, ella no llegó a la ecuación de placas que bien podría llamarse de Germain-Lagrange.

Fue Kirchhoff en 1850 quien hizo explícitas las consideraciones de un funcional del tipo:

$$\iint \left\{\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2\right\} ds \qquad (1.7)$$

en que λ y μ son las constantes elásticas de Lamé. En adición a la derivación correcta de la ecuación de equilibrio de placas, Kirchhoff estableció el número correcto de condiciones de frontera dando a dichas condiciones justificación física.

Los resultados de Kirchhoff pueden considerarse un caso particular del tratamiento del problema de placas considerando desarrollos en serie de potencias de Z (cordenada perpendicular a la superficie media), propuesto en forma diferente por A. Cauchy y Poisson(4) De hecho, Cauchy r. 4, p. 335 v. I estableció que el momento flexionante era proporcional al cubo del espesor y a la curvatura, según lo aceptó Kirchhoff. En cuanto a los desarrollos en serie propuestos por Cauchy y Poisson, parecen haber sido abandonadas una vez que B. de St. Venant indicó (sin demostrarlo) que esos desarrollos eran en general divergentes, lo cual parece injusto porque la ecuación Germain-Lagrange-Kirchhoff de placas es obtenida con la consideración de un término en este desarrollo.

La primera formulación en términos de energía de la teoría de cascarones, fue hecha por Lord Rayleigh en 1888 r. 15 p. 395 v. I quien introdujo la separación de energías en "extensional" e "inextensional". La primera toma su nombre del hecho de que un cascarón se deforme en extensión uniforme en todas las superficies paralelas a la media, y es proporcional al espesor h. La otra o inextensional ocurre cuando el cascarón se deforma sin modificación en la superficie media y es proporcional a h^3. La energía potencial de deformación puede expresarse como:

$$E = h\,E_{extensión} + h^3\,E_{flexión}$$ ([illegible])

Esta división fue quizá el origen del enfoque contemporáneo para la solución del problema de cascarones cuyas partes se conocen como "análisis de membrana" o "estado de esfuerzos de membrana" y el de "análisis de flexión" o "estado de esfuerzos de flexión".

Rayleigh plantea la cuestión acerca de si es congruente despreciar el término en h cuando h es grande, en virtud de que si h es pequeño, la validez de despreciar la energía inextensional es obvia. Su respuesta, basada en especulación, es afirmativa pero indicando que, en los límites del rango de valores de h, esta consideración es válida. Las cortinas de una presa no están, naturalmente dentro de estos límites.

Las consideraciones propuestas por Kirchhoff fueron usadas en cascarones cilíndricos y esféricos por Love en 1888 y con términos adicionales(4) por A. B. Basset en 1890. Pearson (r. 4, p. 89, V. 2) demuestra que los términos adicionales de Basset no se basan de manera correcta en la formulación de Kirchhoff. Así, A. E. H. Love en 1892(5) fue quien formuló por primera vez la teoría general de cascarones basada en la geometría diferencial y particularmente en los resultados publicados por Codazzi diez años antes (1882), r. 5 p. [illegible] . El tratamiento que acerca de cascarones presenta Love en su libro "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity"(6) constituye ciertamente la base del tratamiento actual de la teoría de cascarones; ahí presenta la consideración del cambio de las propiedades geométricas de las superficies paralelas a la [illegible] para variar la deformación (R. [illegible], p. [illegible]). Sin embargo le atribuye poca importancia a esta variación. Sus distintas aproximaciones [illegible] a las relaciones resultantes (momento o fuerza) - deformación han sido motivo de discusión casi reciente en la [illegible] y han originado interesantes resultados (R. 22 p. [illegible]).

Antes de que los resultados de la teoría cascarones pudieran ser aprovechables fue necesario construir una cortina del tipo de cascarón que naturalmente estaba muy lejos de serlo. Quizá el intento de análisis [illegible] fue en 19[illegible] cuando Wheeler[6] desarrolló el método "Arch and Crown Cantilever Method" que consistía en [illegible] los desplazamientos máximos de la cortina [illegible] y ménsulas. Este procedimiento de Wheeler dio origen a [illegible] Uno de ellos [illegible] H. Ritter[7] [illegible] laboriosidad. Además en cuanto al problema de inestabilidad resulta inaplicable a pesar de que conocida la distribución de carga puede obtenerse una idea de la posibilidad de pandeo, al tomar en cuenta la capacidad de los elementos aislados.

El primer tratamiento del problema de inestabilidad en cascarones parece haber sido resuelto en 1909 por S. Timoshenko. Timoshenko resolvió el problema de un cascarón cilíndrico cargado en la dirección de la generatriz. En el tratamiento de este y otros problemas (ref. 13[a] pp 1-50) utiliza una idea debida a Rayleigh[15], que consiste en la igualación de las variaciones de la energía potencial interna y de las cargas exteriores como criterio de pandeo, es decir,

$$\delta V = \delta T \qquad (0.9)$$

V = energía potencial de deformación

T = trabajo de las fuerzas que inducen inestabilidad.

Utilizando funciones similares a las propuestas por Love (r. 5 p. 547) para el análisis inextensional de un cascarón cilíndrico en vibración, Timoshenko planteó el problema inextensional de el cascarón cilíndrico cuyo borde en contacto con la carga puede desplazarse en la dirección del radio. Establece así los parámetros que intervienen en el problema e indica que a cada relación entre ellos corresponde una carga mayor o menor con distinta forma de pandeo, de manera que una cierta relación de los parámetros puede conducir a que la carga más pequeña de pandeo corresponda a una forma de pandeo similar a la laboriosidad. Además en cuanto al problema de inestabilidad resulta inaplicable a pesar de que conocida la distribución de carga puede obtenerse una idea de la posibilidad de pandeo, al tomar en cuenta la capacidad de los elementos aislados.

El primer tratamiento del problema de inestabilidad en cascarones parece haber sido resuelto en 1909 por S. Timoshenko. Timoshenko resolvió el problema de un cascarón cilíndrico cargado en la dirección de la generatriz. En el tratamiento de este y otros problemas (ref. 13[a] pp 1-50) utiliza una idea debida a Rayleigh[15], que consiste en la igualación de las variaciones de la energía potencial interna y de las cargas exteriores como criterio de pandeo, es decir,

$$\delta V = \delta T \qquad (0.9)$$

V = energía potencial de deformación

T = trabajo de las fuerzas que inducen inestabilidad.

Utilizando funciones similares a las propuestas por Love (r. 5 p. 547) para el análisis inextensional de un cascarón cilíndrico en vibración, Timoshenko planteó el problema inextensional de el cascarón cilíndrico cuyo borde en contacto con la carga puede desplazarse en la dirección del radio. Establece así los parámetros que intervienen en el problema e indica que a cada relación entre ellos corresponde una carga mayor o menor con distinta forma de pandeo, de manera que una cierta relación de los parámetros puede conducir a que la carga más pequeña de pandeo corresponda a una forma de pandeo similar a la de una viga de sección cilíndrica [illegible]

En 1921, Timoshenko presenta[1?] una manera de tomar en cuenta la deformación de cortante y la inercia rotacional en vigas, que consiste [illegible] en expresar la pendiente en el eje de una viga como la suma de una pendiente debida exclusivamente a la flexión ordinaria y otra debida a la existencia del cortante. Si x es el eje y y el desplazamiento de la viga,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi + \gamma \qquad (9.10)$$

de modo que

$$\left.\begin{aligned} M &= -EI\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Q &= k\,G\,A\,\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (9.11)$$

en que, además de la notación usual,

k = constante que toma en cuenta la forma en que se distribuye el cortante en la sección; en sección rectangular Timoshenko emplea [illegible]

γ = rotación media por cortante en la sección

En general todos los progresos en la teoría de cascarones han sido una continuación de los resultados [illegible] en placas y esto es válido estrictamente en el análisis estático, en tanto que no lo es tratándose del problema de [illegible] porque el fenómeno en ambos casos [illegible] los primeros resultados [illegible] de [illegible] que [illegible]

* Con un [illegible] de [illegible] por [illegible] forma, este [illegible] k [illegible].

cas y cascarones) fueron deducidos por Bryan en 1891 y Timoshenko en 1907 (r. 17, p.p. 348) y 1911 (r. 13 p. 193). En el tratamiento de problemas en placas, el método de Ritz[18] quien lo presentó para el tratamiento del problema de vibraciones transversales en placas, ha sido de especial utilidad. Este método consiste en introducir un grupo de funciones que satisfacen las condiciones de frontera asociando a cada una de ellas una constante que se determina con la condición de mínimo para la energía potencial. Otro procedimiento también de utilidad es el atribuido a Galerkin[19], (que, como indica Timoshenko, (r. 20, p. 159), se encuentra implícito en el trabajo de Ritz,) quien lo usó en 1915 para la solución de un número grande de problemas, de los cuales se tiene noticia únicamente por referencia indirecta[17, 21, 22].

Estos procedimientos del tipo de cálculo de variaciones, han sido también recientemente usados en forma sistemática para el análisis de problemas en cascarones [23]. Así queda definido el origen de la aplicación formal del tratamiento variacional, como método del análisis numérico, en problemas de la Mecánica Aplicada y en particular de placas y cascarones.

Equilibrio estático en cascarones

Desde 1930, la producción literaria acerca de cascarones y en particular de cascarones cilíndricos, creció en forma continua dando lugar a un número grande de resultados. Ciertamente fue en Alemania con Dischinger y Finsterwalder cuando empezaron a aparecer procedimientos simplificados para el aná lisis de cascarones[24]. En 1932 W. Flügge[25] publicó su teoría de cascarones cilíndricos en la cual para la determinación de los resultantes de esfuerzo y de las deformaciones toma en cuenta la forma trapecial del elemento en que actúa el esfuerzo y que las fibras paralela a la media tienen otra longitud. Dicho de otra manera toma en cuenta el cambio de geometría de las superficies paralelas respecto a la media. (r. 25 p.p. 212-219). Las ecuaciones de Flügge sirvieron de base para posteriores desarrollos en los que se trató de reducir el sistema de ecuaciones en las variables u, v y w a una sola ecuación. Así en 1933 Donnell publica sus resultados como una teoría simplificada (r. 17 p. 507) y los aplica al problema de inestabilidad[29]. Entonces aparecieron varias teorías las cuales difieren entre sí en ocasiones únicamente por la variable elegida en la ecuación diferencial, entre ellas se encuentran la de Jenkins[30] que utiliza como variable la fuerza tangencial en la dirección de la directriz, Finsterwalder[16] y Dischinger[16,31] que usan el momento flexionante en la misma dirección y Lundgreen que usa el desplazamiento normal w. Esto naturalmente que no tiene importancia desde el punto de vista del análisis, pero facilitó ciertas simplificaciones como la de Schorer[32] en la ecuación característica.

Una revisión cuidadosa de la literatura acerca de cascarones cilíndricos aplicados a cortinas, se encuentra en la referencia [illegible] (cap. 1) en donde además aparece una discusión interesante acerca de la importancia de la ecuación de compatibilidad en estructuras que como el concreto armado pueden experimentar agrietamientos.

Existe un detalle de particular importancia en cuanto a la deducción de dos teorías: la de Flügge y la de Timoshenko. En el planteamiento del sistema de tres ecuaciones, ambos escogen relaciones fuerza-desplazamiento que satisfacen la "sexta" ecuación de equilibrio, y que son distintas, obteniendo en cada caso ecuaciones diferentes. El hecho en aparente contradicción, radica en que mientras Flügge toma en cuenta el cambio de geometría de las superficies paralela en el cálculo de las deformaciones, Timoshenko utiliza las relaciones más simples que se obtienen al tomar las superficies paralelas iguales geométricamente a la media. La razón según lo ha establecido Novozhilov (ref. 28, p. 38), radica en que independientemente de la elección particular, la igualdad

$$T_{12} - T_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0 \qquad (0.12)$$

quedará satisfecha. Otras elecciones particulares surgen de la introducción de un número de términos del desarrollo en serie

$$\frac{1}{a+z} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{z}{a} + \left(\frac{z}{a}\right)^2 - \cdots\right] \qquad (0.13)$$

según lo sugirió Jacobsen (r. 33, p. 17) y todas ellas satisfacen la ec. 0.12 porque está implícito en la simetría del tensor esfuerzos. En lo anterior:

R_1 = radio de curvatura principal en una dirección

R_2 = radio de curvatura principal en la dirección perpendicular

T_{21}, T_{12} = fuerzas cortantes en la superficie

M_{12}, M_{21} = momentos de torsión

De todas estas aproximaciones, resalta la de I. Holland[34a] que con el criterio de minimizar el error con respecto a la teoría de Flügge, utiliza como función desconocida el desplazamiento llegando a demostrar que el error de las raíces de la ecuación característica es 0.06 h/R con respecto a las de la teoría de Flügge.

La historia parece iniciar su desarrollo en términos de aplicación a la teoría de cascarones de doble curvatura, en 1933 con Pucher quien introduce por primera vez una función de fuerza para el análisis de membrana de cascarones rebajados[35]. Considerando un sistema de coordenadas casi-cartesianas, K. Marguerre extiende la idea de Pucher para el tratamiento de flexión en cascarones. Estos mismos resultados pero para curvas coordenadas ortogonales y de curvatura principal fueron deducidos independientemente por V. Z. Vlasov[36] en 1949 y antes en 1932 para el tratamiento de cascarones cilíndricos largos con el esfuerzos en la dirección de la generatriz y el momento flexionante sobre la directriz como funciones desconocidas. Como caso particular, Vlasov deduce las mismas ecuaciones que Marguerre y señala que su validez está limitada para cascarones rebajados (ref. 36, p. 246). Para su deducción Vlasov utiliza loque ahora se conoce como analogía estático-geometrica* y que fue presentada por primera vez en 1940 por A. L. Goldenveizer en su disertación bajo la dirección de Vlasov (véase p. ej. r. 17, p. 655 de la r. 36). Previamente en 1944, Vlasov[37], había presentado las ecuaciones generales de la teoría de cascarones no rebajados y las ideas que ahí presenta han tomado actualidad recientemente.

El tratamiento de Vlasov intenta cubrir todos los rangos posibles en cuanto a espesor de los cascarones. Supone que las deformaciones pueden expresarse en serie de potencias de la coordenada normal, sin embargo en la formulación de los desplazamientos de puntos localizados en superficies paralelas a la media adopta la hipótesis de Kirchhoff (sección plana).

Una interesante descripción del trabajo de la escuela rusa en la teoría de cascarones se encuentra en la referencia (34 b). De entre los escritores rusos quien ha utilizado en forma por demás completa el cálculo de variaciones en la solución de sus problemas es Vlasov. La idea desarrollada ampliamente por Onisshvilli fue originalmente presentada por Vlasov en 1949[26]. En 1951 Vlasov generaliza sus ecuaciones para el tratamiento de cascarones cuyas curvas de referencia son ortogonales pero no de curvatura principal. En su tratamiento, Vlasov utiliza [34-b] coordenadas casi-cartesianas e introduce el fenómeno de temperatura. Posteriormente, M. Rodríguez C.** obtendría resultados análogos para cascarones también rebajados

---

* Esta analogía se vuelve a deducir aquí pero una forma distinta a la presentada en 1940 por Goldenvaizer.

pero utilizando coordenadas sobre la superficie media del cascarón[48] y M. Herzog[49] lo haría tomando en cuenta espesor variable y cambios de temperatura.

Recientemente han surgido distintos criterios en cuanto a la modificación de las teorías lineales de cascarones con el objeto de hacerlas aparecer más consistentes. W. T. Koiter[50a] ha presentado una aproximación congruente tomando en cuenta el cambio de geometría para la evaluación del área en superficies paralelas a la media, introduciendo el cociente:

$$h = \frac{g}{a} = 1 + 2hz + kz^2 \qquad (0.14)$$

en el que (ver apéndice I)

g = área en la superficie a la distancia z

a = área en la superficie media

h = curvatura media

k = curvatura Gaussiana

Sin embargo no toma en cuenta esta diferencia para el cálculo de deformaciones y la determinación de resultantes. El argumento esencial es que estos detalles deben despreciarse a menos que se usen teorías más refinadas que no utilicen la hipótesis de Kirchhoff-Love. Con este criterio particular ciertamente no existe ninguna teoría elaborada pero la inconsistencia en cuanto a la consideración de cambio de las propiedades geométricas no es aceptable.

Otro desarrollo que los autores B. Budiansky y J. L. Sanders Jr.[51a] intitulan "la mejor teoría lineal de primer orden", no introduce esa inconsistencia y su tratamiento tensorial de la analogía estático-geométrica en términos de una variable compleja parece más acertada que el vectorial debido a Novozhilov (r. 28 p.p. 63-90). Desde el punto de vista de estos autores, se encuentran el planteamiento general de la teoría de cascarones rebajadas debido a A. E. Green y W. Zerna (r. 52, p.p. 398-402) y la teoría de cascarones cilíndricos de Timoshenko(17) que resulta así más consistente que la de Flügge.

Estas consideraciones habián sido discutidas antes por A. L. Goldenveizer(53) y por M. Rodríguez(54) quienes formularon la consideración de la diferencia de geometría en las deformaciones y las resultantes con condiciones de frontera adecuadas(44). Estos resultados adoptan como hipótesis la de deformación plana que resulta debatible en el tipo de cascarones en que es aplicable(53). Así resulta ser inconsistente en cuanto a la introducción de un factor geométrico despreciando el factor estático de esfuerzos cortantes(56).

Con el objeto de introducir hipótesis más acertadas que las de sección plana o de Kirchhoff-Love, Naghdi ha presentado una teoría que toma en cuenta la deformación de cortantes en cascarones rebajados(39) con tres funciones de desplazamiento y dos adicionales de rotación que toman en cuenta el cortante. También Naghdi, sin llegar a formular ecuaciones explícitas para la solución del problema, introduce la consideración de cambio de la geometría en las resultantes y en las deformaciones[55]. Por otro lado E. Reissner desprecia esta consideración y con el mismo número de variables ($_1$ y $_2$) que Naghdi, formula variacionalmente expresiones más simples de manejar. Siguiendo las ideas de Naghdi[34,55], Ambartzumian (r. 38, p. 306) formula un grupo de "Nuevas teorías de cascarones y placas anisotrópicas", introduce también un grupo de cinco variables (u, v, w, ψ_0, φ_0) y toma en cuenta el cambio de geometría que usa Naghdi[55] pero con unos cuantos términos de un desarrollo en serie similar al (0.13).

El tratamiento variacional más completo desde el punto de vista matemático, pero que implica para la solución del problema de cascarones relativamente gruesos un número de 15 incógnitas (que finalmente puede reducirse a 5), es el debido a Reissner[56]. Su formulación basada en un olvidado desarrollo variacional debido a Trefftz[22, 53, 56] introduce la deformación por cortante y el cambio de geometría en las dos condiciones citadas antes. La referencia 56 parece contener en forma condensada la mayor parte del trabajo de Reissner en cascarones y en general lo más reciente que se ha producido en América. Para terminar con esta descripción de las teorías en el análisis de equilibrio, es necesario citar el trabajo de [illegible][illegible] [illegible] mos de [illegible] [illegible] cascarón considerado como un cuerpo tridimensional. El tratamiento de [illegible] usuales de la teoría de cascarones y su tratamiento lo ha dividido en ciertos rangos que en el futuro lo pueden hacer más manejable[41]. Similar tratamiento pero con base en desarrollos en serie de potencias ha sido presentado por W. Zerna[43]. Como caso particular de los resultados de Zerna, M. Rodríguez C. presenta el tratamiento de cascarones no rebajados en forma iterativa con la hipótesis de sección plana y la analogía estático-geométrica. También con base en desarrollo en serie de potencias I. G. Teregulov discute la formulación consistente de teorías refinadas y se concentra en el tratamiento de placas, su tratamiento se basa en su principio variacional de la teoría no-lineal de la elasticidad[46], generalización del principio variacional de Reissner[47]. O. K. Axentian y I. I. Vorovich[42], han iniciado en Rusia un tratamiento distinto en el problema de placas considerado como tridimensional y por ahora parece ser el más consistente.

La naturaleza compleja del problema de cascarones esencialmente idealizados como bidimensionales ha hecho que mucha gente de varias partes pongan su esfuerzo en la evolución de las teorías usuales y parece ser queen un futuro próximo será posible conocer el grado de aproximación hacia el comportamiento tridimensional elástico. Sin embargo la relación teoría-realidad no se verá satisfecha aún sino hasta después de haberse desarrollado la ahora incipiente teoría estadística de la resistencia de materiales.

Inestabilidad en Cascarones

Después del primer intento de análisis de inestabilidad en cascarones que se debe a Timoshenko,[13] el trabajo mas importante sobre pandeo, es el debido a v. Karman y Tsien. (ref. 63 pp. 368-380). En este trabajo, se presenta el pandeo de cascarones esféricos. La fig. 1.2, fue tomada de esta referencia y con respecto a ella, se discute el comportamiento de cascarones esféricos con diferente espesor. En esta figura, se aprecia que la posibilidad de un fenómeno de pandeo que implica un cambio absoluto en el sentido de la curvatura (oil canning en inglés y Durchslag en alemán) aumenta al reducirse el espesor. Analizando esta figura v. Karman y Tsien concluyen que el pandeo ocurre para la carga que corresponde a los puntos en que la curva es cóncava hacia arriba. Las razones más importantes parecían ser entonces las irregularidades propias de la estructura. Más tarde Tsien[90] afirmaría que la carga de pandeo se encuentra entre el punto en que la curva alcanza un máximo y aquel para el que alcanza un mínimo. Sin embargo más tarde[illegible] aceptaría la suposición de v. Karman y diría que efectivamente la carga de pandeo corresponde al punto de mínimo para alguna de las curvas A. Por otro lado esta carga estaba siempre más cerca de los resultados experimentales. Finalmente [illegible] la magnitud de la carga de pandeo parecía depender de la [illegible].

Por otro lado, el problema de cascarones cilíndricos ha sido ampliamente estudiado y una descripción muy completa así como un resúmen de resultados aparece en la referancia 91 por G.Gerard y H. Becker. En este tipo de cascarones, cargados axialmente, las imperfecciones juegan un papel predominante. En la fig. 1.1 se muestran distintas curvas del comportamiento de cascarones cilíndricos con diferentes grados de imperfección. La carga de pandeo, de acuerdo con el criterio de v. Karman, corresponde al punto de mínimo en esas curvas. Tratándose de cascarones cilíndricos este criterio ha sido justificado por Volmir eon base en la fig. 1.3. En esta figura se muestra la forma en que varía la energía para distintos desplazamientos radiales designados en esa figura como f. Se nota en la parte inferior, en la curva punteada, que la carga efectiva de pandeo es la que corresponde a un mínimo absoluto de todos los máximos, es decir, siendo los puntos inestables caracterizados por máximos en la energía potencial, de todos estos máximos, la carga efectiva de pandeo es la que corresponde al mínimo de ellos. Realmente este valor se alcanza para valores grandes del parámetro ξ, pero estos resultados son coincidentes con los resultados experimentales.

El caso de un cascarón cilíndrico apoyado en la dirección de sus generatrices, ilustra adecuadamente el comportamiento de cascarones cilíndricos y esféricos; en virtud de que cuando este cilindro se encuentra cargado en la dirección normal, existe la posibilidad del fenómeno de pandeo con inversión de la curvatura. Este problema puede representarse adecuadamente mediante la ecuación diferencial[17]

$$\frac{D}{t}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{p}{R} = \frac{q}{t} \qquad (1.15)$$

en que

$D = \dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

p = esfuerzo de compresión en la dirección de la directriz

q = carga normal exterior

t = espesor

l = longitud del arco

La solución de esta ecuación puede suponerse en la forma

$$w = f_1 \sin\frac{\pi x}{l} + f_3 \sin\frac{3\pi x}{l} \qquad (1.16)$$

el primer término, caracteriza un comportamiento de flexión y el segundo implica un pandeo por efecto de fuerzas de membrana en la forma que ocurre por ejemplo en cascarones esféricos.

Introduciendo las cantidades

$$\zeta = \frac{f_1}{t}$$
$$\eta = \frac{f_3}{t}$$
$$\psi = \frac{f_3}{f_1}$$
$$\beta = \pi/l$$

se puede resolver la ecuación diferencial 15. mediante el empleo del método de Ritz-Galiorkin. Aplicando este método se deduce,

$$\psi = \frac{D\beta^2 - tp}{243\,D\beta^2 - 27\,tp} \qquad (1.17)$$

observándose entonces que ψ establece la influencia relativa de las cantidades f_1 y f_3 es grande, cuando la rigidez en flexión es pequeña, predominando entonces el efecto de membrana y recíprocamente . Siempre es posible trazar una superficie de energía usando para ello la energía potencial en la forma

$$V = \frac{D}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{p^2}{2E}(1-\nu^2)\ell t - \int_0^{\ell} q w\, dx \qquad (1.18)$$

o en forma adimensional

$$\bar{V} = \frac{V\ell^3}{E t^5}(1-\nu^2) \qquad (1.19)$$

o sea, con la suposición para w

$$\bar{V} = \frac{\pi^4}{48}(\xi^2 + 81\eta^2) + \frac{1}{2}(p^*)^2 - \frac{2}{\pi} q^*\left(\xi + \frac{1}{3}\eta\right) \qquad (1.20)$$

en que

$$p^* = \frac{p\ell^2}{E t^2}(1-\nu^2) \;;\; q^* = \frac{q}{E}\left(\frac{\ell}{t}\right)^4 (1-\nu^2). \qquad (1.21)$$

la superficie, posee entonces dos grados de libertad (ξ y η) que caracterizan respectivamente un estado predominante de flexión y uno en que predomina la acción membranal . Esta superficie se ilustra en la fig. 1.4. En la parte inferior de esta figura, se encuentran las distintas posiciones de carga q', que corresponden a una misma magnitud del esfuerzo de membrana p^*, es decir, cuando η = constante. Esta misma figura ha sido usada en el capítulo 6 en una forma un tanto distinta que sirve para ilustrar la definición de inestabilidad a la Liapunov.

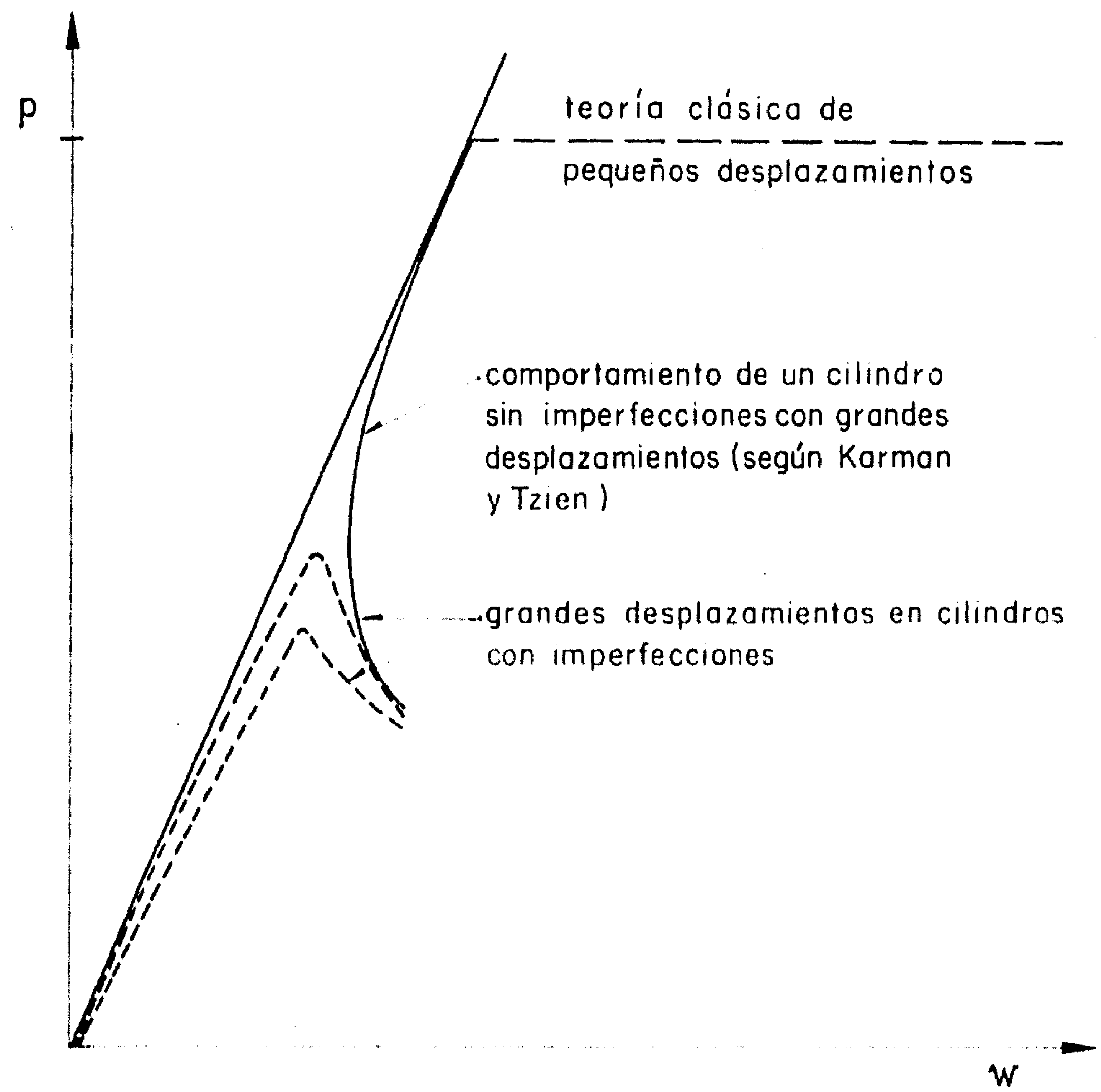

p
teoría clásica de
pequeños desplazamientos
comportamiento de un cilindro
sin imperfecciones con grandes
desplazamientos (según Karman
y Tzien)
grandes desplazamientos en cilindros
con imperfecciones
w

FIG. 1.1

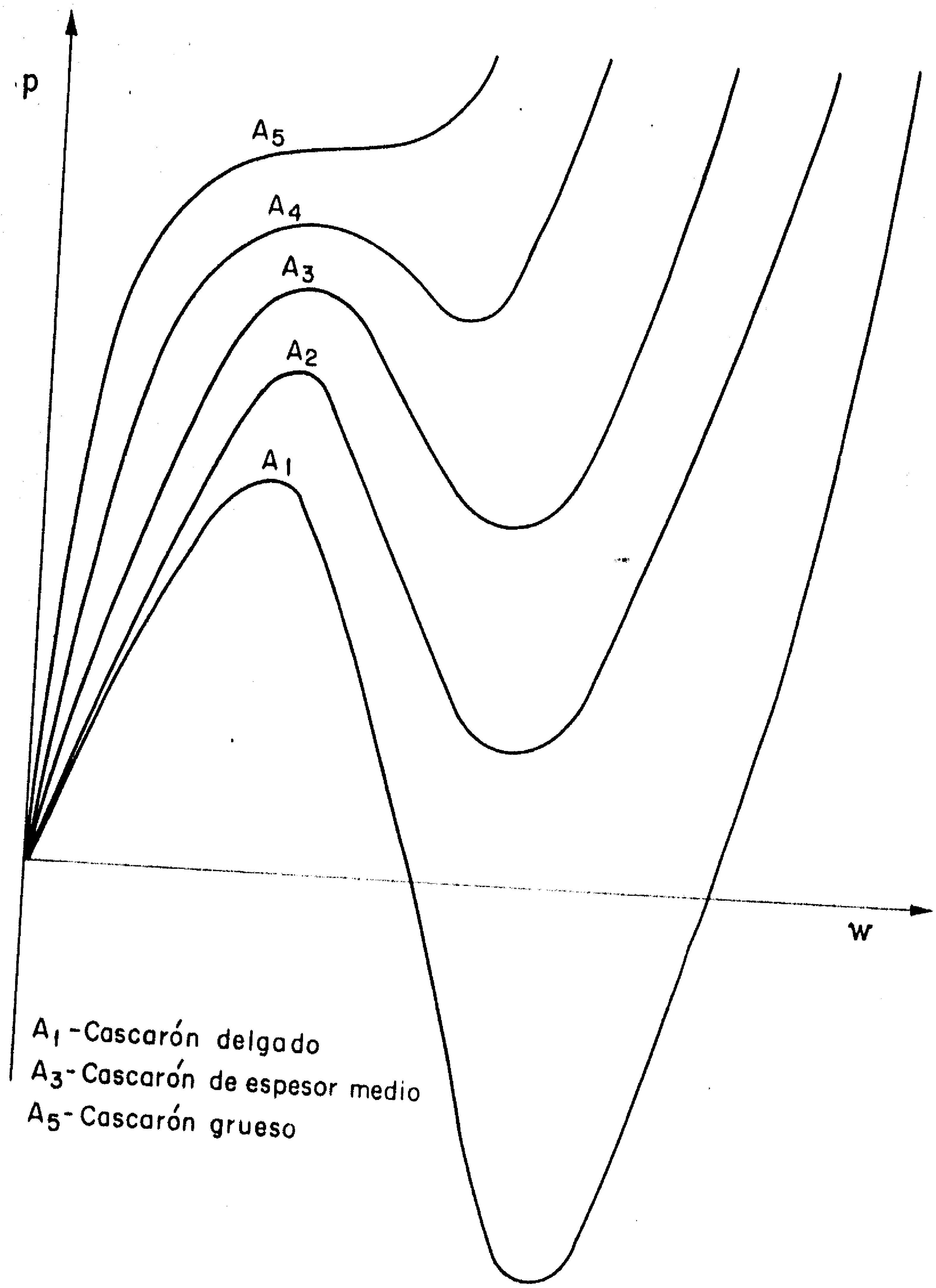
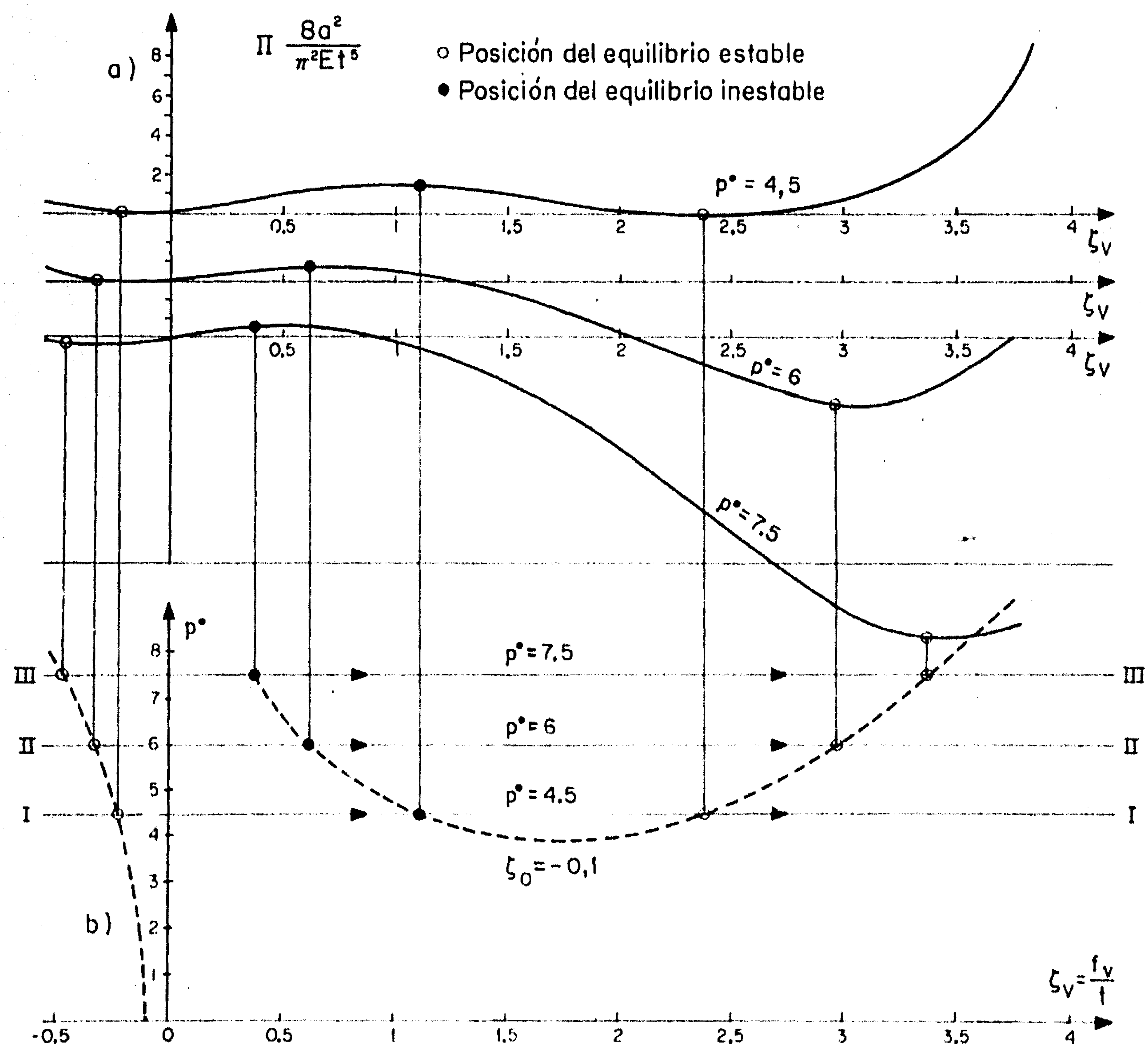
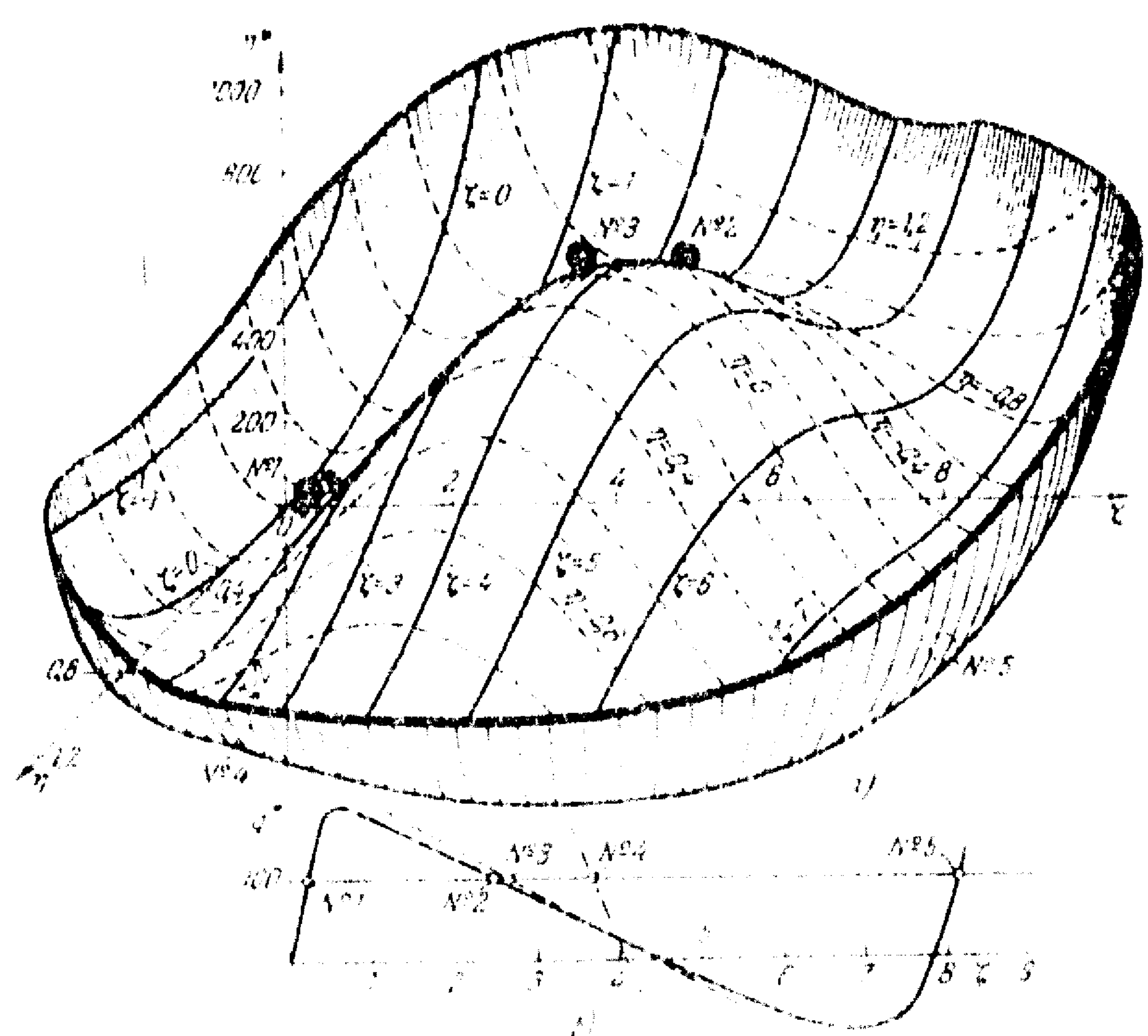

p
w
A_5
A_4
A_3
A_2
A_1
A_1 - Cascarón delgado
A_3 - Cascarón de espesor medio
A_5 - Cascarón grueso

FIG. 1.2



INESTABILIDAD ELASTICA EN CASCARONES DELGADOS

FIG 1.3



SUPERFICIE DE ENERGIA PARA CINCO POSICIONES DISTINTAS DE EQUILIBRIO BAJO CARGA DADA

FIG. 14

2. TEORIA DE CASCARONES REBAJADOS QUE INCLUYEN EL EFECTO DE DEFORMACION POR CORANTE

2.0 Alcance

En la mayor parte de los dascarones que se usan para cortinas de concreto, la deformación por cortante resulta significativa ya sea porque el peralte es grande o porque el módulo de deformación al cortante es pequeño, o bien por ambas causas.

Parece necesario por tanto considerar este tipo de deformación y con tal fin se proponen en este capítulo y en los dos siguientes ciertos refinamientos que pretenden incorporar el efecto de la deformación por cortante. Como primera aproximación, se presenta aquí una extensión a la idea concebida por S.P. Timoshenko(13b) para introducir la deformación por cortante en vigas.

En este capítulo se hace uso de la analogía estático-geométrica de Vlasov-Goldenveizer(26) (ver apéndice A5) para la consideración de la deformación de cortante; se hacen ciertas consideraciones respecto al orden de magnitud de las cantidades participantes, tratando también de definir el rango de validez de las ecuaciones que se deducen. En los desarrollos se considera el efecto de desplazamientos radiales grandes y las ecuaciones que aquí se obtienen son similares a las deducidas por Vlasov (ref 26, p. 3[illegible]1) como una generalización a las ecuaciones de T. V. Kármán(63) para placas. Las ecuaciones de Vlasov fueron deducidas con la analogía estático-geométrica, en tanto que aquí se deducen mediante el empleo de una forma del del principio variacional de Reissner[47].

2.1 Utilización de una analogía para los efectos de cortante en cascarones

De acuerdo con la hipótesis relativa a la sección plana como modelo de deformación en vigas, se deducen esfuerzos cortantes de distribución parabólica[1]. Estos esfuerzos modifican la posición de las fibras normales al eje neutro, introduciendo una rotación angular. En un primer intento se puede suponer que la rotación en las fibras normales es la misma a cualquier distancia del eje neutro e igual al valor medio de dicha rotación*. Entonces la rotación total en cada una de las direcciones del cascarón será

$$\gamma_\alpha^T = \gamma_\alpha + \psi_\alpha(\beta_1, \beta_2); (\alpha = 1, 2) \qquad (2.1)$$

en que

$$\psi_\alpha = \frac{s}{GA} Q_\alpha \qquad (2.2)$$

en tanto que γ_α es la rotación de la fibra normal debida a los esfuerzos normales y s es una constante que toma en cuenta la forma en que se distribuye el esfuerzo cortante en la sección. En general se puede poner que el esfuerzo cortante es

$$\sigma_{3\alpha} = \frac{Q_\alpha}{AT} f(z) \qquad (2.3)$$

* Ver discusión a la ecuación de la Relación histórica.

** Aquí como en las demás ecuaciones el índice α puede tomar los valores 1 o 2 representando entonces las cantidades asociadas a las direcciones β_1 o β_2.

y $\mathcal{A}$ resulta ser entonces el valor medio de $f(z)$. Puede demostrarse del sistema de ecuaciones de equilibrio (apéndice A6), cuando no se toman en cuenta los cambios de geometría de las superficies paralelas a la media (ver apéndice A2), que la ecuación de equilibrio en la dirección normal a la superficie media permite calcular

$$\sigma_{33} = \left[\bar{q} \right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} - \frac{6t}{\mathcal{A}} \left[\chi_{1,1} + \chi_{2,2} \right] \qquad (2.4)$$

aquí, como en el resto del trabajo la coma (,) después de una cantidad indica derivada con respecto a la o las variables β con los índices que siguen a la coma; $\bar{q}$ es la carga aplicada en la dirección normal a la superficie y que se supone aplicada en las caras extremas del cascarón.

Una vez introducidas las funciones ψ_α, en la forma de la ecuación 2.2, se puede pensar que los momentos flexionantes son producidos únicamente por el cambio de las cantidades h_α (como se ilustra en el apéndice A5) según lo ha hecho Timoshenko en el caso de vigas. Sin embargo, al pasar de un punto a otro sobre la curva β_1 (ver fig. 2.1) la cantidad ψ_1 no permanece constante, sino que origina una deformación adicional similar a la de la curvatura k_1. Lo mismo ocurre con la cantidad ψ_2. La omisión de estas cantidades adicionales introduce en general errores pequeños en vigas y quizá también en cascarones de manera que como consideración de partida, se supondrá despreciable. Al final de este capítulo se discute el orden de magnitud de los errores en cuestión.

Hasta ahora, el problema se ha complicado con la introducción de las funciones ψ_1 y ψ_2, de manera que el problema general consiste en la solución de un sistema de cinco ecuaciones diferenciales en las variables u_1, u_2, w, ψ_1 y ψ_2. Este camino, aunque con otro sentido para las variables $_1$ y $_2$, ha sido planteado por Naghdi(39) Reissner(56) y Ambartzumian(38). En lo que sigue se propone una aproximación que aunque un tanto burda, puede tener utilidad en ingeniería civil.

Esta aproximación consistirá en introducir una suposición respecto a las funciones ψ_1 y ψ_2. Con base en la analogía estático-geométrica, las cantidades siguientes se expresan en forma análoga, las de la izquierda en las ecuaciones de equilibrio y las de la derecha en las ecuaciones de compatibilidad;

$$
\begin{array}{lcl}
N_1 & \text{———————} & \kappa_2 \\
N_2 & \text{———————} & \kappa_1 \\
S_{12} & \text{———————} & -\tau_1 \\
S_{21} & \text{———————} & -\tau_2 \\
Q_1 & \text{———————} & \vartheta_2 \\
Q_2 & \text{———————} & \vartheta_1
\end{array}
$$

Si se acepta que $S_{12} = S_{21} = S$ y además que $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, como se ha hecho en el apéndice A, se puede escribir

$$
\begin{array}{lcl}
N_1 & \text{———————} & \kappa_2 \\
N_2 & \text{———————} & \kappa_1 \\
S & \text{———————} & -\tau
\end{array}
$$

$\mathcal{Q}_1$ ———————— Π_2

$\mathcal{Q}_2$ ———————— Π_1

Las cantidades de la derecha satisfacen idénticamente las ecuaciones de compatibilidad, cuando se escriben

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 &= \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} + \frac{W_{,2}}{\alpha_2}\,\ell_{12} \\
\mathcal{K}_2 &= \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2} + \frac{W_{,1}}{\alpha_1}\,\ell_{21} \\
\tau &= \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2} + \ell_{21}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right) + \ell_{12}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right) \\
\Pi_1 &= \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{R_2}W\right)_{,2} - \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{\alpha_1}W_{,1} \\
\Pi_2 &= -\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{\alpha_2}W_{,2} + \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{R_1}W\right)_{,1}
\end{aligned}
\qquad (2.6)
$$

Las ecuaciones de equilibrio son análogas por completo a las ecuaciones de compatibilidad, a través del grupo de ecuaciones 2.5. Entonces las ecuaciones de equilibrio se satisfarán idénticamente si se introduce una función de fuerzas φ análoga a la variable W que está incluida en las cantidades $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{K}_2$, τ, Π_1, Π_2 y , en el grupo de ecuaciones 2.6. Entonces se deberá expresar,

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\varphi_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2} + \frac{\varphi_{,1}}{\alpha_1}\,\ell_{21} \\
N_2 &= \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\varphi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} + \frac{\varphi_{,2}}{\alpha_2}\,\ell_{12} \\
S &= -\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\varphi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2} + \ell_{21}\left(\frac{\varphi_{,2}}{\alpha_2}\right) - \ell_{12}\left(\frac{\varphi_{,1}}{\alpha_1}\right) \qquad (2.7) \\
Q_1 &= \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{R_1}\varphi\right)_{,1} - \frac{1}{R_{12}}\frac{\varphi_{,2}}{\alpha_2} \\
Q_2 &= \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{R_2}\varphi\right)_{,2} - \frac{1}{R_{12}}\frac{\varphi_{,1}}{\alpha_1}
\end{aligned}
$$

Del grupo de ecuaciones 2.7, se puede ver que las variables ψ_1 y ψ_2 citadas antes, pueden representarse con la misma función que representa a las fuerzas normales N_1 y N_2 y la fuerza cortante S , en virtud de que τ_1 y τ_2 quedan definidas mediante la ecuación 2.2.

Esta representación de las fuerzas cortantes tiene limitaciones puesto que indica que en placas (cuando $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$), el esfuerzo cortante es nulo, cualquiera que sea el espesor. En cascarones cilíndricos, sólo puede estimarse de esta manera el efecto de la fuerza cortante en la dirección de la directriz, ya que a lo largo de la generatriz resulta nula; esto es cierto aprdximadamente cuando el cascarón es largo[9,17,24,31] es decir, cuando se conserva la relación L/R $>$ 2.5, donde L es el claro longitudinal y R el radio de curvatura.

Para la derivación de las ecuaciones fundamentales se usará el principio variacional de Reissner[47]. El enunciado para este principio, en el caso de la teoría de cascarones, puede hacerse al establecer

$$
\begin{aligned}
J = \iint_R \Big[& M_1 \kappa_1 + M_2 \kappa_2 + H \tau + N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + S \omega \\
& + Q_1 (\beta_1 + \gamma_1) + Q_2 (\beta_2 + \gamma_2) \\
& - U^* \Big] \alpha_1 \alpha_2 \, d\beta_1 \, d\beta_2 \\
& - \iint_{\Sigma} (P W) \alpha_1 \alpha_2 \, d\beta_1 \, d\beta_2
\end{aligned}
\qquad (2.8)
$$

como la energía de edeformación. El término U^* representa la energía complementaria (ver fig. [illegible]) y los términos restantes son la energía de deformación U. El símbolo Σ_1 de la segunda integral indica que dicha integral debe verificarse en aquella parte de la superficie del cascarón en que se prescriben las fuerzas. P es la fuerza en la dirección normal a la superficie.

De acuerdo con el enunciado del principio de Reissner (ref 64, p. 131), al cancelarse idénticamente la primera variación (δJ) (ver apéndice A3) de la integral J se cumplen simultáneamente, las condiciones de equilibrio y las condiciones de compatibilidad.

En el caso particular de las ecuaciones que aquí se desarrollan es conveniente re-expresar la integral (2.8) en otra forma. La forma que se escoge consiste en poner la energía debida a flexión, como la energía de deformación U (ver fig. 2.2) y la debida a fuerzas en la superficie (N_1, N_2, S) en términos de la energía complementaria U^* (ver fig. 2.2). La razón de esta elección es que al introducir la función de esfuerzos φ para definir a las fuerzas se cumplen ya las condiciones de equilibrio, en tanto que falta el equilibrio en los términos de flexión que cumplen con las condiciones de compatibilidad. Esta elección es posible aún si se supone un material de comportamiento elástico no lineal. La integral es entonces:

$$
\begin{aligned}
J = \frac{1}{2}\iint \Big\{ & D\left[(\kappa_1+\kappa_2)^2 - 2(1-\sigma)(\kappa_1\kappa_2-\tau^2)\right] \\
& + \frac{1}{Et}\left[(N_1+N_2)^2 - 2(1+\sigma)(N_1N_2+S^2)\right]\Big\} \\
& + \left[Q_1(\beta_1+\psi_1) + Q_2(\beta_2+\psi_2)\right]\alpha_1\alpha_2\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
& - \iint_{\Omega} (pW)\,\alpha_1\alpha_2\, d\xi_1\, d\xi_2
\end{aligned}
\qquad (2.9)
$$

en que $\qquad D = \dfrac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$

En esta ecuación, el término subrayado esta expresado como un trabajo, en tanto que los dos restantes de la primera integral son energías de deformación. Respecto a la segunda integral de la ecuación 2.9, es necesario aclarar el significado físico de P . La primera integral está valuada con cantidades en la superficie, en tanto que la segunda contiene cantidades que son normales a la superficie. Así no existe diferencia entre una placa y un cascarón, a menos que se aclare el valor de P. Debido a la curvatura del cascarón en una y otra dirección, las fuerzas en la superficie (en particular N_1 y N_2), tendrán una componente en la dirección de la normal como se ilustra en la figura 2.3; entonces

$$P = q - (k_1 N_1 + k_2 N_2) \qquad (2.10)$$

que por otro lado, es un término que aparece en la tercera ecuación de equilibrio de fuerzas (ver ec. A6.18 del apéndice A6). Tomando en cuenta los grupos de definiciones 2.6 y 2.7, así como que las rotaciones β_1 y β_2 se expresan en la forma

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{W_{,1}}{\alpha_1} + \underline{\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}} \\ \beta_2 &= \frac{W_{,2}}{\alpha_2} + \underline{\frac{u_2}{R_{12}} + \frac{u_2}{R_2}} \end{aligned} \qquad (2.11)$$

(en que los términos subrayados se desprecian por la hipótesis de cascarón rebajado) se procede ahora a calcular la primera variación. Considérese inicialmente la variación con respecto a W; en este caso, las variables que contienen a φ no cambian si se supone que la geometría de la superficie deformada es esencialmente la misma que la inicial. De la ecuación 2.9 se deduce entonces

$$\delta J_W = \iint_R \Big\{ D\big[\mathcal{K}_1 \delta\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 \delta\mathcal{K}_2 - \nu(\mathcal{K}_1 \delta\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_2 \delta\mathcal{K}_1) + 4(1-\nu)(\tau\delta\tau) + \frac{Gh}{\Delta}\psi_1(\delta\mathcal{K}_1) + \frac{GA}{\Delta}\psi_2(\delta\mathcal{K}_2)\big]\alpha_1\alpha_2\, d\beta_1\, d\beta_2 + \iint (k_1 N_1 + k_2 N_2 q)\,\delta W\Big\}\alpha_1\alpha_2\, d\beta_1\, d\beta_2 \qquad (2.12)$$

Ahora las variaciones de $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, τ y ψ_1 ψ_2 se expresan (ver apéndice A3) como

$$\delta\mathcal{K}_1 = \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial\delta W}{\partial\beta_1}\right)_{,1} + \frac{\ell_{12}}{\alpha_2}\frac{\partial\delta W}{\partial\beta_2}$$

$$\delta\mathcal{K}_2 = \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial\delta W}{\partial\beta_2}\right)_{,2} + \frac{\ell_{21}}{\alpha_1}\frac{\partial\delta W}{\partial\beta_1} \qquad (2.13)$$

$$\delta\tau = \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\partial\delta W}{\alpha_1\partial\beta_1}\right)_{,2} + \ell_{21}\left(\frac{\partial\delta W}{\alpha_2\partial\beta_2}\right) + \ell_{12}\left(\frac{\partial\delta W}{\alpha_1\partial\beta_1}\right)$$

$$\delta\psi_1 = \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial\delta W}{\partial\beta_1}\right)$$

$$\delta\psi_2 = \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\partial\delta W}{\partial\beta_2}\right)$$

Considérese por ahora únicamente el primer término de la primera integral en la ecuación 2.12 ; su variación es

$$\delta J_{W\mathcal{K}_1} = \iint D\mathcal{K}_1\left\{\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial\delta W}{\alpha_1\partial\beta_1}\right)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial\delta W}{\partial\beta_2}\ell_{12}\right\}\alpha_1\alpha_2\, d\beta_1\, d\beta_2$$

mediante integración por partes se puede escribir, cuando se supone que el espesor es variable, es decir, cuando D = $D(\beta_1, \beta_2)$
(,),

$$\delta J_{W\mathcal{K}_1} = \iint\left\{\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial D\mathcal{K}_1}{\alpha_1\partial\beta_1}\right)_{,1} - \frac{1}{\alpha_2}\left(D\mathcal{K}_1\ell_{12}\right)_{,2}\right\}\delta W\alpha_1\alpha_2\, d\beta_1\, d\beta_2 \qquad (2.14)$$

$$+ \oint\left\{\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial\delta W}{\partial\nu}D\mathcal{K}_1 - \left(\frac{1}{\alpha_1}(D\mathcal{K}_1)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}(D\mathcal{K}_1\ell_{12})_{,2}\right)\delta W\right\}d\ell$$

$d\ell$ se entiende como el elemento de línea sobre la curva de frontera. Antes de intentar el desarrollo en esta forma, conviene introducir hipótesis acerca de las cantidades que intervienen.

Supóngase ahora que el espesor es constante además de suponer muy pequeños los términos subrayados en el grupo de ecuaciones (2.13). Con estas simplificaciones la primera variación de J con respecto a w es

$$\delta J_w = \iint D\left\{ \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{H_{1,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{H_{2,2}}{\alpha_2}\right)_{,2} + 2\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{Z_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right\} +$$

$$k_1 N_1 + k_2 N_2 - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\alpha_1}\left(Q_{1,1}\right) + \frac{1}{\alpha_2}\left(Q_{2,2}\right)\right\}\delta w \;+ \qquad (2.15)$$

$$\oint D\left\{\left[H_1\frac{\partial \delta w}{\alpha_1\partial\beta_1} + H_2\frac{\partial\delta w}{\alpha_2\partial\beta_2} + Z\frac{\partial\delta w}{\alpha_1\partial\beta_1} + Z\frac{\partial \delta w}{\alpha_2\partial\beta_2}\right] -\right.$$

$$\left. - \left[\frac{H_{1,1}}{\alpha_1} + \frac{H_{2,2}}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial Z}{\partial\beta_2} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial Z}{\partial\beta_1} - \frac{1}{2}\left(Q_1 + Q_2\right)\right]\delta w\right\} d\ell$$

La variación de la ecuación 2.9 con respecto a la variables φ puede escribirse, después de una deducción similar,

$$\delta J_\varphi = \iint\left\{\frac{1}{Eh}\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{B_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\Gamma_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2} - \frac{2}{\alpha_2}\left(\frac{S_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2}\right]\right. \qquad (2.16)$$

$$+ k_1 K_2 + k_2 K_1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R_1}\left(\frac{H_{1,1}}{\alpha_1}\right) + \frac{1}{R_2}\left(\frac{H_{2,2}}{\alpha_2}\right) - \frac{1}{R_{12}}\left(\frac{H_{1,2}}{\alpha_2} + \frac{H_{2,1}}{\alpha_1}\right)\right]$$

$$\left. - \frac{h}{Gh}\left[\frac{1}{\alpha_1 R_1}\left(Q_{1,1}\right) - \frac{1}{\alpha_2 R_{12}} Q_{1,2} - \frac{1}{\alpha_1 R_{12}} Q_{2,1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}\left(Q_2\right)_{,2}\right]\right\}\delta\varphi\, \alpha_1\alpha_2\, d\beta_1\, d\beta_2$$

$$+ \oint D\left\{\left[\Gamma_2\frac{\partial\delta\varphi}{\alpha_1\partial\beta_1} + B\frac{\partial\delta\varphi}{\alpha_2\partial\beta_2} - S\frac{\partial\delta\varphi}{\alpha_1\partial\beta_1} - S\frac{\partial\delta\varphi}{\alpha_2\partial\beta_2}\right] -\right.$$

$$\left. - \left[\frac{\Gamma_{,2}}{\alpha_2} + \frac{B_{,1}}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial S}{\partial\beta_2} - \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial S}{\partial\beta_1} - \frac{K_1}{R_1} - \frac{K_2}{R_2} - \frac{h}{Gh}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right)\right]\right\}\delta\varphi\, d\ell$$

El término subrayado una vez en la ecuación 2.16 se ha simplificado mediante el empleo de las ecuaciones de Codazzi-Gauss (ver apéndice A1). El término subrayado dos veces es una cantidad sumamente pequeña de manera que en la mayoría de los casos puede omitirse (en el inciso 2.3 se discute la introducción de esta cantidad). En todos los desarrollos anteriores, no aparece en ninguna parte la curvatura gaussiana definida como

$$\frac{1}{R_1 R_2} - \left(\frac{1}{R_{12}}\right)^2 \qquad (2.17)$$

La razón es que se ha utilizado la hipótesis de cascarón rebajado en los que la curvatura gaussiana es casi nula. Esto resulta de suponer despreciables los términos subrayados en el grupo de ecuaciones 2.13.

En el caso en que la torsión de la superficie media puede considerarse significativa, es necesario agregar en la ecuación 2.10, la cantidad

$$-\frac{2S}{R_{12}} N \qquad (2.18)$$

y en consecuencia deberá agregarse $-\frac{2S}{R_{12}}$ en la primera integral de la ecuación 2.10 y debido a la introducción de este término, aparecerá en la ecuación 2.16, el término adicional

$$+\frac{2S}{R_{12}} \qquad (2.19)$$

en la parte subrayada una vez.

Antes de darle la forma final a las ecuaciones de este desarrollo, conviene introducir los términos no lineales.

En cuanto al problema de desplazamientos grandes, aquí se considerará únicamente el caso de valores grandes para w. Entonces las ecuaciones que expresan los cambios de curvatura (ecuaciones 2.6) son suficientemente precisas y en consecuencia la analogía estático-geométrica conserva su validez, concluyéndose entonces que las fuerzas pueden expresarse como en el grupo de ecuaciones 2.7.

El único cambio radica en que las deformaciones en la superficie media se expresan entonces (ver apéndice A5) en la forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^T &= \varepsilon_1' + \left(\frac{W}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)^2 \\ \varepsilon_2^T &= \varepsilon_2' + \left(\frac{W_2}{R_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)^2 \\ \omega^T &= \omega' + \left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right) \end{aligned} \qquad (2.20)$$

en que ahora, ε_1', ε_2' y ω' son las deformaciones lineales (de primer orden) y ε_1^T, ε_2^T y ω^T son las correspondientes deformaciones totales. Para poder incluir términos no lineales, sería necesario agregar a la primera integral de la ecuación 2.8 la cantidad:

$$\frac{1}{2}\left\{N_1\left[2\left(\frac{W_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)^2\right] + N_2\left[2\left(\frac{W}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)^2\right] + 2S\left[\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right]\right\} \qquad (2.21)$$

al introducir la variación en la cantidad W, resulta necesario agregar la siguiente cantidad a la ecuación 2.15

$$-\iint \left[\frac{1}{\alpha_1}\left(N_1\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}\left(N_2\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2} + 2\left(\frac{N_1}{R_1}W + \frac{N_2}{R_2}W\right) \right. \qquad (2.22)$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha_1}\left(S\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}\left(S\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2}\right]\alpha_1\alpha_2\, d\theta_1 d\theta_2\, \delta W + \oint \left[(N_1+S)\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right.$$

$$\left. + (N_2+S)\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right]\delta W\, d\ell$$

y en la ecuación 2.16 es necesario agregar la cantidad

$$
\begin{aligned}
\iint \Big\{ & \frac{W_{,1}}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2}\right)_{,2} + \frac{W_{,2}}{\alpha_2\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,1}\right)_{,1} + 2\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2}\right)^2 \\
& + \left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right)_{,1} + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_1}\right)_{,1} \\
& + \left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}\right)_{,2} + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2}\left(\frac{1}{\alpha_2}W_{,2}\right)_{,1} \\
& + 2\Big[\left(\frac{W_{,1}}{R_1}\right)\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{R_1}\right)_{,2}\right)_{,2} + \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W}{R_1}\right)_{,2}\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W}{R_1}\right)_{,2} \\
& + \frac{W_{,2}}{R_2}\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W}{R_2}\right)_{,1,1} + \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W}{R_2}\right)_{,1}\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W}{R_2}\right)_{,1}\Big]\Big\}\,\delta\varphi\,\alpha_1\alpha_2\,d\beta_1\,d\beta_2 \qquad (2.23) \\
& + \oint \Big\{\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)^2 \delta\frac{\partial\varphi}{\alpha_2\partial\beta_2} + \left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)^2 \delta\frac{\partial\varphi}{\alpha_1\partial\beta_1} + \Big[\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2} + \\
& + \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,1}\Big]\delta\varphi + \frac{W_{,1}}{\alpha_1}\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\,\delta\frac{\partial\varphi}{\alpha_1\partial\beta_1} \\
& + \Big[\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2} + \frac{W_{,2}}{\alpha_2}\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2}\Big]\delta\varphi \\
& + \left(\frac{W}{R_1}\right)^2\delta\frac{\partial\varphi}{\alpha_1\partial\beta_1} + \left(\frac{W_{,2}}{R_2}\right)^2\delta\frac{\partial\varphi}{\alpha_2\partial\beta_2} + \Big[\frac{2}{\alpha_2}\left(\frac{W}{R_1}\right)\left(\frac{W}{R_1}\right)_{,2} + \frac{2}{\alpha_1}\left(\frac{W}{R_2}\right)\left(\frac{W}{R_2}\right)_{,1}\Big]\delta\varphi
\end{aligned}
$$

De esta manera queda integrado el sistema de ecuaciones que resulta de introducir variaciones a las cantidades W y φ por separado. La ecuación que se deduce al introducir la variación a W (ecuación 2.15) de acuerdo con el principio de la energía potencial mínima, (64, 65) conduce a la ecuación de equilibrio, cuando se supone δw arbitrario. La ecuación 2.16 conduce a la ecuación de compatibilidad, de acuerdo con el principio de Castigliano[64,65] o de la energía complementaria máxima, cuando se escoge $\delta \varphi$ arbitrario. El sistema de ecuaciones que constituye la expresión de la teoría de la deformación en el cascarón grueso rebajado que incluye el efecto de deformación por cortante, resultan al agregar los términos 2.22 y 2.23 a las ecuaciones 2.15 y 2.16 respectivamente después de haber incluído los términos 2.18 y 2.19.

El sistema de ecuaciones de la teoría general de cascarones de uso en la ingeniería civil, se deduce entonces de las ecuaciones 2.15 y 2.16 y de las modificaciones indicadas arriba, como:

Ecuación de Equilibrio

[illegible] (2.24)

[illegible]

Ecuación de Compatibilidad

[illegible]

Las condiciones de frontera correspondientes se deducen de la consideración de la integral de línea en cada una de las ecuaciones 2.15 y 2.16, con sus respectivas modificaciones.

Del sistema de ecuaciones 2.15 y 2.16 puede verse que los términos lineales son simétricos. El término subrayado dos veces en la ecuación 2.16, puede considerarse despreciable y por esta razón no se ha incluido en la ecuación 2.25. El término subrayado en la ecuación 2.23 resulta despreciable en el tipo de cascarón que se analiza.

De las ecuaciones anteriores es posible deducir todos los casos particulares que han sido analizados por diversos autores (23, 25, 26, 28, 34-b) y que se derivan de la teoría general de cascarones debida a Vlasov y sus generalizaciones.

En lo que sigue se habrán de generalizar estas ecuaciones para el caso de coordenadas curvilíneas de curvatura no principal y que forman un ángulo cualquiera $\theta \neq 90^\circ$ en la superficie.

Antes de proceder a esta extensión, parece interesante observar que el términommarcado con linda interrumpida en la ecuación de compatibilidad 2.25 se puede escribir, (de acuerdo con el grupo de ecuaciones 2.6 y las consideraciones introducidas en el grupo de ecuaciones 2.1[illegible], relativas a despreciar los términos subrayados),

$$\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 - \tau^2 \tag{2.26}$$

que es la curvatura gaussiana (ver apéndice A1) de la superficie deformada, cuando la curvatura gaussiana de la superficie original es nula o casi nula, como ocurre en cascarones rebajados. Lo interesante en esta observación radica en la facilidad existente para el tratamiento de cascarones cuya curvatura gaussiana de la superficie media antes de la deformación no es nula. Un tratamiento ha sido propuesto por M. Rodríguez Caballero[44]. Una discusión acerca de la ecuación de compatibilidad, se presenta en el apéndice A7.

Se procede ahora a la extensión de las ecuaciones 2.24 y 2.25 para el tratamiento de cascarones cuyo sistema de referencia no es ortogonal ni de curvatura principal. Se sigue aquí un tratamiento similar al propuesto por Morley[66] para el análisis de placas. La misma formulación podría lograrse sobre bases puramente tensoriales y ha sido considerada por diversos autores[44, 51a, 52] para la teoría lineal que no incluye la deformación de cortante.

Considérese un sistema de referencia ortogonal como el mostrado en la figura 2.3 y otro sistema de referencia no ortogonal en la misma superficie con un ángulo $\theta = \theta(\alpha_1, \alpha_2)$. Sean α^{I} y α^{II}, las coordenadas curvilíneas en el sistema oblicuo. Haciendo coincidir la curva α_1 del sistema ortogonal con la curva α^{I} del sistema oblicuo, sea θ el ángulo formado por las curvas β_I y β_{II}. Considérese una cierta cantidad $Z = Z(\beta_I, \beta_{II})$. Sus derivadas pueden escribirse

$$\frac{1}{\alpha_I}\frac{\partial Z}{\partial \beta_I} = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial Z}{\partial \beta_1} \tag{2.27}$$

$$\frac{1}{\alpha_{II}}\frac{\partial Z}{\partial \beta_{II}} = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial Z}{\partial \beta_2}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial Z}{\partial \beta_1}\cos\theta$$

y de aquí puede despejarse

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial Z}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\alpha_I}\frac{\partial Z}{\partial \beta_I} \tag{2.28}$$

$$\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial Z}{\partial \beta_2} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\frac{\partial Z}{\partial \beta_{II}} - \frac{1}{\alpha_I}\frac{\partial Z}{\partial \beta_I}\cos\theta\right]$$

y en consecuencia,

$$\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial Z}{\partial \beta_1}\right)_{,1} = \frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}\frac{\partial Z}{\partial \beta_I}\right)_{,I} - 2\cos\theta\,\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{1}{\alpha_I}\frac{\partial Z}{\partial \beta_I}\right)_{,II}$$

$$\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial Z}{\partial \beta_2}\right)_{,2} = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{1}{\alpha_{II}}\frac{\partial Z}{\partial \beta_{II}}\right)_{,II}\right] + \frac{\cos^2\theta}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}\frac{\partial Z}{\partial \beta_I}\right) \tag{2.29}$$

$$\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial Z}{\partial \beta_2}\right)_{,1} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_{II}}\frac{\partial Z}{\partial \beta_{II}}\right)_{,I} - \frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}\frac{\partial Z}{\partial \beta_I}\right)_{,I}\cos\theta\right]$$

de manera que para las derivadas utilizadas en las ecuaciones 2.24 y 2.25 se tiene

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_I \tag{2.30}$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\left[\mathcal{K}_{II} - 2\cos\theta\,\mathcal{Z} + \mathcal{K}_I\cos^2\theta\right]$$

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\left[\mathcal{Z} - \mathcal{K}_1\cos\theta\right]$$

y para las fuerzas expresadas en términos de la función φ

$$N_I = \frac{1}{sen\,\varphi}\left[N_I + 2\cos\theta\, N_{I\,II} + N_{II}\cos^2\theta\right]$$

$$N_2 = N_{II} \tag{2.31}$$

$$S = \bar{S} + N_{II}\cos\varphi$$

la tilde sobre S y Z indica que se trata de la fuerza cortante y momento de torsión en la superficie de coordenadas oblicuas.

Respecto a las curvaturas utilizando la ecuación de la segunda forma fundamental deducida en el apéndice A2, se puede escribir

$$k_1 = k_2$$

$$k_{12} = k_{I\,II} + k_I\cos\theta \tag{2.32}$$

$$k_2 = k_I\left(\frac{\cos\theta}{sen\,\theta}\right)^2 - 2\,k_I k_{II}\frac{\cos\theta}{sen^2\theta} + \frac{1}{sen^2\theta}k_{II}$$

Al hacer la sustitución adecuada de los grupos de ecuaciones 2.28 a 2.30 en las 2.24 y 2.25, se puede deducir el sistema de ecuaciones de la teoría general de cascarones rebajados cuya superficie media se encuentra referdda a un sistema curvilíneo cualquiera.

El resultado de esta sustitución, cuando se omiten los términos no lineales, es

$$D\left\{\frac{1}{\alpha_I}\left[\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\right)_{,I}\right]_{,I} + \cos^2\theta\,\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\right)_{,I}\right)_{,I}\right]$$

$$+\frac{1}{\operatorname{sen}^4\theta}\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{W_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,II} - 2\cos\theta\,\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,I}\right]_{,II}\right]_{,II} +$$

$$+\frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[\frac{1}{\alpha_I}\left\{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left\{\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,I} - \left(\frac{W_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\cos\theta\right)_{,II} - \frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_{II}}W_{,II}\right)_{,I}\cos\theta + \frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}W_{,I}\right)_{,I}\cos^2\theta$$

$$+ k_I\,\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{\varphi_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,II} + 2\cos\theta\,\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{\varphi_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,I} + \frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{\varphi_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\cos^2\theta\right]$$

$$+\left[k_I\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 - 2k_{I\,II}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + k_{II}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\left[\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{\varphi_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\right] \qquad (2.33)$$

$$+ 2\left(k_{I\,II} + k_I\cos\theta\right)\left[\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{\varphi_{,I}}{\alpha_{II}}\right)_{,I} + \frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{\varphi_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,II}\cos\theta\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}\left(k_I\varphi\right)_{,I}\right)_{,I} - \left\{\left(k_{I\,II} + k_I\cos\theta\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{1}{\alpha_{II}}\varphi_{,II} - \frac{1}{\alpha_I}\varphi_{,I}\cos\theta\right)\right\}_{,I}\right.$$

$$-\left[\left(k_{I\,II} + k_I\cos\theta\right)\frac{1}{\alpha_I}\varphi_{,I}\right]_{,II} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{1}{\alpha_{II}}\left(-\frac{2}{\alpha_I}\cos\theta\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left[k_I\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 -\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.- 2k_{I\,II}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + k_{II}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\varphi\Big]_{,II}\Big]_{,I} = f$$

y análogamente,

$$-\frac{1}{Et}\left\{\frac{1}{\alpha_I}\left[\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{\varphi_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\right]_{,I}\right. +$$

$$+\frac{1}{sen^4\theta}\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{\varphi_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,II}-2\cos\theta\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{\varphi_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,I}\right)_{,II}\right)_{,II}\right]$$

$$+\frac{2}{sen^2\theta}\left[\frac{1}{\alpha_I}\frac{1}{sen\theta}\left(\frac{1}{\alpha_{II}}\left\{\left(\frac{1}{\alpha_I}\left[\left(\frac{\varphi_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,I}-\left(\frac{\varphi_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\cos\theta\right]\right)-\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}W_{,I}\right)_{,I}\cos\theta+\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}W_{,I}\right)_{,I}\cos^2\theta\right\}\right)_{,II}\right]_{,I}$$

$$+\frac{k_I}{sen^2\theta}\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{W_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,II}+2\cos\theta\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}+\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\cos^2\theta\right]$$

$$+\left[k_I\left(\frac{\cos\theta}{sen\theta}\right)^2-2k_{I\,II}\frac{\cos\theta}{sen^2\theta}+k_{II}\frac{1}{sen^2\theta}\right]\left[\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\right] \qquad (2.34)$$

$$+2\left(\frac{k_{I\,II}+k_I\cos\theta}{sen\theta}\right)\left[\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,II}}{\alpha_I}\right)_{,I}+\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{W_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,II}\cos\theta\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left\{k_I\left(\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\right)+\left[k_I\left(\frac{\cos\theta}{sen\theta}\right)^2-2k_{I\,II}\frac{\cos\theta}{sen^2\theta}+k_{II}\frac{1}{sen^2\theta}\right]\right.$$

$$\left(X\right)\frac{1}{sen^2\theta}\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{W_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,II}-2\frac{\cos\theta}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,II}}{\alpha_{II}}\right)_{,I}+\cos^2\theta\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{W_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,I}\right]$$

$$\left.-2\left[\frac{k_{I\,II}+k_I\cos\theta}{sen\theta}\right]\left[\frac{1}{\alpha_{II}}\left(\frac{W_{,I}}{\alpha_I}\right)_{,II}-\frac{1}{\alpha_I}\left(\frac{1}{\alpha_I}W_{,I}\right)_{,I}\cos\theta\right]\right\}=0$$

De esta manera queda deducido el sistema de ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, en el caso en que los desplazamientos w se consideran grandes. Las soluciones matemática y numérica serán discutidas en un capítulo posterior.

2.2 Consideración del orden de magnitud

En la formulación de la energía de deformación del cascarón con los efectos introducidos de cortante, se aprecian dos partes principales: una debida a flexión y otra debida a membrana. Además se dispone de términos de interacción debidos a la existencia de las curvaturas y de términos no lineales. Para la estimación del orden de magnitud que ahora se discute, se considerarán los siguientes factores:

$\frac{1}{R}$ = parámetro de curvatura

λ = " " longitud

w = " " desplazamiento radial

φ = " " la función de fuerzas

E = " " elasticidad

t = " " espesor

De acuerdo con esta elección, se puede ver que el orden de las derivadas de las funciones w y φ es $\frac{w}{\lambda}$ y $\frac{\varphi}{\lambda}$ respectivamente. Así, la energía de deformación debida a flexión es del orden de $Et^3 \; w^2/\lambda^4$, en tanto que la energía debida a la acción de membrana es del orden de $\left(\frac{1}{Et}\right)\left(\frac{\varphi^2}{\lambda^4}\right)$, o lo que es lo mismo, del orden de Et, si se toma en cuenta que las fuerzas se deducen a partir de φ y que en consecuencia φ es del orden de $E\lambda^2 t$. Considérese inicialmente el término que origina la no linealidad; de la ecuación 2.21 se deduce que dicho término es del orden de

$$\left(\frac{\varphi}{\lambda^2}\right)\left(\frac{w}{\lambda}\right) \quad \text{o sea} \quad Et\left(\frac{w}{\lambda}\right)^2$$

. Por otro lado los términos que incluyen el cortante son del orden de $\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\varphi}{\lambda}\right)\left(\frac{w}{\lambda}\right)$ o sea del orden de $\frac{Etw}{R}$ y finalmente los que incluyen el efecto de la curvatura son del orden de $\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\varphi}{\lambda^2}\right)w$ o sea del orden de $\left(\frac{Et}{R}\right)w$.

De este análisis simple, se deduce que para desplazamientos pequeños, el término adicional que representa el cortante y el término secundario que toma en cuenta el efecto de la curvatura son del mismo orden de magnitud y que en consecuencia ambos deben considerarse en el caso de cascarones en los que la relación $\frac{t}{R}$ no es pequeña. En cuanto a los términos no lineales, resulta que si w es del orden de t, el orden de magnitud de la energía que representan puede ser mayor que la energía de flexión facilitando entonces la inestabilidad. Se aprecia también que la energía de deformación por flexión varía aproximadamente con la relación $Et\left(\frac{w}{\lambda}\right)^4$, cuando w es del orden de h, y que el término no lineal varía con la relación $Et\left(\frac{w}{\lambda}\right)^2$ o sea que para desplazamientos w muy grandes, del orden de λ o mayores, la energía potencial debida a flexión crece más rápidamente recuperando entonces su estabilidad el cascarón. El símil adecuado a estas consideraciones sobre los términos no lineales, se encuentra en la discusión de T. Von Kármán al pandeo de cascarones esféricos[illegible].

2.3 Formas simplificadas del sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

Tratándose de cascarones rebajados, en algunas ocasiones es posible representar la geometría de la superficie media del cascarón como la geometría del plano en que se proyecta la superficie en cuestión. En estas condiciones es posible introducir algunas simplificaciones relativas a los parámetros en la superficie y que son

$$\alpha_1 =$$

$$\alpha_2 = \text{constante}$$

y si como consideración adicional se introduce la hipótesis de curvatura constante, se deduce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{aligned}
D\nabla^4 w &+ \frac{k_I}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\cos\theta\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos^2\theta\right] \\
&+ \left[k_I\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 - 2k_{I\,II}\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + k_{II}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \qquad (2.35) \\
&+ 2\left(k_{I\,II} + k_I\cos\theta\right)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cos\theta\right]\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right) \\
&- \frac{1}{2}\left[k_I\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \left(k_{I\,II} + k_I\cos\theta\right)\left[\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos\theta\right]\right] \\
&+ \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(k_I\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 - 2k_{I\,II}\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + k_{II}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\times\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right. \\
&\left. - 2\cos\theta\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \cos^2\theta\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = f
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{Et}\nabla^4\varphi + \frac{k_I}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\cos\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\theta\right]$$

$$+\left[k_I\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 - 2k_{I\,II}\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + k_{II}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$+\,2\,\frac{k_{I\,II} + k_I\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos\theta\right]$$

$$-\frac{1}{2}\Bigg\{k_I\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[k_I\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) - 2k_{I\,II}\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + k_{II}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,(X)$$

$$\cdot\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\cos\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos\theta\right]$$

$$-\,\frac{\left[k_{I\,II} + k_I\cos\theta\right]}{\operatorname{sen}\theta}\left(2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos\theta\right)\Bigg\} = 0$$

En que se ha introducido el operador diferencial,

$$\nabla^4 X = \frac{\partial^4}{\partial x^4}X + \frac{1}{\operatorname{sen}^4\theta}\Bigg\{\left[\frac{\partial^4 X}{\partial y^4} - 2\cos\theta\,\frac{\partial^4 X}{\partial x^2\,\partial y^2} + \cos^2\theta\,\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}\right]$$

$$+\,\frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[\frac{\partial^4 X}{\partial x^2\,\partial y^2} - \frac{\partial^4 X}{\partial x^2\,\partial y^2}\cos\theta - \frac{\partial^4 X}{\partial x^3\,\partial y}\cos\theta + \frac{\partial^4 X}{\partial x^4}\cos^2\theta\right]$$

2.3 DISCUSION SOBRE INESTABILIDAD ELASTICA

En el inciso anterior se dedujo un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales para el equilibrio en la teoría de cascarones. El problema que ahora se propone, se refiere a la inestabilidad. Con objeto de hacer general la discusión que aquí se presenta, se usará la formulación Euleriana*, la cual considera para el equilibrio, la geometría de la superficie deformada. El concepto físico que se discute tiene validez en los sistemas Euleriano y Lagrangiano. La formulación Euleriana y la anterior Lagrangiana son esencialmente no lineales; la Euleriana incluye aquí no linealidades en todos los desplazamientos, en tanto que la formulación del tipo Lagrangiana considera en el caso anterior, (inciso 2.) solamente no linealidades para el desplazamiento w.

Como en la fig. 2.1, considérese una superficie original no cargada, S^0 ; al aplicarse la carga, la superficie pasa a ser la S^1. Al verificarse esta deformación, se modifican los parámetros métricos de la superficie, además de existir cambios en las curvaturas de la superficie original (según se explica en el apéndice A, sobre geometría de la deformación). Con respecto a las curvas sobre la superficie, la designación se conserva y las derivadas con respecto a los parámetros de la superficie son de la forma $\frac{\partial}{\partial\beta_1}$ $\frac{\partial}{\partial\beta_2}$ en la formulación Euleriana que se usa

* En el sistema Euleriano las variables independientes son las coordenadas de las curvas deformadas en el instante que interesa; en el sistema Lagrangiano, todas las variables se expresan con respecto a las curvas coordenadas iniciales.

se conservan las mismas.

Los coeficientes métricos, en las superficies S^{0} y S^{I} se escriben

TABLA 1

en S^{0}	en S^{I}	en S^{II}
α_1^{0}	$\alpha_1^{I} = \alpha_1^{0}(1+e_1)$	$\alpha_1^{II} = \alpha_1^{I}(1+e_1)$
α_2^{0}	$\alpha_2^{I} = \alpha_2^{0}(1+e_2)$	$\alpha_2^{II} = \alpha_2^{I}(1+e_2)$
$\theta^{0} = \frac{\pi}{2}$	$\theta' = \frac{\pi}{2} - \omega$	$\theta^{II} = \frac{\pi}{2} - \omega$
k_1^{0}	$k_1^{I} = k_1^{0}(1) + \kappa_1$	$k_1^{II} = k_1^{I} + \kappa_1$
k_2	$k_2^{I} = k_2^{0} + \kappa_2$	$k_2^{II} = k_2^{I} + \kappa_2$
k_{12}^{0}	$k_{12}^{I} = k_{12}^{0} + \tau$	$k_{12}^{II} = k_{12}^{I} + \tau$

de manera que las derivadas con respecto a las curvas de la superficie S^{I} se escriben por ejemplo,

$$\frac{1}{\alpha_1^{I}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}$$

En la tabla 1, los valores e_1, e_2, ω, κ_1, κ_2 y τ deben ser considerados como valores no lineales (ver apéndice A5) o lineales cuando se trata de una aproximación.

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio para la superficie deformada, se deducen de las ecuaciones 2.33 y 2.34 mediante la sustitución de los coeficientes correspondientes de la primera y segunda forma fundamentales de la superficie deformada. La analogía estático-geométrica sigue siendo válida en la superficie deformada según puede demostrarse sobre bases tensoriales( ) de modo que la sustitución indicada en la tabla 1 es válida.

El ángulo $\theta^{I} \neq \frac{\pi}{2}$ indica que el sistema de referencia en la superficie deformada ya no es ortogonal; este hecho queda considerado en la sustitución de las propiedades de la superficie deformada en las ecuaciones 2.33 y 2.34 ; sin embargo, en general, la deformación angular es pequeña comparada con la unidad y el sistema de referencia durante la deformación, puede considerarse ortogonal como lo han hecho Mushtari y Galimor[73].

En condiciones similares, puede introducirse en este análisis, el caso de deformaciones iniciales, en cuyo caso, la posición de la superficie antes de la carga, sería la S^{I} y al verificarse la deformación, la superficie pasaría a ser la S^{II}. Las propiedades geométricas pasarían a ser aquellas que se deducen de la tabla 1 al sustituir I en lugar de 0 y II en lugar de I. Otros estados de deformación sucesivos o no, pueden ser considerados en la misma forma.

Al verificarse incrementos sucesivos en la carga y existir superficies deformadas, pueden llegar a existir para uno o mas valores de la carga, dos estados simultáneos de deformación, o lo que es lo mismo, dos formas de la superficie deformada por una misma carga. La existencia [illegible] de dos estados simultáneos, [illegible] un estado de equilibrio neutro [illegible] la superficie que corresponde al segundo estado simultáneo se designa como S^*.

El fenómeno de inestabilidad elástica, puede considerarse también desde el punto de vista de la energía potencial V. Cuando se introduce una pequeña variación en el desplazamiento, la energía potencial del sistema sufre un cambio. El cambio en la energía potencial V se puede escribir,

$$\Delta V = h\delta V + \frac{h^2}{2}\delta^2 V \qquad 2.$$

en que h es un parámetro adimensional. En realidad, si el sistema en cuestión, posee magnitudes que caracterizan su configuración geométrica es posible, representar la energía potencial V, en un espacio $n+1$ dimensional. En el caso de un cascarón, la fig. 2.5, representa la función V para las variables φ y w. La primera variación es nula, se sabe que el estado es de equilibrio. Este estado de equilibrio puede corresponder a un máximo, en cuyo caso, el estado es inestable, o a un mínimo, cuando es estable. La segunda variación (δ^2V) permite reconocer si la energía potencial es máxima o mínima. Cuando el sistema es Lagrangiano, la segunda variación δ^2V es una forma cuadrática y es necesario determinar su valor para saber si la posición es estable. Tratándose de la formulación Euleriana, para el análisis de inestabilidad, es suficiente con considerar lo que puede llamarse la primera variación. Entonces para la formulación Euleriana, se puede escribir

$$\delta W = \delta P \qquad 2.$$

como condición de equilibrio neutro, en que

W = energía potencial de deformación o de las fuerzas internas

P = energía potencial de las cargas externas.

La ecuación 2 es equivalente a la consideración anterior de la existencia simultánea de dos estados de deformación, que corresponden a las superficies S^{I} y S^{*}.

Las ecuaciones matemáticas correspondientes, se deducen al tomar en cuenta la tabla 1 y al considerar la forma de la energía expuesta al principio de este capítulo (ver ecuación).

La presentación previa es totalmente similar al criterio de inestabilidad debida a Liapunov*.

* Se recomienda la referencia 24 para una revisión del concepto.

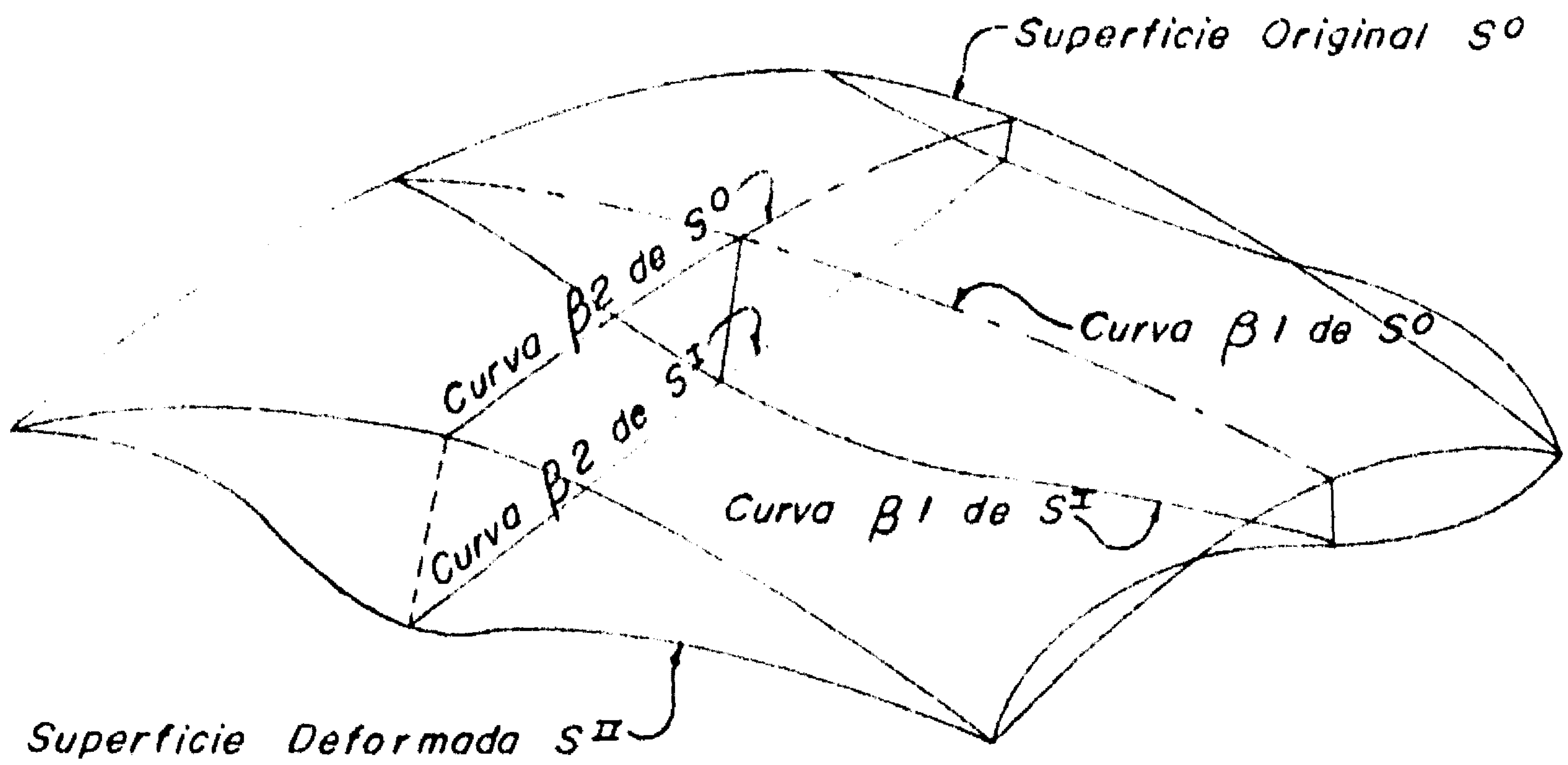

Superficie Original S^o
Curva $\beta 2$ de S^o
Curva $\beta 1$ de S^o
Curva $\beta 2$ de S^I
Curva $\beta 1$ de S^I
Superficie Deformada S^{II}

FIGURA.- 2.1

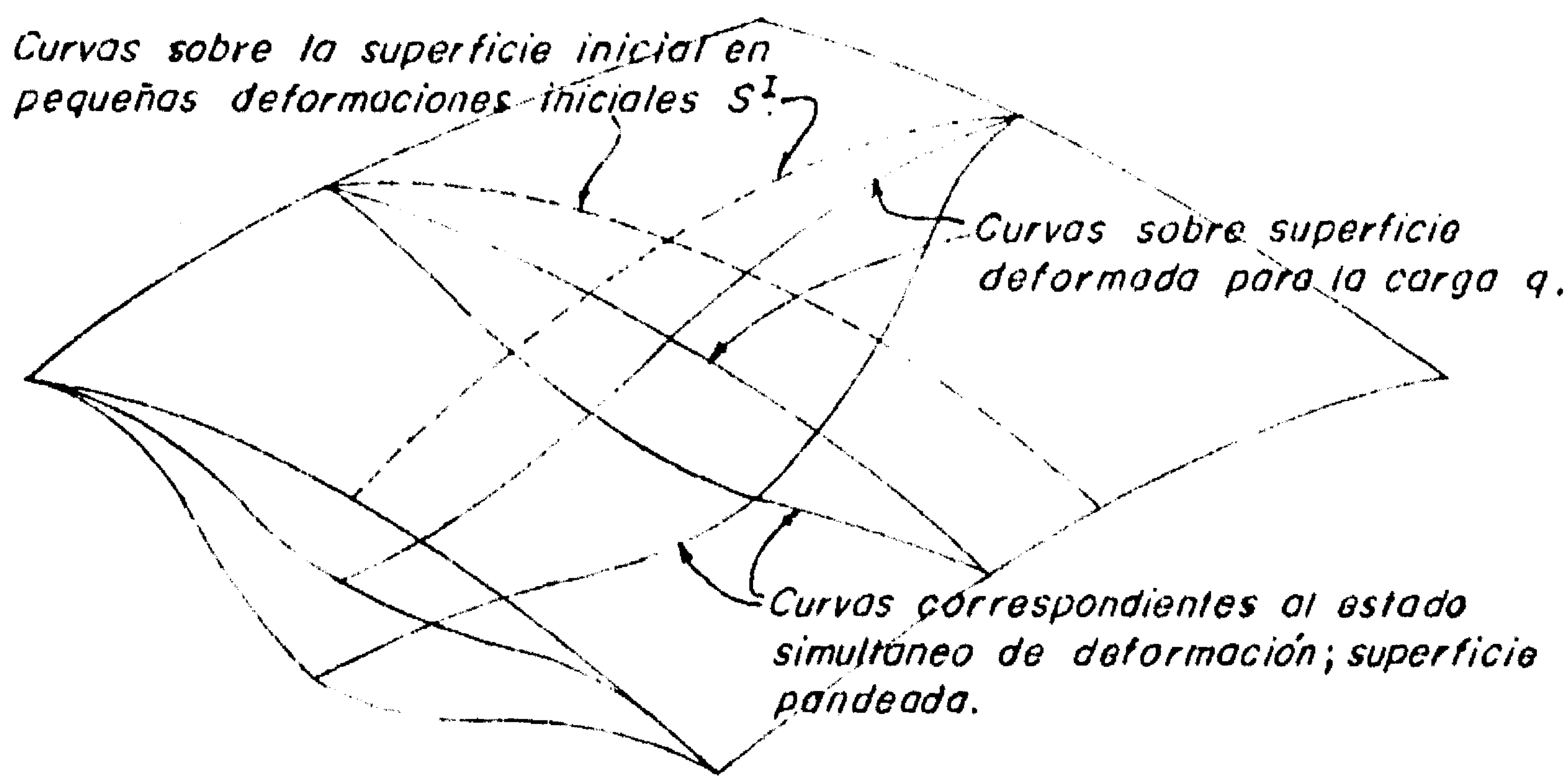

Curvas sobre la superficie inicial en pequeñas deformaciones iniciales S^{1}.
Curvas sobre superficie deformada para la carga q.
Curvas correspondientes al estado simultáneo de deformación; superficie pandeada.

FIGURA.- 2.2

CAPITULO III

TEORIA GENERAL DE CASCARONES ELASTICOS GRUESOS DESARROLLADA MEDIANTE EL EMPLEO DE UNA FUNCION POTENCIAL

3.0 Generales.

La investigación contemporánea en materia de cascarones - dedica especial atención a elementos de este tipo cuyo espesor-no es pequeño,e intenta resolver el problema elástico tridimensional de cascarones en los que la hipótesis de Kirchhoff no es aceptable.

Dos formulaciones recientes constituyen la base de las consideraciones que siguen: dichas formulaciones se deben a W.-Zerna (43) y a I.G. Teregulov (45). Teregulov sugiere especificar la forma de los desplazamientos en términos de un polimomio en Z y de desarrollos análogos para los esfuerzos. La - representación sugerida por Teregulov es,en cuanto a los des - plazamientos.

$$\begin{aligned} U_\alpha &= U_\alpha^{(0)} + Z U_\alpha^{(1)} + Z^2 U_\alpha^{(2)} + Z^3 U_\alpha^{(3)} \\ W &= U_3 = W_{(0)} + Z W_{(1)} + Z^2 W_{(2)} \end{aligned} \qquad 3.1\,(a,b)$$

en cuanto a los esfuerzos es

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}_{(0)} + Z\,\sigma^{\alpha\beta}_{(1)} + Z^2\sigma^{\alpha\beta}_{(2)} + Z^3\,{}^{\alpha\beta}_{(3)}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha 3} &= \sigma^{\alpha 3}_{(0)} + Z\,\sigma^{\alpha 3}_{(1)} + Z^2\sigma^{\alpha 3}_{(2)} \\ \sigma^{33} &= \sigma^{33}_{(0)} + Z\,\sigma^{33}_{(1)} \end{aligned} \qquad 3.2\,(a,b,c)$$

y, para las deformaciones,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta(0)} + z\,\varepsilon_{\alpha\beta(1)} + z^2\varepsilon_{\alpha\beta(2)} + z^3\varepsilon_{\alpha\beta(3)} \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \varepsilon_{\alpha 3(0)} + z\,\varepsilon_{\alpha 3(1)} + z^2\varepsilon_{\alpha 3(2)} \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{33(0)} + z\,\varepsilon_{33(1)} + z^2\varepsilon_{33(2)} + z^3\varepsilon_{33(3)} \end{aligned}\right\} \quad 3.3\,(a,b,c)$$

En esta formulación de tipo polinomial se puede ver que no todos los polinomios son del mismo grado, conservandose en unos terminos hasta la tercera potencia y en otras como σ^{33} solamente hasta la primera potencia. La elección de σ^{33} comparada con la de ε_{33} parece incongruente. Ya que se adopta un material elastico. Estas expresiones que ha introducido Teregulov en la teoria de placas son realmente una mejora pero su extensión a cascarones requiere ciertas modificaciones para poder incluir efectos que no estan presentes en placas. De hecho la proposición de los desplazamientos en la forma de la ecuación 1(a) sugerida por Teregulov, no resulta ser la mas adecuada para el fin de la teoria general de cascarones. En el artículo original de Teregulov, existe una irregularidad en cuanto a las unidades de los terminos; dada la aparente inconsistencia existente en esa presentación se podria llegar a conclusiones erroneas sobre el desarrollo de Teregulov, que no serian justas.

Teregulov usa las ecuaciones 1, 2 y 3 para deducir las ecuaciones de equilibrio y las relaciones deformación desplazamiento con la aplicación de un teorema variacional similar al de Reissner. (47) Pero que fuére formulado por Teregulov en el tratamiento de problemas no lineales de la elasticidad. (46) Los resultados obtenidos por Teregulov corresponden a placas; extenderlas a cascarones resulta complicado, y sería preferible la formulación de Zerna.

Previamente a la formulación de Teregulov, Zerna (43) presenta un desarrollo infinito en serie de potencias de z para los desplazamientos. Mediante el empleo la propiedad del tensor métrico contravariante de expresarse como un desarrollo en serie de potencias de z supone ciertas leyes de distribución de los esfuerzos que satisfacen las condiciones de frontera. Mediante comparación de los polinomios resultantes de la ley esfuerzo-deformación y la distribución supuesta de esfuerzos, se determinan los coeficientes del desarrollo en serie de las deformaciones, y luego las de los desplazamientos. La diferencia esencial en ambos desarrollos radica en que las expresiones en serie para las deformaciones son deducidas geométricamente por Zerna, y postuladas por Tergulov.

El camino que sugiere Teregulov es similar al sugerido por P. Cicala (40) quien supone polinomios de Legendre en lugar de potencias de z. Un tratamiento con esa secuela tiene desventajas, porque no se usa la noción física del problema, ni se toma en cuenta la particularidad de las funciones supuestas.

Anteriormente a, la existencia de estos desarrollos en se

4

rie, en 1944 Vlasov (26, 37) introdujo un desarrollo en serie - de potencias de para las deformaciones. Su modelo de desplazamiento es, en la notación presente

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_\alpha &= \left(1+\frac{z}{R_\alpha}\right)u_\alpha - z\,\frac{W_{,\alpha}}{\alpha_\alpha} \\ W &= W + z\,W^{(1)} \end{aligned}\right\} \qquad 3.4\,(a,b)$$

donde puede verse que conserva la hipótesis de sección plana. La ecuación 4a. puede expresarse también como

$$\bar{u}_\alpha = u_\alpha + z\left(\frac{u_\alpha}{R_\alpha} - \frac{W_{,\alpha}}{\alpha_\alpha}\right) \qquad 3.5$$

y encuentra entonces su justificación en los resultados del apendice A5, de acuerdo con la ecuación A4.10.

De este modo se sigue conservando la hipótesis de sección plana.

Debido a la introducción del término W (1), Vlasov llega a establecer las deformaciones.

$$\left.\begin{aligned} \omega_{13} &= \frac{1}{\alpha_1 c_1}\,\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \beta_1} \\ \omega_{23} &= \frac{1}{\alpha_2 c_2}\,\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \beta_2} \\ \epsilon_{33} &= W^{(1)} \end{aligned}\right\} \qquad 3.6\,(a,c)$$

Aquí se ve que el término W (1) es muy pequeño en comparación con la unidad y es aproximadamente proporcional a la dis tribución de la carga normal a la superficie (cuando el módulo de Poisson en los planos normales a la superficie media es pequeño), lo que conduce a que las deformaciones ω_{13} y ω_{23} sean casi nulas, por ejemplo en el caso de carga uniforme. Esta incongruencia sería eliminada después por Vlasov, y en su libro (ref. 26) publicado en 1949, introduciría $W^{(1)} = 0$. Con la nueva consideración, Vlasov intenta la solución del problema de cascarones gruesos y de curvatura Gaussiana distinta de cero. El desarrollo en serie para las deformaciones paralelas a la superficie media, en términos de la variable z se deduce de la ecuación A-4. 19, cuando se sustituye $\frac{1}{C_\alpha}$ por su desarrollo en serie, es decir,

$$^{h}e_{\alpha\beta} = \left[1 - k_\alpha z + \left(\frac{z}{R_\alpha}\right)^2 - \left(\frac{z}{R_\alpha}\right)^3 + \ldots\ldots\right](e_{\alpha\beta} + z\chi_{\alpha\beta}) \qquad 3.7$$

o sea,

$$^{h}e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + z\,(\chi_{\alpha\beta} - k\,e_{\alpha\beta}) - z^2(k_\alpha\chi_{\alpha\beta} - k_\alpha^2\,e_{\alpha\beta}) + \ldots\ldots$$

y considerando despreciables los términos subrayados por la

$$^{h}e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + z\chi_{\alpha\beta} - z^2(k_\alpha\chi_{\alpha\beta}) + z^3(k_\alpha^3\chi_{\alpha\beta}) - \ldots\ldots \qquad 3.8$$

o bien,

$$^{h}e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{n} z^i\chi_{\alpha\beta i} \qquad 3.9$$

quedando entonces,

$$\left.\begin{aligned} {}^{p}e_{11} &= e_{11} + \sum_{i=1}^{n} z^{i} \chi_{11i} \\ {}^{p}e_{22} &= e_{22} + \sum_{i=1}^{n} z^{i} \chi_{22i} \\ {}^{p}\omega &= {}^{p}e_{12} + {}^{p}e_{21} = \omega + \sum_{i=1}^{n} z^{i} \tau_{i} \end{aligned}\right\} \quad 3.10$$

De las ecuaciones 8 y 9 se puede deducir que

$$\chi_{\alpha\beta i} = (-1)^{i-1} \left(k_{\alpha}^{i-1} \chi_{\alpha\beta}\right) \quad 3.11$$

y en consecuencia,

$$\left.\begin{aligned} \chi_{11i} &= (-1)^{i-1} \left(k_{1}^{i-1} \chi_{11}\right) \\ \tau_{i} &= (-1)^{i-1} \left[-\frac{(k_1 - k_2)(k_1^{i-1} - k_2^{i-1})}{2} \omega + \frac{1}{2} \left(k_1^{i-1} + k_2^{i-1}\right) \tau \right] \end{aligned}\right\} \quad 3.12$$

Como puede verificarse de las ecuaciones correspondientes del capítulo anterior. La formulación de la solución del problema de la teoría de cascarones gruesos podría realizarse del mismo modo que para los cascarones delgados, con la introducción de la deformación por cortante o sin ella, para ello es necesario aprovechar que los coeficientes del desarrollo en serie de la ecuación 9 pueden cálcularse con los resultados obtenidos para χ_{11}, χ_{22} y τ en esa solución. Esto es análogo a lo que propone M. Rodríguez Caballero (44), con la diferencia de que él, además del uso de la notación tensorial, sugiere un procedimiento iterativo para incluir aquellos términos como $\frac{u_i}{R_i}$ etc., que se desprecian en la formulación usual del sistema de ecuaciones diferenciales en las variables Φ y W. Sin embargo, ocurre que coeficientes -

media, porque se supone que las fibras normales a esa superficie se deforman libremente. El modelo incluye aquella deformación que puede producir el cortante. Las limitaciones de la teoría que resulta del modelo son las siguientes:

a) Las relaciones espesor a radio de curvatura menor no deben exceder

$$\frac{t}{R} \leq 0.5$$

b) Las curvas cordenadas elegidas sobre la superficiemedia deben ser casi de curvatura principal, es decir que la torsión en la superficie media no debe ser mayor de $\frac{1}{10}$ de la curvatura mayor.

La condición (a) se cumple satisfactoriamente en la mayor parte de cortinas de concreto construidas hasta la fecha.

La limitación (b) es una hipótesis de naturaleza puramente geométrica, que permite establecer relaciones simples para los parámetros fundamentales de la superficie paralela a la media.

3.2 Deducción de las ecuaciones de equilibrio en cascarones gruesos cuya curvatura gaussiana es distinta de cero.

Para facilitar los desarrollos siguientes, se resumen ahora los resultados esenciales del apéndice A-4 y del inciso anterior de este mismo capítulo. En el apéndice A-4 se formuló el modelo de deformación en la forma, del desarrollo en serie para las potencias superiores a z , --- adquieren significado cuando la relación $\frac{h}{R}$ es grande, y en este caso la hipótesis de sección plana implícita en las ecuaciones 4 de_ja de tener sentido, debido a la deformación de cortante.

La teoría de Vlasov para cascarones gruesos, así como el -- procedimiento iterativo de M. Rodríguez C., pueden mejorarse haciendo uso del modelo de desplazamiento sugerido por Vlasov, y -- mostrado en las ecuaciones 4. Esto se discute con amplitud mas_ adelante.

Empleando la notación de V.Z. Vlasov relativa a los signos_ de los desplazamientos como él discute en su libro (ref. 26, pp._ 184 - 186), se plantea una secuela similar a la que se presenta - mas adelante para las ecuaciones del modelo propuesto en el grupo de ecuaciones 26. La elección de Vlasov para los signos de los_ desplazamientos arroja resultados distintos a los de Love (5) y - tiene un inconveniente que se discute con base en la figura 2.

Considerese ahora el modelo de deformación expresado como

$$\left.\begin{aligned} \bar{W} &= W^{\circ} \\ \bar{u}_\alpha &= u_\alpha\left(1+\frac{z}{R_\alpha}\right) - z\left(\frac{W_{,\alpha}}{\alpha_\alpha} - \frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_\alpha}\right) + z^3 u_\alpha^{(3)} \end{aligned}\right\} \quad 3.13\,(a,b)$$

No sería difícil incluir más términos, pero para el análi-- sis siguiente solamente se usarán estos. En las ecuaciones 13 - aparecen dos funciones nuevas, ψ y $u_\alpha^{(3)}$; la primera de ellas, se gún se desprende de la ecuación 13 (b), indica que la pendiente total es debida, a que la sección permanece plana y a otras causas como puede ser el cortante en las caras normales a la superficie media. Para este modelo,

$$^{p}e_{\alpha\beta} = \frac{1}{C_{\alpha}}\left[e_{\alpha\beta} + z(\chi_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta}) + z^{3} e^{(3)}_{\alpha\beta}\right] \qquad 3.14$$

donde

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha_{\beta}}\left(\frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_{\alpha}}\right)_{,\beta} \qquad 3.15$$

y las componentes de $e^{(3)}_{\alpha\beta}$ se valúan de la misma manera que $e_{\alpha\beta}$, pero sustituyendo $u^{(3)}_{\alpha}$ por u_{α} , es decir,

$$\left.\begin{aligned} e^{(3)}_{11} &= \frac{u_{1,1}}{\alpha_1} + \ell_{12}\, u^{(3)}_{2} \\ e^{(3)}_{22} &= \frac{u_{2,2}}{\alpha_1} + \ell_{21}\, u^{(3)}_{1} \\ \omega^{(3)} &= \frac{u^{(3)}_{1,2}}{\alpha_2} + \frac{u^{(3)}_{2,1}}{\alpha_1} - \ell_{12}\, u^{(3)}_{1} - \ell_{21}\, u^{(3)}_{2} \end{aligned}\right\} \qquad 3.16$$

Además, la deformación angular en las caras normales a la superficie media, que puede calcularse como se hizo en la ecuación A-4, 33, se expresa ahora como

$$\omega_{13} = -\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} + z^{2}(3\,u^{(3)}_{1}) - \underline{\frac{z^{3}}{c_1}\cdot\frac{u^{(3)}}{R_1}} \qquad 3.17$$

Con la hipótesis de que los coeficientes del desarrollo de la ecuación 13 (b) son decrecientes, el término subrayado puede despreciarse. Conviene introducir ahora una consideración estática, de manera que las condiciones de frontera en las caras extremas se satisfagan.

Las condiciones son que los esfuerzos cortantes sean nulos_ en ambas caras, esto es, que para un sólido elástico isotrópico - se tenga

$$\sigma_{13} = G\,\omega_{13} = 0 \qquad para \quad z = \pm \frac{h}{2} \qquad 3.18$$

entonces se puede expresar

$$\omega_{13} = -\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\left(1 - \zeta^2\right) \qquad 3.19$$

y análogamente

$$\omega_{23} = -\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\left(1 - \zeta^2\right) \qquad 3.20$$

en que

$$\zeta = \frac{2z}{h}$$

Si se representa el esfuerzo cortante como en vigas de sec ción rectangular, es decir

$$\sigma_{13} = 1.5\,\frac{Q_1}{A}\left[1 - \zeta^2\right] \qquad 3.21$$

entonces, por ser $\sigma_{13}=G\omega_{13}$, se deduce que ψ tiene el sentido de -- una función potencial de fuerza cortante, porque

$$-\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} = 1.5\,\frac{Q_1}{AG} \qquad 3.22$$

Aquí caben dos procedimientos en cuanto a la solución del - problema:

a) Definir un sistema de ecuaciones en las variables u_1, u_2, W y ψ_1, y resolver el sistema con las condiciones adecuadas de frontera.

b) Sustituyendo la distribución parabólica de la ecuación 19 con otra uniforme que origine por ejemplo la misma energí de deformación, se puede introducir un procedimiento iterativo. Para esto se supone inicialmente que $\psi=0$ y, esta aproximación se mejora sucesivamente en cada etapa con la ecuación 22. Los momentos calculados con la ecuación 14 para cada valor de ψ introducen términos independientes o residuos. Este procedimiento puede incorporarse a la formulación iterativa debida a M. Rodríguez Caballero (44).

El primer procedimiento es adecuado en la formulación de problemas de inestabilidad, en tanto que el segundo es adecuado en el tratamiento de problemas de equilibrio.

El inconveniente esencial de esta formulación radica en que en el modelo de Vlasov definido por las ecuaciones 4, en que el desplazamiento W es positivo en la dirección del vector $\vec{n}$, las curvaturas quedan definidas en forma distinta (ref 26, p 177) a como se definen en las ecuaciones A-3. 38 y A-3. 39; por ejemplo

$$\chi_{11} = \frac{1}{\alpha_1}\left[-\frac{W_{,1}}{\alpha_1}+\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_{12}}\right]_{,1} + \ell_{12}\left[-\frac{W_{,2}}{\alpha_2}+\frac{u_2}{R_2}+\frac{u_1}{R_{12}}\right]$$

que en su forma más simple es

$$\chi = -\frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \beta_1} \qquad 3.23$$

Esto implica, en el caso de una viga, en que las deformaciones se escriben

$$\epsilon = z\chi \qquad 3.24$$

con el eje z dirigido hacia arriba, que la parte superior se encuentra en compresión y la inferior en tensión, con lo cual se -- cumple con la notación usual en ingeniería en que

$$M = -EI\chi \qquad 3.25$$

Considérese ahora la figura II.2 (a), en que R es el radio inicial y R el de la superficie deformada, entonces χ es positiva y esto implica que las fibras superiores se encuentren en -- tensión, con lo cual al aceptar que ϵ es positiva en tensión, quedan plenamente justificados los primeros dos términos de la ecuación 8, pero siempre que se defina χ con signo contrario al de la ecuación 23. Con esto se ve que independientemente de la elección de W, la curvatura positiva corresponde a tensión en las fibras superiores, según se aclara con las figuras II.2 (a) y II.2 (b). El problema se resuelve, modificando el signo de los momentos, con la dificultad de que momentos y fuerzas normales quedan definidos de manera distinta en cuanto al signo de la deformación que introducen. Este problema no aparece en la secuela que después se sigue.

Otro problema quizá más esencial que el anterior se presenta cuando se omite $u_\alpha(3)$ en la ecuación 13 (b) porque entonces - el modelo es el de Kirchhoff, y en este caso, por las considera-- ciones introducidad en la hipótesis de Kirchhoff, en el sentido - de que se supone que los esfuerzos cortantes no producen deformación alguna, es incompatible deducir deformaciones de cortante con el modelo.

3.1 Introducción de la función potencial.

Otro procedimiento es el que aquí se sigue, y que consiste en usar también un polinomio para los desplazamientos.

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^{(0)} + z\,u_\alpha^{(1)} + z^2 u_\alpha^{(2)} + z^3 u_\alpha^{(3)} \\ \bar{W} &= W^{(0)} + z\,W^{(1)} + z^2 W^{(2)} \end{aligned}\right\} \qquad 3.26(a,b)$$

La elección tiene bases puramente físicas. Los dos primeros términos de la ecuación 4a. los resultados de la teoría basada en las hipótesis de Kirchhoff-Love. Dicha ecuación especifica que las fibras perpendiculares a la superficie media tienen deformaciones de cuerpo rígido, es decir giran y se desplazan con - respecto a la posición inicial. El tercer término es esencial-- mente distinto al de Teregulov (ec. 1a), y corrige la forma de -- distribución de los esfuerzos normales. El cuarto término establece una corrección al cambio de posición de las fibras normales a la superficie media, y al igual que la rotación, es un término impar. Entonces las fibras normales experimentan una transla---

ción y además una deformación, porque no permanecen planas.

La hipótesis del modelo de deformación consiste en que las fibras normales a la superficie media, además de girar y acortarse, experimentan una distorsión. Esta distorsión puede ser por ejemplo la debida al esfuerzo cortante. Dado que en la mayoria de los casos la deformación de cortante adquiere mayor importancia en cascarones que por ejemplo en placas, cabe atribuir a cortante esa distorsión.

En cuanto a la segunda hipótesis de Kirchhoff, relativa a la deformación de las fibras normales por efecto de la compresión en las caras externas, podría conservarse despreciando los términos $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$, en virtud de que dada la restricción lateral, las fibras normales tendrán una deformación normal menor que la que ocurre en vigas, donde es despreciable.

Para el modelo de deformación expresado en las ecuaciones 4a y 4b, del apéndice A-4 se desarrolla el cálculo de las deformaciones, Los esfuerzos y las resultantes correspondientes así como las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de compatibilidad, se deducen por separado en los apéndices A-4 y A-5.

Para el modelo de desplazamiento propuesto, el tensor deformación puede escribirse en la forma

$$^{p}e_{\alpha\beta} = \frac{1}{C_{\alpha}}\left[e_{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{3} z^{i} e^{(i)}_{\alpha\beta}\right] \qquad 3.27$$

en que para valuar $e^{(i)}_{\alpha\beta}$ es necesario tomar en cuenta que

$$\left.\begin{aligned} e^{(i)}_{11} &= \frac{u^{(i)}_{1,1}}{\alpha_1} + \ell_{12}\, u^{(i)}_{2} - \frac{W^{(i)}}{R_1} \\ e^{(i)}_{22} &= \frac{u^{(i)}_{2,2}}{\alpha_2} + \ell_{21}\, u^{(i)}_{1} - \frac{W^{(i)}}{R_2} \\ e^{(i)}_{21} &= \frac{u^{(i)}_{1,2}}{\alpha_2} - \ell_{21}\, u^{(i)}_{2} - \frac{W^{(i)}}{R_{12}} \end{aligned}\right\} \qquad 3.28\,(a,b,c)$$

y además que $W^{(i)} = 0$ para $i \geq 3$

Por otro lado, la deformación angular que experimentan ---- los planos normales a la superficie media, se cálcula como

$$\omega_{13} = e_{13} + e_{31} \qquad 3.29$$

es decir, como la suma del ángulo que se desvía el vector tangente a la superficie media en la dirección con respecto al vector normal, más el ángulo que se desvía el vector normal con respecto a la tangente, al verificarse la deformación. El cálculo -- se ha verificado en el apéndice A-4 y el resultado es

$$\omega_{13} = -\frac{1}{C_1 R_1}\left[-z\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} + z^2 u^{(2)}_{1} + \underline{z^3 u^{(3)}_{1}}\right] - \frac{1}{C_1}\left[z\frac{W^{(1)}_{,1}}{\alpha_1} + z^2\frac{W^{(2)}_{,1}}{\alpha_1}\right] - \frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} + 2z\, u^{(2)}_{1} + 3z^2 u^{(3)}_{1} \qquad 3.30$$

El término subrayado en la ecuación 30 se supone despre--- ciable y la validez de esta consideración será justificada des-- pués (ver ec. 38). El número de funciones desconocidas que aparecen en el grupo de ecuaciones 26, puede reducirse con ciertas consideraciones de naturaleza puramente estática. La primera - consideración se refiere a la condición estática en las fronte--

ras superior e inferior del cascarón. En estas fronteras, --- el esfuerzo cortante debe ser nulo si no se encuentra ninguna - acción externa que lo pueda producir.

Entonces, en un cuerpo de anisotropía curvilínea (ver ref. 68) se tiene,

$$\sigma_{13} = G_{13}\ \omega_{13} \qquad 3.31$$

que debe cancelarse para $z = \pm \frac{t}{2}$, es decir,

$$\left.\begin{aligned} \omega_{13} \Big/ z = \frac{t}{2} &= 0 \\ \omega_{13} \Big/ z = -\frac{t}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 3.32\,(a,b)$$

Considerando como incógnitas a $u_\alpha^{(2)}$ $u_\alpha^{(3)}$, es posible despejarlas del sistema de ecuaciones 32 en términos de las otras variables ψ, $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$. Introduciendo en la ecuación 32, la notación

$$C_{1+} = 1 + \frac{t}{2R_1}$$

$$C_{1-} = 1 - \frac{t}{2R_1}$$

se puede escribir

$$\frac{3t^2}{4} u_1^{(3)} - \frac{t^2 u_1^{(2)}}{4C_{1+} R_1} + t u_1^{(2)} = \frac{\psi_1}{\alpha_1}\left[1 - \frac{t}{2C_{1+}R_1}\right] + \frac{1}{C_{1+}}\left[\frac{t}{2}\frac{W_{,1}^{(1)}}{\alpha_1} + \frac{t^2}{4}\frac{W_{,1}^{(2)}}{\alpha_1}\right] \qquad 3.32(a)'$$

$$\frac{3t^2}{4} u_1^{(3)} - \frac{t^2}{4C_{1-}R_1} u_1^{(2)} - t u_1^{(2)} = \frac{\psi_1}{\alpha_1}\left[1 + \frac{t}{2C_{1-}R_1}\right] + \frac{1}{C_{1-}}\left[\frac{t}{2}\frac{W_{,1}^{(1)}}{\alpha_1} + \frac{t^2}{4}\frac{W_{,1}^{(2)}}{\alpha_1}\right] \qquad 3.32(b')$$

9

y considerando además que la relación peralte a radio no es mayor que 0.5, es decir,

$$\frac{t}{R} \leq 0.5 \qquad 3.53$$

se puede deducir que

$$U_1^{(2)} = -\frac{\psi_1}{2\alpha_1 R_1} + \frac{W_1^{(1)}}{2\alpha_1} - \frac{W_1^{(2)} t^2}{2 R_1 \alpha_1} \qquad 3.54$$

$$U_1^{(3)} = \frac{4}{3t^2}\frac{\psi_1}{\alpha_1} - \frac{1}{3R_1}\frac{W_1^{(1)}}{\alpha_1} + \frac{1}{3}\frac{W_1^{(2)}}{\alpha_1} \qquad 3.55$$

y tomando en cuenta estos valores en la ecuación 30, se establece que,

$$w_{1} = -\frac{\psi_1}{\alpha_1}\left\{1+\frac{z}{R_1}\left(1-\frac{1}{C_1}\right)-\frac{4z^2}{t^2}\left[1+\frac{1}{8C_1}\left(\frac{t}{R_1}\right)^2\right]\right\} -$$

$$-\frac{1}{\alpha C_1 R_1}\left\{\frac{z^2}{2}W_1^{(1)}\left(1-\frac{2z}{3R_1}\right)+\frac{z^2}{3}W_1^{(2)}\left[z-\frac{3t^2}{2R_1}\right]\right\} -$$

$$-\frac{1}{C_1}\left[\frac{z W_1^{(1)}}{\alpha_1}+z^2 W_1^{(2)}\right]+2z\left[\frac{W_1^{(1)}}{2\alpha_1}-\frac{W_1^{(2)}t^2}{2R_1\alpha_1}\right] +$$

$$+3z^2\left[-\frac{1}{3R_1}\frac{W_1^{(1)}}{\alpha_1}+\frac{1}{3}\frac{W_1^{(2)}}{\alpha_1}\right] \qquad 3.56$$

simplificando, se obtiene

$$\omega_{13} = -\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\left[1 - \zeta^2 + \frac{z}{R_1}\left(1 - \frac{1}{c_1}\right)\right] + \frac{z}{\alpha_1}\left[W_{,1}^{(1)}\left(1 - \frac{1}{c_1}\right) - \frac{W_{,1}^{(2)} t^2}{R_1}\right]$$

$$- \frac{z^2}{\alpha_1}\left[\frac{W_{,1}^{(2)}}{c_1}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{R_1}\right)^2\right) - 1\right\} + \frac{1}{R_1} W_{,1}^{(1)}\left(1 + \frac{1}{2c_1}\right)\right]$$

$$+ \frac{z^3}{\alpha_1}\left[W_{,1}^{(1)}\left(\frac{1}{3c_1 R_1^2}\right) - \frac{1}{3c_1 R_1} W_{,1}^{(2)}\right] \qquad 3.37$$

y considerando que la magnitud de los términos subrayados, puede despreciarse se tendrá

$$\omega_{13} = -\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\left[1 - \zeta^2\right] - z\frac{W_{,1}^{(2)} h^2}{R_1 \alpha_1} - \frac{z^2}{R_1 \alpha_1} W_{,1}^{(1)}\left(1 + \frac{1}{2c_1}\right) + \frac{z^3}{3c_1 R_1 \alpha_1}\left[\frac{W_{,1}^{(1)}}{R_1} - W_{,1}^{(2)}\right] \qquad 3.38$$

en que

$$\zeta = \frac{4z^2}{t^2}$$

El modelo de desplazamiento presentado en el sistema de ecuaciones 26 puede expresarse más sencillamente con los resultados de las ecuaciones 34 y 35, quedando entonces en términos de 6 funciones desconocidas.

Es muy importante hacer ver que la suposición respecto a la pequeñez del término subrayado en la ecuación 30 es correcta. Además es correcta también la suposición introducida a continuación de la ec. 17. Esto se comprueba fácilmente observando que $u_1^{(3)}$ es menor que $u_1^{(1)}$. De hecho, de los tres términos que definen a $u_1^{(3)}$ en la ecuación 35, el más importantes es

$\frac{4}{3t^2}\frac{\psi_1}{\alpha_1}$ que multiplicado por z^3 en su valor máximo permite obtener $\frac{1}{6}t\frac{\psi_1}{\alpha_1} < \frac{\psi_1}{\alpha_1}\ t$. Dada la expresión de $\frac{\psi_1}{\alpha_1}$ en términos de ω_{11} cabe suponer que este término será más pequeño que γ_1 , en cuyo caso queda verificado que la representación polinomial es correcta en las dos partes en que se ha separado es decir en aquella parte en que la sección es plana y en su corrección (ver apéndice A-4, ec. A-4 7). Observandose la misma cualidad citada en cuanto a la ecuación 17 ya que el valor máximo de la corrección es el del primer término y es

$$\frac{1}{2}\ t\ \frac{\psi_1}{\alpha_1}$$

El siguiente paso consiste en reducir el número de incógnitas. Dado que en general los esfuerzos normales en las superficies del cascarón serán pequeños, las deformaciones de las fibras normales serán pequeñas también. Para el modelo de desplazamiento, la deformación normal está dada por la ecuación A-4 31 como

$$e_{33} = -W^{(1)} - 2zW^{(2)} \qquad 3.39$$

Si esta deformación se considera despreciable, entonces $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$ deben desaparecer. En estas condiciones, las ecuaciones 34 y 35 se convertirían en

$$\left.\begin{aligned} U_1^{(2)} &= -\frac{\psi_1}{2\alpha_1 R_1} \\ U_1^{(3)} &= \frac{4}{3h^2}\ \frac{\psi_1}{\alpha_1} \end{aligned}\right\} \qquad 3.40$$

Pero considerar que $e_{33} = 0$ no es muy razonable, porque en algunos cascarones, la magnitud de ω 13 puede ser del orden de e 33.

Aceptando sin embargo la pequeñez de e 33, existe una consideración más razonable y que se deduce de considerar el cuerpo del cascarón como ortotrópico. Para un material ortotrópico, las deformaciones (ver ref. 68) se cálculan como:

$$
\left.
\begin{array}{l}
e_{11} = \dfrac{1}{E_1}\sigma_{11} - \dfrac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22} - \dfrac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33} \\[2ex]
e_{22} = -\dfrac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \dfrac{1}{E_2}\sigma_{22} - \dfrac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{33} \\[2ex]
e_{33} = -\dfrac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11} - \dfrac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22} + \dfrac{1}{E_3}\sigma_{33} \\[2ex]
\omega_{13} = \dfrac{1}{G_{13}}\sigma_{13} \qquad \omega_{12} = \dfrac{1}{G_{12}}\sigma_{12} \\[2ex]
\omega_{23} = \dfrac{1}{G_{23}}\sigma_{23}
\end{array}
\right\} 3.41\ (a,\ldots,f)
$$

y en un cascaron de concreto reforzado, por ejemplo, $E_3 < E_1, E_2$. En la ecuación 41 (c), se desconoce σ_{11} y σ_{22}, pero se puede conocer σ_{33} si se conoce la distribución de carga en las caras extremas.

En estas condiciones, cabe suponer que

$$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2} = 0 \qquad 3.42$$

en cuyo caso,

$$
\left.
\begin{aligned}
e_{33} &= \frac{1}{E_3}\,\sigma_{33} \\
e_{11} &= \frac{1}{E_1}\,\sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\,\sigma_{22} \\
e_{22} &= \frac{1}{E_2}\,\sigma_{22} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\,\sigma_{11}
\end{aligned}
\right\} \qquad 3.43\,(a,b,c)
$$

De la hipótesis 42 se infiere que el esfuerzo $\sigma\ 33$ no --- tiene efecto en las deformaciones $e\ 11$ y $e\ 22$, y esta es la - hipótesis usual en la teoría de cascarones delgados, donde se - acepta simultáneamente que $e\ 33 = 0$. Las ecuaciones que a quí se desarrollan pueden eliminar entonces esa dificultad, pero incluyen la hipótesis (42) que se usa para definir las funciones $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$

Si en las ecuaciones 39 y 43 (a) se utiliza

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{33}\Big|_{z=\frac{t}{2}} &= p \\
\sigma_{33}\Big|_{z=-\frac{t}{2}} &= q
\end{aligned}
\right\} \qquad 3.44
$$

se obtiene

$$
\left.
\begin{aligned}
W^{(1)} &= -\frac{p+q}{2\,t\,E_3} \\
W^{(2)} &= -\frac{p-q}{2\,t\,E_3}
\end{aligned}
\right\} \qquad 3.45
$$

quedando entonces

$$
\overline{W} = W - \frac{1}{E_3}\left(\frac{p+q}{2}\right) z - \frac{1}{E_3}\left(\frac{p-q}{2}\right)\frac{z^2}{t} \qquad 3.46
$$

La hipótesis 42 equivale a afirmar que las fibras norma-- les a la superficie media se deforman libremente cuando se trata del esfuerzo axial en ellas. Esta hipótesis lleva a acep--

en cuyo caso,

$$\left.\begin{aligned} e_{33} &= \frac{1}{E_3}\,\sigma_{33} \\ e_{11} &= \frac{1}{E_1}\,\sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\,\sigma_{22} \\ e_{22} &= \frac{1}{E_2}\,\sigma_{22} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\,\sigma_{11} \end{aligned}\right\} \qquad 3.43(a,b,c)$$

De la hipótesis 42 se infiere que el esfuerzo σ 33 no --- tiene efecto en las deformaciones e 11 y e 22, y esta es la - hipótesis usual en la teoría de cascarones delgados, donde se - acepta simultáneamente que e 33 = 0. Las ecuaciones que a quí se desarrollan pueden eliminar entonces esa dificultad, pe- ro incluyen la hipótesis (42) que se usa para definir las fun-- ciones $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$

Si en las ecuaciones 39 y 43 (a) se utiliza

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{33}\Big|_{z=\frac{t}{2}} &= p \\ \sigma_{33}\Big|_{z=-\frac{t}{2}} &= q \end{aligned}\right\} \qquad 3.44$$

se obtiene

$$\left.\begin{aligned} W^{(1)} &= -\frac{p+q}{2tE_3} \\ W^{(2)} &= -\frac{p-q}{2tE_3} \end{aligned}\right\} \qquad 3.45$$

quedando entonces

$$\overline{W} = W - \frac{1}{E_3}\left(\frac{p+q}{2}\right)z - \frac{1}{E_3}\left(\frac{p-q}{2}\right)\frac{z^2}{t} \qquad 3.46$$

La hipótesis 42 equivale a afirmar que las fibras norma--- les a la superficie media se deforman libremente cuando se tra- ta del esfuerzo axial en ellas. Esta hipótesis lleva a acep--

tar las ecuaciones (45); sin embargo, la hipótesis en sí resul_ ta sumamente criticable ya que en ocasiones, la magnitud de los términos $\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11}$ y $\frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22}$ puede ser del mismo - orden que los definidos por $\frac{1}{E_3}\sigma_{33}$, y la única razón que la justifica radica en el hecho de que en general dichas -- magnitudes son sumamente pequeñas y puede sugerir una estima--- ción que aunque burda es cualitativa.

Por otro lado, resulta conveniente considerar esa aproxi- mación en lugar de introducir dos funciones desconocidas. Si_ se pretende refinar los resultados de esta hipótesis, se puede_ proceder interativamente mejorando en cada paso las ecuaciones_ 45, tomando en cuenta los términos que fueron despreciados en la hipótesis 42. El procedimiento consistira, en adoptar como -- primera hipótesis, la de la ecuación 45. Conocido el valor de los esfuerzos σ_{11} y σ_{22} , se puede cálcular en ambas como extre- mo el valor de e_{33} , de manera que de las ecuaciones que resul- tan de la ecuación 39, se puede cálcular $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$ cuya magni_ tud se mejora iterativamente . Ahora bien, resulta, al menos en forma aparente, que cuando σ 33 es de magnitud, considera--- ble la hipótesis 42 es adecuada.

El modelo de deslazamiento, queda entonces formulado co- mo aquel en que se desprecia la influencia del esfuerzo normal_ σ 33 en las deformaciones e 11 y e 22 de la superficie_

$$\bar{W} = W + z\, W^{(1)} + z^2 W^{(2)}$$

$$u_\alpha = u_\alpha^{(0)} + z\, u_\alpha^{(1)} + z^2 u_\alpha^{(2)} + z^3 u_\alpha^{(3)} \qquad 3.47$$

expresado también en la ecuación 26. El modelo puede suponerse formado de un grupo de desplazamientos que corresponden a la hipótesis de Kirchhoff (o de las fibras planas y normales a la superficie media) y otro grupo que constituye una corrección. En estas condiciones se puede escribir

$$u_\alpha^{(1)} = u_\alpha^{(1)\prime} + u_\alpha^{*}$$

y entonces

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_\alpha^{(k)} &= u_\alpha^{(0)} + z\, u_\alpha^{(1)\prime} \\ W &= W \end{aligned}\right\} \qquad 3.48,\ 3.49$$

corresponden al modelo de Kirchhoff, cuando

$$u_\alpha^{(1)} = -\gamma_\alpha + u_\alpha^{\prime\prime}$$

además,

$$u_\alpha^{(1)\prime\prime} = \frac{\varphi_{,\alpha}}{\alpha_{\alpha}} \qquad 3.50$$

resultando entonces que la corrección se expresa.

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha^{(c)} &= -z\, u_\alpha^{(1)\prime\prime} + z^2 u_\alpha^{(2)} + z^3 u_\alpha^{(3)} \\ W^{(c)} &= z\, W^{(1)} + z^2 W^{(2)} \end{aligned}\right\} \qquad 3.51$$

en el inciso anterior, fueron deducidas las relaciones que ligan $u_\alpha^{(2)}$ y $u_\alpha^{(3)}$ con $u_\alpha^{(1)\prime\prime}$, así como $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$. En cuanto a las magnitudes de $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$, se hizó antes una discusión, pero en lo que sigue se supondrá por simplicidad,

$$W^{(1)} = W^{(2)} = 0 \qquad 3.52$$

Mediante esta simplificación y después de considerar el -- grupo de ecuaciones 40, es posible escribir el modelo en su forma final como:

$$\left.\begin{aligned} W &= W \\ U_\alpha &= U_\alpha^{(0)} - z\,\gamma_\alpha - z^2 \frac{1}{2R_\alpha}\frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_\alpha} + z^3 \frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_{\alpha}}\left(\frac{4}{3t^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 3.53$$

quedando entonces el modelo de corrección en la forma,

$$U_\alpha^{(c)} = -z\frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_{\alpha}} - z^2\frac{1}{2R_\alpha}\frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_\alpha} + z^3\frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_\alpha}$$

$$U_\alpha^{(c)} = \underline{-z\frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_\alpha}\left(1 - \frac{4}{3t^2}z^2\right)} - \frac{z^2}{2R_\alpha}\frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_\alpha} \qquad 3.54$$

el termino subrayado corresponde a la rotación de las fibras normales, debido a la existencia del esfuerzo cortante, y su variación es parabólica a travez del espesor, sin cancelarse en las - caras extremas. Esto se comprueba al considerar la rotación ω_{13} expresada en la ecuación 38, con la [illegible] 50, es decir

$$\omega_{13} = -\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\left[1 - \zeta^2\right]$$

y análogamente $\qquad 3.55$

$$\omega_{23} = -\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\left[1 - \zeta^2\right]$$

en que se cumplen las condiciones de frontera relativas a los -- esfuerzos cortantes en las caras extremas.

Las deformaciones que se expresan como en la ecuación --- 27, adquieren las siguientes formas explícitas de acuerdo con el grupo de ecuaciones 28,

$$\left.\begin{aligned}
e^{(1)} &= \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1} + \frac{U_{,1}}{R_1} + \frac{U_2}{R_{12}}\right)_{,1} + \ell_{12}\frac{W_{,2}}{\alpha_2} \\
e^{(2)} &= -\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{2\alpha_1 R_1}\right)_{,1} - \ell_{12}\left(\frac{\psi_{,2}}{2\alpha_2 R_2}\right) \\
e^{(3)} &= \frac{1}{\alpha_{13}}\frac{4}{t^2}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} + \ell_{12}\frac{4}{3t^2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad 3.56$$

$$\left.\begin{aligned}
e_2^{(1)} &= \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_1}{R_{12}}\right)_{,2} + \ell_{12}\frac{W_{,1}}{\alpha_1} \\
e_2^{(2)} &= -\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,2}}{2R_2\alpha_2}\right)_{,2} - \ell_{21}\left(\frac{\psi_{,2}}{2\alpha_2 R_2}\right) \\
e_2^{(3)} &= \frac{4}{3t^2}\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} + \ell_{12}\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right]
\end{aligned}\right\} \quad 3.57$$

y análogamente,

$$\left.\begin{aligned}
e_{12}^{(1)} &= \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_1}{R_{12}}\right)_{,1} - \ell_{21}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right) \\
e_{21}^{(1)} &= \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1} + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_{12}}\right)_{,2} - \ell_{12}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right) \\
e_{12}^{(2)} &= -\frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2 R_2}\right)_{,1} + \frac{\ell_{21}}{2}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1 R_1}\right) \\
e_{21}^{(2)} &= -\frac{1}{2\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1 R_1}\right)_{,2} + \frac{\ell_{12}}{2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2 R_2}\right) \\
e_{12}^{(3)} &= \frac{4}{3t^2}\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,1} - \ell_{21}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)\right] \\
e_{21}^{(3)} &= \frac{4}{3t^2}\left[\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2} - \ell_{12}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad 3.58$$

Las deformaciones correspondientes al término de orden cero son aquellas que aparecen en el apéndice A-5 (ecs. A-5.40).

Para la deducción de las ecuaciones de equilibrio, se usará el principio de los desplazamientos virtuales, la ecuación correspondiente se escribe

$$\delta V = \iint \Big\{ \int_V (c_1 \sigma_1 \delta e_1 + c_2 \sigma_2 \delta e_2 + c_1 \sigma_{12} \delta e_{12} + c_2 \sigma_{21} \delta e_{21} + c_1 \sigma_{31} \delta(\gamma_1 + \omega_{31}) + c_2 \sigma_{23}(\gamma_2 + \omega_{31}) dz \Big] h \alpha_1 \alpha_2 \, d\beta_1 \, d\beta_2 + + \iint_\varepsilon \{ X_1 u_1^{(0)} + X_2 u_2^{(0)} + Z W \} \alpha_1 \alpha_2 \, d\beta_1 \, d\beta_2 = 0 \qquad 3.59$$

De acuerdo con la ley de Hooke, es posible establecer, que

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1(\beta_1, \beta_2, z) = E(e_1^p + \nu e_2^p) \\ \sigma_2(\beta_1, \beta_2, z) = G\, e_{12}^p \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma_{31}(\beta_1, \beta_2, z) = G\, \omega_{31} \end{array}\right\} \qquad 3.60$$

y tomando en cuenta la definición 27 del tensor de formación en la superficie paralela a la media, se puede escribir la ecuación 59 en la forma

$$\delta V = E \iint \Big\{ \int \Big[(e_1 + \frac{c_1 \nu}{c_2} e_2) \delta e_1 + \dots\dots\dots\dots + + \frac{1}{2(1+\nu)} c_2 \, \omega_{13} \delta \omega_{13} \Big] h \, dz \Big\} \alpha_1 \alpha_2 \, d\beta_1 \, d\beta_2 + + \iint_\varepsilon \{ X_1 u_1 + X_2 u_2 + Z W \} \alpha_1 \alpha_2 \, d\beta_1 \, d\beta_2 = 0 \qquad 3.61$$

Con objeto de abreviar los desarrollos, se supondrán por ahora despreciables las cantidades ℓ_{12} y ℓ_{21} o sea, las curvaturas en la superficie, además de suponer también despreciables las cantidades $\frac{u_1}{R_1}$, $\frac{u_1}{R_{12}}$, $\frac{u_2}{R_2}$, $\frac{u_2}{R_{12}}$. Con esta suposición, se puede escribir, por ejemplo

$$\delta e_1 = \frac{\delta u^{(0)}_{1,1}}{\alpha_1} - k_1 \delta W + z \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\delta W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} - \qquad 3.62$$

$$- \underline{\frac{z^2}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{2\alpha_1 R_1}\right)_{,1}} + \frac{4z^3}{3\alpha_1 t^2}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}$$

como resulta de la sustitución de las ecs 56, 57 y 58 en la ec 27.

Para ser congruentes con esa suposición, el término subrayado en la ec 62 debe desaparecer.

En lo que sigue se habran de deducir las ecuaciones de equilibrio para el caso en que el espesor es variable, suponiendo que puede escribirse

$$t = t_0(1 + \chi(\beta_1, \beta_2)) \qquad 3.63$$

y que la coordenada z es también expresable en la forma

$$z = z_0(1 + \chi(\beta_1, \beta_2)) \qquad 3.64$$

en que t_0 es el espesor de una cierta sección (que puede ser por ejemplo la de mínimo espesor) y en esa sección, las superficies paralelas [illegible] distan z_0 de la superficie media. Por ser el peralte variable, las superficies extremas del cascaron no son rigurosamente paralelas a la media, sin embargo suponiendo que la función $z_0\chi(\beta_1, \beta_2)$ es tal que su derivada segunda es despreciable comparada con una de las curvaturas, se puede aceptar que las superficies son paralelas localmente . Así las cantidades c_1 y c_2 , que caracterizan el cambio de longitud de los coeficientes metricos en las superficies paralelas, siguen siendo validas (ver apéndice A-2). Esto es equivalente a suponer que el cambio de espesor al pasar de un punto a otro vecino, es muy pequeño y es aceptable en el tipo de cascarones que se utilizan en la ingeniería.

La cantidad h que caracteriza el cambio del tamaño del area al pasar de la superficie media a otra que dista z de ella, se escribe aquí como en el apéndice A-2,

$$\left.\begin{aligned} h &= 1 + zM + z^2 K \\ \text{en que}\quad M &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ K &= \frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_{12}^2} = k_1 k_2 - k_{12}^2 \end{aligned}\right\} \qquad 3.65$$

Utilizando ahora las variaciones de las deformaciones expresadas en forma similar a la de , mostrada en la ec 62, y después de agrupar las variaciones con respecto a las variables u_1 u_2 W ψ se deduce de la ec 59,

$$-\int\left\{\iint\left\{\frac{1}{\alpha_1}(c_1\sigma_1 h)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}(c_2\sigma_{12} h)_{,2}\right\}\delta u_1^{(0)}\alpha_1\alpha_2\, d\beta_1\, d\beta_2\right\}dz = X_1$$

$$-\int\left\{\iint\left\{\frac{1}{\alpha_1}(c_1\sigma_{12} h)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}(c_2\sigma_2 h)_{,2}\right\}\delta u_2^{(0)}\alpha_1\alpha_2\, d\beta_1\, d\beta_2\right\}dz = X_2$$

$$\int\Big\{\iint\Big\{\frac{1}{\alpha_1}\Big[\Big(\frac{1}{\alpha_1}z\,c_1\sigma_1 h\Big)_{,1}\Big]_{,1} + k_1 c_1\sigma_1 h + k_2 c_2\sigma_2 h$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\Big[\Big(\frac{1}{\alpha_2}z\,c_2\sigma_2 h\Big)_{,2}\Big]_{,2} - k_{12}(c_1\sigma_{12}+c_2\sigma_{21})h$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\Big[\frac{1}{\alpha_1}(c_1 h\sigma_{12} z)_{,1}\Big]_{,2} + \frac{1}{\alpha_1}\Big[\frac{1}{\alpha_2}(c_2 h\sigma_{21} z)_{,2}\Big]_{,1}$$

$$-\frac{1}{\alpha_1}(c_1\sigma_{13}h)_{,1} - \frac{1}{\alpha_2}(c_1\sigma_{13}h)_{,2}\Big\}\,\delta W_{\alpha_1\alpha_2}\,d\beta_1\,d\beta_2 = z$$

$$\int\Big\{\iint\Big\{\frac{4}{3}\Big[\frac{1}{\alpha_1}\Big(\frac{1}{\alpha_1}\Big(\frac{z^3}{t^2}c_1\sigma_1 h\Big)_{,1}\Big)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}\Big(\frac{1}{\alpha_2}\Big(\frac{z^3}{t^2}c_2\sigma_2 h\Big)_{,2}\Big)_{,2}$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\,\frac{4}{3}\Big[\frac{1}{\alpha_1}\Big(c_1 h\sigma_{12}\frac{z^3}{t^2}\Big)_{,1}\Big]_{,2} + \frac{4}{3\alpha_1}\Big[\frac{1}{\alpha_2}\Big(c_2 h\sigma_{21}\frac{z^3}{t^2}\Big)_{,2}\Big]_{,1}$$

$$+\frac{3}{4}\Big(1-\frac{4z^2}{t^2}\Big)\Big[\frac{1}{\alpha_1}(c_1\sigma_{13}h)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}(c_2\sigma_{32}h)_{,2}\Big]\Big\}$$

$$\delta\psi_{\alpha_1\alpha_2}\,d\beta_1\,d\beta_2\Big\}\,dz = 0 \qquad 3.66$$

Las condiciones de frontera correspondientes a cada una de estas ecuaciones, se deducen con forma análoga, de la consideración apropiada de las siguientes integrales de linea

$$\int\Big\{\oint(c_1\sigma_1 h + c_2\sigma_2 h)\,\delta u_1^{\circ}\Big\}dz = 0$$

$$\int\Big\{\oint(c_2\sigma_2 h + c_1\sigma_{12} h)\,\delta u_2^{\circ}\Big\}dz = 0$$

$$\int\Big\{\phi\Big[\big(z c_1 \sigma_1 h\,\delta\frac{W_{,1}}{\alpha_1} + z c_2 \sigma_2 h\,\delta\frac{W_{,2}}{\alpha_2} +$$

$$-\Big[\frac{1}{\alpha_1}(z c_1 \sigma_1 h)_{,1} + \frac{1}{\alpha_2}(z c_2 \sigma_2 h)_{,2}\Big]\delta W$$

$$+(c_1 h \sigma_{12} z)\,\delta\frac{W_{,2}}{\alpha_2} + (c_2 h \sigma_{21} z)\,\delta\frac{W_{,1}}{\alpha_1}$$

$$-\Big[\frac{1}{\alpha_2}(c_2 h \sigma_{21} z)_{,2} + \frac{1}{\alpha_1}(c_1 h \sigma_{12} z)_{,1}\Big]\delta W$$

$$- c_1 \sigma_{13} h\,\delta W - c_2 \sigma_{23} h\,\delta W\Big]\,dz = 0$$

$$\int\Big\{\phi\Big\{\frac{4}{3}\frac{z^3}{t^2}\Big[c_1\sigma_1 h\,\delta\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} + c_2\sigma_2 h\,\delta\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2} + c_1\sigma_{12} z\,\delta\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2} + c_2\sigma_{21} z\,\delta\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\Big]$$

$$-\Big[+\frac{4}{3\alpha_1}\Big(\frac{z^3}{t^2}c_1\sigma_1 h\Big)_{,1} + \frac{4}{3\alpha_2}\Big(\frac{z^3}{t^2}c_2\sigma_2 h\Big)_{,2}$$

$$+\frac{4}{3\alpha_1}\Big(\frac{z^3}{t^2}c_1 h\sigma_{12} z\Big)_{,1} + \frac{4}{3\alpha_2}\Big(\frac{z^3}{t^2}c_2 h\sigma_{21} z\Big)_{,2}$$

$$+\frac{4}{3\alpha_2}\Big(c_2 h\sigma_{21}\frac{z^3}{t^2}\Big)_{,2} + \frac{4}{3\alpha_1}\Big(c_1 h\sigma_{12}\frac{z^3}{t^2}\Big)_{,1}$$

$$+\Big[1-\frac{4z^2}{t^2}\Big]\big(c_1\sigma_{13} h + c_2\sigma_{23} h\big)\Big]\delta\psi\Big\}\,d\ell\Big\}\,dz = 0 \qquad 3.67$$

Agrupando los términos que corresponden a la ec. 27 y que se han presentado antes, se escribe

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= \frac{u^{\circ}_{1,1}}{\alpha_1} + k_1 W + \frac{z}{\alpha_1}\Big(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\Big)_{,1} + \frac{4z^3}{3t^2\alpha_1}\Big(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\Big)_{,1}\\
e_2 &= \frac{u^{\circ}_{2,2}}{\alpha_2} + k_2 W + \frac{z}{\alpha_2}\Big(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\Big)_{,2} + \frac{4z^3}{3t^2\alpha_2}\Big(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\Big)_{,2}\\
e_{12} &= \frac{1}{\alpha_1}(u^{\circ}_{2,1}) + k_{12} W + \frac{z}{\alpha_1}\Big(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\Big)_{,1} + \frac{4z^3}{3t^2\alpha_1}\Big(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\Big)_{,1}\\
e_{21} &= \frac{1}{\alpha_2}(u^{\circ}_{1,2}) + k_{12} W + \frac{z}{\alpha_2}\Big(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\Big)_{,2} + \frac{4z^3}{3t^2\alpha_2}\Big(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\Big)_{,2}\\
\omega_{13} &= -\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\Big[1-\frac{4z^2}{t^2}\Big]\\
\omega_{23} &= -\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\Big[1-\frac{4z^2}{t^2}\Big]
\end{aligned}\right\} \qquad 3.68$$

de esta manera, es posible deducir el sistema de ecuaciones diferenciales parciales equilibrio para los cascarones gruesos no rebajados. Sustituyendo las ecs 68 en las ecs 66, se deduce.

$$
\begin{aligned}
&\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{1}{\alpha_1}\left[\left(t+\frac{t^3}{12}K\right)\left(\frac{u^{\circ}_{1,1}}{\alpha_1}+k_1 W\right)\right]_{,1}+\right.\\
&+\frac{1}{\alpha_1}\left[\left(\frac{t^3}{12}M\right)\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}\right]_{,1}+\\
&\left.+\frac{1}{\alpha_1}\left[\left(\frac{t^5}{60}M\right)\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}\right]_{,1}\right\}+\\
&+\frac{E\nu}{(1-\nu^2)\alpha_1}\left\{\left[\left(t+\frac{t^3}{12}MD-\frac{t^5}{80}K^2\right)\left(\frac{u^{\circ}_{2,2}}{\alpha_2}+k_2 W\right)\right]_{,1}+\right. \qquad 3.69\\
&+\left[\left(\frac{t^3}{12}(M+D)-\frac{t^5}{80}K(M-D)\right)\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right]_{,1}+\\
&\left.+\left[\left(\frac{t^5}{60}(M+D)-\frac{t^6}{336}K(M+D)\right)\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)\right]_{,1}\right\}+\\
&+\frac{G}{\alpha_2}\left\{\left[\left(t+\frac{t^3}{12}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}(u^{\circ}_{1,2})-k_{12}W\right)\right]_{,2}+\right.\\
&\left.+\left[\frac{t^3}{12}M\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2}\right]_{,2}+\left[\frac{t^5}{60}M\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2}\right]_{,2}\right\}=X_1
\end{aligned}
$$

y análogamente,

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{1}{\alpha_2}\left[\left(t+\frac{t^3}{12}K\right)\left(\frac{u^\circ_{2,2}}{\alpha_2}+k_2 W\right)\right]_{,2}+\right.$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\left[\left(\frac{t^3}{12}M\right)\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right]_{,2}+$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha_2}\left[\left(\frac{t^5}{60}M\right)\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right]_{,2}\right\}+$$

$$+\frac{E\,\nu}{(1-\nu^2)\alpha_2}\left\{\left[\left(t-\frac{t^3}{12}MD-\frac{t^5}{80}K^2\right)\left(\frac{u^\circ_{1,1}}{\alpha_1}+k_1 W\right)\right]_{,2}\right.$$

$$+\left[\left(\frac{t^3}{12}(M-D)-\frac{t^5}{80}K(M+D)\right)\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}\right]_{,2} \qquad 3.10$$

$$\left.+\left[\left(\frac{t^5}{60}(M-D)-\frac{t^5}{336}K(M-D)\right)\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)\right]_{,2}\right\}$$

$$+\frac{G}{\alpha_1}\left\{\left[\left(t+\frac{t^3}{12}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}(u^\circ_{2,1})-k_{12}W\right)\right]_{,1}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{t^3}{12}M\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,1}\right]_{,1}+\left[\frac{t^5}{60}M\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right]_{,1}\right\}=X_2$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\frac{t^3}{12}M\right)\left(\frac{u_{1,1}}{\alpha_1}+k_1 W\right)\right)_{,1}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\frac{t^3}{12}+\frac{t^5}{80}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}\right)\right)_{,1}+$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\frac{t^3}{60}+\frac{t^5}{336}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}\right)\right)_{,1}\right]_{,1}+$$

$$+\left(t+\frac{t^3}{12}K\right)\left(k_1\frac{u_{1,1}}{\alpha_1}+k_2\frac{u_{2,2}}{\alpha_1}-k_{12}\left(\frac{u_{1,2}}{\alpha_2}+\frac{u_{2,1}}{\alpha_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(k_1^2+k_2^2-k_{12}^2\right)W\right)$$

$$+\frac{t^3}{12}M\left[k_1\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}+k_2\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)-k_{12}\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,1}\right)(1-\nu)\Big]$$

$$+\frac{t^3}{60}M\left[k_1\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}+k_2\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)-k_{12}\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,1}\right)(1-\nu)\Big] \qquad 3.71$$

$$+\nu\left|\left(\frac{t^3}{12}\right)(M+D)+\frac{t^5}{80}K(M+D)\right|\left|k_1\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right|+$$

$$+\nu\left(\frac{t^3}{60}(M+D)-\frac{t^5}{336}K(M-D)\right)\left(k_1\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right)$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\left|\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{t^3}{12}M\right)\left(\frac{u_{2,2}}{\alpha_2}+k_2 W\right)\right)_{,2}+\right.$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{t^3}{12}+\frac{t^5}{80}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right)\right)_{,2}+$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{t^3}{60}+\frac{t^5}{336}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right)\right)_{,2}\right]_{,2}$$

$$+ \nu \left[\frac{t^3}{12}(M-D) + \frac{t^5}{80} K (M-D) \right] \left[k_2 \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1} \right)_{,1} \right]$$

$$+ \nu \left(\frac{t^3}{60}(M-D) - \frac{t^5}{336} K (M+D) \right) \left(k_2 \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} \right)_{,1} \right)$$

$$+ \frac{1-\nu}{2\alpha_2} \left[\frac{1}{\alpha_2} \left(\left(\frac{t^3}{12} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1} U^{\circ}_{2,1} - k_{12} W \right) + \left(\frac{t^3}{12} + \frac{t^5}{80} K \right) \left(\frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2} \right)_{,1} \right) \right)_{,2} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha_2} \left(\left(\frac{t^3}{60} + \frac{t^5}{336} K \right) \left(\frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2} \right)_{,1} \right) \right)_{,2} \right]_{,2} \qquad 3.71 \text{ continuación}$$

$$+ \frac{1-\nu}{2\alpha_1} \left[\frac{1}{\alpha_1} \left(\left(\frac{t^3}{12} \right) \left(\frac{1}{\alpha_2} U^{\circ}_{1,2} - k_{12} W \right) + \left(\frac{t^3}{12} + \frac{t^5}{80} K \right) \left(\frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1} \right)_{,2} \right) \right)_{,1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha_1} \left(\left(\frac{t^3}{60} + \frac{t^5}{336} K \right) \left(\frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} \right)_{,2} \right) \right)_{,1} \right]_{,1}$$

$$+ \frac{(1-\nu)}{2\alpha_1} \left[\left(\left(t + \frac{t^3}{12} K \right) - \left(\frac{t}{3} + \frac{t^5}{20} K \right) \right) \left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} \right) \right]_{,1}$$

$$+ \frac{1-\nu}{2\alpha_2} \left[\left(\frac{2}{3} t + \frac{t^3}{30} K \right) \left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2} \right) \right]_{,2} \Bigg\} = Z$$

y finalmente

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{t^3}{80}M\left(\frac{u_{1,1}}{\alpha_1}\right)\right)_{,1}+\frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\frac{t^3}{80}+\frac{t^5}{448}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}\right)\right)_{,1}\right.\right. +$$

$$+\frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\frac{t^5}{448}+\frac{t^7}{2304}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}\right)\right)_{,1}\Bigg]_{,1} +$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\left[\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{t^3}{80}M\frac{u_{2,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}+\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{t^3}{80}+\frac{t^5}{448}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right)\right)_{,2}\right. +$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{t^5}{448}+\frac{t^7}{2304}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right)\right)_{,2}\Bigg]_{,2} +$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{t^3}{80}M\frac{u_{2,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}+\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{t^3}{80}M\frac{u_{1,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right. + \qquad (3.72)$$

$$+\frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\frac{t^3}{80}+\frac{t^5}{448}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,1}\right)\right)_{,1}+\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{t^3}{80}+\frac{t^5}{448}K\right)\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2}\right)_{,2} +$$

$$+\frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\frac{t^5}{480}+\frac{t^7}{2304}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,1}\right)\right)_{,1}$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{t^5}{480}+\frac{t^7}{2304}K\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2}\right)\right)_{,2}$$

$$+\frac{\nu}{\alpha_1}\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\frac{t^3}{80}(M+D)-\frac{t^5}{448}K(M-D)\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}u^{\circ}_{2,2}\right)\right)_{,1}\right.$$

$$+\frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\frac{t^3}{80}+\frac{t^5}{448}MD-\frac{t^7}{2304}K^2\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right)\right)_{,1}$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\frac{t^5}{448}+\frac{t^7}{2304}MD-\frac{t^{11}}{11264}K^2\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right)\right)_{,1}\right]_{,1}$$

$$+\frac{\nu}{\alpha_2}\left[\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{t^3}{80}(M-D)-\frac{t^5}{448}K(M+D)\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}u^{\circ}_{1,1}\right)\right)_{,2}\right. \qquad \text{3.72 continuación}$$

$$+\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{t^3}{80}-\frac{t^5}{448}MD-\frac{t^7}{2304}K^2\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}\right)\right)_{,2}$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{t^5}{448}+\frac{t^7}{2304}MD-\frac{t^{11}}{11264}K^2\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}\right)\right)_{,2}\right]_{,2}$$

$$-\frac{3(1-\nu)}{8}\left[\left(t+\frac{t^3}{12}K\right)-\left(\frac{t}{3}+\frac{t^3}{20}K\right)\right] X$$

$$\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1}+\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2}\right] = 0$$

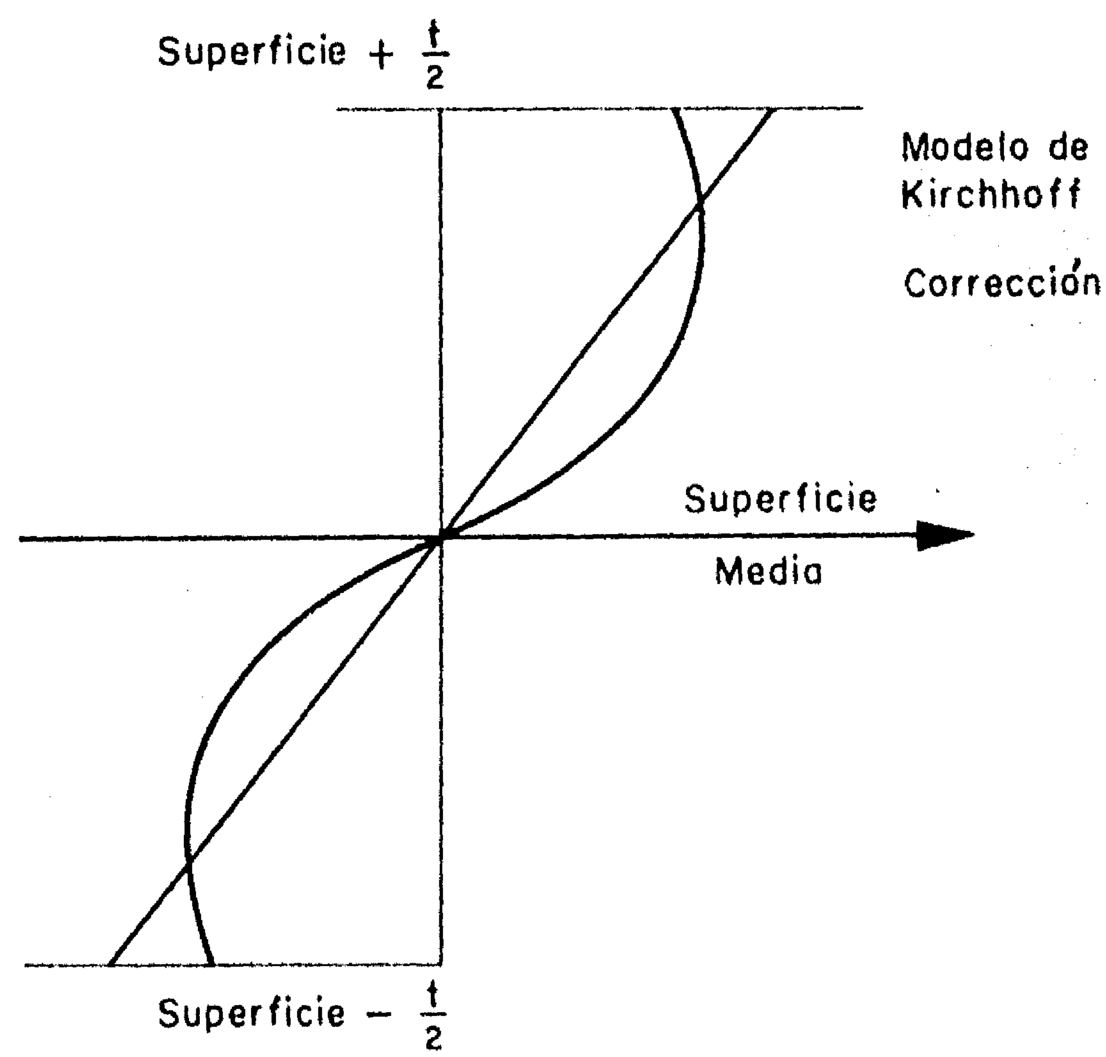

Superficie + $\frac{t}{2}$
Modelo de Kirchhoff
Corrección
Superficie
Media
Superficie − $\frac{t}{2}$

FIG 3.1

CAPITULO IV

TEORIA GENERAL DE LA DEFORMACION DE CASCARONES ELASTICOS GRUESOS DESARROLLADA MEDIANTE EL EMPLEO DE FUNCIONES ESPECIALES

4.0 Generalidades

Tal vez el trabajo más interesante sobre teoría de cascarones en los últimos cinco años, es el que ha desarrollado P. Cicala y que ha sido ampliamente divulgado[40, 41, 50, 60, 61]. Esto es cierto al menos en lo que se refiere a la consideración del cascarón como un cuerpo tridimensional y sujeto a cargas estáticas que no inducen inestabilidad.

La idea fundamental del trabajo de Cicala es la de haber introducido las funciones de Legendre para expresar a manera de un desarrollo en serie todas las variables de la teoría de cascarones. Esta formulación conduce a un conjunto infinito de sistemas de ecuaciones diferenciales en el caso más general. En los casos mas usuales en la teoría de cascarones, el desarrollo en serie es convergente y basta considerar un número finito de términos.

En sus publicaciones mas recientes[41, 61], Cicala ha modificado la forma de solución original que resultaba sumamente complicada cuando se pretendía aplicarla. Actualmente, Cicala ha tratado de considerar un grupo de soluciones aisladas que poseen ciertas características en cuanto al orden de las magnitudes principales y sus derivadas.

4.1 Resumen de la teoría de P. Cicala

Para introducir otra posibilidad en cuanto a las desarrolladas de Cicala y para ubicar los resultados que mas adelante se presentan, es necesario resumir en la notación utilizada en este trabajo, la teoría de Cicala.

a) Los desplazamientos en el cuerpo tridimensional, se expresan en la forma

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{j=1}^{\infty} u_{1j}\, P_j(\zeta) \\
u_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} u_{2j}\, P_j(\zeta) \\
W_3 &= \sum_{j=1}^{\infty} W_{3j}\, P_j(\zeta)
\end{aligned}
\qquad (4.1)
$$

en que u_{1j}, u_{2j}, W_j son funciones únicamente de las variables β_1 y β_2 de la superficie. $P_j(\zeta)$ es el polinomio de Legen dre de orden en la variable adimensional.

b) Los esfuerzos se desarrollan en la forma

$$
\begin{aligned}
t\, c_2\, \sigma_{11} &= \sum_{j=1}^{\infty} S_{1j}\, P_j(\zeta) \\
t\, c_1\, \sigma_{22} &= \sum_{j=1}^{\infty} S_{2j}\, P_j(\zeta) \\
t\, c_1 c_2\, \sigma_{33} &= \sum_{j=1}^{\infty} S_{3j}\, P_j(\zeta) \\
t\, c_1\, \sigma_{12} &= \sum_{j=1}^{\infty} S_{12j}\, P_j(\zeta) \\
t\, c_2\, \sigma_{12} &= \sum_{j=1}^{\infty} S_{21j}\, P_j(\zeta) \\
t\, c_1 c_2\, \sigma_{13} &= \sum_{j=1}^{\infty} S^{31}{}_j\, P_j(\zeta) \\
t\, c_2\, \sigma_{13} &= \sum_{j=1}^{\infty} S^{13}{}_j\, P_j(\zeta) \\
t\, c_1 c_2\, \sigma_{23} &= \sum_{j=1}^{\infty} S^{32}{}_j\, P_j(\zeta) \\
t\, c_1\, \sigma_{23} &= \sum_{j=1}^{\infty} S^{23}{}_j\, P_j(\zeta)
\end{aligned}
\qquad (4.2)
$$

en que t es el peralte, del cascarón, supuesto constante.

c) Las ecuaciones de equilibrio deducidas mediante el em pleo del principio de [illegible] virtuales son:

$$S_{1j,1} + S_{21j,2} + k_3(S_{1j} - S_{2j}) + k_1 S_{13j} + F_{1j} = \bar{S}_{31j}$$

$$S_{12j,1} + S_{2j,2} + k_3(S_{12j} + S_{21j}) + k_2 S_{13j} + F_{2j} = \bar{S}_{32j} \qquad (4.3)$$

$$S_{13j,1} + S_{23j,2} + k_3 S_{13j} - k_1 S_{1j} - k_2 S_{2j} + F_{3j} = \bar{S}_{3j}$$

para $j = 1.2, - - - n - - - \infty$.

En estas ecuaciones, se ha introducido la notación

$$\bar{S}_{31j} = (2j+1)\int_{-1}^{1} c_1 c_2 \sqrt{3_1}\, P_j\, d\gamma \qquad (4.4)$$

y las cantidades F_{1j} F_{2j} F_{3j} representan las coeficientes del desarrollo en serie de las acciones externas. La cantidad k_3 introducida en estas ecuaciones es la curvatura en la superficie como se indica en el apéndice A1, solamente que Cicala introduce implícitamente la condición

$$\ell_{12} = \ell_{21} = k_3$$

que es válida unicamente en un cierto tipo de cascarones.

Tomando en cuenta que las deformaciones e_1, e_2, ω, pueden expresarse en función de los desarrollos en serie correspondientes a los desplazamientos, en la forma

$$c_1 e_1 = \sum_{j=1}^{\infty} e_{1j} P_j$$

$$c_2 e_2 = \sum_{j=1}^{\infty} e_{2j} P_j \qquad (4.5)$$

$$c_1 c_2 \omega = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j P_j$$

en que como se deduce de la teoría de la deformación, (ver apéndice A5)

$$c_1 e_{1j} = (U_{1j})_{,1} + \ell_{12} U_{2j} + k_1 W_j \qquad (4.6)$$

y expresiones análogas para $c_2 e_{2j}$ y $c_1 c_2 \omega$.

De la ley de Hooke es posible deducir mediante integración, la relación existente entre los coeficientes de los desarrollos en serie para los esfuerzos y para los desplazamientos. Cicala multiplica por $c_1 \; c_2 \; P_j \; d\xi$ las relaciones de la ley de Hooke e integra, con lo cual toma en cuenta el cambio de magnitud de las superficies paralelas a la superficie media.

Finalmente Cicala establece que la solución del problema conduce a resolver un sistema de 9 ecuaciones por cada término del desarrollo en serie de polinomios de Legendre. La solución por este método es naturalmente muy compleja. Sin embargo existe un camino que puede simplificar considerablemente la forma de solución, para que esto sea posible es necesario definir los desplazamientos en forma algo distinta a como se especificaron en el grupo de ecuaciones 1. Si establecida la relación (mediante la ley de Hooke), entre los coeficientes S y los $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, W para cada j se hace la sustitución de ellos en el sistema de tres ecuaciones de equilibrio 3, entonces se tiene un sistema de tres ecuaciones por cada término del desarrollo. La conveniencia fundamental radica en que dicho sistema de ecuaciones puede resolverse mediante diferencias finitas o con un modelo físico. Si las condiciones de frontera se especifican en términos de desplazamiento, basta con invertir la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones obtenido con el modelo o mediante diferencias finitas para resolver completamente el problema. Cuando las condiciones de frontera son mixtas, el sistema de ecuaciones debe plantearse tres veces, una de las cuales sirve para obtener en la forma anterior los coeficientes de los desarrollos en serie para $j > 2$.

El método más reciente que ha propuesto Cicala para la solución del problema, es de interés puramente matemático; consiste en suponer que las derivadas de las cantidades que figuran como coeficientes en los desarrollos en serie poseen cualidades que pueden expresarse en términos de un parámetro δ que multiplica al espesor t y se analiza su comportamiento cuando $\delta \to 0$. Desde el punto de vista de aplicación esto es útil solamente en casos aislados ya que no todas las variables participantes pueden conservar un orden determinado de magnitud a través de la derivación. Así el análisis quedaría restringido a ciertos problemas de perturbaciones en tubos cilíndricos o en cascarones esféricos pero con la ventaja de que se habría fijado el orden de precisión de las aproximaciones usuales. El planteamiento anterior posee un inconveniente adicional según se desprende de la referencia 61. El inconveniente radica en que así pueden tratarse solamente aquellos problemas en los que las condiciones de frontera son estáticas, es decir cuando se prescriben las fuerzas, porque los problemas mixtos son de mucha mayor complejidad. La elección de Cicala en cuanto a las funciones que van a representar el estado interno de esfuerzos es realmente acertada.

4.2 Consideración del equilibrio mediante polinomios de Legendre.

En lo que sigue se presenta una manera de solución que pue de resultar adecuada. Los polinomios de Legendre tienen la propiedad de ser un conjunto completo de funciones ortogonales.

siendo 1 y ξ los dos primeros polinomios de Legendre, la condición de ortogonalidad significa físicamente que los polinomios de orden 2 y mayor de 2, van a introducir resultantes de fuerza y momento que van a ser nulas. Esta particularidad de por sí introduce la ventaja de que el problema puede convertirse en uno de equilibrio en que las incógnitas se refieren a la superficie y son las fuerzas y/o los momentos. Cuando se sigue el intento de solución descrito como una variante a las propuestas por Cicala, las incógnitas son desplazamientos, en virtud de que partiendo de deformaciones que cumplen las condiciones de compatibilidad, mediante la ley de elasticidad lineal, las ecuaciones de equilibrio suministran el sistema de ecuaciones que permite obtener los coeficientes del desarrollo en serie de los desplazamientos. En la teoría de la elasticidad[20, 28] este es uno de los caminos para la solución de problemas. El otro camino[20, 28] consiste en emplear una función que cumple con las condiciones de equilibrio de manera que la solución del problema se obtiene cuando la función o funciones que satisfacen el equilibrio cumple también las condiciones de compatibilidad. El primer planteamiento corresponde a la formulación matricial de problemas en estructuras por el método de las rigideces y en teoría de cascarones cilíndricos a las ecuaciones de Flügge[25] ó a las de Timoshenko[17]. El segundo planteamiento tiene su símil en el cálculo matricial de estructuras mediante la matriz de flexibilidades, mientras que en la teoría de la elasticidad lo tiene en la función de Airy[1,5,20]. El tratamiento mixto queda representado por las ecuaciones de Vlasov[26, 28, 34b] en la teoría de cascarones y por el teorema de Reissner[47] en la teoría de la elasticidad. Esta dualidad de tratamientos, ha sido observada previamente por varios autores[22,26,38,39,51] y muy profusamente analizada y aplicada por Argyris[22]. Aquí se propone un tratamiento que conserva las propiedades del segundo método de la teoría clásica de la elasticidad. Dado que la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre se traduce en que se van a agregar (para $j \geq 2$) cantidades que habrán de estar en equilibrio en la superficie media, se proponen los siguientes desarrollos para los esfuerzos tomando en cuenta las definiciones de fuerzas y momentos del apéndice A4. Los desarrollos son:

$$h c_1 \sigma_{11} = \frac{T_1}{t} + \frac{6M_1}{t^2} + \underline{\sum_{i=2}^{n} S_{1i} P_i(\xi)} \qquad (4.7)$$

$$h c_2 \sigma_{22} = \frac{T_2}{t} + \frac{6M_2 \xi}{t^2} + \underline{\sum_{i=2}^{n} S_{i2} P_i(\xi)} \qquad (4.8)$$

$$h c_1 \sigma_{12} = \frac{T_{12}}{t} + \frac{6M_{12}\xi}{t^2} + \underline{\sum_{i=2}^{n} S_{i12} P_i(\xi)} \qquad (4.9)$$

$$h c_2 \sigma_{21} = \frac{T_{21}}{t} + \frac{6M_{21}\xi}{t^2} + \underline{\sum_{i=2}^{n} S_{i21} P_i(\xi)} \qquad (4.10)$$

en que los términos subrayados son estáticamente equivalentes a cero, en cuanto a las resultantes en la superficie media. En las ecuaciones anteriores se observa que los desarrollos son distintos de los que ha presentado Cicala. Los desarrollos que corresponden a los esfuerzos, σ_{13}, σ_{23} y σ_{33}, serán deducidos mediante el empleo de las ecuaciones de equilibrio en el elemento infinitesimal (ver apéndice A4). Las ecuaciones de equilibrio son:

ECUACION A

$$\left[h\alpha_2(c_1\sigma_{11})\right]_{,1} + \left[\alpha_1 c_1(h\sigma_{12})\right]_{,2} - \alpha_{2,1}\, h(c_2\sigma_{22}) + \alpha_{1,2}(c_1c_2)(h\sigma_{12}) = -\left[h\sigma_{31}\alpha_1\alpha_2 c_1\right]_{,3} - h\alpha_1\alpha_2\frac{\sigma_{31}}{R_1}$$

ECUACION B

$$\left[\alpha_2 c_2 h\sigma_{12}\right]_{,1} + \left[h\alpha_1 c_2\sigma_{22}\right]_{,2} - \alpha_{1,2}\, h(c_1\sigma_{11}) + \alpha_{2,1}(c_1c_2)(h\sigma_{12}) = -\left[h\sigma_{32}c_2\alpha_1\alpha_2\right]_{,3} - h\alpha_1\alpha_2\frac{\sigma_{32}}{R_2}$$

ECUACION C

$$\frac{hc_1\sigma_{11}}{R_1} + \frac{hc_2\sigma_{22}}{R_2} = -\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\left[\alpha_2 h\sigma_{31}\right]_{,1} + \left[\alpha_1 h\sigma_{32}\right]_{,2}\right. - (h\sigma_{33})_{,3}$$

Estas ecuaciones son distintas a las de Cicala, únicamente en que toman en cuenta que el volumen a una distancia z de la superficie media es h veces el de superficie media y en cuanto a otros detalles como la interpretación de $\ell_{12} \neq \ell_{21}$.

El procedimiento para despejar a las cantidades que contienen a σ_{13}, σ_{23} y σ_{33}, consiste en integrar la ecuación diferencial (A) para σ_{31} y la ecuación (B) para σ_{32}. Conocidas estas cantidades se puede despejar σ_{33} de la ecuación (C).

Para la ecuación (A), el segundo miembro se puede poner

$$-\left[(h\sigma_{31})_{,3}c_1 + 2(h\sigma_{31})\frac{1}{R_1}\right]\alpha_1\alpha_2 \qquad (4.11)$$

y entonces se puede ver que la ecuación diferencial a resolver es

$$(h\sigma_{31})_{,3} + 2(h\sigma_{31})\frac{1}{R_1c_1} = \frac{1}{c_1}\Big[\ell_{21}(hc_2\sigma_{22}) - \ell_{12}(hc_2\sigma_{12}) - \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\left[\alpha_2(hc_1\sigma_{11})\right]_{,1} - \left[\alpha_1(c_1h\sigma_{12})\right]_{,2}\right\}\Big] \qquad (4.12)$$

que es de la forma

$$\frac{dy}{d\zeta} + a_1(\zeta)y = h(\zeta)$$

cuya solución (62) es: $y = \frac{1}{p}\int p\,h\,d\xi + \frac{C}{p}$

con $p = e^{\int a_1(\xi)\,d\xi}$

La ecuación B puede ponerse en una forma análoga a la de la ecuación 4.12. La ecuación C es más sencilla de integrar una vez que se han integrado las ecuaciones A y B. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales pueden simplificarse mediante el empleo de la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Lengendre como se consigna en el apéndice A3, y mediante la introducción de las cantidades

$$K_{i1} = \ell_{21} S_{i2} - \ell_{12} S_{i21} - \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\left[\alpha_2 S_{i1}\right]_{,1} + \left[\alpha_1 S_{i12}\right]_{,2}\right\}$$

$$K_{i2} = \ell_{12} S_{i1} - \ell_{21} S_{i12} - \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\left[\alpha_1 S_{i2}\right]_{,2} + \left[\alpha_2 S_{i21}\right]_{,1}\right\} \qquad (4.13)$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales quedan entonces,

$$\sigma_{i31} = \frac{t}{2}\,\frac{1}{C_1^2}\,K_{i1}\left[\frac{1}{2^i i!}\left(\frac{d^{i-1}}{d\xi^{i-1}} - \frac{1}{R_1}\frac{d^{i-2}}{d\xi^{i-2}}\right)(\xi^2-1)^i\right]$$
$$\sigma_{i32} = \frac{t}{2}\,\frac{1}{C_2^2}\,K_{i2}\left[\frac{1}{2^i i!}\left(\frac{d^{i-1}}{d\xi^{i-1}} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{d^{i-2}}{d\xi^{i-2}}(\xi^2-1)^i\right] \qquad (4.14)$$

y la solución para σ_{33} que es una integración ordinaria, se obtiene a partir del grupo de ecuación 4.14 y mediante la expresión de los polinomios de Legendre.

Tomando en cuenta la forma de los desarrollos en serie, puede deducirse de la ecuación C,

$$\sigma_{33} = -\frac{t}{2R_1}\left(\sum_{i=0}^{n} S_{i1}\left(\frac{1}{2^i i!}\right)\frac{d^{i-1}}{d\zeta_h^{i-1}}\left(\zeta_h^2-1\right)^i\right)$$

$$-\frac{t}{2R_2}\left(\sum_{i=0}^{n} S_{i2}\left(\frac{1}{2^i i!}\right)\frac{d^{i-1}}{d\zeta_h^{i-1}}\left(\zeta_h^2-1\right)^i\right)$$

$$-\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{2^i i!}\right)\left\{\left[\alpha_2 h\frac{t}{2C_1^2}K_{i1}\right]_{,1}\left[\frac{d^{i-2}}{d\zeta_h^{i-2}}\left(\zeta_h^2-1\right)^i-\frac{t}{2R_1}\frac{d^{i-3}}{d\zeta_h^{i-3}}\left(\zeta_h^2-1\right)^i\right.\right. \tag{4.15}$$

$$\left.+\left[\alpha_1 h\frac{t}{2C_2^2}K_{i2}\right]_{,2}\left[\frac{d^{i-2}}{d\zeta_h^{i-2}}-\frac{t}{2R_2}\frac{d^{i-3}}{d\zeta_h^{i-3}}\right]\left(\zeta_h^2-1\right)^i\right\}$$

De esta ecuación se puede ver que la suma se extiende des de 0 para ciertos términos y desde 2 para los otros. En estas condiciones, se pueden separar los dos primeros términos de la suma. Haciéndolo así y tomando en cuenta la forma de los dos primeros términos de las ecuaciones 4.7 y 4.8 se puede deducir,

$$\sigma_{(0)331} = -\left(\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}\right)\zeta_h + C_1 \tag{4.16}$$

y también,

$$\sigma_{(1)331} = -\frac{3}{2t}\zeta_h\left(\zeta_h^2-1\right)\left(\frac{M_1}{R_1}+\frac{M_2}{R_2}\right)+C_2\zeta_h \tag{4.17}$$

el factor ζ_h en la ecuación 4.16 se debe a la integración de la ecuación C, al considerar el primer término de σ_{11} y σ_{22}. El factor ζ_h en el primer término de la ecuación 4.17 resulta de la forma que tiene el segundo término de la expresión para σ_{11} y σ_{22}, en tanto que (ζ_h^2-1) resulta de los dos primeros términos de la ecuación 4.15 para i = 1. Con las ecuaciones 4.16 y 4.17 van a satisfacerse las condiciones de frontera en las caras del cascarón, estas condiciones quedan establecidas por la última ecuación del grupo de ecuaciones A6.14 (ver apéndice A4). Se tiene entonces,

$$
\begin{aligned}
-\frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + C_1 + C_2 &= \frac{p+q}{2} \\
+\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + C_1 + C_2 &= \frac{p-q}{2}
\end{aligned}
\qquad (4.18)
$$

de donde se deduce

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{p}{2} \\
C_2 &= \frac{q}{2} + \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right)
\end{aligned}
\qquad (4.19)
$$

quedando entonces,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{(0)33} &= -\left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right)\frac{\varphi}{h} + \frac{p}{2} \\
\sigma_{(1)33} &= -\frac{3}{2t}\frac{\varphi}{h}\left(\frac{\varphi^2}{h}-1\right)\left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2}\right) + \left(\frac{q}{2} + \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right)\frac{\varphi}{h}
\end{aligned}
\qquad (4.20)
$$

Sería conveniente tener una idea gráfica acerca de la forma que adquieren los términos del desarrollo en serie para los esfuerzos. En cuanto a los términos que forman los desarrollos en serie de los esfuerzos σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} y σ_{21} la gráfica A3.2 del apéndice A3 suministra esa idea. Para los esfuerzos transversales, considérese inicialmente i = 0, de los grupos de ecuaciones 4.14 y 4.15, se puede deducir,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{(0)31} &= 0 \\
\sigma_{(0)32} &= 0
\end{aligned}
\qquad (4.21)
$$

en tanto que para i = 1,

$$\sigma_{(1)31} = \frac{t}{4(R_1+Z)^2} K'_{(1)1}(\zeta^2-1)$$

y sustituyendo el valor de $K_{(1)}$,/de la ecuación (4.13), se deduce

$$\sigma_{(1)31} = \frac{t}{4(R_1+Z)^2}\left\{ \ell_{21}\frac{6M_2}{t^2} - \ell_{12}\frac{6M_{21}}{t^2} + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\left[\alpha_2\frac{6M_1}{t^2}\right]_{,1} - \left[\alpha_1\frac{6M_1}{t^2}\right]_{,2}\right\}\left(\zeta^2-1\right)\right.$$

factorizando $\frac{6}{t^2}$ y tomando en cuenta la ecuación de equilibrio A4.20 del apéndice A4, se puede escribir,

$$\sigma_{(1)31} = \frac{3}{2t}\frac{\zeta^2-1}{(C_1)^2} Q_1 \tag{4.22}$$

y en forma análoga

$$\sigma_{(1)32} = \frac{3}{2t}\frac{\zeta^2-1}{(C_2)^2} Q_2$$

De estas ecuaciones se desprende que las cantidades K_{i1} y K_{i2} introducidas en las ecs. 4.13 para $i \geq 2$, constituyen fuerzas cortantes que se encuentran en equilibrio.

Los resultados que se han deducido en los grupos de ecuaciones 21 y 22 son consistentes como se deduce de la forma de las expresiones (7) y (8). El término de orden $i = 0$ representa las fuerzas en la superficie y corresponde al estado de membrana de manera que los esfuerzos cortantes en las caras normales a la superficie media son nulas, en tanto que no lo son los esfuerzos normales σ_{33} como los indica la primera ecuación del grupo de ecuaciones 4.20. Ahora considérese el término $i = 1$; este término incluye solamente los momentos flexionantes y como se deduce de la ecuación 4.17 no aporta nada al esfuerzo normal

σ_{33}, en tanto que origina los esfuerzos cortantes σ_{31} y σ_{32} indicados en el grupo de ecuaciones 4.22. Como se ve esto es exactamente lo que ocurre en la teoría de vigas, de acuerdo con la hipótesis de sección plana que implican los dos primeros términos del desarrollo en serie de σ_{11} y σ_{22}.

Para i = 2, se puede deducir en forma análoga,

$$\sigma_{(2)31} = \frac{t}{4C_1^2} K_{(2)1} \left[\zeta(\zeta^2-1) - \frac{t}{8R_1}(\zeta^2-1)^2 \right] \qquad (4.23)$$

$$\sigma_{(2)32} = \frac{t}{4C_2^2} K_{(2)2} \left[\zeta(\zeta^2-1) - \frac{t}{8R_2}(\zeta^2-1)^2 \right]$$

y para i = 3,

$$\sigma_{(3)31} = \frac{t}{4C_1^2} K_{(3)1} \left[\frac{(\zeta^2-1)^2}{4} + \zeta^2(\zeta^2-1) - \frac{t}{8R_1} \zeta(\zeta^2-1)^2 \right]$$

$$\sigma_{(3)32} = \frac{t}{4C_2^2} K_{(3)2} \left[\frac{(\zeta^2-1)(5\zeta^2-1)}{4} - \frac{t}{8R_1} \zeta(\zeta^2-1)^2 \right]$$

con base en estos resultados pueden deducirse los valores correspondientes a $\sigma_{(1)33}$, y $\sigma_{(2)33}$. Como se indicó antes, los términos subrayados son esfuerzos que se equilibran en todo el espesor del cascarón. Su influencia aparece únicamente en las deformaciones que corresponden a las superficies paralelas a la media. Estas deformaciones, se distribuyen a través del espesor, en una forma similar a la distribución de esfuerzos.

4.3 DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DE UNA TEORIA DE CASCARONES CON POLINOMIOS DE LEGENDRE

Como se discute en el inciso 4.4 existen otros caminos posibles para la solución del problema de la teoría de cascarones con los cuales pueden emplearse polinomios de Legendre. En lo que sigue, se analiza una posibilidad que consiste en el empleo del principio variacional de la energía complementaria máxima y el teorema de Gelfaud y Fomin[69] (ver apéndice A3). Del principio de la energía complementaria máxima se sabe[65] que cuando la energía complementaria adquiere un valor máximo[47], se satisfacen las condiciones de compatibilidad; en tanto que del teorema de Gelfaud y Fomin, se puede determinar el valor estacionario de un funcional sujeto a ciertas condiciones dadas en la forma de otro funcional. Esto último es similar al empleo de multiplicadores de Lagrange[2], en problemas en que las condiciones adyacentes son discretas.

La energía complementaria, para los esfuerzos paralelos a la superficie media puede escribirse

$$V^{*} = \iiint \Big\{ \int_{-1}^{1} \Big(\frac{1}{2E} \left[(c_1 h \sigma_1)^2 + (c_2 h \sigma_2)^2 \right] - \frac{\nu}{E} \left[(c_1 h \sigma_1)(c_2 h \sigma_2) \right] + \frac{1}{4G} \left[(c_1 h \tau_{12})^2 + (c_2 h \tau_{21})^2 \right] \Big) \frac{1}{h}\, d\zeta \Big\} \alpha_1 d\beta_1 \alpha_2 d\beta_2 \qquad (4.25)$$

Al hacer máximo este funcional quedarían satisfechas las condiciones de compatibilidad en la superficie. Además conocidos los valores de los esfuerzos que figuran en ese funcional, pueden conocerse los esfuerzos σ_{13}, σ_{23} y σ_{33} y así cuando se conocen σ_1, σ_2, σ_{12} y σ_{21} quedan satisfechas las ecuaciones de equilibrio en el elemento infinitamente pequeño. Ahora los coeficientes de los desarrollos en serie, satisfacen las condiciones del equilibrio general, en virtud de que introducen resultantes de fuerza y momento que son nulas. Esto es así debido a la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre y se cumple excepto para los dos primeros términos del desarrollo en serie.

De lo anterior se infiere que se cumplen las condiciones de compatibilidad en la superficie y las de equilibrio en el elemento infinitamente pequeño. Es necesario entonces garantizar el equilibrio general de los elementos mecánicos o sea de los primeros coeficientes del desarrollo en serie de los esfuerzos. Esto se consigue, al introducir las ecuaciones de equilibrio como condiciones adyacentes[69] para el funcional 25, es decir

$$V^{*} = \iint \Big\{ \int_{-1}^{1} \Big(\frac{1}{2E} \Big[(c_1 h \sigma_1)^2 + (c_2 h \sigma_2)^2 \Big] - \frac{\nu}{E} \Big[(c_1 h \sigma_1)(c_2 h \sigma_2) \Big]$$

$$+ \frac{1}{G} \Big[(c_1 h \sigma_{12})^2 + (c_2 h \sigma_{21})^2 \Big] \Big) \frac{1}{h}\, d\zeta \Big\} \alpha_1 \alpha_2 \, d\beta_1 \, d\beta_2$$

$$+ \iint \Big[U_1 \Big\{ \Big(\frac{(\alpha_2 N_1)_{,1}}{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{(\alpha_1 N_{21})_{,2}}{\alpha_1 \alpha_2} + \ell_{12} N_{12} - \ell_{21} N_2$$

$$+ k_1 \Big(\frac{(\alpha_2 M_1)_{,1}}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{(\alpha_1 M_{21})_{,2}}{\alpha_1 \alpha_2} - \ell_{21} M_2 - \ell_{12} M_{12} \Big) \Big\} \alpha_1 \alpha_2$$

$$+ U_2 \Big\{ \frac{(\alpha_1 N_2)_{,2}}{\alpha_1 \alpha_2} + \ell_{21} N_{21} + \frac{(\alpha_2 N_{12})_{,1}}{\alpha_1 \alpha_2} - \ell_{12} N_1$$

$$+ k_2 \Big(\frac{(\alpha_2 M_{12})_{,1}}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{(\alpha_1 M_2)_{,2}}{\alpha_1 \alpha_2} + \ell_{12} M_1 + \ell_{21} M_{12} \Big) \Big\} \alpha_1 \alpha_2$$

$$+ W \Big\{ \Big[\frac{(\alpha_2 M_{21})_{,1}}{\alpha_2} + \frac{(\alpha_1 M_2)_{,2}}{\alpha_2} - \alpha_1 \ell_{12} M_1 + \alpha_1 \ell_{21} M_{12} \Big]_{,2}$$

$$+ \Big[\frac{(\alpha_2 M_1)_{,1}}{\alpha_1} + \frac{(\alpha_1 M_{12})_{,2}}{\alpha_1} - \alpha_2 \ell_{21} M_2 + \alpha_2 \ell_{12} M_{21} \Big]_{,1}$$

$$+ \Big(k_2 N_2 + k_1 N_1 - Z q \Big) \alpha_1 \alpha_2 \Big\} \Big] \, d\beta_1 \, d\beta_2 \qquad (4.26)$$

Los factores de U_1, U_2, W, son las ecuaciones de equilibrio en la superficie, deducidas después de despejar de las ecuaciones A4.19 y A4.20, las cantidades Q_1 y Q_2 para sustituirlas en las ecuaciones A4.16, A4.17 y A4.18.

En las ecuaciones de equilibrio no aparecen los términos de carga para cumplir con la condición del teorema de Gelfaud y Fomin. Estas cargas son introducidas como condición de frontera en un paso posterior. La carga normal es

$$Z = p \tag{4.27}$$

Por simplicidad se supone en seguida, que las ecuaciones 7, 8, 9 y 10, pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned}
h C_1 \sigma_{11} &= \frac{N_1}{t} + \frac{6M_1}{t^2}\varphi + S_{(2)1} P_1(\varphi) + S_{(3)1} P_2(\varphi) \\
h C_2 \sigma_{22} &= \frac{N_2}{t} + \frac{6M_2}{t^2}\varphi + S_{(2)2} P_1(\varphi) + S_{(3)2} P_2(\varphi) \\
h C_1 \sigma_{12} &= \frac{N_{12}}{t} + \frac{6M_{12}}{t^2}\varphi + S_{(2)12} P_1(\varphi) + S_{(3)12} P_2(\varphi) \\
h C_2 \sigma_{21} &= \frac{N_{21}}{t} + \frac{6M_{21}}{t^2}\varphi + S_{(2)21} P_1(\varphi) + S_{(3)21} P_2(\varphi)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

es decir se supone que cuatro términos del desarrolo en serie, son suficientes para expresar la cantidad deseada. En cuanto a la cantidad 1/h que figura en la primera integral de V' (ec 6), se puede expresar aproximadamente como:

$$\frac{1}{h} \doteq 1 - \varphi \frac{t}{2} M - \varphi^2 \frac{t^2}{4} K \tag{4.29}$$

y en términos de polinomios de Legendre se escribe,

$$\frac{1}{h} \doteq P_0 - \frac{tM}{2} P_1 - \frac{t^2 K}{12}\left(2 P_2 + P_0 \right) \tag{4.30}$$

la ecuación 4.29 es válida aún para valores de $\frac{t}{R} \leq 0.6$, una aproximación más burda, resulta de escribir,

$$\frac{1}{h} \doteq P_0 - \frac{tM}{2} P_1 \qquad (4.31)$$

Aquí?se usará esta última aproximación, que parece suficiente para ilustrar los resultados.

El siguiente paso, consiste en introducir la primera variación de las cantidades que figuran en las ecuaciones 28 y verificar la integración con respecto a ξ como queda indicado en la ecuación 26. Para este fin, es necesario establecer un resultado, auxiliar. Considerando el valor de 1/h de la ecuación 31, se puede ver que es necesario calcular

$$\int_{-1}^{1} P_m(\xi) P_n(\xi) \xi \, d\xi$$

Mediante integración por partes, se puede ver que

$$A = \int_{-1}^{1} P_n(\xi) P_m(\xi) \xi \, d\xi = -\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\xi} P_n(\xi) P_m(\xi) d\xi \right) d\xi + \left(\int_0^{\xi} P_n(\xi) P_m(\xi) d\xi \right) \xi \Big|_{-1}^{1}$$

y se cancelan ambos términos, en el caso en que $m = n$, en tanto que para $m \neq n$ se tiene

$$\begin{array}{lll} m = 0 & n = 1 & A = 2/3 \\ m = 0 & n = 2 & A = 0 \\ m = 0 & n = 3 & A = 0 \\ m = 1 & n = 2 & A = 8/30 \\ m = 1 & n = 3 & A = 0 \\ m = 2 & n = 3 & A = 6/35 \end{array} \qquad (4.33)$$

Con estos resultados se puede calcular $\delta V^{**}=0$. Así introduciendo la variación de los coeficientes del desarrollo en serie de los esfuerzos, es posible, agrupar el resultado de $\delta V^{**}=0$ en la forma,

$$\delta N_1 \Big(-\frac{U_{1,1}}{\alpha_1} - \ell_{12} U_2 - k_1 W + \Big[\frac{N_1}{Et} - \frac{\nu}{2E}\frac{N_2}{t} \Big]$$

$$+ \frac{8}{30}\frac{M}{E}\Big[\frac{M_1}{t} - \frac{\nu}{2}\frac{M_2}{t}\Big]$$

$$+ \delta N_2 \Big(-\frac{U_{2,2}}{\alpha_2} - \ell_{21} U_1 - k_2 W + \Big[\frac{N_2}{tE} - \frac{\nu}{2E}\frac{N_1}{t}\Big]$$

$$+ \frac{8}{30}\frac{M}{E}\Big[\frac{M_2}{t} - \nu\frac{M_1}{2t}\Big]$$

$$+ \delta N_{12}\Big(-\frac{U_{2,1}}{\alpha_1} - \ell_{12} U_1 - k_{12} W + \Big[\frac{N_{12}}{tG}\Big] + \frac{8}{30}\frac{M}{G}\Big[\frac{M_{12}}{t}\Big]\Big)$$

$$+ \delta N_{21}\Big(-\frac{U_{1,2}}{\alpha_2} - \ell_{21} U_2 - k_{12} W + \Big[\frac{N_{21}}{tG}\Big] + \frac{8}{30}\frac{M}{G}\Big[\frac{M_{21}}{t}\Big]\Big)$$

$$+ \delta M_1 \Big(-\frac{1}{\alpha_1}\Big(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\Big)_{,1} - \frac{1}{\alpha_1}(U_1 k_1)_{,1} - \frac{1}{\alpha_1}(U_2 k_{12})_{,1}$$

$$+ \frac{12}{Et^3}\Big[M_1 - \frac{\nu}{2}M_2\Big] + \frac{8}{30}\frac{M}{tE}\Big[N_1 - \frac{\nu}{2}N_2\Big]$$

$$+ \frac{2}{5}\Big[S_{(2)1} - \frac{\nu}{2}S_{(2)2}\Big]\frac{M}{E}\Big)$$

$$+ \delta M_2 \Big(-\frac{1}{\alpha_2}\Big(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\Big)_{,2} - \frac{1}{\alpha_2}(U_2 k_2)_{,2} - \frac{1}{\alpha_2}(U_1 k_{12})_{,2}$$

$$+ \frac{12}{Et^3}\Big[M_2 - \frac{\nu}{2}M_1\Big] + \frac{8}{30}\frac{M}{t^2 E}\Big(N_1 - \frac{\nu}{E}N_2\Big)$$

$$+ \frac{2}{5}\Big[S_{(2)2} - \frac{\nu}{2}S_{(2)1}\Big]\frac{M}{E}\Big)$$

$$\delta M_{12}\Big(-\frac{1}{\alpha_1}\Big(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\Big)_{,1}-\frac{1}{\alpha_1}(u_2 k_2)_{,1}-\frac{1}{\alpha_1}(u_1 k_{12})_{,1}$$

$$+\frac{12}{t^3 G}\left[M_{12}\right]+\frac{8}{30}\frac{M}{t^2 E}\left[N_1-\frac{\nu}{2}N_2\right]$$

$$+\frac{2}{5}\frac{M}{E}\left[S_{(2)1}-\frac{\nu}{2}S_{(2)2}\right]\Big)$$

$$+\delta M_{21}\Big(-\frac{1}{\alpha_2}\Big(\frac{N_{,1}}{\alpha_1}\Big)_{,2}-\frac{1}{\alpha_2}(u_1 k_1)_{,2}-\frac{1}{\alpha_2}(u_2 k_{12})_{,2}$$

$$+\frac{12}{t^3 G}\left[M_{12}\right]+\frac{8}{30}\frac{M}{t^2 E}\left[N_1-\frac{\nu}{2}N_2\right]$$

$$+\frac{2}{5}\frac{M}{E}\left[S_{(2)2}-\frac{\nu}{2}S_{(2)1}\right]\Big)$$

$$+\delta S_{(2)1}\Big(\frac{1}{5E}\left[S_{(2)1}-\frac{\nu}{2}S_{(2)2}\right]+\frac{2}{5}\frac{M}{Et}\left[M_1-\frac{\nu}{2}M_2\right]$$

$$+\frac{3t^2 M}{70E}\left[S_{(3)1}-\frac{\nu}{2}S_{(3)2}\right]\Big)$$

$$+\delta S_{(2)2}\Big(\frac{1}{5E}\left[S_{(2)2}-\frac{\nu}{2}S_{(2)1}\right]+\frac{2}{5}\left[M_1-\frac{\nu}{2}M_2\right]\frac{M}{tE}$$

$$+\frac{3}{70}\frac{t^2 M}{E}\left[S_{(3)2}-\frac{\nu}{2}S_{(3)1}\right]\Big)$$

$$+\delta S_{(2)12}\Big(\frac{1}{5G}\left[S_{(2)12}\right]+\frac{2M}{5tG}\left[M_{12}\right]+\frac{3}{70}\frac{t^2 M}{G}S_{(3)12}\Big)$$

$$+\delta S_{(2)21}\Big(\frac{1}{5G}\left[S_{(2)21}\right]+\frac{2M}{5tG}\left[M_{21}\right]+\frac{3}{70}\frac{t^2 M}{G}S_{(3)21}\Big)$$

$$+\delta S_{(3)1}\Big(\frac{t}{7E}\left[S_{(3)1}-\frac{\nu}{2}S_{(3)2}\right]+\frac{3}{70}\left[S_{(2)1}-\frac{\nu}{2}S_{(2)2}\right]\frac{t^2 M}{E}\Big)$$

$$+\delta S_{(3)2}\Big(\frac{t}{7E}\left[S_{(3)2}-\frac{\nu}{2}S_{(3)1}\right]+\frac{3}{70}\left[S_{(2)2}-\frac{\nu}{2}S_{(2)1}\right]\frac{t^2 M}{E}$$

$$\delta S_{(3)12}\left(\frac{t}{7G}\left[S_{(3)12}\right]+\frac{3}{70G}Mt^{2}\left[S_{(2)12}\right]\right.$$

$$\left.+\ \delta S_{(3)21}\left(\frac{t}{7G}\left[S_{(3)21}\right]+\frac{3}{70G}Mt^{2}\left[S_{(2)21}\right]\right)\right) = 0 \qquad (4.34)$$

Por simplicidad, la ecuación 34, se escribe ahora en la forma:

$$\begin{aligned}
&\delta N_1(a_1) + \delta N_2(a_2) + \delta N_{12}(a_{12}) + \delta N_{21}(a_{21}) + \\
&\delta M_1(b_1) + \delta M_2(b_2) + \delta M_{12}(b_{12}) + \delta M_{21}(b_{21}) + \\
&\delta S_{(2)1}(c_1) + \delta S_{(2)2}(c_2) + \delta S_{(2)12}(c_{12}) + \delta S_{(2)21}(c_{21}) + \\
&\delta S_{(3)1}(d_1) + \delta S_{(3)2}(d_2) + \delta S_{(3)12}(d_{12}) + \delta S_{(3)21}(d_{21}) = 0
\end{aligned} \qquad (4.35)$$

en la que el significado de las cantidades en paréntesis, se deduce de la ecuación 34. Del significado de las cantidades a_1, a_2, a_{12} y a_{21}, se deducen expresiones para las deformaciones e_1, e_2, e_{12} y e_{21} que deben satisfacerse para cualquier superficie paralela a la media. Así se deduce entonces que,

$$e_1 = \frac{1}{Et}\left[N_1 - \frac{\nu}{2}N_2\right] + \frac{8}{30}\frac{M}{E}\left[\frac{M_1}{t} - \frac{\nu}{2}\frac{M_2}{t}\right]$$

$$e_2 = \frac{1}{Et}\left[N_2 - \frac{\nu}{2}N_1\right] + \frac{8}{30}\frac{M}{E}\left[\frac{M_2}{t} - \frac{\nu}{2}\frac{M_1}{t}\right] \qquad (4.36)$$

$$e_{12} = \frac{1}{Gt}\left[N_{12}\right] + \frac{8}{30}\frac{M}{E}\left[\frac{M_{12}}{t}\right]$$

$$e_{21} = \frac{1}{Gt}\left[N_{21}\right] + \frac{8}{30}\frac{M}{E}\left[\frac{M_{21}}{t}\right]$$

En la forma análoga, de las expresiones de las cantidades b_1, b_2, b_{12} y b_{21} , al suponer que las variaciones pueden ser arbitrarias, se deducen las ecuaciones que expresan a los cambios de curvatura. Estas expresiones son:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{12}{Et^3}\left[M_1 - \frac{\nu}{2} M_2\right] + \frac{8}{30}\frac{M}{tE}\left[N_1 - \frac{\nu}{2} N_2\right] + \frac{2M}{5E}\left[S(2)1 - \frac{\nu}{2} S(2)2\right] \tag{4.37}$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{12}{Et^3}\left[M_2 - \frac{\nu}{2} M_1\right] + \frac{8}{30}\frac{M}{t^2E}\left[N_2 - \frac{\nu}{2} N_1\right] + \frac{2M}{5E}\left[S(2)2 - \frac{\nu}{2} S(2)1\right]$$

$$\mathcal{H}_{12} = \frac{12}{Gt^3}\left[M_{12}\right] + \frac{8}{30}\frac{M}{t^2E}\left[N_1 - \frac{\nu}{2} N_2\right] + \frac{2M}{5E}\left[S(2)1 - \frac{\nu}{2} S(2)2\right]$$

$$\mathcal{H}_{21} = \frac{12}{Gt^3}\left[M_{21}\right] + \frac{8}{30}\frac{M}{t^2E}\left[N_2 - \frac{\nu}{2} N_1\right] + \frac{2M}{5E}\left[S(2)2 - \frac{\nu}{2} S(2)1\right]$$

Ahora tomando en cuenta la arbitrariedad de las variaciones, se puede deducir,

$$S(2)1 = -2\frac{M}{t}\left[M_1\right] - \frac{15}{70}\left[S(3)1\right] tM \tag{4.38}$$

$$S(2)2 = -2\frac{M}{t}\left[M_1\right] - \frac{15}{70}\left[S(3)1\right] tM$$

$$S(2)12 = -2\frac{M}{t}\left[M_{12}\right] - \frac{15}{70}\left[S(3)12\right] tM$$

$$S(2)21 = -2\frac{M}{t}\left[M_{21}\right] - \frac{15}{70}\left[S(3)21\right] tM$$

$$S(3)1 = -\frac{3}{10} t M S(2)1$$

$$S(3)2 = -\frac{3}{10} t M S(2)2$$

$$S(3)12 = -\frac{3}{10} t M S(2)12 \qquad (4.39)$$

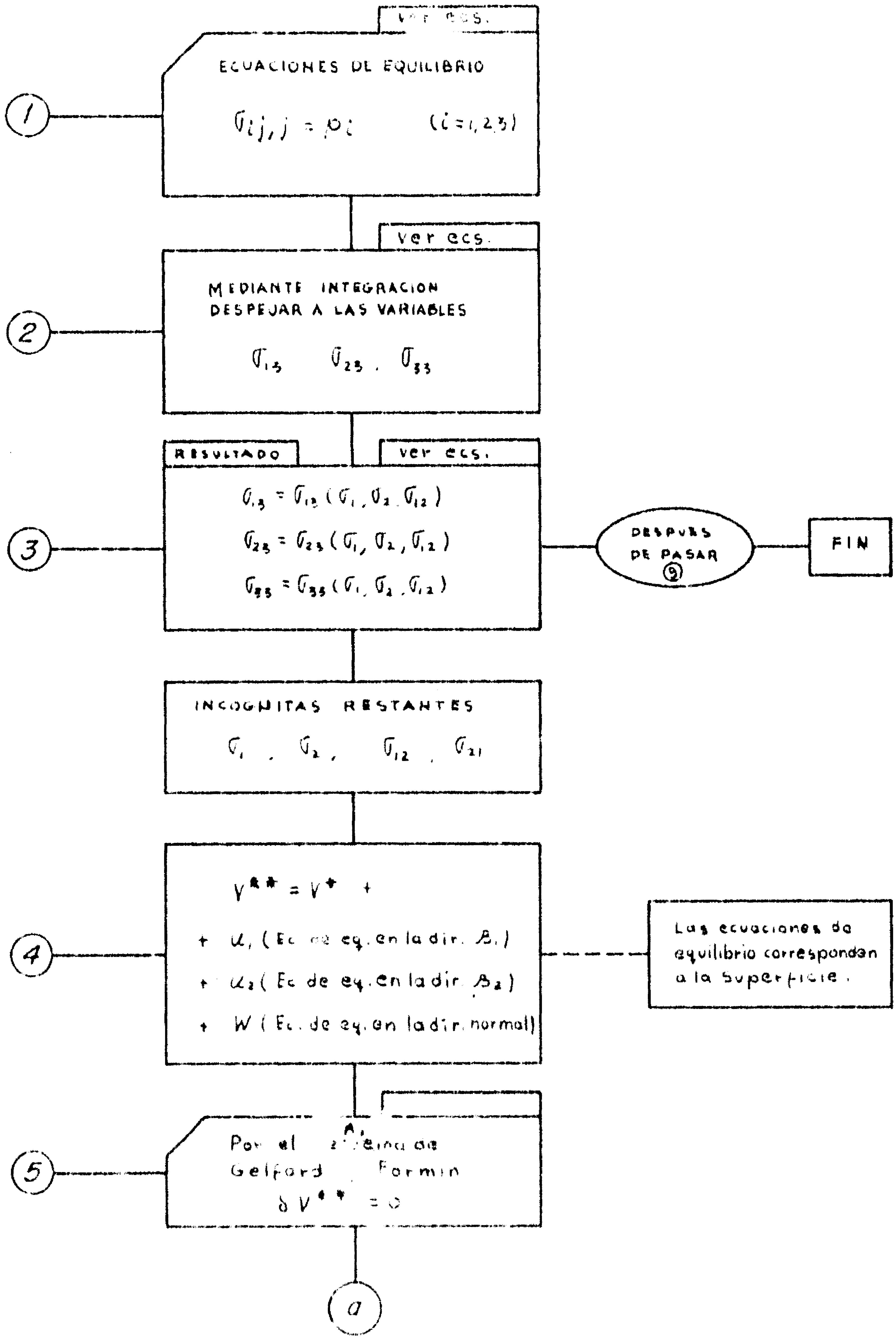
$$S(3)21 = -\frac{3}{10} t M S(2)21$$

La solución de cualquier problema de equilibrio en la presente teoría de cascarones, se puede conseguir de la siguiente manera; las incógnitas son N_1, N_2, N_{12}, N_{21}, M_1, M_2, M_{12} y M_{21}, es decir 8, pero pueden reducirse a 6, ya que N_{12} y N_{21} así como M_{12} y M_{21} son dependientes si se acepta que el tensor esfuerzo es simétrico. La dependencia de estas cantidades queda establecida en términos de la geometría de la superficie, de manera que se puede establecer la relación entre N_{12} y N_{21}, así como la relación entre M_{12} y M_{21}.

Reducido el número de incógnitas a 6, las deformaciones e_1, e_2, e_{12}, e_{21}, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_{12}$, $\mathcal{K}_{21}$ pueden sustituirse en el grupo de ecuaciones de equilibrio del elemento infinitamente pequeño, mediante el empleo de la ley de Hooke. Así pueden despejarse las incógnitas de los dos primeros términos del desarrollo en serie para los esfuerzos. Una vez conocidas las magnitudes de N_1, N_2, N_{12} ó N_{21} y M_1, M_2, M_{12} ó M_{21} se pueden calcular los coeficientes de los polinomios de segundo orden del desarrollo en serie de los esfuerzos, es decir $S(2)_1 \ldots\ldots S(2)_{12}$. Con este fin, del grupo de ecuaciones 39, se despejan $S(3)_1 \ldots\ldots S(3)_{21}$, para sustituirlos en las ecuaciones 38 pudiéndose deducir entonces los valores de $S(2)_1 \ldots\ldots S(2)_{21}$. Conocidas estas magnitudes, es posible calcular $S(3)_1 \ldots\ldots S(3)_{21}$ y en con todas las cantidades determinadas hasta aquí se deducen los coeficientes de los esfuerzos σ_{13}, σ_{23}, σ_{33}.

En el diagrama 6.1, se muestra la secuencia de los desarrollos de este capítulo así como el camino que permite la solución del problema de la teoría de cascarones.

En la solución presentada, no se cumplen las condiciones de compatibilidad en los planos normales a la superficie media, pero se cumplen las condiciones de compatibilidad en la superficie media y el equilibrio general en esa superficie. Además, como indica la formulación del diagrama 6.1 se cumple con las condiciones de equilibrio en el elemento infinitamente pequeño situado a la distancia z de la superficie media.


ECUACIONES DE EQUILIBRIO
$\sigma_{ij,j} = p_i \qquad (i = 1,2,3)$
ver ecs.
MEDIANTE INTEGRACION DESPEJAR A LAS VARIABLES
$\sigma_{13} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{33}$
RESULTADO
ver ecs.
$\sigma_{13} = \sigma_{13}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})$
$\sigma_{23} = \sigma_{23}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})$
$\sigma_{33} = \sigma_{33}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})$
DESPUES DE PASAR
FIN
INCOGNITAS RESTANTES
$\sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_{12} , \sigma_{21}$
$V^{**} = V^{*} +$
$+ \; u_1$ (Ec de eq. en la dir. β_1)
$+ \; u_2$ (Ec de eq. en la dir. β_2)
$+ \; W$ (Ec. de eq. en la dir. normal)
Las ecuaciones de equilibrio corresponden a la superficie.
Por el
Gelford
Formin
$\delta V^{**} = 0$
1
2
3
4
5
a

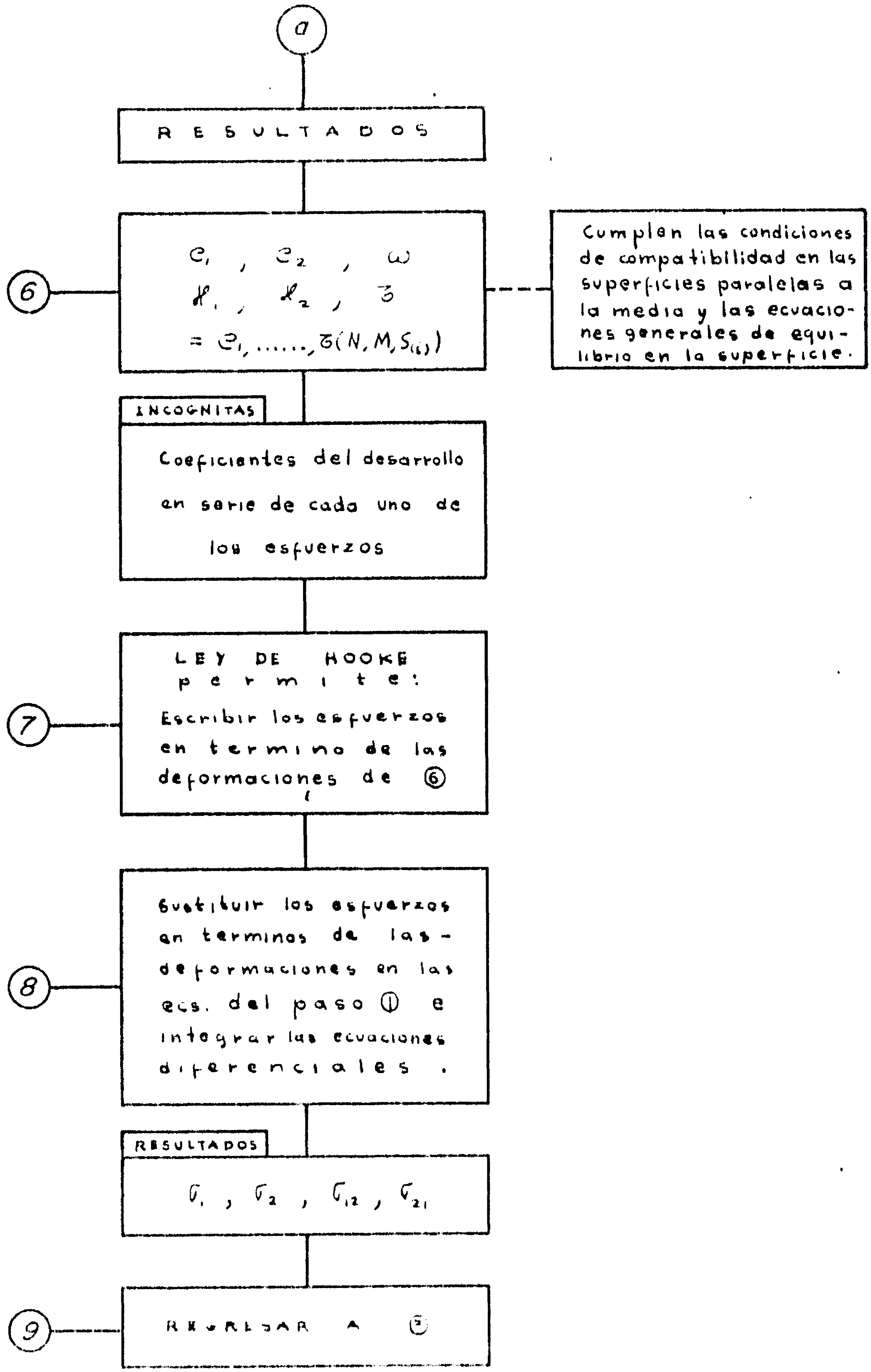

a
RESULTADOS
6
e_1, e_2, ω
$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ
$= e_1, \ldots\ldots, \tau(N, M, S_{(i)})$
Cumplen las condiciones de compatibilidad en las superficies paralelas a la media y las ecuaciones generales de equilibrio en la superficie.
INCOGNITAS
Coeficientes del desarrollo en serie de cada uno de los esfuerzos
7
LEY DE HOOKE permite:
Escribir los esfuerzos en termino de las deformaciones de ⑥
8
Sustituir los esfuerzos en terminos de las deformaciones en las ecs. del paso ① e integrar las ecuaciones diferenciales.
RESULTADOS
σ_1, σ_2, σ_{12}, σ_{21}
9
REGRESAR A ①

DIAGRAMA 4.1

5.- SOBRE LA SOLUCION MATEMATICA Y NUMERICA DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES NO-LINEALES

5.0 Alcance

En el presente capítulo se presentan ciertas consideraciones de índole analítica, que tienen por objeto indicar varios caminos para la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales que se han desarrollado en este trabajo. Para la ilustración del procedimiento se escoge el sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales deducido en el cap. 2. La extensión al sistema de ecuaciones deducido en el cap. 3, no es complicada.

5.1 Procedimientos analíticos para la solución de las ecuaciones diferenciales

Esencialmente se presenta aquí un procedimiento que es una aplicación del método general conocido como método de Perturbación (ver ref. 70, p. 1001 a 1038).

La técnica ha sido usada en particular para el análisis de placas por Chien y por Nash y Cooley, mediante el empleo de las ecuaciones de T.V. Karman y sus desarrollos los presenta Mansfield(71) en forma resumida junto con una variante a dichos desarrollos.

Considérese que el sistema de ecuaciones diferenciales puede representarse mediante operadores en la forma:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 W + P_k \varphi &= N(\varphi, W) + q \\ -\frac{1}{Et}\nabla^4\varphi + P_k W &= M(W, W) \end{aligned} \qquad 5.1$$

en que ∇^4 es el operador bilaplaciano en coordenadas curvilíneas, P_k es el operador diferencial designado antes (ver cap. 2) como de interacción y que contiene a las curvaturas k_1, k_2 k_{12} . $N(\varphi, W)$ y $M(, W)$ son operadores no lineales formados con las variables φ, W; y q es la carga normal a la superficie media del cascarón.

Para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, se introduce un parámetro Δ^* que puede ser el desplazamiento W en un punto cualquiera sobre el cascarón (en general será conveniente elegir Δ igual al desplazamiento W máximo). Entonces la solución puede escribirse en la forma de los siguientes desarrollos en serie

$$W = \sum_{j=1}^{n} W_j \left(\beta_1, \beta_2\right) \Delta^j \qquad 5.2$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \left(\beta_1, \beta_2\right) \Delta^j$$

además, puede escribirse la carga q en una forma completamente análoga, es decir

$$q = \sum_{j=1}^{n} q_j \Delta^j \qquad 5.3$$

Sin embargo, dado que el parámetro Δ no es conocido previamente, es difícil conocer las cantidades q_j; que definen a q y entonces es conveniente tomar unicamente el primer término del desarrollo 5.3, para definir a q , que se conoce con exactitud haciendo

---

* puede hacerse adimensional, y de la forma $\dfrac{W(\beta_{10}, \beta_{20})}{\lambda}$; en que λ es una longitud característica.

en que ∇^4 es el operador bilaplaciano en coordenadas curvilíneas, P_k es el operador diferencial designado antes (ver cap. 2) como de interacción y que contiene a las curvaturas k_1, k_2 k_{12} . $N(\varphi,W)$ y $M(\ ,W)$ son operadores no lineales formados con las variables φ, W; y q es la carga normal a la superficie media del cascarón.

Para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, se introduce un parámetro Δ^* que puede ser el desplazamiento W en un punto cualquiera sobre el cascarón (en general será conveniente elegir Δ igual al desplazamiento W máximo). Entonces la solución puede escribirse en la forma de los siguientes desarrollos en serie

$$W = \sum_{j=1}^{n} W_j(\beta_1, \beta_2)\, \Delta^j \qquad 5.2$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(\beta_1, \beta_2)\, \Delta^j$$

además, puede escribirse la carga q en una forma completamente análoga, es decir

$$q = \sum_{j=1}^{n} q_j\, \Delta^j \qquad 5.3$$

Sin embargo, dado que el parámetro Δ no es conocido previamente, es difícil conocer las cantidades q_j; que definen a q y entonces es conveniente tomar unicamente el primer término del desarrollo 5.3, para definir a q , que se conoce con exactitud haciendo

---

\+ puede hacerse adimensional, y de la forma $\frac{W(\beta_{10}, \beta_{20})}{\lambda}$; en que λ es una longitud característica.

$$f = f_1 \, J \qquad 5.4$$

Al introducir los desarrollos en serie de las ecs. 5.2, los términos no lineales generan potencias del parámetro J superiores a 1; igualando los términos que contienen las mismas potencias del parámetro, se establecen las siguientes relaciones:

para $i = 1$

$$D \nabla^4 W_1 + P_k \varphi_1 = f_1 \qquad 5.5$$

$$-\frac{1}{Et} \nabla^4 \varphi_1 + P_k W_1 = 0$$

para $i = 2$

$$D \nabla^4 W_2 + P_k \varphi_2 = N(\varphi_1, W_1) \qquad 5.6$$

$$-\frac{1}{Et} \nabla^4 \varphi_2 + P_k W_2 = M(W_1 W_1)$$

para $i = 3$

$$D \nabla^4 W_3 + P_k \varphi_3 = N(\varphi_1, W_2) + N(\varphi_2, W_1) \qquad 5.7$$

$$-\frac{1}{Et} \nabla^4 \varphi_3 + P_k W_3 = 2M(W_1, W_2)$$

[illegible] forma [illegible] para las potencias superiores, [illegible] ecuaciones diferenciales [illegible] el desarrollo [illegible] y satisfacen [illegible] φ_1 y W_1 [illegible] φ_1 y W_1 [illegible] nen en el sistema 5.6, como términos independientes. Con estos términos independientes, se pueden calcular las funciones W_2 y φ_2. Con esta solución y con la solución W_1, φ_1, es posible determinar los términos independientes del sistema 5.7 y así obtener las funciones W_3 y φ_3. El procedimiento aplicado sucesivamente conducirá eventualmente a un valor pequeño para la solución Π, en cuyo caso, se pueden despreciar los términos siguientes.

Si el punto en que se supone definido Δ es el de coordenadas $\left(\beta_1(0), \beta_2(0)\right)$*, entonces es posible corregir el valor de la solución del sistema de ecuaciones 5.5, en virtud de que

$$W_1\left(\beta_1(0), \beta_2(0)\right) = 1 \qquad 5.8$$

El procedimiento es sumamente adecuado en el caso de problemas de diferencias finitas, porque entonces el sistema de ecuaciones diferenciales se convierte en una matriz que una vez invertida permite calcular de inmediato el valor de las funciones desconocidas.

Respecto a la convergencia de este desarrollo, algo puede decirse sobre fases físicas. Considérese el comportamiento de un cascarón cuya variación de desplazamientos con la carga pueda representarse mediante una familia de curvas como las que se presentan en la fig. 5.1 y en la fig. 1. del cap. 1. En este caso, en la primera rama ascendente, la línea tangente inicial representa la solución final $\Delta = 1$ y la cantidad adicional de deformación está representada por los términos de los

+ Aquí O puede designar el origen de las curvas coordenadas desarrollos en serie de las ecs. 5.2 que tienen $j \geq 2$. Entonces en esta parte de la curva, los términos adicionales son mas pequeños que el primero y la convergencia es natural. Sin embargo, en la rama descendente y en la segunda ascendente, para el caso de cascarones de espesor regular y pequeño, la cantidad adicional es sumamente grande pudiendo existir, en algunos casos, ciertos problemas para la convergencia. Por otro lado, fijada la carga, podrían existir hasta tres soluciones distintas y surge la pregunta en cuanto a que solución se esta obteniendo. Dada la naturaleza del procedimiento, no es difícil predecir que el procedimiento converge a la solución mas pequeña. La extensión de este procedimiento al problema de inestabilidad, puede lograrse con la consideración de dos estados simultáneos de desplazamiento (ver cap. 2) y un solo estado de esfuerzos, es decir, una solución única para ϕ y dos soluciones para .

La naturaleza del problema de estabilidad, grandemente compleja de por sí, no ha permitido soluciones simples, sin embargo los métodos basados en el cálculo de variaciones, parecen haber superado estas limitaciones. Entre los procedimientos variacionales, destaca el debido a Ritz[18], en la forma presentada por Galerkin[23]. Este procedimiento fué utilizado por Timoshenko[13-a] en la solución del problema de pandeo de cascarones cilíndricos con desplazamientos pequeños. Con el empleo de la formulación Euleriana, el método variacional de Ritz - Timoshenko, permite calcular la carga de pandeo (sobre estimada), mediante el empleo de la ecuación

$$\delta W = \delta P \qquad 5.9$$

Con este fin, es necesario suponer unas ciertas funciones que cumplan con las condiciones de frontera inherentes a cada una de las variables y al problema en cuestión. En el caso del sistema de ecuaciones diferenciales del cap. 2, puesto en el sistema Euleriano, las varialbes son ϕ y W. El problema consiste en escoger

$$W = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + C_3 \psi_3 + \cdots$$
$$\phi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + C_3 \varphi_3 + \cdots \qquad 5.10$$

en que las funciones ψ_1, φ_1, pueden escogerse como conjuntos ortogonales y los coeficientes se determinan de manera que se cumplan las condiciones de carga, en el cascarón.

Respecto a la aplicación de los procedimientos variacionales al cálculo de inestabilidad en cascarones, Mushtari y Galimov[73] han hecho una discusión sumamente completa; en la referencia 73, presentan las distintas consideraciones para la formulación del problema.

En la formulación Lagrangiana, la determinación de la carga de inestabilidad, conduce a un problema complejo.

Quizá con el empleo de los principios energéticos, el método de perturbación introducido al principio de este capítulo, sea un arma eficiente. Obtenida la solución para el problema no lineal, la determinación de la magnitud del funcional y su comparación con los valores correspondientes a otras cargas, permitirá determinar con suficiente aproximación el valor de la carga para la cual ocurre el fenómeno de inestabilidad. Dicho de otra manera, el procedimiento consistiría en:

1.- Resolver el grupo de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales para distintos valores de la carga.

2.- Calcular el signo de la segunda variación, como una forma cuadrática, para cada valor elegido de la carga.

3.- Los resultados anteriores, permiten trazar una gráfica y en ella ubicar la carga de pandeo.

Como se ve el procedimiento constituye una prueba para cada solución obtenida para P. La presentación anterior sigue los lineamientos del criterio de estabilidad de Liapunov[74] y aquí el funcional de Liapunov es la energía potencial. El método que así resulta es complicado si se toma en cuenta que es necesario conocer la solución lineal.

Este procedimiento adquiere sentido físico, en el problema del cascarón cilíndrico que se ilustra en la fig. 5.2 que fué tomada de la ref. 67 cuyo autor a su vez la tomó del libro de Volmir[75]. Esta figura, presenta la superposición de las intersecciones de la superficie de Liapunov (en las variables $\mathcal{I}$ y $\varphi = \frac{f}{h}$) con los planos para los que , la carga axial externa, es constante. Se puede ver de la figura 5.2 que para cada valor de la carga, siempre existe un máximo en la energía potencial, de la misma manera que siempre existe un mínimo; de todos aquéllos máximos, el mínimo absoluto corresponde a la carga de pandeo real y es precisamente la mínima de todas las que conducen a valores máximos de la energía potencial. Esto se ilustra en la parte inferior de la fig. 5.2.

5.2 Sobre la solución numérica. Procedimiento óptimo de di- diferencias finitas. Consideración del problema de inestabilidad.

La primera forma de solución numérica que se conoce para el problema de la teoría de cascarones, resulta ser diferencias finitas[76]. En la aplicación de esta técnica al análisis de cascarones, generalmente es necesario utilizar una red sumamente cerrada para conseguir aproximaciones regulares[77]. Las técnicas de relajación empleadas para mejorar la solución de una malla grande, han sido utilizadas en el análisis de cortinas de presa y se ha podido establecer la forma de convergencia. Otra alternativa, antes de proceder a la reducción del tamaño de la red, consiste en el empleo de operadores mas precisos y esto ha sido considerado en el análisis numérico en varias formas [79,80]. Una modalidad en el tratamiento de problemas mediante diferencias finitas con operadores de mayor precisión, ha sido propuesta por Treitlin[81] y se resume aquí por considerarse de interés.

Supóngase una malla como la mostrada en la fig. 5.3 y sea u_{ij} una variable cualquiera definida en el punto de coordenadas (i,j), de la red en la forma que ahí se indica. Introduciendo ahora la notación

$$u_{10} + u_{-10} = \xi_1$$
$$u_{20} + u_{-20} = \xi_2 \qquad 5.11$$

y también

$$u_{10} - u_{-10} = \delta_1$$
$$u_{20} - u_{-20} = \delta_2 \qquad 5.12$$

5.2 Sobre la solución numérica. Procedimiento óptimo de di-diferencias finitas. Consideración del problema de inestabilidad.

La primera forma de solución numérica que se conoce para el problema de la teoría de cascarones, resulta ser diferencias finitas[76]. En la aplicación de esta técnica al análisis de cascarones, generalmente es necesario utilizar una red sumamente cerrada para conseguir aproximaciones regulares[77]. Las técnicas de relajación empleadas para mejorar la solución de una malla grande, han sido utilizadas en el análisis de cortinas de presa y se ha podido establecer la forma de convergencia. Otra alternativa, antes de proceder a la reducción del tamaño de la red, consiste en el empleo de operadores mas precisos y esto ha sido considerado en el análisis numérico en varias formas [79,80]. Una modalidad en el tratamiento de problemas mediante diferencias finitas con operadores de mayor precisión, ha sido propuesta por Tzeitlin[81] y se resume aquí por considerarse de interés.

Supóngase una malla como la mostrada en la fig. 5.3 y sea u_{ij} una variable cualquiera definida en el punto de coordenadas (i,j), de la red en la forma que ahí se indica. Introduciendo ahora la notación

$$u_{10} + u_{-10} = \xi_1 \qquad 5.11$$
$$u_{20} + u_{-20} = \xi_2$$

y también

$$u_{10} - u_{-10} = \delta_1 \qquad 5.12$$
$$u_{20} - u_{-20} = \delta_2$$

El valor de U en el punto i,j, se puede determinar mediante el empleo de la serie de Taylor escribiendo

$$U_{ij} = U_{00} + \frac{1}{1!}\left(iH + jK\right) + \frac{1}{2!}\left(i^2H^2 + 2ijL^{1+1} + j^2K^2\right) \qquad 5.13$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(i^3H^3 + 3i^2jL^{2+1} + 3ij^2L^{1+2} + jK^3\right) + \ldots\ldots$$

en que

$$H^m = h^m \frac{\partial^m u}{\partial x^m}$$
$$K^n = k^n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \qquad 5.14$$
$$L^{m+n} = h^m k^n \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m y^n}$$

Las cantidades h, k son las medidas de la red (fig. 5.3)

Tseitlin introduce la noción de rango del operador para indicar que el error es proporcional a ese rango, así por ejemplo para el operador $\frac{\partial^4}{\partial x^4}\,(h^6)$ se entiende que el error es del orden de h^6, que es su rango. Del desarrollo 5.13, se puede escribir,

$$U_{10} = U_{00} + H + \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{6}H^3 + \frac{1}{24}H^4 + \ldots = U_1$$
$$U_{-10} = U_{00} - H + \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{6}H^3 + \frac{1}{24}H^4 \ldots = U_{-1} \qquad 5.15$$

de manera que

$$\xi_1 = 2U + H^2 + \frac{1}{12}H^4 + \ldots\ldots \qquad 5.16$$

en que $U = U_{00}$. Despreciando el término subrayado y los siguientes, es posible calcular el valor de H^2, que por despreciar dichos términos es de rango 2 y se escribe

$$H_2^2 = h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\left(h^2\right) = -2U + \xi_1 \qquad 5.17$$

Si se toma en cuenta la definición de ξ_1, se puede ver que el operador de H_1^2, coincide con el de diferencias finitas ordinario. La cantidad ξ_2 se escribe,

$$\xi_2 = 2U + 4H_4^2 + \frac{16}{12}H_2^4 + \frac{64}{360}H^6 + \ldots \qquad 5.18$$

y la cantidad ξ_1, se puede poner, como en la ec. 16, cuando se incluyen derivadas de orden superior, en la forma

$$\xi_1 = 2U + H_4^2 + \frac{1}{12}H_2^4 + \frac{1}{360}H^6 + \ldots \qquad 5.19$$

despreciando el término subrayado y los siguientes, es posible calcular el operador de la derivada cuarta de rango 2 y el operador de la derivada segunda de rango 4, de las ecs. 18 y 19 se deduce

$$\begin{aligned} H_2^4 &= 6U - 4\xi_1 + \xi_2 \\ H_4^2 &= -2.5U + 1.333\xi_1 - 0.083\xi_2 \end{aligned} \qquad 5.20$$

El operador H_2^4, es análogo al de diferencias ordinarias. Desarrollando el valor de ξ_3, e incluyendo los términos subrayados en las ecs. 18 y 19, se pueden deducir los operadores correspondientes a H_6^2 y H_4^4, los resultados son:

$$\begin{aligned} H_6^2 &= -2.722U + 1.5\xi_1 - 0.15\xi_2 + 0.011\xi_3 \\ H_4^4 &= 9.333U - 6.5\xi_1 + 2\xi_2 - 0.167\xi_3 \end{aligned} \qquad 5.21$$

Los operadores que corresponden a las derivadas de orden impar, se deducen con el empleo de las cantidades δ_1, δ_2 ---. El rango de los operadores siempre será par y para los operadores de H_2^1, H_2^3 y H_4^3 se deduce empleando las cantidades que:

$$H_2^{1} = 0.5\,\delta_1$$

$$H_2^{3} = -\delta_1 + 0.5\,\delta_2 \qquad 5.22$$

$$H_4^{3} = -1.625\,\delta_1 - 0.15\,\delta_2 + 0.017\,\delta_3$$

para lo cual se utiliza un procedimiento análogo al descrito antes. Hasta aquí, se han analizado los operadores sobre la línea horizontal, tratándose de operadores diferenciales parciales, es necesario considerar también la dirección vertical y otros niveles en la dirección horizontal. Así puede deducirse por ejemplo el operador bilaplaciano (∇^4), en la forma que indica la fig. 5.4 b y para su comparación se muestra en la fig. 5.4 a, el operador bilaplaciano que resulta de la aplicación de las diferencias ordinarias.

El operador que se muestra en la fig. 5.4 b, que es de rango 6, no se parece al que resulta de la aplicación de otros criterios para mejorar la precisión(79). Los operadores de la fig. 5.4 se pueden comparar en dos formas; la primera de ellas corresponde a un análisis de la magnitud de los coeficientes. Desde luego se observa que el operador de rango 6 incluye un número mayor de puntos, pero además, se nota que la relación del coeficiente de los mismos puntos con respecto al del punto central es más pequeña para el operador de rango 6 que para el operador ordinario, cuando se trata de puntos cercanos. Ocurre lo contrario para puntos más alejados que por otro lado tienen influencia menor. Este hecho contribuye a que sobre la diagonal principal los coeficientes sean mayores y mejora la conver gencia en procedimientos iterativos. La otra forma de comparación se refiere a los resultados. En cuanto a esto, Tseitlin, aplica esta técnica en un cascarón de translación libremente apoyada de planta rectangular, encontrando para la misma red, que el error en el uso de diferencias usuales llega a ser +43%, en tanto que con diferencias de rango 6, el error es del orden de ±5%. Las magnitudes que comparó, son los desplazamientos y utilizó las ecuaciones de Vlasov(26). La solución, supuesta exacta que sirvió de comparación, fué deducida con el empleo del procedimiento de Ritz - Galiorkin(23).

Con el empleo de esta técnica, puede resolverse satisfactoriamente el problema estático. Es necesario considerar ahora el problema de inestabilidad elástica. Para la presentación siguiente, se supondrá que existe un planteamiento discreto como puede ser uno de diferencias finitas, en cualquiera de sus variantes o uno formulado en términos de un modelo físico (ver cap. 6).

Nuevamente la presentación sigue paralelamente el criterio de Liapunov(74).

Considérese por ejemplo, el arreglo discreto que corresponde a un sistema de ecuaciones expresado en forma operacional (ver ec. 5.1). Dicho arreglo discreto puede escribirse en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} K & D' \\ D' & \phi' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W' \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{\varphi}^{2} \\ W_{D}\varphi_{D} \end{bmatrix} \qquad 5.2$$

en que $\mathcal{K}$ = matriz de rigideces

ϕ = " de flexibilidades

$\mathcal{P}$ = matriz de interacción entre el estado de flexión y membrana

W = vector desplazamiento; φ vector de la función de fuerzas

W_{ϕ}^{2} = vector que contiene los términos no lineales de cada ecuación

$W_{\phi}\varphi_{\phi}$ = vector que contiene la suma de los productos inherentes a cada ecuación

q = vector de cargas normales a la superficie.

Se pretende formular el concepto de inestabilidad como aquel estado de carga para el cual existen dos estados de deformación de la superficie. Ambos estados se caracterizan en la forma

<u>EDO I</u>

$$W_1 = \text{vector desplazamiento } W$$
$$\varphi_1 = \text{vector de las funciones } \varphi \qquad 5.24$$

<u>EDO II</u> (simultáneo al I)

$$W = W_1 + \mathcal{E}_1 W_2$$
$$\varphi = \varphi_1 + \mathcal{E}_2 \varphi_2 \qquad 5.25$$

en general $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2 \ll 1$ y se puede hacer $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. La primera de las ecs. 5.23, introduce la posibilidad de que para el estado de desplazamientos W_1, considerados grandes en comparación con el peralte t, exista otro estado adyacente W, que difiere poco del anterior. El mismo concepto se asocia a la segunda ecuación

En algunos problemas particulares, puede suponerse nulo uno de los parámetros ε_1 ó ε_2 ; por ejemplo, en el caso de un estado esencialmente de membrana, en que los desplazamientos iniciales W_1 son pequeños, es suficiente con considerar la posición adyacente en cuanto a W , haciendo $\varepsilon_2 = 0$.

Para obtener la solución del problema en el caso de grandes desplazamientos W , se puede proceder iterativamente, resolviendo primero el problema lineal con q como vector carga. Con esta solución es posible calcular el vector subrayado en la ec. 5.21.

Agregando estos términos al vector q se puede obtener una nueva solución para W y φ que a su vez origina nuevos vectores W_p^2 y $W_p \varphi_p$. En un número de ciclos se puede deducir la solución no lineal para la carga dada por el vector [illegible]. Esta solución se denota W_1 y φ_1 . Se aprecia la semejanza entre esta técnica y la técnica de perturbación introducida al principio del inciso 5.1.

El siguiente paso consiste en probar si la posición de equilibrio es estable o no; para este fin, es necesario introducir las ecs. [illegible] del sistema [illegible], [illegible] los términos no lineales [illegible], de la forma

$$W_p^2 = (W_1 + \varepsilon W_2)^2 = W_1^2 + 2\varepsilon W_1 W_2 + \varepsilon^2 W_2^2 \qquad 5.20$$

$$W_p \varphi_p = W_1 \varphi_1 + \varepsilon (W_2 \varphi_1 + W_1 \varphi_2) + \varepsilon^2 W_2 \varphi_2$$

[illegible] que ε_1 es pequeño, el término [illegible] subrayado es despreciable. [illegible] de los estados I y

II en el sistema 5.21, y restarlos se deduce

$$\begin{bmatrix} K & P \\ P & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 W_2 \\ \varphi_1 W_2 + \varphi_2 W_1 \end{bmatrix} \qquad 5.27$$

que constituye un problema de valor característico. Si W_1 y φ_1 pueden relacionarse, existirá un parámetro λ que constituye el valor característico. La solución del sistema 5.25, conduce a un vector característico.

$$\begin{bmatrix} W_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \qquad 5.28$$

Si la magnitud del valor característico λ, es uno, la posición de equilibrio es inestable; de otra manera es estable. La solución es realmente laboriosa y en la fig. 5.5 se muestra un diagrama de flujo que resume las operaciones indicadas. Con este tratamiento, es posible deducir la solución a un problema de inestabilidad local. Esto se consigue introduciendo solamente en una zona la posición adyacente. Otras posibilidades quedan implícitas.

El cálculo de la forma cuadrática

$$\begin{bmatrix} W_1^T & \varphi_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & P \\ P & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^T \\ \varphi_1^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^T \end{bmatrix} = V \qquad 5.29$$

conocidos los desplazamientos W y el valor de la función φ en los puntos, permite establecer la condición de estabilidad en la superficie de Liapunov. La funcional V cumple las condiciones impuestas por el principio de Liapunov. En la fig 5.6, se presenta la superficie de Liapunov en las variables φ y w.

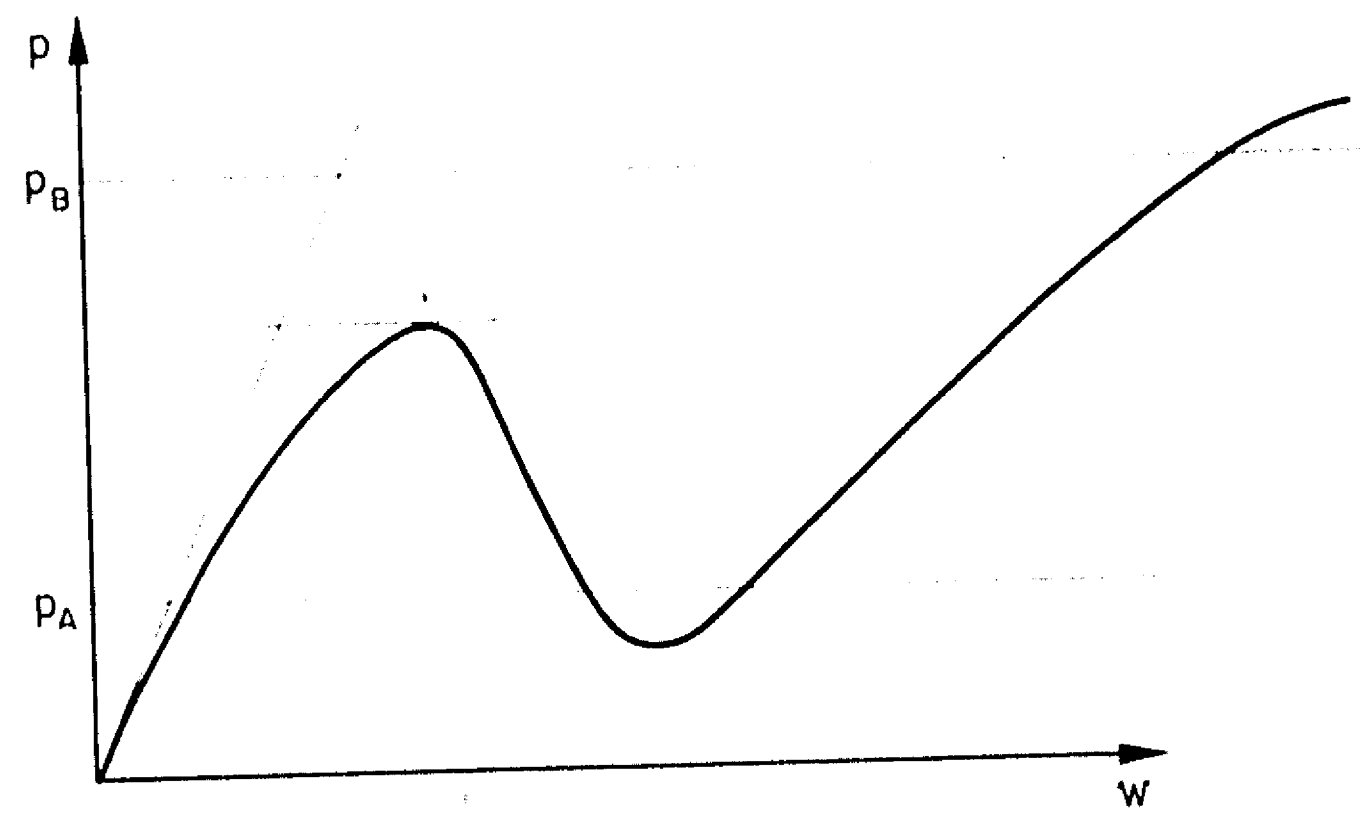
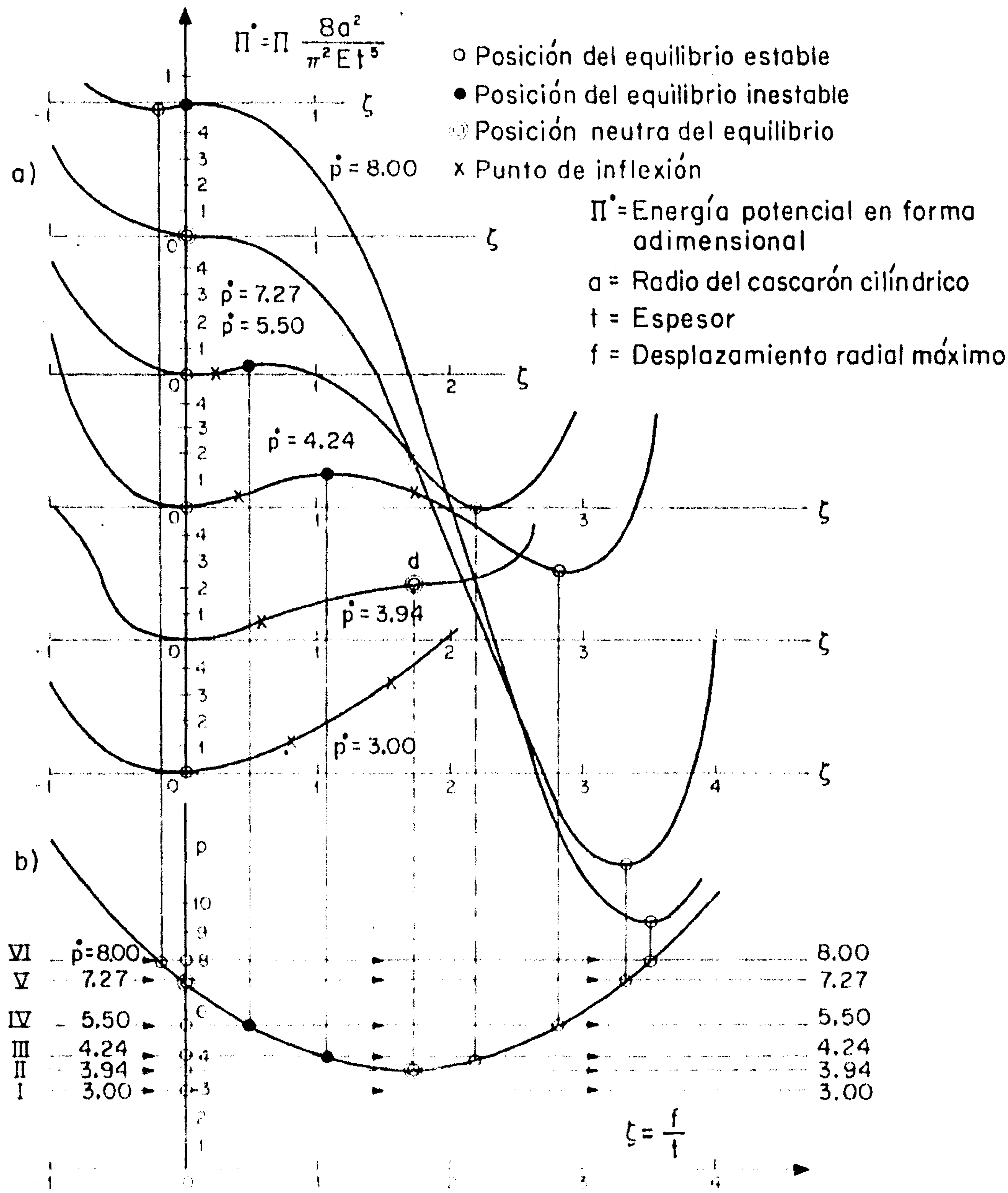


FIG. 5.1



INESTABILIDAD ELASTICA EN CASCARONES CILINDRICOS.
VERIFICACION DEL CRITERIO DE T.V. KARMAN

FIG. 5.2

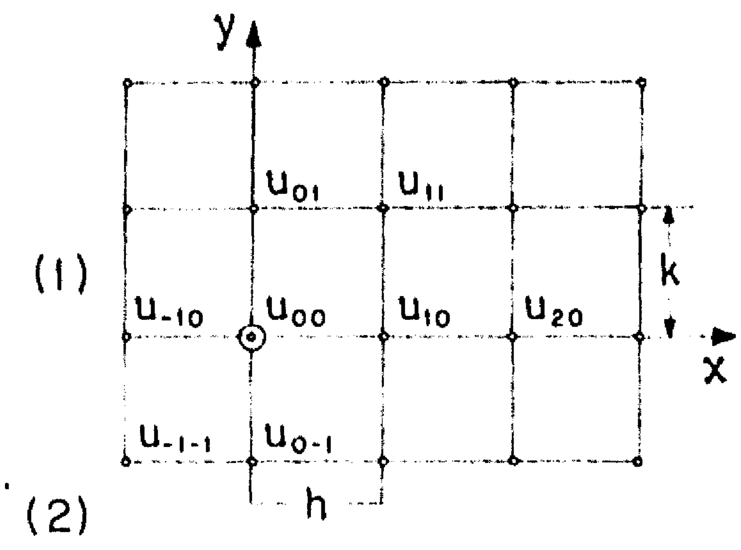
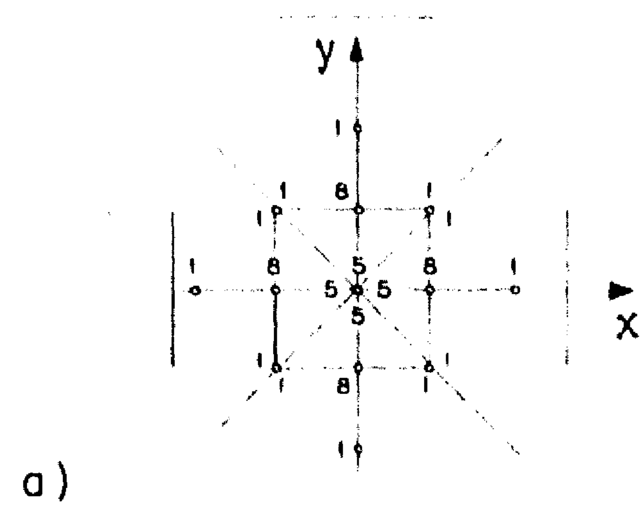
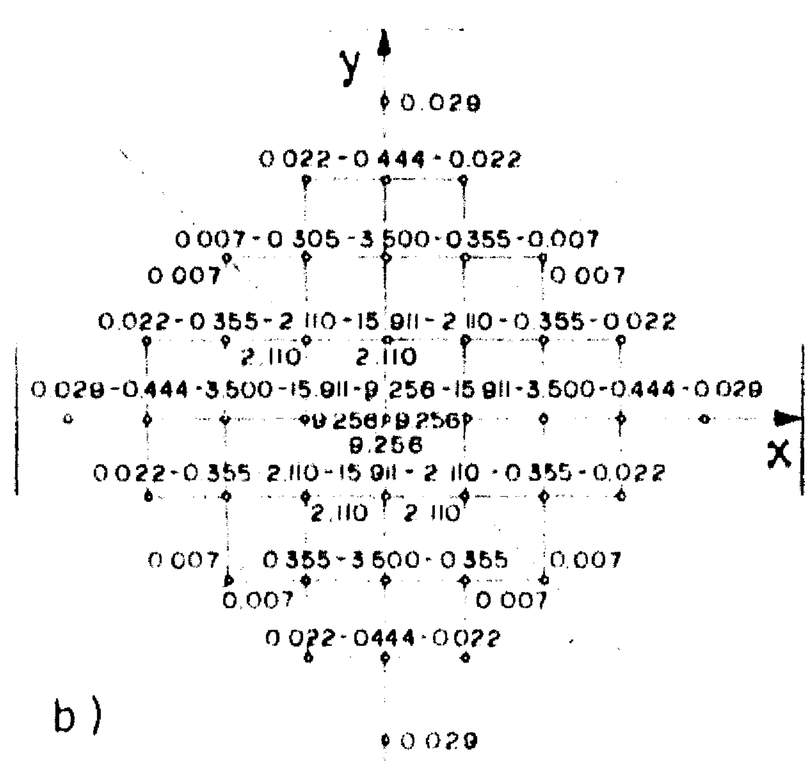


FIG. 5.3



$h^4 \nabla^4 (h^2)$



$h^4 \nabla^4 (h^6)$

FIG. 5.4

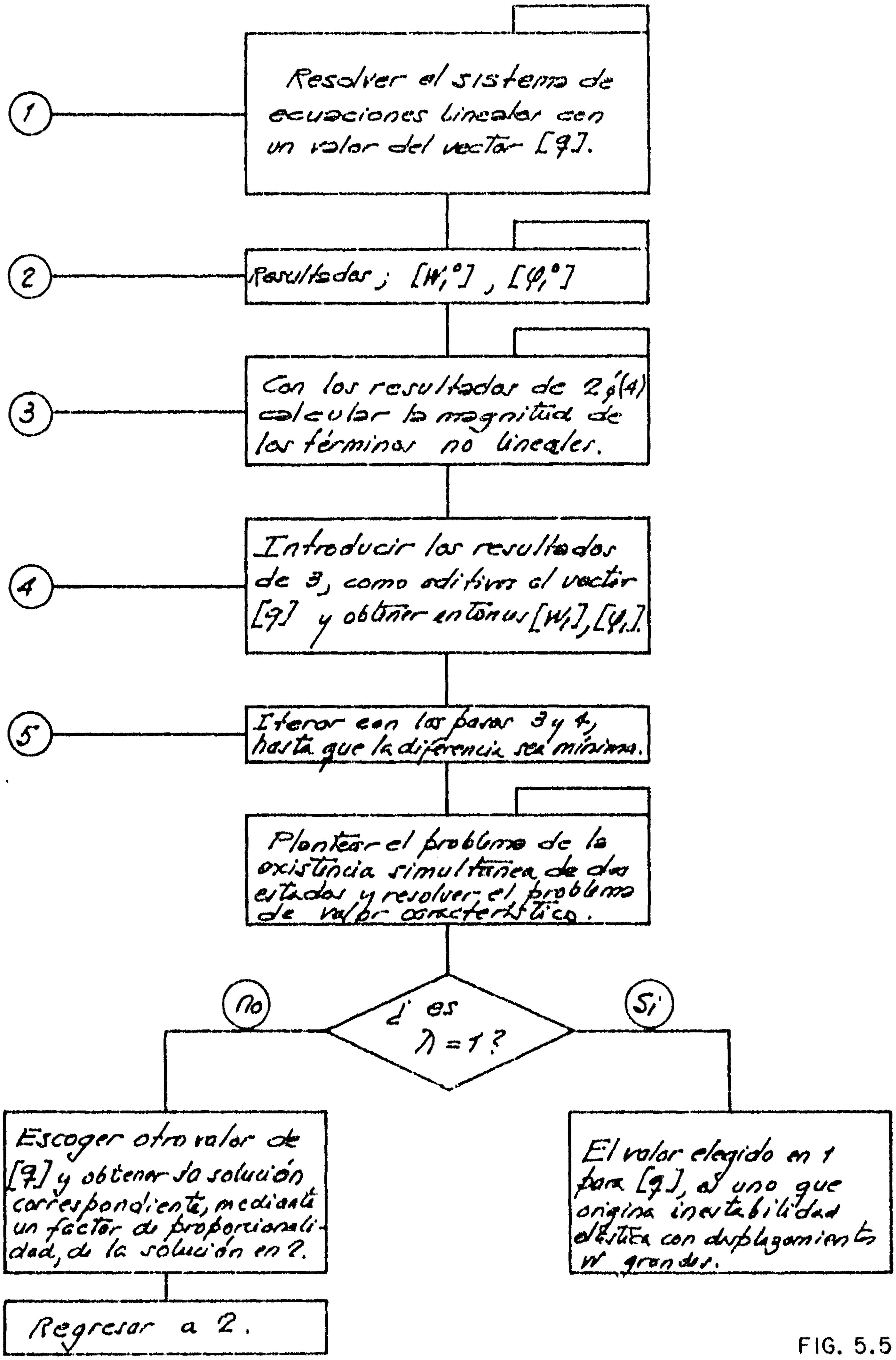
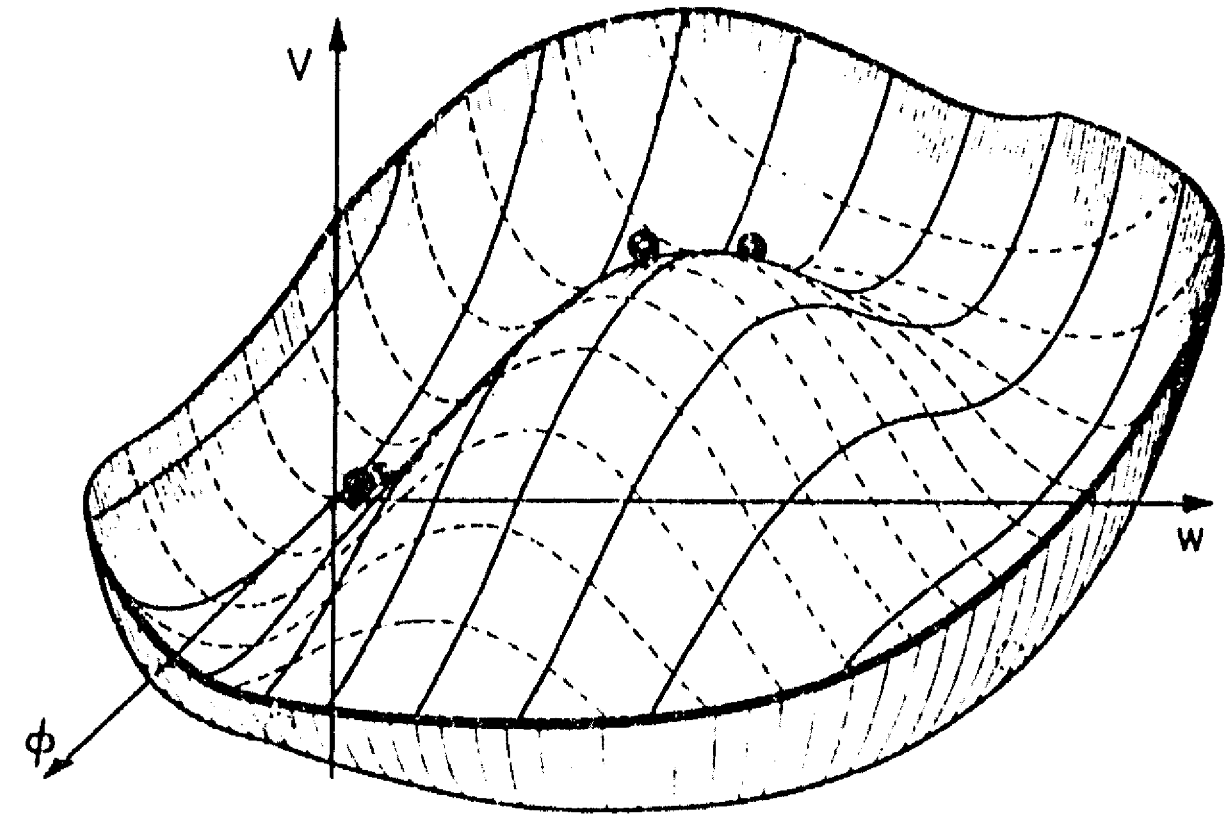

1
Resolver el sistema de ecuaciones lineales con un valor del vector $[q]$.
2
Resultados ; $[W_1^\circ]$, $[\varphi_1^\circ]$
3
Con los resultados de 2 ó (4) calcular la magnitud de los términos no lineales.
4
Introducir los resultados de 3, como aditivos al vector $[q]$ y obtener entonces $[W_1]$, $[\varphi_1]$.
5
Iterar con los pasos 3 y 4, hasta que la diferencia sea mínima.
Plantear el problema de la existencia simultánea de dos estados y resolver el problema de valor característico.
¿ es $\lambda = 1$?
No
Si
Escoger otro valor de $[q]$ y obtener la solución correspondiente, mediante un factor de proporcionalidad, de la solución en 2.
Regresar a 2.
El valor elegido en 1 para $[q]$, es uno que origina inestabilidad elástica con desplazamientos W grandes.

FIG. 5.5



SUPERFICIE DE LIAPUNOV EN LAS VARIABLES ϕ Y w

FIG. 5.6

CAPITULO 6

MODELO FISICO PARA EL ANALISIS DE CASCARONES DE CURVATURA GENERAL, ESPESOR VARIABLE Y ORTOTROPIA CURVILINEA

6.0 Alcance

En el presente capítulo se discute un modelo físico, extensión del modelo físico, debido a Schnobrich- Newmark[83,84] y del debido a Chuang - Veletsos[77]. El modelo que aquí se presenta puede incorporar los efectos de deformación de cortante y pretende incluir el máximo de variables geométricas. Se deducen las ecuaciones de equilibrio correspondientes a este modelo, en términos de las variables de desplazamiento u_1, u_2, y W y en términos de una función potencial ψ . Los resultados se obtienen para un punto general sin incluir las condiciones de frontera. Como caso particular se deduce un sistema de ecuaciones en las variables u_1 , u_2 y W , en que se consideran las distintas condiciones de frontera. También se presenta un sistema de ecuaciones en la variable W , de desplazamiento y en la función de fuerzas ϕ . Esta última formulación, para el modelo físico, utiliza la analogía estático-geométrica que se justifica, sobre bases físicas, en el desarrollo de este capítulo. Para esta formulación, se deducen las ecuaciones correspondientes a puntos cercanos a alguna frontera.

Todos los desarrollos que aquí se presentan, siguen paralelamente los pasos formulados en los capítulos 2 y 3; la formulación, en general, sigue los lineamientos correspondientes a la parte analitica.

6.1 Generalidades.

La solución de los problemas de la teoría de cascarones - mediante el empleo de diferencias finitas no ha podido atacarse en forma generalizada, reduciendose a un número aislado de aplicaciones [81]. Las razones quizá se encuentran en las dificultades de indole numerica que surgen, para conseguir una aproximación regular y las complicaciones que surgen para tomar en cuenta las condiciones de frontera. Así por ejemplo tratandose de un borde libre o de una zona en que las pertubaciones son muy locales, (como ocurre en cascarones cilindricos) resulta - necesario trabajar con mallas de un tamaño muy pequeño en tanto que en el resto del cascaron, no es necesario tal refinamiento [36]. Surge entonces un problema adicional que se refiere a trabajar con redes de distinto tamaño.

Por otro lado, el recurso de procedimientos iterativos para la solución del sistema de ecuaciones, parece tener varias limitaciones.

Muy distinto aparece el panorama, en cuanto a las solucio nes de problemas de la teoría de cascarones, mediante el empleo de modelos físicos (77, 83, 84). Estos modelos físicos, pueden llegar a incorporar aquellos efectos de la forma que no pueden ser considerados en diferencias finitas. Además la formulación de condiciones de frontera adquiere sentido físico y resulta menos complicada. Las ecuaciones que resultan de una formulación de este tipo, difieren con respecto a las que resultan con el empleo de diferencias finitas.

Aun en el caso de placas en que el factor geométrico, de la forma de los elementos no existe, esto resulta cierto

Chuang y Veletsos (77), han usado una tecnica modificada de diferencias finitas que resulta intermedia entre las dos formulaciones anteriores, en virtud de que no considera los factores de la forma de los elementos aislados que forman el sistema. Estos factores si son incluidos en el modelo de Schnobrich y Newmark. El método modificado de diferencias finitas debido a Chuang-Veletsos, mejora considerablemente la aproximación del método de diferencias finitas. Este método originalmente aplicado a cascarones cilíndricos, ha sido extendido por Noor y Veletsos (85) a cascarones rebajados de doble curvatura y ha sido usado en particular, para la solución de un cascaron del tipo paraboloide hiperbolico.

En las comparaciones, resultado de este trabajo (85), se nota que para alcanzar la aproximación de una malla de 40 x 40, en que se usó el método ordinario diferencias finitas, fué suficiente con usar una malla de 10 x 10 para el procedimiento modificado debido a Chuang-Veletsos-Noor (ver ref. 85 pp.160-169).

6.2 El modelo físico. Descripción

En la fig. 6.1 se muestra al modelo físico que se pretende describir. El modelo esta formado de elementos elasticos deformables. Estos elementos elasticos se encuentran ligados entre sí, en ambas direcciones, mediante placas las cuales pueden suponerse formadas en el perímetro de barras infinitamente rigidas que se unen en las esquinas mediante articulaciones y que en el área encerrada por las barras, se encuentra un elemento o placa deformable por esfuerzo cortante en su plano. El usar una placa para ligar los elementos deformables, tiene por objeto considerar el cambio de tamaño de la fibra deformable a una distancia z , de la superficie media con respecto al tamaño de la fibra deformable a la distancia $z = 0$. Este detalle se indica en la fig. 6.2.

Además de estos elementos deformables, existen en planos no necesariamente paralelos entre sí, unos resortes elasticos que toman en cuenta el efecto de momento torsionante. A cada uno de estos resortes corresponde uno de los momentos de torsión M_{xz} o M_{yz} . Las fuerzas cortantes en la superficie, son resistidas por medio de cables, de manera que a cada uno los cables corresponde una de las fuerzas N_{xz} o N_{yz} .

Al introducir los resortes y los cables, se toma en cuenta el hecho de que la forma del recuadro no es un plano, sino que tiene una cierta torsión como la que se muestra en la fig. 6.3 Esta torsión corresponde a la forma inicial de la superficie.

Estas, en conjunto, resultan ser las cualidades inherentes al modelo fisico que parece ser capaz de tomar en cuenta las características escenciales de la deformacion y la deformación por cortante, además de otras condiciones puramente geometricas que se discuten después.

6.3 Geometria inicial del conjunto de elementos que forman el cascaron.

Con las cualidades señaladas antes, respecto al modelo, se procede ahora a formular la geometria del conjunto de elementos que constituye el cascaron; supongase que estos elementos se apoyan en una superficie continua (ver apéndice A-1). Para poder considerar elementos situados entre sí a distancia variable se usará la definición parametrica de la distancia, de manera que cada punto se encuentra a la distancia $\Delta\beta_1 = 1$, $\Delta\beta_2 = 1$ de sus vecinos. La longitud real de la distancia se designa α_1 si se encuentra en la dirección de la curva β_1 y α_2 si se encuentra en la dirección de la curva β_2 (ver fig. 6.3). Las curvas β_1 y β_2 , son precisamente las lineas en que se encuentran localizadas los elementos elasticos que toman el esfuerzo normal. Las cantidades [illegible] y [illegible], se suponen en general, distintas para cada tramo y sus magnitudes relativas no tienen ninguna restriccion. Las placas rectas que ligan los elementos deformables, al pasar de un tramo a otro, por ejemplo sobre la curva β_1, forman un angulo θ_1 que constituye su deflexion. Estas placas son secantes a las curvas β_1 y β_2 cuyos radios en el punto de cruce, se designan como R_1 y R_2, respectivamente. Además estas placas, son secantes a las curvas β_i sobre el plano tangente, en otras palabras, al hacer pasar un plano tangente a la superficie por el elemento deformable, las curvas β_i no necesariamente se proyectan como rectas sobre ese plano, sino que pueden proyectarse como curvas en la superficie (ver fig. 6.4) y los planos se proyectan como secantes de dichas curvas. Las curvas en que se proyectan las lineas β_1 y β_2 de la superficie, sobre el plano tangente, poseen curvaturas que se designan "curvaturas en la superficie" y sus simbolos son ℓ_{12} y ℓ_{21}, dependiendo de la dirección en cuestion (ver fig. 6.4).

De esta manera quedan formuladas las cualidades geometricas de los elementos que constituyen el modelo ; observandose que los elementos no son coincidentes, sino que entre ello existe un ángulo [illegible], sobre el plano normal a la superficie la cual tiene una curvatura $\frac{1}{R} = k$ y otro ángulo sobre el plano tangente, que caracteriza las curvaturas ℓ_{12} o ℓ_{21}. Este último ángulo no interesa, porque su efecto queda considerado con las cantidades ℓ_{12} y ℓ_{21} de las curvaturas en la superficie.

La facilidad de introducir intervalos de longitud distinta se debe a la consideración de la "longitud parametrica unitaria". - Las longitudes reales, de acuerdo con las nociones de geometria diferencial del apéndice A-1, deben escribirse

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \alpha_1 \, \Delta\beta_1 \\ L_2 &= \alpha_1 \, \Delta\beta_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

En lo que sigue, la letra puesta como indice superior de un simbolo, indica el punto de la red en que se valua dicho simbolo. Con este fin, se usará la red de la fig. 6.5

Tomando en cuenta su definición, las curvaturas en la superficie, se pueden calcular geometricamente en la forma que se indica en la fig. 6.6. De las definiciones anteriores se aprecia que

$$\begin{aligned} L_1^J &= R_1^J \varphi_1^J = \alpha_1^J \\ L_2^J &= R_2^J \varphi_2^J = \alpha_2^J \end{aligned} \qquad (6.2)$$

entonces $$\alpha_{1,2}^J = \varphi_1^J \left(R_1^N - R_1^J\right) + R_1^J \left(\varphi_1^N - \varphi_1^J\right)$$

y en consecuencia (ver apéndice A-1).

$$\ell_{12}^J = \frac{1}{R_2^J \varphi_2^J} \left\{ \left[\frac{R_1^N}{R_1^J} - 1 \right] + \left[\frac{\varphi_1^N}{\varphi_1^J} - 1 \right] \right\} \qquad (6.3)$$

En lo anterior, se ha supuesto que el sistema de curvas en la superficie es ortogonal; generalmente es necesario determinar un sistema de curvas que cumpla con esta condición. La solución de este problema puede conseguirse por medios analíticos, como lo ha hecho por ejemplo M.Rodríguez C. [86] para superficies como las de una cortina, o bien por medios numericos como se sugiere aquí. Para este fin, considerese la figura 6.7; en esta figura se muestra una superficie del tipo de cortina y se definen cantidades que se usan a continuación. Para la determinación del sistema de curvas ortogonales, es necesario fijar inicialmente dos de ellas; se escoge la curva A que coincide con el borde de la cortina y la curva B que se localiza en el plano de simetria (se supone por simplicidad que la cortina es simétrica). Estas curvas se intersectan en el punto C. Fijado este punto que cumple la condición de ortogonalidad, se procede a determinar otro vecino a él, que se encuentra en el cruce de la curva β_1' , perpendicular a la curva de simetria, y la curva β_1', perpendicular a la curva del borde. Para ello es necesario elegir y sobre las curvas y β_2 respectivamente. Este punto se determina de la condición,

$$\Delta x \Big|_1^2 = - \frac{\Delta y \big|_2^1}{\Delta x \big|_2^1} \Delta y \Big|_1^2 \qquad (6.4)$$

en que los simbolos usados en esta ecuacion se definen en las figuras 6.7 (b), 6.7 (c), 6.7 (d). Una vez fijado este punto, se recorre la linea B usando la ec. 6.4, hasta llegar a la base, entonces se habrá definido una curva similar a la B y es posi-- ble iniciar otro recorrido semejante.

6.4 Geometria de la deformacion del modelo fisico.

6.4.1 Definición de los desplazamientos.

La definición de desplazamientos es similar a la que han hecho Shnobrich - Newmark. Los desplazamientos W normales a la superficie media, se definen en donde estan localizadas los elementos deformables. Si se supone que la deformación de estos elementos, debida al esfuerzo en la dirección normal a la superficie, es despreciable, entonces todos los puntos alojados en el elemento deformable, se desplazaran la misma cantidad W.

Los desplazamientos en la dirección de las curvas sobre la superficie, es decir los desplazamientos u_1 y u_2, se definen en los puntos medios de las placas; el desplazamiento u_1, en el punto medio de las placas alojadas en la dirección de las curvas β_1 el desplazamiento u_2, en forma correspondiente, en el punto medio de las placas en la dirección de las curvas β_2. Estas definiciones se indican en la fig. 6.8.

Además del vector desplazamiento, la deformación de la superficie se caracteriza mediante un vector rotación; efectivamente, al verificarse la deformación del sistema de elementos, los puntos sucesivos, en general no tienen el mismo despla zamiento w y en consecuencia, las placas giran una cierta canti dad con respecto a su posición inicial. Sin embargo, estas -- rotaciones, no se deben unicamente a los desplazamientos w , si no que se deben también a los desplazamientos u_1 y u_2. Las ro taciones se definen en los mismos puntos que los desplazamien-- tos u_1 y u_2 y se designan γ_1 y γ_2 ; siendo γ_1 la rotación de la placa alojada en la dirección de la curva β_1 , encontrandose γ_1 en plano que contiene a la placa; γ_2 es la rotación de la placa alojada en la dirección β_2 . En la figs. 6.8 y 6.9 se - caracterizan el vector desplazamiento y las rotaciones. En la fig. 6.10, se muestran los desplazamientos u_1 y u_2 y en la fig. - 6.11 se ilustran los desplazamientos debidos a las rotaciónes - γ_1 y γ_2 en las direcciones de las placas, a una distancia gene rica $z = t$ de la linea media de cada placa.

6.4.2 Deformaciones en la superficie (e_1, e_2, ω).

Para establecer las relaciones deformación-desplazamiento en el modelo, es necesario hacer una designación conveniente de los puntos en que se van a definir los desplazamientos. Una - designación adecuada, puede ser aquella en que la posición de los puntos se dá en forma de coordenadas, como ocurre ejemplo en la fig. 5.3. Sin embargo esta elección no sería adecuada en este caso particular, porque el número de indices necesarios resulta ría demasiado grande. En su lugar, se usará la designación de los puntos, que se muestra en la fig. 6.5 . Esencialmente esta designación consiste en indicar mediante letras mayusculas los centros de recuadros y los puntos en que se definen los desplazamientos w y mediante letras minusculas, e indices los puntos secundarios en que se definen u_i y v_i .

Se procede ahora a calcular las deformaciones en el modelo fisico. Considérese inicialmente, un arreglo de placas sobre la curva β_1, ligadas con elementos deformables; las placas son inicialmente rectangulares y los elementos deformables hacen que esas placas adopten la forma de la curva.

En la fig. 6.9 a, se muestra el elemento deformable que corresponde al punto j . Las placas adyacentes a ese elemento, experimentan desplazamientos u_1 y u_2 en la dirección de sus ejes longitudinales. El elemento deformable, tiene sus fibras en el plano, tangente a la superficie en el punto J y en las direcciones β_1 y β_2 , en la figura la dirección de la tangente coincide con el eje horizontal. Para calcular las deformaciones en el elemento, es necesario proyectar los desplazamientos sobre la horizontal. Así resulta, que la deformación en el elemento, debido a los desplazamientos en la dirección β_1 , es:

$$e_{u_1}^{J} = \frac{u_1^{j_1+1} - u_1^{j_1-1}}{\alpha_1^{J}} \; c_1^{J} \qquad (6.6)$$

en que $$C_1^J = \cos \frac{\varphi_1^J}{2} \qquad (6.6)$$

$u_1^{J,+1}$ = desplazamiento en la dirección s_1, calculado en el punto $J,+1$.

Además, debido a la curvatura $k_1 = \frac{1}{R}$ en la dirección de la curva s_1, al verificarse en el elemento J, un desplazamiento normal w_J, aparece una deformación adicional cuya **magnitud** es

$$e_{1w}^J = k_1^J w_J \qquad (6.7)$$

Lo cual se deduce en la fig. 6.12. En forma enteramente analoga, puede deducirse que la deformación adicional debida a la curvatura en la superficie se escribe,

$$e_{1u}^J = \ell_{12}^J \, u_2^J \qquad (6.8)$$

es decir sustituyendo ℓ_{12}^J por k_1^J y u_2^J por w en la fig. 6.12. Superponiendo las deformaciones 6.6, 6.7 y 6.8, es posible deducir la deformación total en el elemento, debida a todos los desplazamientos posibles, esa deformación es,

$$e_1^J = \frac{u_1^{J,+1} - u_1^{J,-1}}{\alpha_1^J} C_1^J + k_1^J w_J + \ell_{12}^J \frac{(u_2^{J,+1} + u_2^{J,-1})}{2} \qquad (6.9)$$

en que se ha sustituido u_2^J, por el valor medio del desplazamiento u_2, de las barras adyacentes al elemento y que se encuentra sobre la curva β_2, normal a la curva β_1. En forma analoga, es posible deducir

$$e_2^J = \frac{u_2^{J_2+1} - u_2^{J_2-1}}{\alpha_{2J}} c_2^J + k_2^J W_J + \ell_{21}^J \left(\frac{u_1^{J_1+1} + u_1^{J_1-1}}{2} \right) \tag{6.10}$$

Considerese ahora, la deformacion angular de un recuadro cualquiera, en cuyas esquinas se localizan los elementos deformables. En este recuadro, existen un cable y unos resortes, que por ahora no interesan y se omiten en la fig. 6.13. En esta figura, se indican los elementos desplazados, en un plano que continue a las placas J_N y J_L. Si las placas NM y LM, estuvieran contenidas en el mismo plano, la deformacion angular debida a los desplazamientos u_1 y u_2 seria,

$$\omega_K = \frac{u_2^{J_2+1} - u_2^{J_2+1}}{\alpha_1^k} + \frac{u_1^{h_1+1} - u_1^{J_1+1}}{\alpha_2^k} \tag{6.11}$$

donde k designa el centro del recuadro

Debido a que en cada recuadro existe un valor para la torsión, de la superficie y que está valuada en el punto central, la placa MN, forma un ángulo $\mu_1^k = k_{12} \alpha_2^k$ y la placa LM el ángulo $\mu_2^k = k_{12} \alpha_1^k$, con el plano que contiene a las placas (ver fig. 6.13). Debido a la existencia de estos ángulos, cuya magnitud depende también del tamaño de la red, además de la torsión de la superficie, la deformación angular debiera escribirse,

$$\omega_{K(u)} = \frac{u_2^{\ell_2+1}\cos\mu_2^k - u_2^{j_2+1}}{\alpha_1^k} + \frac{u_1^{n_1+1}\cos\mu_1^k - u_1^{j_1+1}}{\alpha_2^k} \tag{6.11}$$

Sin embargo, excepto para redes muy grandes, tales que una de las magnitudes , sea mayor que veces el peralte, la corección relativa a los ángulos μ, puede considerarse despreciable. La existencia de la torsión en la superficie, introduce una cantidad adicional en el cambio angular. Esta cantidad se expresa

$$\omega_{K(W)} = 2\,W_K\,k_{12}^k = \frac{W_J + W_K + W_M + W_L}{2}\,k_{12}^k$$

y las curvaturas en la superficie, originan otra cantidad adicional de magnitud

$$\ell_{12}^k\,u_1 + \ell_{21}\,u_2^k$$

de manera que la deformación angular total será

$$\omega_K = \frac{u_2^{\ell_2+1} - u_2^{j_2+1}}{\alpha_1^k} + \frac{u_1^{n_1+1} - u_1^{j_1+1}}{\alpha_2^k} + \frac{W_J + W_M + W_N + W_L}{2}\,k_{12}^k$$

$$+ \ell_{12}^k\,u_1^{j_1+1} + \ell_{21}^k\,u_2^{j_2+1} \tag{6.12}$$

Al definir los desplazamientos en la superficie, en los puntos medios de las barras y en la dirección de ellas; por el hecho de calcular las deformaciones en la forma que se indica en la fig. 6.9 (y en la ec. 6), aparece un desplazamiento adicional para w en cada punto principal. Este desplazamiento adicional es la cantidad que permite establecer que las dos componentes de los desplazamientos en la superficie, quedan consideradas. Por estas razones, el desplazamiento total en el punto J es

$$W_J^T = W_J + (u_1^{J_1+1} - u_1^{J_1-1})\, S_1^J + (u_2^{J_2+1} - u_2^{J_2-1})\, S_2^J \qquad (6.13)$$

en que

$$\left.\begin{aligned} S_1^J &= \operatorname{sen} \frac{\varphi_1^J}{2} \\ S_2^J &= \operatorname{sen} \frac{\varphi_2^J}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (6.14)$$

Esta derivación se justifica en la fig. 6.9.

6.4.3 Cambios en las curvaturas y en la torsión de la superficie inicial.

Al verificarse las rotaciones en las placas que forman el modelo físico de cascarón, se originan modificaciones en la curvatura inicial. En la fig. 6.14, se aprecia este efecto. Estas modificaciones en la curvatura introducen deformaciones -

que son proporcionales a la distancia z medida a partir de la superficie media de los elementos deformables. En lugar de calcular directamente estos cambios de curvatura, se procede a valuar sus efectos. Para este fin considerese la fig. 6.8 en que aparecen las rotaciones γ_1 y γ_2 de las placas en las direcciones β_1 y β_2 respectivamente; debido a la rotación γ_1, la linea media vertical de la placa en la dirección β_1 se desplaza en esa dirección la cantidad $z\gamma_1$. Ahora considerese la fig. 6.13 en que se muestran estas rotaciones y el desplazamiento que originan a la distancia z. Estos desplazamientos introducen deformaciones que se calculan en la misma forma que aquellas que fueron deducidas en 6.4.2, es decir

$$z\kappa_1^j = z\left(\frac{\gamma_1^{j_1+1}-\gamma_1^{j_1-1}}{\alpha_{1j}}\,c_1^j + l_{12}^j\,\frac{\gamma_2^{j_2+1}+\gamma_2^{j_2-1}}{2}\right)$$

En esta deformacion se ha introducido la rotación δ_1^j, para indicar que se trata de un cambio en la curvatura κ_1^j de la superficie, de manera que usando esta rotación, se puede escribir,

$$\delta_1^j = \frac{\gamma_1^{j_1+1}-\gamma_1^{j_1-1}}{\alpha_1^j}\,c_1^j + l_{12}^j\,\frac{\gamma_2^{j_2+1}+\gamma_2^{j_2-1}}{2} \qquad (6.15)$$

y analogamente

$$\gamma_2^J = \frac{\gamma_2^{j_{2+1}} - \gamma_2^{j_{2-1}}}{\alpha_2^J} c_2^J + \ell_{21}^J \frac{\gamma_2^{j_{2+1}} + \gamma_2^{j_{2-1}}}{2}$$

(6.16)

Para la completa analogia con los resultados del inciso 6.4.2, seria necesario introducir la rotación al rededor de la normal a la superficie; designando esta rotación con δ, el término adicional en γ_2^J resultaria un $\delta^J k^J$; sin embargo esta cantidad es despreciable.

Debido a las rotaciones en los planos de las placas que forman un recuadro, se origina a la distancia $r \neq 0$, una modificación en el ángulo que forman las placas en la dirección β_1 con las de la dirección β_2. Esta modificación constituye realmente con aumento en la torsión de la superficie. Empleando la analogia anterior relativa a las expresiones de las deformaciones $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y con las deformaciones producidas por γ y γ_2, es posible escribir, por analogia con τ, modificacion a la torsión de la superficie en la forma

$$\tau^k = \frac{\gamma_2^{\ell_{2+1}} - \gamma_2^{j_{2+1}}}{\alpha_1^k} + \frac{\gamma_1^{k_{1+1}} - \gamma_1^{j_{1+1}}}{\alpha_2^k} + \ell_{12}^k \gamma_1^{j_{1+1}} + \ell_{21}^k \gamma_2^{j_{2+1}}$$

(6.17)

6.4.4 Forma explícita para las rotaciones γ y τ

Para poder expresar los cambios de curvatura κ_1 y κ_2 y el cambio en la torsión τ, es necesario conocer las cantidades γ y τ. Estas cantidades, se deducen ahora, empleando los desplazamientos totales w_i^T ver ec. 6.13. Con este fin, considerarse la fig. 6.16. Los desplazamientos W_i^T y W_j^T, deben ser proyectados en la dirección de la normal al eje de la placa y en la dirección de la tangente local en cada punto. La diferencia de las proyecciones sobre las normales a cada placa en las puntas extremas, permite calcular la rotacion $\gamma_1^{j,i-1}$. Al proyectar sobre la tangente local el desplazamiento u del extremo de cada placa, se consigue cancelar estas proyecciones en los puntos principales. De otra manera las proyecciones introducirán deformaciones adicionales. Este hecho se ilustra en la fig. 6.16.

El cambio angular $\gamma_1^{j,i-1}$ se puede escribir entonces:

$$\gamma_1^{j,i-1} = 2\,\frac{W_j^T \Delta_1^j - W_q^T \Delta_1^q}{(\alpha_{1j} + \alpha_{1q})}$$

$$= \frac{2}{\alpha_1^q + \alpha_1^j}\Big\{\Big(W_j \Delta_1^j + (u_1^{j,i+1} - u_1^{j,i-1})\, t_1^j + (u_2^{j,i+1} - u_2^{j,i-1}) S_2^j \Delta_1^j\Big)$$

$$-\Big(W_q \Delta_1^q + \tfrac{1}{2}(u_1^{j,i-1} - u_1^{q,i})\, \bar{S}_1^q + (u_2^{q,i+1} - u_2^{q,i-1}) S_2^q \Delta_1^q\Big)\Big\}$$

(6.18)

en forma análoga

$$\gamma_2^{j_{2+1}} = \frac{2}{\alpha_2^J + \alpha_2^I} \left\{ \left(W_J \delta_2^J + (u_2^{j_{2+1}} - u_2^{j_{2-1}}) t_2^J + (u_1^{j_{1+1}} - u_1^{j_{1-1}}) S_1^J \delta_2^J \right) \right.$$

$$\left. - (W_T \delta_2^I + \tfrac{1}{2} (u_2^{j_{2-1}} - u_2^{t_2}) \bar{S}_1^J + (u_1^{t_{1+1}} - u_1^{t_{1-1}}) S_1^I \delta_2^T \right\}$$

(6.19)

En estas ecuaciones se ha utilizado la rotación

$$\left.\begin{aligned} t_1^J &= \tan \frac{\varphi_1^J}{2} \\ \bar{S}_1^q &= \operatorname{sen} \varphi_1^q \\ \delta_1^J &= (C_1^J)^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

y se ha introducido la cantidad $\frac{1}{2}(\alpha_1^J + \alpha_1^I)$ como longitud de la placa que se puede sustituir por α_1^J.

Sustituyendo las cantidades $\gamma_1^{j_1}$ y $\gamma_2^{j_2}$, así como las que corresponden a $\gamma_1^{j_1}$, $\gamma_1^{j_{2+1}}$, $\gamma^{j_{2+1}}$ y $\gamma_2^{j_{1+1}}$, que se deducen en forma análoga, en las ecuaciones 6.15, 6.17 y 6.17, se deduce, de la ec. 6.15.

$$\gamma_1^J = \frac{2C_1^J}{\alpha_1^J} \left[\left\{ W_L \delta_1^L + (u_1^{\ell_1} - u_1^{\ell_{1+1}}) t_1^L + (u_2^{\ell_{2+1}} - u_2^{\ell_{2-1}}) S_2^L \delta_1^L \right\} \Big/ (\alpha_1^J + \alpha_1^L) \right.$$

$$- \left\{ W_J \delta_1^J + \tfrac{1}{2} (u_1^{j_{1+1}} - u_1^{j_{1-1}}) S_1^J + (u_2^{j_{2+1}} - u_2^{j_{2-1}}) S_2^J \delta_1^J \right\} \Big/ (\alpha_1^J + \alpha_1^L)$$

$$- \left\{ W_J \delta_1^J + (u_1^{j_{1+1}} - u_1^{j_{1-1}}) t_1^J + (u_2^{j_{2+1}} - u_2^{j_{2-1}}) S_2^J \delta_1^J \right\} \Big/ (\alpha_1^Q + \alpha_1^J)$$

$$\left. + \left\{ W_Q \delta_1^Q + \tfrac{1}{2} S_1^Q (u_1^{j_1} - u_1^{j_{1+1}}) + (u_2^{q_{1+1}} - u_2^{q_{1-1}}) S_2^Q \delta_1^Q \right\} \Big/ (\alpha^Q + \alpha_1^J) \right]$$

(6.21)

6.5 Consideración del efecto de deformación por esfuerzo cortante.

Aquí como en el capítulo 3, se hace uso de la función γ para incluir el efecto de la deformación por cortante. Esta función, según se dedujo en el cap 3, origina deformaciones adicionales similares a las de curvatura, pero proporcionales a γ^3. La función γ se encuentra ligada a las fuerzas cortantes Q_1 y Q_2, mediante las relaciones

$$Q_1 = -\frac{2}{3} G t \frac{\gamma_{,1}}{\alpha_1} = -\frac{2}{3} G t \bar{\gamma}_1$$

$$Q_2 = -\frac{2}{3} G t \frac{\gamma_{,2}}{\alpha_2} = -\frac{2}{3} G t \bar{\gamma}_2$$

(6.24)

de manera que si se acepta que la fuerza cortante introduce una deformación en la forma de una pendiente, puede aceptarse que γ tiene el sentido de un desplazamiento. Ahora bien, la rotación adicional que introduce el cortante en la deformación del modelo no se distribuye linealmente y de suponerlo así se tendría un error considerable. Por esta razon, se adopta aquí el mismo resultado que para el sistema continuo. Este resultado según se indica arriba, establece que la deformación es proporcional a la tercera potencia de γ.

Las curvaturas adicionales por cortante debidas a la función γ son:

$$\left.\begin{aligned}
\chi_1^{jc} &= \frac{\bar{\gamma}_1^{\,j_1+1} - \bar{\gamma}_1^{\,j_1-1}}{\alpha_1^j}\, C_1^j \\[2ex]
\chi_2^{jc} &= \frac{\bar{\gamma}_2^{\,l_2+1} - \bar{\gamma}_2^{\,j_2+1}}{\alpha_2^j}\, C_2^j \\[2ex]
\tau_k^c &= \frac{\bar{\gamma}_2^{\,l_2+1} - \bar{\gamma}_2^{\,j_2+1}}{\alpha_{1k}} + \frac{\bar{\gamma}_1^{\,n_1+1} - \bar{\gamma}_1^{\,j_1+1}}{\alpha_{2k}}
\end{aligned}\right\} \qquad (6.25)$$

en que las cantidades $\bar{\gamma}_1$ y $\bar{\gamma}_2$ son las rotaciones debidas -- al cortante y se calculan en la forma

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\gamma}_1^{\,j_1+1} &= 2\,\frac{\psi_J\, s_1^J - \psi_Q\, s_1^Q}{(\alpha_1^J + \alpha_1^Q)} \\[2ex]
\bar{\gamma}_2^{\,j_2-1} &= 2\,\frac{\psi_J\, s_2^J - \psi_T\, s_2^T}{(\alpha_2^J + \alpha_2^T)}
\end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

Las expresiones correspondientes a χ_1, χ_2 y τ, se deducen mediante sustituciones similares a las practicadas antes.

6.6 Resultantes de fuerza $(N_1, N_2, N_{12}, N_{21})$, de momento $(M_1, M_2, M_{12}, M_{21})$ y de cortante (Q_1, Q_2).

En la discusión previa se han tratado los problemas relativos a las deformaciones en la superficie media y a los cambios de curvatura. Sin embargo no se ha considerado que las fichas a la distancia z de las fichas en la parte media de cada elemento, poseen una longitud distinta. De hecho, a una distancia z, la longitud de las fichas es $(1+zk_1)$ medida en la dirección de la curva s_1 y $(1+zk_2)$ en la dirección de la curva

Así resulta que las deformaciones en la superficie a la distancia z son:

$$
\left.
\begin{aligned}
{}^{p}e_1 &= \frac{e_1}{1+\frac{z}{R_1}} = \frac{e_1}{c_1} \\
{}^{p}e_2 &= \frac{e_2}{1+\frac{z}{R_2}} = \frac{e_1}{c_2} \\
{}^{p}\omega &= \frac{\omega}{c_1 c_2}
\end{aligned}
\right\} \qquad (6.27)
$$

El efecto de cambio de geometría en las superficies paralelas, se toma en cuenta al calcular los resultantes mediante integración, a travez del espesor, de los esfuerzos deducidos mediante la ley de Hooke . La ley de Hooke establece que

$$
\left.
\begin{aligned}
{}^{p}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}\,(e_1+\nu e_2)\,c_1^{-1} \\
{}^{p}\sigma &= \frac{E}{1-\nu^2}\,(e_2+\nu e_1)\,c_2^{-1} \\
\sigma_{12} &= \sigma_{21} = G\,(\omega)\,c_1^{-1}c_2^{-1}
\end{aligned}
\right\} \qquad (6.28)
$$

y estos esfuerzos actuan en elementos cuya longitud es distinta de 1, por ejemplo ${}^{p}\sigma_1$ actua en una sección que mide $dz\,c_2$.

Verificando la integración correspondiente es posible deducir

$$\left.\begin{aligned}
N_1 &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} {}^{p}\sigma_1 \, c_2 \, dz = \\
&= \frac{Et}{1-\nu^2}(e_1 + \nu e_2) - \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} D\mathcal{K}_1 \\
N_2 &= \frac{Et}{1-\nu^2}(e_2 + \nu e_1) + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} D\mathcal{K}_2 \\
N_{12} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} {}^{p}\sigma_{12} \, c_2 \, dz \\
&= G t \omega - \frac{Gt^3}{12} D\tau \\
N_{21} &= G t \omega + \frac{Gt^3}{12} D\tau \\
&= N_{12} + \frac{Gh^3}{6} D\tau
\end{aligned}\right\} \qquad (6.29)$$

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} {}^{p}\sigma_1 \, c_2 \, z \, dz \\
&= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[(\mathcal{K}_1 + \nu \mathcal{K}_2) + De_1\right] \\
M_2 &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[(\mathcal{K}_2 + \nu \mathcal{K}_1) - De_2\right] \\
M_{12} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} {}^{p}\sigma_{12} \, c_2 \, z \, dz \\
&= \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \left(\tau - \frac{\omega}{2R_1}\right) \\
M_{21} &= \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \left(\tau - \frac{\omega}{2R_2}\right) \\
&= H_1 + \frac{Et^3}{24(1+\nu)} D\omega
\end{aligned}\right\} \qquad (6.30)$$

En estas ecuaciones se ha introducido la rotación

$$D = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \tag{6.31}$$

Las resultantes de momento flexionante, que corresponden a las deformaciones por cortante, se deducen al considerar el hecho de que la distribución de las deformaciones es proporcional a z^3. Las resultantes son:

$$\begin{aligned} M_1^c &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{z^3}{t^2} (\kappa_1^c + \nu \kappa_2^c)\, dz \\ &= \frac{E t^3}{120(1-\nu^2)} \left[\kappa_1^c + \nu \kappa_2^c\right] \\ M_2^c &= \frac{E t^3}{120(1-\nu^2)} \left[\kappa_2^c + \nu \kappa_2^c\right] \end{aligned} \tag{6.32}$$

$$M_{12}^c + M_{21}^c = \frac{G t^3}{120} (\delta^c)$$

6.7 Sobre la deducción del sistema de ecuaciones de equilibrio en el modelo físico.

El sistema de ecuaciones de equilibrio puede deducirse, en modelos físicos del tipo que aquí se discute, mediante el empleo de distintas técnicas; en el modelo Sandwich-Newmark [63], -

se emplea el principio del trabajo virtual, en tanto que en la formulación matricial de Argyris[22], se hace uso de los teoremas de Castigliano. Estos dos ejemplos son realmente técnicas del cálculo de variaciones[65,22] y se puede usar directamente el cálculo de variaciones, en la forma en que describe Euler (ver cap. 1) en su tratamiento mediante diferencias finitas. Este tratamiento ha sido empleado en distintos problemas particulares[1,2,69]; en la teoría de cascarones, Chuang y Veltsos[illegible] la han usado para cascarones cilíndricos.

Aquí se presenta un tratamiento similar al de Euler, porque, en este caso, hace más comprensible la aparición de ciertos términos y porque sigue paralelamente los desarrollos de las ecuaciones elaboradas antes en el sistema continuo.

En un cascarón idealizado mediante un modelo, es posible calcular la energía de deformación del conjunto de elementos deformables que lo constituyen; en los puntos principales es posible calcular la energía de deformación debida a fuerza axial (N) y a momento flexionante (M). Esta energía de deformación es:

$$V_{N,M} = \frac{1}{2} \sum_{J=1}^{m} \Big\{ \Big(N_1^J e_1^J + M_1^J \mathcal{K}_1^J + N_2^J e_2^J + M_2^J \mathcal{K}_2^J + M_1^{Jc} \mathcal{K}_1^J + M_2^{Jc} \mathcal{K}_2^J \Big) \alpha_1^J \alpha_2^J \Big\} \qquad (6,33)$$

en que m es el número total de puntos principales, incluyendo aquellos que se encuentran cerca de las fronteras. Para los puntos que estan cerca de las fronteras, las fuerzas o las deformaciones se escogen de modo que se satisfagan las condiciones de frontera. Lo mismo deberá hacerce con los momentos y las curvaturas.

La energía de deformación total, debe incluir también los elementos deformables que se localizan en los recuadros y las placas deformables en que se supone concentrada la deformación por cortante transversal para cada tramo. Esta energía se escribe

$$V_{s,H,Q} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_1}\Big\{\big(N_{12}^k\,\omega_k + N_{21}^k + M_{12}^k\,\tau_k + M_{21}^k\,\tau_k + Q_1^k\,\bar{\gamma}_1^k + Q_2^k\,\bar{\gamma}_2^k \big)\alpha_1^k\alpha_2^k\Big\} \qquad (6.34)$$

en que m_1 es el númerc de recuadros

De esta manera, puedo estructurarse la energía de deformación total, para el sistema que constituye el cascarón, en la forma

$$V = V_{N,M} + V_{s,H,Q} \qquad (6.35)$$

Las ecuaciones de equilibrio pueden deducirse a partir de V, mediante derivación, en virtud de que el sistema elástico es discreto. Si se pretendiera encontrar la ecuación de equilibrio en la dirección de la curva s_1 y en el punto j_{i+1}, ello se conseguiría haciendo,

$$\frac{\partial V}{\partial u_1^{i,i+1}} = X_1^{i,i+1} \qquad (6.36)$$

en que $X_1^{\lambda+1}$ es la fuerza que actua en el punto $\lambda+1$ y en la dirección β_1. Pero calcular el valor total de V como se expresa en las ecs 33, 34, y 35, seria complicado e innecesario porque solamente unos terminos contendran a la variable con respecto a la cual, interesa derivar.

Entonces para deducir la ecuacion de equilibrio 36, en la direccion de la curva β_1, la cantidad V debe calcularse sumando unicamente aquellos terminos que contienen a $U_1^{\lambda+1}$. En este caso, la energia de deformacion $V_{N,M}$ se calcula como

$$V_{N,M} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\lambda = I, L, Q} \Big\{ (N_1^{\lambda} e_1^{\lambda} + M_1^{\lambda} \chi_1^{\lambda} + M_1^{\lambda c} \chi_1^{\lambda}) + \sum_{\lambda = J, N, T} (N_2^{\lambda} e_2^{\lambda} + M_2^{\lambda} \chi_2^{\lambda} + M_2^{\lambda c} \chi_2^{\lambda} \Big\} \alpha_1^{\lambda} \alpha_2^{\lambda} \tag{6.37}$$

en forma análoga,

$$V_{B,H,Q} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\lambda = K, O, R, U} \Big\{ N_2^{\lambda} \omega^{\lambda} + N_1^{\lambda} \omega^{\lambda} + N_2^{\lambda} \omega^{\lambda} + M_1^{\lambda} \omega^{\lambda} + Q_1^{\lambda} \bar{\gamma}_1^{\lambda} + Q_2^{\lambda} \bar{\gamma}_2^{\lambda} \Big\} \alpha_1^{\lambda} \alpha_2^{\lambda} \tag{6.38}$$

Así, resulta que las ecuaciones de equilibrio se deducen en la forma

$$\frac{\partial (V_{N,M} + V_{B,H,Q})}{\partial u_1^{\lambda+1}} = X_1^{\lambda+1} \tag{6.39}$$

para la dirección β_1, en tanto que como

$$\frac{\partial (V_{N,M} + V_{B,H,Q})}{\partial u_2^{\lambda+1}} = X_2^{\lambda+1} \tag{6.40}$$

cuando se trata de la ecuación de equilibrio de fuerzas en dirección β_2 . En forma análoga, la ecuación en la dirección normal a la superficie en el punto J resulta ser

$$\frac{\partial\,(V_{N,M} + V_{S,H,Q})}{\partial W_J} = Z_J \qquad (6.41)$$

y finalmente, se puede definir la ecuación que corresponde a la variable ψ , mediante la expresión,

$$\frac{\partial\,(V_{N,M} + V_{S,H,Q})}{\partial \psi_c} = 0 \qquad (6.42)$$

Una deducción de las ecuaciones correspondientes, resulta demasiado larga y aquí se omite, mostrándose por separado (figs 6.17, 6.18, 6.19 y 6.20) los resultados de esta derivación. Para el caso particular de cascarones cilíndricos, los resultados se consignan en forma menos breve en el trabajo de Chuang y Veletsos(77).

El manejo de las ecuaciones 39, 40, 41, 42, en su forma explícita indicada en las figs 6.17, 6.18, 6.19 y 6.20, resulta complicado por los medios ordinarios de cálculo y solamente es adecuada su solución, cuando el sistema de ecuaciones correspondiente puede formarse por medio de una computadora digital.

El tratamiento que se da para la solución del sistema de ecuaciones se explicará con más detalle en los casos más simples que se presentan en las secciones siguientes.

6.5 Solución del sistema de las ecuaciones de equilibrio en

<u>cascarones rebajados de espesor variable y de doble curvatura. Consideración de las condiciones de frontera.</u>

Como un caso particular de el sistema de cuatro ecuaciones deducido en la sección 6.7, es posible obtener un sistema de tres ecuaciones en las variables u_1, u_2 y w . Para agregar simplicidad, se habrán de introducir algunas consideraciones adicionales. Estas consideraciones son puramente geométricas y toman en cuenta el hecho de que por tratarse de cascarones rebajados, la geometría de la superficie puede suponerse representada por la geometría del plano en que se proyecta la superficie del cascarón. Así, resulta aceptable suponer que la separación de la malla es constante, es decir

$$\alpha_1 = \text{constante}$$
$$\alpha_2 = \text{constante}$$

Por otro lado si se suponeqque la superficie del cascarón está formada mediante arcos de círculo (cuyo radio es variable) que se apoyan o deslizan en otra curva perpendicular (según se discutió en la sección 6.3), se puede aceptar que el ángulo φ_1 permanece constante a lo largo de las líneas que contienen a los arcos de círculo. Bajo estas consideraciones es posible escribir el sistema de ecuaciones que se presenta en un grupo de hojas por separado al final de este capítulo. En esta presentación, se encuentran las tres ecuaciones de equilibrio que corresponden a un punto general y a un punto situado en un borde libre. En este caso particular, el sistema de ecuaciones correspondiente se plantea en la misma forma que se describió en la sección 6.[illegible], con la diferencia de que se introducen las condiciones de frontera correspondientes y no se toman en cuenta las partes que quedan fuera del borde libre. En la fig 6.[illegible], se describe esta situación. El hecho de que el momento y la fuerza en la dirección normal al borde en el punto J, deban ser nulos, origina que

$$\left.\begin{aligned} e_2^J &= -\nu\, e_1^J \\ \chi_2^J &= -\nu\, \chi_1^J \end{aligned}\right\} \qquad (6.43)$$

por ser,

$$\left.\begin{aligned} N_2^J &= Et(e_2 + \nu e_1) = 0 \\ M_2^J &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_2 + \nu \chi_1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.44)$$

sustituyendo las ecuaciones 6.43 en la expresión de la energía de deformación, es posible deducir el sistema de ecuaciones de equilibrio, nuevamente, mediante la aplicación del principio de Castigliano. Las ecuaciones se muestran en hojas

6.9 Deducción de un sistema de ecuaciones de compatibilidad y de equilibrio mediante el empleo de una función de fuerzas ψ y el desplazamiento w. Distintas condiciones de frontera.

En esta sección se presenta un sistema de ecuaciones para el modelo físico, en que se utiliza la analogía estático-geométrica desarrollada en el apéndice A5 y utilizada en el capítulo 2. Las ecuaciones que aquí se deducen, son análogas a las desarrolladas en el capítulo 2 y se emplea la misma analogía que permite tomar en cuenta la deformación por cortante transversal.

El sistema de ecuaciones, se dedujo pensando en la posibilidad de que la obtención de los coeficientes, fuese hecha en una computadora digital,* por esta razón, la malla de la fig 6.22, no conserva la notación anterior en cuanto a la designación de los puntos.

Cuando en las expresiones para los cambios de curvatura, deducidos en la sección 6.   , se desprecia el efecto de los desplazamientos   y   , se pueden obtener expresiones simplificadas que son las que se usaron aquí. Las expresiones resultantes, son aproximadamente válidas para cascarones rebajadas y se escriben,

$$\chi_1^J = r_1^J \left[\Delta_1^J W_{J-1} - 2 W_J \Delta_1^J + W_{J+1} \Delta_1^{J+1} \right] \tag{6.45}$$

$$\chi_2^J = r_2^J \left[\Delta_2^J W_I - 2 W_J \Delta_2^J + \Delta_2^K W_K \right] \tag{6.46}$$

en tanto que el cambio de torsión en el punto j_1 se escribe,

$$\tau_{j_1} = a_{j_1} \left[W_{K+1} \bar{\Delta}^{K+1} + W_J \bar{\Delta}^J - W_{J+1} \bar{\Delta}^{J+1} - W_K \bar{\Delta}^K \right] \tag{6.47}$$

---

* Actualmente, lassección de análisis numérico del Instituto de Ingeniería, elabora un programa para el empleo de las ecuaciones que aquí se deducen en el diseño de cortinas.

en estas ecuaciones se ha utilizado la notación

$$r_1^J = \frac{12\, c_1^J}{\alpha_1^J\,(\alpha_1^{J-1} + 10\,\alpha_1^J + \alpha_1^{J+1})}$$

$$r_2^J = \frac{12\, c_2^J}{\alpha_2^J\,(\alpha_2^K + 10\,\alpha_2^J + \alpha_2^I)} \qquad (6.2)$$

$$a_{J_1} = \frac{1}{\alpha_1^{J_1}\,\alpha_1^{J_2}}$$

$$\bar{s}^J = s_1^J + s_2^J$$

que resultan de suponer que las cantidades α varían sobre la superficie como una parábola de segundo grado.

Debido a la analogía estático-geométrica, se puede escribir,

$$N_2^J = r_1^J\left[s_1^{J+1}\,\psi_{J+1} - 2\,\psi_J\, s_2^J + \psi_{J-1}\, s_1^{J-1}\right]$$

$$N_1^J = r_2^J\left[\psi_K\, s_2^K - 2\,\psi_J\, s_2^J + \psi_I\, s_2^I\right]$$

$$N_{12}^{J_1} = N_{21}^{J_1} = S_{J_1} = a_{J_1}\left[\psi_{K+1}\,\bar{s}^{K+1} + \psi_J\,\bar{s}_1^J - \psi_{J+1}\,\bar{s}^{J+1} - \psi_K\,\bar{s}^K\right]$$

y debido a la analogía presentada en el capítulo , se puede escribir

$$Q_1 d_s = \frac{2\,(\psi_{J+1}\, s_1^{J+1} - \psi_J\, s_1^J)}{(\alpha_1^{J+1} + \alpha_1^J)}\; k_{1J}$$

$$Q_2 d_2 = \frac{2\,(\psi\, s_2^I - \psi_J\, s_2^J)}{(\alpha_{2K} + \alpha_{2J})}\; k_{2J}$$

La rotación total de cada elemento se deduce en la forma

$$
\left.
\begin{aligned}
\gamma_{1d_3} &= \frac{2\,(W_{J+1}\,\Delta_1^{J+1} - W_J\,\Delta_1^{J})}{(\alpha_1^{J+1} + \alpha_1^{J})} \\[2ex]
\gamma_{2d_2} &= \frac{2\,(W_K\,\Delta_2^{K} - W_J\,\Delta_2^{J})}{(\alpha_{2K} + \alpha_{2J})}
\end{aligned}
\right\} \qquad (6.54)
$$

En cuanto a la deducción del sistema de ecuaciones, se sigue aquí el mismo camino descrito en la sección 6.7 . En este caso, la energía de deformación se escribe en la forma

$$
\begin{aligned}
V = \frac{1}{2} \Big[& \sum_{\lambda = I, J, K, J-1, J+1} \Big(\{ N_1^\lambda e_1^\lambda + N_2^\lambda e_2^\lambda + M_1^\lambda \chi_1^\lambda + \\
& + M_2^\lambda \chi_2^\lambda \} \alpha_1^\lambda \alpha_2^\lambda \Big) + \sum_{\lambda = I, J, K, J-1, J+1} \Big(\{ k_1^\lambda N_1^\lambda + k_2^\lambda N_2^\lambda \} \alpha_1^\lambda \alpha_2^\lambda \Big) \qquad (6.55) \\
& + \sum_{\lambda = d_2, d_4} (Q_2^\lambda \gamma_{2\lambda}) \alpha_1^\lambda \alpha_2^\lambda + \sum_{\lambda = d_1, d_3} (Q_1^\lambda \gamma_1^\lambda) \alpha_1^\lambda \alpha_2^\lambda \\
& + \sum_{\lambda = J_1, J_2, J_3, J_4} \Big(\{ S_\lambda \omega_\lambda + H_\lambda \sigma_\lambda \} \alpha_1^\lambda \alpha_2^\lambda \Big) \Big]
\end{aligned}
$$

Mediante el empleo de la ley de Hooke, se escriben las deformaciones, en términos de las fuerzas como:

$$
\begin{aligned}
e_1^J &= \frac{1}{E_J t_J} \left[N_1^J - \nu N_2^J \right] = T_J^{-1} \left[N_1^J - \nu N_2^J \right] \qquad (6.56) \\
e_2^J &= E_J'^{-1} \left[N_2^J - \nu N_1^J \right] \\
\omega_{J_1} &= \frac{1}{G_J t_J} S_{J_1} = G_{J_1}^{-1} S_{J_1}
\end{aligned}
$$

y los momentos, mediante los cambios de curvatura y torsión en la forma:

$$M_1^J = \frac{E_J t_J^3}{12(1-\nu^2)} \left[\mathcal{K}_1^J + \nu \mathcal{K}_2^J \right] = E_J'' \left[\mathcal{K}_1^J + \nu \mathcal{K}_2^J \right]$$

$$M_2^J = E_J'' \left[\mathcal{K}_2^J + \nu \mathcal{K}_1^J \right] \qquad (6.57)$$

$$M_{J1} = G_{J1}'' \, \tau_{J1}$$

La ecuación de equilibrio se deduce nuevamente mediante el empleo de los teoremas de Castigliano en la forma

$$\frac{\partial V}{\partial W_J} \; q_J \qquad (6.58)$$

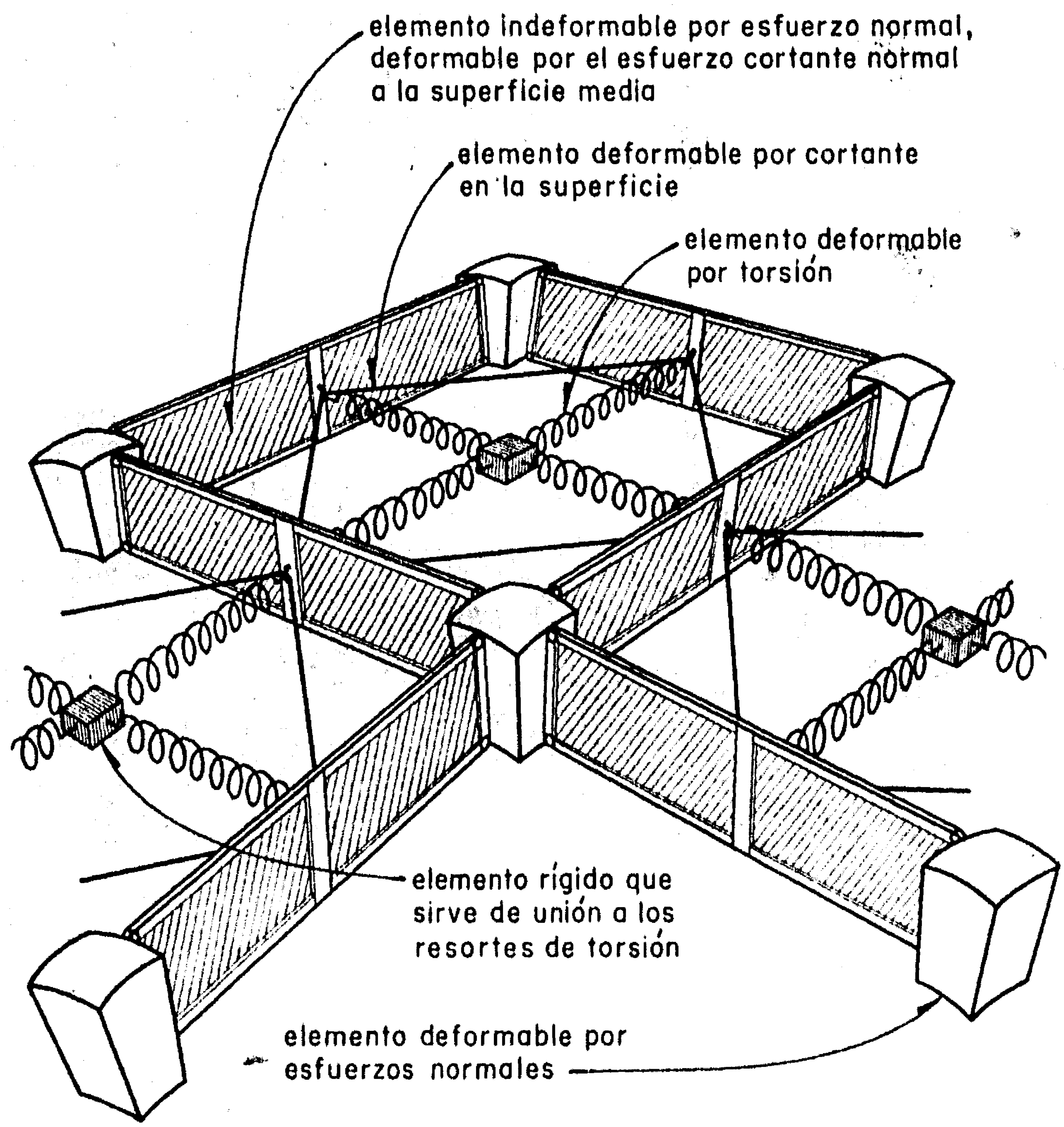
y la ecuación de compatibilidad se deduce en la forma,

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_J} = 0 \qquad (6.59)$$

Los resultados de estas derivaciones para el caso de puntos generales sin condición de frontera, se muestran en la forma de operadores, en las figuras 6.23, 6.24, 6.25 y 6 6.26. Las condiciones de frontera impuestas en un borde libre como el indicado en la fig. 6.21, se cumplen escribiendo

$$\left. \begin{aligned} \psi_J &= 0 \\ \mathcal{K}_{2J} &= -\nu \mathcal{K}_{1J} \end{aligned} \right\} \qquad (6.60)$$

Los resultados [illegible]



MODELO FISICO DE LA TEORIA DE LA DEFORMACION EN CASCARONES GRUESOS DE DOBLE CURVATURA

FIG. 6.1

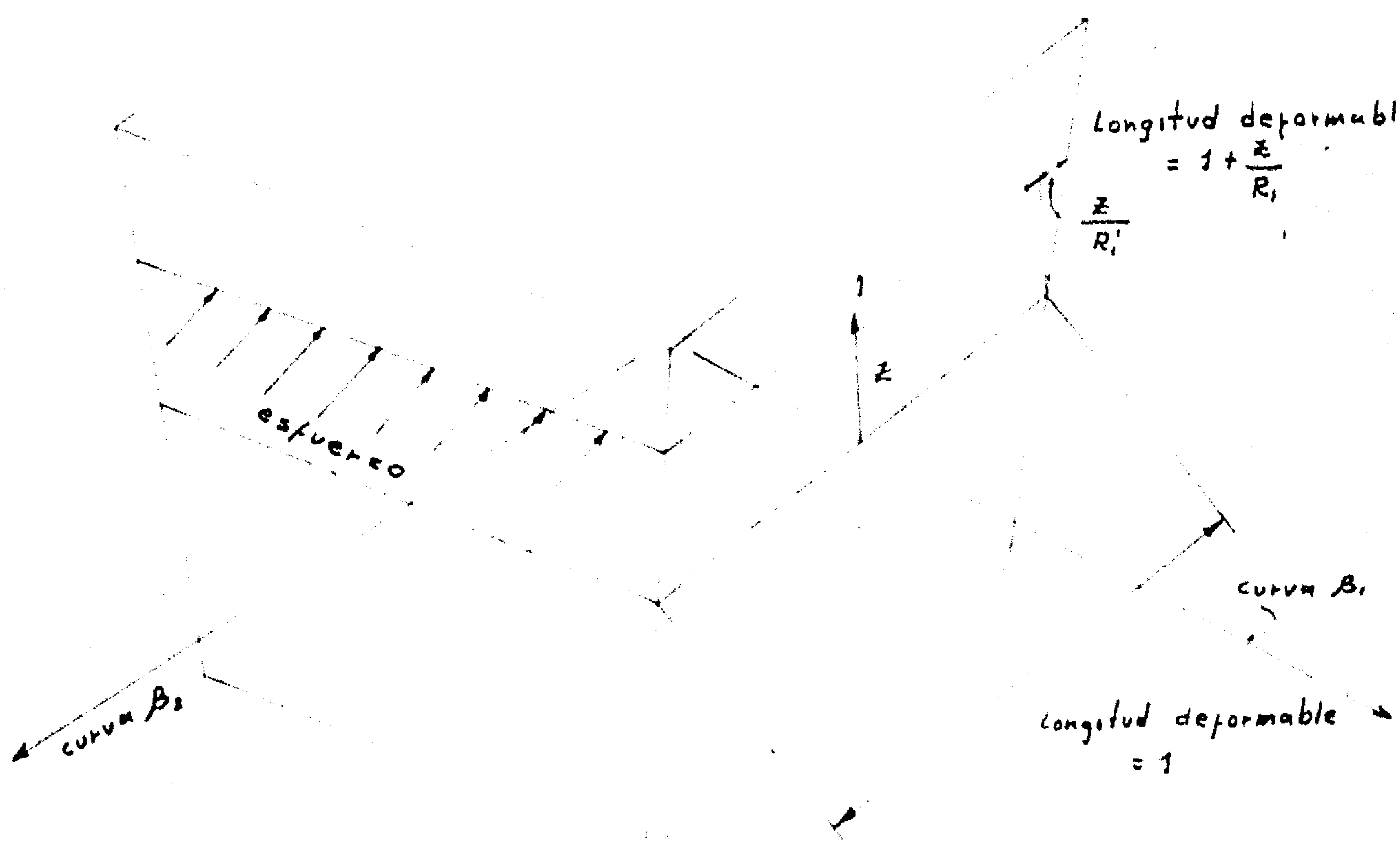
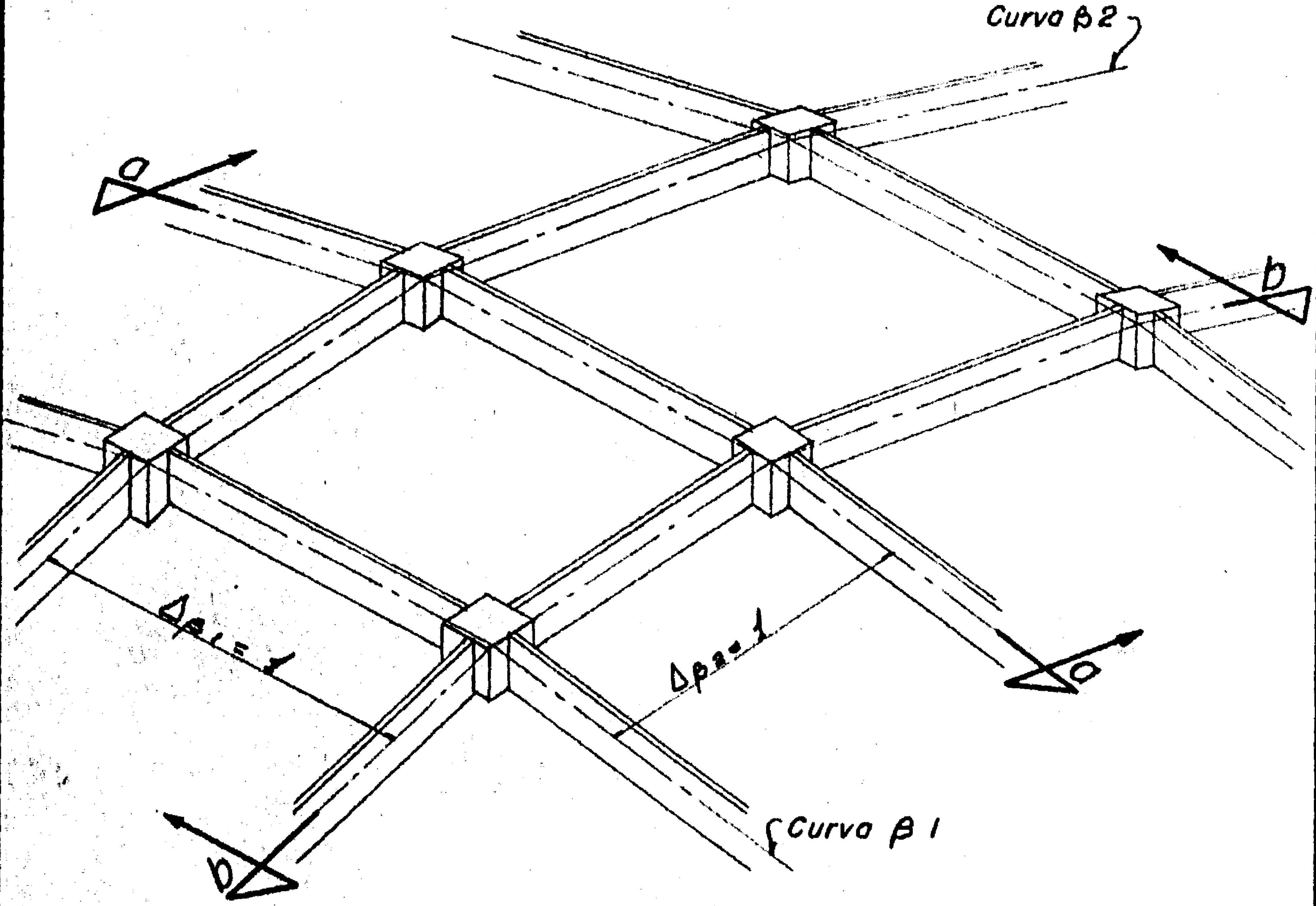
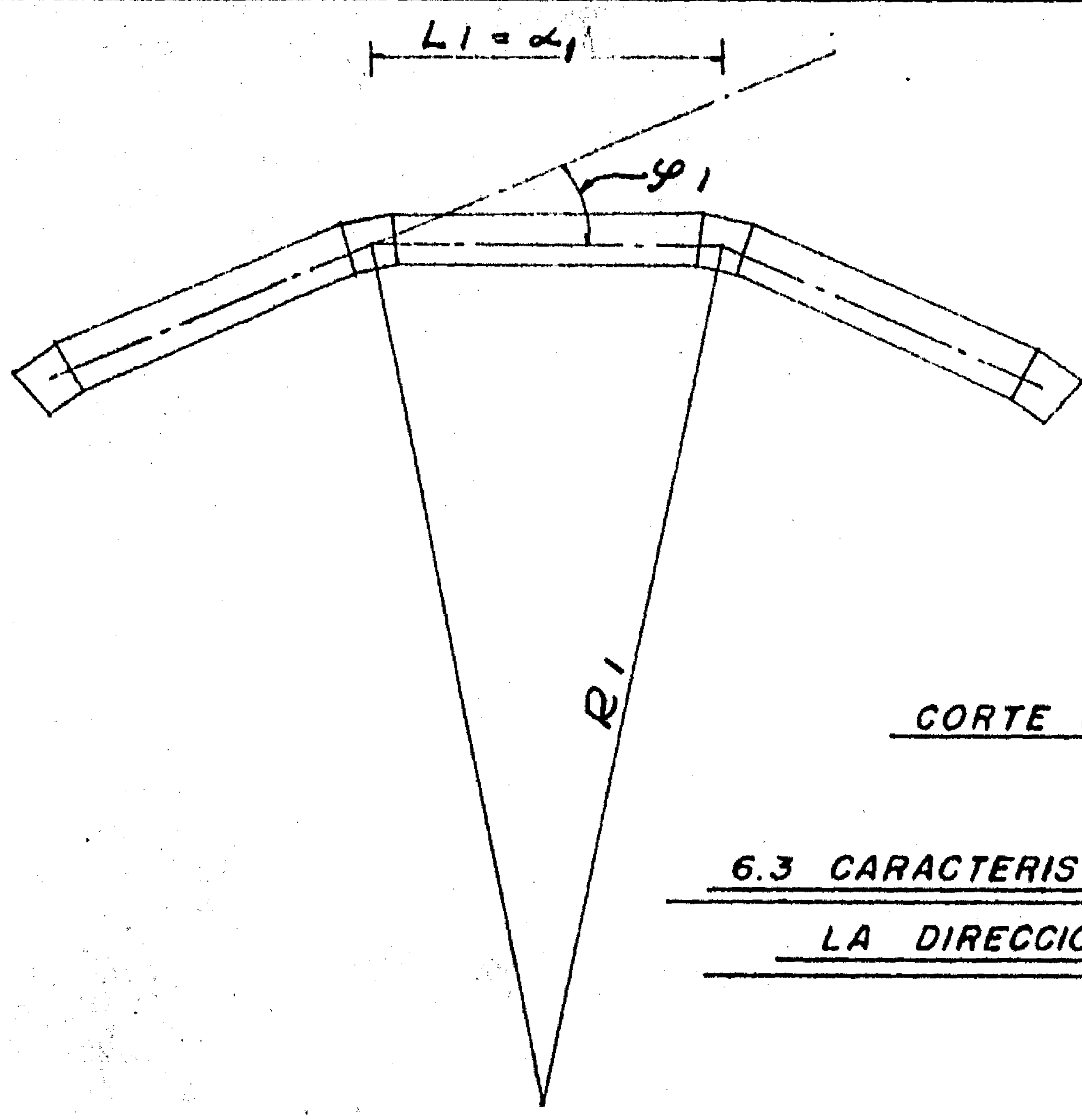

Longitud deformable
$= 1 + \frac{z}{R_1}$
$\frac{z}{R_1'}$
1
z
esfuerzo
curva β_1
curva β_2
Longitud deformable
$= 1$

figura 6.2

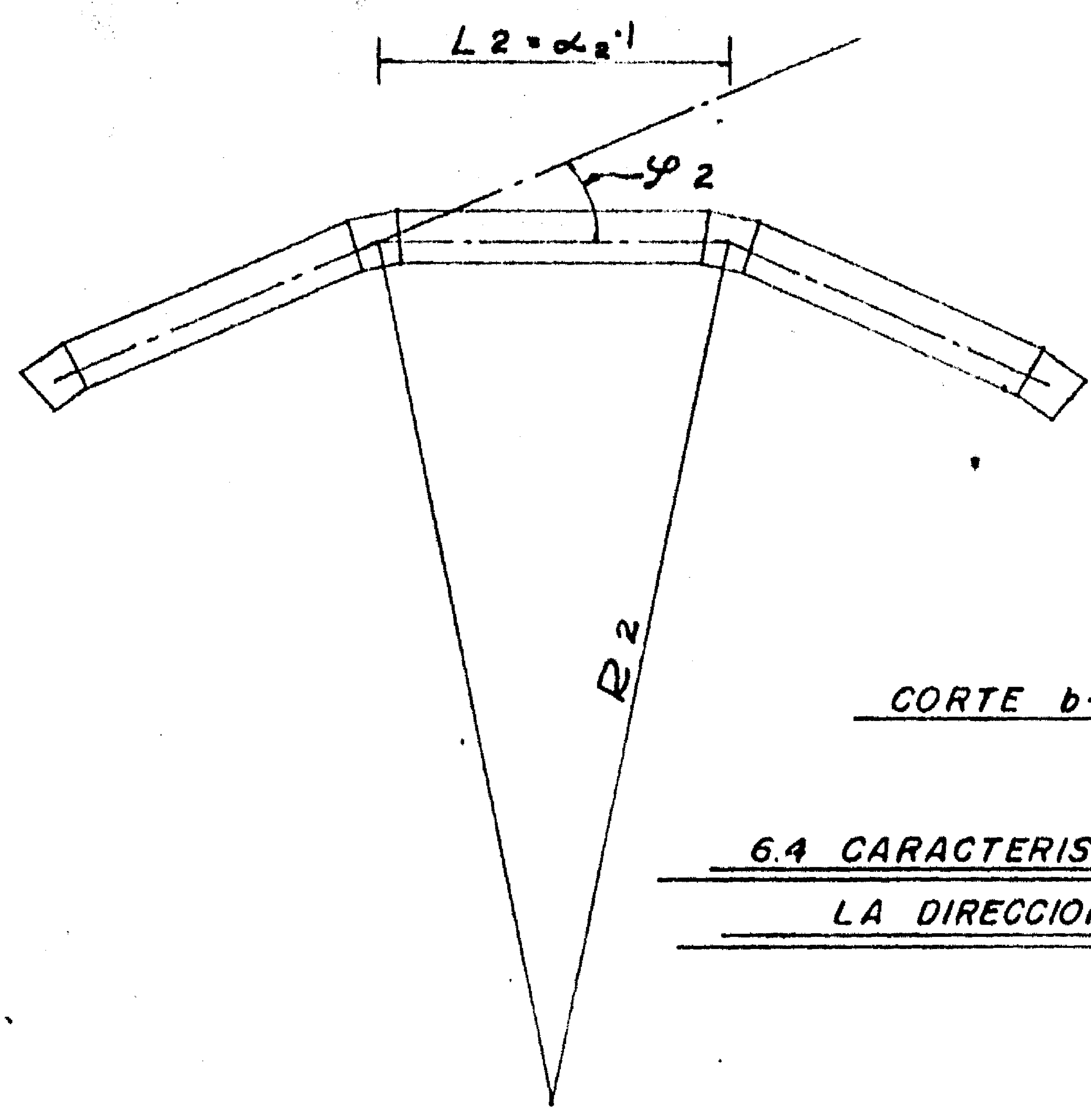


6.3 GEOMETRIA DEL MODELO FISICO.



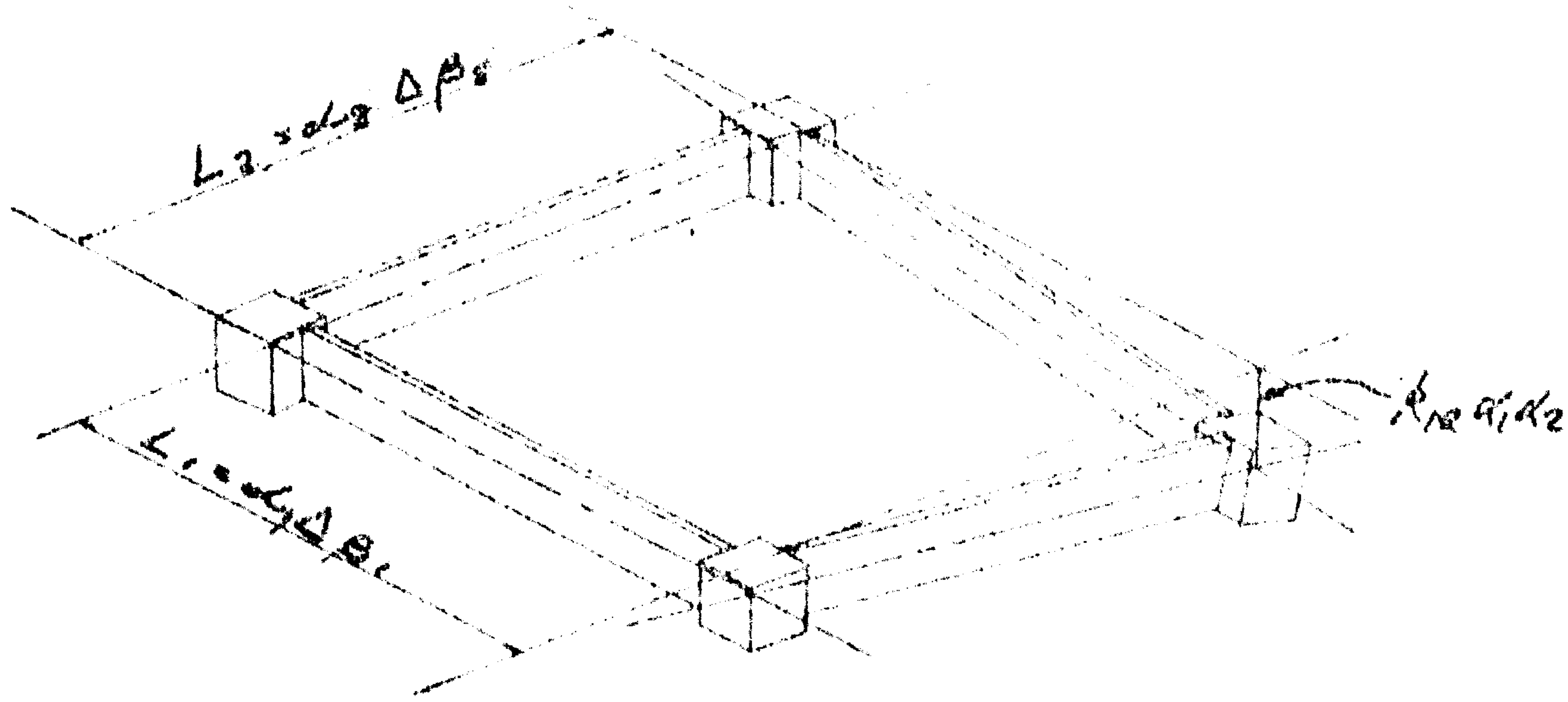
CORTE a-a

6.3 CARACTERISTICAS EN LA DIRECCION β 1

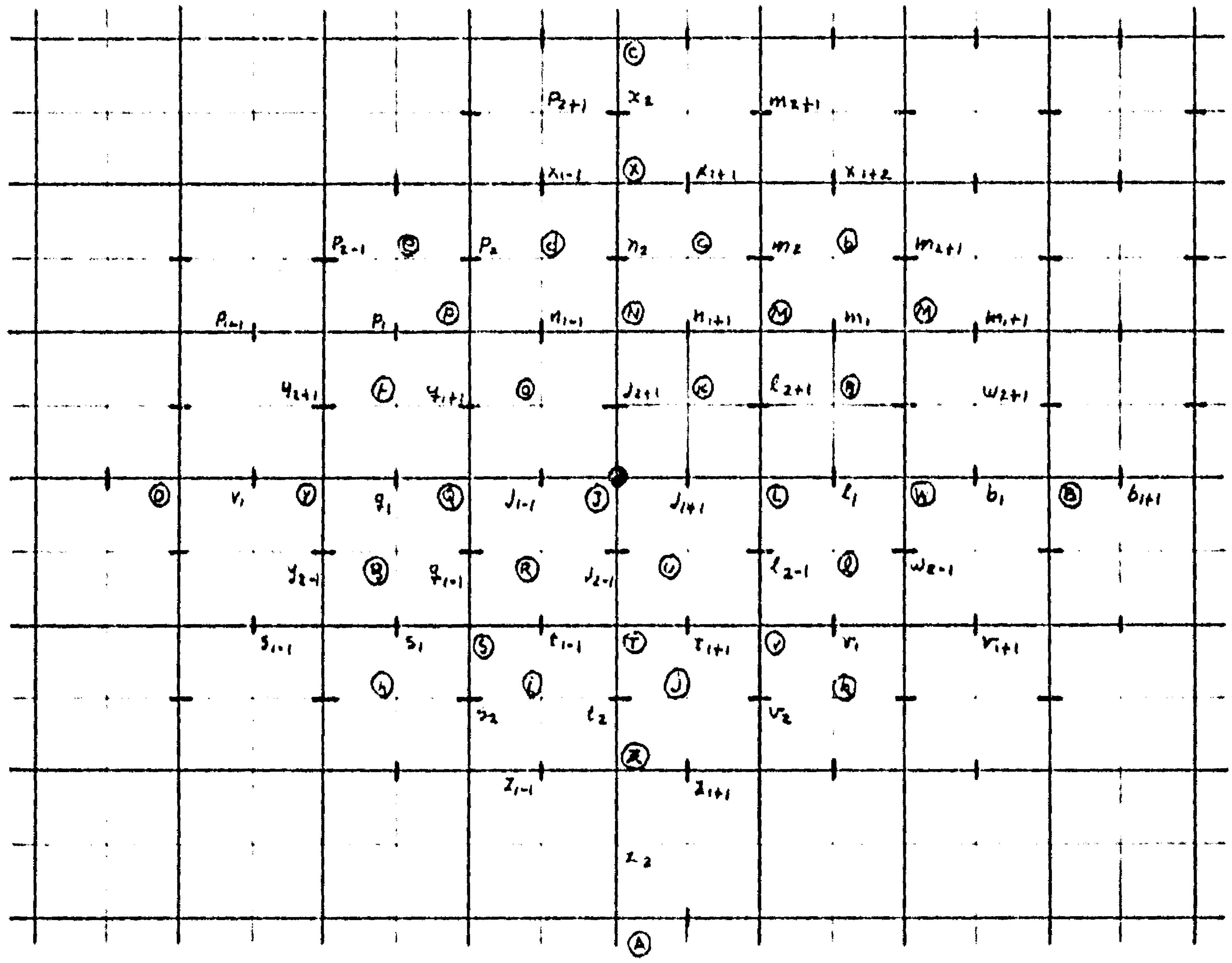


CORTE b-b

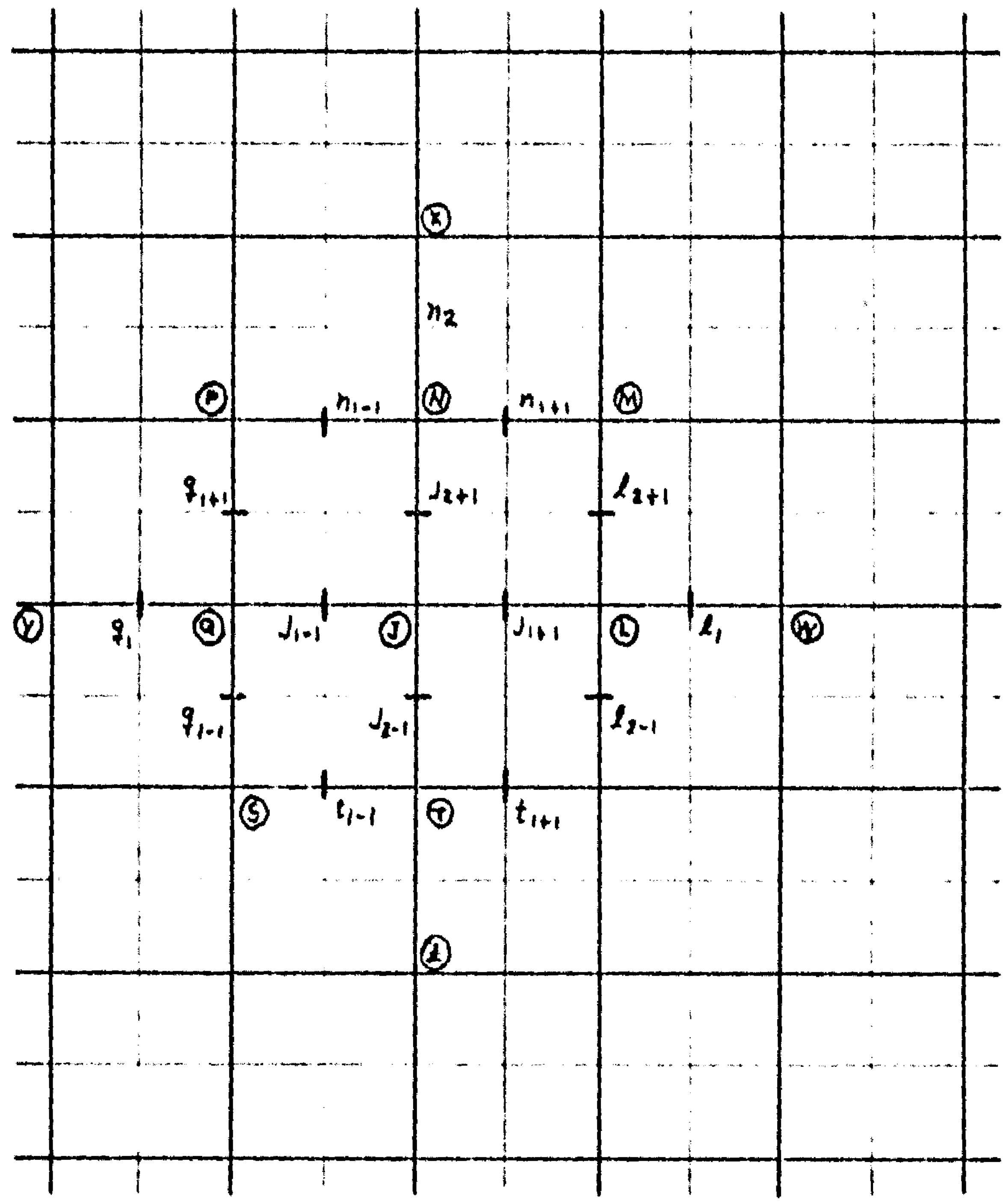
6.4 CARACTERISTICAS EN LA DIRECCION β 2



6.4(a) TORSION EN LA SUPERFICIE.



6.5 DESIGNACION DE LOS PUNTOS SOBRE LA SUPERFICIE DEL CASCARON; MODELO COMPLETO



6.5' DESIGNACION DE LOS PUNTOS EN EL MODELO SIMPLIFICADO

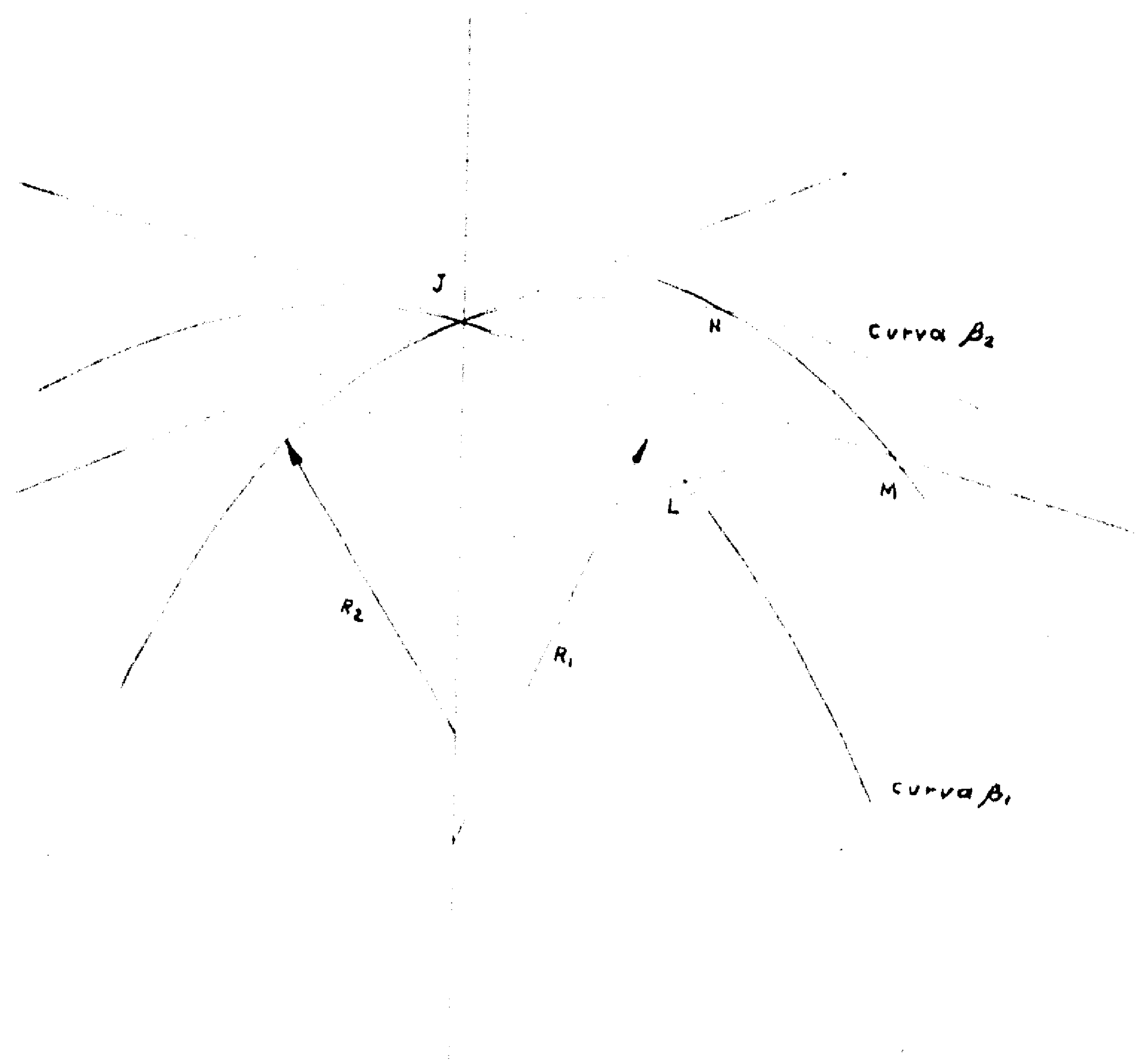


figura 6.6

DETERMINACION ARITMETICA DE LAS CURVAS ORTOGONALES A LAS CURVAS DE LOS ARCOS DE CIRCULO DE LA CORTINA

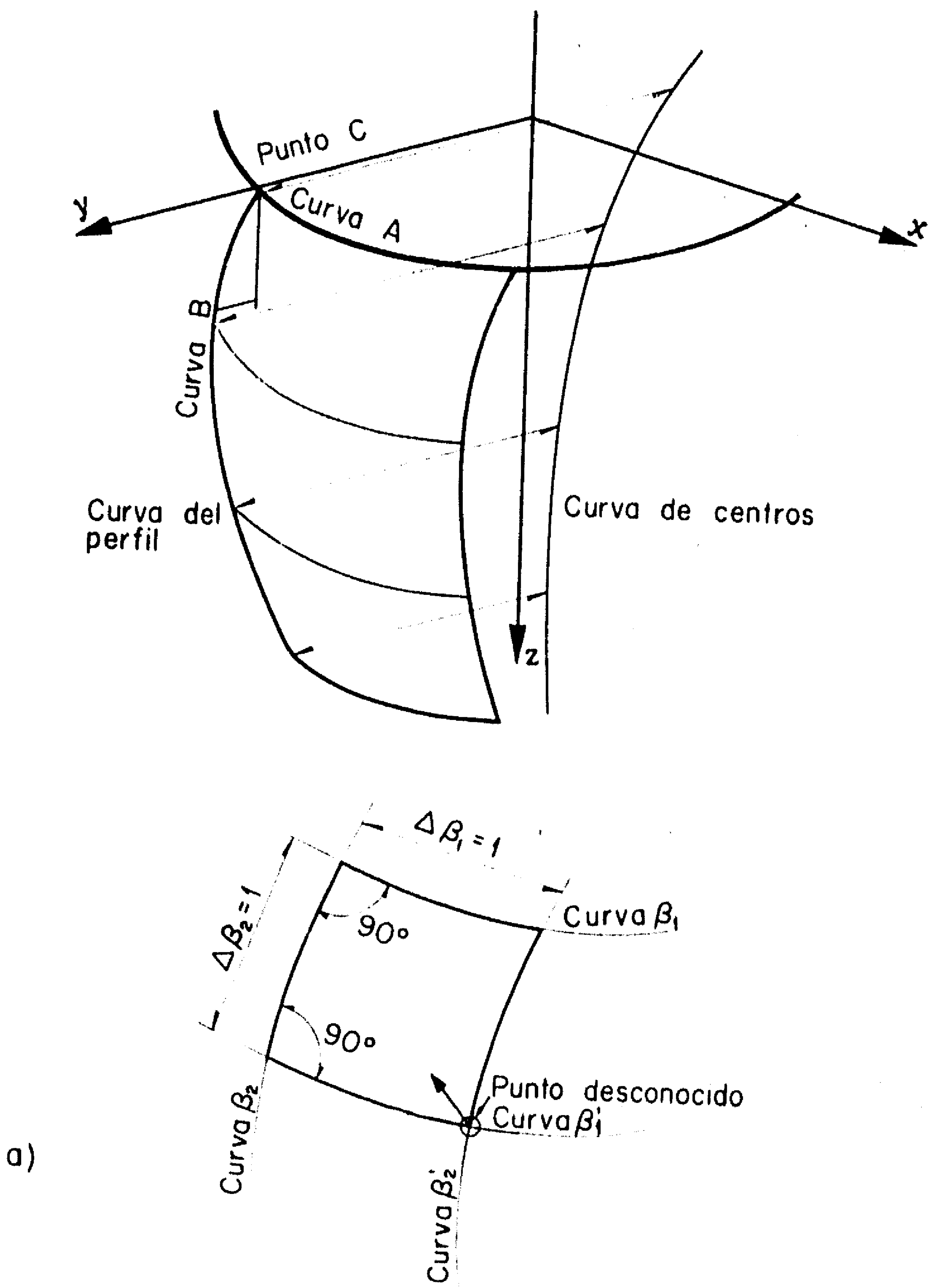
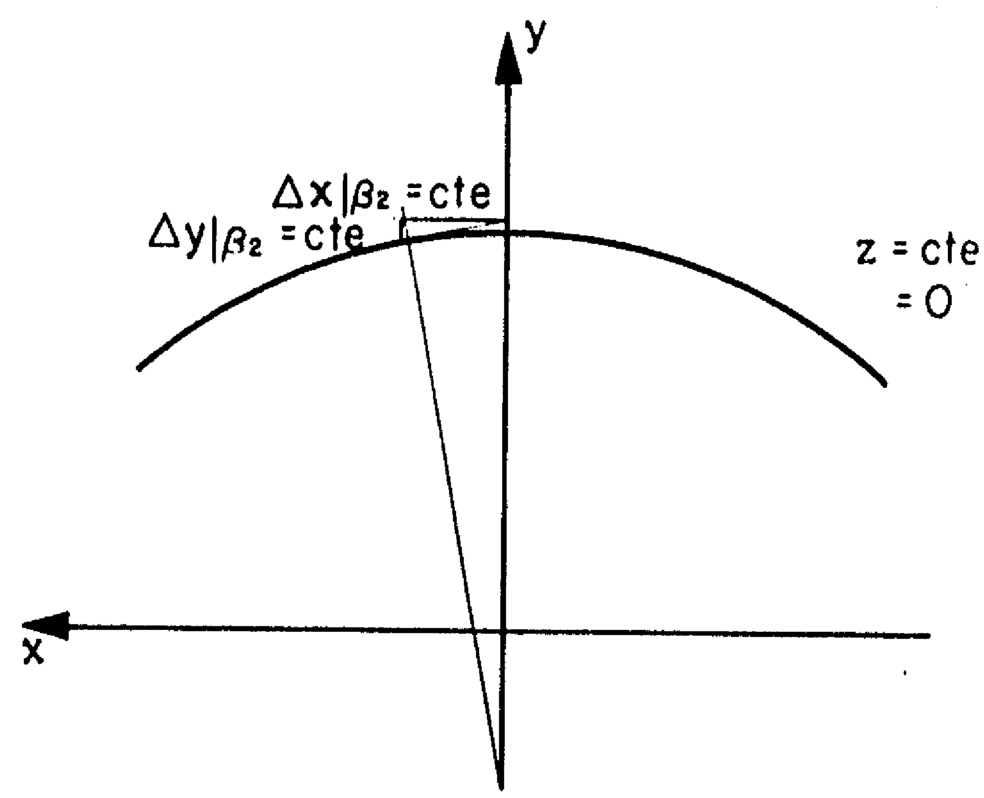


FIG. 6.7

b)



Varía solamente β_1

c)

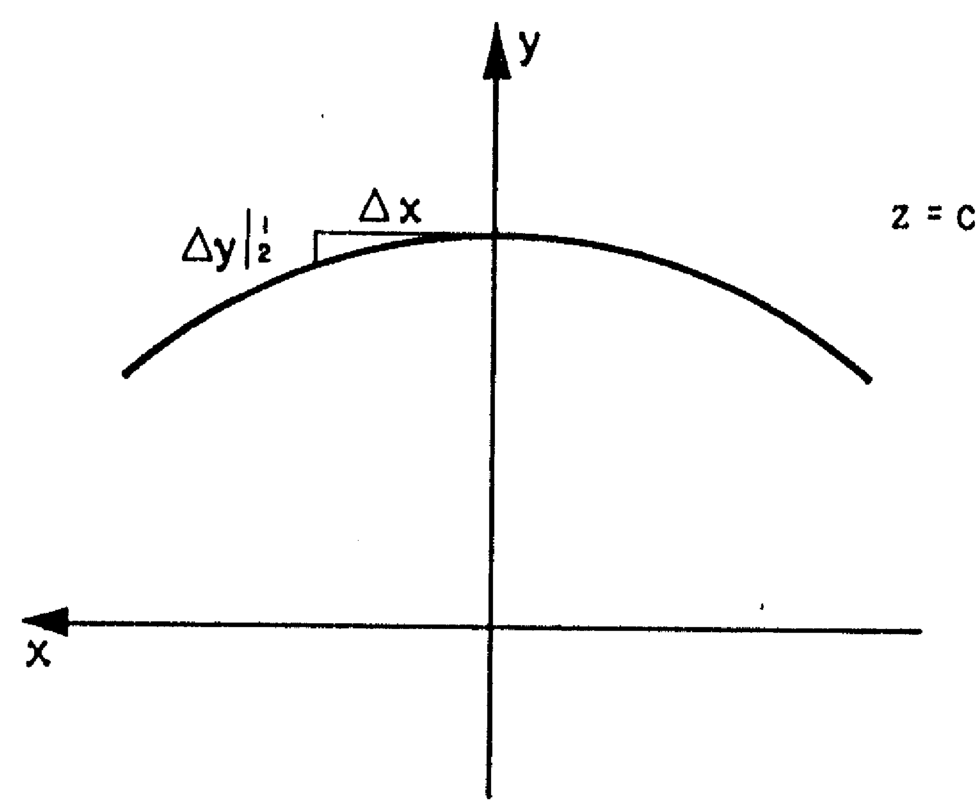
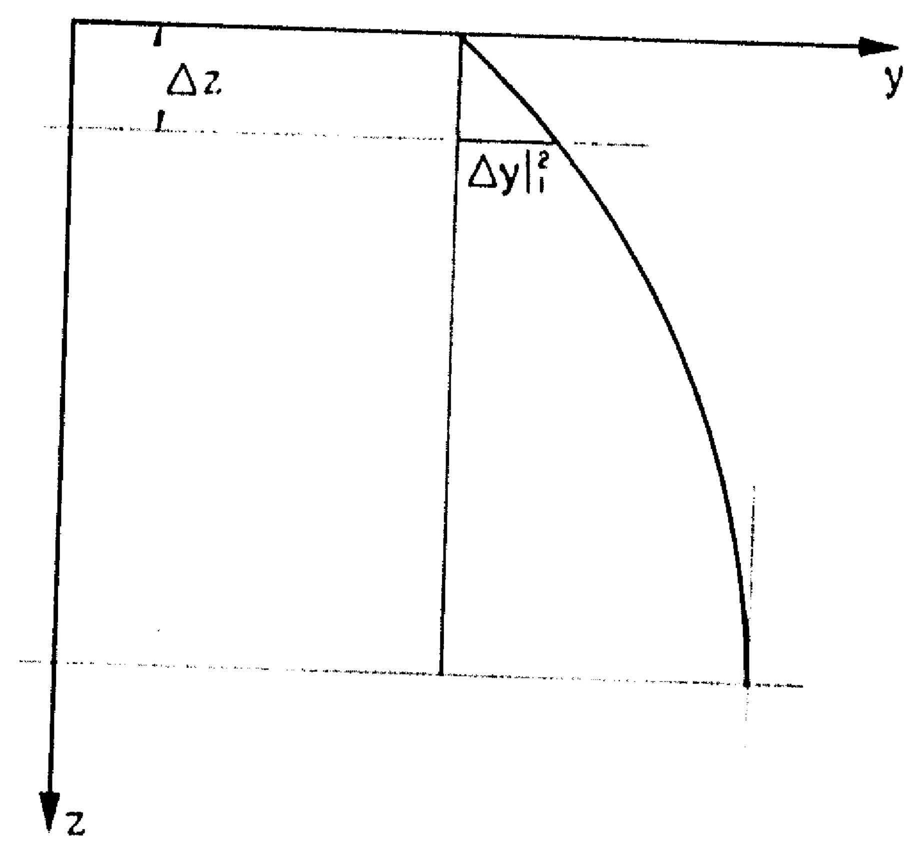


FIG. 6.7

d)



Varía solamente β_2

e)

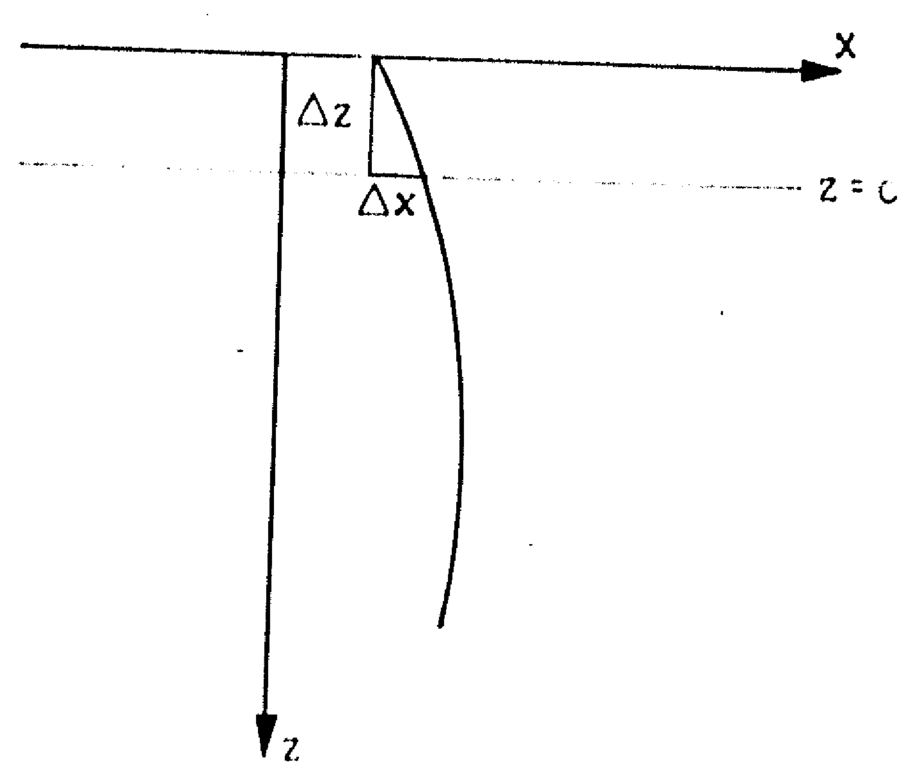


FIG. 6.7

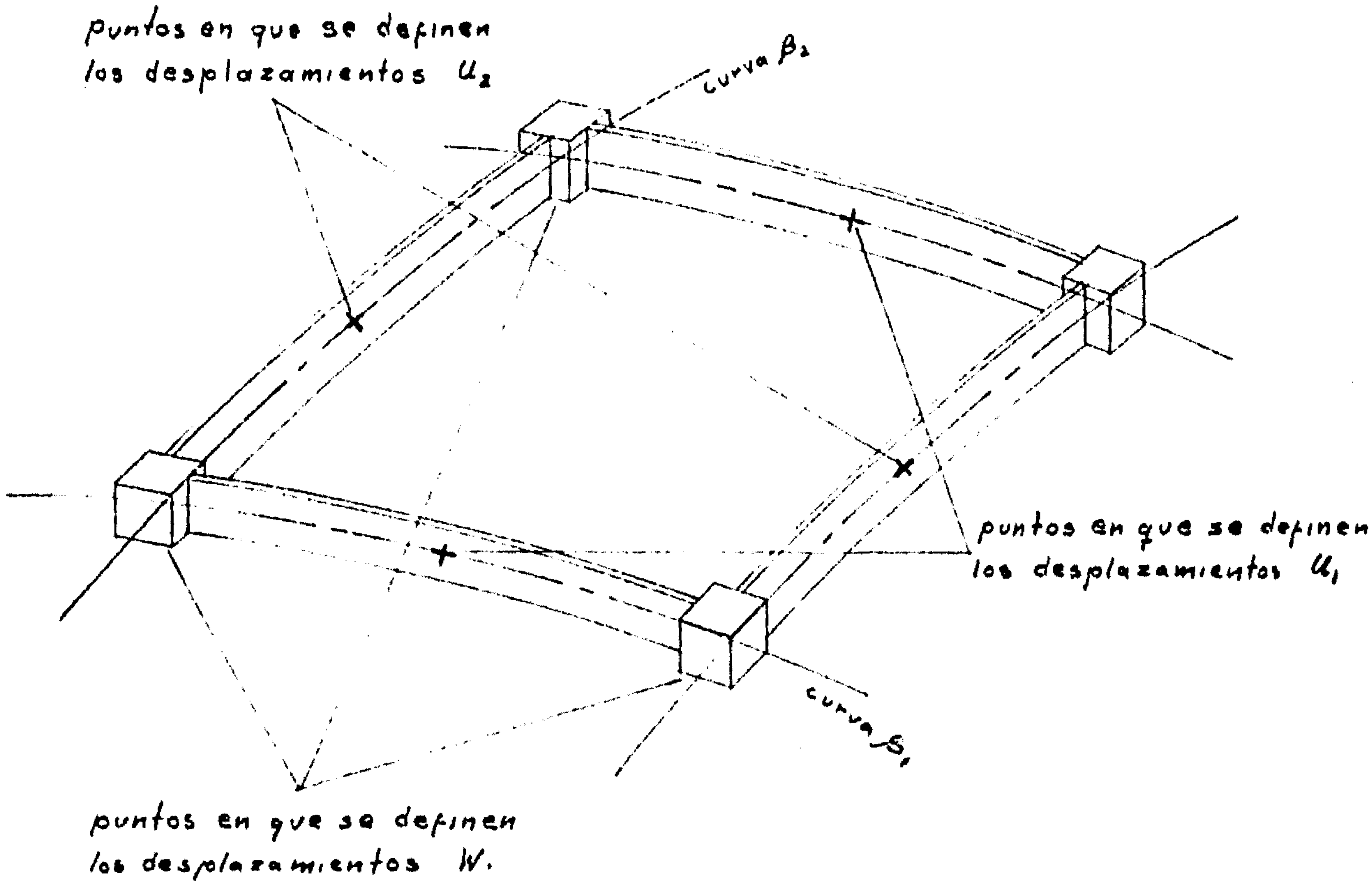
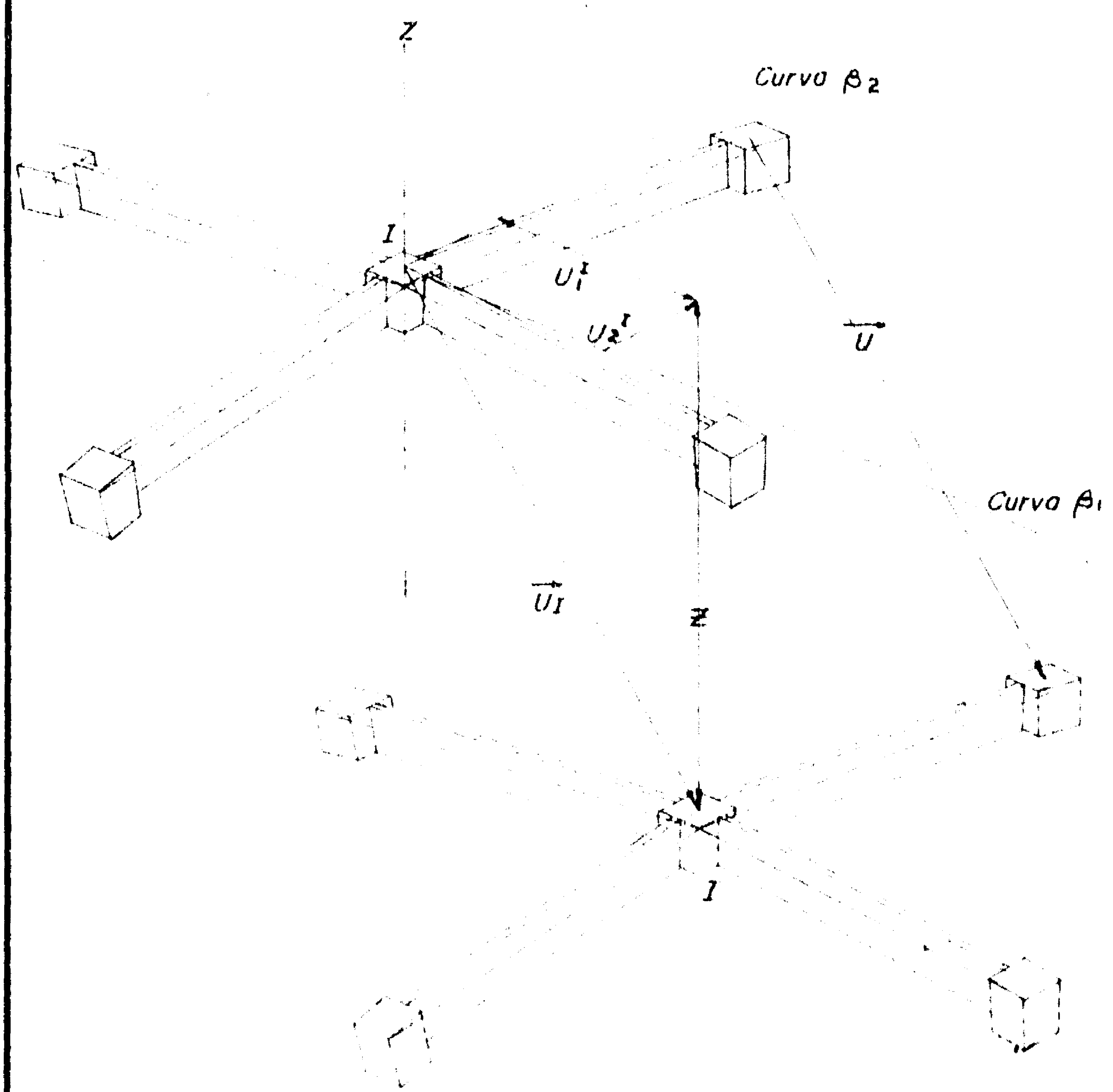
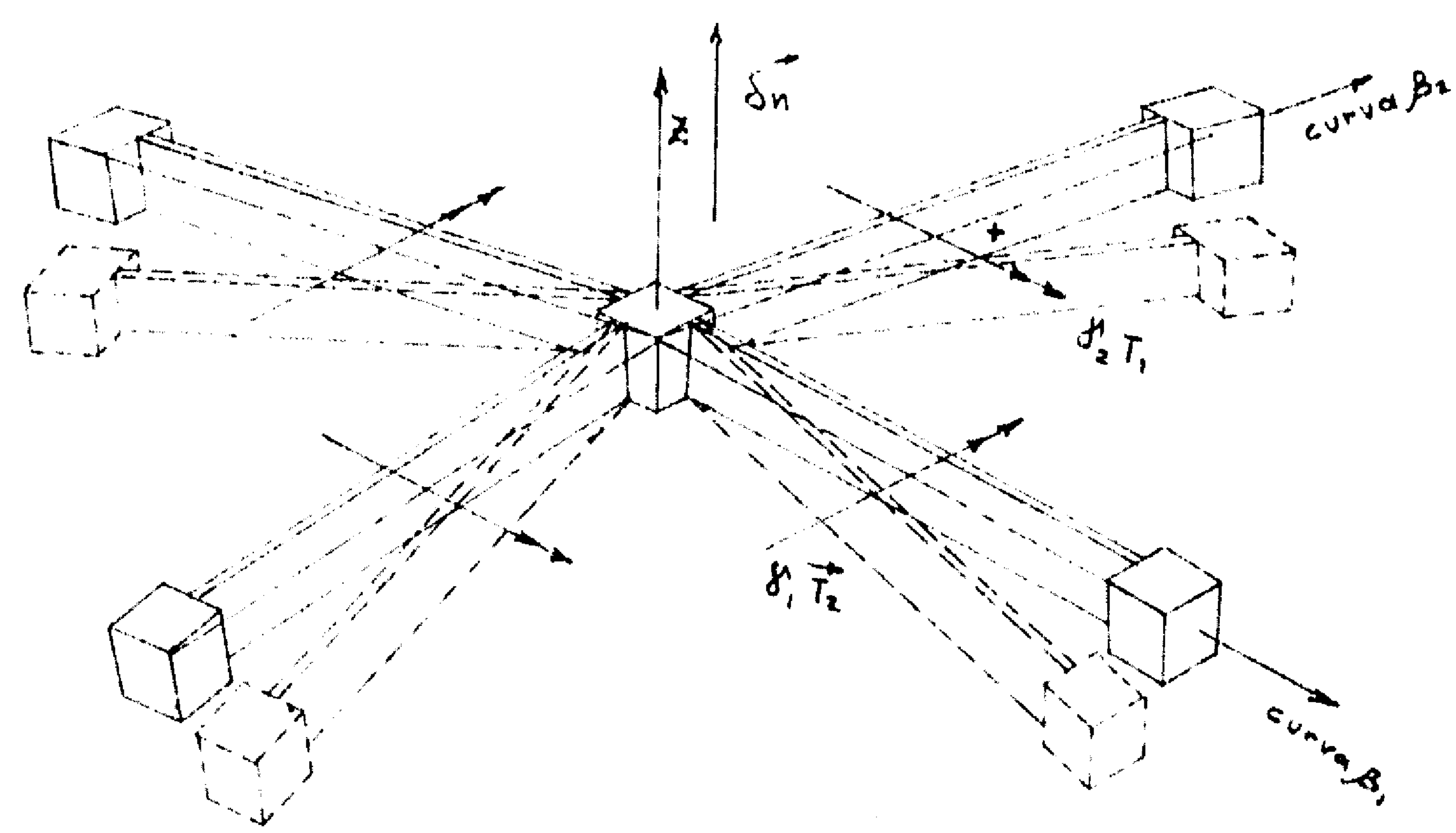


Fig 6.8 Definición de desplazamientos



69(a) MODELO DE DEFORMACION.— DESPLAZAMIENTOS



6.9 (b) MODELO DE DEFORMACION - ROTACIONES.

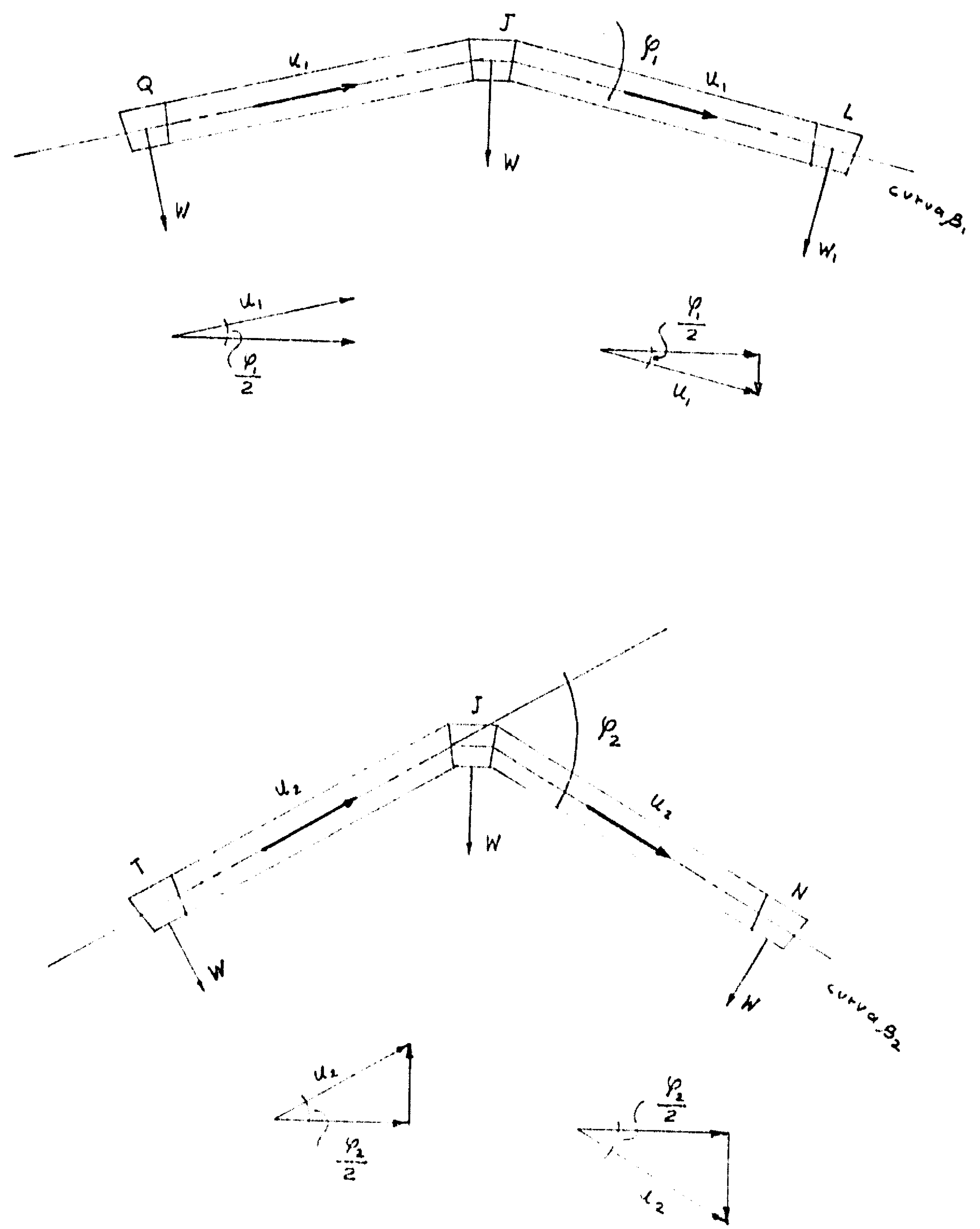


fig 6.10 Deformaciones e_1^J, e_2^J

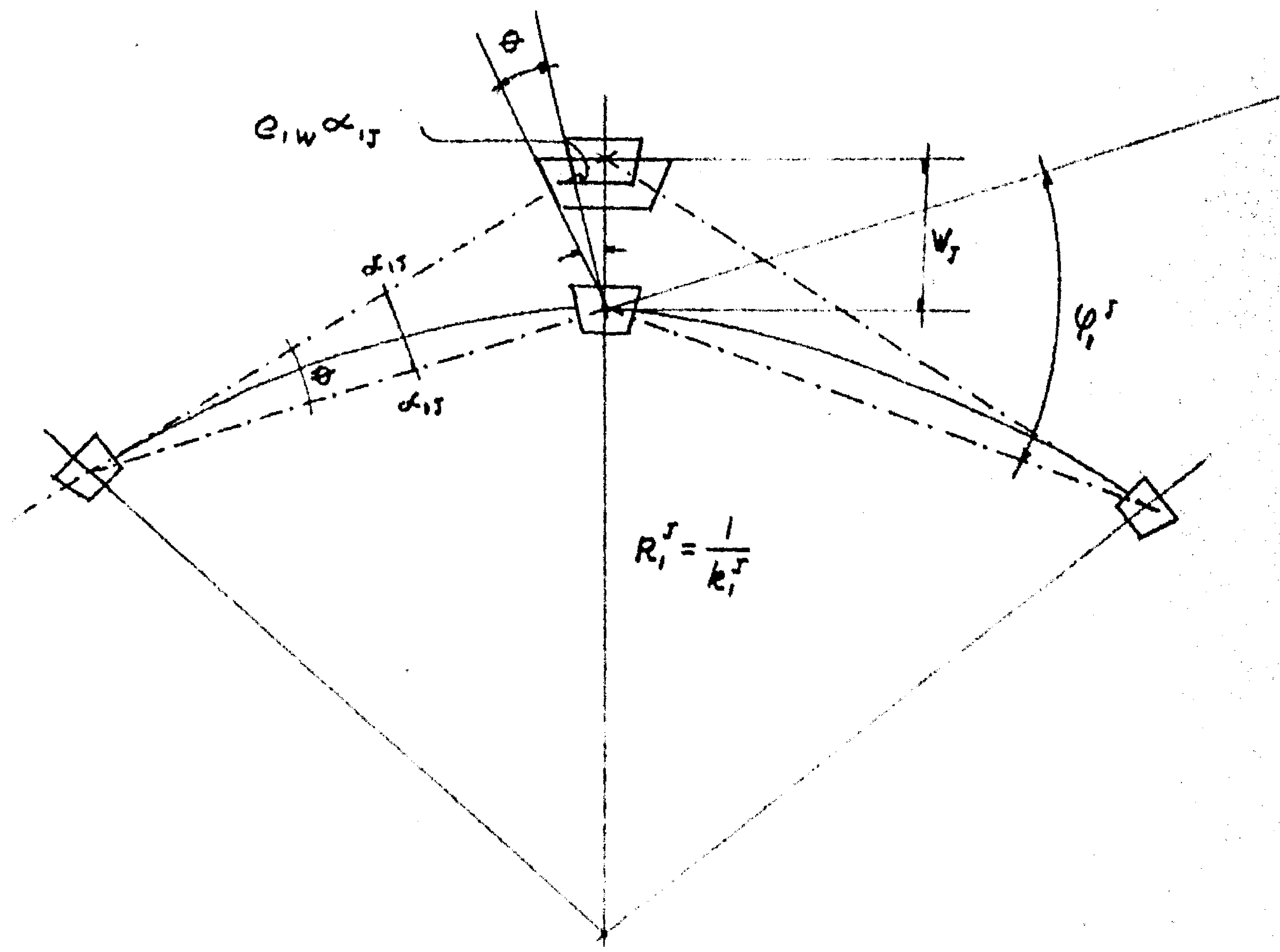


Fig 6.11(a) DEFORMACION e_1, DEBIDA A W^J Y A R_1^J

$$\theta = \frac{W_J}{\alpha_{1J}} \quad c_1^J$$

por relación de triangulos

$$\frac{e_{1w}\alpha_{1J}}{W} = \frac{\alpha_{1J}}{R_1^J} \quad \therefore \quad e_{1w} = W k_1^J$$

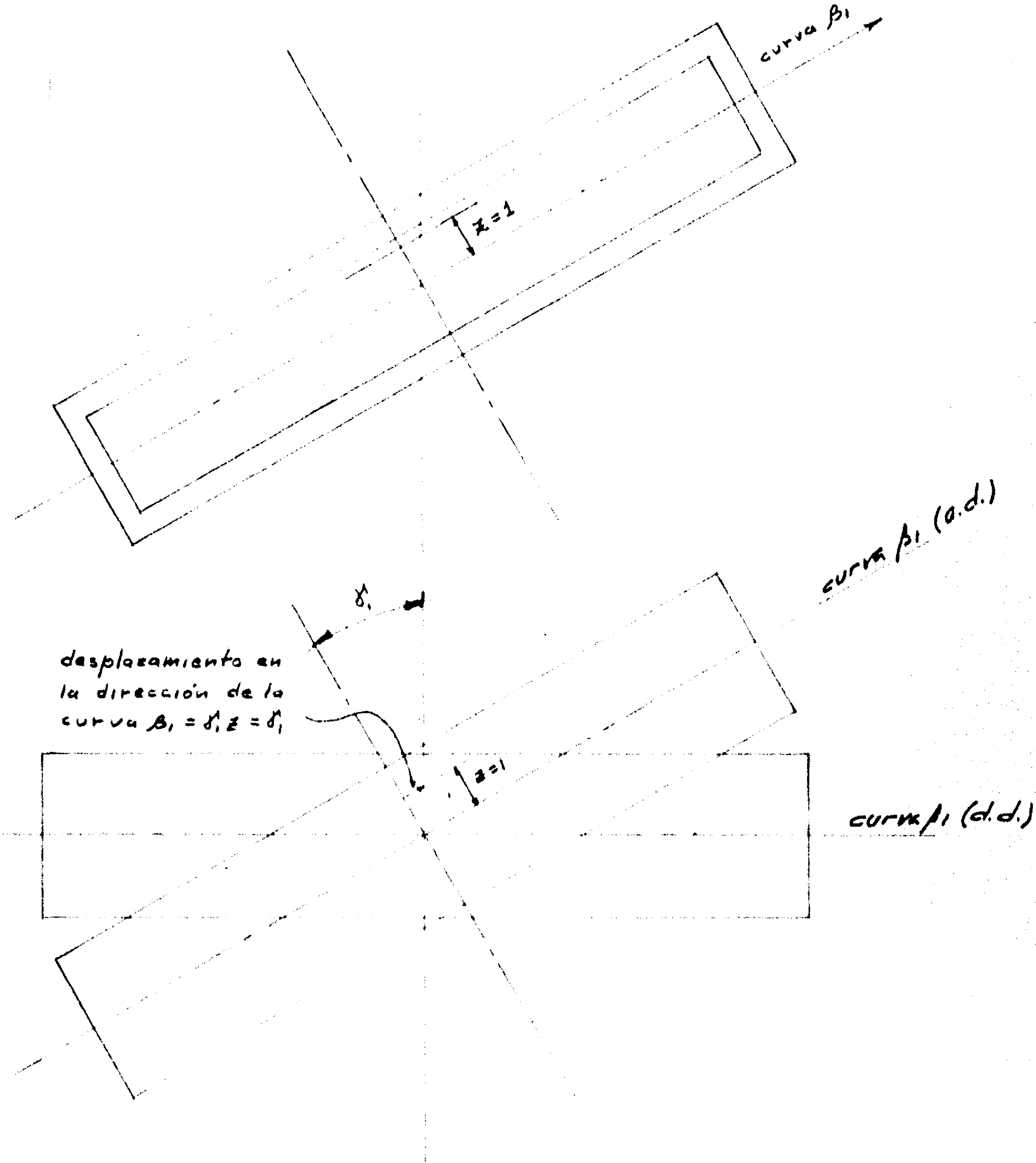


fig 6.11(b) DESPLAZAMIENTOS A LA DISTANCIA $z=1$, DEBIDOS A LAS ROTACIONES γ_1 Y γ_2.

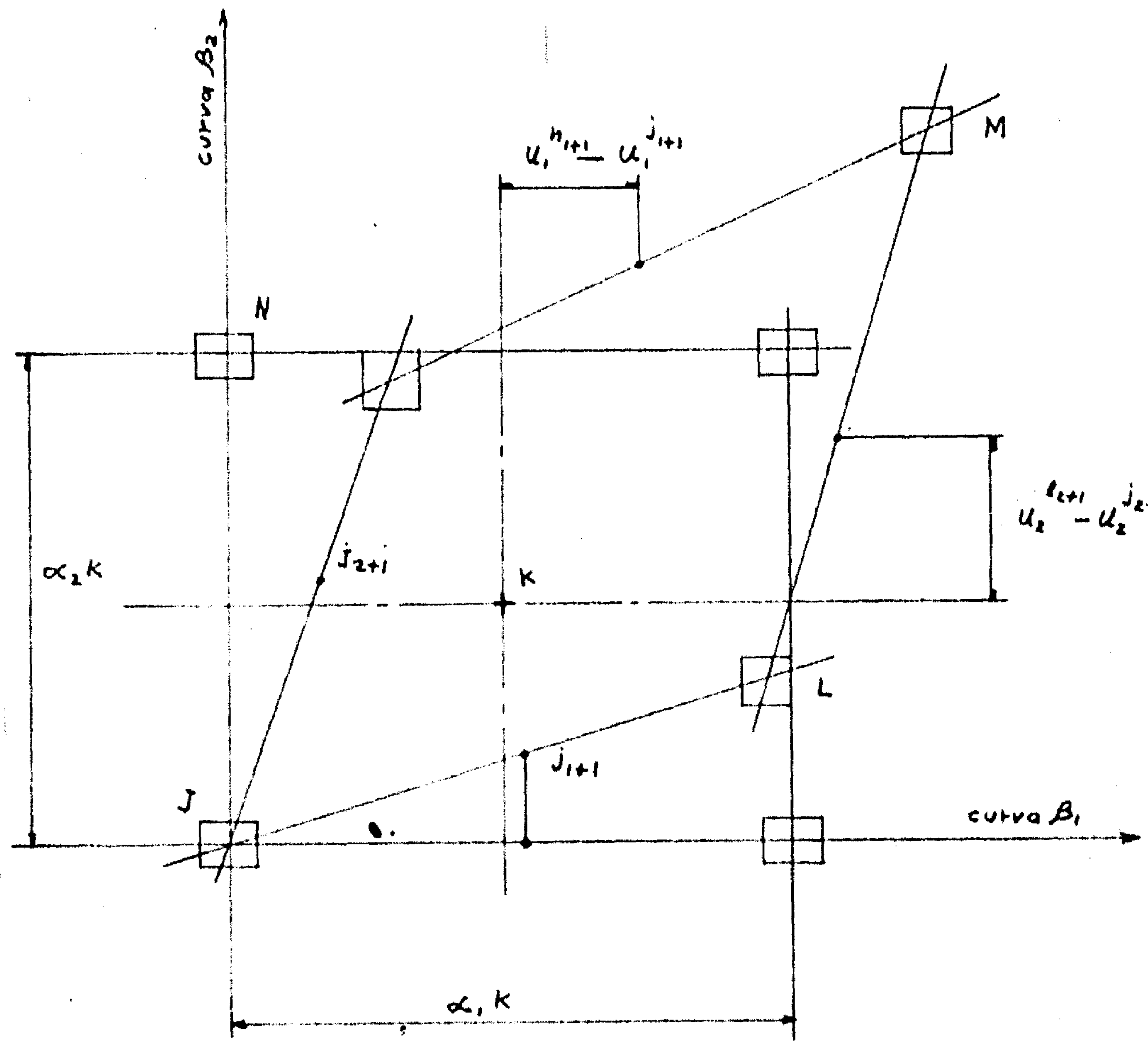
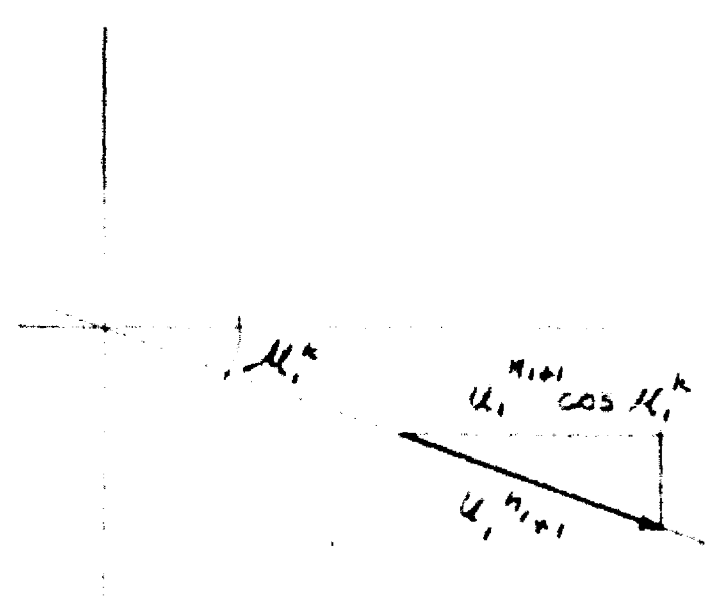

curva β_2
$u_1^{n_{i+1}} - u_1^{j_{i+1}}$
M
N
$u_2^{l_{2+1}} - u_2^{j_{2+1}}$
$\alpha_2 k$
j_{2+1}
K
L
j_{1+1}
J
curva β_1
$\alpha_1 k$

Fig. 6.12


μ_1^k
$u_1^{n_{i+1}} \cos \mu_1^k$
$u_1^{n_{i+1}}$

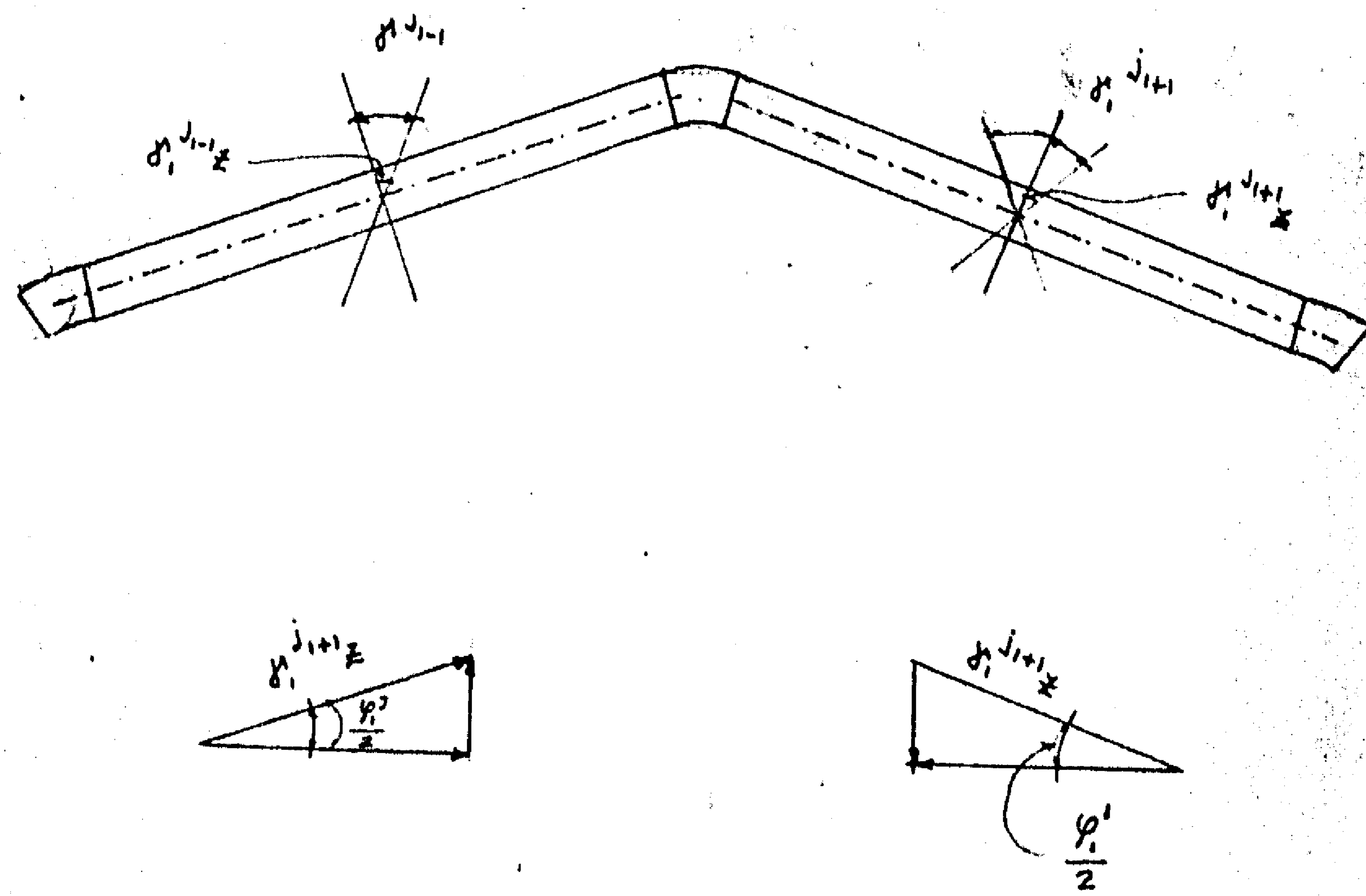
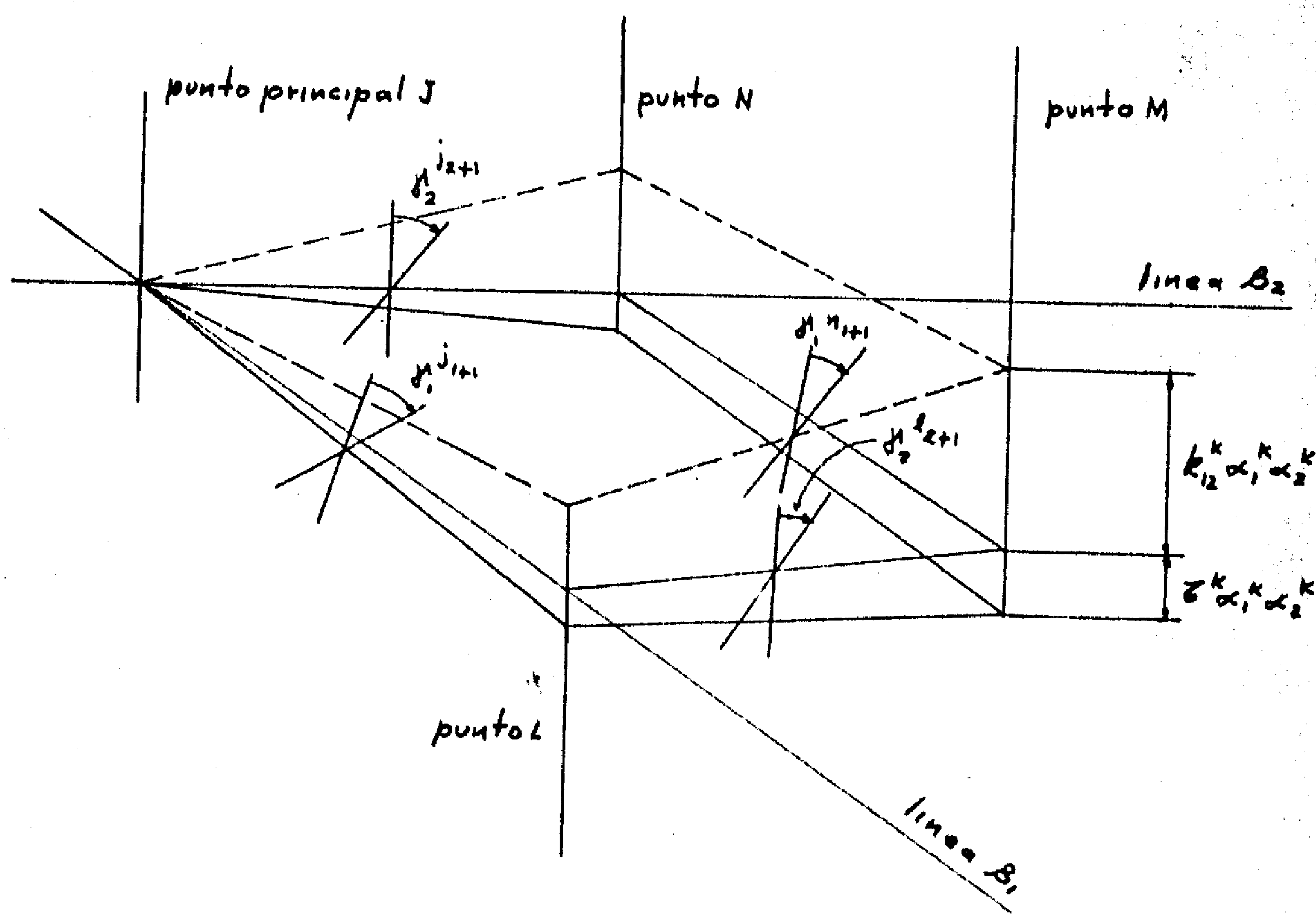


Fig. 6.13



punto principal J
punto N
punto M
linea B_2
linea B_1
punto L
$k_{12}^k \alpha_1^k \alpha_2^k$
$z^k \alpha_1^k \alpha_2^k$

Fig. 6.14

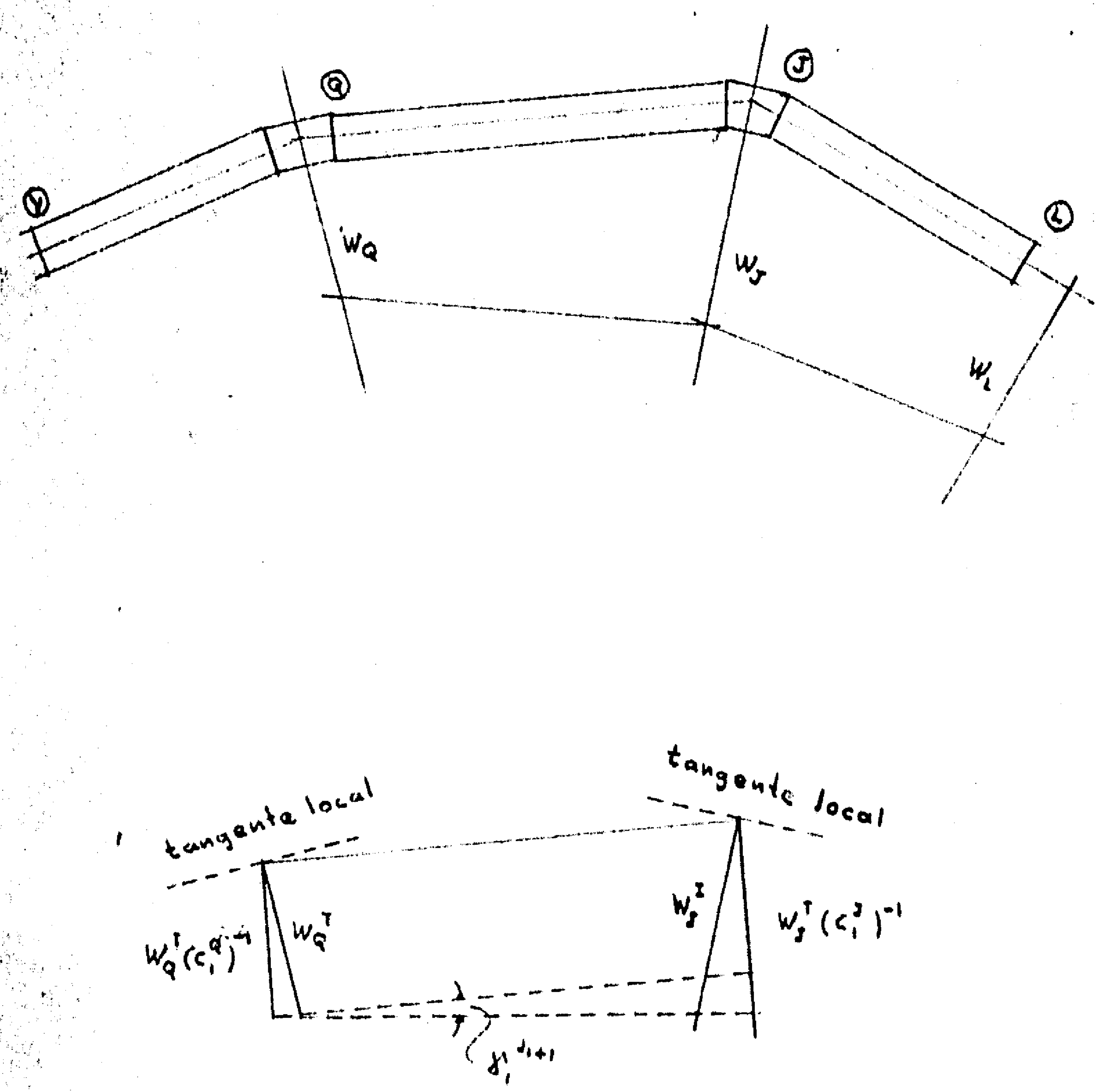


Fig. 6.15

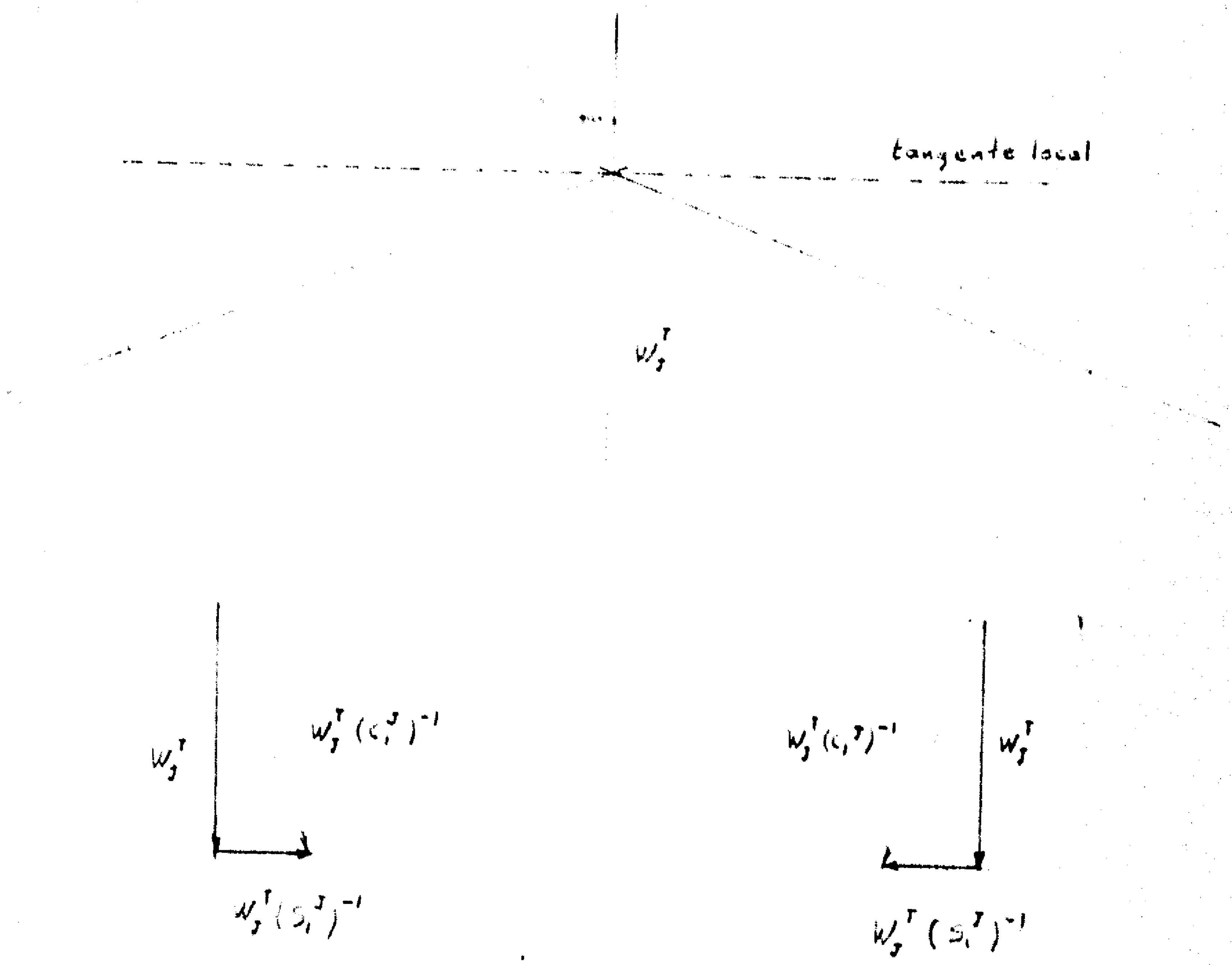

tangente local
W_J^T
W_J^T
$W_J^T(c_1^T)^{-1}$
$W_J^T(s_1^T)^{-1}$
$W_J^T(c_1^T)^{-1}$
W_J^T
$W_J^T(s_1^T)^{-1}$

Fig 6.16

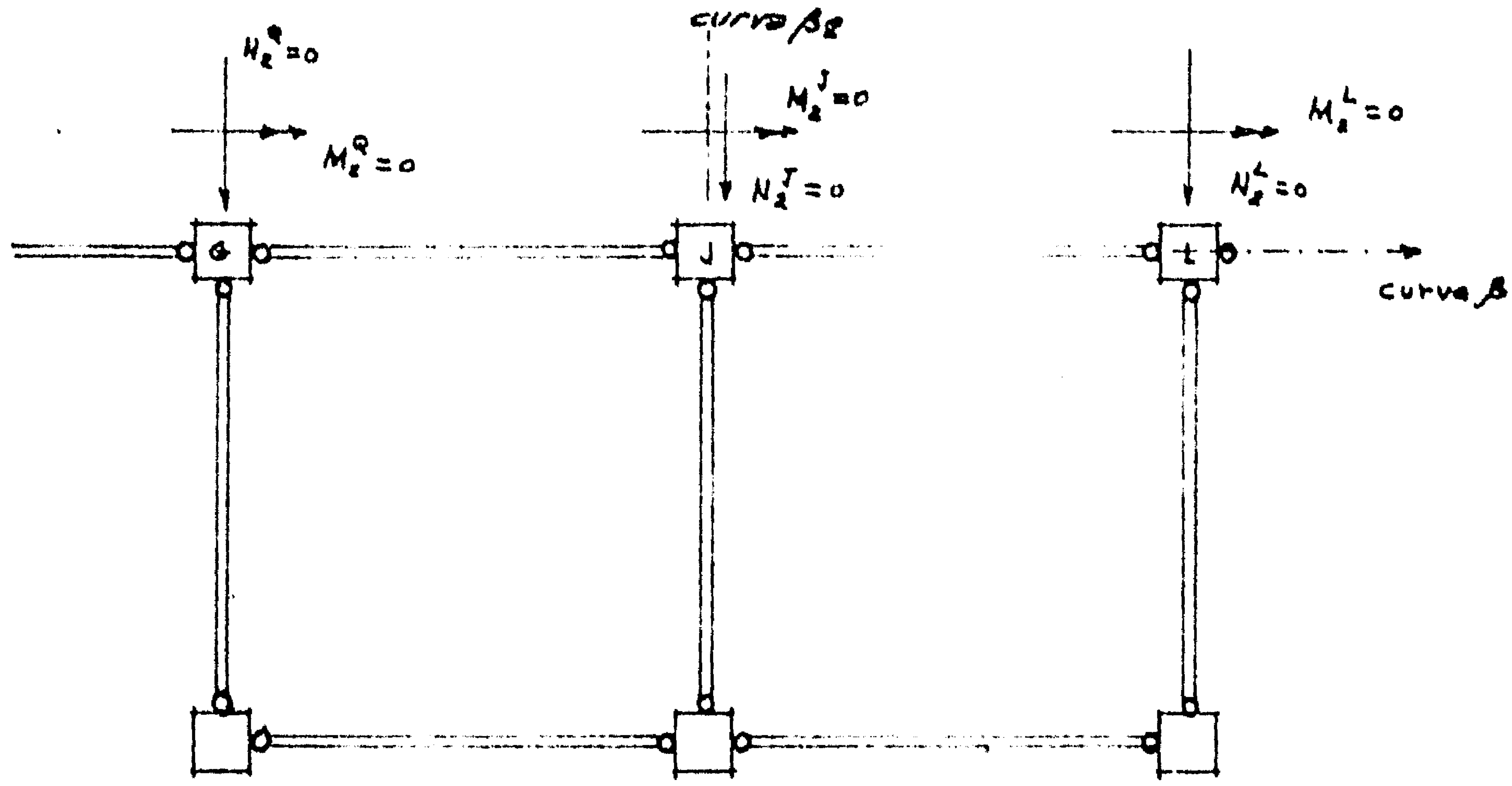


fig 6.21–EQUILIBRIO EN EL BORDE LIBRE

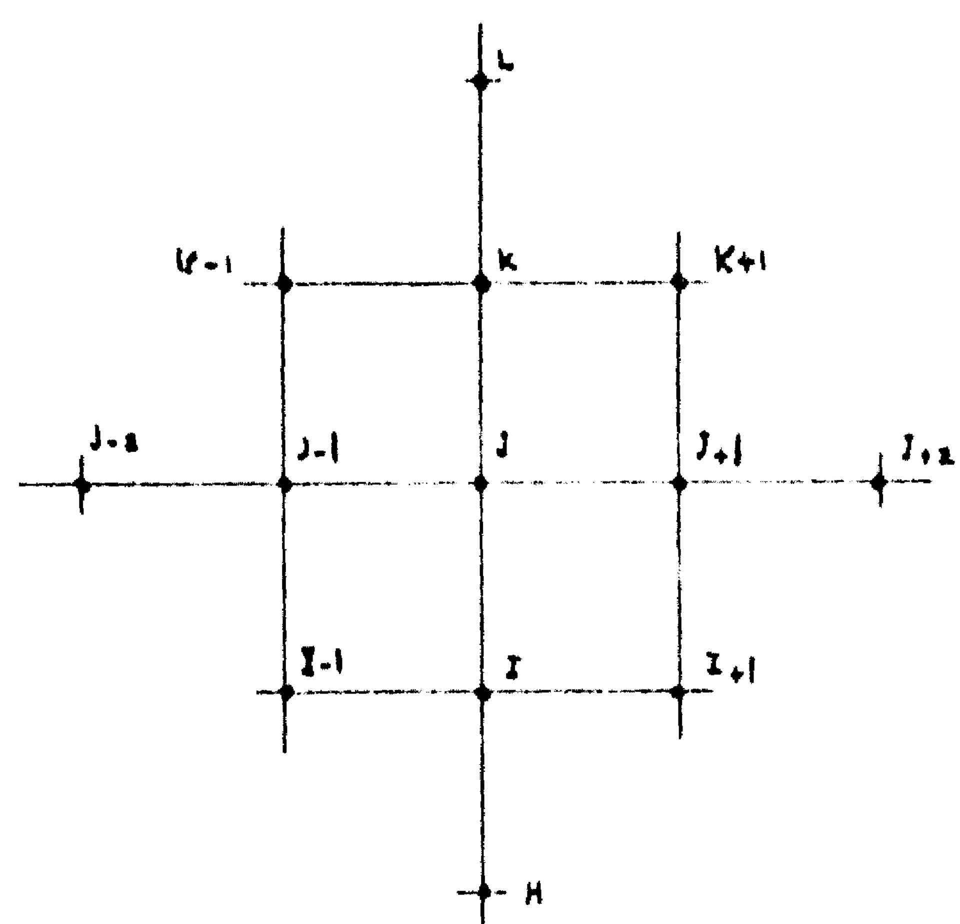
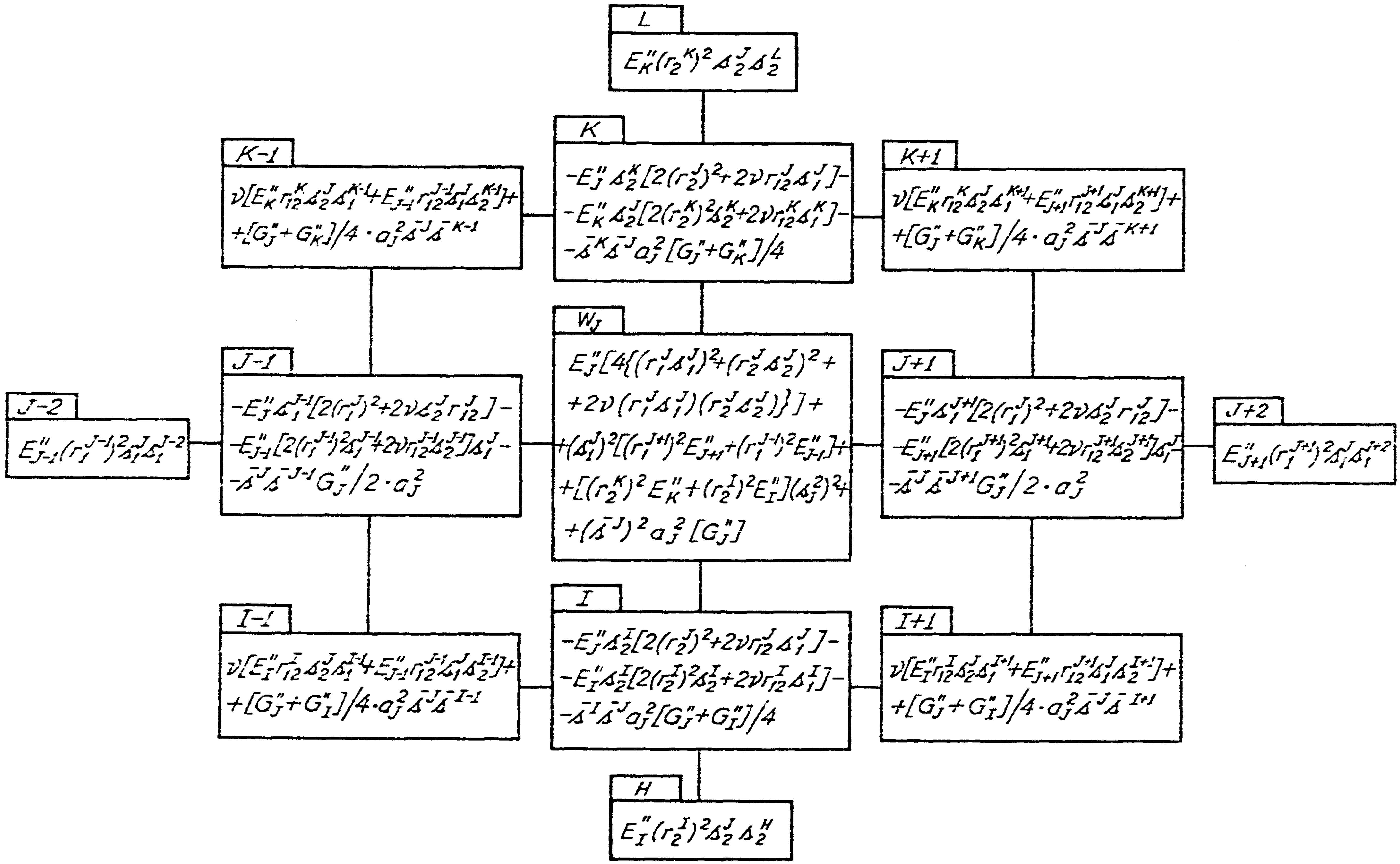
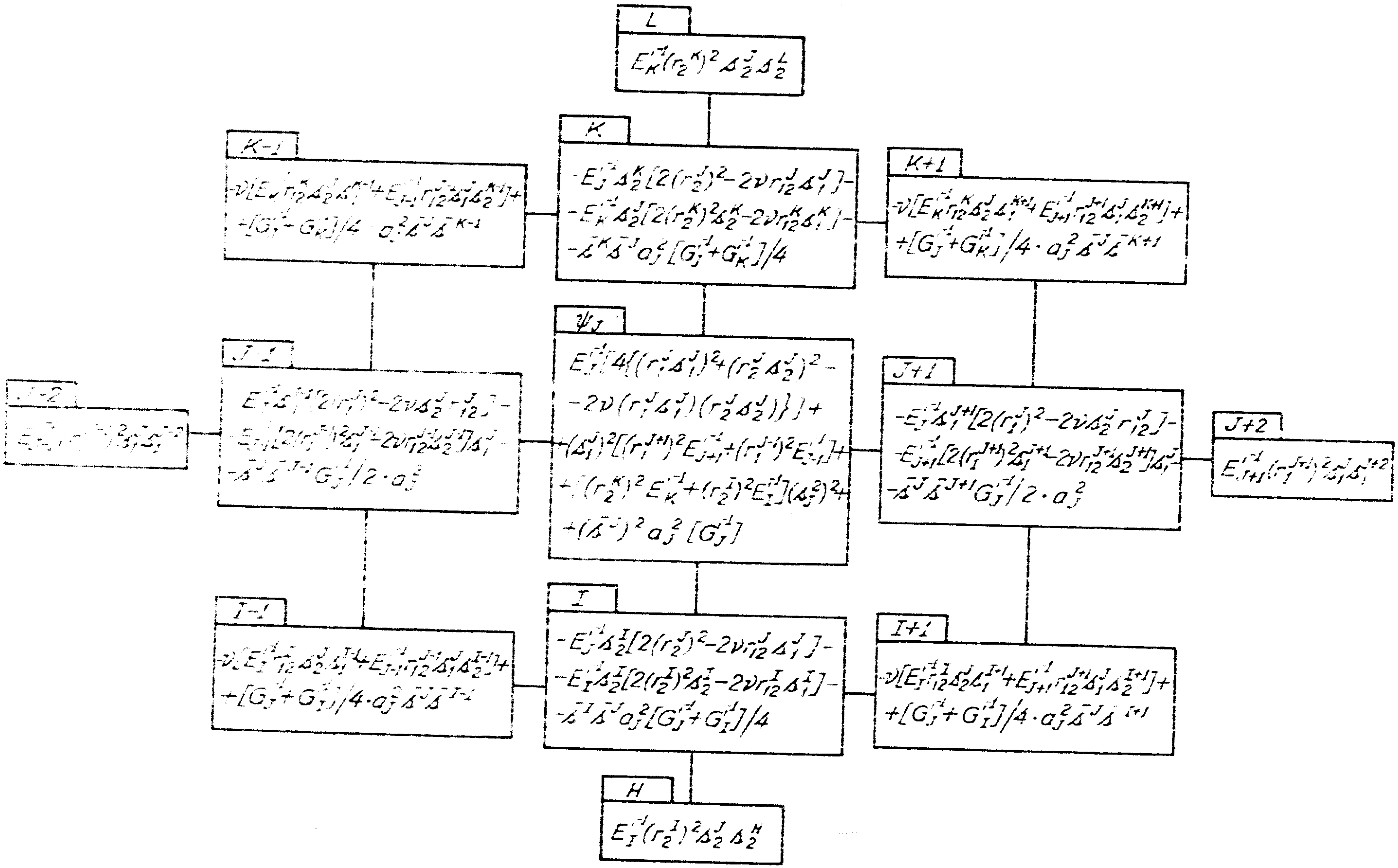


fig6.22 ... ACION DE LOS PUNTOS DE LA MALLA PARA LAS VARIABLES W y ψ.



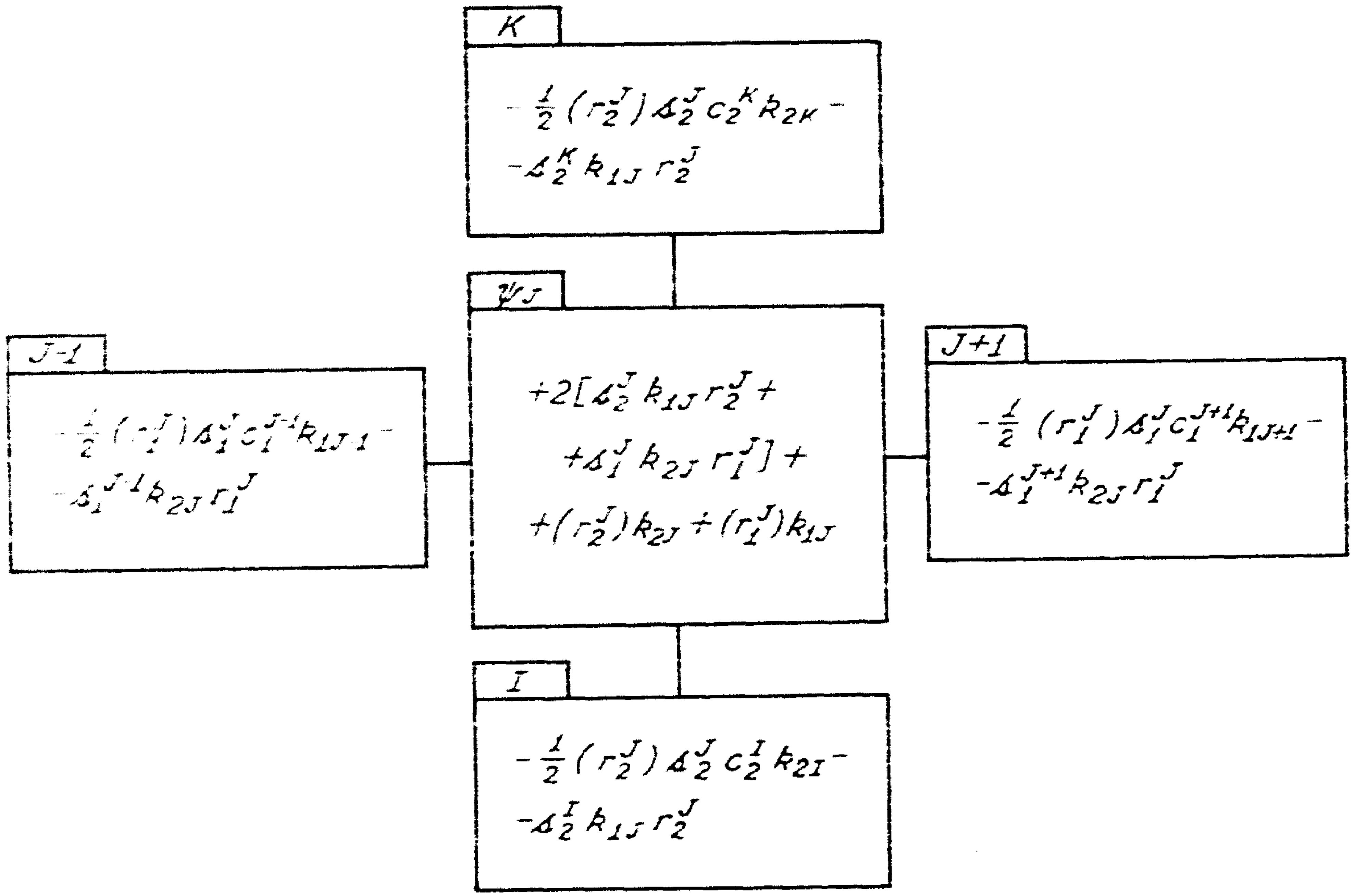
TERMINO PRINCIPAL DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO

FIG. 6.27



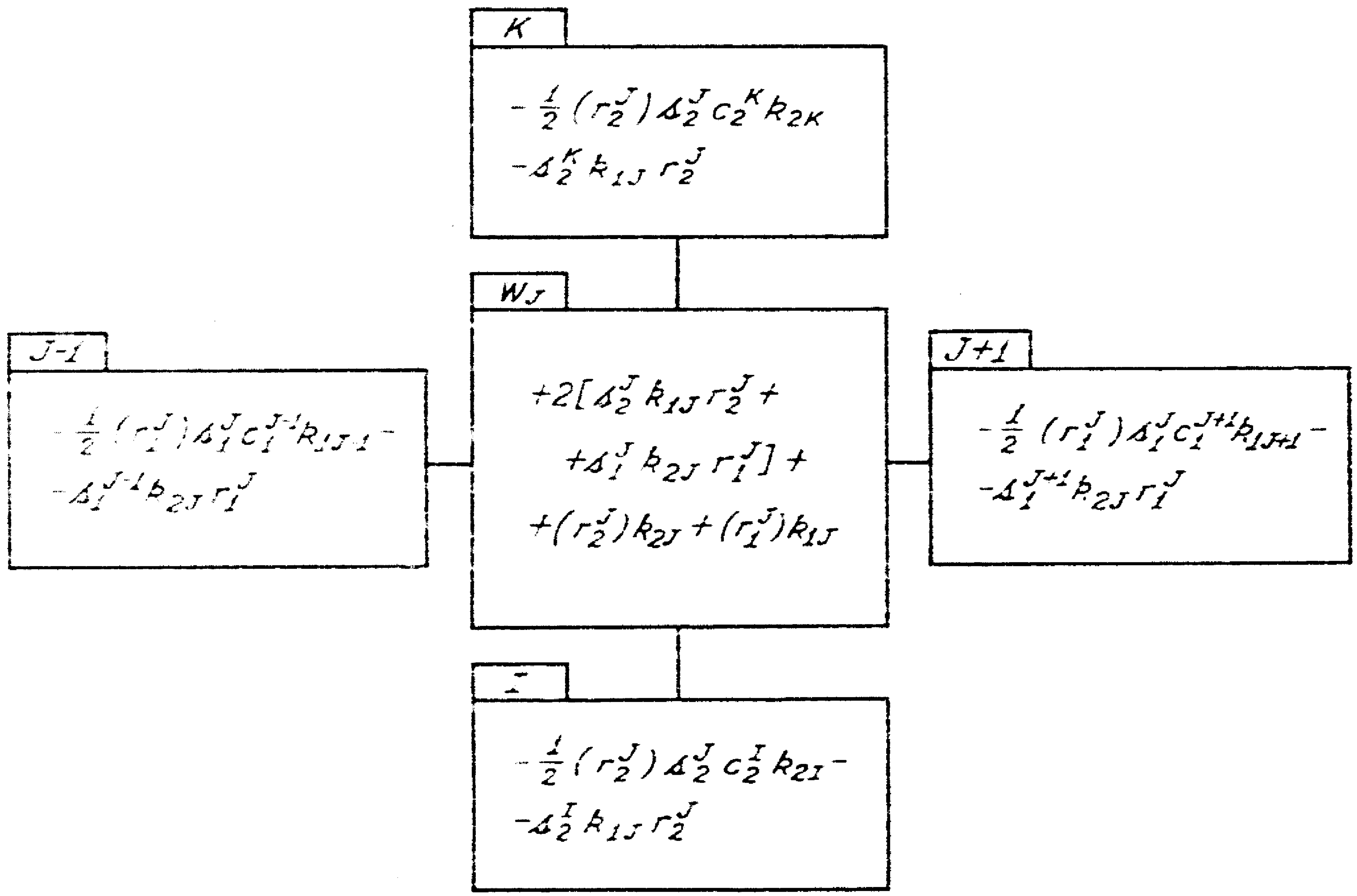
TERMINO PRINCIPAL DE LA ECUACION DE COMPATIBILIDAD

FIG. 6.28



TERMINO DE INTERACCION DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO

FIG. 6.29 a



TERMINO DE INTERACCION DE LA ECUACION DE COMPATIBILIDAD

FIG. 6.29b

DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN LAS VARIABLES u_1, u_2, W CORRESPONDIENTES A LA SECCION 6.8 (VER TAMBIEN 6.5b).

ORGANIZACION:

1).- Ecuaciones de Equilibrio en un punto general

a).- En la direccion Normal

b).- En la direccion β_1

c).- En la direccion β_2

2).- Ecuaciones de equilibrio en el borde libre

a).- En la direccion Normal

b).- En la direccion β_1

Ecuacion de Equilibrio en la Dirección Normal

$$W_J \left\{ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{4t_J^3}{\alpha_1^{J4}} + \frac{4\nu t_J^3}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + \frac{t_L^3}{\alpha_1^{J4}} + \frac{4t_J^3}{\alpha_2^{J4}} + \frac{4\nu t_J^3}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + \frac{2(1-\nu)t_K^3}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + \frac{t_N^3}{\alpha_2^{J4}} + \frac{2t_O^3(1-\nu)}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2(1-\nu)t_R^3}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + \frac{t_Q^3}{\alpha_1^{J4}} + \frac{2(1-\nu)t_U^3}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} \right] \right\}$$

$$W_L \left\{ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)} \left[t_J^3\left(-\frac{2}{\alpha_1^{J4}} - \frac{2\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}}\right) - 2(1-\nu)t_K^3\frac{1}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} - \frac{2}{\alpha_1^{J4}}t_L^3 - \frac{2\nu}{\alpha_2^{J2}\alpha_1^{J2}}t_L^3 - t_U^3\frac{2(1-\nu)}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} \right] \right\}$$

$$W_Q \left\{ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)} \left(t_J^3\left(-\frac{2}{\alpha_1^{J4}} - \frac{2\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}}\right) - \frac{2(1-\nu)}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}}\left(t_U^3 + t_R^3\right) - t_Q^3\left(-\frac{2}{\alpha_1^{J4}} - \frac{2\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}}\right) \right) \right\}$$

$$W_M \left\{ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)} \left[t_J^3\left(-\frac{2}{\alpha_2^{J4}} - \frac{2\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}}\right) - t_K^3\frac{2(1-\nu)}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} - t_N^3\left(\frac{2}{\alpha_2^{J4}} + \frac{2\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}}\right) - t_O^3\frac{2(1-\nu)}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} \right] \right\}$$

$$W_T \left\{ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)} \left[t_J^3\left(-\frac{2}{\alpha_2^{J4}} - \frac{2\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}}\right) - t_R^3\frac{2(1-\nu)}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} - t_U^3\frac{2(1-\nu)}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} - t_T^3\left(\frac{2}{\alpha_2^{J4}} + \frac{2\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}}\right) \right] \right\}$$

$$W_K \left\{ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)} \left[t_K^3\frac{2(1-\nu)}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + t_N^3\frac{\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + t_L^3\frac{\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} \right] \right\}$$

$$W_P \left\{ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)} \left[t_O^3\frac{2(1-\nu)}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + t_N^3\frac{\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + t_Q^3\frac{\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} \right] \right\}$$

$$W_X \left\{ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{t_N^3}{\alpha_2^{J4}} \right] \right\}$$

$$W_W \left\{ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{t_L^3}{\alpha_1^{J4}} \right] \right\}$$

$$W_V \left\{ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)} \left[t_L^3\frac{\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + t_U^3\frac{2(1-\nu)}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} + t^3\frac{\nu}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^{J2}} \right] \right\}$$

$$W_\theta \left\{ \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[t_R^3 \frac{2(1-\nu)}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^{j2}} + t_\theta^3 \frac{\nu}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^{j2}} + t_T^3 \frac{\nu}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^{j2}} \right] \right\}$$

$$W_Y \left\{ \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{t_Q^3}{\alpha_1^{j4}} \right] \right\}$$

$$W_Z \left\{ \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{t_T^3}{\alpha_2^{j4}} \right] \right\}$$

$$U_1^{j,i+1} \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[t_J^3 \left(-\frac{2k_1^J}{\alpha_1^{j3}} - \frac{2\nu k_1^J}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} \right) + t_K^3 \frac{2(1-\nu)k_1^K}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} - t_L^3 \frac{k_1^L}{\alpha_1^{j3}} + t_U^3 \frac{2(1-\nu)k_1^U}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} \right]$$

$$U_1^{j,i-1} \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[t_J^3 \left(\frac{2k_1^J}{\alpha_1^{j3}} + \frac{2\nu k_1^J}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} \right) - t_O^3 \frac{2(1-\nu)k_1^O}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} - t_R^3 \frac{2(1-\nu)k_1^R}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} + t_Q^3 \frac{k_1^Q}{\alpha_1^{j3}} \right]$$

$$U_1^{h,i+1} \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[-t_K^3 \frac{2(1-\nu)k_1^K}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} + t_N^3 \frac{\nu k_1^N}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} \right]$$

$$U_1^{h,i-1} \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[t_O^3 \frac{2(1-\nu)k_1^O}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} - t_N^3 \frac{\nu k_1^N}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} \right]$$

$$U_1^{l,i} \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[t_L^3 \frac{k_1^L}{\alpha_1^{j3}} \right]$$

$$U_1^{t,i+1} \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[-t_U^3 \frac{2(1-\nu)k_1^U}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} + t_T^3 \frac{\nu k_1^T}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} \right]$$

$$U_1^{t,i-1} \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[t_R^3 \frac{2(1-\nu)k_1^R}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} - t_T^3 \frac{\nu k_1^T}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}} \right]$$

$$U_1^{q,i} \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)} \left[-t_Q^3 \frac{k_1^Q}{\alpha_1^{j3}} \right]$$

$$U_2^{j_2+1} \quad \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3\left(-\frac{2k_2^J}{\alpha_2^{j3}} - \frac{2\nu k_2^J}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j}\right) + t_K^3 \frac{2(1-\nu)k_2^K}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j} - t_N^3\frac{k_2^N}{\alpha_2^{j3}} + t_O^3\frac{2(1-\nu)k_2^O}{\alpha_2^j\alpha_1^{j2}}\right]$$

$$U_2^{j_2-1} \quad \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3\left(\frac{2k_2^J}{\alpha_2^{j3}} + \frac{2\nu k_2^J}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j}\right) - t_R^3 \frac{2(1-\nu)k_2^R}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j} - t_U^3\frac{2(1-\nu)k_2^U}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j} + t_T^3\frac{k_2^T}{\alpha_2^{j3}}\right]$$

$$U_2^{l_2+1} \quad \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)}\left[t_K^3 \frac{2(1-\nu)k_2^K}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j} + t_L^3\frac{\nu k_2^L}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j}\right]$$

$$U_2^{n_2} \quad \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)}\left[t_N^3 \frac{k_2^N}{\alpha_2^{j3}}\right]$$

$$U_2^{k_2+1} \quad \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)}\left[-t_O^3\frac{2(1-\nu)k_2^O}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j} + t_Q^3\frac{\nu k_2^Q}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j}\right]$$

$$U_2^{l_2-1} \quad \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)}\left[-t_L^3\frac{\nu k_2^L}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j} + t_U^3 \frac{2(1-\nu)k_2^U}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j}\right]$$

$$U_2^{q_2-1} \quad \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)}\left[t_R^3 \frac{2(1-\nu)k_2^R}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j} - t_Q^3\frac{\nu k_2^Q}{\alpha_1^{j2}\alpha_2^j}\right]$$

$$U_2^{t_2} \quad \frac{E\alpha_1^j\alpha_2^j}{12(1-\nu^2)}\left[-t_T^3\frac{k_2^T}{\alpha_2^{j3}}\right]$$

Ecuación de Equilibrio en la Dirección β_1

$$U_1^{J,I+1}\ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[t_J\frac{2}{\alpha_1^{J^2}} + t_K\frac{(1-\nu)}{\alpha_2^{J^2}} + t_L\frac{2}{\alpha_1^{J^2}} + t_U\frac{1-\nu}{\alpha_2^{J^2}}\right] + \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3\frac{k_1^{J^2}}{\alpha_1^{J^2}} + t_K^3\frac{2(1-\nu)k_1^{K^2}}{\alpha_2^{J^2}} + t_L^3\frac{k_1^{L^2}}{\alpha_1^{J^2}} + t_U^3\frac{2(1-\nu)k_1^{U^2}}{\alpha_2^{J^2}}\right]$$

$$U_1^{J,I-1}\ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_J\frac{2}{\alpha_1^{J^2}}\right] + \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_J^3\frac{k_1^{J^2}}{\alpha_1^{J^2}}\right]$$

$$U_1^{I,I}\ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_L\frac{2}{\alpha_1^{J^2}}\right] + \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_L^3\frac{k_1^{L^2}}{\alpha_1^{J^2}}\right]$$

$$U_1^{K,I+1}\ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_K\frac{1-\nu}{\alpha_2^{J^2}}\right] + \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_K^3\frac{2(1-\nu)k_1^{K^2}}{\alpha_2^{J^2}}\right]$$

$$U_1^{L,I+1}\ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_U\frac{1-\nu}{\alpha_2^{J^2}}\right] + \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_U^3\frac{2(1-\nu)k_1^{U^2}}{\alpha_2^{J^2}}\right]$$

$$U_2^{J,I+1}\ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[t_J\frac{2\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J} + t_K\frac{1-\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right] + \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3\frac{\nu k_1^J k_2^J}{\alpha_1^J\alpha_2^J} + t_K^3\frac{2(1-\nu)k_1^K k_2^K}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]$$

$$U_2^{J,I-1}\ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_J\frac{2\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J} - t_U\frac{1-\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right] + \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_J^3\frac{\nu k_1^J k_2^J}{\alpha_1^J\alpha_2^J} - t_U^3\frac{2(1-\nu)k_1^U k_2^U}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]$$

$$U_2^{J,I+1}\ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_K\frac{1-\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J} - t_L\frac{2\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right] + \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_K^3\frac{2(1-\nu)k_1^K k_2^K}{\alpha_1^J\alpha_2^J} + t_L^3\frac{-\nu k_1^L k_2^L}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]$$

$$U_2^{J,I-1}\ \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[t_L\frac{2\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J} + t_U\frac{1-\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right] + \frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_L^3\frac{\nu k_1^L k_2^L}{\alpha_1^J\alpha_2^J} + t_U^3\frac{2(1-\nu)k_1^U k_2^U}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]$$

$$W_Q \quad \frac{E d_1^J d_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3 \frac{k_1^J}{d_1^{J3}}\right]$$

$$W_J \quad \frac{E d_1^J d_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_J^3\left(\frac{2k_1^J}{d_1^{J3}} + \frac{2\nu k_1^J}{d_2^{J2} d_1^J}\right) + t_K^3 \frac{2(1-\nu)k_1^K}{d_1^J d_2^{J2}} - t_L^3 \frac{k_1^L}{d_1^{J3}} + t_U^3 \frac{2(1-\nu)k_1^U}{d_1^J d_2^{J2}}\right]$$

$$W_L \quad \frac{E d_1^J d_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3 \frac{k_1^J}{d_1^{J3}} - t_K^3 \frac{2(1-\nu)k_1^K}{d_1^J d_2^{J2}} + t_L^3\left(\frac{2k_1^L}{d_1^{J3}} + \frac{2\nu k_1^L}{d_1^J d_2^{J2}}\right) - t_U^3 \frac{2(1-\nu)k_1^U}{d_1^J d_2^{J2}}\right]$$

$$W_N \quad \frac{E d_1^J d_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3 \frac{\nu k_1^J}{d_1^J d_2^{J2}} - t_K^3 \frac{2(1-\nu)k_1^K}{d_1^J d_2^{J2}}\right]$$

$$W_T \quad \frac{E d_1^J d_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3 \frac{\nu k_1^J}{d_1^J d_2^{J2}} - t_U^3 \frac{2(1-\nu)k_1^U}{d_1^J d_2^{J2}}\right]$$

$$W_M \quad \frac{E d_1^J d_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_K^3 \frac{2(1-\nu)k_1^K}{d_1^J d_2^{J2}} - t_L^3 \frac{\nu k_1^L}{d_1^J d_2^{J2}}\right]$$

$$W_W \quad \frac{E d_1^J d_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_L^3 \frac{k_1^L}{d_1^{J3}}\right]$$

$$W_V \quad \frac{E d_1^J d_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_L^3 \frac{\nu k_1^L}{d_1^J d_2^{J2}} + t_U^3 \frac{2(1-\nu)k_1^U}{d_1^J d_2^{J2}}\right]$$

Ecuación de Equilibrio en la Dirección β_2

$$u_1^{j_1+1}\left\{\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[t_J\frac{2\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}+t_k\frac{1-\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]+\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3\frac{\nu k_1^J k_2^J}{\alpha_1^J\alpha_2^J}+t_k^3\frac{2(1-\nu)k_1^k k_2^k}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]\right\}$$

$$u_1^{j_1-1}\left\{\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_J\frac{2\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}-t_o\frac{1-\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]+\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_J^3\frac{\nu k_1^J k_2^J}{\alpha_1^J\alpha_2^J}-t_o^3\frac{2(1-\nu)k_1^o k_2^o}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]\right\}$$

$$u_1^{n_1+1}\left\{\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_k\frac{1-\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}-t_N\frac{2\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]+\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_k^3\frac{2(1-\nu)k_1^k k_2^k}{\alpha_1^J\alpha_2^J}-t_N^3\frac{\nu k_1^N k_2^N}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]\right\}$$

$$u_1^{n_1-1}\left\{\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[t_N\frac{2\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}+t_o\frac{1-\nu}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]+\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_N^3\frac{\nu k_1^N k_2^N}{\alpha_1^J\alpha_2^J}+t_o^3\frac{2(1-\nu)k_1^o k_2^o}{\alpha_1^J\alpha_2^J}\right]\right\}$$

$$u_2^{j_2+1}\left\{\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[t_J\frac{2}{\alpha_2^{J2}}+t_k\frac{1-\nu}{\alpha_1^{J2}}+t_N\frac{2}{\alpha_2^{J2}}+t_o\frac{1-\nu}{\alpha_1^{J2}}\right]+\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3\frac{k_2^{J2}}{\alpha_2^{J2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+t_k^3\frac{2(1-\nu)k_2^{k2}}{\alpha_1^{J2}}+t_N^3\frac{k_2^{N2}}{\alpha_2^{J2}}+t_o^3\frac{2(1-\nu)k_2^{o2}}{\alpha_1^{J2}}\right]\right\}$$

$$u_2^{j_2-1}\left\{\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_J\frac{2}{\alpha_2^{J2}}\right]+\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_J^3\frac{k_2^{J2}}{\alpha_2^{J2}}\right]\right\}$$

$$u_2^{l_2+1}\left\{\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_k\frac{1-\nu}{\alpha_1^{J2}}\right]+\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_k^3\frac{2(1-\nu)k_2^{k2}}{\alpha_1^{J2}}\right]\right\}$$

$$u_2^{n_2}\left\{\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_N\frac{2}{\alpha_2^{J2}}\right]+\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_N^3\frac{k_2^{N2}}{\alpha_2^{J2}}\right]\right\}$$

$$u_2^{k_1+1}\left\{\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{2(1-\nu^2)}\left[-t_o\frac{1-\nu}{\alpha_1^{J2}}\right]+\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_o^3\frac{2(1-\nu)k_2^{o2}}{\alpha_1^{J2}}\right]\right\}$$

$$W_Q\left\{\frac{E\alpha_1^J\alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3\frac{\nu k_2^J}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J}+t_o^3\frac{-2(1-\nu)k_2^o}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J}\right]\right\}$$

$$W_J \quad \frac{E\alpha_1^J \alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_J^3 \frac{2\nu k_2^J}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J} - t_J^3 \frac{2k_2^J}{\alpha_2^{J3}} + t_K^3 \frac{2(1-\nu)k_2^K}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J} - t_N^3 \frac{k_2^N}{\alpha_2^{J3}} + t_O^3 \frac{2(1-\nu)k_2^O}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J}\right]$$

$$W_L \quad \frac{E\alpha_1^J \alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3 \frac{\nu k_2^J}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J} + t_K^3 \frac{-2(1-\nu)k_2^K}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J}\right]$$

$$W_N \quad \frac{E\alpha_1^J \alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3 \frac{k_2^J}{\alpha_2^{J3}} + t_K^3 \frac{-2(1-\nu)k_2^K}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J} + t_N^3 \frac{2\nu k_2^N}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J} + t_N^3 \frac{2k_2^N}{\alpha_2^{J3}} - t_O^3 \frac{2(1-\nu)k_2^O}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J}\right]$$

$$W_T \quad \frac{E\alpha_1^J \alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_J^3 \frac{k_2^J}{\alpha_2^{J3}}\right]$$

$$W_M \quad \frac{E\alpha_1^J \alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[t_K^3 \frac{2(1-\nu)k_2^K}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J} - t_N^3 \frac{\nu k_2^N}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J}\right]$$

$$W_P \quad \frac{E\alpha_1^J \alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_N^3 \frac{\nu k_2^N}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J} + t_O^3 \frac{2(1-\nu)k_2^O}{\alpha_1^{J2}\alpha_2^J}\right]$$

$$W_Z \quad \frac{E\alpha_1^J \alpha_2^J}{12(1-\nu^2)}\left[-t_N^3 \frac{k_2^N}{\alpha_2^{J3}}\right]$$

Ecuación de Equilibrio en la Dirección Normal
(Borde Libre)

$$W_{\Phi}\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\alpha_2^d}{12}\left[-t_J^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d4}}-t_{\Phi}^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d4}}-t_R^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d2}\alpha_2^{d2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$W_J\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\alpha_2^d}{12}\left[t_J^3\,\frac{4}{\alpha_1^{d4}}+t_L^3\,\frac{1}{\alpha_1^{d4}}+t_{\Phi}^3\,\frac{1}{\alpha_1^{d4}}+t_N^3\,\frac{1}{\alpha_1^{d4}}+t_R^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d2}\alpha_2^{d2}(1+\nu)}+t_U^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d2}\alpha_2^{d2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$W_L\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\alpha_2^d}{12}\left[-t_J^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d4}}-t_L^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d4}}-t_U^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d2}\alpha_2^{d2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$W_W\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\alpha_2^d}{12}\left[\frac{t_L^3}{\alpha_1^{d4}}\right]\right\}$$

$$W_T\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\alpha_2^d}{12}\left[-t_T^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d4}}-t_R^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d2}\alpha_2^{d2}(1+\nu)}-t_U^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d2}\alpha_2^{d2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$W_Z\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\alpha_2^d}{12}\left[\frac{t_T^3}{\alpha_1^{d4}}\right]\right\}$$

$$W_S\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\alpha_2^d}{12}\left[t_R^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d2}\alpha_2^{d2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$W_V\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\alpha_2^d}{12}\left[t_U^3\,\frac{2}{\alpha_1^{d2}\alpha_2^{d2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$U_1^{d+1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\alpha_2^d}{12}\left[t^3\,\frac{2h_2^d}{\ldots}\;[illegible]\right]\right\}$$

$$U^{d+1}\left\{E\,\alpha_1^d\alpha_2^d\left[t^3\;[illegible]\right.\right.$$

$$U_1^{\ell_1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\,\alpha_2^d}{12}\left[t_L^3\,\frac{k_1^L}{\alpha_1^{d3}}\right]\right\}$$

$$U_1^{q_1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\,\alpha_2^d}{12}\left[-t_Q^3\,\frac{k_1^Q}{\alpha_1^{d3}}\right]\right\}$$

$$U_1^{t_1-1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\,\alpha_2^d}{12}\left[t_R^3\,\frac{2\,k_1^R}{\alpha_1^d\,\alpha_2^{d2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$U_1^{t_1+1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\,\alpha_2^d}{12}\left[-t_u^3\,\frac{2\,k_1^u}{\alpha_1^d\,\alpha_2^{d2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$U_2^{j_2-1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\,\alpha_2^d}{12}\left[t_T^3\,\frac{k_2^T}{\alpha_2^d\,\alpha_1^{d2}}-t_R^3\,\frac{2\,k_2^R}{\alpha_1^{d2}\,\alpha_2^d(1+\nu)}-t_u^3\,\frac{2\,k_2^u}{\alpha_1^{d2}\,\alpha_2^d(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$U_2^{t_2}\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\,\alpha_2^d}{12}\left[-t_T^3\,\frac{k_2^T}{\alpha_2^d\,\alpha_1^{d2}}\right]\right\}$$

$$U_2^{k-1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\,\alpha_2^d}{12}\left[t_R^3\,\frac{2\,k_2^R}{\alpha_1^{d2}\,\alpha_2^d(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$U_2^{\ell_2-1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^d\,\alpha_2^d}{12}\left[t_u^3\,\frac{2\,k_2^u}{\alpha_1^{d2}\,\alpha_2^d(1+\nu)}\right]\right\}$$

Ecuaciones de Equilibrio en la Dirección β_1
(borde libre)

$$U_1^{j+1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{2}\left[t_j\frac{2}{\alpha_1^{j2}}+t_L\frac{2}{\alpha_1^{j2}}+\frac{t_u}{\alpha_2^{j2}(1+\nu)}\right]+\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{12}\left[t_j^3\frac{h_1^{j2}}{\alpha_1^{j4}}+t_L^3\frac{h_1^{L2}}{\alpha_1^{j2}}+t_u^3\frac{2h_1^{u2}}{\alpha_1^j\alpha_2^j(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$U_1^{j-1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{2}\left[-t_j\frac{2}{\alpha_1^{j2}}\right]+\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{12}\left[-t_j^3\frac{h_1^{j2}}{\alpha_1^{j2}}\right]\right\}$$

$$U_1^{L_1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{2}\left[-t_L\frac{2}{\alpha_1^{j2}}\right]+\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{12}\left[-t_L^3\frac{h_1^{L2}}{\alpha_1^{j2}}\right]\right\}$$

$$U_1^{t+1}\left\{\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{2}\left[-t_u\frac{1}{\alpha_2^{j2}(1+\nu)}\right]+\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{12}\left[-t_u^3\frac{2h_1^{u2}}{\alpha_1^j\alpha_2^j(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$W_J\left\{\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{2}\left[t_j\frac{2h_1^j}{\alpha_1^{j2}}\right]+\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{12}\left[-t_j^3\frac{2h_1^j}{\alpha_1^{j3}}-t_L^3\frac{h_1^L}{\alpha_1^{j3}}+t_u^3\frac{2h_1^u}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$W_L\left\{\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{2}\left[-t_L\frac{2h_1^L}{\alpha_1^{j2}}\right]+\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{12}\left[t_j^3\frac{h_1^j}{\alpha_1^{j3}}+t_L^3\frac{2h_1^L}{\alpha_1^{j3}}-t_u^3\frac{2h_1^u}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$W_Q\left\{\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{12}\left[t_j\frac{h_1^j}{\alpha_1^{j3}}\right]\right\}$$

$$W_W\left\{\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{12}\left[-t_L^3\frac{h_1^L}{\alpha_1^{j3}}\right]\right\}$$

$$W_T\left\{\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{12}\left[-t_u^3\frac{2h_1^u}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

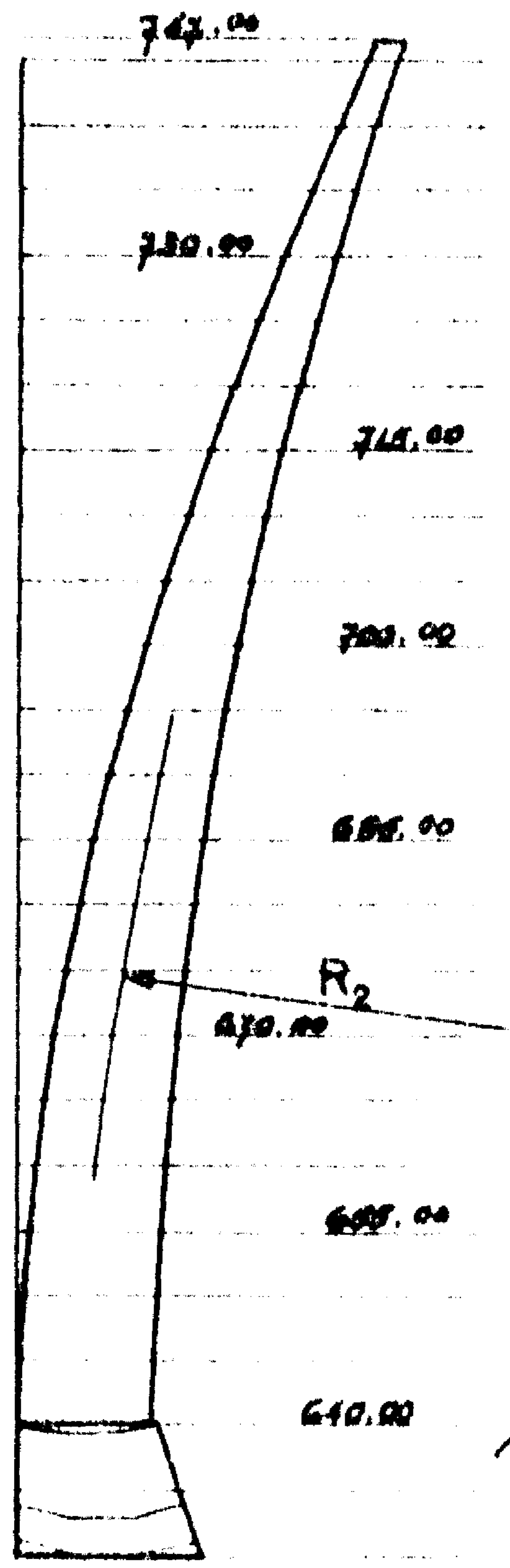
$$W_V\left\{\frac{E\,\alpha_1^j\alpha_2^j}{12}\left[t_u^3\frac{2h_1^u}{\alpha_1^j\alpha_2^{j2}(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$L\Big|_{2}^{I_2-1}\left\{\frac{E\,\alpha_i^d\,\alpha_i^d}{2}\left[\frac{t_u}{\alpha_i^d\,\alpha_i^d\,(1+\nu)}\right]+\frac{E\,\alpha_i^d\,\alpha_i^d}{12}\left[t_u^3\,\frac{2\,k_i^u\;k_i^u}{\alpha_i^d\,\alpha_i^d\,(1+\nu)}\right]\right\}$$

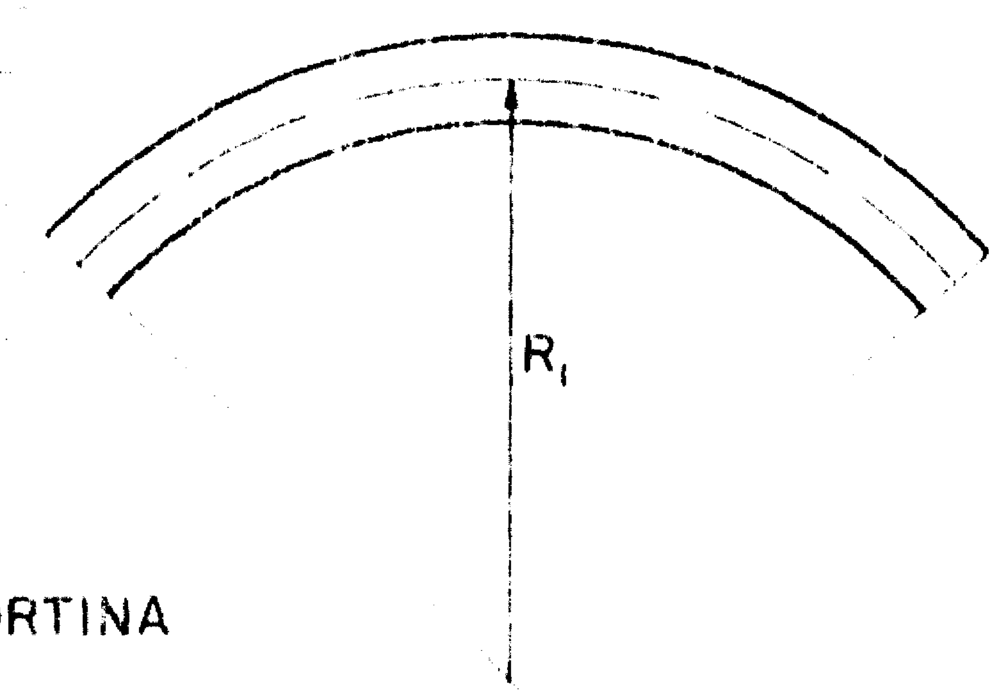
$$L\Big|_{2}^{J_2-1}\left\{\frac{E\,\alpha_i^d\,\alpha_i^v}{2}\left[-\frac{t_u}{\alpha_i^d\,\alpha_i^d\,(1+\nu)}\right]+\frac{E\,\alpha_i^v\,\alpha_i^d}{12}\left[-t_u^3\,\frac{2\,k_i^u\;k_i^u}{\alpha_i^d\,\alpha_i^d\,(1+\nu)}\right]\right\}$$

Elev.	ℓ (m.)	R_1	R_2	α_1^j	α_2^j	C_1^J	C_2^J	r_1^J	r_2^J	A_j
747	2.0000	0.0100000	0.0030891	13.61	18.098	.99075	.99786	.0053487	.0030466	.0040598
730	3.3505	0.0116279	0.0027298	13.63	16.922	.98746	.99878	.0053152	.0034920	.0043556
715	4.8111	0.0133333	0.0027810	13.15	15.665	.98466	.99907	.0056943	.0040016	.0048544
700	6.2433	0.0153846	0.0032042	12.75	15.495	.98084	.99893	.0060337	.0041605	.0050617
685	7.5987	0.0175438	0.0040144	12.35	15.330	.97661	.99847	.0064032	.0042481	.0052819
670	8.8393	0.0204081	0.0052230	11.99	15.175	.97023	.99752	.0067485	.0043294	.0054961
655	9.8291	0.0243902	0.0068329	11.70	15.051	.95956	.99588	.0070097	.0043776	.0056787
640	10.4442	0.0307692				1.00000	1.00000	.0073127	.0044426	

TABLA 7.1 CONSTANTES DE LA CORTINA.



NIVEL	t	R_1
747.00	2.00	100
730.00	3.35	86
715.00	4.81	75
700.00	6.24	65
685.00	7.60	67
670.00	8.84	49
655.00	9.88	41
640.00	10.44	32.5



DATOS DE LA CORTINA

FIG. 7.1

Nivel	Peralte	χ	R_2
747	2.00	28.67	290.65
730	3.35	22.46	356.80
715	4.81	17.67	375.87
700	6.24	13.48	343.29
685	7.60	9.96	280.89
670	8.84	7.25	217.31
655	9.83	5.60	165.62
640	10.44	5.27	127.00

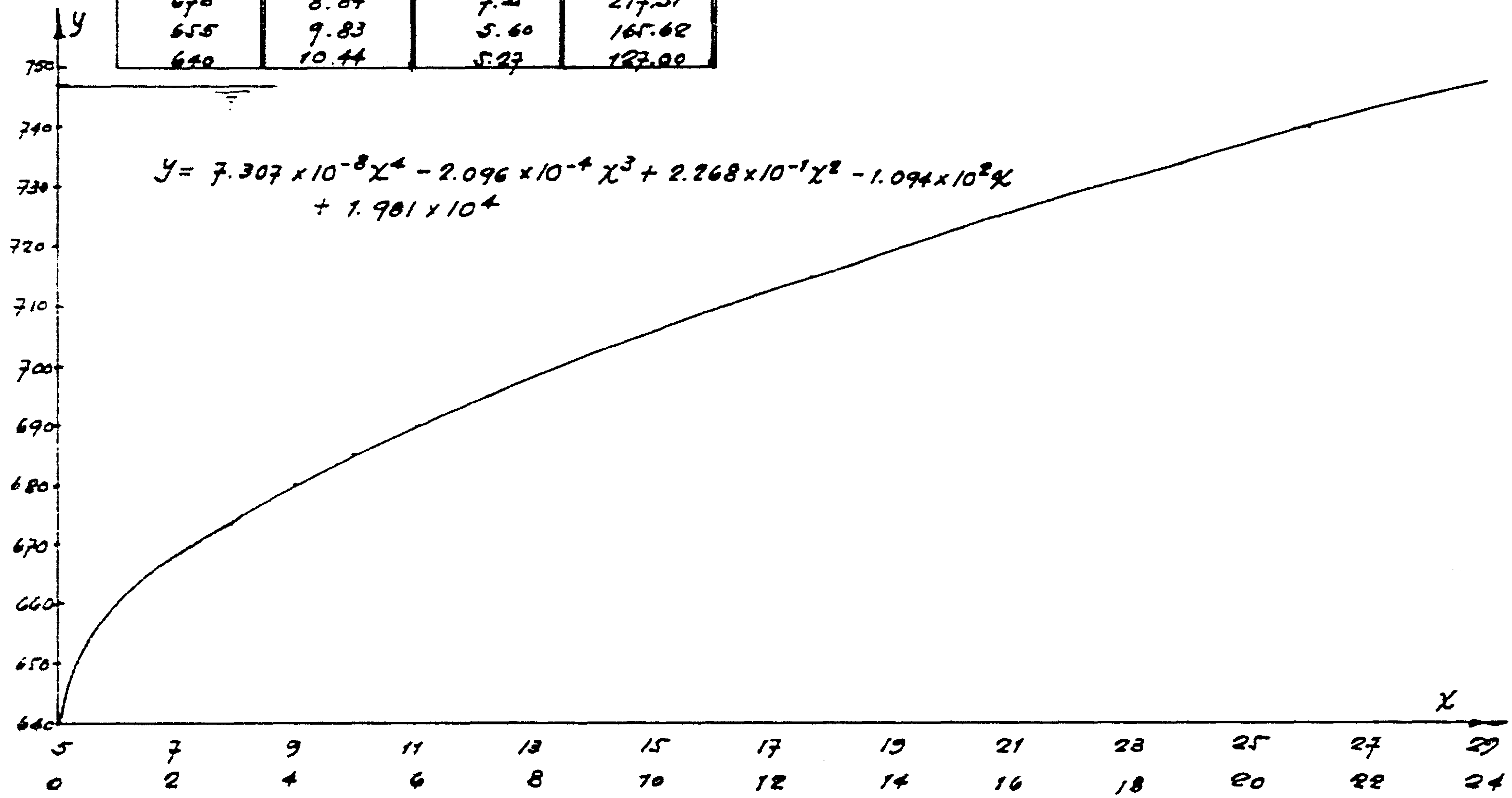


fig 7.2 Curva del Perfil de la Cortina.

APENDICE A1
GEOMETRIA DE SUPERFICIES

A1.0 Alcance

En este apéndice se presentan en forma resumida algunos resultados de la geometría diferencial, que se usarán para los desarrollos analíticos de los capítulos 2 y 3. Los resultados se presentan a manera de una colección de fórmulas en virtud de que su justificación conceptual se encuentra en diversos tratados sobre el tema(23, 26, 28, 52, 64) y muy particularmente en las referencias 87 y 88.

A1.1 Representación paramétrica

Una superficie como la de la fig A1.1, puede ubicarse en un espacio tridimensional de ejes coordenados x_1, x_2, x_3 y además puede representarse intrínsecamente mediante dos parámetros usados como coordenadas paramétricas. Estos parámetros, se designan β_1 y β_2, de manera que para un valor β_1 = cte., el otro parámetro describe una curva β_2. La representación de la superficie se puede escribir entonces, mediante el vector de posición

$$\vec{R} = \vec{R}(\beta_1, \beta_2) \tag{A1.1}$$

al hacer variar simultáneamente los dos parámetros β_1 y β_2 el vector $\vec{R}$ sufre un incremento $d\vec{R}$ que se escribe

$$d\vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta_2} d\beta_2 \tag{A1.2}$$

Designando

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta_1} = \vec{R}_{,1}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta_2} = \vec{R}_{,2} \qquad \text{(A1.3)}$$

en que la coma después de $\vec{R}$ indica derivación con respecto al parámetro cuyo índice es igual al número que sigue a la coma; entonces es posible escribir

$$d\vec{R} = \vec{a}_1\, d\beta_1 + \vec{a}_2\, d\beta_2 \qquad \text{(A1.4)}$$

Los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ se designan vectores base en la superficie. La magnitud de $d\vec{R}$, es naturalmente, la distancia entre los puntos $P(\beta_1, \beta_2)$ y $P'(\beta_1 + d\beta_1, \beta_2 + d\beta_2)$, medida sobre la superficie. Esta distancia es:

$$ds^2 = a_{11}\, d\beta_1^2 + 2a_{12}\, d\beta_1\, d\beta_2 + a_{22}\, d\beta_2^2 \qquad \text{(A1.5)}$$

en que

$$a_{11} = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1$$

$$a_{12} = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 \qquad \text{(A1.6)}$$

$$a_{22} = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2$$

y se puede demostrar[87,88] que estas cantidades forman un tensor, llamado tensor métrico. En ocasiones la ecuación A1.5 recibe el nombre de "primera forma fundamental". Si los vectores base en la superficie son ortogonales, entonces

$$a_{12} = 0 \qquad \text{(A1.7)}$$

En adelante se usarán únicamente curvas de referencia ortogonales, de manera que

$$ds^2 = a_{11}\, d\beta_1^2 + a_{22}\, d\beta_2^2 \qquad \text{(A1.8)}$$

entonces conviene introducir la notación

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= a_{11} \\ \alpha_2^2 &= a_{22} \end{aligned} \qquad \text{(A1.9)}$$

porque es posible encontrar vectores base unitarios en la superficie y que se designan,

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \frac{\vec{a}_1}{\alpha_1} \\ \vec{T}_2 &= \frac{\vec{a}_2}{\alpha_2} \end{aligned} \qquad \text{(A1.10)}$$

El vector normal a la superficie en el punto $\vec{t}$, se define como

$$\vec{n} = \vec{T}_1 \times \vec{T}_2 \qquad \text{(A1.11)}$$

A1.2 Tensor curvatura ó Segunda forma fundamental

Sobre la curva C, es posible determinar un vector tangente $\vec{t}$ el cual se escribe

$$\vec{t} = \frac{d\vec{R}}{ds} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta_1}\frac{\partial \beta_1}{\partial s} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta_2}\frac{\partial \beta_2}{\partial s} \qquad \text{(A1.12)}$$

sobre esta línea, existe un vector normal $\vec{D}$ el cual se supone que forma un ángulo ϕ con el vector normal $\vec{n}$ (ver fig A1.2). La derivada del vector $\vec{t}$ sobre la curva C se escribe

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{R}_{,11}\left(\frac{d\beta_1}{ds}\right)^2 + 2\,\vec{R}_{,12}\,\frac{d\beta_1}{ds}\frac{d\beta_2}{ds} + \left(\frac{d\beta_2}{ds}\right)^2\vec{R}_{,22} \tag{A1.13}$$

y multiplicando escalarmente por $\vec{n}$ se obtiene,

$$\frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\rho}\cos\phi = \vec{R}_{,11}\cdot\vec{n}\left(\frac{d\beta_1}{ds}\right)^2 + 2\vec{R}_{,12}\cdot\vec{n}\,\frac{d\beta_1}{ds}\frac{d\beta_2}{ds} + \vec{R}_{,22}\cdot\vec{n}\left(\frac{d\beta_2}{ds}\right)^2 \tag{A1.14}$$

en que ρ es el radio de curvatura de la curva C y en la ecuacion A1.14 se ha usado una de las fórmulas de Frenet-Serret(87).

Ahora es posible definir el "<u>tensor curvatura normal de la superficie</u>" con sus componentes tensoriales

$$\begin{aligned} b_{11} &= \vec{n}\cdot\vec{R}_{,11} \\ b_{22} &= \vec{n}\cdot\vec{R}_{,22} \\ b_{12} &= \vec{n}\cdot\vec{R}_{,12} \end{aligned} \tag{A1.15}$$

Las curvaturas métricas en la superficie son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= -\frac{b_{11}}{\alpha_1^2} = k_1 \\ \frac{1}{R_2} &= -\frac{b_{22}}{\alpha_2^2} = k_2 \\ \frac{1}{R_{12}} &= -\frac{b_{12}}{\alpha_1\alpha_2} = k_{12} \end{aligned} \tag{A1.16}$$

de manera que la ecuación A1.14, puede escribirse

$$d\vec{R}\cdot d\vec{n} = \alpha_1^2 k_1\, d\beta_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2\, k_{12}\, d\beta_1 d\beta_2 + \alpha_2^2 k_2\, d\beta_2^2 \tag{A1.17}$$

que recibe el nombre de "segunda forma fundamental".

Cuando en particular resulta $k_{12} = 0$, se dice que las líneas β_1 β_2 son de curvatura principal.

A1.3 Derivadas de los vectores base unitarios. Derivadas del vector normal

Al pasar de un punto a otro sobre la superficie, los vectores base, $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$, cambian de magnitud y dirección. Como los vectores unitarios se expresan en términos de estos vectores y sus magnitudes (ver ecuación A1.10), para calcular las derivadas de los vectores unitarios, es necesario tomar en cuenta esa cualidad. Las expresiones de las derivadas de los vectores base $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ y del vector normal $\vec{n}$ se conocen como ecuaciones de Gauss-Weingarten(52,88), con base en la definición A1.10, y utilizando esas ecuaciones, es posible deducir

$$
\begin{aligned}
\vec{T}_{1,1} &= -\frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_2}\,\vec{T}_2 - \frac{\alpha_1}{R_1}\,\vec{n} \\
\vec{T}_{1,2} &= \frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_1}\,\vec{T}_2 - \alpha_2 k_{12}\,\vec{n} \\
\vec{T}_{2,1} &= \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_2}\,\vec{T}_1 - \alpha_1 k_{12}\,\vec{n} \\
\vec{T}_{2,2} &= -\frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_1}\,\vec{T}_1 - \alpha_2 k_2\,\vec{n}
\end{aligned}
\qquad (A1.18)
$$

como expresiones para las derivadas de los vectores unitarios. Las ecuaciones de las derivadas del vector normal $\vec{\eta}$ son:

(A1.19)

A1.4 Ecuaciones de Codazzi-Gauss

Las ecuaciones de Codazzi-Gauss son ecuaciones que permiten expresar la relación entre los coeficientes del tensor métrico y del tensor de curvatura. Las expresiones que ahora se presentan, fueron deducidas mediante especialización de los correspondientes en forma tensorial (ver refs 52 y 88). Estas relaciones se pueden escribir,

$$\alpha_1^2 k_{1,2} + \alpha_1 \alpha_{1,2} \frac{k_1^2}{k_2} - k_1 \alpha_1 \alpha_{1,2} = 0 \qquad \text{(A1.20)}$$
$$\alpha_2^2 k_{2,1} + \alpha_2 \alpha_{2,1} \frac{k_2^2}{k_1} - k_2 \alpha_2 \alpha_{2,1} = 0$$

que son las ecuaciones de Codazzi. La ecuación de Gauss se escribe,

$$\alpha_1 \alpha_2 k_1 k_2 + \left(\frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} + \left(\frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_2}\right)_{,2} = 0 \qquad \text{(A1.21)}$$

Las ecuaciones A1.20, pueden escribirse también en la forma

$$(\alpha_1 k_1)_{,2} = \alpha_{1,2} k_2 \qquad \text{(A1.22)}$$
$$(\alpha_2 k_2)_{,1} = \alpha_{2,1} k_1$$

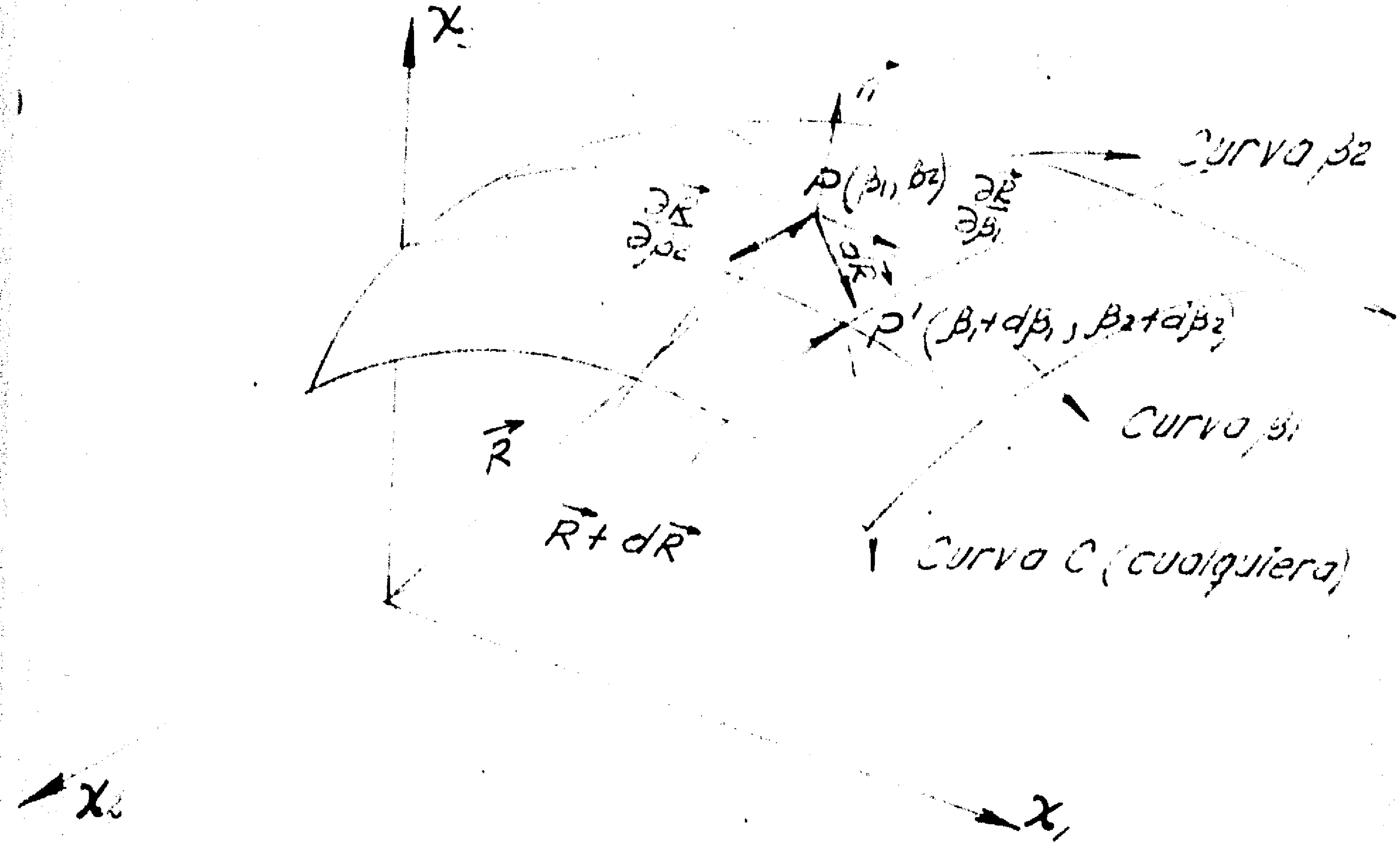


Fig. A1.1 Geometría de una superficie

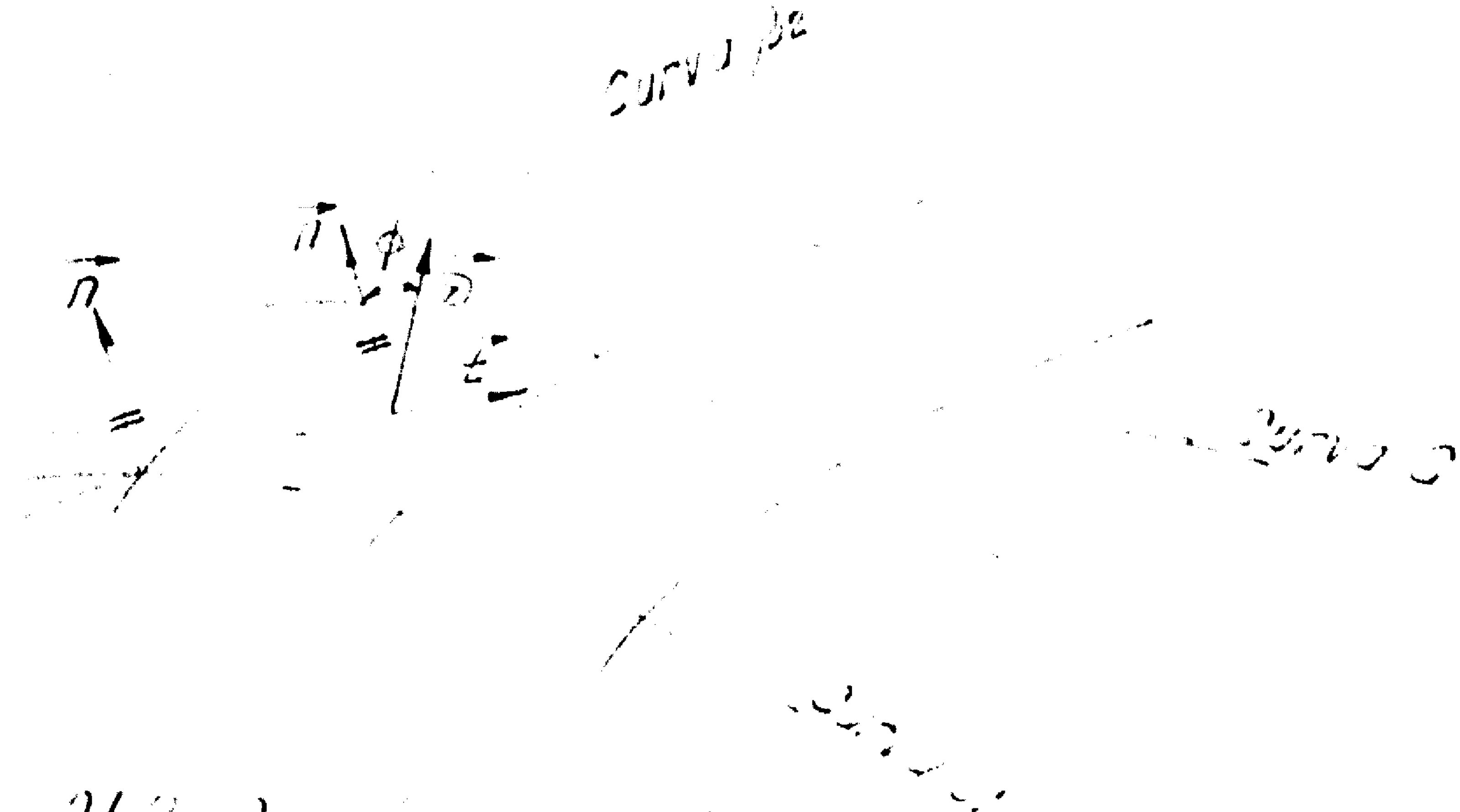


Fig. A1.2

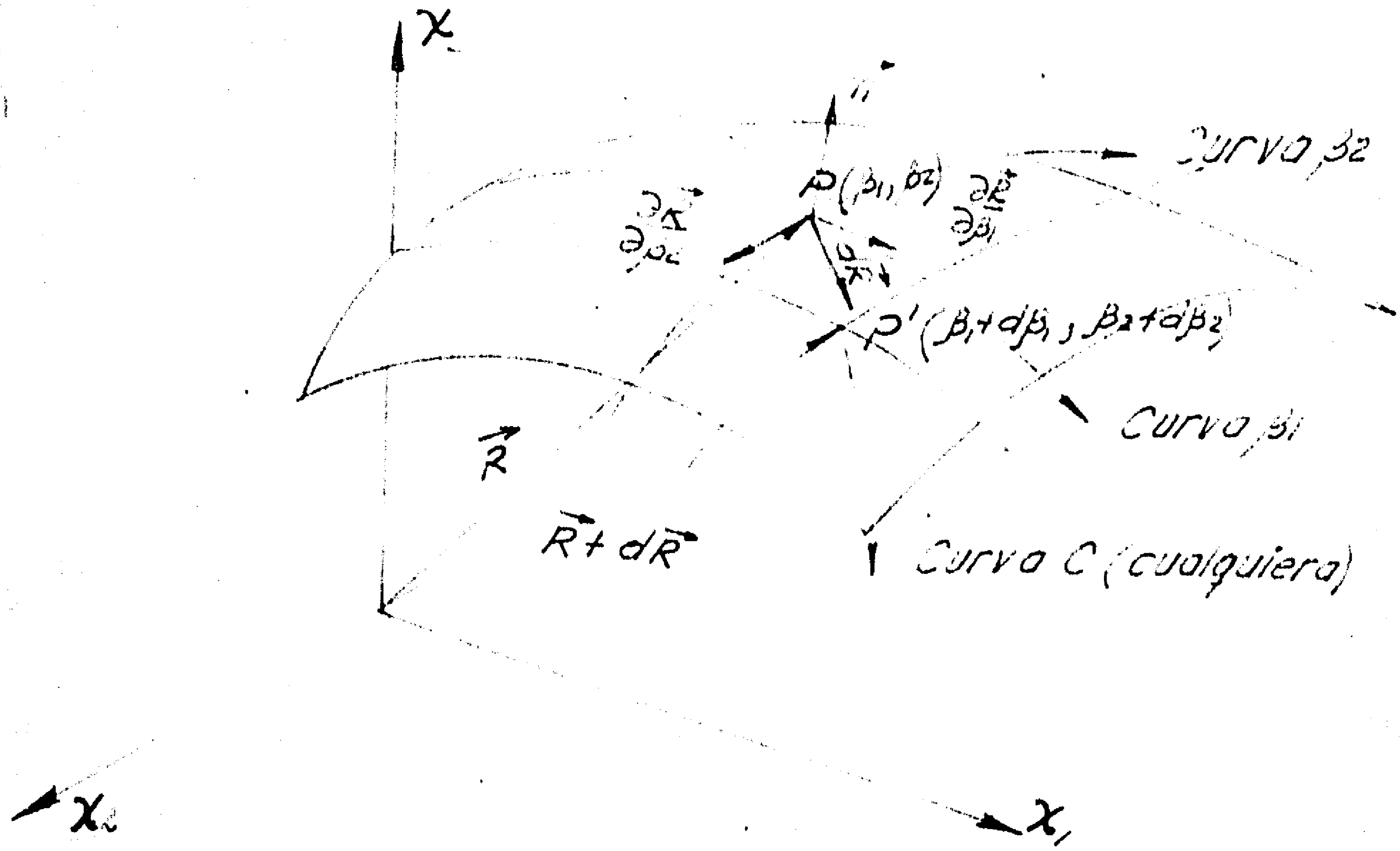


Fig. A1.1 Geometría de una superficie

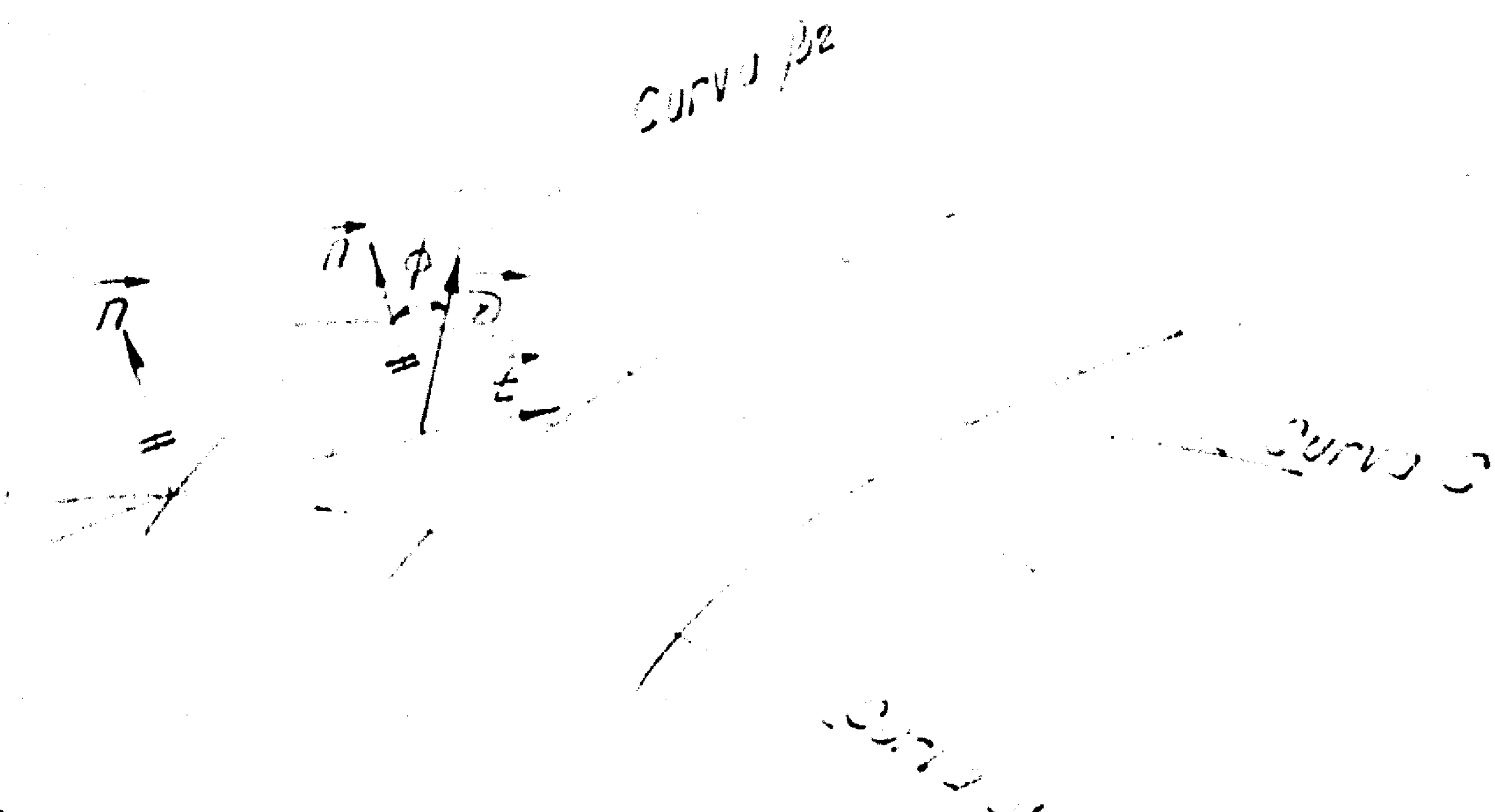


Fig. A1.2 Curvatura normal

APENDICE A2

CURVATURAS EN LA SUPERFICIE. GEOMETRIA DE UNA SUPERFICIE PARALELA

A2.1 Curvaturas en la superficie

En las expresiones del apéndice A1 y en los desarrollos analíticos del trabajo, aparecen las cantidades $\alpha_{1,2}$ y $\alpha_{2,1}$ que son las derivadas de las magnitudes de los vectores base. Estas cantidades, pueden inteppretarse gráficamente usando las definiciones de α_1 y α_2 . Considérese por ejemplo, la definición de α_1 (ver ecuación A1.9) que puede escribirse

$$\alpha_1^2 = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 \qquad \text{(A2.1)}$$

derivando con respecto a β_2 , se obtiene

$$2\alpha_1 \alpha_{1,2} = \vec{a}_{1,2} \cdot \vec{a}_1 + \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_{1,2} \qquad \text{(A2.2)}$$

$$\alpha_{1,2} = \vec{a}_{1,2} \cdot \vec{T}_1$$

o sea,

$$\alpha_{1,2} = \vec{R}_{,12} \cdot \vec{T}_1 \qquad \text{(A2.3)}$$

si se compara esta ecuación con las definiciones del tensor de curvatura normal de las curvas de la superficie (ecuaciones A1.15), es posible definir ahora la cantidad "curvatura en la superficie" (ver fig A2.1) y en su forma real, puede escribirse

$$\ell_{12} = \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_1 \alpha_2} \qquad \text{(A2.4)}$$

en analogía con las ecuaciones A1.16. En forma semejante se puede definir

$$\ell_{21} = \frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_1 \alpha_2} \qquad \text{(A2.5)}$$

Estas cantidades aunque novedosas en apariencia, fueron usadas en la formulación algebraica de la geometría diferencial(89) y ahorahhan caido en desuso debido a que no poseen naturaleza tensorial.

A2.2 Geometría de una superficie paralela

Considérese como en la fig. A2.2, una superficie designada "media" y otra superficie paralela que se encuentra a una distancia Z. El vector de posición de la superficie paralela se escribe

$$^{p}\vec{r} = \vec{R} + z\,\vec{n} \qquad \text{(A2.6)}$$

y los vectores base se escriben entonces

$$^{p}\vec{a}_1 = \vec{a}_1 + z\,\vec{n}_{,1}$$
$$^{p}\vec{a}_2 = \vec{a}_2 + z\,\vec{n}_{,2} \qquad \text{(A2.7)}$$

Respecto a la superficie [illegible] "media" se supone ahora como en [illegible], que las curvas de referencia son ortogonales, aunque no necesariamente de curvatura principal. Para la superficie paralela, el ángulo que forman entre sí los vectores base, se [illegible]

$$^{p}\vec{a}_1 \cdot {}^{p}\vec{a}_2 = {}^{p}a_{12} = a_{12} - 2z\,\alpha_1\alpha_2\,k_{12} + z^2\alpha_1\alpha_2\,k_{12}\,(k_1 + k_2)$$

De manera que [illegible] ortogonadas ortogonales, si la torsión de la superficie (k_{12}) es nula.

Las magnitudes de los vectores base de la superficie paralela se pueden escribir

$$^{p}\alpha_1'^2 = \alpha_1'^2 \left(1 + 2\frac{z}{R_1} + \frac{z^2}{R_1^2}\right)$$

$$^{p}\alpha_1'^2 = \alpha_1'^2 \left(1 + z k_1\right)^2$$

ó sea

$$^{p}\alpha_1' = \alpha_1 c_1 \qquad \text{(A2.8)}$$

en que

$$c_1 = \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) = \left(1 + z k_1\right) \qquad \text{(A2.9)}$$

y análogamente

$$^{p}\alpha_2 = \alpha_2 c_2 \qquad \text{(A2.10)}$$

con

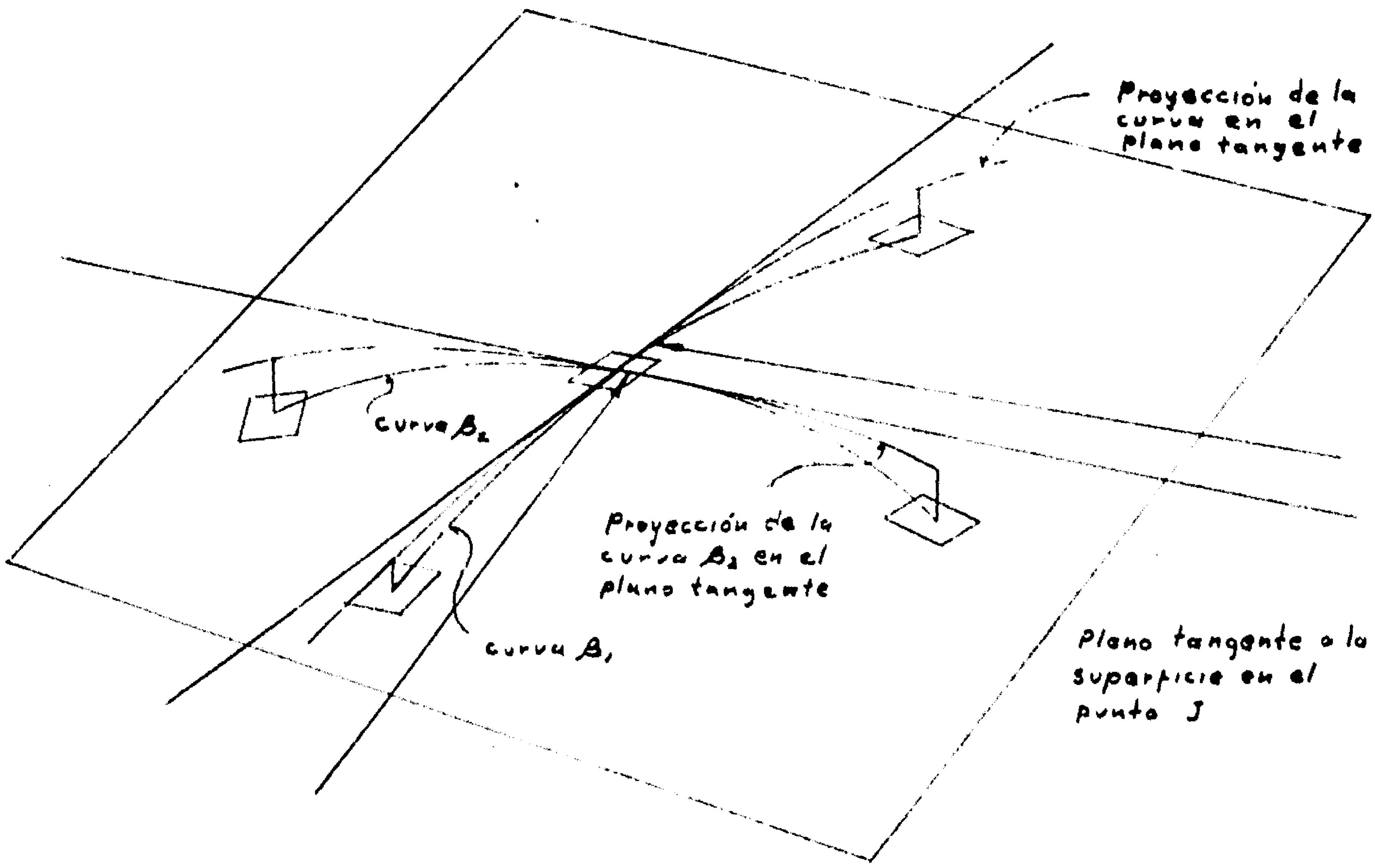
$$c_2 = \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) = \left(1 + z k_2\right) \qquad \text{(A2.11)}$$

Los vectores unitarios de la superficie paralela se deducen en forma similar a los de la superficie media, es decir,

$$^{p}\vec{T}_1 = \frac{^{p}\vec{a}_1}{^{p}\alpha_1} = \frac{\vec{T}_1 c_1 - z k_{12} \vec{T}_2}{\left[c_1^2 + (z k_{12})^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(A2.12)}$$

y como una aproximación, cuando la torsión de la superficie es pequeña, se suele escribir

$$^{p}\vec{T}_1 \doteq \vec{T}_1$$
$$^{p}\vec{T}_2 \doteq \vec{T}_2 \qquad \text{(A2.13)}$$



A2.1 CURVATURAS EN LA SUPERFICIE

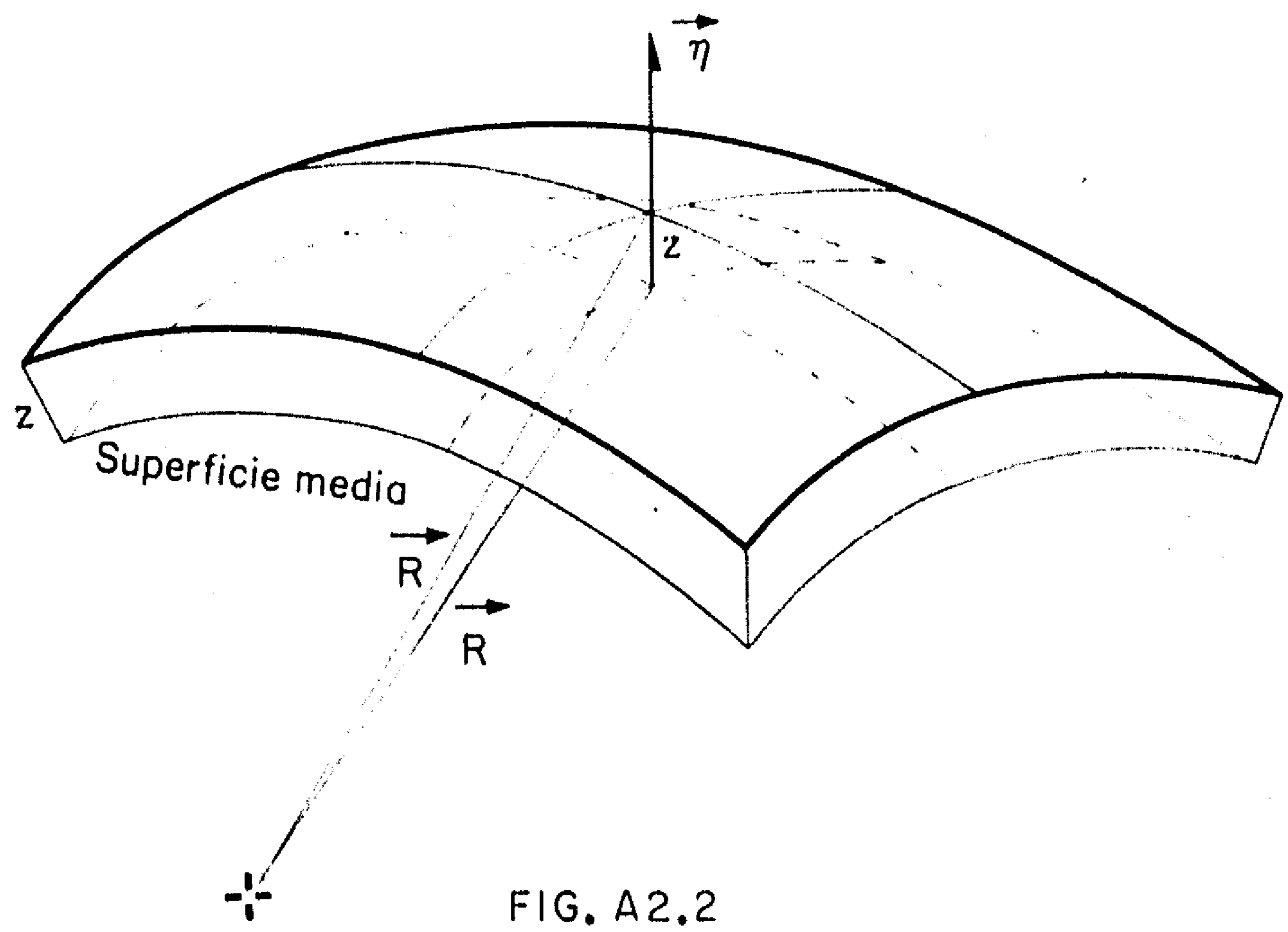


FIG. A2.2

APENDICE A-3

A 3.1 Cálculo de Variaciones

En este apéndice se presentan en forma condensada algunos resultados que serán utilizados en el desarrollo del presente trabajo. Aquí se presenta el problema fundamental del cálculo de variaciones conocido [72] como el de los puntos extremos fijos en el plano y los resultados que corresponden al caso de dos variables independiente. También se presenta el teorema de Gelfand y Fomin [69] relativo al problema de un funcional sujeto a condiciones subsordiarias que estan dados también en la forma de un funcional.

Supongase como en la fig. A-3.1.1, que en el plano, existen dos puntos fijos por los que ha de pasar una determinada curva sobre la cual ha de calcularse la integral

$$I(y)=\int_a^b \phi(x, y, y')\,dx \qquad \text{A-3.1.1}$$

en que x, y son los ejes de referencia, y' es la derivada de y con respecto a ϕ y ϕ es una función conocida de los variables y' y y x. Una vez fijada la curva, la integral I se invierte en un número, es decir, el problema es el del cálculo integral. Pero supongase que la incognita es precisamente la curva y que la condición que permite determinarla, es que la integral I (ahora funcional I) adquiera un calor estacionario; --- además se compone la condición de que esa curva pase precisamente por los puntos A y B.

Supóngse que la curva que cumple esta condición, es vecina a la curva 1. De manera que puede escribirse para la curva vecina.

$$y(x) = Y(x) + \delta Y(x) \qquad \text{A-3.1.2}$$

en que $\delta Y(x)$ es un cambio posible a la forma de la curva y que - cumple las condiciones de frontera.. Este cambio posible ó - virtual se designa como <u>variación</u> de Y . Al pasar de una -- curva a otra, el funcional cambia de valor y este cambio se designa ΔI y puede escribirse

$$\Delta I = h\delta I + \frac{h^2}{2}\delta^2 I + \ldots\ldots \qquad \text{A-3.1.3}$$

con que $\delta^2 I$ es la segunda variación del funcional I y h es un parametro. Por ahora no interesa la segunda variación, de manera que al introducir el cambio en Y , para $h = 1$ se tiene

$$I + \delta I = \int_a^b \phi(x, y + \delta Y, y' + \delta Y')\, dx \qquad \text{A-3.1.4}$$

restando la ec A-3.1.1, empleando un desarrollo en serie de ---
Taylor y conservando unicamente el primer término, resulta

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \underline{\frac{\partial \phi}{\partial y'} \delta y'} \right) dx \qquad \text{A-3.1.5}$$

integrando por partes el término subrayado de manera que pueda despejarse δy, se puede deducir

$$\delta I = \left[\delta y \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) \right\} dx \qquad \text{A-3.1.6}$$

El término subrayado a la derecha de la ec. A-3.1.6, toma en cuenta las condiciones naturales de frontera. Si la curva inicial hace del funcional I un valor estacionario, entonces δI debe ser nulo y siendo δy arbitrario, excepto en los extremos, desaparece el término que contiene las condiciones naturales de frontera y se puede escribir

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) = 0 \qquad \text{A-3.1.6}$$

que en la ecuación de Euler - Lagrange

Si el funcional I es de la forma

$$I = \int_{c_1}^{d_1}\int_{a_1}^{b_1} \phi\,(x, y, W, W_{,x}, W_{,y}, W_{,xy})\, dx\, dy$$

A-3.1.7

en que $W = W(x, y)$ $W_{,x} = \dfrac{\partial W}{\partial x}$ etc., la ecuación de Euler resulta ser,

$$\frac{\partial \phi}{\partial W} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial W_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial W_{,y}} + \frac{\partial}{\partial_x \partial_y}\frac{\partial \phi}{\partial W_{,xy}} = 0$$

A-3.1.8

<u>Teorema de Gelfand y Fomin.</u>(69)

Considerese nuevamente el funcional A-3.1.1, para el que se pretende encontrar la curva $y = y(x)$ que da al funcional un valor estacionario. Las condiciones en los extremos, son nuevamente, que la curva pase por los puntos A y B. Pero ahora supongase que el funcional I, debe satisfacer una condición adicional y que esa condición está dada en la forma de un funcional, y se escribe

$$K(y) = \int_a^b G(x, y, y')\, dx = \ell$$

A-3.1.9

en que ℓ es una constante.

Si $y\,y(x)$ no conduce un valor extremo máximo ó mínimo del funcional K, entonces existe una constante λ tal que la curva $y\,y(x)$ hace del funcional

$$\int_a^b (\quad + \lambda G)\, dx$$

A-3.1.10

un máximo ó un mínimo. Se introduce entonces la variación de y en la forma indicada antes (ec A-3.1.[illegible]). Pero ahora se impone como condición adicional, la de que el funcional K conserve el mismo valor, antes y después de la variación, es decir

$$K[y] = K[Y]$$

A-3.1.11

en que Y es la trayectoria variada de la cruva y según lo expresa la ec. A-[illegible].2.

Procediendo así, es posible demostrar que la ecuación de [illegible]ler correspondiente al problema en cuestión puede escribirse,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial y'} + \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right) = 0$$

A-3.1.12

Es decir, que la curva [illegible] ción [illegible] ecuación diferencial, - [illegible] A y B (fig.- A-3.1.1) y [illegible] funcional $I[y]$ [illegible] valor extremo, además de cumplir con la condición impuesta por el funcional -- $k[y]$.

La condición impuesta de que $y(x)$ no haga que el funcional k tome un valor extremo puede aclararse mediante la ec. A-3.1.12; en virtud de que si k toma un valor extremo el término subrayado desaparece, quedando la ecuación diferencial A-3.1.6.

Estos son los resultados de Gelfand y Fomin. En ellos se observa la analogía con el método de multiplicadores de Lagrange(71).

En algunas ocasiones, sobre todo en problemas físicos, suele ocurrir que λ debe ser una función de la ó las variables independientes (según el caso), es decir, $\lambda = \lambda(x)$.

En este caso, el funcional A-3.1.10, toma la forma,

$$\int_a^b (\varphi + \lambda(x)\psi)\,dx \qquad \text{A-3.1.13}$$

y la forma de la ecuación diferencial resultante es

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial y'} + \lambda\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \psi}{\partial y'}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial y'}\frac{d\lambda}{dx} = 0 \qquad \text{A-3.1.14}$$

que [illegible] con [illegible] del [illegible] de Gelfand y Fomin, que ahora [illegible];

Dado el funcional

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

sean las condiciones para las curvas admisibles

$$y(a) = A \qquad y(b) = B \quad , \quad K[y] = \int_a^b G(x, y, y')\, dx = \ell$$

en que $K[y]$ es otra funcional, y sea $I[y]$ un extremo para $y = y(x)$. Entonces si $y = y(x)$ no es un extremo de $K[y]$, existe una constante λ tal que $y = y(x)$ conduce a un extremo para el funcional,

$$\int_a^b (F + \lambda G)\, dx$$

es decir, $y = y(x)$ satisface la ecuación diferencial A-3.1.

A-3.2 Polinomios de Legendre

Algunas de las funciones que en problemas de ---- ingeniería, por ejemplo aquellas relacionadas con fenómenos dinámicos, poseen una cualidad designada como propiedad de ortogonalidad. De un grupo de funciones $\phi_1(\xi), \phi_2(\xi) \ldots \phi_n(\xi)$ se dice que son ortogonales, cuando se cumple que

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \phi_i(\xi)\,\phi_j(\xi) = 0 \qquad \text{para} \quad i \neq j \qquad \text{A-3.2.1}$$

El mismo grupo de funciones, puede resultar ortogonal en la forma

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \omega(\xi)\,\phi_i(\xi)\,\phi_j(\xi)\,d\xi = 0 \qquad \text{para} \quad i \neq j \qquad \text{A-3.2.2}$$

en que $\omega(\xi)$ se designa entonces como factor de peso y se dice -- que las funciones son ortogonales con factor de peso $\omega(x)$.

Un grupo de funciones que es ortogonal, se puede deducir, mediante le empleo de las ecs. A-3.1.1 y A-3.1.2, por ejemplo esco $\xi_0 = -1$, $\xi_1 = 1$, intentemos formar un conjunto - de funciones ortogonales en la forma de polinomios; Supongase que

$$\phi_0 = 1 \quad , \quad \phi_1 = \xi$$

con un factor de peso $\omega(\xi)=1$. Como se ve al introducir estas funciones en la ec. A-3.2.1, ϕ_0 ϕ_1, son ortogonales. Supóngase ahora que el siguiente polinomio debe ser de grado 2, y de la forma

$$\phi_2 = a_0 + a_2\xi^2 \qquad \text{A-3.2.3}$$

las constantes, se determinan de las condiciones,

$$\left.\begin{aligned} &\int \phi_0\,\phi_2\,d\xi = 0 \\ &\int \phi_1\,\phi_2\,d\xi = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{A-3.2.4}$$

y así resulta

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) = P_2 \qquad \text{A-3.2.5}$$

y en forma análoga,

$$\phi_3 = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi) = P_3 \qquad \text{A-3.2.5}$$

Los polinomios que así resultan se conocen como polinomios de Legendre y sus propiedades son

$$\int_{-1}^{1} P_i(\xi)\,P_j(\xi)\,d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{1} P_i^2(\xi)\,d\xi = \frac{2}{2i+1} \qquad \text{A-3.2.6}$$

Estos polinomics, pueden escribirse,

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= \zeta \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3\zeta^2-1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5\zeta^3-3\zeta) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35\zeta^4-30\zeta^2+3) \\ P_5 &= \frac{1}{8}(63\zeta^5-70\zeta^3+15\zeta) \end{aligned}\right\} \qquad \text{A-3.2.7}$$

y se puede demostrar que

$$\left.\begin{aligned} 1 &= P_0 \\ \zeta &= P_1 \\ \zeta^2 &= \frac{1}{3}(2P_2+P_0) \\ \zeta^3 &= \frac{1}{5}(2P_3+3P_1) \\ \zeta^4 &= \frac{1}{35}(8P_4+20P_2+7P_0) \\ \zeta^5 &= \frac{1}{63}(8P_5+28P_3+27P_1) \end{aligned}\right\} \qquad \text{A-3.2.8}$$

Estos polinomios, satisfacen la ecuación diferencial

$$(1-\zeta^2)\frac{d^2y}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{dy}{d\zeta} + p(p+1)\,y = 0 \qquad \text{A-3.2.9}$$

cuando p es un entero positivo.

Las mismas relaciones deducidas antes para los cinco prime- ros polinomios de Legendre, pueden deducirse como en caso parti cular de la fórmula de Rodríguez. Los polinomios se deducen, en la forma

$$P_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n}(1-\xi^2)^n \qquad \text{A-3.2.10}$$

Los resultados que aquí se han deducido, se utilizarán en el capítulo 4, aprovechando la propiedad de ortogonalidad.

En la fig. A-3.2.1, se muestran en forma gráfica algunas de estas funciones. En esta figura, puede verse que la propiedad de ortogonalidad de las funciones $P_k(\xi)$ para $k = 2$, implica que el area comprendida entre el eje ξ y la curva del polinomio es cero y que además su momento estatico o su valor medio, es nulo. Dicho de otra manera que su fuerza y su momento resultante son cero, si se piensa de las funciones como distribuciones de esfuerzo en una sección.

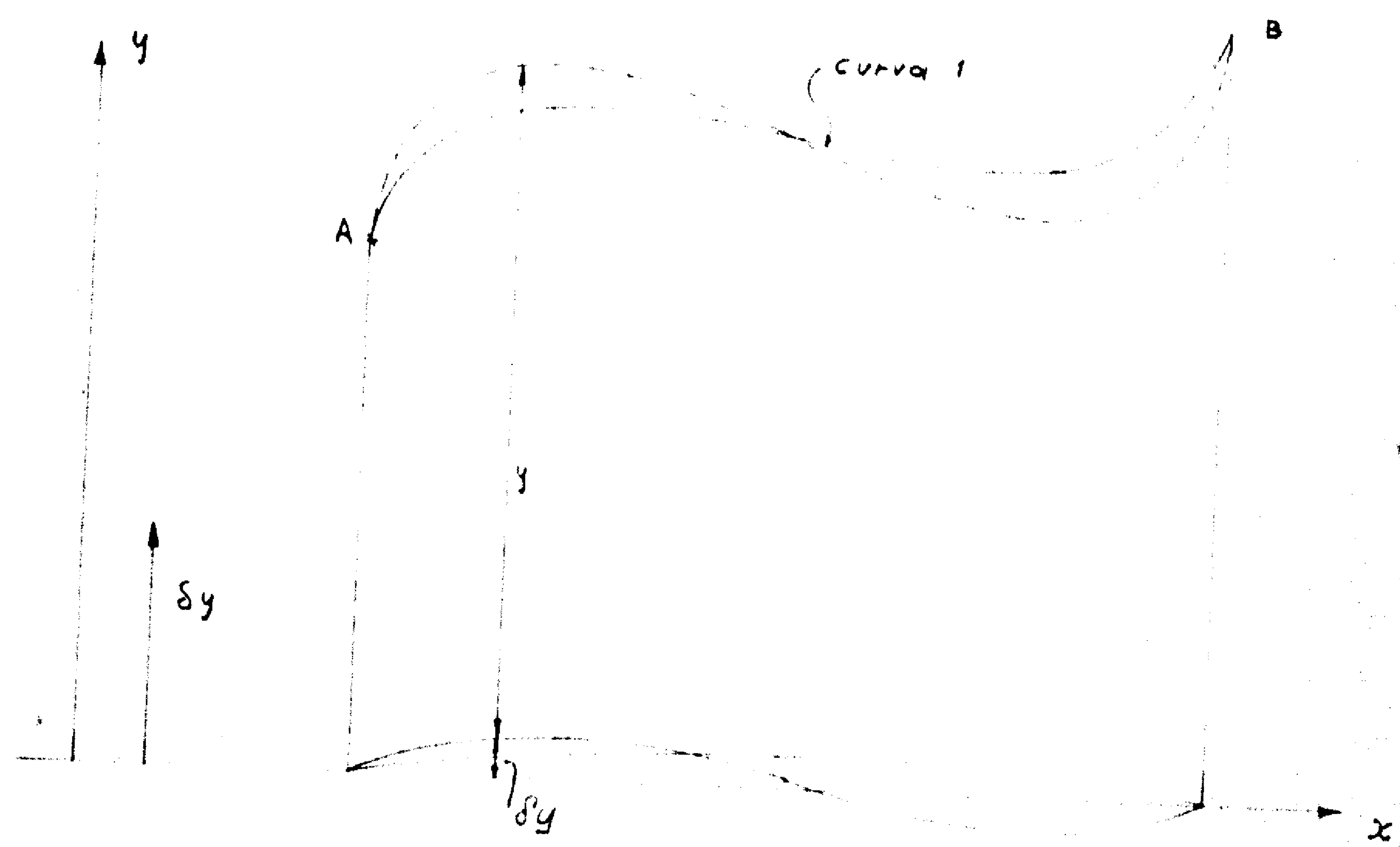
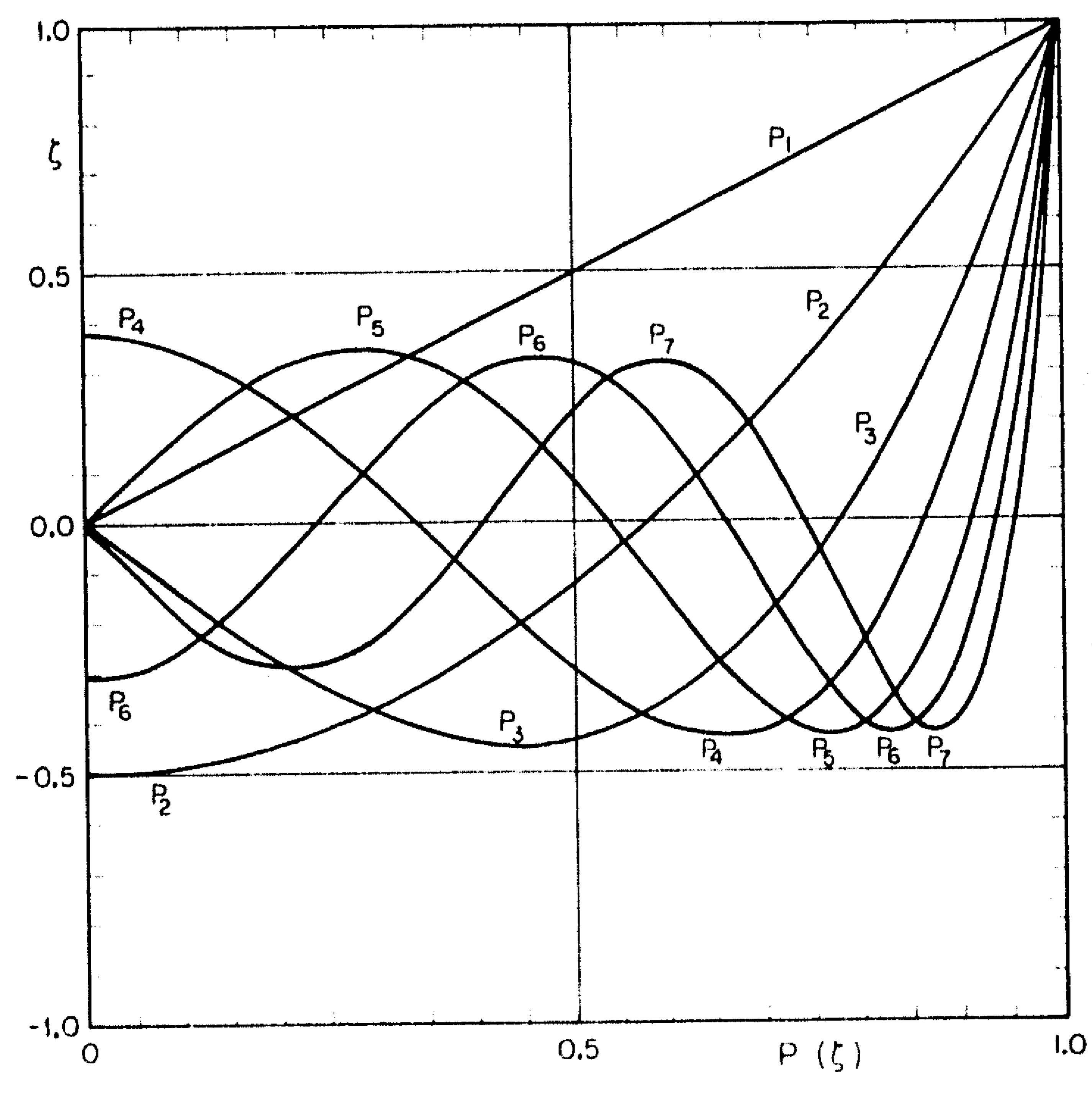


fig A 3.1.1



POLINOMIO DE LEGENDRE

FIG. A3.2

APENDICE A-4

ECUACIONES DE EQUILIBRIO

En el apéndice presente se deducen las ecuaciones del elemento infinitamente pequeño contenido en el cascarón y mediante integración a través del espesor se deducen las ecuaciones de equilibrio en un elemento finito de cascarón. El elemento infinitamente pequeño se caracteriza porque sus tres dimensiones son cantidades diferenciales, en tanto que el elemento designado finito está definido por dos dimensiones diferenciales y una de magnitud considerable e igual al espesor . Como se indica en la figura A1 al pasar de la superficie media a una superficie paralela y que dista Z de ella, las mismas cantidades dp_1 y dp_2 dan lugar a elementos distintos de volumen.

Si se hace $dZ = \zeta$ en ambos casos, solamente existirá la diferencia entre las magnitudes α_1 , α_2 y α_1', α_2', cuyo cociente se designa:

$$C_1 = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} = \left(1 + \frac{Z}{R_1}\right)$$
$$C_2 = \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} = \left(1 + \frac{Z}{R_2}\right) \qquad (A4.1)$$

El grupo de ecuaciones A4.1 es estrictamente válido en un sistema de referencia ortogonal y de curvatura principal, en tanto que sólo es aproximadamente válido en un sistema ortogonal y no de curvatura principal.

El área elemental en la superficie paralela a la superficie media es:

$$dS' = \sqrt{g}\, d\beta_1\, d\beta_2 \qquad (A4.2)$$

y en la superficie media

$$dS = \sqrt{a}\; d\beta_1\; d\beta_2 \qquad (A4.3)$$

utilizando la notación

$$h = \sqrt{g/a} \qquad (A4.4)$$

se tiene

$$dS' = \sqrt{a}\, h\; d\beta_1\; d\beta_2 \qquad (A4.5)$$

El conjunto de esfuerzos que actúan en el elemento a una distancia z, tiene resultantes en cada una de las direcciones, una de las cuales es, por ejemplo,

$$\vec{R}_1 = \frac{\sqrt{a}\, h}{\alpha_1}\left[C_1 \sigma_{11} \vec{T}_1 + C_2 \sigma_{12} \vec{T}_2 + \sigma_{13} \vec{n} \right] \qquad (A4.6)$$

que representa la fuerza que actúa en la cara normal a la curva β_1 y es la suma de fuerzas por unidad del área en que actúan. En la figura A4.2, se muestran los esfuerzos en las caras del elemento. Debido a que en una sistema ortogonal, se tiene $\sqrt{a} = \alpha_1\, \alpha_2$, de donde,

$$\vec{R}_1 = \alpha_2 h \left(C_1 \sigma_{11} \vec{T}_1 + C_2 \sigma_{12} \vec{T}_2 + \sigma_{13} \vec{n} \right) \qquad (A4.7)$$

análogamente,

$$\vec{R}_2 = \alpha_1 h \left(C_2 \sigma_{22} \vec{T}_2 + C_1 \sigma_{21} \vec{T}_1 + \sigma_{23} \vec{n} \right) \qquad (A4.8)$$

$$\vec{R}_3 = \alpha_1 \alpha_2 h \left(C_1 \sigma_{31} \vec{T}_1 + C_2 \sigma_{32} \vec{T}_2 + \sigma_{33} \vec{n} \right) \qquad (A4.9)$$

estas resultantes están valuadas por unidad de $d\beta_1$ y de $d\beta_2$.

En un cubo elemental, como el que se muestra en la figura

A6.3, al pasar de una cara a la siguiente es una cierta dirección, las resultantes experimentan incrementos. Si se suman las resultantes y sus incrementos, tomando en cuenta el signo relativo, se deduce la condición de equilibrio. Esta condición es

$$\left(R_1 + \frac{\partial R_1}{\partial \beta_1} + R_2 + \frac{\partial R_2}{\partial \beta_2} + R_3 + \frac{\partial R_3}{\partial Z}\right)$$

$$- \left(\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3\right) = 0$$

quedando entonces

$$\vec{R}_{1,1} + \vec{R}_{2,2} + \vec{R}_{3,3} = 0 \qquad \text{(A4.10)}$$

en que $Z = 2Z/t$ y se le ha asignado el índice 3 para indicar la derivada con respecto a ella.

Tomando en cuenta las expresiones correspondientes a las resultantes $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ y $\vec{R}_3$ (ecuaciones A4.7-9), así como las ecuaciones de Gauss-Weingarten del apéndice A1, es posible deducir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de equilibrio en el elemento infinitesimal.

Ecuación A

$$\left[h\alpha_2(c_1\sigma_{11})\right]_{,1} + \left[\alpha_1 c_1(h\sigma_{12})\right]_{,2}$$

$$- \alpha_{2,1}\, h(c_2\sigma_{22}) + \alpha_{1,2}(c_1 + c_2)(h\sigma_{12})$$

$$+ \left[h\sigma_{31}\alpha_1\alpha_2 c_1\right]_{,3} + \left[\alpha_1\alpha_2 h \frac{\sigma_{31}}{R_1}\right] = 0 \qquad \text{(A4.11)}$$

Ecuación B

$$\left[\alpha_2 c_2 h\sigma_{21}\right]_{,1} + \left[h\alpha_1(c_2\sigma_{22})\right]_{,2}$$

$$- \alpha_{1,2}\, h(c_1\sigma_{11}) + \alpha_{2,1}(c_1 + c_2)(h\sigma_{21})$$

$$+ \left[h\sigma_{32} c_2\alpha_1\alpha_2\right]_{,3} + \left[h\alpha_1\alpha_2\sigma_{33}\frac{1}{R_2}\right] = 0 \qquad \text{(A4.12)}$$

Ecuación C

$$\frac{1}{R_1}\left(h c_1 \sigma_{11}\right)+\frac{1}{R_2}\left(h c_2 \sigma_{22}\right)-\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\left[\alpha_2 h \sigma_{31}\right]_{,1}\right.$$

$$\left.+\left[\alpha_1 h \sigma_{32}\right]_{,2}\right\}=\left(h \sigma_{33}\right)_{,3} \qquad (A4.13)$$

Una vez deducido el sistema de ecuaciones de equilibrio para el elemento infinitesimal, es posible establecer las que corresponden al elemento finito. Con este fin, se introduce ahora la siguiente notación, que difiere únicamente en detalles con respecto a las utilizadas por Love[5], por Vlasov[26] y por sus seguidores:

Fuerzas

$$N_1=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h c_1 \sigma_{11}\, dz \qquad Q_1=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h \sigma_{31}\, dz$$

$$N_2=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h c_2 \sigma_{22}\, dz \qquad Q_2=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h \sigma_{32}\, dz \qquad (A4.14)$$

$$N_{21}=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h c_2 \sigma_{21}\, dz \qquad \int_{-1}^{1} h \sigma_{33,3}\, dz'=\begin{cases}(p+q)/2 & \text{para } z=+\frac{t}{2}\\ (p-q)/2 & \text{para } z=-\frac{t}{2}\end{cases}$$

$$N_{12}=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h c_1 \sigma_{12}\, dz$$

Momentos

$$M_1 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h_1 c_1 \sigma_{11} \, z \, dz$$

$$M_2 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h c_2 \sigma_{22} \, z \, dz$$

$$M_{12} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h c_1 \sigma_{12} \, z \, dz \qquad \text{(A4.15)}$$

$$M_{21} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h c_2 \sigma_{21} \, z \, dz$$

Ahora integrando a través del espesor cada una de las ecuaciones A, B y C, es posible deducir el primer grupo de tres ecuaciones de equilibrio de las fuerzas definidas en el grupo de ecuaciones A4.14. Procediendo a integrar en el espesor se deduce:

Ecuación D (A)+

$$\left[\alpha_2 N_1\right]_{,1} + \left[\alpha_1 S_{12}\right]_{,2} - \alpha_{2,1} N_2 + \alpha_{1,2} S_{21} + \alpha_1 \alpha_2 \frac{1}{R_1} Q_1 = S_1 \qquad \text{(A4.16)}$$

Ecuación E (B)

$$\left[\alpha_1 N_2\right]_{,2} + \left[\alpha_2 S_{21}\right]_{,1} - \alpha_{1,2} N_1 + \alpha_{2,1} S_{12} + \alpha_1 \alpha_2 \frac{1}{R_2} Q_2 = S_2 \qquad \text{(A4.17)}$$

Ecuación F (C)

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \left(\alpha_2 Q_1\right)_{,1} + \left(\alpha_1 Q_2\right)_{,2} \right\} = p \qquad \text{(A4.18)}$$

En estas ecuaciones, S_1 y S_2 son las fuerzas tangenciales en la dirección de las curvas de referencia y sobre la superficie; además se ha supuesto $q = o$.

+Las letras en paréntesis, indican la ecuación anterior de que fué deducida la ecuación.

Las ecuaciones que corresponden al equilibrio de momentos se deducen de las A, B y C mediante multiplicación por Z e integración a través del espesor. Así utilizando las definiciones del grupo de ecuaciones A4.15, se deduce el grupo de ecuaciones de equilibrio para el elemento finito en la forma:

Ecuación G (A)[+]

$$\left[\alpha_2 M_1\right]_{,1} + \left[\alpha_1 M_{12}\right]_{,2} - \alpha_{2,1} M_2 + \alpha_{1,2} M_{21} - \alpha_1 \alpha_2 Q_1 = 0 \qquad (A4.19)$$

Ecuación H (B)

$$\left[\alpha_2 M_{21}\right]_{,1} + \left[\alpha_1 M_2\right]_{,2} - \alpha_{1,2} M_1 + \alpha_{2,1} M_{12} - \alpha_1 \alpha_2 Q_2 = 0 \qquad (A4.20)$$

Ecuación I (C)

$$S_{12} - S_{21} + \frac{M_{21}}{R_1} - \frac{M_{12}}{R_2} = 0 \qquad (A4.21)$$

Si en la ecuación A4.21 se sustituyen las definiciones correspondientes a T_{12} y T_{21} como se especifica en el grupo de ecuaciones A4.14 y las correspondientes a M_{12} y M_{21} especificados en el grupo de ecuaciones A4.15, y si además se utilizan las definiciones de C_1 y C_2, se puede establecer que la ecuación A4.21 se convierte en

$$\int_{-t/2}^{t/2} h\,\sigma_{21}\left(C_1 - C_2\right) dz - \int_{-t/2}^{t/2} h\,\sigma_{12}\left(C_2 \frac{z}{R_1} - C_1 \frac{z}{R_2}\right) dz = 0$$

pero:

$$C_1 - C_2 = \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) - \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) = z\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$C_2 \frac{z}{R_1} - C_1 \frac{z}{R_2} = \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)\frac{z}{R_1} - \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)\frac{z}{R_2} = z\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

de manera que la ecuación A4.21 se reduce a la forma

+Aquí nuevamente la letra en paréntesis indica la ecuación de la que se dedujo la nueva ecuación.

$$\int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{12} - \sigma_{21})\, dz = 0$$

es decir se satisface idénticamente debido a la simetría del tensor esfuerzo.

APENDICE A5

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD Y ANALOGIA ESTATICO-GEOMETRICA DE LA TEORIA DE LOS CASCARONES DELGADOS.

En los desarrollos de este apendice, se usará un sistema curvilineo ortogonal de referencia pero no necesariamente de curvatura principal. El modelo de deformacion que aqui se emplea, ha sido usado por Gren y Zerna[52], Zerna[54]; Goldenveizer[53], Mushtari y Galimov[73], M. Rodriguez Caballero[54] Reissner[56], Este modelo se ilustra en las figs A5.1, A5.2 y A5.3. En la fig A5.1 se muestra el vector desplazamiento y en la fig A5.2 se muestra el vector rotacion, cada uno con sus componentes respectivas. La superficie deformada se caracteriza por el vector

$$\vec{R}^{*} = \vec{R} + \vec{U} \qquad (A5.1)$$

referido a las coordenadas β_1 y β_2 y que se expresa referido a las coordenadas β_1^{*} y β_2^{*} que corresponden a la superficie deformada como

$$\vec{R}^{**} = \vec{R}^{*}(\beta_1^{*}, \beta_2^{*}) \qquad (A5.2)$$

En la ec A5.1, el vector $\vec{U}$ se escribe,

$$\vec{U} = u_1 \vec{T_1} + u_2 \vec{T_2} + w \vec{n} \qquad (A5.3)$$

El sistema de referencia originalmente ortogonal se convierte, despues de la deformacion, en un sistema cuyo ángulo vale

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \omega$$

(A-5.4)

siendo

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

(A-5.5)

Las cantidades ω_1 y ω_2 se muestran en la figura A-5.3. Debido a la diferencia de magnitud de estos ángulos, el vector normal a la superficie media antes de la deformación, sufre una rotación angular alrededor de sí mismo cuya magnitud es

$$\delta = \omega_2 - \omega_1$$

(A-5.6)

El vector $\vec{n}^{*}$ normal a la superficie deformada, puede representarse en términos del vector normal $\vec{n}$ de la superficie original y en términos de los ángulos γ_1 y γ_2 que, como se muestra en la fig. A-5.4, son las cantidades que giran los vectores base unitarios $\vec{\tau}_1$ y $\vec{\tau}_2$, de la superficie original para convertirse en los vectores $\vec{\tau}_1^{*}$ y $\vec{\tau}_2^{*}$ de la superficie deformada. Entonces

$$\vec{n}^{*} = \vec{n} - \gamma_1 \vec{\tau}_1 - \gamma_2 \vec{\tau}_2$$

(A-5.7)

En cuanto al vector $\vec{\Omega}$ que representa la rotación que durante la deformación experimenta el vector normal a la superficie media, es decir la cantidad vectorial que tiene que girar el -- vector normal a la superficie media original para convertirse - en el correspondiente a la superficie deformada, se puede escribir

$$\vec{\Omega} = -\gamma_2 \vec{T_1} + \gamma_1 \vec{T_2} + \delta \vec{n} \qquad \text{(A-5.8)}$$

según se deduce de las consideraciones introducidas en las ecuaciones A-5.6 y A-5.7. También puede deducirse haciendo $\vec{U} = 0$, es decir llevando el origen local a coincidir en la superficie media original. En este caso, el vector

$$\vec{m} = \vec{n}^{*} - \vec{n} \qquad \text{(A-5.9)}$$

que se ilustra en la figura A-5.5 es paralelo a la superficie - media y se puede expresar en la forma

$$\vec{n} \times \vec{\Omega} = \vec{m} \qquad \text{(A-5.10)}$$

en cuyo caso se comprueba la exactitud de la ecuación A-5.8 a - través de las ecuaciones A-5.6 y A-5.7.

Las cantidades utilizadas pueden conocerse aprovechando el hecho de que el sistema local original es ortogonal. Los vectores base que corresponden a la superficie deformada se deducen de las ecuaciones A-5.1 y A-1. y son

$$\vec{a}_{\alpha}^{*} = \vec{R}_{,\alpha} + \vec{U}_{,\alpha} \qquad (\alpha = 1,2) \qquad \text{(A-5.11)}$$

con magnitudes

$$a_\alpha^* = (\vec{a}_\alpha^* \cdot \vec{a}_\alpha^*)^{\frac{1}{2}} \qquad (\alpha = 1,2) \qquad \text{(A-5.12)}$$

quedando entonces

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\vec{U}_{,1}}{a_1^*} \cdot \vec{n} \doteq \frac{\vec{U}_{,1}}{a_1} \cdot \vec{n} \\ \gamma_2 &= \frac{\vec{U}_{,2}}{a_2} \cdot \vec{n} \end{aligned} \qquad \text{(A-5.13)}$$

Estas relaciones aunque aproximadas son adecuadas en la teoría de deformaciones pequeñas (en que $\varepsilon \leq 0.005$). Si se designan los vectores unitarios sobre la superficie deformada como $\vec{T}_\alpha^*$ es decir,

$$T_\alpha^* = \frac{\vec{a}_\alpha^*}{a_\alpha^*} \qquad \text{(A-5.14)}$$

se puede comprobar que

$$\begin{aligned} \omega_1 &\doteq \vec{T}_1^* \cdot \vec{T}_2 \\ \omega_2 &\doteq \vec{T}_2^* \cdot \vec{T}_1 \end{aligned} \qquad \text{(A-5.15)}$$

estas ecuaciones se comprueban en la Fig A5.3.

1. <u>Primera forma fundamental en la superficie deformada</u>

De acuerdo con las nociones introducidas en el apéndice A-1, la primera forma fundamental se expresa

$$a_{\alpha\beta}^* = \vec{a}_\alpha^* \cdot \vec{a}_\beta^*$$

y de acuerdo con la ec. A-5.1,

$$a^{*}_{\alpha\beta} = (\vec{a}_{\alpha} + \vec{U}_{,\alpha}) \cdot (\vec{a}_{\beta} + \vec{U}_{,\beta}) \qquad \text{(A-5.17)}$$

en que se ha introducido la aproximación utilizada en el grupo de ecuaciones A-5.13. Desarrollando la ecuación A-5.17 se puede escribir

$$a^{*}_{\alpha\beta} = \left(1 + \frac{\vec{U}_{,\alpha}}{\alpha_{\alpha}} \cdot \vec{T}_{\beta} + \frac{\vec{U}_{,\beta}}{\alpha_{\beta}} \cdot \vec{T}_{\alpha}\right) \alpha_{\alpha} \alpha_{\beta} \qquad \text{(A-5.19)}$$

e introduciendo la notación

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \frac{\vec{U}_{,\alpha}}{\alpha_{\alpha}} \cdot \vec{T}_{\beta} \\ e_{\beta\alpha} &= \frac{\vec{U}_{,\beta}}{\alpha_{\beta}} \cdot \vec{T}_{\alpha} \end{aligned} \qquad \text{(A-5.20)}$$

se escribirá

$$a^{*}_{\alpha\beta} = (1 + e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha})\, \alpha_{\alpha} \alpha_{\beta} \qquad \text{(A-5.21)}$$

donde $\varepsilon_{\alpha\beta}$ se designa tensor deformación.

Las cantidades expresadas en el grupo de ecuaciones A-5.20, son realmente las deformaciones tanto lineales como angulares - según se desprende de lo siguiente; partiendo de la primera - de las ecs. A-5.15 se puede ver que

$$\omega_1 = \frac{(\vec{a}_1 + \vec{U}_{,1})}{\alpha_1} \cdot \frac{\vec{a}_2}{\alpha_2}$$

Entonces

$$\omega_1 = \frac{\vec{U}_{,1}}{\alpha_1} \cdot \vec{T}_2$$

que coincide con la expresión de ε_{12} obtenida a partir de las definiciones A-5.20 cuando se hace $\varepsilon_{12} = \omega_1$. En general, se usará la siguiente equivalencia;

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\vec{U}_{,1}}{\alpha_1} \cdot \vec{T}_1 = e_1 \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\vec{U}_{,2}}{\alpha_2} \cdot \vec{T}_2 = e_2 \\
\varepsilon_{12} &= \frac{\vec{U}_{,1}}{\alpha_1} \cdot \vec{T}_2 = \omega_1 \qquad\qquad \text{(A-5.22)} \\
\varepsilon_{21} &= \frac{\vec{U}_{,2}}{\alpha_2} \cdot \vec{T}_1 = \omega_2
\end{aligned}$$

Como se ve, las cantidades e_1, e_2, ω_1 y ω_2 se deducen como el producto escalar de dos vectores análogamente a lo que ocurre con las cantidades γ_1 y γ_2. En un sistema de referencia ortogonal se puede escribir usando los grupos de ecuaciones A-5.22 y A-5.13,

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{U}_{,1}}{\alpha_1} &= e_1 \vec{T}_1 + \omega_1 \vec{T}_2 + \gamma_1 \vec{n} \\
\frac{\vec{U}_{,2}}{\alpha_2} &= e_2 \vec{T}_2 + \omega_2 \vec{T}_1 + \gamma_2 \vec{n} \qquad\qquad \text{(A-5.23)}
\end{aligned}$$

si se toman en cuenta las ecuaciones A-5.12 y A-5.19, se puede ver que

$$\begin{aligned}
\alpha_1^* &= \alpha_1 (1 + 2e_1) \qquad\qquad \text{(A-5.24)} \\
\alpha_2^* &= \alpha_2 (1 + 2e_2)
\end{aligned}$$

2. Segunda forma fundamental en la superficie deformada

Nuevamente según la definición de tensor de curvatura introducida en el apéndice A-1, se tiene ahora para la superficie deformada

$$
\begin{aligned}
b^{*}_{\alpha\beta} &= -\vec{R}^{*}_{,\alpha}\cdot\vec{\eta}^{*}_{,\beta} \\
&= -(\vec{a}_{\alpha}+\vec{U}_{,\alpha})\cdot(\vec{\eta}_{,\beta}+\vec{m}_{,\beta}) \\
&= b_{\alpha\beta} - \vec{a}_{\alpha}\cdot\vec{m}_{,\beta} - \underline{\vec{U}_{,\alpha}\cdot\vec{\eta}_{,\beta}} - \underline{\underline{\vec{U}_{,\alpha}\cdot\vec{m}_{,\beta}}} \qquad \text{(A-5.25)}
\end{aligned}
$$

El término subrayado dos veces es un término no lineal que no se considerará en esta formulación que trata con desplazamientos u_1 y u_2 pequeños. El término subrayado una vez, contiene cantidades del orden de $\frac{e}{R}$ que son despreciables en el tipo de cascarones que aquí se estudia; por ejemplo haciendo $\alpha=1, \beta=1$ se puede ver que

$$
\vec{U}_{,1}\cdot\vec{\eta}_{,1} = u_{1,1}\frac{a_1}{R_1} - u_{2,1}\frac{a_1}{R_{12}} + \frac{a_1^{2}}{R_{12}}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_{12}}\right)u + \frac{u\,a_{1}a_{2,1}}{a_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_{12}}\right)
$$

de donde se comprueba lo anterior. Por tanto la ecuación A-5.25 puede quedar

$$
b^{*}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} = -\vec{a}_{\alpha}\cdot\vec{m}_{,\beta} \qquad \text{(A-5.26)}
$$

y representa el incremento en la curvatura de la superficie, al verificarse la deformación. Las curvaturas reales en la superficie original, se representaron en el apéndice A-1 como

$$k_{\alpha\beta} = - \frac{b_{\alpha\beta}}{d_\alpha d_\beta}$$

en forma análoga los cambios reales de curvatura al pasar de - la superficie original a la deformada se expresan como

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \frac{b^*_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}}{\alpha_\alpha \alpha_\beta} \qquad \text{(A-5.28)}$$

o sea

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = - \vec{T}_\alpha \cdot \frac{\vec{m}_{,\beta}}{\alpha_\beta}$$
$$\mathcal{K}_{\beta\alpha} = - \vec{T}_\beta \cdot \frac{\vec{m}_{,\alpha}}{\alpha_\alpha} \qquad \text{(A-5.29)}$$

observándose así entonces la analogía existente con el grupo de ecuaciones A-5.20. Tomando en cuenta la ecuación A-5.10 que - expresa al vector $\vec{m}$ en términos de $\vec{\Omega}$, se puede escribir

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \vec{n} \times \vec{T}_\alpha \cdot \frac{\vec{\Omega}_{,\beta}}{\alpha_\beta} \qquad \text{(A-5.30)}$$

y asignando los valores adecuados a los índices α y β

$$\mathcal{K}_{11} = \vec{T}_2 \cdot \frac{\vec{\Omega}_{,1}}{\alpha_1} = \mathcal{K}_1$$
$$\mathcal{K}_{22} = -\vec{T}_1 \cdot \frac{\vec{\Omega}_{,2}}{\alpha_2} = \mathcal{K}_2$$
$$\mathcal{K}_{12} = \vec{T}_2 \cdot \frac{\vec{\Omega}_{,2}}{\alpha_2} = \tau_1 \qquad \text{(A-5.31)}$$
$$\mathcal{K}_{21} = -\vec{T}_1 \cdot \frac{\vec{\Omega}_{,1}}{\alpha_1} = \tau_2$$

Empleando estas expresiones es posible escribir las derivadas del vector $\vec{\Omega}$ en forma análoga a como se hizo con las --

derivadas de $\vec{U}$. Para este fín, es necesario introducir las cantidades

$$\pi_1 = \frac{\vec{\Omega}_{,1}}{\alpha_1} \cdot \vec{n}$$
$$\pi_2 = \frac{\vec{\Omega}_{,2}}{\alpha_2} \cdot \vec{n} \qquad \text{(A-5.32)}$$

encontrándo

$$\frac{\vec{\Omega}_{,1}}{\alpha_1} = -\tau_2 \vec{T}_1 + k_1 \vec{T}_2 + \pi_1 \vec{n}$$
$$\frac{\vec{\Omega}_{,2}}{\alpha_2} = -k_2 \vec{T}_1 + \tau_1 \vec{T}_2 + \pi_2 \vec{n} \qquad \text{(A-5.33)}$$

3.- Ecuaciones de compatibilidad

La deducción de las ecuaciones de compatibilidad requiere un estudio más cuidadoso que el que a menudo se presenta [35].- Dado que un estudio cuidadoso implica ciertas consideraciones generales, es mejor intentarlo con base en el cálculo tensorial. En otro apéndice de este trabajo se presenta una discusión de este tipo que tiene por objeto aclarar algunas de las cuestiones pertinentes y justificar lo que ahora habrá de presentarse, en notación vectorial. La presentación que ahora se hace fue discutida inicialmente por V. Z. Vlasov (ref. 26, p. 230) y ha sido ampliamente desarrollada por diversos autores rusos. La forma que aquí se cita es esencialmente análoga a la que presenta Goldenveizer [53]. La deformación de la superficie media se caracteriza mediante los vectores $\vec{U}$ y $\vec{\Omega}$. Estos vectores, como funciones de las coordenadas de la superficie, serán continuos si se verifica que el orden en la derivación no altera el resultado, es decir si se cumple

$$\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial\beta_2}\right) = \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial\beta_1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\beta_2}\right) = \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\beta_1}\right) \qquad \text{(A-5.34)}$$

De las ecuaciones A-5.23 y A-5.33, se conocen las primeras derivadas de los vectores $\vec{U}$ y $\vec{\Omega}$. Al verificar la derivación como se indica en el grupo de ecuaciones A-5.34 se deduce, una ecuación vectorial de cada una de ellas. Así se obtiene para la primera ecuación,

$$\vec{T}_1\left[-(\omega_2\alpha_2)_{,1} + e_2\alpha_{1,2} - (\alpha_1 e_1)_{,2} + \omega_1\alpha_{2,1} - \alpha_1\alpha_2 T_1\right] +$$

$$\vec{T}_2\left[(\alpha_2 e_2)_{,1} + \omega_2\alpha_{1,2} - (\omega_1\alpha_1)_{,2} - e_1\alpha_{2,1} - \alpha_1\alpha_2 T_2\right] + \qquad \text{(A-5.35)}$$

$$\vec{n}\left[\frac{\omega_2\alpha_1\alpha_2}{R_1} - \frac{e_2\alpha_1\alpha_2}{R_{12}} + \frac{\alpha_1\alpha_2 e_1}{R_{12}} + \frac{\omega_1\alpha_1\alpha_2}{R_2} - \alpha_1\alpha_2 e_{21} + \alpha_1\alpha_2 e_{12}\right] = \vec{0}$$

y al cancelar los coeficientes de los vectores base unitarios, se obtiene el siguiente primer sistema de ecuaciones de compatibilidad

$$-(\omega_2\alpha_2)_{,1} + e_2\alpha_{1,2} - (\alpha_1 e_1)_{,2} + \omega_1\alpha_{2,1} - \alpha_1\alpha_2 T_1 = 0$$

$$(e_2\alpha_2)_{,1} + \omega_2\alpha_{1,2} - (\omega_1\alpha_1)_{,2} - e_1\alpha_{2,1} - \alpha_1\alpha_2 T_2 = 0 \qquad \text{(A-5.36)}$$

$$-\kappa_{21} + \kappa_{12} + \frac{\omega_2}{R_1} + \frac{\omega_1}{R_2} + \frac{e_1 - e_2}{R_{12}} = 0$$

En forma análoga, operando con la segunda ecuación del -- grupo A-5.34, es posible deducir el segundo sistema de ecuaciones de compatibilidad. Este segundo grupo de ecuaciones se escribe como:

$$
\begin{aligned}
&-(\alpha_2 \kappa_2)_{,1} + \alpha_{1,2} \kappa_{12} + (\alpha_1 \kappa_{21})_{,2} + \alpha_{2,1} \kappa_1 \\
&+ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_1} \gamma_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1}{R_{12}} = 0 \\
&\alpha_{1,2} \kappa_2 + (\alpha_2 \kappa_{12})_{,1} + \alpha_{2,1} \kappa_{21} - \alpha_1 (\kappa_1)_{,2} \\
&+ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_{12}} \gamma_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1}{R_1} = 0 \\
&\frac{\alpha_1 \alpha_2 \kappa_2}{R_1} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \kappa_1}{R_2} - \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\kappa_{12} + \kappa_{21})}{R_{12}} + (\alpha_2 \gamma_2)_{,1} - (\alpha_1 \gamma_1)_{,1} = 0
\end{aligned}
\qquad (A\text{-}5.37)
$$

Si resulta posible considerar que

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega}{2}$$

o lo que es lo mismo, cuando se acepta que $\delta = 0$ y en consecuencia puede escribirse

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau \qquad (A\text{-}5.38)$$

que se traduce en

$$\ell_{12}\,\gamma_1 = \ell_{21}\,\gamma_2 \qquad \text{(A-5.38)}$$

en que ℓ_{12} y ℓ_{21} son las curvaturas en la superficie como se define en el apéndice A-2.

Entonces el sistema de seis ecuaciones de compatibilidad contiene seis incógnitas que son $e_1, e_2, \omega, \kappa_1, \kappa_2$ y τ.

Mediante el desarrollo completo de las ecuaciones que definen a cada una de las variables que intervienen en el sistema de ecuaciones de compatibilidad, al hacer la sustitución en estas ecuaciones, es posible demostrar que se satisfacen idénticamente.

4. Forma explicita de las expresiones de $e_1, e_2, \omega, \tau, \kappa_1, \kappa_2$ π_1, π_2

Mediante el empleo adecuado de las ecuaciones de Gauss-Weingarten, deducidas en el apéndice A1, utilizando las ecuaciones A-5.22, A-5.31 y A-5.32 así como las definiciones de $\vec{U}$ y $\vec{\Omega}$ introducidas en las ecuaciones A-5.3 y A-5.8, es posible deducir las expresiones deseadas. Así para e_1, e_2 y ω

$$e_1 = \frac{u_{1,1}}{\alpha_1} + \frac{u_2\,\alpha_{1,2}}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{w}{R_1}$$

$$e_2 = \frac{u_{2,2}}{\alpha_2} + \frac{u_1\,\alpha_{2,1}}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{w}{R_2} \qquad \text{(A-5.39)}$$

$$\omega = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{u_2}{\alpha_2}\right)_{,1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{u_1}{\alpha_1}\right)_{,2} + \frac{2w}{R_{12}}$$

o utilizando las curvaturas en la superficie, l_{12} y l_{21}

$$e_1 = \frac{u_{1,1}}{\alpha_1} + l_{12} u_2 + k_1 w$$

$$e_2 = \frac{u_{2,2}}{\alpha_2} + l_{21} u_1 + k_2 w \qquad \text{(A-5.40)}$$

$$\omega = \frac{u_{2,1}}{\alpha_1} + \frac{u_{1,2}}{\alpha_1} - l_{12} u_1 - l_{21} u_2 + 2 k_{12} w$$

en que $k_1 = 1/R_1$, $k_2 = 1/R_2$ y $k_{12} = 1/R_{12}$

Los ángulos γ_1 y γ_2 que definen a las curvaturas pueden escribirse

$$\gamma_1 = -\frac{w_{,1}}{\alpha_1} - k_1 u_1 - k_{12} u_2$$

$$\gamma_2 = -\frac{w_{,2}}{\alpha_2} - k_2 u_2 - k_{12} u_1 \qquad \text{(A-5.41)}$$

y los cambios de curvatura se expresan entonces en forma análoga a las deformaciones e_1, e_2 y ω , de manera que utilizando las curvaturas en la superficie se tiene,

$$\kappa_1 = -\frac{\gamma_{1,1}}{\alpha_1} - l_{12} \gamma_2$$

$$\mathcal{K}_2 = -\frac{\gamma_{2,2}}{\alpha_2} - \ell_{21}\gamma_1$$

$$\tau_1 = -\frac{\gamma_{1,2}}{\alpha_2} - \ell_{21}\gamma_2 \qquad \text{(A-5.42)}$$

$$\tau_2 = -\frac{\gamma_{2,1}}{\alpha_1} - \ell_{12}\gamma_1$$

Haciendo las sustituciones pertinentes, se encuentra para $\mathcal{K}_1$,

$$\mathcal{K}_1 = +\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} + \frac{W_{,2}}{\alpha_2}\ell_{12} \underline{- k_1 L_2 u - k_{12} l_{21} u_2}$$

$$\underline{+ \frac{k_{12}}{\alpha_1\alpha_2}\left[(u_1\alpha_1)_{,2} - (u_2\alpha_2)_{,1}\right] - \frac{1}{\alpha_1}\left[(k_1 u_1)_{,1} + (k_{12}u_2)_{,1}\right]}$$

Los términos subrayados suelen despreciarse en las formulaciones de autores soviéticos para los fines de la analogía estático-geométrica. Las cantidades subrayadas son realmente pequeñas para la mayoría de los cascarones usuales en ingeniería, de modo que puede escribirse:

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,1} + \frac{W_{,2}}{\alpha_2}\ell_{12}$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right)_{,2} + \frac{W_{,1}}{\alpha_1}\ell_{21} \qquad \text{(A-5.44)}$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)_{,2} + \ell_{21}\left(\frac{W_{,2}}{\alpha_2}\right) + \ell_{12}\left(\frac{W_{,1}}{\alpha_1}\right)$$

y así de acuerdo con las ecs. A-5.38

$$\Pi_1 =$$

$$\Pi_2 =$$

5. Relaciones no lineales entre deformaciones e_1, e_2 y ω, y desplazamiento w.

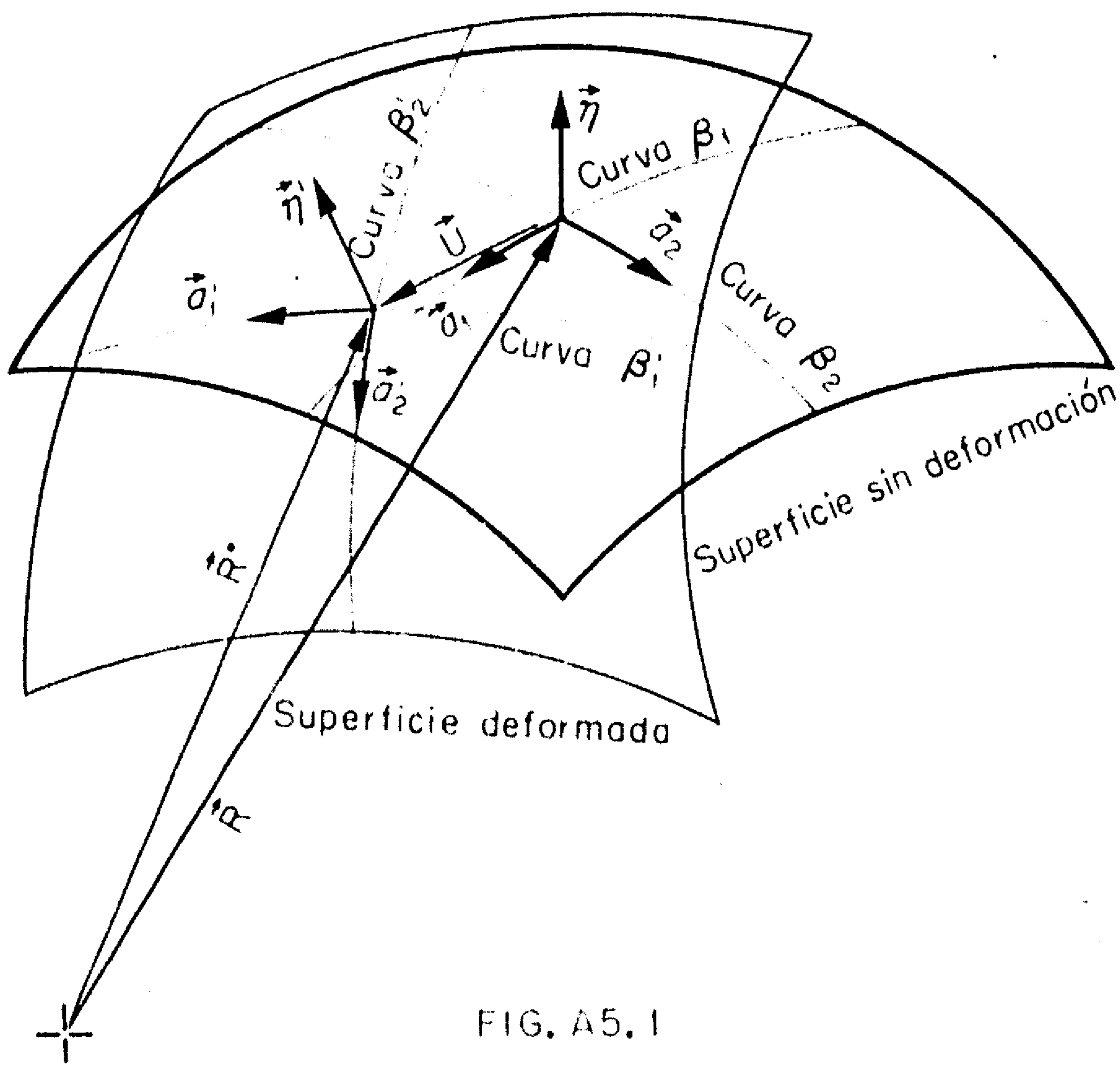
Las expresiones no lineales para las deformaciones, pueden deducirse de la definición del tensor deformación, en la forma

$$e_1 = \frac{u_{1,1}}{\alpha_1} + l_{12} u_2 + k_1 w + (k_1 w)^2 + \left(\frac{w_{,1}}{\alpha_1}\right)^2$$

$$e_2 = \frac{u_{2,2}}{\alpha_2} + l_{21} u_1 + k_2 w + (k_2 w)^2 + \left(\frac{w_{,2}}{\alpha_2}\right)^2$$

$$\omega = \frac{u_{1,2}}{\alpha_2} + \frac{u_{2,1}}{\alpha_1} + l_{12} u_1 + l_{21} u_2 + \qquad (5.45)$$

$$+ 2 k_{12} w + \left(\frac{w_{,1}\, w_{,2}}{\alpha_1\, \alpha_2}\right)$$



Curva β_2'
Curva β_1
Curva β_1'
Curva β_2
Superficie sin deformación
Superficie deformada

FIG. A5.1

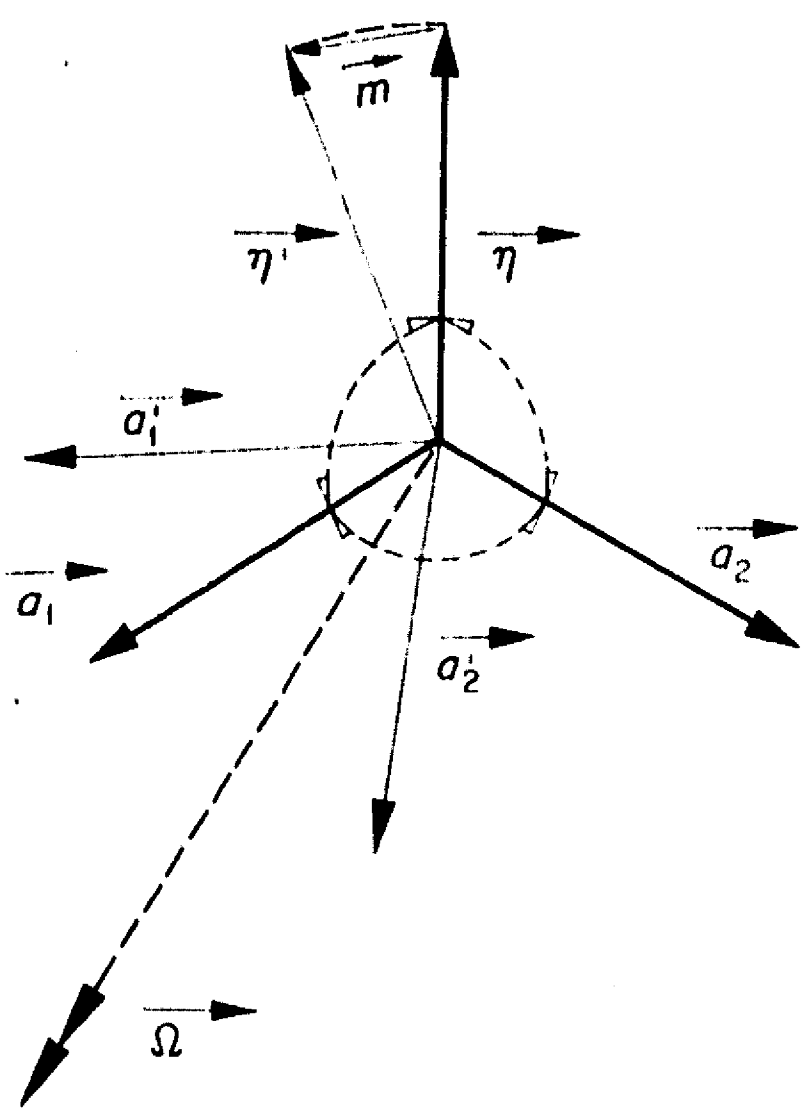


FIG. A5.2

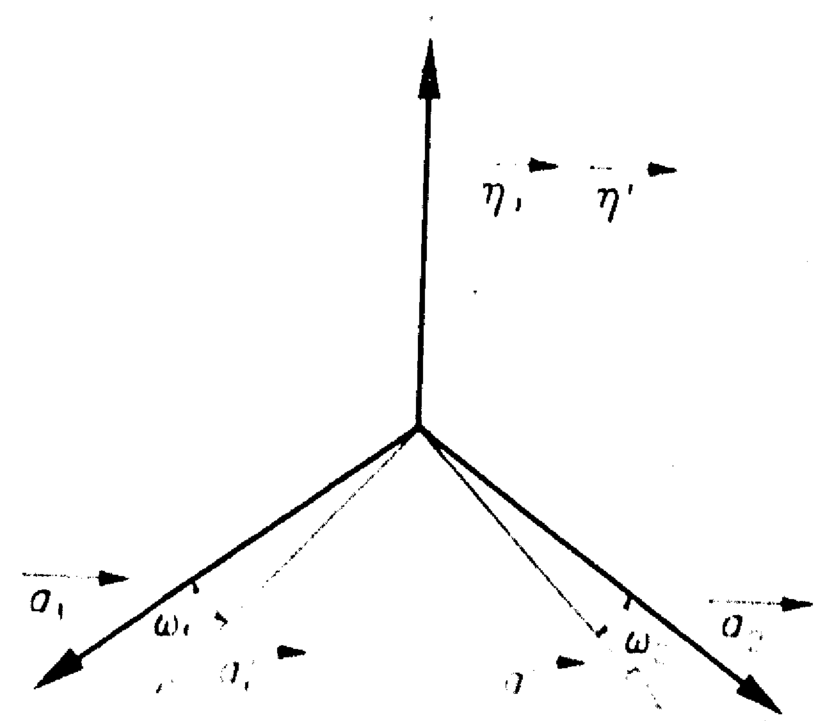


FIG. A5.3

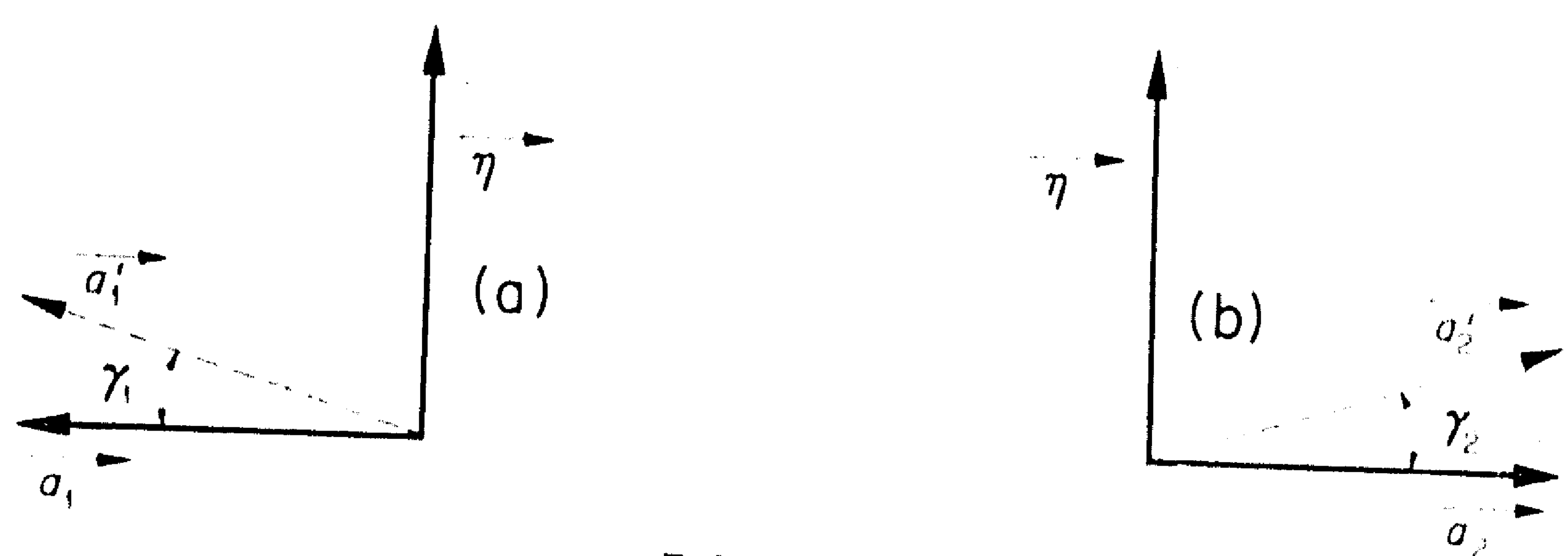


FIG. A5.4

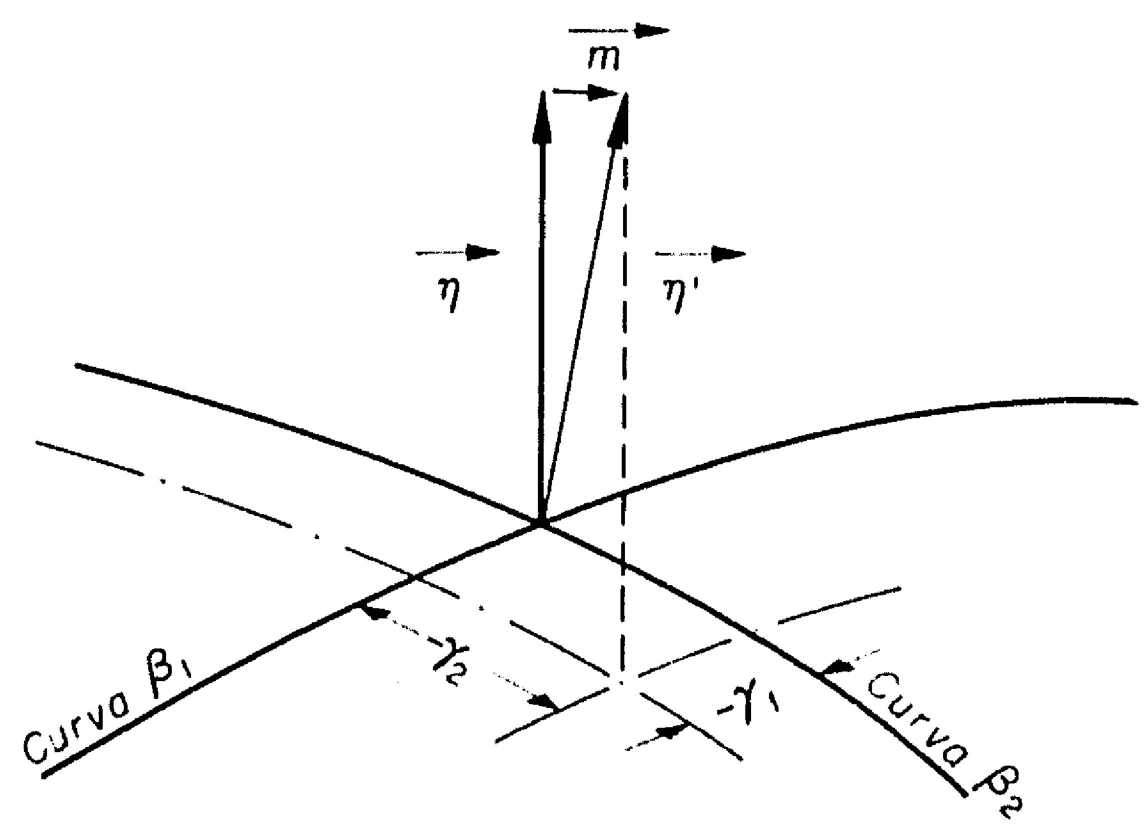


FIG. A5.5

APENDICE A6. MODELO TRIDIMENSIONAL SIMPLE

A6. Modelo de desplazamiento de una superficie paralela a la media y localizada entre las superficies extremas de un cascarón.

Un modelo de deformación que no adopte la hipótesis de Kirchoff o de las fibras normales rectas, puede ser

$$
\begin{aligned}
\bar{W} &= W + z^2 W^{(2)} \\
\bar{u}_\alpha &= u_\alpha^{o} + z\, u_\alpha^{(1)} + z^3 u_\alpha^{(3)}
\end{aligned}
\qquad \text{(A6-1)}
$$

en que $W^{(2)}, u_\alpha^{(1)}, u_\alpha^{(3)}$ son funciones que van a ser establecidas.

Un modelo quizá más interesante se puede escribir.

$$
\begin{aligned}
\bar{W} &= W + z W^{(1)} + z^2 W^{(2)} \\
\bar{u}_\alpha &= u_\alpha^{(o)} + z u_\alpha^{(1)} + z^2 u_\alpha^{(2)} + z^3 u_\alpha^{(3)}
\end{aligned}
\qquad \text{(A6-2)}
$$

o bien

$$\bar{W} = W + W^{(c)} \qquad \text{(A6-3}$$

en que $W^{(c)}$ representa una corrección al desplazamiento W y que se escribe

$$W^{(c)} = z W^{(1)} + z^2 W^{(2)} \qquad \text{(A6-4)}$$

así mismo

$$u_\alpha = \bar{\bar{u}}_\alpha^{(k)} + u_\alpha^{(c)} \qquad \text{(A6-5)}$$

con

$$
\begin{aligned}
u_\alpha^{(c)} &= -z\, u_\alpha^{(1)\prime\prime} + z^2 u_\alpha^{(2)} + z^3 u_\alpha^{(3)} \\
\bar{\bar{u}}_\alpha^{(k)} &= u_\alpha^{(o)} + z\, u_\alpha^{(1)\prime}
\end{aligned}
\qquad \text{(A6-6)}
$$

$\bar{\bar{u}}_\alpha^{(k)}$ y W son los desplazamientos que corresponden al modelo de Kirchhoff. La secuela que aquí se sigue para obtener los resultados que se deducen, son aplicables a los dos modelos de deformación de las ecuaciones A6-1 y A6-2 y en general a cualquier otro similar

En las ecs. A6-5 y A6-6 se ha introducido la separación:

$$u_\alpha^{(1)} = u_\alpha^{(1)\prime} + u_\alpha^{(1)\prime\prime} \tag{A6-7}$$

con lo cual se pretende representar la interacción entre las partes $\bar{\bar{u}}_\alpha^{(k)}$ y $u_\alpha^{(c)}$. Las cantidades $u_\alpha^{(1)}$, que hacen las veces de rotaciones, se pueden suponer formadas de dos partes, una de ellas debida a la hipótesis de Kirchhoff y la otra considerada adicional y debida al efecto de la componente de corrección. Así se puede expresar:

$$u_\alpha^{(1)} = -\gamma_\alpha + \varphi_\alpha \tag{A6-8}$$

en que se ha introducido

$$\varphi_\alpha = \frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_\alpha} \tag{A6-9}$$

y según la ecuación A6-7,

$$u_\alpha^{(1)\prime\prime} = \frac{\psi_{,\alpha}}{\alpha_\alpha} \tag{A6-10}$$

Poniendo en forma explícita los valores de γ_α^1 se tendrá

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w + z\, w^{(1)} + z^2 w^{(2)} \\ \bar{u}_\alpha &= u_\alpha + z\left(\frac{w_{,\alpha}}{\alpha_\alpha} + \frac{u_\alpha}{R_\alpha} + \frac{u_\beta}{R_{12}}\right) + z^2 u^{(2)} + z^3 u^{(3)} \end{aligned} \tag{A6-11}$$

en estas [illegible] que

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{10}\,\frac{1}{R} \tag{A6-12}$$

en que R es el mayor de los radios R_1 y R_2; debido a que, para valores mayores de $1/R_{12}$, las curvas ortogonales de referencia en la superficie media, dejan de ser ortogonales en las superficies paralelas y ésto modifica las ecuaciones de equilibrio y el valor de la deformación ω_{13} y ω_{23} (ver ec. A6-32).

De acuerdo con estas consideraciones, el vector que define el desplazamiento en el continuo tridimensional del cascaron es:

$$\vec{U} = u_1^{(0)}\vec{T}_1 + u_2^{(0)}\vec{T}_2 + \vec{m} z + z^2 (u_1^{(2)}\vec{T}_1 + u_2^{(2)}\vec{T}_2) + z^3 (u_1^{(3)}\vec{T}_1 + u_2^{(3)}\vec{T}_2) - (w + z w^{(1)} + z^2 w^{(2)})\vec{n}$$

de manera que para el modelo de Kirchhoff se tiene:

$$\vec{U} = u_1^{(0)}\vec{T}_1 + u_2^{(0)}\vec{T}_2 - (\gamma_1 - \frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}) z \vec{T}_1 - (\gamma_2 - \frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}) z \vec{T}_2 - w\vec{n} \qquad \text{(A6-14)}$$

y para la corrección:

$$\vec{U}^{(c)} = -(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}) z \vec{T}_1 - (\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}) z \vec{T}_2 - z w^{(1)}\vec{n} + z^2 u_1^{(2)}\vec{T}_1 + z^2 u_2^{(2)}\vec{T}_2 - z^2 w^{(2)}\vec{n} + z^3 u_1^{(3)}\vec{T}_1 + z^3 u_2^{(3)}\vec{T}_2 \qquad \text{(A6-15)}$$

El modelo de desplazamiento se ilustra en la fig. A6-1.

A6-1 Deformación en el modelo tridimensional

Además de las deformaciones sobre la superficie paralela, es necesario definir deformaciones en planos normales localmente a la superficie, para que esto sea posible se debe tener en cuenta que los parámetros que caracterizan estos planos son

$$\alpha_3 (\beta_1, \beta_2, z) = 1 \qquad \text{(A6-16)}$$

$$b_{33} = 0$$

para superficies paralelas (espesor constante) y

$$b_{13} = b_{23} \neq 0$$

que se cancelan si las curvas coordenadas consideradas como tales tienen torsión nula (ver apéndice A2).

Para el modelo de Kirchhoff se puede escribir la deformación en las superficies paralelas como en la ec. A5.13,

$$^{p}e_{\alpha\beta}^{(k)} = \frac{^{p}\vec{U}_{,\alpha}}{^{p}\alpha_{\alpha}} \cdot \vec{T}_{\beta} \qquad \text{(A6-17)}$$

en que $^{p}\alpha_{\alpha} = C_{\alpha}\alpha_{\alpha}$ (ver apéndices A1 y A2). Tomando en cuenta la definición A3.30 y haciendo

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{\vec{m}^{(c)}_{,\alpha}}{\alpha_{\alpha}} \cdot \vec{T}_{\beta} \qquad \text{(A6-18)}$$

con

$$\vec{m}^{(c)} = \frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\vec{T}_1 + \frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\vec{T}_2$$

se deduce:

$$^{p}e_{\alpha\beta}^{(k)} = \frac{1}{C_{\alpha}}\left[e_{\alpha\beta} + z(\kappa_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta})\right] \qquad \text{(A6-19)}$$

en que $e_{\alpha\beta}$ es la deformación en la superficie media, $\kappa_{\alpha\beta}$ es la curvatura total y $\theta_{\alpha\beta}$, es la curvatura debida a la corrección.

La ecuación A6.17 se desprende de las consideraciones de los apéndices A5 y A2,

$$\begin{aligned} ^{p}a_{\alpha\beta}^{*} &= (^{p}\vec{R}_{,\alpha} + {}^{p}\vec{U}_{,\alpha})\cdot(^{p}\vec{R}_{,\beta} + {}^{p}\vec{U}_{,\beta}) \\ &= {}^{p}a_{\alpha\beta} + {}^{p}\varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \qquad \text{(A6-19)}$$

con

$$^{p}\varepsilon_{\alpha\beta} = (^{p}e_{\alpha\beta} + {}^{p}e_{\beta\alpha})\,{}^{p}\alpha_{\alpha}\,{}^{p}\alpha_{\beta} \qquad \text{(A6-20)}$$

y $h_{\alpha\beta}^{2}$ queda definido entonces como en la ecuación A6.17.

Para el vector desplazamiento de corrección se tienen las deformaciones

$$e_{\alpha\beta}^{(c)} = \frac{\vec{U}_{,\alpha}^{(c)}}{\rho\alpha_{\alpha}} \cdot \vec{T}_{\beta} \qquad \text{(A6-21)}$$

pero de la ec. A6.15 se deduce,

$$\vec{U}_{,\alpha}^{(c)} = \Big\{ \Big[-\Big(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\Big)z + z^2 U_1^{(2)} + z^3 U_1^{(3)}\Big]\vec{T}_1 + \\ + \Big[-\Big(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\Big)z + z^2 U_2^{(2)} + z^3 U_2^{(3)}\Big]\vec{T}_2 - \\ - \Big[z W^{(1)} + z^2 W^{(2)}\Big]\vec{n}\Big\}_{,\alpha} \qquad \text{(A6-22)}$$

de manera que sustituyendo la ec. A6.22 en la ec. A6-21, para $\alpha = \beta = 1$, se tiene

$$e_{11}^{(c)} = \frac{1}{c_1\alpha_1}\Big\{-z\Big(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\Big)_{,1} - z\alpha_1 l_{12}\Big(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\Big) + z^2\Big(U_{1,1}^{(2)} + \alpha_1 l_{12} U_2^{(2)} - \frac{z\alpha_1}{R_1} - \alpha_1 z^2 \frac{W^{(2)}}{R_1}\Big)\Big\}$$

o lo que es lo mismo,

$$e_{11}^{(c)} = -\frac{1}{c_1\alpha_1} z\Big(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\Big)_{,1} - \frac{z\, l_{12}}{c_1}\Big(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\Big) - \frac{z}{c_1 R_1} W^{(1)} + \frac{z^2}{c_1}\Big[\frac{U_{1,1}^{(2)}}{\alpha_1} + \\ l_{12} U_2^{(2)} - \frac{W^{(2)}}{R_1}\Big] + \frac{z^3}{c_1}\Big[\frac{U_{1,1}^{(3)}}{\alpha_1} + l_{12} U_2^{(3)}\Big] = \frac{z}{c_1} e_{11}^{(1)} + \frac{z^2}{c_1} e_{11}^{(2)} + \frac{z^3}{c_1} e_{11}^{(3)} \qquad \text{(A6-23)}$$

Análogamente, para $\alpha = \beta = 2$,

$$e_{22}^{(c)} = \frac{z}{c_2}\Big[-\frac{1}{\alpha_2}\Big(\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2}\Big)_{,2} - l_{21}\Big(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\Big) - \frac{z}{R_2} W^{(1)}\Big] + \frac{z^2}{c_2}\Big[\frac{U_{2,2}^{(2)}}{\alpha_2} + \\ + l_{21} U_2^{(2)} - \frac{W^{(2)}}{R_2}\Big] + \frac{z^3}{c_2}\Big[\frac{U_{2,2}^{(3)}}{\alpha_2} + l_{21} U_2^{(3)}\Big] = \frac{z}{c_2} e_{22}^{(1)} + \frac{z^2}{c_2} e_{22}^{(2)} + \frac{z^3}{c_2} e_{22}^{(3)} \qquad \text{(A6-24)}$$

y en forma similar,

$$e_{12}^{(c)} = \frac{z}{c_1} e_{12}^{(1)} + \frac{z^2}{c_1} e_{12}^{(2)} + \frac{z^3}{c_1} e_{12}^{(3)} \qquad \text{(A6-25)}$$

en esta ecuación se ha introducido

$$e_{12}^{(i)} = \frac{u_{2,1}^{(i)}}{\alpha_1} - l_{12}\,u_1^{(i)} - k_{12}\,w^{(i)} \tag{A6-26}$$

tomando (i) los valores de 1 a 3 para e_{12}, u_1, u_2 y de 1 a 2 para w . En forma similar para las ecs. A6.23 y A6.24 y para e_{21} se ha usado

$$\begin{aligned} e_{11}^{(i)} &= \frac{u_{1,1}^{(i)}}{\alpha_1} + l_{12}\,u_2^{(i)} - \frac{w^{(i)}}{R_1} \\ e_{22}^{(i)} &= \frac{u_{2,2}^{(i)}}{\alpha_2} + l_{21}\,u_1^{(i)} - \frac{w^{(i)}}{R_2} \\ e_{21}^{(i)} &= \frac{u_{1,2}^{(i)}}{\alpha_2} - l_{21}\,u_2^{(i)} - \frac{w^{(i)}}{R_{12}} \end{aligned} \tag{A6-27}$$

Respecto a la consideración de no-linealidad que se discute en el apéndice A5, dada la pequeñez de $w^{(1)}$ y $w^{(2)}$, comparada con $w^{(o)}$, es suficiente con atribuir a $w^{(o)} = w$ la existencia de los términos no-lineales.

En seguida se procede a analizar la deformación en los planos normales localmente a la superficie media. Según se indicó en el apéndice A1, estos planos en la dirección de las curvas β_1 y β_2 son en realidad superficies y experimentan un cambio de curvatura cuya magnitud es:

$$\lambda_{\kappa\beta} = \frac{\alpha^{*}_{\kappa,\beta}}{\alpha^{*}_{\kappa}\,\alpha^{*}_{\beta}} - \frac{\alpha_{\kappa,\beta}}{\alpha_{\kappa}\,\alpha_{\beta}} \tag{A6-28}$$

con

$$\beta \neq \kappa \quad y \quad \kappa = 1,2$$

[illegible] A6.27 y [illegible]

$$\lambda_{\kappa\beta} = -\frac{e_{\beta}}{(1+e_{\beta})}\,l_{\kappa\beta} \tag{A6-29}$$

[illegible] e_β , $l_{\kappa\beta}$ [illegible] despreciar-ble.

Ahora, la deformación de las fibras normales a la superfi cie media se puede calcular como:

$$e_{33} = \frac{\vec{U}^{(c)}_{,3}}{\alpha_3} \cdot \vec{n} \qquad \text{(A6-30)}$$

y de acuerdo con la ecuación [illegible],

$$e_{33} = -W^{(1)} - 2z\,W^{(2)} \qquad \text{(A6-31)}$$

La distorsión angular total que se verifica en el plano normal se calcula también tomando en cuenta el vector corrección al desplazamiento o sea $\vec{U}^{(c)}$, de manera que

$$\omega_{13} = e_{13} + e_{31}$$

$$= \frac{\vec{U}^{(c)}_{,1}}{A\alpha_1} \cdot \vec{n} + \frac{\vec{U}^{(c)}_{,3}}{\alpha_3} \cdot \vec{T}_1 \qquad \text{(A6-32)}$$

por la definición de $\vec{U}^{(c)}$ se puede escribir

$$e_{13} = -\frac{1}{C_1 R_1}\left[-z\,\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} + z^2 u_1^{(2)} + z^3 u_1^{(3)}\right]$$

$$-\frac{1}{C_1 R_{12}}\left[-z\,\frac{\psi_{,2}}{\alpha_2} + z^2 u_2^{(2)} + z^3 u_2^{(3)}\right] - \frac{z}{C_1} w_{,1}^{(1)} - \frac{z^2}{C_1} w_{,1}^{(2)} \qquad \text{(A6-33)}$$

$$e_{31} = -\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1}\right) + 2z\,u_1^{(2)} + 3z^2 u_1^{(3)}$$

el [illegible] ecuaciones [illegible] A6-32, puede o- btiner[illegible] ecuación [illegible],

$$\omega_{13} = -\frac{1}{C_1 R_1}\left[-z\,\frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} + z^2 u_1^{(2)} + z^3 u_1^{(3)}\right] -$$

$$-\frac{1}{C_1}\left[z\,w_{,1}^{(1)} + z^2 w_{,1}^{(2)}\right] - \frac{\psi_{,1}}{\alpha_1} + 2z\,u_1^{(2)} + 3z^2 u_1^{(3)} \qquad \text{(A6-34)}$$

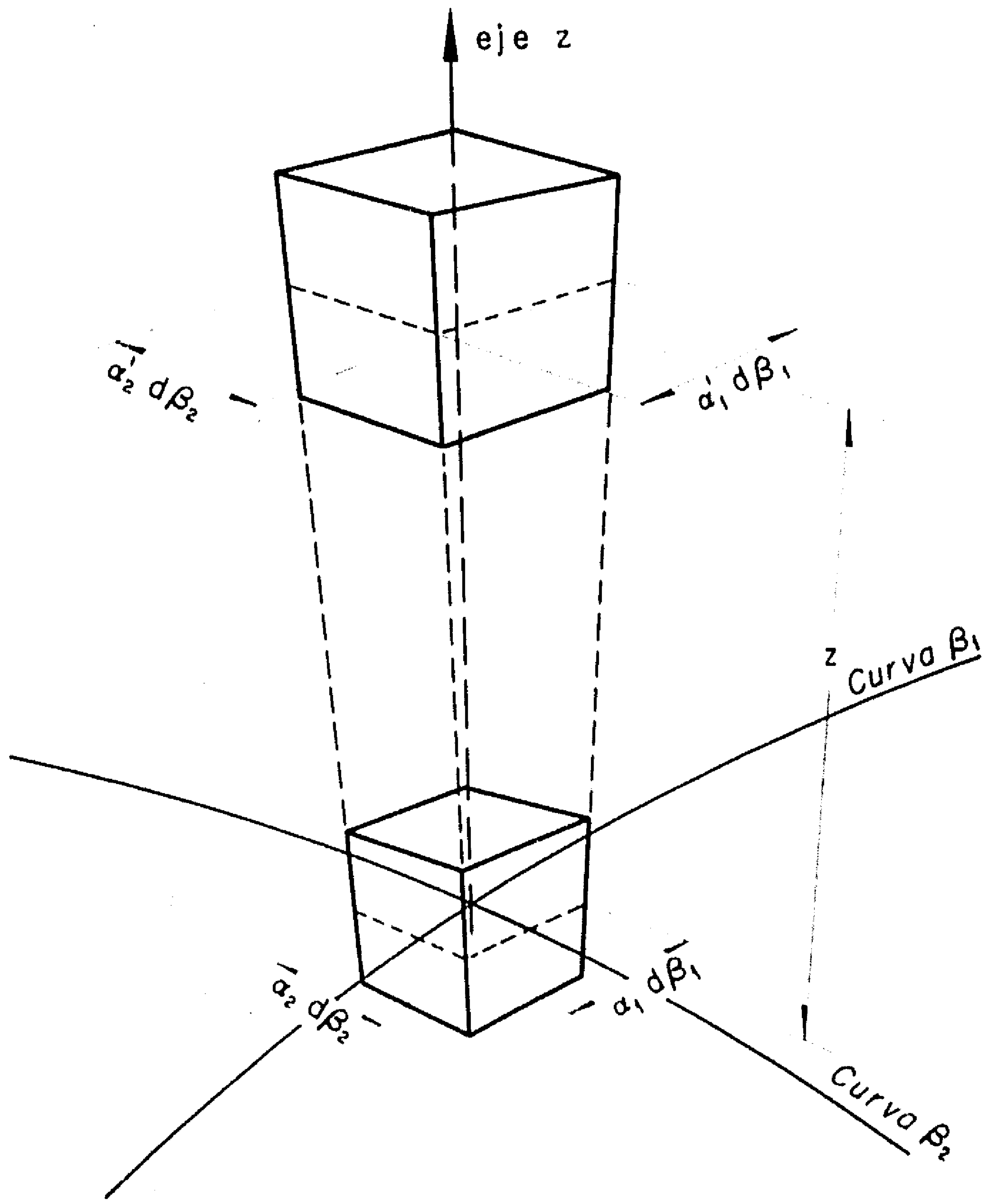
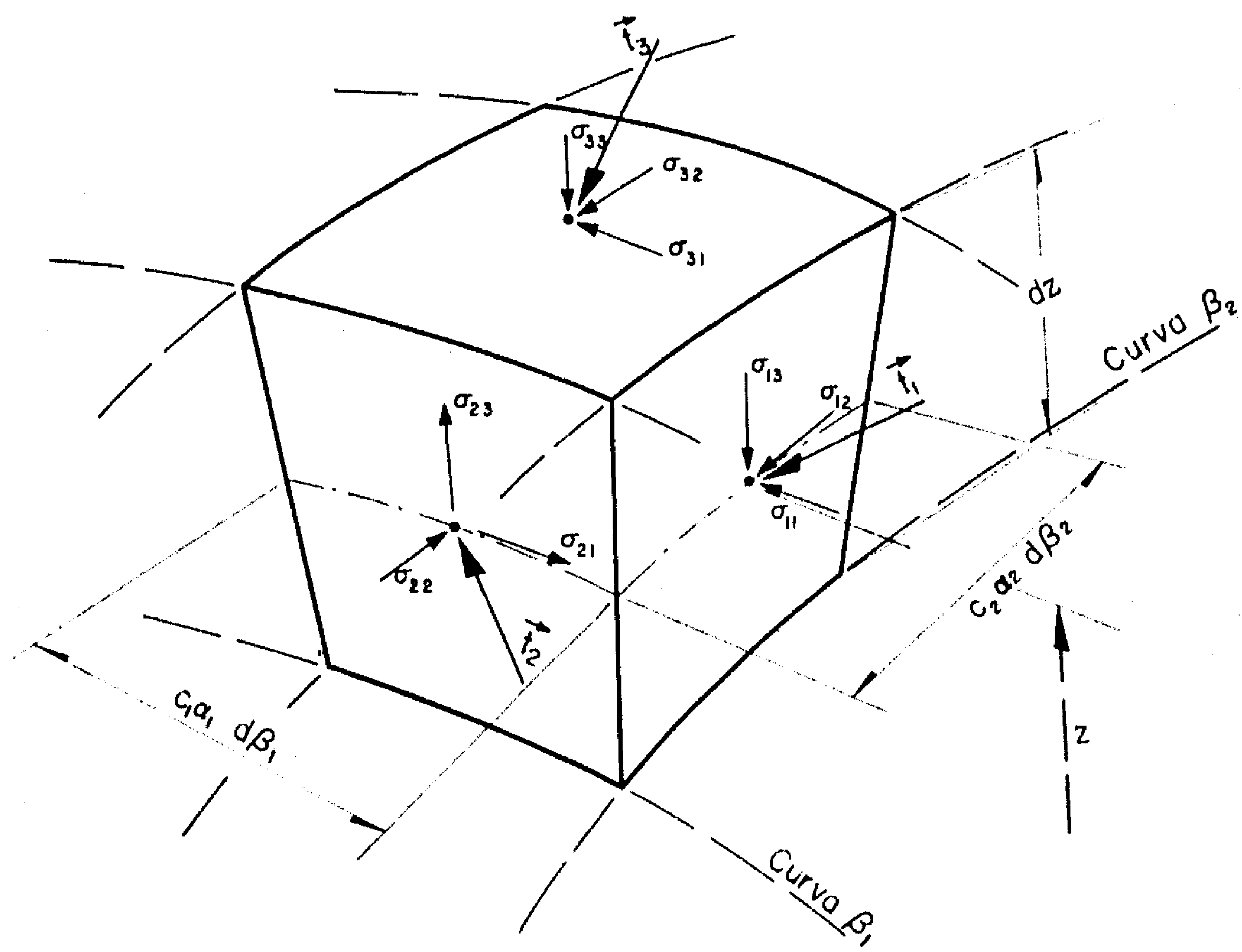

eje z
$\overline{\alpha_2'}\, d\beta_2$
$\alpha_1'\, d\beta_1$
z
Curva β_1
$\overline{\alpha_2}\, d\beta_2$
$\alpha_1\, d\beta_1$
Curva β_2

FIG. A6.1



$dz = 1$
$d\beta_1 = 1$
$d\beta_2 = 1$

FIG. A6.2

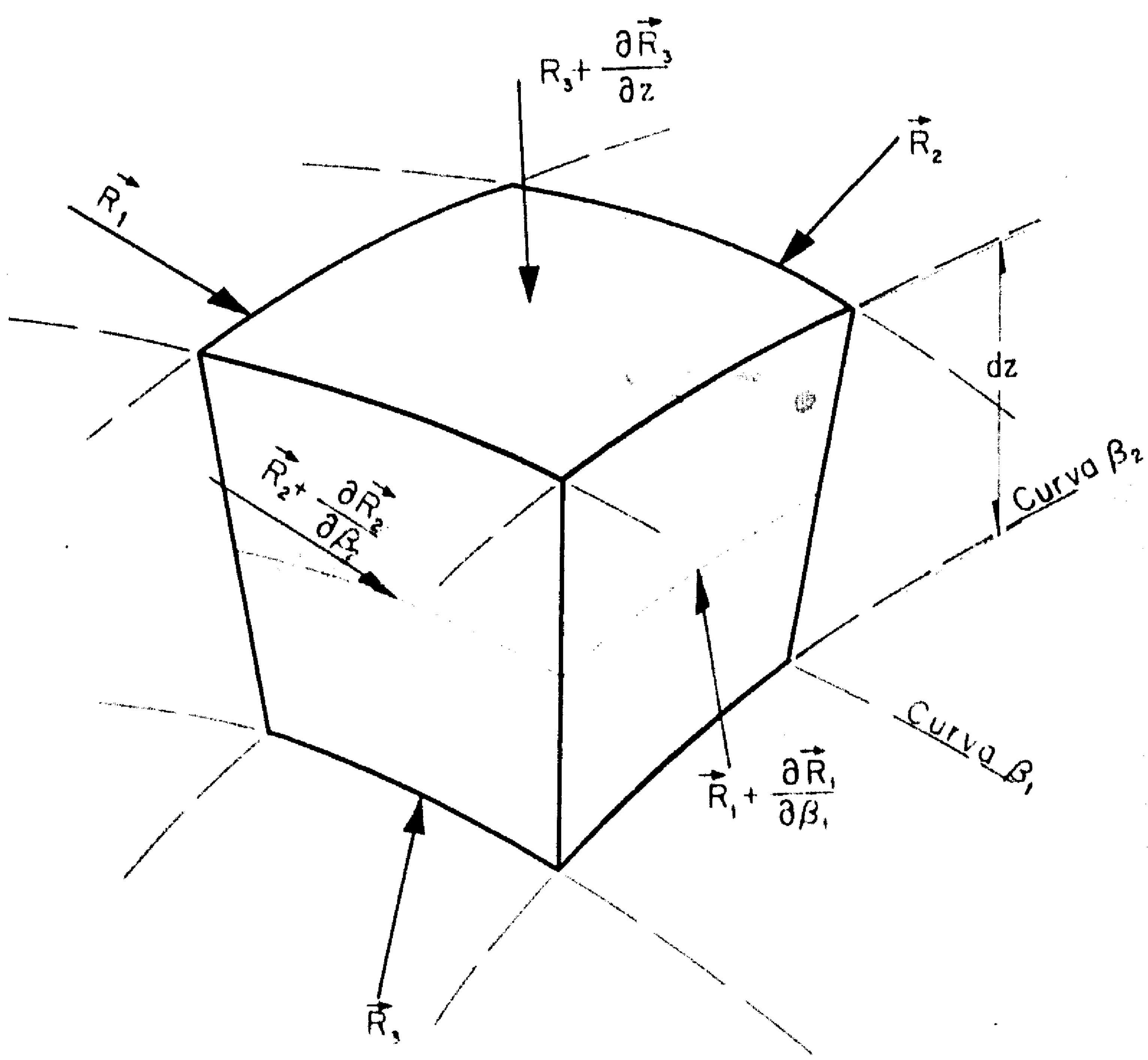

$R_3 + \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial z}$
$\vec{R}_2$
$\vec{R}_1$
dz
Curva β_2
$\vec{R}_2 + \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \beta_2}$
Curva β_1
$\vec{R}_1 + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \beta_1}$
$\vec{R}_3$

FIG. A 6.3

W_{10}	u_{10}	V_{10}	W_{11}	u_{11}	V_{11}	W_{12}	u_{12}	V_{12}
			+ 94.41		- 3.15			
						+ 94.41		
67.95		+ 2.46						
1895		+ 5880						
24.11	- 9.17	- 2.68						
1895	- 5190	- 5880						
			-1000	- 61.94	- 8.31	540.8		20.04
			- 26.33	- 5190	- 1520	26.33		10630
			2.41		-14470			
			270.4	33.97	10.02	-1000.0	- 33.97	- 8.31
						- 26.33	- 5190	- 15.20
						2.41		-14470
9550						270.4	3397	10.02
15.0								
21.0	14.96	- 2.55						
1.3	-18540	- 10620						
2.58		- 6650						
7.51	- 15.02	0.25						
5.7	68860	7520						
0.20	7520	27800						
			4667	- 18.40	1.80	- 41.12	101.20	- 11.70
			- 8.41	145780	11340	5985	26600	-14520
			1.45	22680	55513	- 11.20		-20500
			- 20.56	51.8	- 8.95	49.46	- 9.2	1.80
			50.6	- 118.95		- 8.41	+ 11845	11340
			- 8.44	- 11340	- 101.80	1.45	11340	55513

u_4	W_5	u_5	W_6	u_6	Y_6	W_7	u_7	Y_7	W_8	u_8
			- 324.71	- 18.34	- 2.68	+ 135.90		+ 5.82		
			- 1895	- 5190	- 5880	+ 18.95		+ 5880		
			+ 67.95	+ 9 17	+ 2.91	- 324.71	- 9.17	- 2.68	+ 67.95	
						- 18 95	- 51.90	- 5880	+ 1895	
2.74	+ 20.08					+ 67.95	+ 9.17	+ 2.91	- 324.71	- 9.1
10974	- 2.71								- 1895	- 51
1.05	- 118.19	+ 2.70							+ 67.95	+ 9.1
27110	+ 8.13	- 10974								
1.05	+ 370.79	- 1.65								
10974	- 10,84	+ 38084								
			+ 16.55	+ 2.68	+ 0.25	- 1442	+ 29.92	- 5.10	+ 141	
			+ 1.30	+ 68860	+ 7520	+ 13.70	- 18540	- 10630	- 15.0	
			+ 0.20	+ 15040	+ 27800	- 5.16		- 13300		
			- 721.00	1362	- 2.55	+ 1750	1.34	+ 0.25	- 721	14.96
			15.00	- 18540		1.3	50320	7520	- 1.3	- 185.4
			- 2.52	- 7520	- 6650	+ 0.20	7520	27800	- 2.58	
			95.50	- 14.96		- 721.00	- 1,34	- 2.55	1655	1.3
						15.06	- 18540		1.30	503
						- 2.58	- 7520	- 6650	0.20	152
10.42	76.76					95.50	- 1496		- 721.0	1.4
5190	- 1.01								15.0	- 1854
6868	2.82								- 2.58	- 152
1042	- 318.0	- 10.42							95.50	- 14.9
	1.01	- 5190								
6858	- 0.47	- 6852								
			- 999.2	- 84.20	2.48	540.60				
			- 3.88	- 79.25		3.88				
			- 7.10	- 212.60	- 14450	18.80				
			270.30	42.10		- 999.2	42.10	2.48	210.30	
						3.88	- 7925		3.88	
			9.50	106.30		- 7.10	- 10630	- 14450	9.40	

u_6	v_6	w_7	u_7	v_7	w_8	u_8	v_8	w_9	u_9	v_9
- 18.34	- 2.68	+ 135.90		+ 5.82						
- 51 90	- 5880	+ 18.96		+ 58 80						
+ 9 17	+ 2.91	- 324.71	- 9.17	- 2.68	+ 67.95		+ 2.91			
		- 18.96	- 51.90	- 58 80	+ 18 95		+ 56 80			
		+ 67.95	+ 9.17	+ 2.91	- 324.71	- 9.11	- 2.68	+ 67.95		+ 2.91
					- 18 95	- 51 90	- 58 80	+ 18 45		+ 5880
					+ 67.95	+ 9.17	+ 2.41	- 324.11	- 9.17	- 2.68
								- 18 45	- 51 40	- 5880
								+ 61.95	+ 9.17	+ 2.91
+ 2.68	+ 0.25	- 14 42	+ 29.92	- 5.10	+ 141					
+ 68860	+ 7520	+ 13.70	- 185 40	- 106 30	- 15.0					
+ 15040	+ 27800	- 5.16		- 133 00						
13 62	- 2.55	+ 1750	1.34	+ 0.25	- 721	14.96	- 2.55	95.50		
- 18540		1.3	50320	75 20	- 1.3	- 185.40	- 106 30	- 15.0		
- 7520	- 6650	+ 0.20	7520	278 00	- 2.58		- 66 50			
- 14.96		- 721.00	- 1.34	- 2.55	1655	1.34	0.25	- 721.0	14.96	- 2.55
		15.06	- 185 40		1.30	50320	75 20	- 1.3	- 185 40	- 106 30
		- 2.58	- 75 20	- 6650	0.20	1520	278 00	- 2.58		- 66 50
		95.50	- 1496		- 721.0	- 1.34	- 2.55	16 55	1.34	0.25
					15.0	- 18540		1.30	50 320	752.0
					- 2.58	- 1520	- 6650	0.20	1520	27800
					95.50	- 14.96		- 721.0	- 1.34	- 2.55
								15.0	- 18 540	
								- 2.58	- 1520	- 665
- 84.20	2.48	540.60								
- 79.25		3.88								
- 212.60	- 144 50	18.80								
42.10		- 999.2	42.10	2.48	210.50					
		3.88	- 79 25		3.88					
106.30		- 7.10	- 106 30	- 14450	9.40					

SUBMATRIZ A_{11}

No.ec.	w_1	u_1	w_2	u_2	w_3	u_3	w_4
w_1	+ 350.71	+ 2.10	- 296.38	+ 5.40	+ 20.08		
u_1	- 8.13	+ 38084	+ 10.84	- 10974	- 2.71		
w_2	- 148.19	+ 1.65	+ 350.71	+ 1.05	- 148.19	+ 2.70	+ 20.08
u_2	+ 2.71	- 10974	- 8.13	+ 27110	+ 8.13	- 10974	- 2.71
w_3		- 2.70	- 148.19	- 105	+ 350.71	+ 1.05	- 148.19
u_3			+ 2.71	- 10974	- 8.13	+ 27110	+ 8.13
w_4				- 2.70	- 148.19	- 1.05	+ 350.71
u_4					+ 2.71	- 10974	- 8.13
w_5						- 2.70	- 148.19
u_5							+ 2.71
w_6	- 3.18	- 20.84	+ 153.5				
u_6	+ 1.01	- 5190	- 1.01				
v_6	- 0.47	- 13716	+ 5.64				
w_7	76.76	10.42	- 318.0	- 10.42	76.76		
u_7			1.01	- 5190	- 1.01		
v_7	2.82	68.58	- 0.47	- 6858	2.82		
w_8			76.76	1042	- 318.0	- 10.42	76.76
u_8					1.01	- 5190	- 1.01
v_8			2.82	6858	- 0.47	- 6858	2.82
w_9					- 76.76	10.42	- 318.0
u_9							1.01
v_9					2.82	6858	- 0.47
w_{10}							76.76
u_{10}							
v_{10}							2.82
w_{11}	57.78						
u_{11}							
v_{11}	- 2.48						
w_{12}			57.78				
u_{12}							
v_{12}			2.48				

u_{20}	v_{20}	w_{21}	u_{21}	v_{21}	w_{22}	u_{22}	v_{22}	
	-6.96							
		373.82		-16.66				
					373.82		-16.66	

u_{15}	v_{15}	w_{16}	u_{16}	v_{16}	w_{17}	u_{17}	v_{17}	w_{18}
	- 3.15							
		171		- 6.46				
					171		- 6.96	
								171
	10.02							
	106 30							
33.41	- 8.31							
51.90	- 75 20							
	-144 70							
		- 2429	- 194.60	- 16.96	1335.80		46.92	
		- 68.40	- 14 25	- 113 30	68.40		14520	
		6.8		- 20160				
		661.96	4130	23.46	- 2429	- 4730	- 1696	661.90
					- 68.40	- 1425	- 11330	68.40
					6.8[illegible]		- 20160	

V_{17}	U_{17}	V_{1}	W_{18}	U_{18}	V_{18}	W_{19}	U_{19}	V_{19}	W_{20}
11		- 6.96							
			171		- 6.96				
						171		- 6.96	
									171
35.80		46.42							
68.40		14520							
429	- 9730	- 1646	661.90		23.46				
68.40	- 7925	- 1133[illegible]	68.40		14520				
6.80		- 20160							

SUBMATRIZ A_{12}

No.ec.	W_{13}	U_{13}	V_{13}	W_{14}	U_{14}	V_{14}	W_{15}
W_1							
U_1							
W_2							
U_2							
W_3	+ 41.41		- 3.15				
U_3							
W_4				+ 44.41		- 3.15	
U_4							
W_5							+ 44.41
U_5							
W_6							
U_6							
V_6							
W_7	210.4		10.02				
U_7	26.33		10620				
V_7							
W_8	- 1000.0	- 33.47	- 6.31	210.4		10.02	
U_8	- 26.33	- 5190	- 1520	26.33		10630	
V_8	2.41		- 14410				
W_9	210.4	33.47	10.02	- 1000.0	- 33.91	- 6.31	210.4
U_9				- 26.33	- 5190	- 7520	26.33
V_9				2.41		- 14410	
W_{10}				210.4	33.41	10.02	- 1000.00
U_{10}							- 26.33
V_{10}							2.41
W_{11}	504.0						
U_{11}	50.0						
V_{11}							
W_{12}	[illegible]	50.0	- 8.85	284.0			
U_{12}	+ 4.25	- 26600	- 14520	- 50.60			
V_{12}	- 8.6		- [illegible]				

Y_9	W_{10}	U_{10}	V_{10}	W_{11}	U_{11}	V_{11}	W_{12}	U_{12}	Y_{12}
				282.0	- 50.6		- 2056	9.2	- 8.93
							50.6	- 71895	
							- 8.94	- 11340	- 10180
2.48	210.30						282.0	- 50.6	
	3.88								
4450	9.40								
	- 999.2	- 42.10	2.48						
	- 3.88	- 7925							
	- 7.10	- 10630	- 14450						
				- 2429	- 245.66	6.96	1339		
				- 24.69	- 10734		24.69		
				- 21.10	- 29036	- 20760	51.68		
				669.67	12283		- 2429	- 122.83	6.96
							- 24.69	- 10734	
				25.84	14518		- 21.10	- 14518	- 20760
							669.67	122.83	
							25.84	14518	
	171.06								
	- 6.96								
				373.00					
				- 16.70					
							373.00		
							- 16.70		

u_4	W_5	u_5	W_6	u_6	V_6	W_7	u_7	V_7
						210.30	42.10	
						9.50	106.50	
	57.78							
	− 2.48							
			171.06					
			− 6.96			171.06		
						− 6.96		

W_6	U_6	V_6	W_7	U_7	V_7	W_8	U_8	V_8	W_9	U_9
			210.30	42.10		− 999.2	− 42.10	2.48	210.30	
						− 3.88	− 79.25		3.88	
			9.50	106 30		− 7.10	− 106 30	− 144 50	9.40	
						270.30	42.10		− 999.2	− 42.10
									− 3.88	− 79 25
						9.50	106 30		− 7.10	− 106 30
									270.30	42.10
									9.50	106 30
71.06										
6.96			171.06							
			− 6.96							
						171.06				
						− 6.96				
									171.06	
									− 6.96	

SUBMATRIZ A_{21}

No.ec.	w_1	u_1	w_2	u_2	w_3	u_3	w_4
w_{13}					51.78		
u_{13}							
v_{13}					- 2.48		
w_{14}							51.78
u_{14}							
v_{14}							- 2.48
w_{15}							
u_{15}							
v_{15}							
w_{16}							
u_{16}							
v_{16}							
w_{17}							
u_{17}							
v_{17}							
w_{18}							
u_{18}							
v_{18}							
w_{19}							
u_{19}							
v_{19}							
w_{20}							
u_{20}							
v_{20}							
w_{21}							
u_{21}							
v_{21}							
w_{22}							
u_{22}							
v_{22}							

20	U_{20}	V_{20}	W_{21}	U_{21}	V_{21}	W_{22}	U_{22}	V_{22}	
61.90		23.46							
8.40		14520							
1 29	- 91.30	- 16.96							
3.40	- 7925	-11330							
.80		-20760							
			-4714	- 443	- 31.15	2614		100.52	
			-142.92	-10734	-15218	142.92		18200	
			16.66		-26940				
			1307	221.50	50.26	-4714	-221.50	-31.15	
						-142.92	-10734	-15218	
						1666		-26940	
.11						1307	221.50	50.26	
1.30									
34	127.30	- 24.59							
67	-34626	-18200							
.59		-13786							
541	-162.99	9.85							
2.97	128000	15218							
.91	15218	75270							
			11760	-114.00	31.5	-15860	326.76	-118.6	
			-85.00	155600	18920	349.0	-42000	-21820	
			28.60	31840	94200	-118.6		-34500	
			-1430	350.38	- 59.3	18810	- 81.00	3150	
			264	-42000		-85.00	113600	18920	
			-59.30	-18420	-11250	28.64	18920	94200	

U_{15}	V_{15}	W_{16}	U_{16}	V_{16}	W_{17}	U_{17}	V_{17}	W_{18}
					661.90	97.30	23.46	- 2429
								- 6840
								6.80
50.6	- '8.85							667.90
-26600	-14520							
	-10180							
54.8	1.80							
48495	11340							
11340	55513							
		9924	- 11.38	9.85	- 8868	254.56	- 49.18	1233
		- 35.67	128000	15218	162.97	-34626	-18200	-127.30
		8.91	30436	75270	- 49.18		-27512	
		- 4434	162.99	- 24.19	9924	- 35.61	9.85	- 4434
		127.30	-34600		- 35.67	93375	15218	+ 35.67
		- 24.59	-15218	-13186	8.91	15218	75210	-24.59
		616.71	-127.30		- 4434	+ 35.69	- 24.59	9924
					127.30	-34600		- 35.67
					- 24.59	-15218	13786	8.91
					616.71	-127.30		-4434
								12730
								- 24.59
-122.83	6.46							616.71
-17134								
14518	-20700							
		-4710	-5418	+ 1610	2618			
		-7300	-15410		1500			
		- 54.14	-3630	-26400	125.5			
		1309.5	216.9		-4710	- 216.9	+16.10	1309
					[illegible]	-15410		13.00
		61.90	18230		-54.1	-18.25	-26900	61.9

	V_{16}	W_{17}	U_{17}	V_{17}	W_{18}	U_{18}	V_{18}	W_{19}	U_{19}	V_{19}	W
		661.90	97.30	23.46	- 2429	- 97.30	- 16.96	667.90		23.46	
					- 6840	- 79.25	- 11330	68.40		14520	
					6.80		- 20760				
					667.90	97.30	23.46	- 2429	- 97.30	- 16.96	6
								- 68.40	- 1925	- 11330	
								6.80		- 20760	
								667.90	97.30	23.46	- 2
											- 6
8	9.85	- 8868	254.56	- 49.18	1233						
[illegible]	15218	162.97	- 34626	- 18200	- 127.30						
6	75270	- 49.18		- 27512							
4	- 24.79	9924	- 35.61	4.85	- 4434	127.30	- 24.59	616.11			
[illegible]		- 35.61	93375	15218	+ 35.67	- 34626	- 18200	- 121.30			
[illegible]	- 13186	8.91	15218	15210	- 24.59		- 13186				
		- 4434	+ 35.69	- 24.59	9924	- 35.69	4.85	- 4434	127.30	- 24.59	61
		127.30	- 34600		- 35.67	93375	15218	- 35.67	- 34620	- 18200	- 12
		- 24.59	- 15218	13786	8.91	15218	75270	- 24.59		- 13786	
		616.71	- 121.30		- 4434	35.69	- 24.59	9924	- 35.64	4.85	- 4
					12730	- 34600		- 35.67	93375	15218	- 3
					- 24.59	- 15218	- 13186	8.91	15218	75270	- 24
					616.71	- 127.30		- 4434	35.69	- 24.59	1
								127.30	- 34600		- 16
								- 24.59	- 15218	13786	
	+ 16.10	2618									
		13.00									
	- 26400	123.8									
		- 4710	- 216.4	+ 16.10	1364						
		- 13.00	- 13410		13.00						
		- 54.1	- 1825	- 26400	61.9						

SUBMATRIZ A_{22}

No.ec.	w_{13}	u_{13}	v_{13}	w_{14}	u_{14}	v_{14}	w_{15}
w_{13}	4667	− 9.2	1.80	− 2056	50.6	− 6.65	282.0
u_{13}	− 8.91	71895	11340	+ 9.25	− 26600	−14520	− 50.6
v_{13}	1.45	11340	55513	− 8.6		−10180	
w_{14}	− 2056.	9.2	− 8.93	4667	− 9.21	1.80	− 2056
u_{14}	50.6	−71895		− 8.91	71845	11340	+ 9.25
v_{14}	− 8.94	−11340	−10180	1.45	11340	55513	− 8.6
w_{15}	282.0	− 50.6		− 2056	9.2	− 8.93	4946
u_{15}				50.6	−71895		− 59.8.
v_{15}				− 8.94	−11340	−10180	1.45
w_{16}							
u_{16}							
v_{16}							
w_{17}	669.67						
u_{17}	24.69						
v_{17}	25.84						
w_{18}	− 24.24	−122.83	6.96	669.67			
u_{18}	− 24.69	−10734		24.69			
v_{18}	− 21.10	−14518	−20700	25.84			
w_{19}	669.67	122.83		− 24.24	−122.83	6.96	669.67
u_{19}				− 24.69	−10734		24.69
v_{19}	25.84	14518		21.10	−14518	−20700	25.84
w_{20}				669.67	122.83		− 24.24
u_{20}							− 24.69
v_{20}				25.84	14518		− 21.10
w_{21}							
u_{21}							
v_{21}							
w_{22}							
u_{22}							
v_{22}							

U_{30}	V_{30}	W_{31}	U_{31}	V_{31}	V_{32}	Y_{33}	V_{34}	
	-74.50							

U_{25}	V_{25}	W_{26}	U_{26}	V_{26}	W_{27}	U_{27}	V_{27}	W_{28}
	-36.60							
		673.8		-36.60				
					673.82		-36.60	
								673.82
858.82	-54.8	4315		205.6				
13410	-18420	262.0		-18420				
	-32800							
29.41	102.8	-7840	-424.41	-54.8	2187		102.8	
		-262.0	-13410	-18420	262.0		21820	
		26.10		-32800				

	V_{26}	W_{27}	U_{27}	V_{27}	W_{28}	U_{28}	V_{28}	W_{29}	U_{29}	V_{29}	W_{30}
	-36.60										
		673.82		-36.60							
					673.82		-36.60				
	205.6							1010		-14.5	
	21820										
41	-59.8	2187		102.8							1070
1	-18920	262.0		21820							
	-32800										

SUBMATRIZ A_{23}

No.ec.	W_{23}	U_{23}	V_{23}	W_{24}	U_{24}	V_{24}	W_{25}
W_{13}	313.82		− 16.66				
U_{13}							
V_{13}							
W_{14}				313.82		− 16.66	
U_{14}							
V_{14}							
W_{15}							
U_{15}							
V_{15}							
W_{16}							673.8
U_{16}							
V_{16}							
W_{17}	+ 1307		50.26				
U_{17}	+ 142.92		18[illegible]				
V_{17}							
W_{18}	− 4114	− 221.50	− 31.15	1307		50.26	
U_{18}	− 142.92	− 10734	− 15218	142.92		18[illegible]	
V_{18}	16.66		− 26410				
W_{19}	1307.0	221.50	50.26	− 4114	− 221.50	[illegible].15	
U_{19}				− 142.92	− 10[illegible]4	− 15218	
V_{19}				16.66		− [illegible]	
W_{20}				1307	221.50	[illegible].26	
U_{20}							
V_{20}							
W_{21}	2220						− 7840
U_{21}	− 264.0						− 2620
V_{21}							56.[illegible]
W_{22}	− 19[illegible]	265.58	− 54.[illegible]	111[illegible]			2181.5
U_{22}	85.0[illegible]	− 4200[illegible]	− 218[illegible]	− 264.0			
V_{22}	− 54.3[illegible]		− 1125[illegible]				

U_{20}	V_{20}	W_{21}	U_{21}	V_{21}	W_{22}	U_{22}	V_{22}	
		1110	−263.38		−7930	+87.0	−59.3	
					+264	−42000		
					−59.30	−18920	−17250	
					1110	−263.38		
		−7860	−1049	+36.6	+4388			
		−166	−16100		+166			
		−69.5	−43600	−32800	+268.6			
		+2194	+524.5		−7860	−524.5	+36.6	
					−166	−16100		
		+134.3	+21800		−69.5	−21800	−32800	
					+2194	+524.5		
					+134.3	+21800		
		1060						
		−74.50						
					1060			
					−14.50			

U_{15}	V_{15}	W_{16}	U_{16}	V_{16}	W_{17}	U_{17}	V_{17}	W_{18}	
					1309.5	+210.4		-4710	-
								-73.00	-
					61.81	18250		-54.14	-
								1309.5	+
								61.81	1
		+675							
		-36.6							
					+615				
					-36.6				
								+675	
								-36.6	

V_{16}	W_{17}	U_{17}	V_{17}	W_{18}	U_{18}	V_{18}	W_{19}	U_{19}	V_{19}	W_{20}
	1309.5	+270.9		-4710	-270.9	+16.66	1309			
				-73.00	-13410		73.00			
	61.87	18250		-54.14	-18250	-26900	61.87			
				1309.5	+270.9		-4710	-270.9	+16.66	1309
							-73.00	-13410		73.00
				61.87	18250		-54.14	-182.50	-26900	61.87
	+615									
	-36.6									
				+615						
				-36.6						
							+615			
							-36.6			

SUBMATRIZ A_{32}

No.ec.	W_{13}	U_{13}	V_{13}	W_{14}	U_{14}	V_{14}	W_{15}
W_{23}	273.00						
U_{23}							
V_{23}	− 16.70						
W_{24}				315.0			
U_{24}							
V_{24}				− 16.66			
W_{25}							
U_{25}							
V_{25}							
W_{26}							
U_{26}							
V_{26}							
W_{27}							
U_{27}							
V_{27}							
W_{28}							
U_{28}							
V_{28}							
W_{29}							
U_{29}							
V_{29}							
W_{30}							
U_{30}							
V_{30}							
W_{31}							
U_{31}							
V_{31}							
W_{32}							
U_{32}							
V_{32}							

U_{25}	V_{25}	W_{26}	U_{26}	V_{26}	W_{27}	U_{27}	V_{27}	W_{28}
		2187.5	429.41	102.8	- 7840	- 429.41	- 59.8	2187
					- 262.0	- 13410	- 18920	262.0
					36.66		- 32800	
					2187.5	429.41	+ 102.8	- 7840
								- 262.0
								36.66
- 360	+ 77.4	- 24820	- 966	- 258.8	+ 3500			
+ 181200	+ 22400	+ 663	- 49100	- 24900	- 484			
+ 44800	+ 112000	- 258.8		- 41000				
+ 663	- 129.4	+ 29400	- 180	+ 77.4	- 12410	+ 483	- 129.4	+ 1750
- 49100		- 179	+ 132100	+ 22400	+ 179	- 49100	- 24900	- 484
- 22400	- 20500	+ 71.4	+ 22400	+ 112000	- 129.4		- 20500	
- 483		- 12410	+ 180	- 129.4	+ 27650	- 180	+ 77.4	- 12410
		484	- 49100		- 179	+ 132100	+ 22400	+ 179
		- 129.4	- 22400	- 20500	+ 71.4	+ 22400	11200	- 129.4
		+ 1150	- 483		- 12410	+ 180	- 129.4	+ 29400
					+ 484	- 49100		- 663
					- 129.4	- 22400	- 20500	+ 71.4
- 1816	74.6	6418						
- 18120		335						
+ 50640	- 3810	513						
908		- 11460	- 908	74.6	3209			
		- 335	- 18120		335			
25320		231	- 25320	- 3810	256.4			
		3209	908		- 11460	- 908	74.6	3209
					- 335	- 18120		335
		256.4	25320		231	- 25320	- 3810	256.4

U_{26}	V_{26}	W_{27}	U_{27}	V_{27}	W_{28}	U_{28}	V_{28}	W_{29}	U_{29}	V_{29}	W_{30}
29.41	102.8	− 7840	−429.41	− 59.8	2187		102.8				
		− 262.0	−13410	−18920	262.0		21820				
		36.66		−32800							
		2187.5	429.41	+102.8	−7840	−429.41	−59.8				
					−262.0	−13410	−18920				
					36.66		−32800				
966	−258.8	+3500						−11465	−1469	−101	+64
49100	−24900	− 484						− 423	−16100	−22400	+ 4
	−41000							+ 75		−38200	
180	+ 77.4	−12410	+483	−129.4	+1750			+3210	+734.7	+194.4	−114
32100	+22400	+ 179	−49100	−24900	− 484						− 4
2400	+112000	−129.4		−20500							+ 1
180	− 129.4	+27650	− 180	+ 77.4	−12410	+ 483	−129.4				+321
49100		− 179	+132100	+22400	+ 179	−49100	−24900				
2400	−20500	+ 71.4	+22400	11200	−129.4		−20500				
483		−12410	+ 180	−129.4	+29400	−663	+77.4				
		+484	−49100		− 663	+181200	+22400				
		− 129.4	−22400	−20500	+ 71.4	+22400	+112000				
								51000	+1350	161.0	−33
								−335	[illegible]	25800	11
								−155.5	51600	12710	− 5
408	74.6	3209						−16900	−615	−249	53
120		335						190	−34350		− 2
5320	−3810	256.4						−259	−25800	2315	−15
908		−11460	− 908	74.6	3209			2400	− 190		−1
		− 335	−18120		335						1
5320		231	−25320	− 3810	256.4						− 2
								175.60	−54200	−42400	+ 8
								+ 427	+21100		−11
											+ 4

	V_{28}	W_{29}	U_{29}	Y_{29}	W_{30}	U_{30}	Y_{30}	W_{31}	U_{31}	Y_{31}	Y_{32}	
	102.8							1010		-74.50		
	21820											
.41	-59.8											
10	-18920											
	-32800											
		-11465	-1469	-107	+6420		+388.8					
		-423	-16100	-22400	+413		+24900					
		+75		-38200								
		+3210	+734.7	+194.4	-11465	-734.7	-107	+3210		+194.4		
					-413	-16100	-22400	+423		+24900		
					+15		-38200					
[illegible]	-129.4				+3210	+734.7	+194.4	-11465	-734.7	-107		
[illegible]	-24900							-423	-16100	-22400		
	-20500							+15		-38200		
	+77.4							+3210	+734.7	+194.4		
[illegible]	+22400											
[illegible]	+112000											
		51000	+1350	161.0	-33[illegible]	1580	-498	48[illegible]			36	
		-335	[illegible]	25800	[illegible]	-54550	[illegible]	[illegible]			-25800	
		-155.5	51600	12110	-58		-46[illegible]				.4250	
		-16900	-615	-249	53[illegible]	-615	161	-169[illegible]	79[illegible]	-249	324	
		190	-54550		-335	146520	25[illegible]	335	-54550	-21100		-
		-259	-25800	2315	-155	25800	[illegible]	-259		[illegible]15		-
		2400	-190		[illegible]	-615	[illegible]	53[illegible]	-115	161		
					[illegible]	54550		-335	+20081	25800		
					[illegible]	-25800	2[illegible]1	-155.5	258[illegible]	12110		
		175.50	-54200	-42400	+8[illegible]4						+18[illegible]	-
		+4.27	+21100		-115[illegible]	-21100	-424[illegible]	+4.27			-25[illegible]	+
					+4.[illegible]	+21100		-115.5	-21100	+[illegible]40[illegible]		-

W_{30}	U_{30}	V_{30}	W_{31}	U_{31}	V_{31}	V_{32}	V_{33}	V_{34}	
			1010		-7450				
+64 20		+ 388.8							
+ 4 3		+ 24900							
114 5	- 734.7	- 107	+ 3210		+194.4				
4 3	-16100	-22400	+ 423		+24900				
+ 5		-38200							
+32 0	+734.7	+194.4	-11465	-734.7	- 107				
			- 425	-16100	-22400				
			+ 15		-38200				
			+ 3210	+734.7	+194.4				
33 20	1580	- 498	4800			36	+48		
11 5	-54550	-21100	- 790			-25800	21100		
5 8		- 4650				-4250			
53 00	- 615	161	-1640	790	- 249	324	36	324	
3 5	146520	25800	335	-54550	-21100		-25800	21100	
15 5	25800	12110	- 239		-2615		- 4250		
9 0	- 675	- 249	55400	- 115	161		324	36	
7 0	54350		- 335	+200810	25800			- 25800	
2	-25800	231	-155.5	25800	12110			- 4250	
R 4						+18 000	- 5		
15	-21150	-42400	+ 4 7			- 25	+18 00	-25 00	
	+21100		-115.5	-2110	+2400		-25	+18	

SUBMATRIZ A_{33}

No.ec.	W_{23}	U_{23}	V_{23}	W_{24}	U_{24}	V_{24}	W_{25}
W_{23}	17760	- 87.00	31.50	- 7930	263.38	- 59.3	
U_{23}	- 85.00	113600	18920	8500	42000	- 21820	
V_{23}	28.64	18920	94200	- 59.30		- 17250	
W_{24}	- 7930	87.0	- 59.3	+18870	- 350.38	31.50	
U_{24}	+ 264	- 42000		- 3500	155600	18920	
V_{24}	- 59.30	- 18920	- 17250	28.64	18920	94200	
W_{25}							+ 27650
U_{25}							- 179
V_{25}							+ 71.4
W_{26}	+ 2194						- 12410
U_{26}	+ 166						+ 484
V_{26}	+ 134.3						- 129.4
W_{27}	- 1860	- 524.5	+ 36.6	+ 2194			+ 1750
U_{27}	- 166	- 16100		+ 166			
V_{27}	- 69.5	- 21800	- 32800	+ 134.3			
W_{28}	+ 2194	+ 524.5		- 7860	- 524.5	+ 36.6	
U_{28}				- 166	- 16100		
V_{28}	+ 134.3	+ 21800		- 69.5	- 21800	- 328.00	
W_{29}							- 11460
U_{29}							- 335
V_{24}							231.0
W_{30}							3209
U_{30}							
V_{30}							256.4
W_{31}	1060						
U_{31}							
V_{31}	- 74.50						
W_{32}							
U_{32}							
V_{32}							

BIBLIOGRAFIA

1. Timoshenko, S. P. "History of Strength of Materials" Mc Graw Hill Book Co., 1953.

2. Lanczos, C. "The Variational Principles of Mechanics" University of Toronto Press, Toronto 1960.

3. Courant, R. y Hilbert, D. "Methods of Mathematical Physics", Vol. 1, Interscience Publishers Inc., New York, 1961.

4. Todhunter, I. y Pearson, K., "A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials" (en dos volúmenes), Dover Publications Inc., New York, 1960.

5. Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 4a edición, Dover Publications Inc., New York, 1944.

6. "Treatise on Dams, Ch. 10, Arch Dams" United States Bureau of Reclamation.

7. Ritter, Hugo "Berechnung der bogenformigen staumauern", Diss. Kartsruhe 1913.

8. Julián, O. H. et al "Analysis of arch dams by the trial load method" Trans. ASCE, V. 93, 1929, p. 1191.

9. Lombardi, J. "Les Barrages en Voute Mince" Dunod, Paris, 1956.

10. Cauchy, A. "Sur l'equilibre et le mouvement d'une plaque solide", 18[illegible].

11. Poisson, S. D. "Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corpes solides" 18[illegible].

12. Aron, H. "Das Gleichgewicht und die Biegung einen unendlich dünner beliebig gekrümmten elastichen Schale", J. Reine und. Ang. Math. 78, 1874.

13. "The Collected Papers of Stephen P. Timoshenko" editado por D. H. Young, Mc Graw Hill Book Co., Inc. 1953.

    a) "Einige Stabilitats probleme der Elastizitats theorie" pp. 1-50.

b) "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars", pp. 288-290.

14. Timoshenko, S. P. y Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability", 2a. edición, Mc Graw Hill Book Co., Inc. New York, 1961.

15. Rayleigh, J.W.S. "The Theory of Sound", (en dos volúmenes), 2a. edición, Dover Publications, New York, 1945.

16. Belluzzi, O. "Scienza delle Costruzioni", Vol. IV, Nicola Zanichelli Editore, Bologna 1961.

17. Timoshenko, S.P. y Woinosky - Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", 2a. edición, Mc Graw Hill Book Co., Inc., New York, 1959.

18. Ritz, W. "Theory der Transversalschwingungen einer quadatischen Platte", Ann. der Physik, V. 28, p. 737, 1909.

19. Galerkin, B. G., "Placas elásticas delgadas". editado Estatal de la Construcción, Moscú 1933.

20. Timoshenko, S. P. y Goodier, J. N., "Theory of Elasticity" 2a. edición, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York, 1951.

21. Kalmanok, A. S. "Manual para cálculo de placas" traducido del ruso por Trucillo R., editora Inter Ciencia, Montevideo, 1961.

22. Argyris, J. H. y Kelsey, S., "Energy Theorems and Structural Analysis", Butterworths Scientific Publications, Londres, 1960.

23. Oniashvili, O. D. "Certain Dynamic Problems of the Theory of Shells", traducido del ruso yppublicado por Morris, D. Friedman, Inc. Massachusetts, 1959.

24. "Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs", ASCE, Manuals of engineering practice, No. 31, New York, 1953.

25. Flügge, W. "Stresses in Shells", Springer-Verlag, Berlín 1960.

26. Vlasov, V. Z., "Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik", traducido del ruso bajo la seuperficie de A. Kromm, Akademie-Verlag, Berlin, 1958.

27. Lundgren, H., "Cylindrical Shells", V.I. The Danish Technical Press, Copenhagen, 1951.

28. Novozhilov, V. V., "The Theory of Thin Shells" traducido del ruso por P. G. Lowe, P. Noordhoff Ltd. Groningen-The Netherlands, 1959.

29. Donnell, L. H., "Stability of thin walled tubes under torsion", NACA Rep. No. 479, 1934.

30. Jenkins, R. S., "Theory and Design of Cylindrical Shell Structures", Ove Arap & Partners, Londres 1958.

31. Gibson, J. E., "The Design of Cylindrical Shell Roofs" 2a. edición, E. & F. N. Spon Ltd. Londres 1961.

32. Schorer, H., "Design of Large pipe lines" Trans. ASCE, V. 98, p. 104, 1933.

33. "Calcolo delle Volte cilindriche ci[illegible]i sottili", Manuali per applicazioni techniche del calcolo, Cremonese Roma, 1960.

34. Pr[illegible]s. of the 2nd Symposium on "Concrete Shell Roof Construction", 1-3 July 1957, Teknisk Ukeblad, Oslo, 1958.

    a) Holland, I., "A contribution to the theory of cylindrical shells", p. 257-263.

    b) Vlasov, V. Z., "Cylindrical shells and new ways of developing thin walled spatial systems in structural mechanics", p. 1[illegible]1-146.

35. Pucher, A. "Uber die Spannungsfunktion Beliebig GerKrümmten dünner Schalen", p. 134, Proc. 5th International Congress on Applied Mechanics, Cambridge Mass, 1936.

36. "Estudios Analíticos sobre presas Bóveda", informe del Instituto de Ingeniería a la Comisión Federal de Electricidad, México D. F., [illegible]. México.

37. Vlasov, V. Z. "Osnovnie differentsialnie uravnenia obshche teorii uprugikh obolochek", Prikladnaia Matematica I Mekhanika, Vol. 8, 19[illegible], pp. 109-140.

38. Ambartzumián, [illegible] A., "Teoriia Anizotropnikh Obolochek", Gosudarstvennoe Izdatelstvo Fiziko - Matematicheskoi Literaturii, Moscú 1961.

39. Naghdi, P. M., "On the theory of thin elastic shells", Quarterly of Applied Mathematics, V. XIV, No. 4, 1957.

40. Cicala, P., "Sulla teoria elastica della parete sottile" Giornale del Genio Civile, V. 97, No. 4, p. 238.

41. Cicala, P., "Consistent approximations in shell theory" Trans. ASCE, V. 12[illegible], parte 1, 1963.

42. Axentian, C. K., Vorovich, I. I., "Napriashennoie sostoianie pliti maloi tolshchini", Prikladnaia Math. i Mekh., V. 27, No. 6, 1963, p. 1058-1074.

43. Zerna, W. "Mathematische strenge theorie elasticher Schalen", grupo de conferencias en la Universidad Ibero-Americana, México 1961.

44. Rodríguez Caballero, M., "A general theory ofor the analysis of non-shallow thin elastic shells", Memorias del II Simposio Panamericano de Estructuras en Lima, Perú, 1964.

45. Tereʼgulov, I. G., "K Postroeniiu Utochnennikh teorii plastin i obolochek" Prikladnaia Mathematica i Mekh., Vol. 27, No. 2, p. 346-350, 1963.

46. Tereʼgulov, I. G., "Ob adnoi variatsionnoi teoreme nelineinoi teorii uprugosti", Prikladnaia Math. i Mekh. Vol. 26, No. 1, p. 167-171, 1962.

47. Reissner, E., "On variational principles in elasticity" Proc. of Symposia in applied Mathematics", Vol. 7, American Mathematical Society, New York, 1949.

48. Rodríguez Caballero, M., "Una teoría lineal para cascarones de espesor constante y forma arbitraria", Memorias del 1er Simposio Panamericano de Estructuras, en México D. F., México 1961.

49. Herzog, W. "Die Grundglaichungen dur Flachen, dünnen, elastiche Schale unter beliebiger Belastung und Temperatur anderung", Die Bautechnik, Vol. 37, No. 1, p. [illegible], 1960.

50. Koiter, W. T., editor, "The Theory of Thin Elastic Shells", Procs. of the Symposium on the theory of thin elastic shells, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1960.

51. a) Koiter, W. T., "A consistent approximation in the general theory of thin elastic shells. pp. 12-33

b) Zerna, W., "Uber eine nichtlineare allgemeine Theorie der Schalen", pp. 34-42.

51. "Progress in Applied Mechanics, The Prager anniversary Volume", Mc millan Co., New York, 1963.

a) Budiansky, B., Sanders, J. L. "On the "best" first-order linear shell theory", pp. 129-140.

52. Green, A. E., Zerna, W., "Theoretical Elasticity", Oxford at the Clarendon Press, London 1954.

53. Goldenveizer, A. E., "Theory of thin Elastic Shells" traducido del ruso, G. Herrmann, editor, Pergamon Press, London, 1961.

54. Rodríguez Caballero, M., "Teoría General de Cascarones" notas de clase, División del Doctorado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, México 1962.

55. Naghdi, P. M., "Note on the equations of shallow elastic shells", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XIV, p. 331, 1956.

56. Reissner, E., "On some problems in shell theory", Proc. of the First Symposium on Naval Structural Mechanics, J. N. Goodier, N. J. Hoff, editores, Pergamon Press, 1964.

57. Rosenblueth, E., "Métodos de análisis para presas bóveda", capítulo 4o. de la ref. 36.

58. von Karman, T., "Non-linear buckling of thin shells", Congress on Fluid Dynamics and applied Mathematics", editado por J.B. Díaz Plenum Press, New York 1961.

59. Cicala, P., "Sulla teoria elastica della parete sottile" (continuazione), Giornale del Genio Civile, Vol. 97, No. [illegible], pp. [illegible]. 1959.

60. Cicala, P., "Sulla teoria elastica della parete sottile (fine), Giornale delGGenio Civile, Vol. 97, No. 9, 1959.

61. Cicala, P., "Thin shells under assigned body and contour forces", Quart. Journal Mech. and App. Math., Vol. XVI, Pt. 1, 1963.

62. Hildebrand, F. B., "Methods of Applied Mathematics", Prentice Hall, Inc., New Jersey 1960.

63. "Collected Works of Theodore von Karman", Vol.s III y IV, Butterworths Scientific Publications, London 1956.

64. Langhar, H., "Energy Methods in Applied Mechanics" John Wiley and Sons Co. Inc., 1962.

65. Sokolnikoff, I. S., "Mathematical Theory of Elasticity", 2a. edición, Mc Graw Hill Book Co., Inc., New York, 1956.

66. Morley, L. S. D., "Skewed Plates and Structures", Pergamon Press, Oxford, 1964.

67. von Karman, T., "Non-linear buckling of thin shells", Procs. of Symposia on Fluid Dynamics and Applied Mathematics, J. B. Diaz editor, Plenum Press, New York 1962.

68. Lekhnitskii, S. G., "Theory of Elasticity of an anisotropic elastic body", traducido del ruso por P. Fern, Holden Day series in mathematical physics, California 1963.

69. Gelfand , I. M., y Formin S. V., "Calculus of Variations" traducido del ruso por Richard A. Silverman, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1964.

70. Morse, P. M., Feshbach, H., "Methods of Theoretical Physics", Mc Graw Hill Book Co., Inc., New York 1953.

71. Hildebrand, F. B. "Advanced Calculus for Applications" Prentice Hall Co. Inc., New Jersey 1961.

72. Irving, J., Moullineaux, N., "Mathematics in Physics and Engineering", Vol. 6, Academic Press, New York 1959.

73. Mushtari, Ch. M., Galimov, K. Z., "Non Linear Theory of Thin Elastic Shells" traducción del ruso publicada por The National Science Foundation, Washington, D.C. 1961.

74. La Salle, J., Lefschetz, S., "Stability by Liapunov's Direct Method with applications" Academic Press, New York, 1961.

75. Volmir, A. S. "Gibkie Plastinki i Obolochki" (de la referencia 58).

76. Atkinson, F. V., "Discrete and Continuous Boundary Problems", Academic Press, New York.

77. Chuang, K. P., Veletsos, A. S., "A Study of two approximate methods of analyzing cylindridal shell roofs", University of Illinois, SRS No. 258, 1962.

78. Utku, S., Norris, Ch. H., "Utilization of digital computers in the analysis of thin shells", Symposium on the use of computers in civil engineering, Lisboa Portugal, 1962.

79. Salvadori, M. G., "Extrapolation formulas in linear difference operatos" Proc. 1st Congress Applied Mechanics, New York 1951.

80. Hartree, D. R., "Numerical Analysis" 2a edición, Oxford at the Clarendon Press, Londres 1958.

81. Tseitlin, Ch. Iu., "Optimalnie operatori b metode konechnij raznostei i ij primenenie k raschetu plastinok u obolochek". Issledobaniia po Teorii Soorusherii, Moscú 1961.

82. Novozhilov, V. V., "Foundations of the Non-linear Theory of Elasticity", Grayluck Press 1953.

83. Schnobrich, W. C., "A Physical Analogue for the Numerical Analysis of Cylindrical Shells", Ph.D. Thesis, University of Illinois, 1962.

84. Instituto de Ingeniería, "Modelo para el análisis de presas bóveda", Reporte final del estudio patrocinado por la Comisión Federal de Electricidad, Ciudad Universitaria, Agosto 1964.

85. Noor, A. K., Veletsos, A. S., "A study of doubly curved shallow shells", SR Series No. 274, University of Illinois 1963.

86. Rodríguez Caballero, M., "Aplicación de la geometría diferencial a la teoría de los cascarones", I, Simposio Panamericano de estructuras, I.P.N., México 1961.

87. Eisenhart, L. P., "An introduction to Differential Geometry", Princeton University Press, Princeton 1949.

88. Sokolnikoff, I.S., "Tensor Analysis", 2a. edición, J. Wiley & Sons Inc. N.Y., New York 1964.