

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

/



1964







UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION

DISCONTINUA

PRELIMINARES

1. <u>Generalidades</u>

Actualmente se construye un buen número de cortinas de concreto en arco para presas. Estas construcciones originan un cierto tipo de problemas entre los cuales pueden citarse algunos relacionados con la cimentación, otros relacionados con el comportamiento estructural y algunos más relacionados con el funcionamiento hidráulico. Este aspecto de comportamiento se ha resuelto parcialmente por métodos experimentales y se ha hecno poco caso del aspecto analítico, tel vez debido a su complejidad. Efectivamente, en este tipo de cortinas de concreto, usualmente construidas como un cascarón de doble curvatura, dadas sus cualidades geométricas, la aplicación de

curvatura, dadas sus cualidades geometricas, la aplicación de las teorías usuales de cascarones, puede conducir a grandes errores. Por ejemplo, en estas cortinas, el espesor no es pequeno comparado con los radios de curvatura, de modo que las teorías existentes no resultan directamente aplicables. El efecto, quizá más importante, que es necesario considerar, es el de la deformación debida al cortante que actúa en las caras normales e la superficie. Este efecto, hace que dichas caras normales, no permanezcon planas durante la deformación. For otro lado la tendencia actual, en materia de cortinas formadas con cascar nes de concreto, es hacer cada vez más pequeno el espesor. Esta tentencia observada también en otro tipo de tonstruccioner, ha inte lugar a la necesitad de considerar la positionición de fenómenos de inestablidad.

Así pues resulta que la construcción actual de cortinas, exige la consideración de otros efectos adicionales como son el de espesor y el de inestabilidad. Los caminos ingenieriles para su consideración, son el experimental y el analítico; en ambos casos se trata con idealización de las variables esenciales que son, el material, la forma de la superficie y las condiciones le apoyo. Y aunque parezca inverosimil, el hombre, el ingeniero, continúa buscando la solución a problemas con materiales que la naturaleza no le dió.

Finalidades 2.

En el presente trabajo se pretende formular ciertas teorías para el análisis de cortinas consideradas como cascarones continuos y las características principales que se introducen son:

a) relación grande de espesor a radio

b) desplazamientos finitos

c) inestabilidad

Para la consideración de estas características se siguen dos caminos; uno esencialmente analítico y otro de análisis numérico basado en un modelo físico en que se pretende incor-

porar las variables consideradas en el estudio analítico.

En ambos casos las ecuaciones correspondientes, con di-

versos grados de aproximación, se plantean con el empleo del

cálculo de variaciones. También se hacen consideraciones

acerca de la inestabilidal eléstica.

Se reconoce que el número de variables que aquí se con-

sideran, no agota todas las que aparecon en el disero de una cortina. Por ejemplo no se nace consideración ale na respecto a la elasticidad de los apoyos, ni se toman en cuenta los efectos que pudieran aparecer durante el comportamiento hidráulico del conjunto cortina-vaso.

Introducción 3.

En este trabajo de presentan teorías le varios órdenes de aproximación que tienen por objeto pluntear el inálisis de cascarones como cuerpos tridimensionates. De presenta tumbién un modelo fícico para el planteamiento direrete del problema.

En el primer capítulo, se nace una reseña de nataraleza histórica con objeto de agrapar el material bibliográfico relacionado con el tópico en suestión. En este capítilo se presentan también los conceptos sobre el problema de inestabilidad, en su evolución histórica.

El capitulo 2 presenta una teoría que incluye los efectos de la deformación por contante. Pota teoría se deltre con el empleo de una anale fa y cal e sultidos as creden en

la forma de un sistera de ocucional defeneralidos en los variables. Estos mentitates e reconcitandal ruco de con denadas curvilíneas no obtoblocares e la salente la los re-Bultados en que se buca este mái o o compositor en forma detailata en los apéristes al finel. El casitore termine con and discusion del protocolo de amentaria della

Jon base on la introducción de ma farmán com con,

en el capítulo 3 se presenta una teoría de cascarones gruesos con espesor variable, que toma en cuenta el efecto de la deformación por fuerza cortante. Los resultados que aquí se deducen quedan limitados a un sistema coordenado curvilíneo ortogonal y de curvatura casi principal. Estos resultados pueden generalizarse al caso de curvas coordenadas que no sean de curvatura principal. El sistema de ecuaciones que se deduce en este capítulo, queda expresado mediante las variables de desplazamiento u_1, u_2 y w y en términos de una función potencial ψ .

Los capítulos 2 y 3 presentan teorías de cierto orden de aproximación, que pretenden incorporar efectos como la deformación por esfuerzo cortante en las caras normales a la superficie, sin quedar resuelto el problema tridimensional. En el capítulo 4, se presenta una teoría le cascarones gruesos que puede llegar a representar completamente el cascarón como cuerpo tridimensional. Esta teoría se basa en el empleo de funciones especiales como son los polinomios de Legendre. En particular aquí se usa un número reducido de términos, pero para mejorar la precisión, pueden usarse más términos y el

camino a seguir queda implicito. Los desarrollos de esta última teoría se limitan a cuscapones cuyas carvas coordensias son ortogonales y de curvatura principal; su extensión hacia el caso de curvas coordenadas cualesquiera solo puede hacerse sobre bases tensoriales.

En cuanto a la solución analícica o numérica, en el ca-

pítulo 5 se presenta un método basado en la teoría de perturbación, describiéndose los pasos a seguir en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, deducidas en los capítulos 2 y 3. También se hace una discusión somera sobre la solución del problema de inestabilidad. Como técnica más al alcance del ingeniero, se discute un método de **d**iferencias finitas debido al autor soviético Tseitlin. La técnica en cuestión parece ser adecuada para el tratamiento numérico de los; problemas de la teoría de cascarones. Para conclu**t**r, en este mismo capítulo, se presenta la formulación matricial del problema de inestabilidad elástica a la manera de Liapunov.

En el capítulo 6 se establece la formulación discreta de las teorías desarroliadas en los capítulos 2 y 3. En esta formudación se emplea un modelo físico, idealización del sistema continuo. La discretización se establece para coordenadas ortogonales y se introduce el concerto de distancia paramétrica para poder formular el problema cuando las distancias de la malla son variables. Como caso particular de los resultados que corresponden al modelo contínuo del capítulo 3, se presenta además el sistema de ecuación para el modelo físico, cuando se utilizan únicamente las variables u_i , u_2 y w. Todos los desarrollos

de este cavítulo de establecen para cascarones de espesor va-

riable y curvaturas cualesquiera. Este caso particular se

aplica a la solución del problema de una cortina simétrica cu-

yos resultados se presentan en el carítulo 7.

La mayor parte de los desarrollos analíticos así como los

result dos utilizados se presentan en forma resumida, en los

apéndices A1 a A6.

4. Reconocimientos

El autor de este trabajo, hace patente su agradecimiento, así como su reconocimiento al Dr. Emilio Rosenblueth, director del Instituto de Ingeniería por su paciente labor de guía y su excelente buena disposición para que este trabajo viera su for ma final.

El presente trabajo fue posible gracias a la ayuda propor cionada por el Instituto Nacional de La Investi_lación Científ<u>i</u> ca a cuyo director actual el Lic. Hugo B. Margáin y a sus directivos, el autor desea manifestar su más profundo agradecimiento. La parte de aplicación fue desarrollada con ayuda de la Comisión Federal de Electricidad a cuyo director, el Ing. Manuel Moreno T., y Sut-director, el Ing. Fernando Hiriart se agradece su interés por el desarrollo de la ingeniería en Méx<u>i</u> co.

Las deducciones de las eculciones fueron revisadas por J. Antonio Nieto Ramírez a quien el autor agradede en lo que valen, todas sus interesantes suferencias. El trabajo numérico fue posible gracias a Juan Casillas G. de L. a guien se agradece su interés para que este trabajo llegara a término. La labor numérica fue realizada por Victor M. Pastor, Raúl Balcárcel, J. González M. Fernanio Gómez, Francisco Queipo y Antonio Olivera quien además cotaboró al igual que Jaime López en la elaboración de los propramas para la computadora. A todos ellos se o radece sinteramen e su valioso avuda.

1. RELACION HISPORIDA

El propósito de esta nota es establecer una velcaión his tórica de los trabajo: que tiunen conexión don el tema que aquí se discute. Los principales tópicos sou:

a) Teoría de placa, y cascarones

- b) Chleulo de varisciones
- c) Inestabilidad
- d) Discretización

La primera vez que un tratamiento discreto se utilizó en 15 formulación variacional del problema de lineas curvas fue en 1744, con L. Euler $(\frac{1}{2})$.

Para la determinación de la condución

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{i}} \right) = 0 \quad (\alpha \leq x \leq b) \quad (1.1)$$

que hace que la integral

$$I = \int_{\alpha}^{b} F(y, y', x) \, dx \qquad (1.2)$$

adquiera un valor estacionario, Euler introduce $(\mathbb{C},3)$ una técnica de diferencias finitas haciendo

$$y'_{k} = Z_{k} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{y_{k+1} - y_{k}}{X = x_{k}}$$
(1.3)

1

quetando la ecuación 0.2 como

$$I = S = \sum_{k=0}^{n} F(Y_{k}, Z_{k}, X_{k})(X_{k+1} - X_{k}) \qquad (1.4)$$

Aquí. F es un funcional y" x" y" y" con los ejes coor

densdon cartesianos en an plane. En estas rondr fones el pro

biema de valor estacionario de la integral se reduce al de una función de un número finito de variables que en el límite conduce a la ecuación (0.1).

Alrededor de 1760 Lagrange⁽¹⁾ publicó sus resultados acerca del cálculo de variaciones e hizo interesantes aportaciones al problema de la estabilidad de columnas iniciado por Euler. La discusión de Lagrange a este problema contiene la indicación de distintas configuraciones para cargas distintas como solución de la ecuación diferencial

$$C \frac{d^2 y}{dx^2} = -P_y \qquad (1.5)$$

concluyendo que es posible tener un número infinito de curvas de pandeo⁽¹⁾.

El trabajo sobre inestabilidad fue continuado por T. Young con la consideración de un grupo de problemas particul<u>a</u> res de barras publicados en $1807^{(1,4)}$. Entre estos trabajos resalta el problema de una barra que se encuentra ligeramente deformada y que de hecho inicia el tratamiento de irregularidades o perturbaciones ocasionadas por la fabricación o inherentes a la condición natural de la barra. Young concibe el concepto de inestabilidad como aquel fenómeno ocasionado por 2

"un valor particular de la carga axiai que puede inducir desplazamientos infinitos cuarquiera que sea la deflexión inicial o al menos producir una flexión grande". Otros problemas con distintas condiciones de frontera y de sección variable fueron también tratados por T. Young. Mucho después en 1930, Zimmer mann concluiría que la carga critica es independiente de las imperfecciones (r. 16, p. 19).

La nerramienta dei cálculo de variaciones fue usada después en 1811 por Sophi Germain para la deducción de la ecu<u>a</u> ción de equilibrio en placas. Influenciada tal vez, por la consideración que sugirió J. Bernoulli en 1790, en cuanto a que una placa podría suponerse formada por unasistema ortogonal de vigas, S. Germain sugirió que el valor estacionario de la integral:

$$A \int \int \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)^2 ds$$
 (1.6)

conduciría a la ecuación de placas; en esta expresión,

 f_1 = radio de curvatura en una dirección f_2 = radio de curvatura en la dirección perpendicular S = superficie

Sin embargo Germain no judo Justificar la elección del funcional (0.0) y, debido a an error, que después fue corregi do por Lagrange, ella no llegó a la ecuación de placas que bien podría llamarse de Germain-Lagrange.

Fue Kirchhoff en 1850 quien hizo explicitas las consi-

3

deraciones de un funcional del tipo:

$$\iint \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{p^2} + \frac{3}{p^2} + \frac{3}{p^2} + \frac{3}{p^2} + \frac{3}{p^2} \right) ds \qquad (1.7)$$

en que 🤊 y 🚜 son las constantes elásticas de Lamé. En adición a la derivación correcta de la ecuación de equilibrio de placal, dirennoff estable: 6 el número correcto de condiciones de frontera dando a dichas condiciones justificación física.

Los resultados de Kirchhoff pueden considerarse un caso particular del tratamiento dei croblema de placas considerando iesarrotios en serie de potencias de Z (cordenada perpendicular a la superficie media), propuento en forma diferente por A. Cauchy y Poisson⁽⁴⁾ De hecho, Cauchy r. 4, p. 335 v. 1 estableció que el momento flexionante era proporcional al cubo del espesor y a la curvatura, según lo aceptó Kirchhoff. En cuanto a los desarrollos en serie propuestos por Cauchy y Foisson, parecen haber sido abandonadas una vez que B. de St. Venant indicó (sin demostrarlo) que esos desarrollos eran en general divergentes, lo cual parece injusto porque la ecuación Germain-Lagrange-Kirchnoff de placas es obtenida con la consideración de un término en este desarrollo;

La primera formulación en términos de energía de la teoría de cascarones, fue acche por Lord Rayleigh en 1888 r. 15 p = 345 v. 1 quien introdujo la separación de energías en "<u>ex-</u> <u>tensional</u>" e "inextensional". La primera tema en acoutre del 4

hecto de que un cascarón relieforme en extensión aniforme en tudas in inferitties fonctelas s la media, y es proporcional al especier n . Le stra o l'extensión o contre cuando el case carón se reforme via modifica dos en ir - uperficie mesos y es $proporcional a <math>n^{\frac{1}{2}}$. La contribución de defair as fa quede expresance como:

 $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{B} = \mathbf{B}$

Esta división fue quizá el origen del onfoque contemporàneo para la solución del problema de cascarones cuyas partes se conocen como "análisis de membrana" o "estado de esfuerzos de membrana" y el de "análisis de flexión" o "estado de esfuer zos de flexión".

State Argentine and the many reserves

Rayleigh plantea la cuestión acerca de si es congruente despreciar el término en h cuando h es grande, en virtud de que si h es pequeño, la validez de despreciar la energía ine<u>x</u> tensional es obvia. Su respuesta, basada en especulación, es afirmativa pero indicando que, en los límites del rango de valores de h, esta consideración es válida. Las cortinas de una presa no están, naturalmente dentro de estos límítes.

Las consideraciones propuestas por Kirchhoff fueron usadas en cascarones cilíndricos y esféricos por Love en 1888 y con términos adicionales⁽⁴⁾ por A. B. Basset en 1890. Pearson (r. 4, p. 89, V. 2) demuestra que los términos adicionales de Basset no se basan de manera correcta en la formulación de Kirchhoff. Así, A. E. H. Love en 1892⁽⁵⁾ fue quien formuló por primera vez la terría ceneral de cascarones basada en la 5

geometría diferencial y carticularmente en los resultados pa-

blicados por Godazzi diez años antes (1882), r. 5 p. 510 .

El tratamiento que acerca le cascarones crementa Love en su li-

bro "A Preatise on the Wathemstical Theory of Elasticity" (1)

constituye cientamente la bace del tratamiento det bi de 18

teoría de cascarones; abi presenta la consideración del cam-

b)o de las proviedades de béta com le las cuperts des parales

a da la pratición

6

las a la morte peru vanut la deformición (r. ., E. 199). An embargo le utribuye port importantia a aste virtoción. Eus distintam intoximaciones componenti las polacieros resultantes (momento o fierza) - deformación man alto motive de discución caus-portente en la encuesa casa o ben originado interesantes resploidos (r. 20 p. 147).

Annes de que los resalicion de la reoris enservenes radiehan per aprovectables fue necesario : matrixe en contins der tiro le essentin que no inslante estabilitary lejos le perlo, quisi el intento de anàlisio : . . .6 en 1964 quando sherier ⁶ desarrouné en actudo "anos uni inseme establiver Vetnodo que constitu es api per los reconstructors puèx mon le la contina aque da formate de insert y ménoriers de la contina aque da formate de insert y ménoriers de la contina que da formate de insert y ménoriers de la contina que da formate de insert y ménoriers de la formate de que da formate de insert y ménoriers de la formate de que da formate de insert y ménoriers de la formate de que da formate de insert e concentration en entre d que da l'elemente de insert e concentration de dans de que de la contra concentration de la formate de que da l'elemente de la contra de la concentration de dans de la terratione este da constanción de la contentration de dans de material de la contra de la concentration de la content de dans de la terratione este da constanción de la content dans de dans de la constanción de la content de la content de la content de dans de la terratione este da constanción de la content dans de dans de la constanción de la content de la content de la content de dans de la content de la content de la content dans de la content de la content de dans de la content de la content de la content dans de la content dans de dans de la content de la content de la content dans de la content dans de dans de la content de la content dans de

laboriosidad. Además en cuanto al problema de inestabilidad resulta inaplicable a pesar de que conocida la distribución de car ga puede obtenerse una idea de la posibilidad de pandeo, al tomar en cuenta la capacidad de los elementos **a**islados. 7

El primer tratamiento del problema de inestabilidad en cas carones parece haber sido resuelto en 1909 por S. Timoshenko. Timoshenko resolvió el problema de un cascarón cilíndrico cargado en la dirección de la generatriz. En el tratamiento de este y otros problemas (ref. $13^{(a)}$ pp 1-50) utiliza una idea debida a Rayleigh⁽¹⁵⁾, que consiste en la igualación de las variaciones de la energía potencial interna y de las cargas exteriores como criterio de pandeo, es decir,

$$\sqrt{V} = \sqrt{T} \qquad (0.9)$$

V = energía potencial de deformación

Phillippine Constant

T = trabajo de las fuerzas que inducen inestabilidad.

Utilizando funciones similares a las propuestas por Love (r. 5 p. 547) para el análisis inextensional de un cascarón c<u>i</u> líndrico en vibración, Timoshenko planteó el problema inextensional de el cascarón cilíndrico cuyo borde en contacto con la

carga puede desplazarse en la dirección del radio. Establece así los parámetros que intervienen en el problema e indica que a cada relación entre ellos corresponde una carga mayor o menor con distinta forma de pandeo, de manera que una cierta relación de los parámetros puede conducir a que la carga más pequeña de pandeo corresponda a una forma de pandeo similar a la laboriosidad. Además en cuanto al problema de inestabilidad resulta inaplicable a pesar de que conocida la distribución de ca<u>r</u> ga puede obtenerse una idea de la posibilidad de pandeo, al tomar en cuenta la capacidad de los elementos **a**islados. 7

El primer tratamiento del problema de inestabilidad en cas carones parece haber sido resuelto en 1909 por S. Timoshenko. Timoshenko resolvió el problema de un cascarón cilíndrico cargado en la dirección de la generatriz. En el tratamiento de este y otros problemas (ref. 13^(a) pp 1-50) utiliza una idea debida a Rayleigh⁽¹⁵⁾, que consiste en la igualación de las variaciones de la energía potencial interna y de las cargas exteriores como criterio de pandeo, es decir,

$$\int \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{T}}$$
(0.9)

V = energía potencial de deformación

·普鲁斯·斯特·斯尔·斯尔·斯尔·马克·马克·

T = trabajo de las fuerzas que inducen inestabilidad.

Utilizando funciones similares a las propuestas por Love (r. 5 p. 547) para el análisis inextensional de un cascarón c<u>i</u> líndrico en vibración, Timoshenko planteó el problema inextensional de el cascarón cilíndrico cuyo borde en contacto con la

carga puede desplazarse en la dirección del radio. Establece así los parámetros que intervienen en el problema e indica que a cada relación entre ellos corresponde una carga mayor o menor con distinta forma de pandeo, de manera que una cierta relación de los parámetros puede conducir a que la carga más pequeña de pandeo corresponta a una forma de pandeo similar a la de una viga de sección difinitade els companys. Pro-

En 1921, l'imonneo presenta^{l e l}our manera de tomer en cuenta la deformación le orresnue y la inercia rotacional en vigue, que consiste économiente qu'expressi la peudiente en el eje de ana viga como la como de uno pendiente debida exclusivamente a la flexión ominarie y otra debida a la existencia del contante. Si x ep el eje y y el desplazadento de lo viga,

> Dy p ch (Ø.10)

de modo que

$$M = (H) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \int (\Phi_{0} L_{1})$$

en que, además de la notación usual,

k « constants jus toma en sussis la Sarba de jas se fistribuye el contante en 15 de ción; en moción rectaugular Titoshonko emplen eder

🎖 - rotación vedra por contante ou la sección

BD general todop los proen son un in terreit in tesentones han side una continuectón de les republicados definedos en pra-CAR Y OPLO OF VALLES ASTRICTATIONS OF OF OPERATE ACCELLS A ME

tanto que no lo es traténdose del problemar de ancalabilistad

porque es fenément de mateus care a l'allantes d'arteresteres e

106 permission productions of ended of the second of the second of the

por the castorian particular and the second of the second of the second particular

 $\frac{1}{2} p \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}$ cas y cascarones) fueron deducidos por Bryan en 1891 y Timoshenko en 1907 (r. 17, p.p. 348) y 1911 (r. 13 p. 193). En el tratamiento de problemas en placas, el método de Ritz⁽¹⁸⁾ quien lo presentó para el tratamiento del problema de vibraciones transversales en placas, ha sido de especial utilidad. Este método consiste en introducir un grupo de funciones que satisfacen las condiciones de frontera asociando a cada una de ellas una constante que se determina con la condición de mínimo para la energía potencial. Otro procedimiento también de utilidad es el atribuido a Galerkin⁽¹⁹⁾, (que, como indica Timoshenko, (r. 20, p. 159), se encuentra implícito en el tr<u>a</u> bajo de Ritz,) quien lo usó en 1915 para la solución de un n<u>ú</u> mero grande de problemas, de los cuales se tiene noticia únicamente por referencia indirecta^(17, 21, 22).

Estos procedimientos del tipo de cálculo de variaciones, han sido también recientemente usados en forma sistemática para el análisis de problemas en cascarones ⁽²³⁾. Así queda definido el origen de la aplicación formal del tratamiento variacional, como método del análisis numérico, en problemas de la Mecánica Aplicada y en particular de placas y cascarones. 9

Equilibrio estático den cascarones

Desde 1930, la producción literaria acerca de cascarones y en particular de cascarones cilíndricos, creció en forma continua dando lugar a un número grande de resultados. Ciertamente fue en Alemania con Dischinger y Finsterwalder cuando empezaron a aparecer procedimientos simplificados para el aná

lisis de cascarones⁽²⁴⁾. En 1932 %. stugge⁽²⁵⁾ publicó su teo ria de casempones cilíndricos en us caus para la determinación de los resultantes de esfuerzo y de las deformaciones toma en cuenta la forma trapecial del elemento en que actúa el esfuerzo y que las fibras paralela a la media cienen otra longitud. Dicho de otra manera toma en quenta el cambio de geometría de las superficies paralelas respecto a la media. (r. 25 p.p. 212-219). Las ecuaciones de Filigge sirveron de base para pus teriores deservollos en los que se trató de reducir el sisteme de ecuaciones en las variables u, v y W a una sola ecuación. Así en 1933 Donnell publica sus recultados como una teoría sim plificada (r. 17 p. 507) y los aplica ar problema de inestabilidad⁽²⁹⁾. Entonces sparecieros varias teorías las cuslas difieren entre si en ocasiones únicamente por la variable elegida en la ecuación diferencial, entre cilus se encuentran la de Jenkins⁽³⁰⁾ que utiliza como variable la fuerza tangencial en la dirección de la directriz, Finsterwarder (16) y Dischinger (16.31) que usan el momento flexionante en la misma dirección y Lundgreen que usa di desplazaviento normal #. Esto naturalmente que no tiene importancia desde el panto de vista del anà lisis, pero facilitó ciertar simplificaciones como la de

10

Schorer⁽³²⁾ en la ecuación característica.

Una pevisión cuidadosa de la interatura acerca de cascarg nes ciindricos aplicados a cortinas, se ancaentos en la refe-

rencia bos (cap. 1% en journe adente acarece ens discusión inte-

resable acerca de la importanció de la ecisión de compatible

lidad en estructuras que como el concreto armado pueden experimentar agrietamientos.

Existe un detalle de particular importancia en cuanto a la deducción de dos teorías: la de Flügge y la de Timosnenko. En el planteumiento del sistema de tres ecuaciones, ambos esco gen relaciones fuerza-desplazamiento que satisfacen la "sexta" ecuación de equilibrio, y que son distintas, obteniendo en cada caso ecuaciones diferentes. El necho en aparente contradi<u>c</u> ción, radica en que mientras Flügge toma en cuenta el cambio de geometría de las superficies paralela en el cálculo de las deformaciones, Timosnenko utiliza las relaciones más simples que se obtienen el tomar las superficies paralelas iguales geo métricamente a la media. La razón según lo ha establecido Novoznilov (ref. 28, p. 38), radica en que independientemente de la elección particular, la igualdad

$$T_{12} - T_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0$$
 (0.12)

quederá satisfecha. Otras elecciones particulares surgen de la introducción de un número de términos del desarrollo en serie

 $\frac{1}{a+z} = \frac{1}{a} \left[1 - \frac{z}{a} + \left(\frac{z}{a}\right)^2 - \cdots \right]$ (0.13)

según lo sugirió (a) Jacobsen (r. 33, p. 17) y todas ellas sa-

tisfacen la ec. 0.12 porque está implicito en la simetria del

yensor esfuerzos. En lo anterior:

- R₁ radio de curvatura principal en una dirección
- R_2 = radio de curvatura principal en la dirección perpen-

dicular

 T_{21} , T_{12} = fuerzas cortantes en la superficie M_{12} , M_{21} = momentos de torsión

De todas estas aproximaciones, resalta la de I. Holland^(34a) que con el criterio de minimizar el error con respecto a la **e**eoría de Flúgge, utiliza como función desconocida el desplazamiento [°] llegando a demostrar que el error de las raíces de la ecu<u>a</u> ción característica es 0.06 h/R con respecto a las de la teoría de Flúgge.

La historia parece iniciar su desarrollo en términos de aplicación a la teoría de cascarones de doble curvatura, en 1933 con Pucher quien introduce por primera vez una función de fuerza para el análisis de membrana de cascarones rebajados⁽³⁵⁾. Considerando un sistema de coordenadas casi-cartesianas, K. Marguerre extiende la idea de Fucher para el tratamiento de flexión en cascarones. Estos mismos resultados pero para curvas coordenadas ortogonales y de curvatura principal fueron d<u>e</u> ducidos independientemente por V. Z. Vlasov⁽³⁶⁾ en 1949 y antes en 1932 para el tratamiento de cascarones cilíndricos largos con el esfuerzos en la dirección de la generatriz y el momento flexionante sobre la directriz como funciones desconoci-

das. Como caso particular, Vlasov deduce las mismas ecuaciones que Marguerre y señala que su validez está limitada para cascarones rebajados (ref. 36, p. 246). Para su deducción Vlasov utiliza loque ahora se conoce como analogía estático-geometrica* y que fue presentada por primera vez en 1940 por A. L. Goldenveizer en su disertación bajo la dirección de Vlasov (véase p. ej. r. 17, p. 655 de la r. 36). Previamente en 1944, Vlasov⁽³⁷⁾, había presentado las ecuaciones generales de la teoría de cascarones no rebajados y las ideas que ahí presenta han tomado actualidad recientemente.

El tratamiento de Vlasov intenta cubrir todos los rangos posibles en cuanto a espesor de los cascarones. Supone que las deformaciones pueden expresarse en serie de potencias de la coordenada normal, sin embargo en la formulación de los desplazamientos de puntos localizados en superficies pavaletas a la media adopta la hipótesis de Kirchhoff (sección plana).

Una interesante descripción del trabajo de la escuela ruse en la teoría de cascarones se encuentra en la referencia (34 b). De entre los escritores rusos juien ha atilizado en forma por demás completa el cálculo de variaciones en la solución de sus problemas es Vlacov. La idea desarrollada ampliap mente por Oniashvilli fue originalmente presentada por Vlasov en 1949⁽²⁶⁾. En 1951 Vlasov generaliza sus ecuaciones para el tratamiento de cascarones cuyas curvas de referencia son ortogonales pero no de curvatura principal. En su tratamiento, 13

Vlasov utiliza ^(34-b) coordenadas casi-cartesianas e introduce el fenómeno de temperatura. Posteriormente. M. Hodríguez C.

ubtendría recultados anAlogos para cascarones también rebajados

* Esta analogía se vueive a deducir aquí pero una forma distinta a la presentada en 1940 por Goldenvaiser.

> BIBLIOTORIA A LA DIVISIONES DE INV RADO DE INGLAIERIA,

pero utilizando coordenadas sobre la superficie media del cascarón⁽⁴⁸⁾ y M. Herzog⁽⁴⁹⁾ lo haría tomando en cuenta espesor variable y cambios de temperatura.

Recientemente han surgido distintos criterios en cuanto a la modificación de las teorías lineales de cascarones con el objeto de hacerlas aparecer más consistentes. W. T. Koiter^(50a) ha presentado una aproximación congruente tomando en cuenta el cambio de geometría para la evaluación del área en superficies paralelas a la media, introduciento el cociente:

 $h = \frac{g}{a} = 1 + 2hz + kz^2 \qquad (0.14)$ en el que (ver apéndice I)

g = área en la superficie a la distancia z

a = área en la superficie media

h = curvatura media

k = curvatura Gaussiana

Sin embargo no toma en cuenta esta diferencia para el cálculo de deformaciones y la determinación de resultantes. El argumento esencial es que estos detalles deben despreciarse a menos que se usen teorías más refinadas que no utilicen la hipótesis de Kirchhoff-Love. Con este criterio particular cier 14

tamente no existe ninguna teoría elaborada pero la inconsistencia en cuanto a la consideración de cambio de las propiedades geométricas no es aceptable.

Otro desarrollo que los autores B. Budiansky y J. L. Sanders Jr.^(51a) intitulan "la mejor teoría lineal de primer orden", no introduce esa inconsistencia y su tratamiento tensorial de la analogía estático-geométrica en términos le una variable compleja parece más acertada que el vectorial debido a Novozhilov (r. 28 p.p. 63-90). Desde el punto de vista de estos autores, se encuentran el planteamiento general de la teoría le cascarones rebajadas debido 4 Å. 3. Green y V. Zerna (r. 52, p.p. 398-402) y la teoría de cascarones cilíndricos de Timoshenko⁽¹⁷⁾ que resulta así más consistente que la de Flügge.

Estas consileraciones habián silo discutidas antes por A. L. Goldenveizer⁽⁵³⁾ y por N. Rodríguez⁽⁵⁴⁾ quienes formularon la consideración de la diferencia de geometría en las deformaciones y las resultantes con condiciones de ffontera adecuadas⁽⁴⁴⁾. Estos resultados adoptan como hipótesis la de deformación plana que resulta debstible en el tipo de cas carones en que es aplicable⁽⁵³⁾. Así resulta ser inconsistente en cuanto a la introducción de un factor geométrico des preciando el factor estático de esfuerzos cortantes⁽⁵⁶⁾.

Con el objeto de introducir hipótesis más acertadas que las de sección plana o le Kircbhoff-Love, Naghdi ha present<u>a</u> do una teoría que toma en cuenta la deformación de cortantes 15

en cascarones rebujados⁽³⁹⁾ con tres funciones je desplaza-

miento y dos adicionales de rotación par toman en cuento el

cortante. También Nagudi, sin liepas a formaler equaciones

explicitas para la solución del problema, introduce la consi

derución le cambio de la reometría en las recultantes y en

las deformaciones⁽⁵⁵⁾. Por atro lado 3. Reissner desprecia esta consideración y con el mismo número de variables (

 \sqrt{y} g) que Naghdi, formula variacionalmente excresiones más simples de manejar. Siguiendo las ideas le Naghdi^(30,55), Ambartzumian (r. 38, p. 306) formula un graro de "Nuevas teopias de case cones y plaças anisetrónicie", introduce tachién un grupo de cinco variables $\langle u, v, w, e_{0}, e_{0} \rangle$ y toma en cuenta el campio de ceosetría que una Magndi⁽⁵⁵⁾ pero con unos cuantos términos de un desarreito en serie cumitar al (0.13).

El tratamiento variacional mán completo desde el punto de vista matemático, pero que implica paro la solación del problema de cascarones relativamente cruesos un número de le incógnitas (que finalmente puede reducirse a 5), es el feordo a Reissner⁽⁵⁶⁾. Su formulación busada en un olvidado desarrollo variacional debido a meffits⁽²⁰⁾, 53, ⁶⁶⁾ introduce la deformación por contante y el cambio de geometría en las dos condiciones citadas antes. La referencia po parece contener en forma condensada la mayor parte del tratajo de Reissner en cuerconos y en cancal lo aud referente que de pa produció en América. Esta terminar con este decornición de 1 13

las teoríus en el anáristo de equilibrio, es tedebinos estas el trabajo de V. Minara^(40, 4) mainita tercoración po ino-

made the complete the parameters whether out the opposite set of the property of the

CONS. 148540 COBO CR. CREWER FOR HELENDERS OF BUILDENESS OF MELE CONCEPTS

•

.

17

usuales de la teoría de cascarones y su tratamiento lo ha di-

vidido en ciertos canços que en el futuro lo pueden hacer sás manejable⁽⁴¹⁾. Jimilar tratamiento pero con buse en tesarrollos en serie de potencias ha sido presentado por *N. Zerna⁽⁴³⁾*. Como caso particular de los resultados de Zerna, M. Rodríguez C. presenta el tratamiento de cascarones no rebajados en forma iterativa con la hipótesis de sección plana y la analosía estático-geométrica. También con case en desarrollo en serie de potencias I. G. Teregulov discute la formulación consistente de teorías refinadas y se concentra en el tratamiento de placas, su tratamiento se basa en su principio variacional de la teoría no-lineal de la elasticidad⁽⁴⁶⁾, generalización del principio variacional de Reissner⁽⁴⁷⁾. O. K. axentian y I. I. Vorovich⁽⁴²⁾, han iniciado en Rusia un tratamiento di<u>s</u> tinto en el problema de placas considerado como tridimensional y por ahora parece ser el más considerado como tridimensio-

La naturaleza compleja del problema de cascarones esencialmente idealizados como bidimensionales ha hecho que mucha gente de varias partes pontan su esfuerzo en la evolución de las teorías usuales y parece ser quemun futuro próximo se-

rá posible conocer el grado de aprovimación hacia el compor-

tamiento tridimensional elástico. Sin embargo la relación

teoría-realidad no se verá satisfecha aún sino hasta después

de haberse desarrollado la abora incipiente teoría estudísti-

ca de la resistencia de materioles.

Inestabilidad en Cascarones

Después del primer intento de análisis de inestabilidad en cascarones que se debe a Timoshenko, (13) el trabajo mas importante sobre pandeo, es el debido a v. Karman y Tsien. (ref. 67 pp. 368-380). En este trabajo, se presenta el pandeo de cascarones esféricos. La fig. 1.2, fue tomada de esta referencia y con respecto a ella, se discute el comportamiento de cascarones esféricos con diferente espesor. En esta fi gura, se aprecia que la posibilidad de un l'enómeno de pandeo que implica un cambio absoluto en el sentido de la curvatura (oil canning en inglés y Durchslag en alemán) aumenta al reducirse el espesor. Analizando esta figura v. Karman y Tsien concluyen que el pandeo ocurre para la carga que corresponde a los puntos en que la curva es cóncava hacia arriba. Las razones más involtantes parecian ser entonces las irregularidades propiss de la estructura. Más turde Tsien⁽⁹⁰⁾ afirmaria que la car a de pandeo de encuentra entre el punto en que la curva alcanza un máximo y aquel para el que alcanza un míni-- Sin embargo más tarde^(1.3) aceptaría la suposición de v. mo. Karman y Biria sue sfectivateste la carda de panteo correspon

18

de al cunto de cánimo pora alguna de las carvas A. Por otro

lado esta carga astaba sinspre más cerca de los resultados ex

perimentales. Santamental ale sa exprituí de la carsa de

pandeo parecia tegerier to ta especulación.

for otro lido, el problema de tabearones cilínaricos ha

sido angliamente estudiado y ana decoripción muy completa así

como un resúmen de resultados aparece en la referancia 91 por G.Gerard y H. Becker. En este tipo de cascarones, cargados axialmente, las imperfecciones juegan un papel predominante. En la fig. 1.1 se muestran distintas curvas del comportamiento de cascarones cilíndricos con diferentes gra dos de imperfección. La carga de pandeo, de acuerdo con el criterio de v. Karman, corresponde al punto de mínimo en esas curvas. Tratándose de cascarones cilíndricos este cri terio ha sido justificado por Volmir eon base en la fig. 1.3. En esta figura se muestra la forma en que varía la energía para distintos desplazamientos radiales designados en esa fi gura como f. Se nota en la parte inferior, en la curva pun teada, que la carga efectiva de pandeo es la que corresponde a un mínimo absoluto de todos los máximos, es decir, siendo los puntos inestables caracterizados por máximos en la ener gia potencial, de todos estos máximos, la carga efectiva de pandeo es la que corresponde al mínimo de ellos. Realmente este valor se alcanza para valores grandes del parámetro

, pero estos resultados son coincidentes con los resul tados exverimentales.

19

El caso de un cascarón cilíndrico apoyado en la direc-

ción de sus generatrices, ilustra adecuadamente el comporta

miento de cascarones cilíndricos y esféricos; en vírtud de

que cuando este cilindro se encuentra cargado en la direc-

ción normal, existe la posibilidad del fenómeno de pandeo

con inversión de la curvatura. Este problema puede represontarse adecuadamente mediante la ecuación diferencial(17)

 $\frac{D}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\beta}{\partial x^2} \frac{\partial^5 w}{\partial x^2} + \frac{\beta}{R} = \frac{q}{E}$ (1.15)

en que

$$D = \frac{Et^3}{2(1-3t)}$$

 $p = esfuerzo de compresión en la dirección de la di-
rectriz$

9 = carga normal exterior

± = espesor

2 = longitud del arco

La solución de esta ecuación puede suponerse en la forma

$$N = f_{1} N n \frac{\pi x}{l} + f_{3} A n \frac{3\pi x}{l} \qquad (1.16)$$

el primer término, caracteriza un comportamiento de flexión y el segundo implica un pandeo por efecto de fuerzas de mem brana en la forma que ocurre por ejemplo en cascarones esfé ricos.

Introduciendo las cantidades

$$\int -\frac{f_{i}}{t}$$

20



se puede resolver la ecuación diferencial (5. mediante el empleo del método de sitz-Galiockiu. Apli ando este método se jeduce,

$$\gamma = \frac{D\beta^2 - t\beta}{243D\beta^2 - 27t\beta}$$
(1.17)

observándose entonces que $\frac{1}{2}$ establece la influencia relativa de las cantidades f_i y f_j es grande, cuando la rigidez en flexión es pequeña, predominando entonces el efecto de membrana y reciprocarente. Siempre es posible trazar una superficie de energía usando para ello la energía potencial en la forma

$$V = \frac{D}{2} \int_{0}^{t} \left(\frac{d^{2} N}{d \kappa^{2}} \right)^{2} d\kappa + \frac{d^{2}}{2E} (1 - V^{2}) lt - \int_{0}^{t} q N d\kappa \quad (1.18)$$

o en forma adimensional

$$\overline{V} = \frac{VL^{3}}{Et^{5}} (1 - v^{2})$$
(1.19)

o sea, con la suposición para 🛛 🖊

$$\overline{V} = \frac{\pi^{4}}{48} \left(\frac{y^{2}}{5^{2}} + \frac{g}{7} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{p^{*}}{7} \right)^{2} - \frac{2}{\pi} \frac{q^{*}}{7} \left(\frac{y}{5} + \frac{1}{5} \right) (1.20)$$

en que

$$\phi^{*} = \frac{\phi l^{2}}{Et^{2}} \left(l - 2^{2} \right) ; \ g^{*} = \frac{q}{E} \left(\frac{l}{E} \right)^{4} \left(l - 2^{2} \right) . \quad (1.21)$$

la superficie, posce entonces dos grados de libertad

21

(**f** y **f**) que caracterizan respectivamente un estado predominante de flexiónyuno en que predomina la acción membranal. Esta superficie se ilustra en la fig. 1.4. En la parte inferior de esta figura, se encuentran las distintas posiciones de carga q^{*}, que corresponden a una misma magnitud del esfuerzo de wembrana \mathcal{P}^* , es decir, cuando \mathcal{N} = constante. Esta misma figura ha sido usada en el c<u>a</u>

pítulo 6 en una forma un tanto distinta que sirve para ilustrar la definición de inestabilidad a la Liabunov.

22



FIG. 1.1











. FIG. 1.2 W

A₁-Cascarón delgado A₃-Cascarón de espesor medio A₅-Cascarón grueso





SUPERFICIE DE ENERGIA PARA CINCO POSICIONES DISTINTAS DE EQUILIBRIO BAJO CARGA DADA


2. TEORIA DE CASCARONES REBAJADOS «UE INCLUYEN EL EFECTO DE DEFORMACIÓN POR CORANTE

2.0 Alcance

En la mayor parte de los dascarones que se usan para cortinas de concreto, la deformación por cortante resulta significati va ya sea porque el peralte es grande o porque el módulo de deformación al cortante es pequeño, o bien por ambas causas.

Parece necesario por tanto considerar este tipo de deforma ción y con tal fin se proponen en este capítulo y en los dos si guientes ciertos refinamientos que pretenden incorporar el efec to de la deformación por cortante. Como primera aproximación, se presenta aquí una extensión a la idea concebida por 3.P. Timoshenko^(13b) para introducir la deformación por cortante en vi gas.

En este capítulo se hace uso de la analogía estático-geomé trica de Vlasov-Goldenveizer(20) (ver apéndice A5) para la consideración de la deformación de cortante; se hacen ciertas consideraciones respecto al orden de espinitad de las cantidades par ticipantes, tratando también de definir el rango de validez de las ecuaciones que se deducen. En los desarrollos se considera

el efecto de desplazamientos radiales grandes y las ecuaciones que aquí se outienen son similares a las deducidas por Vlasov (ref. 36, p. 341) como una generalización a las ecuaciones de T. V. Kármán⁽⁶³⁾ para plaças. Las ecuaciones de Vlasov fueron deducidas con la analogía estático-preométrica, en tanto que aquí se deducen mediante el empleo de una forma del del principio va riacional de Reissner(47).

Utilización de una analogía para los efectos de cortante 2.1 en cascarones

De acuerdo con la hipótesis relativa a la sección plana como modelo de deformación en vigas, se deducen esfuerzos cortantes de distribución parabólica⁽¹⁾. Estos esfuerzos modifican la posición de las fibras normales al eje neutro, introduciendo una rotación angular. En un primer intento se puede suponer que la rotación en las fibras normales es la misma a cualquier distancia del eje neutro e igual al valor medio de dicha rotación*. Entonces la rotación total en cada una de las direcciones del cascurón será

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}^{T} = \mathcal{Y}_{\mathcal{X}} + \mathcal{Y}_{\mathcal{X}}(\beta_{I}, \beta_{2}) j(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{j};\boldsymbol{z}) \qquad (2.1)$$

en que

$$\psi_{\alpha} = \frac{A}{5A} Q_{\alpha} \qquad (2.2)$$

en tanto que 🍌 es la rotación de la fibra normal debida a los esfuerzos normales y 🖉 es una constante que toma en cuenta la forma en que se distribuye el esfuerzo cortante en la sección. En general se paede poner pie el estaerzo cortante es

24

$$\overline{G}_{\alpha} = \frac{P_{\beta}}{AT} \overline{f}(R) \qquad (2.3)$$

Ver discusión a la echerón de la <u>Relación histórica</u>. Aquí como en las temás consciones el indice 🖌 puede tomar los valores 1 o 2 representando entonces las cantidades asociatas a las linectiones $B_1 \circ B_2$.

y \mathcal{A} resulta ser entonces el valor medio de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. Puede d<u>e</u> mostrarse del sistema de ecuaciones de equilibrio (apéndice A6), cuando no se toman en cuenta los cambios de geometría de las superficies paralelas a la media (ver apéndice A2), que la ecuación de equilibrio en la dirección normal a la superficie media permite calcular

$$(33 = \overline{f}_{-\frac{1}{2}} - \frac{6t}{2} - \frac{7t}{2} - \frac{6t}{2} - \frac{7t}{2} - \frac{7t}{2$$

Aquí, como en el resto del trabajo la coma (,) después de una cantidad indica derivada con respecto a la o las variables β con los índices que siguen a la coma; \overline{f} es la carga aplicada en la dirección normal a la superficie y que se supone aplica da en las caras extremas del cascarón.

Una vez introducidas las funciones $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$, en la forma de la ecuación 2.2, se puede pensar que los momentos flexionantes son producidos únicamente por el cambio de las cantidades $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ (como se ilustra en el apéndice A5) según lo ha hecho Timoshenko en el caso de vigas. Sin embargo, al pasar de un $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}$ punto a otro sobre la curva $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ (ver fig. 2.1) la cantidad no permanece constante, sino que origina una deformación adicional similar a la de la curvatura $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$. Lo mismo ocurre 25

con la cantilad \mathcal{V}_2 . La omisión de estas cantidades adicio-

nales introduce en general errores pequeños en vigas y quizá

también en cascarones de manera que como consideración de par

tila, se supondrá despreciable. Al final de este capitulo se

en en al Marian de la calendar en estatut d'actant de la calence de la calence de la calence de la calence de l

discute el orden de magnitud de los errores en cuestión.

Hasta abora, el problema se ha complicado con la introducción de las funciones \mathcal{Y}_1 y \mathcal{Y}_2 , de manera que el problema general consiste en la solución de un sistema de cinco ecuaciones diferenciales en las variables u_1 , u_2 , w, \mathcal{Y}_1 y \mathcal{Y}_2 . Este cami no, aunque con otro sentido para las variables u_1 y u_2 , ha si do planteado por Nachdi⁽³⁹⁾ Reisener⁽⁵⁶⁾ y Ambartzumian⁽³⁸⁾. En lo que sigue se propone una aproximación que aunque un tanto burda, puede tener utividad en ingeniería civil.

Ssta aproximación consistinó en introducir una suposición respecto a las funciones \mathscr{V}_1 y \mathscr{V}_2 . Con base en la analogía en tático-geométrica, las cantidades al lientes se expresan en for ma análoga, las de la izquierta en las ecuaciónes de equilibrio y las de la derecha en las ecuaciones de compatibilidad;



26

mo se ha necto en el pièndire Av. se cuelo socribie





Las cantidades de la derecha satisfacen idénticamente las ecuaciones de compatibilidad, cuando se escriben

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1} &= \frac{1}{x_{1}} \left(\frac{W_{0}1}{x_{1}} \right)_{91} + \frac{W_{0}2}{x_{2}} \ell_{12} \\
\mathcal{H}_{2} &= \frac{1}{x_{2}} \left(\frac{W_{0}2}{x_{2}} \right)_{92} + \frac{W_{01}}{x_{1}} \ell_{21} \\
\mathcal{T}_{5} &= \frac{1}{x_{2}} \left(\frac{W_{01}}{x_{1}} \right)_{92} + \ell_{21} \left(\frac{W_{02}}{x_{2}} \right) + \ell_{12} \left(\frac{W_{01}}{x_{1}} \right) \\
\mathcal{T}_{1} &= \frac{1}{x_{2}} \left(\frac{1}{x_{2}} W \right)_{92} - \frac{1}{x_{12}} \frac{1}{x_{1}} W_{91} \\
\mathcal{T}_{2} &= -\frac{1}{x_{12}} \frac{1}{x_{2}} W_{92} + \frac{1}{x_{1}} \left(\frac{1}{x_{1}} W \right)_{91}
\end{aligned}$$
(2.6)

Las ecuaciones de equilibrio son análogas por completo a las ecuaciones de compatibilidad, a través del grupo de ecuaciones 2.5. Entonces las ecuaciones de equilibrio se satisfarán idénticamente si se introduce una función de fuerzas \oint análoga a la variable W que está incluida en las cantidades \mathcal{H}_{i} , \mathcal{H}_{2} , \mathcal{E}_{i} , $\overline{\mathcal{H}}_{i}$, $\overline{\mathcal{H}}_{2}$, y, en el grupo de ecuaciones 2.6. Entonces se deberá expresar,

$$N_{1} = \frac{1}{X_{2}} \left(\frac{p_{12}}{X_{2}} \right)_{2} 2 + \frac{p_{11}}{X_{1}} \frac{p_{21}}{Z_{1}}$$

$$N_{2} = \frac{1}{X_{1}} \left(\frac{p_{11}}{X_{1}} \right)_{1} + \frac{p_{12}}{X_{2}} \frac{p_{12}}{Z_{1}}$$

$$N_{2} = \frac{1}{X_{1}} \left(\frac{p_{11}}{X_{1}} \right)_{1} + \frac{p_{12}}{X_{2}} \frac{p_{12}}{Z_{1}}$$

27

e per entre filler en le state de la st



Del grupo de ecuaciones 2.7, se puede ver que las variables $\not p$

y ψ_2 citadas antes, pueden representarse con lu misma función

que representa a las fuerzas normales $N_1 \neq N_2 \neq$ la fuerza cortante S, en virtud de que \mathcal{P}_1 , $\neq \mathcal{P}_2$ quedan definidas mediante la ecuación 2.2.

28

Esta representación de las fuerzas cortantes tiene limitaciones puesto que indica que en placas (cuando $\frac{7}{R_r} = \frac{7}{R_z} = 0$), el esfuerzo cortante es nulo, cualquiera que sea el espesor. En cascarones cilíndricos, sólo puede estimarse de esta manera el efecto de la fuerza cortante en la dirección de la directriz, ya que a lo largo de la generatriz resulta nula; esto es cierto apràximadamente cuando el cascarón es largo^(9,17,24,31) es decir, cuando se conserva la relación L/R > 2.5, donde L es el claro longitudinal y R el radio de curvatura.

Para la derivación de las ecuaciones fundamentales se usará el principio variacional de Reissner⁽⁴⁷⁾. El enunciado para este principio, en el caso de la teoría de cascarones, puede hacerse al establecer

 $J = \frac{1}{N_{1} + N_{1} + N_{2} + N_{2} + N_{1} + N_{2} + N_{2} + N_{2} + S_{2}} + S_{4} + \frac{1}{N_{1} + N_{1} + N_{1} + R_{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2$

$$-\int_{\mathbf{T}} (\mathcal{P}W) \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \quad db, \quad d/bz$$

como la energía de edeformación. El término / representa

la energia complementaria ver fig. (.3) y los términos res-

tintes son la energía de deformación U. El símbolo \sum de

la segunda interral influa que fiena integral debe verificar-

se en aquella parte de la superficie del cascarón en que se prescriben las fuerzas. P es la fierza en la dirección normal a la superficie.

De acuerdo con el enunciado del principio de Reissner (ref. 64, p. 131), al cancelarse idénticamente la primera variación (\mathcal{ST}) (ver apéndice A3) de la integral \mathcal{T} se cumplen simultáneamente, las condiciones le equilibrio y las condiciones de compatibilidad.

En el caso particular de las ecuaciones que aquí se desarrollan es conveniente re-expresar la integral (2.8) en otra forma. La forma que se espoje consiste en poner la energía de bida a flexión, como la energía de deformación U (ver fig. 2.2) y la debida a fuerzas en la superficie (N₁, N₂, 5) en términos de la energía complementaria U^* (ver fig. 2.2). La razón de esta elección es que al introducir la función de esfuerzos \mathscr{P} para definir a las foerzas se complem ya las condiciones de equilibrio, en tante que falta el equilibrio en los términos de frexión que complementaria condiciones de compatibulitai. Esta elección es posible pún al se condiciones de compatibulitai. Esta elección el posible pún al se condiciones de compatibulitai. Esta elección el posible pún al se condiciones de compatibulitai. Esta elección el fosible pún al se condiciones de compatibulitai. Esta elección el factor no tineal. La integral es an59

tonces

T = = = [[D ((4, + 42)² - 2(1.0) (4, 4, - 2²)¹ + (NI + NO)2 2(1-2) NIA2 + 52)] (2.9) + (Q, (d) + M,) + Q= (d) + D.) (m, x. d) d3. - (PW) and Dr. Mar

en que

En esta ecuación, el término subrayado esta expresado como un trabajo, en tanto que los dos restantes de la primera in tegral son energías de deformación. Respecto a la segunda integral de la ocuación 2.9, es necesario aclarar el significado físico do P. La primera integral está valuada con cantidades en la superficie, en tanto que la segunda contiene cantidades que son normales a la superficie. Así no existe diferencia en tre una placa y un cascarón, a menos que se aclare el valor de P. Debido a la curvatura del cascarón en una y otra dirección, las fuerzas en la superficie (en particular N₁ y N₂), tendrán una componente en la dirección de la normal como se ilustra en la figura 2.3; entonces

 $\mathcal{D} = \frac{\mathcal{E}h^3}{\mathcal{E}(1-\mathcal{T}^2)}$

$$P = \mathcal{J} - \left(k_1 N_1 + k_2 N_2 \right) \qquad (2.10)$$

30

que por otro lado, es un término que abarece en la tercera ecua ción de equilibrio de fuerzas (ver ec. A6618 del apéndice A6). Tomando en cuenta los grupos de definiciones 2.6 y 2.7, así como que las rotaciones N_1 y N_2 se expresan en la forma :

 $J'_{i} = \frac{W_{i1}}{\alpha_{i}} + \frac{U_{i}}{E_{i}} + \frac{U_{i2}}{E_{2}}$ (2.11)

 $\mathcal{P}_2 = \frac{W_{12}}{d_2} + \frac{U_2}{R_{12}} + \frac{U_2}{R_2}$

(en que los términos subrayados se desprecian por la hipótesis

de cascarón rebajado) se procete abora a calcular la primera va

rlación. Considérese inicialmente la variación con respecto a

W; en este caso, las variables que contienen a φ no cambian

si se supone que la geometría de la superficie deformada es esencialmente la misma que la inicial. De la ecuación 2.9 se deduce entonces

$$\begin{split} SJW &= \iint_{R} \left\{ \begin{array}{l} D \left[\dot{k}, S\dot{k}, + \dot{k}_{2}S\dot{k}_{2} - S\left(\dot{k}, S\dot{k}_{2} + \dot{k}_{2}S\dot{k}_{1} \right) \right. \right. \\ &+ 4\left(1 - 2J \right) \left(3S_{0} \right) + \frac{\dot{\varphi}}{A} \frac{\dot{\varphi}}{2} \left(S\dot{k}_{1} \right) + \left(2.12 \right) \\ &- \frac{GA}{A} \frac{\dot{\varphi}}{2} \left(S\dot{k}_{2} \right) \alpha_{1} \alpha_{2} d\beta_{1} q\beta_{2} + \iint_{N} \left(\dot{k}, N_{1} + \dot{k}_{2}N_{2}q \right) SW_{1} \alpha_{1} \alpha_{2} d\beta_{1} d\beta_{2} \end{split}$$

Abora las variaciones de \mathcal{H}_i , \mathcal{K}_2 , \mathcal{Z} y \mathcal{H}_i has expresan (ver apéndice A3) como

$$\begin{split} \mathcal{S}\mathcal{H}_{1} &= \frac{1}{x_{1}} \left(\frac{1}{x_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}W}{\partial \beta_{1}} \right)_{1} + \frac{\mathcal{E}_{12}}{d_{2}} \frac{\partial \mathcal{S}W}{\partial \beta_{2}} \\ \mathcal{S}\mathcal{H}_{2} &= \frac{1}{x_{2}} \left(\frac{1}{x_{2}} \frac{\partial \mathcal{S}W}{\partial \beta_{2}} \right)_{12} + \frac{\mathcal{E}_{21}}{x_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}W}{\partial \beta_{1}} \qquad (2.13) \\ \mathcal{S}\mathcal{G} &= \frac{1}{x_{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{S}W}{\partial \beta_{1}} \right)_{12} + \mathcal{E}_{21} \left(\frac{\partial \mathcal{S}W}{\partial \beta_{2}} \right) + \mathcal{E}_{12} \left(\frac{\partial \mathcal{S}W}{\partial \beta_{1}} \right) \\ \mathcal{S}\mathcal{H}_{1} &= \frac{1}{x_{1}} \left(\frac{\partial \mathcal{S}W}{\partial \beta_{1}} \right) \\ \mathcal{S}\mathcal{H}_{2}^{2} &= \frac{1}{x_{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{S}W}{\partial \beta_{2}} \right) \\ \mathcal{S}\mathcal{H}_{2}^{2} &= \frac{1}{x_{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{S}W}{\partial \beta_{2}} \right) \end{split}$$

Considérese por ahora únicamente el primer término de la primera integral en la ecoación 2.12; su variación es

mediante integración por partes se paede escribir, cuando se supone que el espesor es variable, es decir, cuando $D = D(B_1, B_2)$ (,), $\int T_{N',4} = \int \int \frac{1}{N_1} \left(\frac{\partial D_1 K_1}{\partial N_1 \partial N_2} \right)_1 - \frac{1}{N_2} \left(\frac{\partial (K_1 L_{12})}{\partial N_2} \right)_2 \int \frac{\partial (M_1 H_2 \partial M_2 \partial M$ + \$ 1 08W Dot - [(DA), + 12 (DA, Ciz), 2 1. Sw for

d'se entiende como el elemento de línea sobre la carva de frontera. Antes de intentar el desarrollo en esta forma, conviene introducir hipótesis acerca de las cantidades que intervienen.

Supóngase ahora que el espesor es constante además de supo ner muy pequeños los términos subrayados en el grupo de ecuaciones (2.13). Con estas simplificaciones la primera variación de $\sqrt{}$ con respecto a W es

$$\begin{split} \mathcal{S}_{W} &= \iint \mathcal{D} \left\{ \frac{1}{\alpha_{1}} \left(\frac{dt_{1,1}}{\alpha_{1}} \right)_{1} + \frac{1}{\alpha_{2}} \left(\frac{dt_{2,2}}{\alpha_{2}} \right)_{2} + 2 \frac{1}{\alpha_{1}} \left(\frac{dt_{2,2}}{\alpha_{2}} \right)_{2} \right\} + \\ &= \underbrace{k_{1} N_{1} + k_{2} N_{2} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha_{1}} \left(Q_{1,1} \right) + \frac{1}{\alpha_{2}} \left(Q_{2,2} \right) \right\} \mathcal{S}_{W} + (2.15) \\ &= \underbrace{\mathcal{D}} \int \left[\frac{dt_{1}}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{W}}{\partial \mathcal{S}_{1}} + \frac{dt_{2}}{\alpha_{2}} \frac{\partial \mathcal{S}_{W}}{\partial \mathcal{S}_{2}} + \frac{\partial}{\alpha_{1,\beta_{1}}} \frac{\partial \mathcal{S}_{W}}{\partial \mathcal{S}_{1}} + \frac{\partial}{\alpha_{2}} \frac{\partial \mathcal{S}_{W}}{\partial \mathcal{S}_{2}} - \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{W}}{\partial \mathcal{S}_{2}} - \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{W}}{\partial \mathcal{S}_{1}} - \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{1}}{\partial \mathcal{S}_{2}} + \frac{1}{\alpha_{2}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{2}} + \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{1}} - \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{1}}{\partial \mathcal{S}_{1}} - \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{2}} + \frac{1}{\alpha_{2}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{2}} + \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{1}} - \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{1}}{\partial \mathcal{S}_{1}} - \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{2}} + \frac{1}{\alpha_{2}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{2}} + \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{2}} - \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{2}} + \frac{1}{\alpha_{2}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{2}} + \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{2}} - \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{\partial \mathcal{S}_{2}}{\partial \mathcal{S}_{2}} + \frac{1}{\alpha_{1}}$$

La variación de la ecuación 2.9 con respecto a la variables \mathscr{G} puede escribirse, después de una deducción similar,

 $\delta J_{\varphi} = \int \left\{ \frac{1}{E^{2}} \left[\frac{F_{1}}{\chi_{1}} \left(\frac{F_{1}}{\chi_{1}} \right) + \frac{1}{\chi_{2}} \left(\frac{F_{1}}{\chi_{2}} \right)^{2} - \frac{2}{\chi_{2}} \left(\frac{J_{1}}{\chi_{1}} \right)^{2} \right] \right\}$ (2.16)

+ kitte + ke ki - = = ki + ki + 22 (42) ko (41,2 + 41) $= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{$

El termino subrayado ana vez en la ecuación 2.46 se ha simplificado mediante el empleo de Las ecuaciones de Codazzi-Gauss (ver apéndice A1). El término subrayado dos veces es una cantidad sumamente pequeña de manera que en La mayoría de los casos puede omitirse (en el inciso 2.3 se discute la introducción de esta cantidad). En todos los desarrollos anteriores, no aparece en ninguna parte la curvatura gaussiana d<u>e</u> finida como

$$\frac{1}{2, R_2} \left(\frac{1}{R_{12}}\right)^2$$
(2.17)

La razón es que se ha utilizado la hipótesis de cascarón reba jado en los que la curvatura gaussiana es casi nula. Esto r<u>e</u> sulta de suponer descreciables los términos subrayados en el grupo de ecuaciones 2.13.

En el caso en que la torgión de la superficie media puede considerarse significativa, es necesario agregar en la ecu<u>a</u> ción 2.10, la cantiñad

y en consecuencia doperá agregarse $-\frac{25}{R_{12}}$ en la primera integral de la equación 2.15 y lebino a la introducción de este 33



Meetas Sector - Medican Companya Sector - Se

En cuanto al problema de desplazamientos grandes, aqui se considerará únicamente el caso de valores grandes para w. En tonces las ecuaciones que expresan los cambios de curvatura (ecuaciones 2.6) son suficientemente precisas y en consecuencia la anàlogia estático-geométrica conserva su validez, concluyéndose entonces que las fuerzas pueden expresarse como en el grupo de ecuaciones 2.7.

El único cambio radica en que las deformaciones en la superficie media se expresan entonces (ver apéndice A5) en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{i}^{T} &= \mathcal{E}_{i}^{\prime} + \left(\frac{W_{i}}{R_{i}}\right)^{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{W_{i}}{\alpha_{i}}\right)^{2} \\ \mathcal{E}_{2}^{T} &= \mathcal{E}_{2}^{\prime} + \left(\frac{W_{2}}{R_{2}}\right)^{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{W_{2}}{\alpha_{2}}\right)^{2} \\ \omega^{T} &= (\omega^{\prime} + \left(-\frac{W_{i}}{\alpha_{i}}\right) \left(\frac{W_{i}^{2}}{\alpha_{2}}\right) \\ \omega^{T} &= (\omega^{\prime} + \left(-\frac{W_{i}}{\alpha_{i}}\right) \left(\frac{W_{i}^{2}}{\alpha_{2}}\right) \end{aligned}$$
(2.20)

en que ahora, ξ_1' , ξ_2' y ω' son las deformaciones lineales (de primer orden) y ℓ_1' , ℓ_2' y ω' son las correspondientes deformaciones totales. Para poder incluir términos no lineales, sería necesario agregar a la primera integral de la ecuación 2.8 la cantidad:

 $\frac{1}{2} \left\{ N_{i} \left[\frac{2}{2} \left(\frac{W_{i}}{R_{i}} \right)^{2} + \frac{W_{i}}{\alpha_{i}} \right]^{2} + N_{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{W}{R_{2}} \right)^{2} + \left(\frac{W_{i}}{\alpha_{2}} \right)^{2} + \frac{W_{i}}{\alpha_{i}} \right]^{2} \right\} \left(\frac{W_{i}}{\alpha_{2}} + \frac{1}{25} \left[\frac{W_{i}}{\alpha_{i}} \right]^{2} \right) \left(\frac{W_{i}}{\alpha_{i}} + \frac{W_{i}}{\alpha_{i}} \right) \left(\frac{W_{i}}{$

al introducir la variación en la cantidad $\mathcal W$, resulta necesa-

rio agregar la siguitente cantifud a la ecuación 2.15

 $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2},\frac{$ (2.22)+ (N2+5) N2 7 din 02

and the second se

35 y en la ecuación 2.16 es necesario agregar la cantidad $\iint \frac{W_{11}}{d_{1}d_{2}} \left(\frac{W_{11}}{d_{2}} + \frac{W_{12}}{d_{1}} + \frac{W_{12}}{d_{1}} + \frac{W_{12}}{d_{1}} + \frac{W_{12}}{d_{1}} + \frac{W_{12}}{d_{1}} + \frac{W_{11}}{d_{1}} \right)^{2}$ $+ \left(\frac{W_{11}}{\alpha_1}\right) \left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{W_{12}}{\alpha_2}\right), + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{W_{22}}{\alpha_2}\right) \left(\frac{W_{12}}{\alpha_1}\right) \left(\frac{W_{12}}{\alpha_2}\right) \left(\frac{W_{12}}{\alpha_1}\right) \left(\frac{W_{12}}{\alpha_2}\right) \left(\frac{W_{12}}{\alpha_1}\right) \left(\frac{W_{12}}{\alpha_2}\right) \left($ $+ \frac{(W_{12})}{\alpha_2} \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{W_{11}}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{W_{11}}{\alpha_2} \right) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac$ $+2\left[\frac{W_{1}}{R_{1}}\right] = \left[\frac{W_{1}}{R_{2}}\right] = \left[\frac{W_{1}}{R_{1}}\right]_{2} + \frac{1}{R_{1}}\left[\frac{W_{1}}{R_{1}}\right]_{2} = \frac{1}{R_{2}}\left[\frac{W_{1}}{R_{1}}\right]_{2}$ $= \frac{W_2}{R_2} \left(\frac{W}{R_2} \right)_{i,1} + \frac{W}{x_i} \left(\frac{W}{R_2} \right)_{i,\infty} \left(\frac{W}{R_2} \right)$ (2.23) $+ \oint \left(\frac{N_{11}}{N_{11}} + \frac{2}{\alpha_2} \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \frac{N_{12}}{\Lambda_2} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \frac{\partial$ 1 T W.1 1 W/2 W/2 1 W/2 1 (W/1) TSP

De esta manera queda integrado el sistema de ecuaciones que restita de introducir variaciones a las cantidades $W'y \not p'$ por separato, la ecuación que se deduce al introducir la variación a W' (ecuación 2.15) de acterdo con el principio de la energía potencial minima, (64, 65) conduce a la ecuación

gen sees of the Aller of the set

30

de equilibrio, coando de sopone sou arbiterario. La ecuación 2.16 conduce a la ecuación de compatibilidad, de acaerdo con el principio de Castigliano^(64,65) o de la energía complementaria máxima, coando se estoge SS arbiterario. El sistemu de ecuaciones que constituye la expression de la teoría de la deformación en el cascarón graeso rebajado que incluye el efecto de deformación por contante, ceaultan al agregar los térmi nos 2.22 y 2.23 á las ecuaciones 2.15 y 2.16 respectivamente después de paber incluído los términos 2.18 y 1.19.

El sistema de ecuaciones de la teoría general de cascarones de uso en la ingeniería sivil, se dedace envonces de las ecuaciones 2.15 y 2.16 y le las modificaciones inticadas arriba, como:

Benaelón de Equilibrio

3 / la dina for the stand of a for the stand of the (2.24) the should be a stand of the stand of the stand of the and we thank a start we thank a start we thank a start we thank a start we have the start we have the



+ (5 1/2) (5 1/2) (5 1/2)

negation of Conjuting Dauge

Las condiciones de frontera correspondientes se deducen de la consideración de la integral de linea en cada una de las ecuaciones 2.15 y 2.16, con sus respectivas modificaciones.

Del sistema de ecuaciones 2.15 y 2.16 puede verse que los términos lineales son simétricos. El término subrayado dos v<u>e</u> ces en la ecuación 2.16, puede considerarse despreciable y por esta razón no se ha incluido en la ecuación 2.25. El término subrayado en la ecuación 2.23 resulta despreciable en el tipo de cascarón que se analiza.

De las ecuaciones anteriores es posible deducir todos los casos particulares que han silo analizados por diversos autores (23, 25, 26, 28, 34-b) y que se derivan de la teoría general de cascarones debida a Vlasov y sus generalizaciones.

En lo que sigue se habrán de generalizar estas ecuaciones para el caso de coordenadas curvilineas de curvatura no principal y que forman un ángulo cualquiera $\Theta \neq \int \delta$ en la superfi

37

Antes de proceder a esta extensión, parece interesante observar que el términommarcado con linda interrumpida en la ecuación de compatibilidad 2.25 se puede escribir, (de acuerdo con el grupo de ecuaciones 2.6 y las consideraciones intro ducidas en el grupo de ecuaciones 2.15, relativas a despreciar los términos subrayados),

 $\sigma_{i}^{2} \mathcal{A}_{z}^{2} - \mathcal{Z}^{2} \qquad (2.26)$

que es la curvatura gaussiana (ver apéndice A1) de la superficie deformada, cuando la curvatura gaussiana de la superficie original es mula o casi nula, como ocurre en cascarones rebajados. Lo interesante en esta observación radica en la facilidad existente para el tratamiento de cascarones cuya curvatura gaussiana de la superficie media antes de la defor mación no es nula. Un tratamiento ha sido propuesto por M. Rodríguez Caballero⁽⁴⁴⁾. Una discusión acerca de la ecuación de compatibilidad, se presente en el apéndice A7.

Se proceie abora a la extensión de las ecuaciones 2.24 y 2.25 para el tratamiento de cascarones cuyo sistema de referencia no es ortogonal ni de carvatura principal. Se sigue aquí un tratamiento similar al propuesto por Morley⁽⁶⁶⁾ para el análisis de placas. La misma formulación podría lograrse sobre babes paramente tensoriales y ha sido considerada por diversos autores^(44, 51a, 52) para la teoría lineal que no incluye la deformación de cortante. 38

Consilérese un sistemi de referencia ortogonal como el

mostrado en la figura 2.3 y otro sistema de referencia no or-

togonal en la misma succerficie con un ángulo A = 3(p. . 02).

Dea jer V jer, lus conriencias carvilineas en el costema obliquo. Bacienio considir la curva & del sistema ortogonal con la cueva jet del socema octación, sea 9 el ángalo

formado por las curvas $\partial_{\mathcal{I}} y = \mathcal{I}$. Considérese una cierta cantidad $Z = Z (\beta_{\tau_1}, \beta_{II})$. Sus derivadas pueden escribirse

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial y} \qquad (2.27)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (2.27)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (2.27)$$

y de aquí puede despejarse

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}}$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\int z}{\partial s_{I}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}} cos \theta$$
(2.28)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial z}{\partial s_{I}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-22}} = \frac{1}{\sqrt{1-32}} = 2 \cos \frac{1}{\sqrt{1-32}} = 2 \cos \frac{1}{\sqrt{1-32}} = \frac{1}{\sqrt{1-32}} = \frac{1}{\sqrt{1-32}} = 2 \cos \frac{1}{\sqrt{1-32}} = \frac{1}{\sqrt{1-32}} =$$

de manera que para las devivadas utilizadas en los eclaciones 2.24 y 2.25 se tiene

39

.

 $\mathcal{L}_2 = \frac{1}{3n^2 9} \left[\mathcal{R}_2 - 2 \cosh 3 f \mathcal{R}_1 \sin^2 9 \right]$



(0.30)

y para las fuerzas expresadas en términos de la función arphi

$$N_T = \frac{1}{SPN} \left[\frac{N_F + 2\cos\theta N_{FIT} + N_{IT} \cos^2\theta}{N_2} \right]$$

$$N_2 = N_{IT}$$
(2.31)

$$S = \overline{S} + N_{II} \cos \varphi$$

la tilde sobre 5 y Z indica que se trata de la fuerza cor tante y momento de torsión en la superficie de coordenadas oblicuas.

Respecto a las curvaturas utilizando la ecuación de la se gunda forma fundamental deducida en el apéndice A2, se puede escribir

$$k_{I} = k_{2}$$

$$k_{I2} = k_{I} I + k_{T} \cos \theta \qquad (2.32)$$

$$k_{2} = k_{I} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^{2} - 2 k_{T} k_{II} \frac{\cos \theta}{\sin^{2} \theta} + \frac{1}{k_{II}} k_{II}$$

Al hacer la sustitución adecuada de los grupos de ecuaciones 2.28 a 2.30 en las 2.24 y 2.25, se puede deducir el sis tema de ecuaciones de la teoría general de cascarones rebajados cuya superficie media se encuentra referdada a un sistema

curvilineo cualquiera.

El resultado de esta sustitución, cuando se omiten los

términos no lineales, es

 $\frac{\partial \left[\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\frac{W_{iT}}{\sqrt{z}} \right)_{T} \right]_{T}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \left[\frac{W_{iT}}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\frac{W_{iT}}{\sqrt{z}} \right)_{T} \right]_{T}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \left[\frac{W_{iT}}{\sqrt{z}} \left(\frac{W_{iT}}{\sqrt{z}} \right)_{T} \right]_{T}} \right]_{T}$ $\frac{2}{S \rho_{1}^{2} \Theta L \Delta_{2}} \int \int \int \int \int \int \frac{1}{|\mathcal{M}_{1} \overline{\alpha}|} = \frac{|\mathcal{M}_{1} \overline{\alpha}|}{|\mathcal{A}_{1} \overline{\alpha}|} \int \frac{1}{|\mathcal{M}_{1} \overline{\alpha}|} = \frac{1}{|\mathcal{M}_{1} \overline{\alpha}|} \int \frac{1}{|\mathcal{M}_{1} \overline{\alpha}|}$ $+ \frac{k_{r}}{sen^{2}\theta I d_{II}} \left(\frac{g_{II}}{d_{II}} \right) + 2\cos\theta \left(\frac{g_{II}}{d_{II}} \right) + \frac{1}{d_{II}} \left(\frac{g_{II}}{d_{II}} \right) + \frac{1}{d_{$ $+ \left[\frac{k_{I}}{(sen \theta)}\right]^{2} = 2 k_{III} \frac{cos\theta}{sen^{2}\theta} + \frac{k_{I}}{sen^{2}\theta} \frac{1}{sen^{2}\theta} \int \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{g_{I}}{\sqrt{s}}\right)\right] \int \frac{1}{\sqrt{s}} \int \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{g_{I}}{\sqrt{s}}\right) \int \frac{1}{\sqrt{s}} \int \frac{1}{\sqrt{s$ + 2(ks II + ks care) f 1 (BS) + 1 (BI) cord J Las da as da (BI) cord J - 2/2 (2, (2, 9),) - { (k_I I + k_I cor 0) [[[] (2 I - 1 (2 - 1 $= \left[\frac{\beta_{FE}}{\beta_{FE}} + \frac{\beta_{FCOV}}{\beta_{F}} \right]_{a} + \frac{1}{sen^{2}\theta_{c}} \frac{\Gamma_{I}}{\alpha_{F}} \left[\frac{1}{\alpha_{F}} \left[-\frac{2}{\alpha_{F}} \cos\left(\frac{1}{\alpha_{F}}\right) \right]_{a} \frac{1}{sen^{2}\theta_{c}} \right]_{a} + \frac{1}{sen^{2}\theta_{c}} \frac{\Gamma_{I}}{\alpha_{F}} \left[\frac{1}{\alpha_{F}} \left[\frac{1}{$ $2 \frac{2}{3\pi} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{2}{5} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{3} \frac{1}{$

y análogamente, $-\frac{1}{EE}\left\{\frac{1}{\alpha_{r}}\left(\frac{g_{J}}{\alpha_{r}}\right)\right\} + \frac{1}{\alpha_{r}}\left(\frac{g_{J}}{\alpha_{r}}\right)\left[\frac{g_{J}}{\alpha_{r}}\right] + \frac{1}{\alpha_{r}}\left[\frac{g_{J}}{\alpha_{r}}\right] +$ $\frac{1}{T} \frac{1}{Sen^4 A} \left[\frac{1}{\Delta \pi} \left(\frac{1}{\Delta \pi} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) - 2 \cos \frac{1}{\Delta \pi} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) \right] \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Delta \pi} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{\Delta \pi} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Delta \pi} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{\Delta \pi} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{9 \cdot \pi}{\Delta \pi} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{9 \cdot$ $\frac{1}{1-\frac{2}{50n^29}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{2\pi}{T} \frac{2\pi}{Cen^2 \overline{D}} \frac{1}{dr} \frac{W_{,\overline{u}}}{dr} + 2COJ \overline{D} \frac{1}{W_{,\overline{u}}} \frac{W_{,\overline{u}}}{dr} + \frac{1}{dr} \frac{W_{,\overline{u}}}{dr} \frac{1}{dr} \frac{W_{,\overline{u}}$ $+ \frac{\left[k_{T} + \frac{cos\theta}{sen\theta}\right]^{2}}{\left[sen\theta\right]^{2}} \frac{2k_{T}}{zk_{T}} \frac{cos\theta}{sen^{2}\theta} + \frac{k_{T}}{sen^{2}\theta} \frac{1}{\left[sen^{2}\theta\right]^{2}} \frac{1}{sen^{2}\theta} \frac{1}{\left[sen^{2}\theta\right]^{2}} \frac{1}{\left[sen^{2}$ $+2\left[\frac{2\pi}{42\pi}+\frac{2\pi}{42\pi}\cos\right]\left[\frac{1}{4\pi}\left(\frac{W_{A}}{42}\right)+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{W_{A}}{42}\right)\cos^{2}\right]$ $-\frac{1}{2}\left\{\frac{k_{f}}{k_{f}}\left(\frac{W_{f}}{\lambda_{f}}\right)+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}+\frac{k_{f}}{\lambda_{f}}\left(\frac{c_{0}\theta}{\lambda_{f}}\right)^{2}$

 $\begin{pmatrix} X \end{pmatrix}_{J \in \Pi^{2} \Theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{J} \sigma \\ \sigma & \sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt$ $= 2 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{$

De esta manera queda dedacido el sistema de ecuaciones de equilibrio y compatibilidai, en el caso en que los desplazamien tos W se consideran grandes. Las soluciones matemática y namê rica serán discutidas en un capítulo posterior.

2.2 Consideración del orden de magnitud

En la formulación de la energía de deformación del cascarón con los efectos introducidos de cortante, se aprecian dos partes principales: una debida a flexión y otra debida a membrana. Además se dispone de términor de interacción debidos a la existencia de las curvaturas y de términos no lineales. Para la estimación del orden de magnitud que alora se discute, se considerarán los siguientes factores:

 $\frac{1}{R} = parámetro de curvatura$ $\lambda = """longitud$ W = """desplazamiento radial $<math>\mathcal{Y} = """"la función de fuerzas$ E = """"elasticidad $<math>\mathcal{F} = """espesor$

De acuerdo con esta elección, se pade ver que el orden de las derivadas de las funciones W y \mathscr{G} es $\frac{\omega}{\lambda}$ y $\frac{\mathscr{G}}{\lambda}$ respectiva

mente. Así, la energía re deformación debita a flexión es del orden de \mathbb{E}_{L}^{A} , en tanto me la energía debida a la ag ción de memorana es del orden re (\mathbb{E}_{L}) , (\mathbb{E}_{L}) , o io que es lo mismo, iel orden de \mathbb{E}_{L}^{A} , en se coma en entra que las fuerzas se defatan a partir de β y que en consecuencia β es del orden de $E\lambda^2$. Considérese inicialmente el término que origina la no linealidar; de la ecuación 2.21 se deduce que di cho término es del orden de

 $\frac{\left(\frac{\varphi}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)} \text{ o sea } \mathcal{E}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2 \text{ . For otro lado} \\ \text{los términos que incluyen el cortante son del orden de } \left(\frac{\varphi}{\mathcal{E}}\right) \\ \left(\frac{\varphi}{\lambda}\right)\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) \text{ o sea del orden de } \frac{\mathcal{E}\mathcal{E}\omega}{\mathcal{E}} \text{ y finalmente los } \\ \text{que incluyen el effecto le la curvatura son del orden de } \left(\frac{\varphi}{\mathcal{E}}\right) \\ \left(\frac{\varphi}{\lambda^2}\right)\omega \text{ o sea del orden de } \left(\frac{\mathcal{E}\mathcal{E}}{\mathcal{E}}\right)\omega \text{ .} \\ \end{array}$

De este análisis simple, se deduce que para desplazamientos pequeños, el término adicional que representa el cortante y el término secondario que toma en cuenta el efecto de la cur vatara sen del mismo orden de magnitud y que en consecuencia ambos deben considerarse en el caso de cascarones en los que la relación $\frac{f}{Z}$ no es pequeña. En cuento a los términos no lineales, resulta que si \mathscr{U} es del orden le f, el orden de magnitud de la energía que representan tuede ser mayor que la energía de frexión fucilitando entonces la inestabilitad. Se apre cia también que is energía de teformación por fiexión varia aproximudamente con la refleción $Ef(-\frac{\mathscr{U}}{2})^4$, cuendo \mathscr{U} es del orden de h, y que el término no lineal varia con la relación 44

Et $\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2$ o sea que para desplazamientos ω muy grandes, del orden de λ o mayores, la energía potential debine a flexión crece mas ráplicamente recuperando estondes se estabilidad el cascarón. El cámil alecadio o estos consideraciones sobre los

términor no linvales, se unca nurs en la discusión le P. Vou

Ramman al partes per castapones enfortes est

2.3 Formas simplificadas del sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

Tratándose de cascarones rebajados, en algunas ocasiones es posible representar la geometría de la superficie media del cascarón como la geometría del plano en que se proyecta la superficie en cuestión. En estas condiciones es posible introducir algunas simplificaciones relativas a los parámetros en la superficie y que son

≪_{1 =} $\alpha_2 = \text{constante}$

y si como consideración adicional se introduce la hipótesis de curvatura constante, se deduce el siguiente sistema de ecuacio nes diferenciales:

 $\frac{\partial \nabla^{+} W}{\partial x^{2}} + \frac{\partial P}{\partial x^{2}} + \frac{\partial Q}{\partial y^{2}} + \frac{\partial Q}{\partial x^{2}} + \frac{\partial$ (2.35) $+2\left(\frac{k_{2}\alpha}{2\pi}+\frac{k_{2}\alpha}{2\pi}\right)\left(\frac{\delta^{2}\varphi}{2\pi}+\frac{\delta^{2}\varphi}{2\pi}+\frac{\delta^{2}\varphi}{2\pi}+\frac{\delta^{2}\varphi}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)$ $-\frac{1}{2}\left[\frac{c_{3}}{c_{3}}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial r^{2}}-\left(k_{T}\pi+k_{T}\cos\theta\right)\left[\frac{1}{c_{0}}\right]\left(\frac{c_{0}}{c_{0}}\right)^{2}-\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial r^{2}}\cos\theta\right]$ $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{$ $= 2\cos\theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \cos^2\theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{2}$

4G - Et VAP + Pr Jenze 241 + 20010 20 + 320 cor20] Et Jenze 242 242 X24 3x2 + $\left[\frac{k_{I}}{sene}\right]^{2} - 2\frac{k_{II}}{sene} + \frac{c_{\alpha I}\theta}{sm^{2}\theta} + \frac{k_{II}}{sm^{2}\theta} - \frac{1}{3\chi^{2}} + \frac{1}$ + 2 PIE + Escore (JRW + JW COSE) $-\frac{1}{2}\left\{k_{I}\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}}+\left[k_{J}\left(\frac{\cos\theta}{Jeh\theta}\right)-2k_{J}\frac{\cos\theta}{Jeh^{2}\theta}+k_{I}\frac{1}{Jeh^{2}\theta}\right]\frac{1}{Jeh^{2}\theta}\left(x\right)\right\}$ $\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \mu^2} - 2\cos\theta \frac{\partial^2 W}{\partial x\partial \mu} + \frac{\partial^2 W}{\partial x\partial x}\cos\theta\right]$ $-\frac{ik_{SII} + k_{ICOVB}}{SANB} \left(2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos \theta \right) = 0$

En que se na introducido el operador diferencial,

 $V^{4}X = \frac{\partial^{4}}{\partial x^{4}} \chi + \frac{1}{\sin^{4}\theta} \left\{ \left(\frac{\partial^{4}\chi}{\partial y^{4}} - 2\cos\theta \frac{\partial^{4}\chi}{\partial x^{2}\partial y^{2}} + \cos^{2}\theta \frac{\partial^{4}\chi}{\partial x^{4}} \right) \right\}$ $+\frac{2}{Jen^2 3}, \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4}, \frac{\partial^4$



17

2.3 DISCUSION SOBRE INESTABILIOND BLASTICA

En el inciso anterior 39 dedujo un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales para el equilibrio en la reoria de cascarones. El problema que anora se propone, se refiere a la inestabilidad. Con objeto de hacer general la discusión que aquí se presenta, se usará la formulación Euleriana•, la cual considera para el equilibrio, la geometria de la superficie deformada. El concepto físico que se discute tiene valitez en los sistemas Euleriano y Lagrangiano. La formulación suleriana y la anterior Lagrangiana son esencialmente no lineales; la Elleriana incluye aquí no linealidades en todos los desplazamientos, en tanto que la formulación del tipo Lagrangiana considera en el caso anterior, (inciso 2.) solamente no linealidades para el desplazamiento W.

Como en la fig. 2.3, considéress una superficia original no carmada, 5°; al aplicarse la carma, la superficie pasa a ser la S^J. Al verificarse sua deformación, se codifican los parámetros métricos de la superficie, ademán de exister cambios en las curvataras de la superficie original (según se explica en el apéndice as sobre geometria de la deformación). Con respecto a

las carvas sobre la supertició, la designación se conserva y

las derivatas con respecto a los parámetros de la superficie son en la formacción éxteriana que se asa de la forma

In el distema Maler, mor Las voriations inite entitates son las coordenadas de las convos teromonios en el instante que interesa: en el siste a par rans ant, todas las variables de expresun con respecto i sul curves conteradan in contes.

se conservan las slowed.

Los coefficientes métricos, en las superficies δ° y δ° se escriben

TABLA 1

en S°	en Sr	en SI
ď,	$\alpha_i^T = \alpha_i^o(1+e_i)$	$\lambda_{i}^{*} = \alpha_{i}^{*}(1+e_{i})$
X2 Do T	$\alpha_2^r = \alpha_2^o \left(1 + e_2 \right)$	$\chi_2^T = \chi_2^T (1+e_2)$
2 2 0	$\Theta' = \frac{\pi}{2} - \omega$	$\Theta^{II} = \frac{II}{I} - iS$
R2	$k_1 = k_1 (1 + k_1)$ $k_2 = k_2 + k_2$	$k_{i} = k_{i} + k_{i}$ $k_{j} = k_{j} + k_{j}$
212	kiz = kiz + 6	$2_{12}^{2} = 2_{12}^{2} + 3$

de manera que las ferividas con respecto a las curvas le la superficie 5^T se escriben por ejempio,

En la tabla 1, los valores $e_1 : e_2 : id : K_1 : K_2 : y = de$ ben a r consideratos como valores no lincales (ver apóndice <math>A5)

- o lineales clabito se trata re dia aproximación.
- Lus equiciones ifferent antiste et antistation de la superricie deformula, se deformité de la notribe et , se deformente de la super-16.55 % - 58. - Sentration de la constate et antiste et antist
- mediante la sistimución de los cericientes contesconfientes de La primita - se sobre forma de los contestes de
- La prin val, segurita formato formatories in as superformeres

formada. La analogia estático-seométrica sigue siendo válida en la superficie leformada según puede demostrarse sobre <u>bases</u> $\frac{\text{tensoriales}}{2}$ de modo que la sustitución indicada en la tabla 1 es válida.

El ángulo $\Theta \neq \mathbb{Z}$ indica que el sistema de referencia en la superficie deformada ya no es ortogonal; este hecho queda con siderado en la sustitución de las propiedades de la superficie deformada en las ecuaciones 2.33 y 2.34; sin embargo, en general, la deformación angular es pequeña comparada con la unidad y el sistema de referencia durante la deformación, puede considerarse ortogonal como lo ban hecho Mushtari y Galimor⁽⁷³⁾.

En condiciones similares, puede introducirse en este análi sis, el caso de deformaciones iniciales, en envo caso, la posición de la superficie antos de la carga, porta ta S^{T} y al verj ficarse la deformación, la superficie pasaría a ser la S^{T} , las propiedades geométricas pasarían a ser aquetlas que se dedu cen de la tibla l al soctituir l en encor de O y El en Jugar de E. Otros estados de deformación mucebivos o no, pueden ser considerados en la superficienta.

Al verificarse incrementos pocesivos en la carga y existir

superficies deformadas, pueden llegar a existir para ano o mas

valores le la coma, due esta pue significanens de deformación, o

to que en lo al me, des lovements la sucertique deformante por

and medies carries, the east conversion of or our contentes standing.

mos, leasts a estado de equilibrio matros sa successive

que corresponde al segundo estado simultáneo se designa como 5*.

El fenómeno de inestabilidad elástica, puede considerarse también desde el punto de vista de la energía potencial V. Cuando se introduce una pequeña variación en el desplazamiento, la energía potencial del sistema sufre un cambio. El cam bio en la energía potencial V se puede escribir,

$$\Delta V = h S V + \frac{h^2 S^2 V}{2} \qquad 2.$$

en que h es un parámetro adimensional. En realidad, si el sistema en cuestión, posee magnitudes que caracterizan su configuración geométrica es posible, representar la energía po tencial V, en un espacio //// dimensional. En el caso demun cascarón, la fig. 2.5, representa la función V para las variables 4^{\prime} y $_{W}$. La primera variación es nula, se sabe que el estado es de equilibrio. Este estado de equilibrio puede corresponder a un máximo, en cuyo caso, el estado es inestable, o a un mínimo, cuando es estable. La segunda variación ($\mathcal{S}^{\leftarrow V}$) permite reconocer si la energía potencial es máxima o mínima. Cuando el sistema es Lagrangiano, la segunda variación $S^2 V$

50

es una forma cuadrática y es necesario determinar su valor pa-

ra saber si la posición es estable. Tratándose de la formula-,

ción Euleriana, para el análisis de inestabilidad, es suficien

te con considerar lo que puede llamarse la primera variación.

Entonces para la formulación Euleriana, se puede escribir

SW = SP 2.

como condición de equilibrio neutro, en que

).

W = energia potencial de deformación o de las fuerzas internas

P = energia potencial de las cargas externas.

La ecuación 2 es equivalente a la consideración anterior de la existencia simultánea de dos estados de deformación, que corresponden a las superficies $S^T y S^*$.

Las ecuaciones matemáticas corres; ondientes, se deducen al tomar en cuenta la tabla 1 y al considerar la forma de la energía expuesta al principio de este capítulo (ver ecuación

La presintación previa es totalmente similar al criterio de inestabilidad debida a Liapunov'.

Se recomienta la referencia 24 para una revisión del concepto.



Curvas sobre la superficie inicial en pequeñas deformaciones thiciales SI-ECurvas sobre superficie deformada pàra la carga q. Curvas correspondientes al estado simultáneo de deformación; superficie pandeada. FIGURA. - 2.2

•

CAPITULO JII

TEORIA TENERAL DE CASCARONES ELASTICOS GRUESOS DESARROLLADA MEDIANTE EL EMPLEO DE UNA FUNCION POTENCIAL

3.0 Generales.

La investigación contemporánea en materia de cascarones dedica especial atención a elementos de este tipo cuyo espesorno es pequeño, e intenta resolver el problema elástico tridimensional de cascarones en los que la hipótesis de Kirchhoff no es aceptable.

Dos formulaciones recientes constituyen la base de las con sideraciones que siguen: dichas formulaciones se deben a W.-Zerna (43) y a I.G. Teregulov (45). Teregulov suriere espe cificar la forma de los desplazamientos en términos de un polimo mio en Z y de desarrollos anAlegos para los esfuerzos. La representación sugerida por Teregulov es, en cuanto a los des plazamientos.

 $U_{m} = U_{m}^{(0)} + Z U_{m}^{(1)} + Z^{2} U_{m}^{(0)} + Z^{3} U_{m}^{(3)}$

3.1 (a, b)

52

$$W = U_{5} = W_{(*)} + \mathcal{L} W_{(i)} + \mathcal{L} W_{(i)}$$

en cuanto a los esfuerzos es

- 2

1

y, para las deformaciones,

En esta formulación de tipo polinomial se puede ver que no todos los polinomios son del mismo grado, conservandose en -

unos terminos hasta la tercera potencia y en otras como 6³¹ com solamente hasta la primera potencia. La elección de parada con la de E., parece incongruente. Ya que se adopta un material elastico. Estas expresiones que ha introducido Te regulov en la teoria de placas son realmente una mejora pero su extension a cascarones requiere ciertas modificaciones para poder incluir efectos que no estan presentes en placas. Je he--cho la proposición de los desplazamientos en la forma de la --ecuación 1(a) su estás por Seregulov, no resulta ser la mas --adecuada para el fin ie la teoria ceneral de cascarones. En el artículo original de Teregulov, existe une irregularidad en_ chanto a las unidades de los termines; dada la aparende inconsistencia existente en esa presenteció, se podría llegar a con-

clusiones erroneas sobre el idsarrollo ie Ter autov, que no serian justas.

Teremilov usa las occasiones 1, 2 y 3 para deducir las -conaciones al equilibrio y las relaciones actormación desplazamiento col la aplicación le un teorema variacional similar al de Reihsmer. (47) - rero me fuére formulado por Perepulov en el tratamiento de problemas no lineales de la elasticidad. (46) Los resultados obtenidos por Teregulov corresponden a placas; extenderlas a cascarones resulta complicado, y sería preferi--ble la formulación de Zerna.

Previamente a la formulación de Teregulov, Zerna (43) -presenta un desarrollo infinito en serie de potencias de Z para los desplazamientos. Esdiante el empleo la propiedad del tensor métrico contravariante de expresarse como un desarrollo en_ serie de potencias de Z supone ciertas leyes de distribución_ de los esfuerzos que satisfacen las condiciones de frontera. --Mediante comparación de los polinomios resultantes de la ley eg fuerzo-deformación y la distribución supuesta de esfuerzos, se_ detorminan los coeficientes del desarrollo en serie de las de-formaciones, y luego las de los desplazamientos. La diferencia esencial en ambos desarrollos radica en que las expresiones en_ serie para las deformaciones pon deducidas geométricamente por_ Zerna, y postuladas por Tergulov.

"l camino que sugiere Teregulov es similar al sugerido -por P. Cicala (40) quien supone polinomios de Legendre en lu-gar de potencias de \mathbb{X} . Un tratamento con esa secuela tiene_ desventajas, porque no se usa la noción física del problema, ni

54

3

se toma en cuenta la parvicularidad de las funciones supuestas.

Anteriorme te u, la existencia de estos desarrollos en se

rie, en 1944 Vlasov (26, 37) introdujo un desarrollo en serie de potencias de para las deformaciones. ^Su modelo de despl<u>a</u> zamiento es, en la notación presente

donde puede verse que conserva la hipótesis de sección plana. _ La ecuación 4a. puede expresarse también como

$$\overline{\mathcal{U}}_{n} = \mathcal{U}_{n} + \mathcal{I}\left(\frac{\mathcal{U}_{n}}{R_{n}} - \frac{\mathcal{W}_{n}}{\alpha_{n}}\right) \qquad 3.5$$

y encuentra entonces su justificación en los resultados del a--pendice A5, de acuerdo con la ecuación A4.10.

De este modo se sigue conservando la hipótesis de sección plana.

Debido a la introducción del término W (1), Vlasov llega a establecer las deformaciones.

$$(\omega)_{13} = \frac{1}{\omega_{1}C_{1}} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial B_{1}}$$

$$(\omega)_{23} = \frac{1}{\omega_{2}C_{2}} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial B_{2}}$$

$$(\omega)_{23} = \frac{1}{\omega_{2}C_{2}} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial B_{2}}$$

$$(\alpha, c)$$

55

Aquí se ve que el término W (1) es muy pequeño en comparación con la unidad y es aproximadamente proporcional a la dig

tribución de la carga normal a la superficie (cuando el módulo______ de Poisson en los planos normales a la superficie media es pe---queño), lo que conduce a que las deformaciones ω_{i5} y ω_{25} sean casi nulas, por ejemplo en el caso de carga uniforme. Esta incongruencia sería eliminada después por Vlasov, y en su libro ---(ref. 26) publicado en 1949, introduciría $W^{(0)} = 0$. Con la nueva consideración, Vlasov intenta la solución del problema de cag carones gruesos y de curvatura Gaussiana distinta de cero. El___ desarrollo en serie para las deformaciones paralelas a la superficie media, en términos de la variable \varkappa se deduce de la ecuación A-4. 19, cuando se sustituye $\frac{1}{C_{ex}}$ por su desarrollo en serie, es decir,

$$e_{nb} = \left[1 - k_n Z + \left(\frac{Z}{R_m}\right)^2 - \left(\frac{Z}{R_m}\right)^3 + \dots\right] \left(e_{nb} + Z Z_{nb}\right) \quad 3.7$$

o sea,

Penp = enp + Z (X = - kenp) - Z2 (kular - k2 enp)+

y considerando despreciables los términos subrayados por la

o bien,


quedando entonces,

$$P_{ij} = e_{ij} + \sum_{l=1}^{m} \chi^{i} \chi_{ij}$$

$$P_{iz} = e_{iz} + \sum_{l=1}^{m} \chi^{i} \chi_{iz}$$

$$P_{iz} = e_{iz} + P_{zj} = (\omega) + \sum_{l=1}^{m} \chi^{i} \mathcal{E}_{i}$$

$$P_{iz} = e_{iz} + P_{zj} = (\omega) + \sum_{l=1}^{m} \chi^{i} \mathcal{E}_{i}$$

De las ecuaciones 8 y 9 se puede deducir que

$$\mathcal{L}_{u,B_i} = (-1)^{i-1} (k_u^{i-1} \mathcal{L}_{u,B})$$
 3.11

y en consecuencia,

$$\mathcal{X}_{iii} = (-1)^{i-i} \left(k_{i}^{i-i} \mathcal{X}_{ii} \right)$$

$$\mathcal{Z}_{i} = (-1)^{i-i} \left[\frac{(k_{i}^{-} - k_{z}^{i-i})}{2} W + \frac{1}{2} \left(k_{i}^{i-i} + k_{z}^{i-i} \right) \mathcal{Z} \right]$$

5.12

Como puede verificarse de las souaciones correspondientes del capítulo anterior. La formulación de la solución del proble ma de la teoría de cascarones gruesces podría realizarse del mismo modo que para los cascarones delgados, con la introducción de la deformación por cortante o sin ella, para ello ca necesario aprovechar que los coeficientes del desarrollo en serie de la ecua---ción 9 pueden cálcularse con los resultados obtenidos para $A_{ij}A_{ij}$ y δ en esa solución. Este es análogo a lo que propone M. Ro--dríguez Caballero (44), con la diferencia de que ól, adamás del -uso de la notación tensorial, sugiere un procedimiento iterativo para incluir aquellos términos como $\frac{Q_{ij}}{R_{ij}}$ etc., que se desprecian en la formulación usual del sintema de ocuaciones diferenciales -en las variables $\frac{1}{2}$ y W. Sin embargo, ocurre que coeficientes --

57

58

media, porque se supone que las fibras normales a esa superfi--El modelo incluye aquella deforma cie se deforman libremente. ción que puede producir el cortante. Las limitaciones de la teoría que resulta del modelo son las siguientes:

Las relaciones espesor a radio de curvatura menor a) no deben exceder

$$\frac{t}{R} \leq 0.5$$

Las curvas cordenadas elegidas sobre la superfi-b) ciemedia deben ser casi de curvatura principal, es decir que la torsión en la superficie media no debe ser mayor de 📅 de la curvatura mayor.

La condición (a) se cumple satisfactoriamente en la mayor parte de cortinas de concreto construidas hasta la fecha.

La limitación (b) es una hipótesis de naturaleza puramente geométrica, que permite establecer relaciones simples para los_ parámetros fundamentales de la superficie paralela a la media.

Deducción de las ecuaciones de equilibrio en cascarones ---3.2 gruesos cuya curvatura gaussiana es distinta de cero. Fara facilitar los desarrollos siguientes, pe resumen ahora los resultados escaciales del apéndice A-4 y del inciso anterior de este mismo capítulo. En el apéndice A-4 se formuló el mode-

lo de deformación en la forma.

del desarrollo en serie para las potencias superiores a \varkappa , ---adquieren significado cuando la relación $\frac{h}{R}$ es grande, y en este caso la hipótesis de sección plana implícita en las ecuaciones 4 de_ja de tener sentido, debido a la deformación de cortante.

La teoría de Vlasov para cascarones gruesos, así como el -procedimiento iterativo de M. Rodríguez C., pueden mejorarse haciendo uso del modelo de desplazamiento sugerido por Vlasov, y -mostrado en las ecuaciones 4. Esto se discute con amplitud mas_ adelante.

Empleando la notación de V.Z. Vlasov relativa a los signos de los desplazamientos como él discute en su libro (ref. 26, pp. 184 - 186), se plantea una secuela similar a la que se presenta mas adelante para las ecuaciones del modelo propuesto en el grupo de ecuaciones 26. La elección de Vlasov para los signos de los desplazamientos arroja resultados distintos a los de Love (5) y tiene un inconveniente que se discute con base en la figura 2.

Considerese ahora el modelo de deformación expresado como

 $\overline{W} = W$

59

3.13 (a, b)

 $\overline{\mathcal{U}}_{a} = \mathcal{U}_{a}\left(1+\frac{\overline{\mathcal{Z}}}{R_{a}}\right) - \overline{\mathcal{Z}}\left(\frac{W_{i}}{\alpha_{a}}-\frac{Y_{i}}{\alpha_{a}}\right) + \overline{\mathcal{Z}}^{3}\mathcal{U}_{a}^{(3)}$

No sería difícil incluir más términos, pero para el análi-sis siguiente solamente se usarán estos. En las ecuaciones 13 aparecen dos funciones nuevas, $\mathcal{H}_{y} \mathcal{U}_{or}^{(s)}$; la primera de ellas, se

gún se desprende de la ecuación 13 (b), indica que la pendiente total es debida, a que la sección permanece plana y a otras causas como puede ser el cortante en las caras normales a la superf<u>i</u> cie media. Para este modelo,

$${}^{\mathcal{P}}C_{\alpha\beta} = \frac{1}{C_{\alpha}} \left[C_{\alpha\beta} + \mathcal{Z} \left(\mathcal{J}_{\alpha\beta} - \Theta_{\alpha\beta} \right) + \mathcal{Z}^{3} C_{\alpha\beta}^{(3)} \right] \qquad 3.14$$

donde

$$\theta_{ac,B} = \frac{1}{\alpha c_{A}} \left(\frac{\Psi_{,ac}}{\alpha c_{ac}} \right)_{B} \qquad 3.15$$

y las componentes de $\mathcal{C}_{\kappa,\Lambda}^{(3)}$ se valúan de la misma manera que $\mathcal{C}_{\kappa,\Lambda}$, pero sustituyendo $\mathcal{U}_{\kappa}^{(4)}$ por \mathcal{U}_{κ} , es decir,

Además, la deformación angular en las caras normales a la su perficie media, que puede calcularse como se hizo en la ecuación_ A-4, 33, se expresa ahora como



Con la hipótesis de que los coeficientes del desarrollo de -

la ecuación 13 (b) son decrecientes, el término subrayado puede -

despreciarse. Conviene introducir ahora una consideración estáti ca, de manera que las condiciones de frontera en las caras extre-

mas se satisfagan.

Las condiciones son que los esfuerzos cortantes sean nulos_ en ambas caras, esto es, que para un sólido elástico isotrópico se tenga

$$\delta_{15} = G \, \omega_{15} = 0$$
 para $Z = \frac{1}{2}$ 3.18

entonces se puede expresar

$$\omega_{15} = -\frac{\psi_{1}}{\omega_{1}} \left(1 - \zeta^{2} \right)$$
 3.19

y análogamente

$$\omega_{23} = -\frac{P_{12}}{\omega_2} (1 - h^2)$$
 3.20

en que

$$h = \frac{2Z}{h}$$

Si se representa el esfuerzo cortante como en vigas de se<u>c</u> ción rectangular, es decir

$$\delta_{ij} = 1.5 - \frac{Q_i}{A} \left[1 - \chi^2 \right] \qquad 3.21$$

entonces, por ser $\int_{13}=G\omega_{13}$, se deduce que H tiene el sentido de ---

una función potencial le fuerza cortante, porque

$$-\frac{y_{1}}{\alpha_{1}} = 1.5 \frac{Q_{1}}{AG} \qquad 3.22$$

Aquí caben dos procedimientos en cuanto a la solución del -

problema:

- a) Definir un sistema de ecuaciones en las variables u_i , u_2 , W y \mathcal{Y}_i , y resolver el sistema con las condiciones adecuadas de frontera.
- b) Sustituyendo la distribución parabólica de la ecuación_ 19 con otra uniforme que origine por ejemplo la misma energí de deformación, se puede introducir un procedi--miento iterativo. Para esto se supone inicialmente --que $\Psi=0$ y, esta aproximación se mejora sucesivamente en cada etapa con la ecuación 22. Los momentos calculados con la ecuación 14 para cada valor de Ψ introdu--cen términos independientes o residuos. Este procedi--miento puede incorporarse a la formulación iterativa de bida a M. Rodríguez Caballero (44).

El primer procedimiento es adecuado en la formulación de pro blemas de inestabilidad, en tanto que el segundo es adecuado en el tratamiento de problemas de equilibrio.

El inconveniente esencial de esta formulación radica en ---que en el modelo de Vlasov definido por las ecuaciones 4, en que el desplazamiento W es positivo en la dirección del vector \vec{n} , ---

las curvaturas quedan definidas en forma distinta (ref. 26, p. 177) a como se definen en las ecuaciones A-3, 38 y A-3, 39; por ejemplo $\chi_{i1} = \frac{1}{\infty_1} \left[-\frac{W_{i1}}{\omega_1} + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_{12}} \right] + L_{i2} \left[-\frac{W_{i2}}{\omega_2} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2}{R_{12}} \right]$ que en su forma más simple es

$$X = -\frac{1}{\alpha c_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta_1} \qquad 3.23$$

Esto implica, en el caso de una viga, en que las deformaci<u>o</u> nes se escriben

$$\mathcal{L} = \mathcal{Z} \mathcal{X}$$
 3.24

con el eje ≿ dirigido hacia arriba, que la parte superior se encuentra en compresión y la inferior en tensión, con lo cual se -cumple con la notación usual en ingeniería en que

Considérese ahora la figura II.2 (a), en que R es el radio inicial y R el de la superficie deformada, entonces \aleph es pos<u>i</u> tiva y esto implica que las fibras superiores se encuentren en -tensión, con lo cual al aceptar que ε es positiva en tensión, qu<u>e</u> dan plenamente justificados los primeros dos términos de la ecuación 8, pero siempre que se defina \aleph con signo contrario al de la ecuación 23. Con esto se ve que independientemente de la elección de W, la curvatura positiva corresponde a tensión en las fi-

63

bras superiores, según se aclara con las figuras 11.2 (a) y II.2_ (b). El problema se resuelve, modificando el signo de los momen tos, con la dificultad de que momentos y fuerzas normales quedan_ definidos de manera distinta en cuante al signo de la deformación que introducen. Este problema no aparece en la secuela que después se sigue. Otro problema quizá más esencial que el anterior se presenta cuando se omite $\mathcal{U}_{\infty}(3)$ en la ecuación 13 (b) porque entonces el modelo es el de Kirchhoff, y en este caso, por las considera-ciones introducidad en la hipótesis de Kirchhoff, en el sentido de que se supone que los esfuerzos cortantes no producen deformación alguna, es incompatible deducir deformaciones de cortante con el modelo.

3.1 Introducción de la función potencial.

Otro procedimiento es el que aquí se sigue, y que consiste_ en usar también u_n polinomio para los desplazamientos.

$$U_{n} = U_{n}^{(a)} + Z U_{n}^{(i)} + Z^{2} U_{n}^{(2)} + Z^{3} U_{n}^{(3)}$$

$$W = W^{(a)} + Z W^{(i)} + Z^{2} W^{(2)}$$

$$3.26(a,b)$$

La elección tiene bases puramente físicas. Los dos primeros términos de la ecuación 4a. los resultados de la teoría basa da en las hipótesis de Kirchhoff-Love. Dicha ecuación especifica que las fibras perpendiculares a la superficie media tienen de formaciones de cuerpo rígido, es decir giran y se lesplazan con respecto a la posición inicial. El tercer término es esencial-mente distinto al de Teregulov (ec. la), y corrige la forma de --

64

distribución de los esfuerzos normales. El cuarto término establece una corrección al cambio de posición de las fibras normales e la superficie media, y al igual que la rotación, es un término_ impar. Entonces las fibras normales experimentan una transla----

생활은 가지 않는 것이 같은 것이 같은 것이 같이 있는 것이 같이 있다.

ción y además una deformación, porque no permanecen planas.

La hipótesis del modelo de deformación consiste en que las_ fibras normales a la superficie media, además de girar y acortarse, experimentan una distorsión. Esta distorsión puede ser por_ ejemplo la debita al esfuerzo cortante. Dado que en la mayoria_ de los casos la deformación de cortante adquiere mayor importan-cia en cascarones que por ejemplo en placas, cabe atribuir a cor tante esa distorsión.

En cuanto a la segunda hipótesis de Kirchhoff, relativa a la deformación de las fibras normales por efecto de la compresión en las caras externas, podría conservarse despreciando los términos $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$, en virtud de que dada la restricción lateral, las fibras normales tendrán una deformación normal menor que la que ocurre en vigas, donde es despreciable.

Para el modelo de deformación expresado en las ecuaciones -4a y 4b, del apéndice A-4 se desarrolla el cálculo de las deforma ciones, Los esfuerzos y las resultantes correspondientes así co-

mo las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de compatibili--

dad, ce deducen por separado en los apéndices A-4 y A-5.

Pura el modelo de desplazamiento propuesto, el tensor de----

formación puede escribirce en la forma

$${}^{P}C_{\alpha\beta} = \frac{1}{C_{\alpha\epsilon}} \left[C_{\alpha\epsilon\beta} + \sum_{i=1}^{3} Z^{i} C_{\alpha\beta} \right] \qquad 3.27$$

en que para valuar $\mathcal{C}_{n,k}^{(i)}$ es necesario tomar en cuenta que

$$\begin{aligned}
 & e_{ii}^{(i)} = \frac{\mathcal{U}_{ii}^{(i)}}{\alpha c_{1}} + \mathcal{L}_{iz} \, \mathcal{U}_{z}^{(i)} - \frac{\mathcal{W}^{(i)}}{R_{1}} \\
 & e_{zz}^{(i)} = \frac{\mathcal{U}_{z,z}^{(i)}}{\alpha c_{z}} + \mathcal{L}_{zi} \, \mathcal{U}_{i}^{(i)} - \frac{\mathcal{W}^{(i)}}{R_{z}} \\
 & e_{zi}^{(i)} = \frac{\mathcal{U}_{i,z}^{(i)}}{\alpha c_{z}} - \mathcal{L}_{zi} \, \mathcal{U}_{z}^{(i)} - \frac{\mathcal{W}^{(i)}}{R_{iz}} \\
 & e_{zi}^{(i)} = \frac{\mathcal{U}_{i,z}^{(i)}}{\alpha c_{z}} - \mathcal{L}_{zi} \, \mathcal{U}_{z}^{(i)} - \frac{\mathcal{W}^{(i)}}{R_{iz}} \\
 & e_{zi}^{(i)} = \frac{\mathcal{U}_{i,z}^{(i)}}{\alpha c_{z}} - \mathcal{L}_{zi} \, \mathcal{U}_{zi}^{(i)} - \frac{\mathcal{W}^{(i)}}{R_{iz}} \\
 & = \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{\alpha c_{z}} - \mathcal{U}_{zi}^{(i)} + \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{R_{iz}} \\
 & = \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{\alpha c_{z}} - \mathcal{U}_{zi}^{(i)} + \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{R_{iz}} \\
 & = \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{\alpha c_{z}} - \mathcal{U}_{zi}^{(i)} + \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{R_{iz}} \\
 & = \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{\alpha c_{z}} + \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{R_{iz}} + \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{R_{iz}} \\
 & = \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{\alpha c_{z}} + \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{R_{iz}} + \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{R_{iz}} \\
 & = \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{R_{iz}} \frac{\mathcal{U}_{zi}^{(i)}}{R_{iz}} \\
 &$$

y además que W⁽¹⁾ = 0 para i≥3

Por otro lado, la deformación angular que experimentan ----los planos normales a la superficie media, se cálcula como

$$\omega_{15} = \mathcal{O}_{15} + \mathcal{O}_{11} \qquad 3.29$$

es decir, como la suma del ángulo que se desvía el vector tangen te a la superficie media en la dirección con respecto al vector normal, más el ángulo que se desvía el vector normal con respecto a la tangente, al verificarse la deformación. El cálculo -se ha verificado un el apéndice A-4 y el resultado es

$$(U_{13} = -\frac{1}{C_{1}R_{1}} \left[-\frac{\chi_{1}}{\infty_{1}} + \chi^{2} \mathcal{U}_{1}^{(2)} + \chi^{2} \mathcal{U}_{1}^{(2)} \right] - \frac{1}{C_{1}} \left[\frac{\chi_{1}}{\infty_{1}} + \chi^{2} \frac{W_{1}^{(1)}}{\infty_{1}} + \chi^{2} \frac{W_{1}^{(2)}}{\infty_{1}} + \chi^{2} \frac{W_{1}^{(2)}}{\infty_{1}} + \chi^{2} \mathcal{U}_{1}^{(2)} + \chi^{2} \mathcal{U}_{1}^{(2)} \right] - \frac{1}{C_{1}} \left[\frac{\chi_{1}}{\infty_{1}} + \chi^{2} \frac{W_{1}^{(1)}}{\infty_{1}} + \chi^{2} \mathcal{U}_{1}^{(2)} + \chi^{2} \mathcal{U}_{1}^{(2)} + \chi^{2} \mathcal{U}_{1}^{(2)} + \chi^{2} \mathcal{U}_{1}^{(2)} \right] - \frac{1}{C_{1}} \left[\frac{\chi_{1}}{\omega_{1}} + \chi^{2} \frac{W_{1}^{(1)}}{\omega_{1}} + \chi^{2} \mathcal{U}_{1}^{(2)} + \chi^{2} \mathcal{U}_$$

El término subrayado en la ecuación 30 se supone despre--ciable y la validez de esta consideración será justificada des-pués (ver ec. 33). El número i funciones desconocidas que apa recen en el grupo de cousciones 26, puere reducirse con ciertas_ consi eraciones de naturaleza juramente estática. La primera consideración se refiere a la condición estática en las fronte-- ras superior e inferior del cascarón. En estas fronteras, --el esfuerzo cortante debe ser nulo si no se encuentra ninguna acción externa que lo pueda producir.

Entonces, en un cuerpo de anisotropía curvilínea (ver ref. 68) se tiene,

que debe cancelarse para $\mathbb{Z} = \frac{t}{2}$, cs decir,

$$\frac{\omega_{12}}{z} \left(z = \frac{t}{2} = 0 \right)$$

$$\frac{\omega_{13}}{z} \left(z = -\frac{t}{2} = 0 \right)$$

$$\frac{3.32(a,b)}{3.32(a,b)}$$

Considerando como incógnitas a $\mathcal{U}_{\infty}^{(n)}$, $\mathcal{U}_{\infty}^{(n)}$, es posible de<u>s</u> pejarlas del sistema de ecuaciones 32 en términos de las otras_ variables $\mathcal{V}_{\mathcal{V}} \mathcal{W}^{(n)}$ y $\mathcal{W}^{(n)}$. Introduciendo en la ecua ción 32, la notación

$$C_{i+} = 1 + \frac{t}{2R_i}$$

$$C_{1-} = 1 - \frac{t}{2R_1}$$

8

se puede escribir



 $\frac{3t^{*}}{4}u_{i}^{(*)} - \frac{t^{*}}{4c_{i}R}u_{i}^{(*)} - tu_{i}^{(*)} = \frac{y_{i}}{2c_{i}R}\left[1 + \frac{t}{2c_{i}R}\right] + \frac{1}{2c_{i}R}\left[\frac{t}{2c_{i}R}\frac{w_{i}^{(*)}}{4c_{i}R}\right]$ 3.32(6')

y considerando además que la relación peralte a cadio no es mayor que 0.5, es accir,

$$\frac{t}{R} \leq 0.5$$
 3.55

se puede deducir que

٠

$$(L^{(2)}_{1}) = \frac{W_{1}}{205} \frac{W_{1}}{R_{1}} = \frac{W_{1}}{205$$

$$(U_{i}^{(3)} = \frac{4}{3t^{*}} \frac{\Psi_{i}}{\sigma c_{i}} + \frac{1}{2R_{i}} \frac{W_{i}^{(4)}}{\sigma c_{i}} + \frac{1}{3} \frac{W_{i}^{(2)}}{\sigma c_{i}} = \frac{3}{3} \frac{W_{i}}{\sigma c_{i}} = \frac{1}{3} \frac{W_{i}}{\sigma$$

y tomando en cuenta estos valores en la ecuación 30, se establ<u>e</u> ce que,

$$\omega_{i,n} = -\frac{W_{i}}{m_{i}} \left[1 + \frac{X}{R_{i}} \left(1 - \frac{1}{C_{i}} \right) - \frac{4K}{t^{2}} \left[1 + \frac{1}{8C_{i}} \left(\frac{t}{R_{i}} \right) \right] \right] - \frac{1}{2KC_{i}R_{i}} \left[\frac{X^{2}}{2} W_{i}^{(i)} \left(1 - \frac{2X}{3R_{i}} \right) + \frac{X^{2}}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} - \frac{3t^{2}}{2R_{i}} \right] \right] - \frac{1}{2KC_{i}R_{i}} \left[\frac{X^{2}}{2} W_{i}^{(i)} \left(1 - \frac{2X}{3R_{i}} \right) + \frac{X^{2}}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} - \frac{3t^{2}}{2R_{i}} \right] \right] - \frac{1}{2KC_{i}R_{i}} \left[\frac{X^{2}}{2R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} - \frac{3t^{2}}{2R_{i}} \right] \right] - \frac{1}{2KC_{i}R_{i}} \left[\frac{X^{2}}{2R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} - \frac{3t^{2}}{2R_{i}} \right] \right] - \frac{1}{2KC_{i}R_{i}} \left[\frac{X^{2}}{2R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} - \frac{3t^{2}}{2R_{i}} \right] \right] - \frac{1}{2KC_{i}R_{i}} \left[\frac{X^{2}}{2R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} - \frac{3t^{2}}{2R_{i}} \right] \right] - \frac{1}{2KC_{i}R_{i}} \left[\frac{X^{2}}{2R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] \right] - \frac{1}{2KC_{i}R_{i}} \left[\frac{X^{2}}{2R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] \right] - \frac{1}{2KC_{i}R_{i}} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \left[\frac{X}{R_{i}} + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)} \right] + \frac{1}{3} W_{i}^{(2)$$

68

9

~ / * W. + * W. + 2 × [W. - W. + 2 R. or,] +

 $+ 3 z^{2} \left[\frac{1}{5R_{1}} \frac{W_{12}^{(1)}}{\omega_{1}} + \frac{1}{5} \frac{W_{11}^{(2)}}{\omega_{1}} \right]$

3,36

simplificando, se obtiene

$$\begin{split} \mathcal{W}_{13} &= -\frac{\psi_{1}}{\infty_{1}} \left[1 - y_{1}^{2} + \frac{\chi}{R_{1}} \left(1 - \frac{1}{C_{1}} \right) \right] + \frac{\chi}{\infty_{1}} \left[W_{1}^{(1)} \left(1 - \frac{1}{C_{1}} \right) - \frac{W_{1}^{2} + t^{2}}{R_{1}} \right] \\ &- \frac{\chi^{2}}{\infty_{1}} \left[\frac{W_{1}^{(2)}}{C_{1}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{R_{1}} \right)^{2} \right) - 1 \right\} + \frac{1}{R_{1}} W_{21}^{(1)} \left(1 + \frac{1}{2C_{1}} \right) \right] \\ &+ \frac{\chi^{2}}{\infty_{1}} \left[W_{11}^{(1)} \left(\frac{1}{3C_{1}R_{1}^{2}} \right) - \frac{1}{3C_{1}R_{1}} W_{21}^{(2)} \right] \\ &= 3.37 \end{split}$$

considerando que la magnitud de los términos subrayados, puele despreciarse se tendrá

$$(\omega_{13} = -\frac{\psi_{1}}{c_{1}}\left[1 - h^{2}\right] - \frac{\psi_{11}}{R_{10}c_{1}} - \frac{z^{2}}{R_{10}c_{1}} W_{11}^{(0)}\left(1 + \frac{1}{2c_{1}}\right) + \frac{z^{*}}{3c_{1}R_{10}c_{1}}\left[\frac{\psi_{11}^{(0)}}{R_{1}} - W_{11}^{(2)}\right]$$
5.36

en que

 $\ddot{h} = \frac{4z^2}{t^2}$

El modelo de desplazamiento presentado en el sistema de ecuaciones 26 puede expresarse más sencillamente con los result<u>a</u> dos de las ecuaciones 34 y 35, quedando entonces en términos de 6 funciones desconocidas.

Es muy importante hacer ver que la suposición respecto a_ la pequeñez del término subrayado en la ecuación 30 es correcta.

69

Además es convecta tamién la suposición introducida a continua ción de la ec. 17. El to se comprueba fácilmente observando – que $\mathcal{U}_{i}^{(3)}$ os cencr que $\mathcal{U}_{i}^{(0)}$. De hecho, de los tres términos que definen a $\mathcal{U}_{i}^{(3)}$ en la comorón 35, el tás importantes es $\frac{4}{3t^{\prime}} \frac{\psi_{i}}{\omega_{i}}$ que multiplicado por \mathbb{Z}^{3} en su valor máximo permite obtener $\frac{1}{6}t\frac{\psi_{i}}{\omega_{i}} < \frac{\psi_{i}}{\omega_{i}}t$. Dada la expresión de $\frac{\psi_{i}}{\omega_{i}}$ en términos de ω_{ii} cabe suponer que este término será más pe--queño que δ_{i} , en cuyo caso queda verificado que la represen tación polinomial es correcta en las dos partes en que se ha se parado es decir en aquella parte en que la sección es plana y en su corrección (ver apéndice A-4, ec. A-4 7). Observandose_ la misma cualidad citada en cuanto a la ecuación 17 ya que el_ valor máximo de la corrección es el del primer término y es

$$\frac{1}{2}$$
 t $\frac{\theta_{1}}{\infty}$

El siguiente paso consiste en reducir el número de incógnitas. Dado que en general los esfuerzos normales en las su-perficies del cascarón serán pequeños, las deformaciones de las fibras normales serán pequeñas también. Para el modelo de de<u>s</u> plazamiento, la deformación normal está dada por la ecuación ---A-4 31 como

70

11

$$e_{35} = -W'' - 2ZW''' 3,39$$

Si esta deformación se considera despreciable, entonces $W^{(*)}$ y $W^{(*)}$ deben desaparecer. En estas condiciones, las ---

counciones 34 y 35 se convertarían en

$$U_{i}^{(a)} = -\frac{\psi_{i}}{2\alpha_{i}R_{i}}$$
$$U_{i}^{(b)} = \frac{4}{3h^{2}} \frac{\psi_{i}}{\alpha_{i}}$$

3.40

Pero considerar que $C_{33} = 0$ no es muy razonable, porque en algunos cascarones, la magnitud de (2) 13 puede ser del orden de C 33.

Aceptando sin embargo la pequeñez de C 33, existe una consideración más razonable y que se deduce de considerar el -cuerpo del cascarón como ortotrópico. Para un material orto-trópico, las deformaciones (ver ref. 68) se cálculan como:

 $\begin{aligned} \mathcal{C}_{11} &= \frac{i}{E_{1}} \mathcal{O}_{11} - \frac{\vartheta_{21}}{E_{2}} \mathcal{O}_{22} - \frac{\vartheta_{31}}{E_{3}} \mathcal{O}_{33} \\ \mathcal{C}_{22} &= -\frac{\vartheta_{12}}{E_{1}} \mathcal{O}_{11} + \frac{i}{E_{2}} \mathcal{O}_{22} - \frac{\vartheta_{32}}{E_{3}} \mathcal{O}_{32} \\ \mathcal{C}_{33} &= -\frac{\vartheta_{13}}{E_{1}} \mathcal{O}_{11} - \frac{\vartheta_{23}}{E_{2}} \mathcal{O}_{32} + \frac{i}{E_{3}} \mathcal{O}_{33} \\ \mathcal{W}_{13} &= \frac{i}{G_{13}} \mathcal{O}_{13} \\ \mathcal{W}_{13} &= -\frac{i}{G_{13}} \mathcal{O}_{13} \\ \mathcal{W}_{23} &= -\frac{i}{G_{23}} \mathcal{O}_{23} \end{aligned}$

y en un cascaron de concreto reforzado, por ejemplo, $E_{g} < E_{i}, E_{a}$. En la ecuación 41 (c), se desconoce $\sigma_{ii} y \sigma_{aa}$, pero se puede conocer σ_{ab} si se conoce la distribución de carga en las caras ex-

En estas condiciones, cabe suponer que

$$\frac{\partial_{12}}{E_1} = \frac{\partial_{22}}{E_2} = 0 \qquad 3.42$$

13

3.44

en cuyo caso,

De la hipótesis 42 se infiere que el esfuerzo σ 33 no --tiene efecto en las deformaciones e 11 y e 22, y esta es la hipótesis usual en la teoría de cascarones delgados, donde se acepta simultáneamente que e 33 = 0. Las ecuaciones que <u>a</u> quí se desarrollan pueden eliminar entonces esa dificultad, pero incluyen la hipótesis (42) que se usa para definir las fun-ciones $W^{(0)}$ y $W^{(m)}$

Si en las ecuaciones 39 y 43 (a) se utiliza

 $\begin{aligned}
\mathbb{U}_{35} \middle| & \mathbb{Z} = \frac{t}{2} = p \\
\mathbb{U}_{35} \middle| & \mathbb{Z} = -\frac{t}{2} = q \\
\mathbb{W}^{(1)} &= -\frac{p+q}{2 + E_3} \end{aligned}$

 $W^{(1)} = -\frac{P+q}{2tE_{3}}$ $W^{(2)} = -\frac{P-q}{2tE_{3}}$ $W^{(2)} = -\frac{P-q}{2tE_{3}}$

se obviene

queaando entoncos

$$\overline{W} = W - \frac{1}{E_3} \left(\frac{P \cdot q}{2} \right) \overline{Z} - \frac{1}{E_3} \left(\frac{P - q}{2} \right) \frac{\overline{Z}^2}{t}$$
 346

La nigótesis 42 equivale a ufir ou que las finitas norma---

les à la superficie della de deforman licremente enuite de tra-

ta del esf unzo exial su ellas. Lata supótente lleva a acep--

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{33} &= \frac{1}{E_3} \quad \vec{U}_{33} \\ \mathcal{C}_{11} &= \frac{1}{E_1} \quad \vec{U}_{11} - \frac{\vec{D}_{21}}{E_2} \quad \vec{U}_{22} \\ \mathcal{C}_{32} &= \frac{1}{E_3} \quad \vec{U}_{32} - \frac{\vec{D}_{12}}{E_1} \quad \vec{U}_{33} \end{aligned}$$

en cuyo caso,

De la hipótesis 42 se infiere que el esfuerzo 0.33 no --tiene efecto en las deformaciones C 11 y C 22, y esta es la hipótesis usual en la teoría de cascarones delgados, donde se acepta simultáneamente que C 33 = 0. Las ecuaciones que <u>a</u> quí se desarrollan pueden eliminar entonces esa dificultad, pero incluyen la hipótesis (42) que se usa para definir las fun-ciones $W_{i}^{(i)}$ y $W_{i}^{(n)}$

Si en las ecuaciones 39 y 43 (a) se utiliza

W (2) = --

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{33} \middle| \tilde{z} = \frac{t}{z} = p \\ \tilde{J}_{33} \middle| \tilde{z} = -\frac{t}{z} = q \\ W^{(1)} = -\frac{p+q}{z+E_{*}} \end{aligned} \end{aligned}$$

se obtiene

3.45

.44

quedando entonces

$$\overline{W} = W - \frac{1}{E_s} \left(\frac{P+q}{2} \right) \overline{z} - \frac{1}{E_s} \left(\frac{P-q}{2} \right) \frac{\overline{z}^2}{t}$$
 3.46

La hipótesis 42 equivale a ufirm r que las fioras norma----

les a la superficie della de deforman libremente enando de tra-

ta del esfuerzo axial en ellas. Esta hipótosis lleva a acep--

14

tar las equaciones (45); sin embargo, la hipótesis en sí resul ta sumamente criticable ya que en ocaciones, la magnitud de los términos $\frac{\mathcal{D}_{15}}{E_1} \mathcal{O}_{11}$ y $\frac{\mathcal{D}_{23}}{E_2} \mathcal{O}_{22}$ puede ser del mismo orden que los definidos por $\frac{1}{E_3} \mathcal{O}_{33}$, y la única razón que la justifica radica en el hecho de que en general dichas -magnitudes son sumamente pequeñas y puede sugerir una estima--ción que aunque burda es cualitativa.

For otic lado, resulta conveniente considerar esa aproximación en lugar de introducir dos funciones desconocidas. Si_ se pretende refinar los resultados de esta hipótesis, se puede_ proceder interativamente mejorando en cada paso las ecuaciones_ 45, tomando en cuenta los tírainos que fueron despreciador en la hipótesis 42. El procelimiento consistira, en adoptar como --primera hipótesis, la de la ecuación 45. Conocido el valor de los esfuerzos f_{i1} y f_{i2} , se puede cálcolar en ambas como extremo el valor de C_{33} , la camera que la las conocidores que resultan de la ecuación 59, se puede cálcolar $W^{(i)}$ y $W^{(i2)}$ cuys magnitud se mejora lierativamente . Alora bien, resulta, al menoa

en forma aptrente, que emano σ 33 es a magnitud, considera--ble la hipótesis 42 es adocyada.

El modelo lo descinzamiento, cueda enteners formulado como ajuel en que se despeccia la influencia del esfuerzo normal I 33 en las reformisiones C 41 y C 22 de la superficie.

$$\overline{W} = W + Z W^{(1)} + Z^{2} W^{(2)}$$

$$U_{m} = U_{m}^{(0)} + Z U_{m}^{(1)} + Z^{2} U_{m}^{(2)} + Z^{3} U_{m}^{(3)}$$
3.47

expresado también en la cousción 26. Ul modelo guede suponerse formado de un crupo de desplazamientos que corresponden a la hipótesis de Kirchnoff (o de las fibras planas y normales a la superficie media) y otro grupo que constituye una corrección. -En estas condiciones se puede escribir

y entonces

 $U_{\infty}^{(i)} = U_{\infty}^{(i)} + U_{\infty}^{(i)}$ $\overline{U}_{\infty}^{(k)} = U_{\infty}^{(0)} + Z U_{\infty}^{(i)}$ W = W3.49

corresponden al modelo de Kirchhoff, cuando

 $\mathcal{U}_{\infty}^{(1)} = -\mathcal{J}_{\infty} + \mathcal{U}_{\infty}^{''}$

además,

$$\mathcal{U}_{\infty}^{(0)\mu} = \frac{P_{\text{res}}}{\sigma \varepsilon_{\infty}}$$

3.50

resultando entene s que la corrección se expresa.

 $\mathcal{U}_{m}^{(c)} = -\mathcal{Z} \, \mathcal{U}_{m}^{(i)\,ii} + \mathcal{Z}^{2} \, \mathcal{U}_{m}^{(2)} + \mathcal{Z}^{3} \, \mathcal{U}_{m}^{(3)}$

74

$$W^{(*)} = \mathbb{Z}W^{(*)} + \mathbb{Z}^*W^{(*)}$$
en el incise anterior, factor academáns las reluciones jue ligan
$$U_{\infty}^{(*)} = \mathbb{Z}W^{(*)} + \mathbb{Z}^*W^{(*)}$$

$$W^{(*)} = \mathbb{Z}W^{(*)} + \mathbb{Z}^*W^{(*)}$$

•

· · · ·

pero en lo que sigue se supondrá por simplicidad,

$$W^{(1)} = W^{(2)} = 0$$
 3.52

Mediante esta simplificación y después de considerar el --grupo de ecuaciones 40, es posible escribir el modelo en su for-ma final como:

$$W = W$$

$$\mathcal{U}_{u} = \mathcal{U}_{u}^{(0)} - \mathcal{Z}_{u}^{2} - \mathcal{Z}_{u}^{2}$$

quedando entonces el modelo de corrección en la forma,

$$U_{m}^{(c)} = -\frac{\chi}{2} \frac{\gamma_{,m}}{\alpha_{m}} - \frac{\chi^{2}}{2R_{m}} \frac{\gamma_{,m}}{\alpha_{m}} + \frac{\chi^{3}}{2R_{m}} \frac{\gamma_{,m}}{\alpha_{m}} + \frac{\chi^{3}}{2R_{m}} \frac{\gamma_{,m}}{\alpha_{m}} + \frac{\chi^{2}}{2R_{m}} \frac{\gamma_{,m}}{\alpha_{m}} = -\frac{\chi^{2}}{2R_{m}} \frac{\gamma_{,m}}{\alpha_{m}} = -\frac{\chi^{2}}{2R$$

el termino subrayado corresponde a la rotación de las fibras nor males, debido a la existencia del esfuerzo cortante, y su variación es parabólica a travez del espesor, sin cancelarse en las caras extremas. Esto se comprueba al considerar la rotación ω_{is} expresada en la cunción 38, ron la coercien 60 estacor

$$\omega_{i3} = -\frac{\psi_i}{\sigma c_i} \left[1 - \beta^2 \right]$$

75



3.55

$$(\omega_{23} = -\frac{y_{2}}{\alpha_{2}} \left[1 - \beta^{2} \right]$$

en que se cumplen las condiciones de frontera relativas a los -esfuerzos contanues en las caras extremas. uns defermaciones que se expresan como en la ecuación ----17, auguieren las signientes formas explicitas de acureão con el grupo de ecuaciones 28,

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \frac{1}{\infty_{1}} \left(\frac{W_{11}}{\omega_{1}} + \frac{U_{1}}{R_{1}} + \frac{U_{2}}{R_{12}} \right)_{1} + l_{12} \frac{W_{2}}{\omega_{22}} \\ C^{(1)} &= -\frac{1}{\infty_{1}} \left(\frac{\Psi_{1}}{2\omega_{1}R_{1}} \right)_{1} - l_{12} \left(\frac{\Psi_{2}}{2\omega_{2}R_{2}} \right) \\ C^{(1)} &= \frac{1}{\infty_{15}} \frac{4}{t^{2}} \left(-\frac{\Psi_{1}}{\omega_{1}} \right)_{1} + l_{12} \frac{4}{3t^{2}} \left(\frac{\Psi_{2}}{\omega_{2}} \right) \\ C^{(1)} &= \frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{W_{12}}{\omega_{2}} + \frac{U_{1}}{R_{2}} + \frac{U_{1}}{R_{12}} \right)_{2} + l_{12} \frac{W_{1}}{\omega_{1}} \\ C^{(1)} &= -\frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{\Psi_{2}}{2R_{2}\omega_{2}} \right)_{12} - l_{21} \left(\frac{\Psi_{2}}{2\omega_{2}R_{2}} \right) \\ C^{(1)}_{2} &= -\frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{\Psi_{2}}{2R_{2}\omega_{2}} \right)_{12} - l_{21} \left(\frac{\Psi_{2}}{2\omega_{2}R_{2}} \right) \\ C^{(1)}_{2} &= -\frac{1}{3t^{2}} \left[\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{\Psi_{1}}{\omega_{1}} \right)_{1} + l_{12} \frac{\Psi_{2}}{\omega_{2}} \right] \end{aligned}$$

y andle amente,

$$C_{12}^{(1)} = \frac{1}{\alpha c_1} \left(\frac{W_{12}}{c c_2} + \frac{U_2}{R_1} + \frac{U_1}{R_{12}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{W_{11}}{\alpha c_1} \right)$$

$$C_{21}^{(1)} = \frac{1}{\alpha c_2} \left(\frac{W_{11}}{\alpha c_1} + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_{12}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{W_{12}}{c c_2} \right)$$

$$C_{21}^{(1)} = \frac{1}{\alpha c_2} \left(\frac{W_{12}}{\alpha c_1} + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_{12}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{W_{12}}{c c_2} \right)$$

76





the second second

3.58

Las deformaciones correspondientes al término de orden cero son aquellas que aparecen en el apéndice A-5 (ecs. A-5.40).

Para la deducción de las ecuaciones de equilibrio, se ---usará el principio de los desplazamientos virtuales, la ecuación correspondiente se escribe

$$\begin{split} \delta & v = \iint \left\{ \iint_{V} (c_{1} \, \overline{U}_{1} \, \delta \, e_{1} + c_{2} \, \overline{U}_{2} \, \delta \, e_{2} + c_{1} \, \overline{U}_{12} \, \delta \, e_{12} + c_{2} \, \overline{U}_{21} \, \delta \, e_{21} + c_{1} \, \overline{U}_{21} \, \delta (\delta_{1} + \omega_{31}) \right\} \\ & + c_{2} \, \overline{U}_{23} \left(\delta_{2}^{*} + \omega_{31} \right) dx \right\} h_{\infty, \infty_{2}} \, d\mathcal{B}_{1} \, d\mathcal{B}_{2} + \\ & + \iint_{S} \left\{ X_{1} \, \mathcal{U}_{1}^{(0)} + X_{2} \, \mathcal{U}_{2}^{(0)} + \mathcal{Z} \, W \right\} \omega_{1} \, \omega_{2} \, d\mathcal{B}_{1} \, d\mathcal{B}_{2} = 0 \end{split}$$

De acuerdo con la ley de Hooke, es posible establecer, que

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c} B_{1}, B_{2}, \Xi \end{array} \right) = E\left(\begin{array}{c} C_{1}^{P} + \overline{\mathcal{V}} \\ C_{2}^{P} \end{array} \right) \\
 & \left(\begin{array}{c} B_{1}, B_{2}, \Xi \end{array} \right) = G \left(\begin{array}{c} C_{12}^{P} \\ C_{12} \end{array} \right) \\
 & \left(\begin{array}{c} B_{1}, B_{2}, \Xi \end{array} \right) = G \left(\begin{array}{c} \omega_{31} \end{array} \right) \\
 & \left(\begin{array}{c} B_{1}, B_{2}, \Xi \end{array} \right) = G \left(\begin{array}{c} \omega_{31} \end{array} \right) \\
 \end{array}
\end{aligned}$$

y tomando en cuenta la definición 27 del tensor de formación en_ la superficie paralela a la media, se puede escribir la ecuación 59 en la forma

$$\delta V = E \int \left\{ \int \left[(e_1 + \frac{c_1 v}{c_2} e_2) \delta e_1 + \dots + \frac{1}{2(1+v)} c_2 w_{13} \delta w_{13} \right] h dx \right\} = c_1 \omega_1 dA_1 dA_2 + 3.61$$

77

+ $\iint \{X_1U_1 + X_2U_2 + ZW\} \ll dB_1 dB_2 = 0$

Con objeto je a reviar los desarrollos, se supontran por ahora despreciables las cantidades l_{12} y l_{21} o sea, las curvaturas en la superficie, además de suponer también despréciables -las cantidades $\frac{U_1}{R_1}$, $\frac{U_2}{R_2}$, $\frac{U_3}{R_3}$. Con esta - suposición, se puede escribir, por ejemplo

$$Se_{1} = \frac{\delta W_{1,1}^{(0)}}{\alpha_{1}} - k_{1} \delta W + Z \frac{1}{\alpha_{2}} \left(\frac{\delta W_{1}}{\alpha_{2}} \right)_{1} - \frac{Z^{2}}{\alpha_{1}} \left(\frac{\Psi_{1}}{2\alpha_{2}R_{1}} \right)_{1} + \frac{4Z^{2}}{3\alpha_{1}t^{2}} \left(\frac{\Psi_{1}}{\alpha_{2}} \right)_{1} + \frac{3}{3\alpha_{1}t^{2}} \left(\frac{\Psi_{1}}{\alpha_{2}} \right)_{1}$$

como resulta de la sustitución de las ecs 56, 57 y 58 en la ec_ 27.

Para ser concentes con esa superición, el término subra yado en la ec 62 debe jesaparecer.

En lo que sigue se habran de deducir las ecuaciones de --equilibrio para el caso en que el esposor es variable, suponiendo que puede escribirse

$$t = t_0(1 + \gamma_{-}(B_1, B_2))$$
 3.63

y que la coordenala 😤 es también expresable en la forma

$$Z = Z_0 (1 + \chi(B_1, B_1))$$
 364

en que to es el espesor de una cierta sección (que puede ser por ejemplo la de mínimo espesor) y en sea sección, las superficies_ paralelas conductos distan X, de la superficie menia. For ser

78

el perarde variable, las superficies extremat del capcaron no son rigurosculte pardelles a la media, sin entrego superiodo que la functés $Z_{n}(B_{n}, p_{2})$ se tra que su ieravalo neganta es des-preciable comparda con un relacionvaturas, se puede aceptar.

and the second second

.

que las superficies son paralelas localmente . Así las cantida des C, y C₂, que caracterizan el cambio de longitud de los coeficientes metrices en las superficies paralelas, siguen siendo validas (ver apéndice A-2). Esto es equivalente a suponer que el cambio de espesor al pasar de un punto a otro vecino, es muy pequeño y es aceptable en il tipo de cascarones que se utilizan en la ingeniería.

La cantidad h que caracteriza el cambio del tamaño del area al pasar de la superficie media a otra que dista \varkappa de ella, se escribe aquí como en el apéndice A-2,

$$h = 1 + \mathbb{Z}M + \mathbb{Z}^{2}K$$

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{1}}\right) = \frac{1}{2}\left(k_{1} + k_{2}\right)$$

en que

$$K = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_{12}^2} = k_1 k_2 - k_{12}^2$$

Utilizando ahora las variaciones de las deformaciones cx--presadas en forma similar a la de , mostrada en la ec 62, y ---

79

3.65

después de agrupar las variaciones con respecto a las variables. \mathcal{U}_{i} , \mathcal{U}_{i} , \mathcal{W}_{i} , \mathcal{V}_{i} be deduce de la co 59,

$$-\int \left\{ \int \left\{ \frac{1}{\infty} \left(C, G, h \right)_{1} + \frac{1}{\infty} \left(C_{2} G_{12} h \right)_{2} \right\} \delta U_{1}^{(n)} \approx \infty, d, B, d, B_{2} \right\} dx = \chi_{1}$$

$$-\int \left\{ \iint \left\{ \frac{1}{\alpha c_1} (c_1 \sigma_{12} h)_{j_1} + \frac{1}{\alpha c_2} (c_2 \sigma_{2} h)_{j_2} \right\} \delta u_{\lambda}^{(o)} c_1 \sigma_{2} dA dA_{\lambda} dA_{\lambda} \right\} dx = X_2$$

Las condiciones de frontera correspondientes a cada una de estas ecuaciones, se deducen con forma análoga, de la consideración apropiada de las siguientes integrales de linea

$$\int \left\{ \phi(c, v, h + c_2 v_2 h) \delta u^{\circ} \right\} dx = 0$$

 $\int \left\{ \phi \left(c_2 \nabla_2 h + c_i \nabla_{i_2} h \right) \delta u_z^{\circ} \right] dz = 0$

$$\begin{split} &\int \left[\oint \left[(\Xi c_1 \nabla_i h \delta \frac{W_1}{\omega c_1} + \Xi c_2 \nabla_2 h \delta \frac{W_2}{\omega c_2} + \right. \\ &- \left[\frac{1}{|\omega_1|} (\Xi c_1 \nabla_i h)_{,1} + \frac{1}{|\omega_2|} (\Xi c_2 \nabla_2 h)_{,2} \right] \delta W \\ &+ (c_1 h \nabla_{i_2} \Xi) \delta \frac{W_2}{\omega c_1} + (c_2 h \nabla_{21} \Xi) \delta \frac{W_1}{\omega c_1} \\ &- \left[\frac{1}{|\omega_2|} (c_2 h \nabla_{21} \Xi)_{,2} + \frac{1}{|\omega_1|} (c_1 h \nabla_{i_2} \Xi)_{,1} \right] \delta W \\ &- c_1 \nabla_{i_2} h \delta W - c_2 \nabla_{22} h \delta W \right] d\Xi = 0 \\ &\int \left[\oint \left[\frac{4}{3} \frac{Z^3}{t^2} \left[c_1 \nabla_i h \delta \frac{\Psi_{,1}}{\omega c_1} + c_2 \nabla_2 h \delta \frac{\Psi_{,2}}{\omega c_2} + c_1 \nabla_{i_2} \Xi \delta \frac{\Psi_{,1}}{\omega c_2} + c_2 \nabla_{21} \Xi \delta \frac{\Psi_{,1}}{\omega c_1} \right] \\ &- \left[+ \frac{4}{3\omega c_1} \left(\frac{Z^3}{t^2} c_1 \nabla_i h \right)_{,1} + \frac{4}{3\omega c_2} \left(\frac{Z^3}{t^2} c_2 \nabla_2 h \right)_{,2} \\ &+ \frac{4}{3\omega c_1} \left(\frac{Z^3}{t^2} c_1 h \nabla_{i_2} \Xi \right)_{,1} + \frac{4}{3\omega c_2} \left(\frac{Z^3}{t^2} (c_2 h \nabla_{21} \Xi)_{,2} \\ &+ \frac{4}{3\omega c_2} \left(c_2 h \nabla_{21} \frac{Z^3}{t^2} \right)_{,2} + \frac{4}{3\omega c_1} \left(c_1 h \nabla_{i_2} \frac{Z^3}{t^2} \right)_{,1} \\ &+ \left[1 - \frac{4Z^2}{t^2} \right] \left(c_1 \nabla_{i_3} h + c_2 \nabla_{23} h \right] \delta \Psi \right] dZ \right] d\Xi = 0 \end{aligned}$$

 A_{G} rupando los términos que corresponden a la ec. 27 y que se han presentado antes, se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{i} &= \frac{\mathcal{U}_{i,i}}{\infty_{i}} + k_{i}W + \frac{z}{\infty_{i}}\left(\frac{W_{i}}{\infty_{i}}\right)_{i} + \frac{4z^{3}}{3t^{2}\infty_{i}}\left(\frac{\psi_{i}}{\infty_{i}}\right)_{i} \\ \mathbf{e}_{2} &= \frac{\mathcal{U}_{i,2}^{\circ}}{\infty_{2}} + k_{2}W + \frac{z}{\infty_{2}}\left(\frac{W_{i2}}{\infty_{2}}\right)_{i2} + \frac{4z^{3}}{3t^{2}\infty_{2}}\left(\frac{\psi_{i2}}{\infty_{2}}\right)_{i2} \\ \mathbf{e}_{i2} &= \frac{1}{\infty_{i}}\left(\mathcal{U}_{2j}^{\circ}\right) + k_{i2}W + \frac{z}{\infty_{i}}\left(\frac{W_{i2}}{\infty_{2}}\right)_{i} + \frac{4z^{3}}{3t^{2}\infty_{i}}\left(\frac{\psi_{i2}}{\infty_{2}}\right)_{i} \\ \mathbf{e}_{2i} &= \frac{1}{\infty_{2}}\left(\mathcal{U}_{i,2}^{\circ}\right) + k_{i2}W + \frac{z}{\infty_{i}}\left(\frac{W_{i2}}{\infty_{i}}\right)_{i} + \frac{4z^{3}}{3t^{2}\infty_{i}}\left(\frac{\psi_{i2}}{\infty_{2}}\right)_{i} \\ \mathbf{e}_{2i} &= \frac{1}{\infty_{2}}\left(\mathcal{U}_{i,2}^{\circ}\right) + k_{i2}W + \frac{z}{\infty_{2}}\left(\frac{W_{i}}{\infty_{i}}\right)_{i} + \frac{4z^{4}}{3t^{2}\infty_{2}}\left(\frac{\psi_{i}}{\infty_{i}}\right)_{i} \\ \mathbf{e}_{2i} &= -\frac{\psi_{i2}}{\infty_{2}}\left(1 - \frac{4z^{2}}{t^{2}}\right) \\ \mathbf{e}_{13} &= -\frac{\psi_{i2}}{\infty_{2}}\left[1 - \frac{4z^{2}}{t^{2}}\right] \end{aligned}$$

1.8

5.68

de esta manera, es posible deducir el sistema de ecuaciones di-ferenciales parciales equilibrio para los cascarones gruesos no_ rebajados. Sustituyendo las ecs 68 en las ecs 66, se deduce.

82

$$\frac{E}{1-p_{2}}\left\{\frac{1}{\alpha_{i}}\left[\left(\frac{1}{t}+\frac{t^{3}}{i_{2}}K\right)\left(\frac{u_{i,i}^{*}}{\infty_{i}}+k_{i}W\right)\right]_{i}+\frac{1}{\alpha_{i}}\left[\left(\frac{t^{3}}{12}M\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{W_{i}}{\infty_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{\alpha_{i}}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}M\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i}}{\infty_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{\alpha_{i}}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}M\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i}}{\infty_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{\alpha_{i}}\left[\left(t+\frac{t^{3}}{i_{2}}MD-\frac{t^{8}}{80}K^{2}\right)\left(\frac{u_{i,i}^{*}}{\alpha_{i}}+k_{2}W\right)\right]_{i},+\frac{3.69}{4}\right]$$

$$+\left[\left(\frac{t^{3}}{12}(M+D)-\frac{t^{8}}{80}K(M-D)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{W_{i}}{\infty_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}(M+D)-\frac{t^{6}}{856}K(M+D)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\infty_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}(M+D)-\frac{t^{6}}{856}K(M+D)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\infty_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{t^{6}}{856}K(M+D)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{t^{6}}{856}K(M+D)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{t^{6}}{856}K(M+D)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{t^{6}}{856}K(M+D)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{t^{6}}{856}K(M+D)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{t^{6}}{856}\left(M+D\right)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{t^{6}}{856}\left(M+D\right)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{t^{6}}{856}\left(M+D\right)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{t^{6}}{856}\left(M+D\right)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{t^{6}}{856}\left(M+D\right)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right]_{i},+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^{3}}{60}\left(M+D\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{H}{60}\left(M+D\right)\right)\frac{1}{\alpha_{i}}\left(\frac{\Psi_{i,i}}{\alpha_{i}}\right)_{i}\right)_{i},+\frac{1}{2}\left(\frac{H}{60}\left(M+D\right)\frac{1}{2}\left(\frac{H}{60}\left(M+D\right)\right)\frac{1}{2}\left(\frac{H}{60}\left(M+D\right)\right)\frac{1}{2}\left(\frac{H}{60}\left(M+D\right)\right)\frac{1}{2}\left(\frac{H}{60}\left(M+D\right)\frac{1}{2}\left(\frac{H}{60}\left(M+D\right)\right)\frac{1}{2}\left(\frac{H}{60}\left(M+D\right)\frac{1}{2}\left(M+D\right)\frac{1}{2}\left(\frac{H}{60}\left(M+D\right)\frac{1}{2}\left(\frac{H}{60}\left(M+D\right)\frac{1}{2}\left(M+D\right)\frac{1}{2}\left(M+D\right)\frac{1}{2}\left(M+D\right)\frac{1}{$$

 $+\left[\frac{t^{*}}{12}M\frac{1}{\alpha c_{s}}\left(\frac{W_{-1}}{\alpha c_{1}}\right)_{,2}\right]_{,2}+\left[\frac{t^{*}}{60}M\frac{1}{\alpha c_{2}}\left(\frac{\psi_{-1}}{\alpha c_{1}}\right)_{,2}\right]_{,2}=X_{1}$

y analogamence,

$$\frac{E}{1-\psi^{2}} \left\{ \frac{1}{\infty_{2}} \left[\left(\frac{1}{1+\frac{1}{12}} K \right) \left(\frac{U_{2,2}^{2}}{\infty_{2}} + k_{2} W \right) \right]_{,2} + \frac{1}{1+\psi^{2}} \left[\left(\frac{1}{1+2} K \right) \frac{1}{1+\psi^{2}} \left(\frac{W_{,2}}{\infty_{2}} \right)_{,2} \right]_{,2} + \frac{1}{1+\psi^{2}} \left[\left(\frac{1}{1+2} K \right) \frac{1}{1+\psi^{2}} \left(\frac{W_{,2}}{\infty_{2}} \right)_{,2} \right]_{,2} \right] + \frac{1}{1+\psi^{2}} \left[\left(\frac{1}{1+\psi^{2}} K \right) \frac{1}{1+\psi^{2}} \left(\frac{W_{,2}}{1+\psi^{2}} \right)_{,2} \right]_{,2} \right] + \frac{E}{1+\psi^{2}} \left[\left(\frac{1}{1+\psi^{2}} K \right) \frac{1}{1+\psi^{2}} \left[\left(\frac{1}{1+\psi^{2}} K \right) \frac{1}{1+\psi^{2}} \left(\frac{W_{,1}}{1+\psi^{2}} \right)_{,1} \right]_{,2} \right] + \left[\left(\frac{1}{1+\psi^{2}} \left(M - D \right) - \frac{1}{1+\psi^{2}} K \left(M + D \right) \right) \frac{1}{1+\psi^{2}} \left(\frac{W_{,1}}{1+\psi^{2}} \right)_{,1} \right]_{,2} \right]$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{1+\psi^{2}} \left(M - D \right) - \frac{1}{1+\psi^{2}} K \left(M - D \right) \right) \frac{1}{1+\psi^{2}} \left(\frac{W_{,1}}{1+\psi^{2}} \right)_{,2} \right]$$

+ $\frac{G_1}{G_1} \left[(t + \frac{t^3}{12} k) (\frac{1}{G_1} (u_{2,1}^\circ) - k_{12} W) \right]_{,1}$

83

 $+ \left[\frac{t^{*}}{12} M \frac{1}{c_{1}} \left(\frac{W_{2}}{c_{2}} \right)_{,1} \right]_{,1} + \left[\frac{t^{*}}{60} M \frac{1}{c_{1}} \left(\frac{\psi_{2}}{c_{2}} \right)_{,2} \right]_{,1} \right]_{,1} = \chi_{2}$

$$\frac{E}{1-\tau D^{3}} \left\{ \frac{1}{\omega_{1}} \left[\frac{1}{\omega_{1}} \left(\left(-\frac{t^{3}}{12} M \right) \left(-\frac{U_{11}}{\omega_{1}} + k_{1} W \right) \right)_{11} + \frac{1}{\omega_{1}} \left(\left(-\frac{t^{3}}{12} + \frac{t^{3}}{60} K \right) \left(-\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{11}}{\omega_{1}} \right)_{11} \right) \right)_{11} + \frac{1}{\omega_{1}} \left(\left(-\frac{t^{3}}{12} + \frac{t^{3}}{60} K \right) \left(-\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{11}}{\omega_{1}} \right)_{11} \right) \right)_{11} + \frac{1}{\omega_{1}} \left(\left(-\frac{t^{3}}{60} + \frac{t^{3}}{556} K \right) \left(-\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{11}}{\omega_{1}} \right)_{11} \right) \right)_{11} + \frac{1}{\omega_{1}} \left(\left(-\frac{t^{3}}{60} + \frac{t^{3}}{556} K \right) \left(-\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{11}}{\omega_{1}} \right)_{11} \right) \right)_{11} + \frac{1}{\omega_{1}} \left(\left(-\frac{t^{3}}{60} + \frac{t^{3}}{556} K \right) \left(-\frac{1}{\omega_{1}} \left(-\frac{W_{11}}{\omega_{1}} \right)_{11} \right) \right)_{11} + \frac{1}{(\omega_{11} + \frac{t^{3}}{2} - k_{12} \left(-\frac{W_{12}}{\omega_{1}} \right)_{11} + \frac{1}{(\omega_{11} + \frac{t^{3}}{2} - k_{12} \right) W \right) + \frac{t^{3}}{12} M \left[k_{11} \frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{11}}{\omega_{1}} \right)_{11} + k_{21} \frac{1}{\omega_{2}} \left(-\frac{W_{22}}{\omega_{2}} \right)_{11} - k_{12} \frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{22}}{\omega_{2}} \right)_{11} \right) (1 - \mathcal{V}) \right]$$

$$+ \frac{t^{3}}{60} M \left[k_{11} \frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{11}}{\omega_{1}} \right)_{11} + k_{21} \frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{W_{22}}{\omega_{2}} \right)_{11} - k_{12} \frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{22}}{\omega_{2}} \right)_{11} \right) (1 - \mathcal{V}) \right]$$

$$+ \mathcal{V} \left[\left(\frac{t^{3}}{12} \right) (M + D) + \frac{t^{3}}{60} K (M + D) \right] \left[k_{11} \frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{W_{22}}{\omega_{2}} \right)_{12} \right] + \frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{t^{3}}{60} \left(M + D \right) - \frac{t^{3}}{556} K (M - D) \right) \left(k_{11} \frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{W_{22}}{\omega_{2}} \right)_{12} \right)$$

.

÷ .

.

84

+
$$\frac{1}{\alpha c_2} \left(\left(\frac{t^3}{12} + \frac{t^5}{80} K \right) \left(\frac{1}{\alpha c_2} \left(\frac{W_{,2}}{\alpha c_1} \right)_{,2} \right) \right)_{,2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{t^3}{60} + \frac{t^5}{336} K \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{3} \right)_{,2} \right)_{,2} \right)_{,2}$$

ı

$$+ \vartheta \left[\frac{t^{*}}{12} (M-D) + \frac{t^{*}}{80} K (M-D) \right] \left[k_{1} \frac{1}{6c_{1}} \left(\frac{W_{1}}{6c_{1}} \right)_{1} \right] \\ + \vartheta \left(\frac{t^{*}}{60} (M-D) - \frac{t^{*}}{356} K (M+D) \left(k_{2} \frac{1}{6c_{1}} \left(\frac{\Psi_{1}}{6c_{1}} \right)_{1} \right) \right) \\ + \frac{1-\vartheta}{26c_{2}} \left[\frac{1}{6c_{2}} \left(\left(\frac{t^{*}}{12} \right) \left(\frac{1}{6c_{1}} \left(\frac{U_{2}}{2} \right)_{1} - k_{12} W \right) + \left(\frac{t^{*}}{12} + \frac{t^{*}}{80} K \right) \left(\frac{1}{6c_{1}} \left(\frac{W_{2}}{6c_{2}} \right)_{1} \right) \right)_{2} \right] \\ + \frac{1-\vartheta}{26c_{2}} \left[\frac{1}{60} + \frac{t^{*}}{336} K H \left(\frac{1}{6c_{1}} \left(\frac{\Psi_{2}}{4c_{2}} \right)_{1} \right) \right)_{2} \right]_{2} \\ + \frac{1}{6c_{2}} \left(\left(\frac{t^{*}}{60} + \frac{t^{*}}{336} K H \left(\frac{1}{6c_{2}} \left(\frac{\Psi_{2}}{4c_{2}} \right)_{1} \right) \right)_{2} \right]_{2} \\ + \frac{1-\vartheta}{26c_{2}} \left[\frac{1}{6c_{1}} \left(\left(\frac{t^{*}}{12} \right) \left(\frac{1}{6c_{2}} U_{1/2}^{*} - k_{12} W \right) + \left(\frac{t^{*}}{12} + \frac{t^{*}}{80} K \right) \left(\frac{1}{6c_{2}} \left(\frac{W_{1}}{6c_{1}} \right)_{2} \right) \right)_{1} \\ - \frac{1}{6c_{1}} \left(\left(\frac{t^{*}}{60} + \frac{t^{*}}{536} K \right) \left(\frac{1}{6c_{2}} \left(\frac{U_{1/2}}{c_{2}} \right)_{1} \right) \right)_{1} \right]$$



$$+\frac{1-v}{2\omega_{2}}\left[\frac{2}{3}t+\frac{t^{2}}{30}K\left(\frac{k_{2}}{\omega_{3}}\right)\right]_{2}=Z$$

•

y finalmente

$$\frac{F}{1-\bar{v}^{2}} \left\{ \frac{1}{\omega_{1}} \left[\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{t^{3}}{80} M(\frac{U_{1,1}}{\omega_{1}}) \right)_{,1} + \frac{1}{\omega_{1}} \left(\left(\frac{t^{3}}{80} + \frac{t^{3}}{448} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{1,1}}{\omega_{1}} \right)_{,1} \right) \right)_{,1} + \frac{1}{\omega_{1}} \left(\left(\frac{t^{5}}{448} + \frac{t^{3}}{2504} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{V_{1,1}}{\omega_{1}} \right)_{,1} \right) \right)_{,1} \right]_{,1} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{t^{5}}{60} M(\frac{U_{1,2}}{\omega_{2}})_{,2} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{t^{3}}{80} + \frac{t^{5}}{448} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{W_{1,2}}{\omega_{2}} \right)_{,2} \right) \right)_{,2} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{t^{5}}{80} + \frac{t^{7}}{448} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{W_{1,2}}{\omega_{2}} \right)_{,2} \right) \right)_{,2} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\left(\frac{t^{5}}{448} + \frac{t^{7}}{2504} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{V_{2,3}}{\omega_{2}} \right)_{,2} \right) \right)_{,2} \right]_{,2} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\left(\frac{t^{5}}{40} M(\frac{U_{2,2}}{\omega_{2}} \right)_{,2} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{t^{5}}{80} M(\frac{U_{2,2}}{\omega_{2}} \right)_{,2} \right) + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\left(\frac{t^{5}}{80} + \frac{t^{5}}{448} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{1,2}}{\omega_{2}} \right)_{,2} \right) + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\left(\frac{t^{5}}{80} + \frac{t^{5}}{448} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{1,1}}{\omega_{2}} \right)_{,1} \right) \right)_{,1} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\left(\frac{t^{5}}{80} + \frac{t^{5}}{448} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{W_{1,1}}{\omega_{2}} \right)_{,2} \right)_{,2} \right)_{,2} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\left(\frac{t^{5}}{80} + \frac{t^{5}}{448} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{1,2}}{\omega_{2}} \right)_{,1} \right) \right)_{,1} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\left(\frac{t^{5}}{80} + \frac{t^{5}}{448} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{2}} \left(\frac{W_{1,1}}{\omega_{2}} \right)_{,2} \right)_{,2} \right)_{,2} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\left(\frac{t^{5}}{80} + \frac{t^{5}}{448} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{1,2}}{\omega_{2}} \right)_{,1} \right) \right)_{,1} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\left(\frac{t^{5}}{80} + \frac{t^{5}}{448} K \right) \left(\frac{W_{1,1}}{\omega_{2}} \left(\frac{W_{1,1}}{\omega_{2}} \right)_{,2} \right)_{,2} \right)_{,2} + \frac{1}{\omega_{2}} \left(\left(\frac{t^{5}}{480} + \frac{t^{5}}{2504} K \right) \left(\frac{1}{\omega_{1}} \left(\frac{W_{2,2}}{\omega_{2}} \right)_{,1} \right) \right)_{,1} \right)_{,1}$$

86

¥

 $+\frac{1}{\alpha c_2} \left((\frac{t^5}{4B0} + \frac{t^7}{2304} K) (\frac{1}{\alpha c_2} (\frac{y_1}{\alpha c_1})_{1,2}) \right)_{1,2}$

.

.

. . .

$$\begin{aligned} &+ \frac{\vartheta}{cc_{1}} \left[\frac{1}{cc_{1}} \left(\left(\frac{t^{3}}{80} (M + D) - \frac{t^{3}}{4 + 6} K (M - D) \right) \left(\frac{1}{cc_{2}} (U_{x,x}^{*}) \right) \right)_{1} \right] \\ &+ \frac{1}{cc_{1}} \left(\left(\frac{t^{3}}{80} + \frac{t^{3}}{4 + 6} M D - \frac{t^{7}}{2304} K^{3} \right) \left(\frac{1}{cc_{1}} \left(\frac{M_{x}}{cc_{2}} \right)_{x} \right) \right)_{1} \right) \\ &+ \frac{1}{cc_{1}} \left(\left(\frac{t^{3}}{4 + 6} + \frac{t^{7}}{2504} M D - \frac{t^{7}}{1/224} K^{3} \right) \left(\frac{1}{cc_{2}} \left(\frac{M_{x}}{cc_{2}} \right)_{x} \right) \right)_{1} \right] \\ &+ \frac{1}{cc_{1}} \left(\left(\frac{t^{3}}{4 + 6} + \frac{t^{7}}{2504} M D - \frac{t^{7}}{1/224} K^{3} \right) \left(\frac{1}{cc_{2}} \left(\frac{M_{x}}{cc_{2}} \right)_{x} \right) \right)_{1} \right] \\ &+ \frac{1}{cc_{1}} \left(\left(\frac{t^{3}}{60} (M - D) - \frac{t^{3}}{4 + 6} K (M + D) \right) \left(\frac{1}{cc_{1}} (U_{1,1}^{0}) \right) \right)_{2} \right) \\ &+ \frac{1}{cc_{1}} \left(\left(\frac{t^{5}}{60} - \frac{t^{5}}{4 + 6} M D - \frac{t^{7}}{2504} K^{3} \right) \left(\frac{1}{cc_{1}} \left(\frac{M_{x}}{cc_{1}} \right)_{x} \right) \right) \right)_{x} \\ &+ \frac{1}{cc_{1}} \left(\left(\frac{t^{5}}{4 + 6} + \frac{t^{7}}{2504} M D - \frac{t^{7}}{21264} K^{3} \right) \left(\frac{1}{cc_{1}} \left(\frac{M_{x}}{cc_{1}} \right)_{x} \right) \right) \right)_{x} \\ &+ \frac{1}{cc_{1}} \left(\left(\frac{t^{5}}{4 + 6} + \frac{t^{7}}{2504} M D - \frac{t^{7}}{1/264} K^{3} \right) \left(\frac{1}{cc_{1}} \left(\frac{M_{x}}{cc_{1}} \right)_{x} \right) \right) \right)_{x} \\ &- \frac{3(1 - D)}{6} \left[\left(t + \frac{t^{3}}{12} K \right) - \left(\frac{t}{5} + \frac{t^{3}}{20} K \right) \right] X \end{aligned}$$

 $\left[\frac{1}{\alpha c_1}\left(\frac{\psi_{,1}}{\alpha c_1}\right)_{,1}+\frac{1}{\alpha c_2}\left(\frac{\psi_{,2}}{\alpha c_2}\right)_{,2}\right]=0$

and the second second



FIG 3.1

CAPITULO IV

TEORIA GENERAL DE LA DEFORMACION DE CASCARONES ELASTICOS GRUE-SOS DESARROLLADA MEDIANTE EL EMPLEO DE FUNCIONES ESPECIALES

4.0 Generalidades

Tal vez el trabajo más interesante sobre teoría de cascarones en los últimos cinco años, es el que ha desarrollado P. Cicala y que ha sido ampliamente divulgado (40, 41, 50, 60, 61). Esto es cierto al menos en lo que se refiere a la consideración del cascarón como un cuerpo tridimensional y sujeto a car gas estáticas que no inducen inestabilidad.

La idea fundamental del trabajo de Cicala es la de haber introducido las funciones de Legendre para expresar a manera de un desarrollo en serie todas las variables de la teoría de cascarones. Esta formulación conduce a un conjunto infinito de sistemas de ecuaciones diferenciales en el caso más general. En los casos mas usuales en la teoría de cascarones, el desarrollo en serie es convergente y basta considerar un número f<u>i</u> nito de términos.

En sus publicaciones mas recientes^(41, 61), Cicala ha modificado la forma de solución original que resultaba sumamente complicada cuando se pretendía aplicarla. Actualmente, Cicala ha tratado de considerar un grupo de soluciones aisladas que

poseen ciertas características en cuanto al orden de las magni

tudes principales y sus derivadas.

4.1 Resumen de la teoría de P. Cicala

Para introducir otra posibilidad en cuanto a las desarro-

lladas de Cicala y para ubicar los resultados que mas adelante se presentan, es necesario resumir en la notación utilizada en este trabajo, la teoría de Cicala.

a) Los desplazamientos en el cuerpo tridimensional, se expresan en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{i} &= \sum_{\substack{j=1\\j=1}^{\infty}}^{\infty} \mathcal{U}_{ij} P_{j}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathcal{U}_{2} &= \sum_{\substack{j=1\\j=1}^{\infty}}^{\infty} \mathcal{U}_{2j} P_{j}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathcal{W}_{3} &= \sum_{\substack{j=1\\j=1}^{\infty}}^{\infty} \mathcal{W}_{3j} P_{j}(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$
(4.1)

en que \mathcal{U}_{jj} , \mathcal{U}_{2j} , \mathcal{W}_{j} son funciones únicamente de las variables \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 de la superficie. P_j (\mathcal{K}_i) es el polinomio de Legen dre de orden en la variable adimensional.

b) Los esfuerzos se desarrollan en la forma

$$\frac{t}{c_2} C_{II} = \sum_{J=1}^{\infty} S_{IJ} P_J({s})$$

$$\frac{t}{c_1} C_{I2} = \sum_{J=1}^{\infty} S_{IJ} P_J({s})$$

$$\frac{t}{c_1} C_{I2} = \sum_{J=1}^{\infty} S_{IJ} P_J({s})$$

$$\frac{t}{c_2} V_{I2} = \sum_{J=1}^{\infty} S_{IJ} P_J({s})$$

$$\frac{t}{c_2} V_{I2} = \sum_{J=1}^{\infty} S_{IJ} P_J({s})$$

$$\frac{t}{c_2} V_{I3} = \sum_{J=1}^{\infty} S_{IJ} P_J({s})$$

$$\frac{t}{c_2} V_{I3} = \sum_{J=1}^{\infty} S_{JJ} P_J({s})$$

$$(4.2)$$

$$t c_{2} \overline{V_{13}} = \sum_{j=1}^{n} 5^{13} j P_{j}(\frac{4}{7})$$

$$t c_{j} c_{2} \overline{V_{23}} = \sum_{j=1}^{n} 5^{32} j P_{j}(\frac{4}{7})$$

$$t c_{j} \overline{V_{23}} = \sum_{j=1}^{n} 5^{n3} j P_{j}(\frac{4}{7})$$

en que t es el peralte, del cascarón, supuesto constante.

c) Las ecuaciones de equilibrio deducidas mediante el em

al a del principio de la la crassi da vistuales son:

$$S_{ij,1} + S_{2ij,2} + k_3(S_{ij} - S_{2j}) + k_1 S_{ij} + F_{ij} = \overline{S}_{3ij}$$

$$S_{i2j,1} + S_{2j,2} + k_3(S_{i2j} + S_{2ij}) + k_2 S_{ij} + F_{2j} = \overline{S}_{32j}$$

$$(4.3)$$

$$S_{i3j,1} + S_{23j,2} + k_3 S_{i3j} - k_1 S_{ij} - k_2 S_{2j} + F_{2j} = \overline{S}_{3j}$$

para $j = 1.2, - - n - - - \infty$.

En estas ecuaciones, se ha introducido la notación

$$\overline{S}_{31j} = (2j+1) \int_{-1}^{1} c_1 c_2 \, \sqrt{31} \, P_j \, d\xi \qquad (4.4)$$

y las cantidades F_{1j} , F_{2j} , F_{3j} , representan las coeficientes del desarrollo en serie de las acciones externas. La cantidad k_3 introducida en estas ecuaciones es la curvatura en la supe<u>r</u> ficie como se indica en el apéndice Al, solamente que Cicala introduce implícitamente la condición

$$P_{12} = P_{21} = P_3$$

que es válida unicamente en un cierto tipo de cascarones.

Tomando en cuenta que las deformaciones \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{W} , pueden expresarse en función de los desarrollos en serie correspondientes a los desplazamientos, en la forma

$$C_i e_i = \sum_{j=1}^{\infty} e_{ij} P_j$$

90

(4.5)

an an start de la companya de la com



en que como se deduce de la teoría de la deformación, (ver a-

péndice A5)

Sieij = (Uij), 1 + Liz Uzj + RiWj (4.6)
y expresiones análogas para $C_z \, \mathcal{C}_{zj}$ y $\mathcal{C}_j \, \mathcal{C}_z \, \omega$.

De la ley de Hooke es posible deducir mediante integración, la relación existente entre los coeficientes de los desarrollos en serie para los esfuerzos y para los desplazamientos. Cica la multiplica por $C_1 \subset_2 P_j \sigma_s^2$ las relaciones de la ley de Hooke e integra, con lo cual toma en cuenta el cambio de magni tud de las superficies paralelas a la superficie media.

Finalmente Cicala establece que la solución del problema conduce a resolver un sistema de 9 ecuaciones por cada término del desarrollo en serie de polinomios de Legendre. La solución por este método es naturalmente muy compleja. Sin embargo exis te un camino que puede simplificar considerablemente la forma de solución, para que esto sea posible es necesario definir los desplazamientos en forma algo distinta a como se especificaron en el grupo de ecuaciones l. Si establecida la relación (mediante la ley de Hooke), entre los coeficientes S y los \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 , \mathcal{W} para cada j se hace la sustitución de ellos en el sistema de tres ecuaciones de equilibrio 3, entonces se tiene un sistema de tres ecuaciones por cada término del desarrollo. La conveniencia fundamental radica en que dicho sistema de ecuaciones puede resolverse mediante diferencias finitas o con un

modelo físico. Si las condiciones de frontera se especifican en términos de desplazamiento, tasta con invertir la matriz de coeficientes del sistema de cuaciones obtenido con el modelo o mediante diferencias finitas para resolver completamente el problema. Cuando las condiciones de frontera son mixtas, el sistema de ecuaciones debe plantearse tres veces, una de las cuales cirve para obtener en la forma anterior los coeficientes de los desarrollos en serie para j 2.

El método más reciente que ha propuesto Cicala para la so lución del problema, es de interés puramente matemático; consiste en suponer que las derivadas de las cantidades que figuran como coeficientes en los desarrollos en serie poseen cuali dades que pueden expresarse en términos de un parámetro \mathcal{S} que multiplica al espesor t y se analiza su comportamiento cuando 5-0. Desde el punto de vista de aplicación esto es útil solamente en casos aislados ya que no todas las variables participantes pueden conservar un orden determinado de magnitud a través de la derivación. Así el análisis quedaría restringido a ciertos problemas de perturbaciones en tubos cilíndricos o en cascarones esféricos pero con la ventaja de que se habría fija do el orden de precisión de las aproximaciones usuales. El planteamiento anterior posee un inconveniente adicional según se desprende de la referencia 61. El inconveniente radica en que así pueden tratarse solamente aquellos problemas en los que las condiciones de frontera son estáticas, es decir cuando se prescriben las fuerzas, porque los problemas mixtos son de mucha mayor complejidad. La clección de Jicula en cuanto a las funciones que van a representar el estado interno de esfuerzos es realmente acertada.

92

4.2 Consideración del equilibrio neliante porinomios de Le-

En lo que ligue le procenta una manera de solución que pur de resultar adecuada. Los politionios de Legendre tienen la propiedad de ser un conjunto completo de funcienes ortogonales.

(1) The second s Second s Second s Second s Second se

• •

93

diendo l y χ los des primeros polícitados de Legendre, la condición de ortegonalidad significa fisicarente que los polinomios de orden 2 y mayor de 2, van a introducir resoltantes de Anorma y monente que van a ser nulas. Esta particularidad de por of isorefuee la ventaja de que el problema puede convertir se en uno le equilibrio en que las incôgnitas se refieren a la coperficie y con las fuerzas y/o los comentos. Cuando se siut el intento le collectón succrite como una veriante a les pro puestas por Cicala, lus incómitas son desplazamientos, en vir tud de que partiendo de defermaciones que sumplem las condicio nes de compaticilidad, mediante la loy de clasticidad lineal, luo couaciones de equilibrio suministran el sistema de ecuacio nes que permite obtener los cueficientes del desarrollo en serie de los desplazamientos. En la teoría de la elasticidad⁽²⁰, este es uno de los carden para la solución de problemas. El otro camino⁽²⁰, 28) consiste en emplear una función que cum ple con las condiciones de equilibrio de manera que la solución del problemo se obtiene quando la función o funciones que satifiacen el equilibrio cumple tarbién las condiciones de com patibilidad. El primer planteamiento corresponde a la formula ción matricial de problemas en estructuras por el método de las

rigideces y en teoría de cascarones cilíndricos a las ecuaciones de Flügge⁽²⁵⁾ ó a las de Timoshenko⁽¹⁷⁾. El segunio planteatiento tiene su símil en el cálculo matricial de estructuras mediante la matriz de flexibilidades, mientras que en la teoría de la elasticidad lo tiene en la función de Airy^(1,5,20). El tratamiento mixto queda representado por las ecuaciones de Viacoy^(26, 26, 346) en la teoría de cascarones y por el teorema de Reissner⁽⁴⁷⁾ en la teoría de la elasticidad. Esta dualidad de tratamientos, ha sido observada previamente por varios autores^(22,26,38,39,51) y muy profusamente analizada y aplicada por Argyris⁽²²⁾. Aquí se propone un tratamiento que conse<u>r</u> va las propiedades del segundo método de la teoría clásica de la elasticidad. Dado que la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre se traduce en que se van a agregar (para $j \ge 2$) cantidades que habrán de estar en equilibrio en la superficie media, ce proponen los siguientes desarrollos para los esfuerzos tomando en cuenta las definiciones de fuerzas y momentos del apéndice A4. Los desarrollos son:

$$h_{G}, \overline{\sigma_{11}} = \frac{T_{1}}{t} + \frac{6M_{1}}{t^{2}} + \sum_{i=2}^{n} S_{ii} P_{i}(\frac{8}{i})$$
 (4.7)

$$hc_{2} \ \overline{\Gamma_{22}} = \frac{T_{2}}{t} + \frac{6M_{2}}{t^{2}} + \frac{\beta}{z} \ S_{j2} \ P_{i}(\xi) \qquad (4.8)$$

$$h_{C_{1}} \overline{V_{12}} = \frac{\overline{T_{12}}}{t} + \frac{6M_{12}}{t^{2}} + \frac{2}{5} Siz Pi(\frac{2}{5})$$
 (4.9)

$$h C_2 \overline{V_{21}} = \frac{T_{21}}{t} + \frac{6M_{21}s}{t^2} + \frac{5}{i=2} Si 21 Pi(\frac{s}{t}) \quad (4.10)$$

on and los thruspan entrandor can activize which and and active

n que tos compthos cuerayados son estavicamente equivalentes

a coro, en cuanto a las resultantes en la superficie media. En las ecuaciones anteriores se observa que los desarrollos son distintos de los que ha presentado Cicala. Los desarrollos que corresponden a los esfuerzos. 613, 623 y 633, serán deducidos mediante el espleo de las ecuaciones de equilibrio en el elemento infinitesical (ver a_léndice A4). Las ecuaciones de equilibrio son:

ECUACION A [hdz(c, (i)], 1 + [d, c, (h Fiz)], 2 - dz, 1 h (Cz (22) + d1,2 (C1C2) (hV12) = - [hV31d1d2 C1],3 - hd1d2 [] ECUACION B [dzczh Fiz],1+[hd, Cz Fiz],2-d, zh(C, Fi)+ x7,1 (C, C2) (hViz) = - [hV32 C2 x1x2],3 - hx, x2 J32 ECUACION C $\frac{hc_i \sigma_{11}}{R_1} + \frac{hc_2 \overline{v_{12}}}{R_2} = -\frac{1}{d_1 d_2} \left\{ \left[\frac{d_2 h \overline{v_{31}}}{l_1 d_2} \right]_1 + \left[\frac{d_1 h \overline{v_{32}}}{l_1 d_2} \right]_2 - \left(\frac{h \overline{v_{33}}}{l_1 d_2} \right)_3 \right\}$

Estas ecuaciones son distintas a las de Cicala, únicamente en que toman en cuenta que el volumen a una distancia z de la superficie media es h veces el de superficie media y en cuanto a otros detalles como la interpretación de $212 \neq 221$.

El procedimiento para despejar a las cantidades que contienen a $\sqrt{13}$, $\sqrt{23}$ y $\sqrt{33}$, consiste en integrar la ecuación diferencial (A) para $\sqrt{31}$ y la ecuación (B) para $\sqrt{32}$. Cono cidas estas cantidades se puede dispejar 🗸 33 de la ecuación (C).

Para la ecuación (A), el segundo miembro se puede poner

$$- \left[(h \overline{V_{3I}}), 3 C_{I} + 2 (h \overline{V_{3I}}) \frac{1}{R_{I}} \right] \alpha_{I} \alpha_{2} \qquad (4.11)$$

95

que la ecuación diferenc

es
$$(h\overline{F_{3I}})_{,3} \neq 2(h\overline{F_{3I}}) \frac{1}{\overline{P_{i}c_{i}}} = \frac{1}{c_{i}} \left[\frac{l_{2I}}{hC_{2}} (hC_{2}\overline{F_{22}}) - \frac{1}{\sqrt{A_{2}}} \left\{ \frac{l_{2I}}{hC_{2}} (hC_{i}\overline{F_{i}}) \right]_{,i} - \left[\frac{l_{2I}}{A_{i}} (c_{i}h\overline{F_{i2}}) \right]_{,2} \right\} \right]$$
 (4.12)
que es de la forma

 $\frac{dy}{dx} + a_i(x)y = h(x)$

cuya solución (62) es: $y = \frac{1}{p} / \frac{bh q' h + \frac{c}{b}}{b}$ $p = e^{\int a_i(k) dk}$

con

La ccuación E puede ponerse en una forma análoga a la de la ecuación 4.12. La ecuación C es más sencilla de integrar una vez que se han integrado las ecuaciones A y B. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales pueden simplificarse mediante el empleo de la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Lengendre como se consigna en el apéndice A3, y mediante la intro ducción de las cantidades

Rii = 221 Siz - liz Sizi - 1 {[25i], + [x, Siz]2 }

Kiz = 412 Si - Lai Siz - 1 { [di Siz + [dz Sizi] } (4.13)

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales quedan entonces,

 $\mathcal{G}_{131} = \frac{t}{2} \frac{t}{c^2} \frac{1}{k_{11}} \frac{1}{2^{k_{11}}} \frac{1}{2^{k_{$ $V_{i32} = \frac{1}{2} \frac{1}{C_2^2} \frac{1}{K_{i2}} \left[\frac{1}{2^{i}i} \left(\frac{1}{2^{i}i} - \frac{1}{2^{i}i} \right) \frac{1}{2^{i}i^2} \left(\frac{1}{2^{i}i} - \frac{1}{2^{i}i} \right) \frac{1}{2^{i}i^2} \left(\frac{1}{2^{i}i^2} - \frac{1}{2^{i}i^2} \right) \frac{1}{2^{i}i^2} \frac{1}{2^{i}i^2} \left(\frac{1}{2^{i}i^2} - \frac{1}{2^{i}i^2} \right) \frac{1}{2^{i}i^2} \frac{1}{2^{i}i^2} \left(\frac{1}{2^{i}i^2} - \frac{1}{2^{i}i^2} \right) \frac{1}{2^{i}i^2} \frac{1}{2^{i}i^$

96

y la solución para $\sqrt{33}$ que es una integración ordinaria, se obtiene a partir del grupo de ecuación 4.14 y mediante la expresión de los polinomios de Legendre.

Tomando en cuenta la forma de los desarrollos en serie,

puede deducirse de la ocuación C,

 $\int 33 = -\frac{2}{2R_{1}} \left(\frac{2}{100} S_{11} \left(\frac{1}{2^{4}L_{1}} \right) \frac{d^{1-1}}{d^{1-1}} \left(\frac{1}{5^{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$ $-\frac{t}{2R_2}\left(\sum_{i=0}^n Si_2\left(\frac{t}{2^ii!}\right) \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^ii!} \left(\frac{y^2}{h^2}\right)^i\right)$ $-\frac{1}{\sqrt{142}}\sum_{i=2}^{2} \left(\frac{1}{2^{i}(1)}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{2}c^{2}} \frac{t}{k_{i}} \frac{1}{\sqrt{12}c^{2}} \left(\frac{1}{k_{i}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}c^{2}} \frac{1}{\sqrt{2}c^{2}} \left(\frac{1}{k_{i}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}c^{2}} \frac{1}{\sqrt{2}c^{2}} \left(\frac{1}{k_{i}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}c^{2}} \frac{1}{\sqrt{2}c^{2}} \left(\frac{1}{k_{i}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}c^{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}c^{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}c^{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}c^{2}}\right)$

De esta ecuación se puede ver que la suma se extiende des de O para ciertos términos y desde 2 para los otros. En estas condiciones, se pueden separar los dos primeros términos de la suma. Haciéndolo así y tomando en cuenta la forma de los dos primeros términos de las ecuaciones 4.7 y 4.8 se puede deducir,

$$T_{(0)} = -\left(\frac{T_{i}}{R_{i}} + \frac{T_{2}}{R_{2}}\right) h + C_{i}$$
(4.16)

y también,

$$\int_{0}^{\infty} 33I = -\frac{3}{2t} \frac{1}{h} \left(\frac{h^{2}}{h^{2}} \right) \left(\frac{M}{R} + \frac{M}{R^{2}} \right) + C_{2} \frac{h}{h} \qquad (4.17)$$

el factor λ en la ecuación 4.16 se debe a la integración de

97

la ecuación C, al contiderar el primer término de $\int 11 \text{ y} = \sqrt{22}$. El factor h en el primer término de la ecuación 4.17 resulta de la forma que tiene el segundo término de la expresión para $\int 11$ y $\int 22$, en tanto que $(h^2/)$ resulta de los dos primeros términos de la ecuación 4.15 para i = 1. Con las ecuaciones 4.16 y 4.17 van a satisfacerse las condiciones de front ra en las caras del cascarón, estas condiciones quedan establecidas por la última ecuación del grupo de ecuaciones AG.14 (ver apéndice A4). Se tiene entonces,

$$-\frac{T_{1}}{R_{1}} - \frac{T_{2}}{R_{2}} + C_{1} + C_{2} = \frac{\not p + q}{2}$$

$$+\frac{T_{1}}{R_{1}} + \frac{T_{2}}{R_{2}} + C_{1} + C_{2} = \frac{\not p - q}{2}$$
(4.18)

de donde se deduce

$$C_{I} = \frac{\cancel{p}}{2}$$

$$C_{Z} = \frac{\cancel{p}}{2} + \left(\frac{T_{I}}{R_{I}} + \frac{T_{Z}}{R_{Z}}\right)$$

$$(4.19)$$

quedando entonces,

$$\begin{aligned}
\overline{f_{(0)}} = -\left(\frac{T_{I}}{R_{I}} + \frac{T_{Z}}{R_{Z}} \right) + \frac{p}{2} \\
\overline{f_{(1)}} = -\frac{3}{2t} \left(\frac{p}{R_{I}} \right) + \frac{M_{I}}{R_{I}} + \frac{M_{Z}}{R_{Z}} + \left(\frac{q}{2} + \frac{T_{I}}{R_{I}} + \frac{T_{Z}}{R_{Z}}\right) + \left(\frac{q}{2} + \frac{T_{Z}}{R_{Z}}\right) + \left(\frac{q}{2} + \frac{T_$$

Sería conveniente tener una idea gráfica acerca de la forma que adquieren los términos del desarrollo en serie para los esfuer zos. En cuanto a los términos que forman los desarrollos en se rie de los esfuerzos $\sqrt{11}$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{12}$ y $\sqrt{21}$ la gráfica A3.2.

98

(4.21)

del apéndice A3 suministra esa idea. Para los esfuerzos trans

versales, considérese inicialmente i = 0, de los grupos de ecua

ciones 4.14 y 4.13, se puede deducir,

 $\overline{V}_{(0)}^{31} = 0$ $\overline{V}_{(0)}^{32} = 0$

en tanto que para i = 1,

 $\overline{(I_{I})^{3I}} = \frac{t}{4(R_{I}+Z)^{2}} \frac{K_{0}I(S^{2}-I)}{K_{0}I(S^{2}-I)}$

y sustituyendo el valor de $K_{(j)}$,/de la ecuación (4.13), se deduce

$$\overline{V(I)^{3/I}} = \frac{t}{4(R_{I}+2)^{2}} \begin{cases} \frac{P_{2I}}{E^{2}} \frac{6M_{2}}{E^{2}} - \frac{P_{12}}{E^{2}} \frac{6M_{2I}}{E^{2}} + \frac{1}{E^{2}} \\ \frac{1}{2} \left(\int_{X_{2}} \frac{6M_{I}}{E^{2}} - \int_{X_{1}} \frac{6M_{I}}{E^{2}} \int_{X_{2}} \frac{1}{E^{2}} \int_{X_{1}} \frac{1}{E^{2}} \int_{X_{2}} \frac{1}{E^{2}} \int_{X_{1}} \frac{1}{E^{2}} \int_{X_{2}} \frac{1}{E^{2}} \int_{X_{1}} \frac{1}{E^{2}} \int_{X_{2}} \frac{1}{E^{2}} \int_{X_{1}} \frac{1}{E^{2}}$$

factorizando $\frac{6}{\ell^2}$ y tomando en cuenta la ecuación de equilibrio A4.20 del apéndice A4, se puede escribir,

$$\overline{f_{(1)}}_{31} = \frac{3}{2t} \frac{\frac{b^2}{5-1}}{(c_i)^2} Q_i \qquad (4.22)$$

y en forma análoga

$$\int_{0}^{\infty} 32 = \frac{3}{2t} \frac{5-1}{(C_{2})^{2}} Q_{2}$$

1.2

De estas ecuaciones se desprende que las cantidades Ki_1 y ki_2 introducidas en las ecs. 4.13 para i ≥ 2 , constituyen fuerzas cortantes que se encuentran en equilibrio.

Los resultados que se han deducido en los grupos de ecuaciones 21 y 22 son consistentes como se deduce de la forma de las expresiones (7) y (8). El término de orden i = 0 representa las fuerzas en la superficie y corresponde al estado de mem

brana de manera que los esfuersos cortantes en las caras norma les a la superficie media son nulas, en tanto que no lo son los esfuersos normales 533 como los indica la primera ecuación del grupo de ecuaciones 20. Abora considérese el término i = 1; este término incluye solamente los momentos flexionantes y como se deduce de la ecuación 4.17 no aporta nada al esfuerso normal $\sqrt{33}$, en tanto que origina los esfuerzos cortantes $\sqrt{31}$ y $\sqrt{32}$ indicados en el grupo de ecuaciones 22. Como se ve esto es exactamente lo que ocurre en la teoría de vigas, de acuerdo con la hipótesis de sección plana que implican los dos primeros términos del desarrollo en serie de $\sqrt{11}$ y $\sqrt{22}$. Para i = 2, se puede deducir en forma análoga.

$$\widehat{G}_{(2)}^{31} = \frac{t}{4c_{1}^{2}} \frac{k_{(2)}}{5} \left(\frac{g}{5-1}\right) - \frac{t}{gR_{1}} \left(\frac{g^{2}}{5-1}\right)^{2} \int (4.23)$$

$$(4.23)$$

$$\frac{I_{(2)} 32}{4C_2^2} = \frac{t}{4C_2^2} \frac{K_{(2)}^2}{K_{(2)}^2} \frac{J_0(y^2)}{J_0(y^2-1)} - \frac{t}{SR_2} \left(\frac{y^2}{y^2-1}\right)^2 \frac{J_0^2}{J_0^2}$$

y para i = 3,

$$\begin{split} \widetilde{V_{(3)}}^{3} = \frac{t}{4C_{i}^{2}} \frac{k_{(3)}}{4} \left[\frac{f(k_{i}^{2})^{2}}{4} + \frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2}) - \frac{t}{8R_{i}}}{\frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{8R_{i}} + \frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2}) - \frac{t}{8R_{i}}}{\frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{8R_{i}} + \frac{t}{8} \frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{\frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{8R_{i}} + \frac{t}{8} \frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{\frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{\frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{8R_{i}} + \frac{t}{8} \frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{\frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{8R_{i}} + \frac{t}{8} \frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{\frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{8R_{i}} + \frac{t}{8} \frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{\frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{8R_{i}} + \frac{t}{8} \frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{\frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{\frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{8R_{i}} + \frac{t}{8} \frac{k_{i}^{2}(k_{i}^{2})^{2}}{\frac{k_{i}^{2}($$

con base en estos resultados pueden deducirse los valores correspondientes a (1,33, y) (2,33). Como se indicó antes, los términos subrayados son esfuerzos que se equilibran en todo el espesor del cascarón. Su influencia aparece únicamente en las deformaciones que corresponten a las superficies pa-

ralelas a la media. Estas deformaciones, se distribuyen a través del espesor, en una forma similar a la distribución de esfuerzos.

4.3 DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DE UNA TEORIA DE CASCARONES CON POLINOMIOS DE LEGENDRE

Como se discute en el inciso 4.4 existen otros caminos posibles para la solución del problema de la teoría de cascarones con los cuales pueden emplearse polinomios de Legen-En lo que sigue, se analiza una posibilidad que condre. siste en el empleo del principio variacional de la energía complementaria máxima y el teorema de Gelfaud y Fomin⁽⁶⁹⁾ (ver apéndice A3). Del principio de la energía complementaria máxima se sabe⁽⁶⁵⁾ que cuando la energía complementaria adquiere un valor máximo(47), se satisfacen las condiciones de compatibilidad; en tanto que del teorema de Gelfaud y Fomin, se puede determinar el valor estacionario de un funcional sujeto a ciertas condiciones dadas en la forma de otro funcional. Esto último es similar al empleo de multiplicadores de Lagrange⁽²⁾, en problemas en que las condiciones adyacentes son discretas.

La energía complementaria, para los esfuerzos paralelos a la superficie media puede escribirse

 $V^{*} = \iint \left\{ \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2E} \int_{-1}^{1} (c_{1}h v_{1})^{2} + (c_{2}h v_{2})^{2} \right) \right\}$ (4.25) - - - [(c,h Vi) (cihv2)] + - (C, hV12) + (GhF21) - 05 / 210/3, 22 dB2

102

Al hacer máximo este funcional quedarían satisfechas las condiciones de compatibilidad en la superficie. Además conocidos los valores de los esfuerzos que figuran en ese funcional, pueden conocerse los esfuerzos ∇_{13} , ∇_{23} y ∇_{33} y así cuando se conocen ∇_1 , ∇_2 , ∇_{12} y ∇_{21} quedan satisfechas las ecuaciones de equilibrio en el elemento infinitamente pequeño. Ahora los coeficientes de los desarrollos en serie, satisfacen las condiciones del equilibrio general, en virtud de que introducen resultantes de fuerza y momento que son nulas. Esto es así debido a la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre y se cumple excepto para los dos primeros términos del desarrollo en serie.

De lo anterior se infiere que se cumplen las condiciones de compatibilidad en la superficie y las de equilibrio en el elemento infinitamente pequeño. Es necesario entonces garantizar el equilibrio general de los elementos mecánicos o sea de los primeros coeficientes del desarrollo en serie de los esfuerzos. Esto se consigue, al introducir las ecuaciones de equilibrio como condiciones adyscentes⁽⁶⁹⁾ para el funcional

25, es tecir

 $V^{*} = \iint \left\{ \int \frac{1}{2E} \left[\frac{1}{2E} \left[(c_{1}h)^{2} + (c_{2}h)^{2} \right] - \frac{1}{2E} \int \frac{1}{2E} \left[(c_{1}h)^{2} + (c_{2}h)^{2} \right] - \frac{1}{2E} \int \frac{1}{2E} \left[(c_{1}h)^{2} + (c_{2}h)^{2} \right] \right] \right\}$ + = [(a, hviz)2 + (abviz)2]) + db (d, dz d/B, d/B2 + / / U, { (d2N1),1 - (d, N21),2 + B12 N12 - L21 N2 d1 d2 - d1 d2 + RI ((dz Mi)) + (d, M21) 2 - P21 M2 - LIZ MIZ) / didz + U2 (d, N2), 2 + l21 N21 + (d2 N12), 1 - L12 N, d, d2 + l21 N21 + d, d2 + k2 ((d2 M12),1 + (d1 M2),2 + liz M1 + B1, M12) d1 d2 + W { [(d2M21)] + (d1M2)] - d1 liz M1 + x, li M1], 2 + d2 d2 d2 d2 + [(X2MI),1 + (X,M12),2 - Z2 l21 M2 + Z2 L2 M2,] X1 X1 X1 + (k2 N2 + k, N1 - Zq) x, x2 / dB, dB2 (4.26)

103

Los factores de \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 , \mathcal{W} , son las ecuaciones de equilibrio en la superficie, deducidas después de despejar

de las ecuaciones A4.19 y A4.20, las cantidades φ_1 y φ_2

para sustituirlas en las ecuaciones A4.16, A4.17 y A4.18.

En las ecuaciones de equilibrio no aparecen los térmi-

nos de carga para cumplir con la condición del teorema de Gelfaud y Fomin. Estas cargas son introducidas como condición de frontera en un paso posterior. La carga normal es

$$\overline{Z} = \not{P} \tag{4.27}$$

Por simplicidad se supone en seguida, que las ecuaciones 7, 8, 9 y 10, pueden escribirse en la forma

$$hC_{1} \overline{U_{11}} = \frac{N_{1}}{t} + \frac{6M_{1}}{t^{2}} \frac{6}{5} + S_{(2)} P_{1}(\frac{6}{5}) + S_{(3)} P_{2}(\frac{6}{5})$$

$$hC_{2} \overline{U_{22}} = \frac{N_{2}}{t} + \frac{6M_{2}}{t^{2}} \frac{6}{5} + S_{(2)} P_{1}(\frac{6}{5}) + S_{(3)} P_{2}(\frac{6}{5})$$

$$(4.28)$$

$$hC_{1} \overline{V_{12}} = \frac{N_{12}}{t} + \frac{6M_{12}}{t^{2}} \frac{6}{5} + S_{(3)} P_{1}(\frac{6}{5}) + S_{(3)} P_{2}(\frac{6}{5})$$

$$hC_{2} \overline{U_{21}} = \frac{N_{21}}{t} + \frac{6M_{21}}{t^{2}} \frac{6}{5} + S_{(3)} P_{1}(\frac{6}{5}) + S_{(3)} P_{2}(\frac{6}{5})$$

es decir se supone que cuatro términos del desarrolo en serie, son suficientes para expresar la cantidad deseada. En cuanto a la cantidad L/h que figura en la primera integral de V* (ec. 6), se puede expresar aproximadamente como: 104

and a second second

$$\frac{1}{h} = 1 - \frac{1}{5} \frac{t}{z} M - \frac{y^2}{5} \frac{t^2}{4} K \qquad (4.29)$$

y en términos de polinomios de Legendre se escribe,

 $\frac{1}{b} = \frac{2}{2} - \frac{2M}{2} - \frac{2K}{2} - \frac{2R}{2} + \frac{2R}{2} +$ (4.30)

la ecuación 4.29 es válida aún para valores de $\frac{Z}{R} \neq 0.6$, una aproximación más burda, resulta de escribir,

$$\frac{1}{5} \stackrel{:}{=} \frac{P_0}{2} - \frac{tM}{2} \frac{P}{2} \qquad (4.31)$$

Aquí?se usará esta última aproximación, que parece suficiente para ilustrar los resultados.

(Pm (&) Pn (&) & d &

Mediante integración por partes, se puede ver que

$$\begin{split} \mathcal{A} &= \left(\begin{array}{c} P_n(\xi) P_m(\xi) \xi \, d\xi = - \right) \left(\begin{array}{c} \xi \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \xi \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \xi \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \xi \end{array} \right) \left(\begin{array}{c$$

105

y se cancelan ambos términos, en el caso en que m = n, en tanto que para $m \neq n$ se tiene m = 0 n = 1 $A = \frac{2}{3}$ m = 0 n = 2 A = 0m = 0 n = 3 A = 0m = 1 n = 2 $A = \frac{9}{30}$ (4.33) m = 1 n = 3 A = 0m = 2 n = 3 A = 0m = 2 n = 3 A = 0 Con estos resultados se puede calcular $SV \stackrel{\#\#}{=} o$. Así introduciendo la variación de los coeficientes del desarrollo en serie de los esfuerzos, es posible, agrupar el resultado de $SV \stackrel{\#\#}{=} o$ en la forma,

SNI (- KII - LIZ UZ - KIW + [NI - D NZ] $+\frac{8}{20}\frac{M}{E}\left[\frac{M_1}{L}-\frac{2}{2}\frac{M_2}{L}\right]$ + SN2 (- 12,2 - L2, U, - k2W + [N2 - 2 N,] $+\frac{s}{20}$ $\frac{M}{E}$ $\left[\frac{M_2}{L}-\frac{M_1}{2}\right]$ + SN12 (- 121 - LI2 UI - RI2 W + [N12] + 8 M [M12] + + SN12 (- 121 - LI2 UI - RI2 W + [N12] + 8 M [M12] + 12 M - [M12] + + SN21 (- U1,2 - L21 U2 - kiz W + [N21] + 3 M [M21]) $+ \delta M_{1}(-\frac{1}{\alpha_{1}}(\frac{W_{1}}{\alpha_{1}}) - \frac{1}{\alpha_{1}}(U, k_{1}) - \frac{1}{\alpha_{1}}(U_{2}k_{12}) - \frac{1}{\alpha_{1}}(U_{2}k_{12})$ $+ \frac{12}{F13} \left[M_1 - \frac{2}{2} M_2 \right] + \frac{8}{30} \frac{M}{FE} \left[N_1 - \frac{3}{2} N_2 \right]$ $+\frac{2}{5}\left[S_{(2)}-\frac{7}{2}S_{(2)}-\frac{M}{E}\right]$ + $\delta M_2 \left(-\frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{W_{12}}{\alpha_2} \right)_2 - \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{U_2 h_2}{\mu_2} \right)_2 - \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{U_1 k_{12}}{\mu_2} \right)_2$ $+ \frac{12}{2} \left[\frac{M_2}{2} - \frac{2}{2} \frac{M_1}{2} + \frac{8}{30} \frac{M}{42E} \left(N_1 - \frac{2}{E} N_2 \right) \right]$ $+\frac{2}{5}\left[S_{(2)2}-\frac{2}{2}S_{(2)}\right]\frac{M}{E}$

 $SM_{12}\left(-\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{W_{12}}{\alpha_2}\right)_1-\frac{1}{\alpha_1}\left(U_2k_2\right)_1-\frac{1}{\alpha_1}\left(U_1k_{12}\right)_1\right)$ $+ \frac{12}{t^36} \left[\frac{M_{12}}{5} \right] + \frac{g}{30} \frac{M}{t^2F} \left[\frac{N_1}{5} - \frac{D}{2} \frac{N_2}{5} \right]$ $f = \frac{2}{5} \frac{M}{E} \left[S_{(2)} \left[-\frac{2}{2} S_{(2)} \right] \right]$ + SM21 (- 1/ (N/1)) - 1/ (U, b)) - 1/ (U2 k12), 2 $+ \frac{12}{43G} \left[\frac{M_n}{4} \right] + \frac{3}{30} \frac{M}{12p} \left[\frac{N_1 - \frac{2}{2}}{2} \frac{N_2}{2} \right]$ $+ \frac{2}{5} \frac{M}{K} \left[\frac{S_{02}}{2} - \frac{2}{2} \frac{S_{01}}{2} \right]$ + $S_{(2)}\left(\frac{1}{5E}\left(\frac{1}{5E}\left(\frac{1}{5E}\left(\frac{1}{5E}\right)-\frac{2}{2}S_{(2)}\right)+\frac{2}{5}S_{(2)}\left(\frac{1}{5E}\left(\frac{1}{5E}\right)-\frac{2}{2}M_{2}\right)\right)$ $+ \frac{3t^2M}{7\pi E} \left[\frac{S_{(3)}}{S_{(3)}} - \frac{2}{2} \frac{S_{(3)}}{2} \right]$ + $SS_{(2)2}\left(\frac{1}{5E}\left[\frac{S_{(2)2}-\frac{3}{2}}{2}S_{(2)1}\right]+\frac{2}{5}\left[\frac{M_{1}-\frac{3}{2}}{2}M_{2}\right]\frac{M}{EE}$ $+\frac{3}{70}\frac{t^2M}{F}\left[S_{(2)2}-\frac{3}{2}S_{(3)}\right]$ $+ \delta S_{(2)} l^{2} \left(\frac{1}{56} \left[\frac{5}{56} l^{2} \right] + \frac{2M}{5t6} \left[\frac{M_{12}}{5t6} \right] + \frac{3}{70} \frac{t^{2}M}{5} S_{(3)} l^{2} \right)$ $+ S_{(2)}^{21} \left(\frac{1}{56} \left[\frac{5}{56} \right]^{21} + \frac{2M}{5t6} \int \frac{M_{21}}{5t6} + \frac{3}{10} \frac{t^2 M}{6} S_{(3)}^{21} \right)$

 $+ \delta S(3) \left(\frac{t}{7t} \int S(3) - \frac{1}{2} S(3) - \frac{1}{2} S(3) - \frac{1}{2} \int S($

 $+ \delta S(3)^{2} \left(\frac{t}{7E} \left[S(3)^{2} - \frac{v}{2} S(3) \right] + \frac{3}{70} \left[S(3)^{2} - \frac{v}{2} S(3) \right] \frac{t^{2}M}{E}$

 $S(3) IZ \left(\frac{t}{76} \left[\frac{5(3)}{2} \right] + \frac{3}{766} M^{\frac{1}{2}} \left[\frac{5(2)}{2} \right] \right)$ $f \delta S_{(3)} z_{I} \left(\frac{t}{76} \int_{-5(3)}^{-5(3)} z_{I} \int_{-76}^{-7} M t^{2} \int_{-76}^{-7} M t^{2} \int_{-76}^{-7} S_{(2)} z_{I} \int$ (4.34)

Por simplicidad, la ecuación 34, se escribe ahora en la forma: SNI (a) + SN2 (a2) + SN12 (a12) + SN21 (a21) + SMI (b) + SM2 (b2) + SM12 (b12) + SM21 (b21) + 8 S(2) 1 (C1) + 8 S(2) 2 (C2) + 8 S(2) 12 (C12) + 8 S(2) 21 (C21) + (4.35)

SS(3)1 (d1) + SS(3)2 (d2) + SS(3)12 (d12) + SS(3)21(d21) = 0 en la que el significado de las cantidades en paréntesis, se deduce de la ecuación 34. Del significado de las cantidades 01, 42, 412 y 421, se deducen expresiones para las de e_1 , e_2 , e_{12} y e_{21} que deben satisfacerse formaciones para cualquier superficie paralela a la media. Así se deduce entonces que,

 $E_{l} = \frac{1}{2} \left[N_{l} - \frac{3}{2} N_{z} \right] + \frac{9}{30} \frac{M}{E} \left[\frac{M_{l}}{E} - \frac{3}{2} \frac{M_{z}}{E} \right]$

(4.36)

 $e_{2} = \frac{1}{FF} \left[N_{2} - \frac{5}{2} N_{1} \right] + \frac{8}{2n} \frac{M}{F} \left[\frac{M_{2}}{E} - \frac{5}{2} \frac{M_{1}}{E} \right]$

 $C_{12} = \frac{1}{5t} \left[\frac{N_{12}}{5} + \frac{8}{30} \frac{M}{E} \left[\frac{M_{12}}{t} \right] \right]$

 $C_{21} = \frac{1}{BF} \left[\frac{N_{21}}{F} + \frac{g}{30} \frac{M}{E} \left[\frac{M_{21}}{F} \right] \right]$

En la forma análoga, de las expresiones de las cantidades b_1, b_2, b_{12} y b_{21} , al suponer que las variaciones pueden ser arbitrarias, se deducen las ecuaciones que expresan a los cambios de curvatura. Estas expresiones son:

$$\begin{split} \mathcal{J}_{1} &= \frac{12}{E\ell^{3}} \left[M_{1} - \frac{1}{2} M_{2} \right] + \frac{9}{30} \frac{M}{E} \left[\frac{N_{1}}{2} - \frac{1}{2} N_{2} \right]^{T} \\ &+ \frac{2M}{5E} \left[S(2) \right] - \frac{1}{2} S(2) \frac{1}{2} \right]^{T} \\ \mathcal{J}_{2} &= \frac{12}{E\ell^{3}} \left[M_{2} - \frac{1}{2} M_{1} \right] + \frac{9}{30} \frac{M}{\ell^{2}E} \left[N_{2} - \frac{1}{2} N_{1} \right] \\ &+ \frac{2M}{5E} \left[S(2) 2 - \frac{1}{2} S(2) \right] \\ \mathcal{J}_{12} &= \frac{12}{5\ell^{3}} \left[M_{12} \right] + \frac{9}{30} \frac{M}{\ell^{2}E} \left[N_{1} - \frac{1}{2} N_{2} \right] + \frac{2M}{5E} \left[S(2) 2 - \frac{1}{2} S(2) \right] \\ \mathcal{J}_{12} &= \frac{12}{5\ell^{3}} \left[M_{12} \right] + \frac{9}{30} \frac{M}{\ell^{2}E} \left[N_{1} - \frac{1}{2} N_{2} \right] + \frac{2M}{5E} \left[S(2) 2 - \frac{1}{2} S(2) \right] \\ \mathcal{J}_{12} &= \frac{12}{5\ell^{3}} \left[M_{21} \right] + \frac{9}{30} \frac{M}{\ell^{2}E} \left[N_{2} - \frac{1}{2} N_{1} \right] + \frac{2M}{5E} \left[S(2) 2 - \frac{1}{2} S(2) \right] \\ \text{hora tomando en cuenta la urbitrariedad de las variaciones,} \end{split}$$

se puede deducir,

A

$$S(z) = -2 \frac{M}{E} \left[\frac{M}{N} - \frac{15}{75} \left[\frac{S(3)}{5} \right] \frac{7}{5} EM$$
(4.38)

 $S(2) = -2 \frac{\pi}{E} \left[M_{1} \right] - \frac{\pi}{10} \left[S(3) \right] = M_{1}$

 $S(2) = -2 \frac{M}{E} \left[\frac{M_{12}}{-\frac{15}{70}} \right] \frac{15}{5(2)} \frac{15}{-\frac{15}{70}} \frac{15}{$

 $S_{(2)}^{(2)} = -2 \frac{M}{T} \left[\frac{M_{21}}{J} - \frac{15}{70} \left[\frac{5}{3} (3)^{21} \right] \stackrel{t}{=} M \right]$

 $S(3) = -\frac{3}{10} + M S(2) / \frac{3}{10}$ $S(3) = -\frac{3}{10} \ell M S(2) =$ S/2/12 - 3 / M S/2/12 39)

$$S(3) = -\frac{3}{10} EM S(2) = -\frac{3}{10} EM S(2)$$

La solución de cualquier problema de equilibrio en la presente teoria de cascarones, se puede conseguir de la siguiente manera; las incógnitas son N₁, N₂, N₁₂, N₂₁, M₁, M_2 , M_{12} y M_{21} , es decir 8, pero pueden reducirse a 6, ya que N₁₂ y N₂₁ así como M₁₂ y M₂₁ son dependientes si se acepta que el tensor esfuerzo es simétrico. La dependencia de estas cantidades queda establecida en términos de la geometria de la superficie, de manera que se puede establecer la relación entre N_{12} y N_{21} , así como la relación entre M_{12} y M21.

Reducido el número de incógnitas a 6, las deformaciones e, e2, en, en, R, R, K, Kn, Kn, pueden sustituirse en el grupo de ecuaciones de equilibrio del elemento infini110

tamente pequeño, mediante el empleo de lu ley de Hooke. Así pueden despejarse las incógnitas de los dos primeros términos del desarrollo en serie pura los esfuerzos. Una vez conocidas las magnitudes de N₁, N₂, N₁₂ ó N₂₁ y M₁, M₂, M₁₂, ó $M_{O,1}$ se pueden calcular los coeficientes de los polinomios de segundo orden del desurcollo en serie de los estuerzos, es

En el diagrama 6.1, se muestra la secuencia de los desarrollos de este capítulo así como el camino que permite la solución del problema de la teoría de cascarones.

En la solución presentada, no se cumplen las condiciones de compatibilidad en los planes normales a la superficie media, pero se cumplen las condiciones de compatibilidad en la superficie media y el equilibrio general en esa superficie. Ademís, como indica la formulación del diagrama 6.1 se cumple con las condiciones de equilibrio en el elemento infinitamento pequeño situado a la distancia Z de la superficie media.









DIAGRAMA A L

5.- SOBRE LA SOLUCION MATEMATICA Y NUMERICA DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES NO-LINEALES

5.0 Alcance

En el presente capítulo se presentan cicrtas consideracio nes de índole analítica, que tienen por objeto indicar varios caminos para la solución de los sistemas de ecuaciones diferen ciales que se han desarrollado en este trabajo. Para la ilustración del procedimiento se escoge el sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales deducido en el cap. 2. La extensión al sistema de ecuaciones deducido en el cap. 3, no es complicada.

5.1 Procedimientos analíticos para la solución de las ecuaci<u>o</u> nes diferenciales

Esencialmente se presenta aquí un procedimiento que es una aplicación del método general conocido como método de Perturbación (ver ref. 70, p. 1001 a 1038).

La técnica ha sido usada en particular para el análisis de placas por Chien y por Nash y Cooley, mediante el empleo de las ecuaciones de T.V. Karman y sus desarrollos los presenta Mansfield⁽⁷¹⁾ en forma resumida junto con una variante a dichos

112

desarrollos.

Considérese que el sistema de ecuaciones diferenciales pu<u>e</u> de representarse mediante operadores en la forma:

 $DV^*W + P_p p = N(g, W) + f$ - Et V & P + Pe W = M(W, W) 5,1

en que \bigvee^4 es el operador bilaplaciano en coordenadas curvilíneas, \mathcal{P}_k es el operador diferencial designado antes (ver cap. 2) como de interacción y que contiene a las curvaturas \mathcal{E}_i , \mathcal{E}_i \mathcal{E}_{12} . $N(\mathcal{G}, W) \mathcal{G} M(\mathcal{M})$ son operadores no lineales forma dos con las variables $\mathcal{G}_i W$; y \mathcal{G} es la carga normal a la superficie media del cascarón.

Para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, se introduce un parámetro Δ^{*} que puede ser el desplazamiento W en un punto cualquiera sobre el cas carón (en general será conveniente elegir Δ igual al desplazamiento W máximo). Entonces la solución puede escribirse en la forma de los siguientes desarrollos en serie

$$W = \sum_{J=1}^{n} W_{j} \left(\beta_{I}, \beta_{2} \right) \Delta^{j}$$

$$5.2$$

$$Y = \sum_{J=1}^{n} Y_{j} \left(\beta_{I}, \beta_{2} \right) \Delta^{j}$$

además, puede escribirse la carga q en una forma completamente análoga, es decir

Sin embargo, dado que el parámetro A no es conocido previamente, es difícil conocer las cantidades \mathcal{J}_{j} ; que definen a \mathcal{J}_{j} y entonces es conveniente tomar unicamente el primer término del desarrollo 5.3, para definir a \mathcal{J}_{j} , que se conoce con exactitud haciendo

·**.

+ puede hacerse adimensional, y de la forma <u>W(Bro, Pro)</u>; en que 3 es una longitud característica. A

en que ∇^4 es el operador bilaplaciano en coordenadas curvilíneas, \mathcal{P}_{k} es el operador diferencial designado antes (ver cap. 2) como de interacción y que contiene a las curvaturas E_i , k_z k_{12} · N(q,W) y M(M) son operadores no lineales form<u>a</u> dos con las variables $\mathcal{P}W$; y \mathcal{P} es la carga normal a la superficie media del cascarón.

Para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, se introduce un parametro Δ * que puede ser el desplazamiento W en un punto cualquiera sobre el cas carón (en general será conveniente elegir 🔬 igual al desplazamiento W máximo). Entonces la solución puede escribirse en la forma de los siguientes desarrollos en serie

$$W = \sum_{j=1}^{n} W_j \left(\beta_j, \beta_2 \right) \Delta^j$$
5.2

$$\mathcal{Y} = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{Y}_{j} \left(\beta_{i}, \beta_{z} \right) A^{j}$$

además, puede escribirse la carga $\mathcal G$ en una forma completamente análoga, es decir

$$q = \sum_{j=1}^{n} q_j A^j$$
 5.3

Sin embargo, dado que el parámetro 🔏 no es conocido previamen-

te, es diffeil conocer los cantidades
$$\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$$
; que definen a \mathcal{J} y

entonces es conveniente tomar unicamente el primer término del

desarrollo 5.3, para definir a \mathcal{J} , que se conoce con exactitud haciendo



Al introducir los decorrollos en cerie de las ecc. 5.2, los términos no lin ales reneran potencia: del parámetro J su periores a L; idualando los cóncinos que contienen las micmas potencias del parámetro, se estalecen las siguientes relaciones:

para
$$i=1$$

 $\exists \nabla W_{i} + P_{k} P_{i} = \hat{f}_{i}$
 $= \frac{i}{EE} \nabla^{4} P_{i} + P_{k} W_{i} = 0$
 $= \delta S S$

para
$$l=2$$

 $D\nabla^{4}W_{2} + P_{2}P_{2} = N(P_{1}, W_{1})$
 $= \frac{1}{EE} \nabla^{4}\Psi_{2} + P_{2}W_{2} = M(W, W_{1})$
 $= \frac{1}{EE} \nabla^{4}\Psi_{2} + P_{2}W_{2} = M(W, W_{1})$

pura la 3

$$D V^{4} W_{3} + P_{b} \phi_{3} = N(\Psi, W_{a}) + N(\Psi_{a}, W_{b})$$

- $\frac{1}{E_{f}} V^{4} \psi_{3} + P_{b} W_{3} = 2M(W_{b}, W_{b})$
- $\frac{1}{E_{f}} V^{4} \psi_{3} + P_{b} W_{3} = 2M(W_{b}, W_{b})$

ind the store of formal sub-margine of the paraleas potendias by

perion, a protein synaple of an an an and could include of the

renerates press the contract for the que for en el desarrollo

in mother a content, the Board Seminary I we or it the trans and of a Will can be considered as Will a we music

nen en el sistema 5.6, como términos independientes. Con estos términos independientes, se pueden calcular las funciones M_2' y f_2' . Con esta solución y con la solución M_1' , f_2' , es posible determinar los términos independientes del sistema 5.7 y así obtener las funciones M_3 y f_3' . El procedimiento aplicado sucesivamente conducirá eventualmente a un valor peque ño para la solución //, en cuyo caso, se pueden despreciar los términos siguientes.

Si el punto en que se supone definido Δ es el de coordenadas $(\beta_1(o), \beta_2(o))^{*}$, entonces es posible corregir el valor de la solución del sistema de ecuaciones 5.5, en virtud de que

$$N_{1}(\beta_{1}(0),\beta_{2}(0)) = 1$$
 5.8

El procedimiento es sumamente adecuado en el caso de problemas de diferencias finitas, porque entonces el sistema de <u>e</u> cuaciones diferenciales de convierto en una matriz que una vez invertida.permite calcular de inmediato el valor de las funci<u>o</u> nes desconocidas.

Respecto a la convergencia de este desarrollo, algo puede

decirse cobre fases físicas. Considérese el comportamiento de un caccarón cuya variación de desplazamientos con la carga pu<u>e</u> da representarse mediante una familia de curvas como las que se presentan en la fig. 5.1 y en la fig. 1. del cap. 1. En este caso, en la primera ræna — ascendente, la línia tangente <u>i</u> nicial representa la solución fin al A = 7 y la cantidad adicional de deformación esta representada por los términos de los

+ Apuf O puede desirmer el origen de las curvas coordenadas

desarrollos en serie de las ecs. 5.2 que tienen $/ \rightarrow 2$. Enton ces en esta parte de la curva, los términos adicionales son mas pequeños que el primero y la convergencia es natural. Sin em bargo, en la rama descendente y en la segunda ascendente, para el caso de cascarones de espesor regular y pequeño, la cantidad adicional es sumamente grande pudiendo existir, en algunos casos, ciertos problemas para la convergencia. Por otro lado, fijada la carga, podrían existir hasta tres soluciones distintas y surge la pregunta en cuanto a que solución se esta obteniendo. Dada la naturaleza del procedimiento, no es difícil predecir que el procedimiento converge a la solución mas peque La extensión de este procedimiento al problema de inesta ña. bilidad, puede lograrse con la consideración de dos estados si multáneos de desplazamiento (ver cap. 2) y un solo estado de

esfuerzos, es decir, una solución única para \emptyset y dos soluciones para .

La naturaleza del problema de estabilidad, grandemente compleja de por sí, no ha permitido soluciones simples, sin em bargo los métodos basados en el cálculo de variaciones, parecen haber superado estas limitaciones. Entre los procedimientos variacionales, destaca el debido a Ritz⁽¹⁸⁾, en la forma presentada por Galerkin⁽²³⁾. Este procedimiento fué utilizado

116

por Timoshenko^(13-a) en la solución del problema de pandeo de cascarones cilíndricos con desplazamientos pequeños. Con el empleo de la formulación Euleriana, el método variacional de Ritz - Timoshenko, permite calcular la carga de pandeo (sobre estimada), mediante el empleo de la ecuación

SW = SP 5.9

Con este fin, es necesario suponer unas ciertas funciones que cumplan con las condiciones de frontera inherentes a cada una de las variables y al problema en cuestión. En el caso del sistema de ecuaciones diferenciales del cap. 2, puesto en el sistema Euleriano, las varialbes son \emptyset y ψ . El problema co<u>n</u> siste en escoger

$$W = C_1 \beta_1 + C_2 \beta_2 + C_3 \beta_3 + \cdots$$

$$\phi = C_1 \beta_1 + C_2 \beta_2 + C_3 \beta_3 + \cdots$$

5.10

en que las funciones ϕ_{i} , ϕ_{i} , pueden escogerse como conjuntos ortogonales y los coeficientes se determinan de manera que se cumplan las condiciones de carga, en el cascarón.

Respecto a la aplicación de los procedimientos variacion<u>a</u> les al cálculo de inestabilidad en cascarones, Mushtari y Galimov⁽⁷³⁾ han hecho una discusión sumamente completa; en la ref<u>e</u> rencia 73, presentan las distintas consideraciones para la fo<u>r</u> mulación del protlema.

En la formulación Lagrangiana, la determinación de la car ga de inestabilidad, conduce a un problema complejo.

Quizá con el empleo de los principios energéticos, el método de perturbación introducido al principio de este capítulo, sea un arma eficiente. Obtenida la solución para el problema no lineal, la determinación de la magnitud del funcional y su comparación con los valores correspondientes a otras cargas, permitirá determinar con suficiente aproximación el valor de la carga para la cual ocurre el fenómeno de inestabilidad. Dicho de otra manera, el procediziento consistiría en:

- 1.- Resolver el grupo de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales para distintos valores de la carga.
- 2.- Calcular el signo de la segunda variación, como una forma cuadrática, para cada valor elegido de la carga.
- 3.- Los resultados anteriores, permiten trazar una gráfica y en ella uticar la carga de pandeo.

Como se ve el procedimiento constituye una prucha para c<u>a</u> da solución obtenida para P. La presentación anterior sigue los lineamientos del criterio de estabilidad de Liapunov⁽⁷⁴⁾ y aquí el funcional de Liapunov es la energía potencial. El mótodo que así resulta es complicado si se toma en cuenta que es necesario conocer la solución lineal.

Este procedimiento adquiere sentido físico, en el problema del cascarón cilíndrico que se ilustra en la fig. 5.2 que fué tomada de la ref. 67 cuyo autor a su vez la tomó del libro de Volmir⁽⁷⁵⁾. Esta figura, presenta la superposición de las intersecciones de la superficie de Liapunov (en las variables $\beta y \ = \frac{2}{5}$) con los plano: para los que , la carga axial externa, es constante. Se puede ver de la figura 5.2 que pa-

ra cada valor de la carga, siempre existe un máximo en la ener gia potencial, de la misma manera que siempre existe un minimo; de todoc aquélios máximor, el minimo absoluto corresponde a la carga de pandeo real y es precisamente la minima de todas las que conducen a valores máximos de la energía potencial. Esto se ilustra en la parte inferior de la fig. 5.2. 5.2 Sobre la solución numérica. Procedimiento óptimo de didiferencias finitas. Consideración del problema de inestabilidad.

La primera forma de colución numérica que se conoce para el problema de la teorfa de cascarones, resulta ser diferencias finitas⁽⁷⁵⁾. En la aplicación de esta técnica al análisis de cascarones, generalmente es necesario utilizar una red sumame<u>n</u> te cerrada para conseguir aproximaciones regulares⁽⁷⁷⁾. Las técnicas de relajación empleadas para mejorar la solución de una malla grande, han sido utilizadas en el análicis de cortinas de presa y se ha podido establecer la forma de convergencia. Otra alternativa, antes de proceder a la reducción del tamaño de la red, consiste en el empleo de operadores mas precisos y esto da sido considerado en el análicis numérico en v<u>a</u> riat formas ^(72,80). Una modalidad en el tratamiento de probl<u>e</u> mas mediante diferencias finitas con operadores de mayor prec<u>i</u> sión, ha sido propuesta por Tceitlin⁽⁸¹⁾ y se resume aquí por considerarse de interés.

Supóngar una malla como la mostrada en la fig. 5.3 y sea \mathcal{U}_{ij} una variable cualquiera definida en el punto de coordenadas (\mathcal{L}_{j}) , de la red en la forma que ahí se indica. Introduciendo abora la notación

5.11

5.12

110 + 11-10 = \$; 120+11-20 = \$2

y también

1/10 = 1/-10 = Si 1/20 - 11-20 + Jz

. . .

Sobre la solución numérica. Procedimiento óptimo de di-5.2 diferencias finitas. Consideración del protlema de inestabilidad.

La princra forma de solución numérica que se conoce para el problema de la teoría de cascarones, resulta ser diferencias finitas⁽⁷⁶⁾. En la aplicación de esta técnica al análisis de cascaronec, generalmente es necesario utilizar una red sumamen te cerrada para conseguir aproximaciones regulares⁽⁷⁷⁾. Las técnicas de relajación empleadas para mejorar la solución de una malla grande, han sido utilizadas en el análisis de cortinas de presa y se ha podido establecer la forma de convergen-Otra alternativa, antes de proceder a la reducción del cia. tamaño de la red, consiste en el empleo de operadores mas precisos y esto ha sido considerado en el análisis numérico en va ria: formas (79,80), Una modalidad en el tratamiento de proble mas mediante diferencias finitas con operadores de mayor precisión, ha sido propuesta por Tceitlin(81) y se recume aquí por considerarse de interés.

Supóngare una molla como la montrada en la fig. 5.3 y sea Uj una variable cualquiera definida en el punto de coordenadas $(\frac{1}{2})$, de la red en la forma que ahí se indica. Introduciendo abora la notación

110 + 11-10 = \$ 120+ 4-20 = \$2

y también

110 - 11-10 = Si 1120 - 11-20 · Jz

5.12

5.11

El valor de \mathcal{U} en el punto $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$, se puede determinar mediante el empleo de la serie de Taylor escribiendo

$$\begin{aligned} l_{ij} &= l_{00} + \frac{1}{1!} \left(iH + jK \right) + \frac{1}{2!} \left(iH + 2ijL + j^{2}k^{2} \right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left(i^{3}H^{3} + 3i^{2}jL^{2} + 3ij^{2}L^{1} + 3ij^{2}L^{1} + jK^{3} \right) + \dots \end{aligned}$$
5.13

en que

$$H^{m} = h^{m} \frac{\partial^{n} u}{\partial \chi^{m}}$$

$$k^{n} = k^{n} \frac{\partial^{n} u}{\partial \chi^{n}}$$

$$5.14$$

$$I^{m+n} = h^{m} k^{n} \frac{\partial^{m+n} u}{\partial \chi^{m} y^{n}}$$

Las cantidades h, h son las medidas de la red (fig. 5.3)

Tseitlin introduce la noción de rango del operador para indicar que el error es proporcional a ese rango, así por ejem plo para el operador $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$ (h^6)se entiende que el error es del orden de h^6 , que es su rango. Del desarrollo 5.13, se puede escribir,

$$\mathcal{U}_{10} = \mathcal{U}_{00} + \mathcal{H} + \frac{1}{2}\mathcal{H}^{2} + \frac{1}{6}\mathcal{H}^{3} + \frac{1}{24}\mathcal{H}^{4} + \dots = \mathcal{U}_{1}$$

$$\mathcal{U}_{-10} = \mathcal{U}_{00} - \mathcal{H} + \frac{1}{2}\mathcal{H}^{2} - \frac{1}{6}\mathcal{H}^{3} + \frac{1}{24}\mathcal{H}^{4} \dots = \mathcal{U}_{-1}$$
5.15

de manera que

$$5_{1} = 2\ell + \ell^{2} + \frac{1}{2}\ell^{4} + \frac{1}{2}\ell^{4} + \dots$$
 5.16

en que $\mathcal{U}=\mathcal{U}_{\infty}$. Despreciando el término subrayado y los siguientes, es posible calcular el valor de \mathcal{H}^2 , que por despr<u>e</u> ciar dichos términos es de rango 2 y se escribe

$$H_2^2 = \frac{h^2}{2\lambda^2} \frac{\partial^2 u}{(h^2)} = -2 u + S, \qquad 5.17$$

Si se toma en cuenta la definición de \mathcal{E}_{i} , se puede ver que el operador de $\mathcal{A}_{i}^{\mathcal{Z}}$, coincide con el de diferencias finitas ordinario. La cantidad \mathcal{F}_{z} se escribe,

$$\xi_z = 2\ell + 4 H_a^2 + \frac{16}{12} h_z^4 + \frac{64}{360} H_b^6 + \dots 5.18$$

y la cantidad , se puede poner, como en la ec. 16, cuando se incluyen derivadas de orden superior, en la forma

despreciando el término subrayado y los siguientes, es posible calcular el operador de la derivada cuarta de rango 2 y el op<u>e</u> rador de la derivada segunda de rango 4, de las ecs. 18 y 19 se deduce

 $f_{2}^{\prime 2} = 6\mathcal{U} - 4 \xi_{1} + \xi_{2}$ 5.20 $H_{4}^{2} = -2.5\mathcal{U} + 1.333 \xi_{1} - 0.083 \xi_{2}$

El operador \mathcal{H}_2^{4} , es análogo al de diferencias ordinarias. Desarrollando el valor de \mathcal{J}_3 , e incluyendo los términos subr<u>a</u> yados en las ecs. 18 y 19, se pueden deducir los operadores c<u>o</u> rrespondientes a \mathcal{H}_6^{2} y \mathcal{H}_4^{4} , los resultados son:

H6 = - 2.722 U + 1.5 & - 0.15 52 + 0.011 53

121

5.21

Ha = 9.333 U - 6.5 5, + 2 52 - 0.167 53

Los operadores que corresponden a las derivadas de orden impar, se deducen con el empleo de las cantidades S_1 , S_2 ---. El rango de los operadores siempre corá par y para los operado res de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ de deduce empleando las cantidades que:

$$f'_{2} = 0.5 \,\delta_{1}$$

$$f'_{2}^{3} = -\delta_{1} + 0.5 \,\delta_{2}$$

$$5.22$$

$$f'_{4}^{3} = -1.625 \,\delta_{1} - 0.15 \,\delta_{2} + 0.017 \,\delta_{3}$$

para lo cual se utiliza un procedimiento análogo al descrito antes. Hasta aquí, se han analizado los operadores sobre la línea horizontal, tratándose de operadores diferenciales parcia les, es necesario considerar también la dirección vertical y otros niveles en la dirección horizontal. Así puede deducirse por ejemplo el operador bilaplaciano (p^{4}), en la forma que indica la fig. 5.4 b y para su comparación se muestra en la fig. 5.4 a, el operador bilaplaciano que resulta de la aplicación de las diferencias ordinarias.

El operador que se muestra en la fig. 5.4 b, que es de rango o, no se parece al que resulta de la aplicación de otros criterios para mejorar la precisión⁽⁷⁹⁾. Los operadores de la fig. 5.4 se pueden comparar en dos formas; la primera de ellas corresponde a un análisia de la magnitud de los coeficientes. Desde luego se observa que el operador de rango 6 incluye un número major le pantos, pero además, se nota que la relación

del coeficiente de los mismos puntos con respecto al del punto central es mas pequeña para el operador de rango 6 que para el operador ordinario, mande se trata de puntos dereanos. Ocorre lo centrario para pustos para elegadas que por otro rado tienen influencia menor, liste hesia contribuye a que corre la diagonal principal los contribuye a que corre la diago-
gencia en procedimientos iterativos. La otra forma de compar<u>a</u> ción se reficre a los resultados. En cuanto a esto, Tseitlin, aplica esta técnica en un cascarón de translación hibremente <u>a</u> poyada de planta rectangular, encontrando para la misma red, que el error en el uso de diferencias usuales llega a ser $\pm 43\%$, en tanto que con diferencias de rango 6, el error es del orden de $\pm 5\%$. Las magnitudes que comparó, son los desplazamientos y utilizó las ecuaciones de Vlasov⁽²⁶⁾. La solución, supuesta exacta que sirvió de comparación, fué deducida con el empleo del procedimiento de Ritz - Galiorkin⁽²³⁾.

Con el empleo de esta técnica, puede resolverse satisfactoriamente el problema estático. Es necesario considerar ahora el problema de inestabilidad elástica. Para la presentación siguiente, se supondrá que existe un planteamiento discreto como puede ser uno de diferencias finitas, en cualquiera de sus variantes o uno formulado en términos de un modelo físico (ver cap. 6).

Nuevamente la presentación sigue paralelamente el criterio de Liapunov⁽⁷⁴⁾.

Considérese por ejemplo, el arreglo discreto que corres-

ponde a un distema de cuacionel Apresado en forma operacional (ver ec. 5.1). Diello arregio discreto puede escribirse en forma matricial,



en que $\not{k} =$ matriz de rigideces $\not{p} =$ " de flexibilidades $\not{P} =$ matriz de interacción entre el estado de flexión y membrana W = vector desplazamiento; \not{p} vector de la función de fuerzas $W_p^2 =$ vector que contiene los términos no lineales de cada ecuación $W_p f_p =$ vector que contiene la suma de los productos inhe rentes a cada ecuación q = vector de cargas normales a la superficie.

Se pretende formular el concepto de inestabilidad como aquel estado de carga para el cual existen dos estados de defo<u>r</u> mación de la superficie. Ambos estados se caracterizan en la forma

EDO I
$$W_{i}$$
 = vector desplazamiento W
 f_{i} = vector de las funciones f_{i}
 f_{i} = vector de las funciones f_{i}

EDO II (simultáneo al I)

$$W = W_1 + \mathcal{E}_1 W_2$$

124

5.25

P= P1+ E2 42

en general \mathcal{E}_{i} , $\mathcal{E}_{i} \ll /$ y se puede hacer $\mathcal{E}_{i} = \mathcal{E}_{i}$. La primera de las ecs. 5.23, introduce la posibilidad de que para el estado de desplazamientos W_{i} , considerados grandes en comparación con el peralte t, exista otro estado adyacente W, que difiere poco del anterior. El miemo concepto se asocia a la segunda ecuación

En algunos protlemas particulares, puede suponerse nulo <u>u</u> no de los parámetros \mathcal{E}_{r} ó \mathcal{E}_{2} ; por ejemplo, en el caso de un estado esencialmente de membrana, en que los desplazamientos iniciales W_{r} son pequenos, es suficiente con considerar la posición adyacente en cuanto a W, haciendo $\mathcal{E}_{2} = 0$.

Para obtener la solución del problema en el caso de grandes desplacamientos W, se puede proceder iterativascate, resolviendo pris ro el problema lineal con \mathscr{J} como vector carga. Con esta colución es posible calcular el vector subrayado en la ec. 5.21.

Agregando estos términos al vector \oint se puede obtener una sueva solución mara W y \oint que a su vez origina nuevos vectorea W_p^2 y W_p \oint_p . En un número de ciclos de puede leducir la solución no líneo j rolle corpo dada por el vector . Está telesión reace de W_r y \oint_r . De aprecia la secejanza entre esta técnica y lo fécucia de perturbación introducida al principio lel indico 5.1.

El significate pero consiste da proper di la posición de equilitrio es catual o no; para erre Fil, de necesario introdu dir la des. para del sistema CI, CI underdo def, los términos

125

o lineales dopta de comma per rica, la form $W_{D}^{2} = (W_{1} + EW_{2})^{2} = W_{1}^{2} + 2EW_{1}W_{2} + E^{2}W_{2}^{2}$ 5.20 $W_{p}\varphi_{p} = W_{1}\varphi_{1} + \mathcal{E}(W_{2}\varphi_{1} + W_{1}\varphi_{2}) + \mathcal{E}W_{2}\varphi_{2}$ where i is the provide \mathcal{E}_{j} is parameter denoted by the second states termestable. At the medic is four as inferred le fos estados I y

II en el cistema 5.21, y rectarlos se deduce

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K} & \mathcal{P} \\ \mathcal{P} & \mathcal{W}_2 \\ \mathcal{P} & \mathcal{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \mathcal{W}_2 \\ \mathcal{W}_1 \mathcal{W}_2 \\ \mathcal{P}_1 \mathcal{W}_2 + \mathcal{P}_2 \mathcal{W}_1 \end{bmatrix}$$

$$(3.27)$$

que constituye un problema de valor característico. Si W_r y \mathscr{G}_r puede relacionario, existirá un parámetro \mathcal{F}_r que constituye el valor característico. La solución del sintema 5.25, conduce a un vector característico.

di la marritud del valor característico λ , es uno, la posición le equilibrio en inestable; de otra manera es estable. La solución es realmente laboriosa y en la fig. 5.5 se muestra un dimerara de flujo que resume las operaciones indicadas. Con este tratamiento, es posible deducir la solución a un problema de inectabilitad local. Esto se considue introduciendo solame<u>n</u> te en una zona la codición adyacente. Otras posibilidades qu<u>e</u> dan implícitas.

El cálcolo de la forma cuadrática

126



conocidos to desployamientos W y el valor de la función φ en dos puntos, permite entallecer la condición de estabilidad en la supofície de lignmov. El funcional V comple las condiciones insuertas por el come plo de lignmov. En la fig 5.6, se presenta la superficie de lignmov en las variables φ y w.



FIG. 5.1

•



INESTABILIDAD ELASTICA EN CASCARONES CILINDRICOS. VERIFICACION DEL CRITERIO DE T.V. KARMAN

FIG. 5.2













.

٠

¢ 0.029 0 022 - 0 444 - 0.022 0 007 - 0 305 - 3 500 - 0 355 - 0.007 0 007 0 007 0 007 2,110 2,110

У

b) 0 029 - 0.444 - 3.500 - 15.911 - 9.256 - 15.911 - 3.500 - 0.444 - 0.029 9.256 9.256 0.022 - 0.355 - 2.110 - 15.911 - 2.110 - 0.355 - 0.022 2.110 - 2.110 0.007

FIG.5.4

Resolver el sistemo de ecuaciones linealar cen un volor del vectar [9]. Parultedar; [W;"], [4,"] 2 Con los resultados de 20(4) caleular la magnitud de las términas no lineales. 3 Introducir las resultados de 3, como odifivos al voctor [9] y obtiner entonus [W,], [4]. Iteror con las paras 3 y 4, hasta que la diferencia sea minima. Plantes el problema de la oxistência simultanea de das estados y resolver el problemo de valor coracterístico. 10 es 7=13

Escoger otrovalor de [7] y obtener la solución correspondiente, mediante un factor de proporcionali dad, de la solución en 2. Regressor a 2.

El valor elegido en 1 para [9], as uno que origina inertabilidad d'éstites con duplagomients W grander.

FIG. 5.5

SUPERFICIE DE LIAPUNOV EN LAS VARIABLES ϕ Y w

FIG. 5.6

A NUMBER OF A DESCRIPTION OF A DESCRIPTI

CAPITULO 6

MODELO FISICO PARA EL ANALISIS DE CASCARONES DE CURVATURA GENERAL, ESPESOR VARIABLE Y ORTOTROPIA CURVILINEA

6.0 .Alcance

En el presente capítulo se discute un modelo físico, extensión del modelo físico, debido a Schnobrich- Newmark^(83,84) y del debido a Chuang - Veletsos⁽⁷⁷⁾. El modelo que aquí se presenta puede incorporar los efectos de deformación de cortante y pretende incluir el máximo de variables geométricas. Se deducen las ecuaciones de equilibrio correspondientes a este modelo, en términos de las variables de desplazamiento U_{i} , U_{i} , y W y en términos de una función potencial γ . Los resultados se obtienen para un punto general sin incluir las condiciones de frontera. Como caso particular se deduce un sistema de ecuaciones en las variables U_1 , U_2 y W, en que se consideran las distintas condiciones de frontera. También se presenta un sistema de ecuaciones en la variable W', de desplazamiento y en la función de fuerzas ϕ . Esta última formula-

ción, para el modelo físico, utiliza la analogía estático-geo-

métrica que de justifica, sobre bases físicas, en el desarrollo

de este capítulo. Fara esta formulación, se deducen las ecua-

ciones correspondientes a puntos cercanos a alguna frontera.

Todos los desarrollos que aquí se presentan, siguen paralelamente los pasos formulados en los capítulos 2 y 3; la formulación, en general, sigue los lineamientos correspondientes a la parte analitica.

6.1 Generalidades.

La solución de los problemas de la teoría de cascarones mediante el empleo de diferencias finitas no ha podido atacarse en forma generalizada, reduciendose a un número aislado de apl<u>i</u> caciones (81). Las razones quizá se encuentran en las dificu<u>l</u> tades de indole numerica que surgen, para conseguir una aproximación regular y las complicaciones que surgen para tomar en <u>-</u> cuenta las condiciones de frontera. Así por ejemplo tratandose de un borde libre o de una zona en que las pertubaciones son muy locales , (como ocurre en cascarones cilindricos) resulta necesario trabajar con mallas de un tamaño muy pequeño en tam to que en el resto del cascaron, no es necesario tal refinamien to (36). Surge entonces un problema adicional que se refiere_ a trabajar con redes de distinto tamaño.

128

Por otro lado, el recurso de procedimientos iterativos para la solución del sistema de ecuaciones, parece tener varias limi taciones.

Muy distinto aparece el panorama, en cuanto a las solucio

nes de problemas de la teoría de cascarones, mediante el empleo de modelos fisicos (77, 33, 84). Estos modelos fisicos, pue den llegar a incorparar aquellos efectos de la forma que no pue den ser considerados en diferencias finitas. Además la formula ción de condiciones de frontera adquiere sentido físico y resul ta menos complicada. Las ecuaciones que resultan de una formu lación de este tipo, difieren con respecto a las que resultan con el empleo de diferencias finitas.

Aun en el caso de placas en que el factor geométrico, de_ la forma de los elementos no existo, esto resulta cierto

Chuang y Veletsos ⁽⁷⁷⁾, han usado una tecnica modificada de diferencias finitas que resulta intermedia entre las dos for mulaciones anteriores, en virtud de que no considera los factores de la forma de los elementos aislados que forman el sistema. Estos factores si son incluidos en el modelo de Schnobrich y ---Newmark. El método modificado de diferencias finitas debido a Chuang-Veletsos, mejora considerablemente la aproximación del -método de diferencias finitas. Este método originalmente apl<u>i</u>

129

cado a cascarones cilindricos, ha sido extendido por Noor y Veletsos ⁽⁸⁵⁾ a cascarones rebajados de doble curvatura y ha sido usado en particular, para la solución de un cascaron del tipo paraboloide hiperbolico.

En las comparaciones, vesultado de este trabajo⁽⁸⁵⁾, se nota que para alcanzar la aproximieión de una malia de 40 x 40, en que se usó el método ordinario diferencias finitas, fué suf<u>i</u> ciente con usar una malla de 10 x 10 para el procedimiento mod<u>i</u> ficado debido a Chuang-Veletsos-Noor (ver ref. 85 pp.160-169).

6.2 El modelo fusico. Descripción

En la fig. 0.1 se muestra al modelo físico que se pretende describir. El modelo esta formado de elementos elasticos de--formables. Estos elementos elasticos se encuentran ligados en tre sí, en ambas direcciones, mediante placas las cuales pue--den suponorse formadas en el perimetro de banas infinitamente rigians que se unen en las esquinas mediante articulaciones y que en el área encernada por las barras, se encuentra un elemen to o placa deformable por esfuerzo cortante en su plano. El usar una placa para ligar los elementos deformables, tiene por objeto considerar el cambio de tamaño de la fibra deformable a_ una distancia z , de la superfície media con respecto al tamaño de la fibra deformable a la distancia $z = \infty$. Este detalle se inoica en la fig. 6.2.

Adenás de estos elementos deformables, existem en planos

no necessification paralelos entre si, unos resortes elasticos – que toman en cuenta el efecto de semento torsiminte. A cada g no de estos resortes concepcade uno de los momentos de torsión M_{12} o M_{22} . Las fuerzas contantes en la superficie, son resistidad por mesor se cables, de samora que a caun los cobles – corresponde una je las fuerzas $M_{22} = M_{22}^{22}$.

Al introducir los resortes y los cables, se toma en cuenta el hecho de que la forma del recuadro no es un plana, sino que tione una cierta torsión como la que se nuestra en la fig. 6.3 Esta torsión corresponde a la forma inicial de la superficie.

Estas, en conjunto, resultan ser læ cualidades inherentes al modelo fisico que parece ser capaz do tomar en cuenta las ca racteristicas esenciales de la deformacion y la deformación por cortante, además de otras condiciones puramente geometricas que se discuten después.

6.3 Geometria inicial del conjunto de elementos que forman el cascaron.

Con las cualidades señaladas antes, respecto al modelo, se procede ahora a formular la geometria del conjunto de elementos que constituye el cascaron; supongase que estos elementos se apo yan en una superficie continua (ver apéndice A-1). Para poder considerar elementos situados entre sí a distancia variable se usará la definición parametrica de la distancia, de manera que cada punto se encuentra a la distancia AB: 1 d'AB:= 1 de sus --

131

La longitud real de la distancia se designa ∞, si vecinos.

se encuentra en la dirección de la curva B, y 🖘 si se encuen-

tra en la dirección de la curva \mathcal{F}_2 (ver fig. 6.3). Las eur-

vas A: y A:, son precisimente las lineas en que se encuen----

tran localizadas los elementos elasticos que toman el esfuerzo.

i

Las cantidades - y - , se sugonen en general, distin normal. tas para cada frame y sus magnitudes relativas no tienen ningu-Las placas rectas que ligan los elementos de_ na restriccion. formables, al pasar de un tremo a otro, por ejemplo sobre la ---curva β_1 , forman un angulo β_1 que constituye su deflexion. -Estas placas son secantos a las curvas \mathbb{R}_{1} y \mathbb{R}_{2} cuyos radios en el punto de cruce, se designan como 4/y 6/2 , respectivamente. --Además estas placas, son recarros a las curvas B sobre el plano tangente, en otras palabras, al hacer pasar un plano tangente a la superficie por el elemento deformable, las curvas B, no necesa riamente se proyectan como rectas sobre ese plano, sino que pue den proyectarse como curvas en la superficie (ver fig. 6.4) y -los planos se proyectan como secantes le dichas curvas. Las curvas en que se proyectan las lineas κ_i y β_2 de la superficie, sobre el plano tangente, poseen curvaturas que se designan ----"curvaturas en la superficie" y sus simbolos son \mathcal{A}_{is} y \mathcal{A}_{is} , de---pendiendo de la dirección en cuestion (ver fig. 6.4).

De esta manera quedan formuladas las cualidades geometricas de los elementos que constituyen el modelo ; observandose_ que los elementos no son coincidentes, sino que entre ello exig

135

te un ángulo $\beta_{1,i}$ sobre el plano normal a la superficie la cual tiene una curvatura $\frac{\beta_{1,i}}{R} = k$ y otro ángulo soble el plano tangente, que caracteriza las curvaturas β_{12} o β_{21} . Este último ángulo no interesa, porque su efecto queda considerado con las cantidades β_{22} y β_{21} de las curvaturas en la superficie. La facilidad de introducir intervalos de longitud distinta se d<u>e</u> be a la consideración de la "longitud parametrica unitaria". -Las longitudes reales, de acuerdo con las nociones de geometria diferencial del apéndice A-1, deben escribirse

$$L_{1} = oc_{1} \Delta \beta_{1}$$

$$L_{2} = oc_{1} \Delta \beta_{2}$$

$$(6.1)$$

En lo que sigue, la letra puesta como indice superior de un simbolo, indica el punto de la red en que se valua dicho sim bolo. Con este fin, se usará la red de la fig. 6.5

Tomando en cuenta su definición, las curvaturas en la superficie, se pueden calcular geometricamente en la forma que se indica en la fig. 6.6. De las definiciones anteriores se apré cia que

$$L_{1}^{J} = R_{1}^{J} \mathcal{P}_{1}^{J} = \infty_{1}^{J}$$

$$L_{2}^{J} = R_{2}^{J} \mathcal{P}_{2}^{J} = \infty_{2}^{J}$$
(6.2)

133

entonces

$$- \propto_{i,2}^{J} = \mathscr{P}_{i}^{J} \left(R_{i}^{H} - R_{i}^{J} \right) + R_{i}^{J} \left(\mathscr{P}_{i}^{N} - \mathscr{P}_{i}^{J} \right)$$

y en consecuencia (ver apéndice A-1).

$$\mathcal{L}_{12}^{T} = \frac{i}{R_{2}^{T} \varphi_{2}^{T}} \left[\left[\frac{R_{1}^{H}}{R_{1}^{H}} - i \right] + \left[\frac{\varphi_{1}^{H}}{\varphi_{1}^{T}} - i \right] \right]$$
(6.3)

En lo anternor, se ha supuesto que el sistema de curvas en la superficie es ortogonal; generalmente es necesario determi nar un sistema de curvas que cumpla con esta condición. La --solución de este problema puede conseguirse por medios analiticos, como lo ha hecho por ejemplo M.Rodríguez C. (86) para superficies como las de una cortina, o bien por medios numericos como se su giere aquí. Para este fin, considerese la figura 6.7; en esta figura se muestra una superficie del tipo de cortana y se definen cantidades que se usan a continuación. Para la determi nación del sistema de curvas ortogonales, es necesario fijar int cialmente dos de ellas; se escoge la curva A que concide con el borde de la cortina y la curva B que se localiza en el plano de simetria (se supone por simplicidad que la cortina es simé--Estas curvas se intersectan en el punto C. triea). Fijado es te punto que cumple la condición de ortegonalidad, se procede a determinar otro vecino a él, que se encuentra en el cruce de la curve B_i' , perpendicular a la curva de simetria, y la curva B_i' , perpendicular a la curva del bordo. Para ello es necesario ele gir y sobre las curvas : y Bz respectivamen

te. Este punto se determina de la condución,

134

 $\Delta \propto \int_{-\infty}^{\infty} - \frac{\Delta y / z}{\Delta x / z} \Delta y \Big|^{2}$ (6.4)

en que los atabolos unados en esta concolon se definen en lag figuras 6.7 (b), 6.7 (c), 6.7 (d). Una vez fijado este punto, se recorre la linea B usado la sc. 6.4, basta llemar a la base,

entonces se harra definido una curva similar a la B y es posi--ble iniciar otro recorrido semejante.

6.4 Geometria de la deformacion del modelo fisico.

> Definición de los desplazamientos. 6.4.1

La definición de desplazamientos es similar a la que han hecho Shnobrich - Newmark. Los desplazamientos W normales a la superficie media, se definen en donde estan localizadas los_ Si se supone que la deformación de eselementos deformables. tos elementos, debida al esfuerzo en la dirección normal a la su perficie, es despreciable, entonces todos los puntos alojados en el elemento deformable, se desplazaran la misma cantidad W.

Los desplazamientos en la dirección de las curvas sobre la superficie, es decir los desplazamientos U_i y U_2 , se definen en los puntos medios de las placas; el desplazamiento U,, en el punto medio de las placas alojadas en la dirección de las -curvas A, el desplazaciento U,, en forma correspondiente, en el punto medio de las placas en la dirección de las curvas "e.

Estas definiciones se indican en la fig. 6.8.

Adenás dol vector desplazamento, la deformación de la -

superficie se caractoriza mediante un vector rotación; efectivamente, al verificarse la deformación del sistema de elementos, dos puntos sucesivos, en general no tienen el mismo despla

zamiento W y en consecuencia, las placas giran una cierta canti dad con respecto a su posición inicial. Sin embargo, estas -rotaciones, no se deben unicamente a los desplazamientos W, si no que se deben también a los desplazamientos \mathcal{U}_i y \mathcal{U}_2 . Las ro taciones se definen en los mismos puntos que los desplazamien-tos U_1 y U_2 y se designan δ'_1 y δ'_2 ; siendo δ'_1 la rotación de la placa alojada en la dirección de la curva A, , encontrandose \mathcal{S}_1 en plano que contiene a la placa; \mathcal{S}_2 es la rotación de la placa alojada en la dirección A_2 . En la figs. 6.8 y 6.9 se caracterizan el vector desplazamiento y las rotaciones. En la fig. 6.10, se muestran los desplazamientos U, y U₂ y en la fig. -6.11 se ilustran los desplazamientos debidos a las rotaciónes - δ_1 y δ_2 en las direcciones de las placas, a una distancia gen<u>e</u> rica Z=1, de la linea media de cada placa.

6.4.2 Deformaciones en la superficie ($\mathfrak{S}_{i_1} \mathfrak{S}_{i_2} \omega$).

Para establecer las relaciones deformación-desplazamiento en el modelo, es necesario hacer una designación conveniente de los puntos en que se van a definir los desplazamientos. Una designación adecuada, puede ser aquella en que la posición de los puntos se dá en forma de coordenadas, como ocurre ejemplo en la

fig. 5.3. Sin embargo esta elección no sería adecuada en este caso particular, porque el número de indices necesarios result<u>a</u> ría demasiado grande. En su lugar, se usará la designación de los puntos, que se muestra en la fig. 6.5. Esencialmente_ esta designación consiste en indicar mediante letras mayusculas los centros de recuadros y los puntos en que se definen los de<u>s</u> plazamientos k y mediante letras minusculas, e indices los pu<u>n</u> tos secundarios en que se definen U y $T_{\rm c}$.

Se procede ahora a calcular las deformaciones en el modelo fisico. Considérese inicialmente, un arreglo de placas cobre la curva A, ligadas con elementos deformables; las pla cas son inicialmente rectangulares y ios elementos deformables_ hacen que esas placas adopten la forma de la curva.

En la fig. 6.9 a, se muestra el elemento deformable que corresponde al punto $\bar{}$. Las placas advacentes a ese elemento, experimentan desplazamientos \mathcal{U}_{i} y \mathcal{U}_{i} en la dirección de sus ejes lon jutudinales. El elemento deformable, tiene sus fibras en el plano, tangente a la superficie en el punto J y en las direc--ciones \mathcal{B}_{i} y \mathcal{H}_{i} , en la figura – la dirección de la tangente coincide con el eje horizontal. Para culcular las deformaciones en el elemento, es necesario proyectar los desplazamientos_ sobre la horizontal. Así resulta, que la deformación en el --elemento, foblido e los desplazamientos en la dirección \mathcal{H}_{i} , es:

137



100

en que
$$c_1^{\prime} = c_2^{\prime} \frac{p_1^{\prime}}{r_1}$$

$$u_i^{J_i+i} = \frac{\text{desplazamiento en la dirección} - 3_i}{3_i}$$
, calculado en el punto J_i+i .

Además, debido a la curvatura $k_i = \frac{1}{R}$ en la dirección de la cur va \mathcal{A}_i , al verificarse en el elemento \mathcal{I}_i , un desplazamiento nor mal \mathcal{A}_i , aparece una deformación adicional cuya magnitud es

$$e_{iw}^{J} = k_i^{J} W_J$$

(6.7)

Lo cual se deduce en la fig. 6.12. En forma enteramente analoga, puede deducirse que la deformación adicional debida a_ la curvatura en la superficie se escribe,

$$\boldsymbol{e}_{1\boldsymbol{u}}^{J} = \boldsymbol{l}_{1\boldsymbol{z}}^{J} \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{z}}^{J} \tag{6.8}$$

es àccir sustituyende $i = por k^2 y J = por k^2$ en la lig. -6.12. Superpontendo les deformaciones 5.6, 6.7 y 5.8, es pos<u>i</u> ble deducir la deformación total en el elemento, debida a todos

los desplazamentos posibles, esa deformación es,



(6.9)

.

en que selesustituido \mathcal{U}_{2}^{\prime} , por el valor medio del desplazamiento \mathcal{U}_{2} , de las bareadyacentes al elemento y que se encuentra sobre la curva \mathcal{B}_{2} , normal a la curva \mathcal{B}_{1} . En forma analoga, es posible deducir

$$e_{2}^{J} = \frac{u_{2}^{J_{2}+i} - u_{2}^{J_{2}-i}}{\infty} c_{2}^{J} + k_{2}^{J} W_{J} + l_{2i}^{J} \left(\frac{u_{i}^{J_{i}+i} + u_{i}^{J_{i}-i}}{2} \right)$$
(6.10)

Considerese ahora, la deformacion angular de un recuadro_ cualquiera, en cuyas esquinas se localizan los elementos deformables. En este recuadro, existen un cable y unos resortes, que por ahora no interesan y se omiten en la fig. 6.13. En e<u>s</u> ta figura, se indican los elementos desplazados, en un plano que continue a las placas J_N y J_L . Si las placas NM y LM, estuvieran contenidas en el mismo plano, la deformacion angular debida a los desplazamientos U_i y U_2 seria,

$$\omega_{K} = \frac{u_{z}^{J_{z+1}} - u_{z}^{J_{z+1}}}{\omega_{i}^{K}} + \frac{u_{i}^{h_{i+1}} - u_{i}^{J_{i+1}}}{\omega_{z}^{K}}$$
(6.11)

donde k designa el centro del recuadro

Debido a que en cada recuadro existe un valor para la ---torsión, de la superficie y que está valuada en el punto con---tral, la placa MN, forma un ángulo $\mathcal{A}_i^k = k_{i2} \propto \frac{k}{2}$ y la placa -LM el ángulo $\mathcal{A}_i^k = k_{ij} \propto \frac{k}{2}$ con el plano que contiene a las placas - (ver fig. 6.13). Debido a la existencia de estos ángulos, cuya magnitud depende también del tamaño de la red, además de la torsión de la superficie, la deformación angular de-biera escribirse,

$$\omega_{K(u)} = \frac{u_{a}^{k_{a+i}} \cos \mathcal{A}_{a}^{k} - u_{a}^{J_{a+i}}}{\infty_{i}^{k}} + \frac{u_{i}^{h,+i} \cos \mathcal{A}_{i}^{k} - u_{i}^{J_{i+i}}}{\infty_{a}^{k}}$$
(6.11)

Sin embargo, excepto para redes muy giandes, tales que una de las magnitudes , scamayor que veces el peralta, la -corección relativa a los ángulos μ , puede considerarse despreciable. La existencia de la torsión en la superficie, introdu ce una cantidad adicional en el cambio angular. Esta cantidad se expresa

$$W_{K(W)} = 2W_{K}k_{12} = \frac{W_{3} + W_{N} + W_{M} + W_{L}}{2}$$

y las curvaturas en la superficie, originan otra cantidad adi-cional de magnitud

140

de manera que la deformación angular total será



+ liz U + Lz Uz+1

(6.12)

Al actinir los desplazamientos en la superficie, en los puntos medios de las harres y en la dirección de ellas; por el_ hacho de calcular las deformaciones en la forma que se indica en la fig. 6.9 (y en la ec. 6), apartee un desplazamiento adreio nal para « en cada punto principal. Este desplazamiento adi--cional es la cantidad que permite establecer que las dos componentes de los desplazamientos en la superficie, quedan consideradas. Por estas razones, el desplazamiento total en el punto T es

$$W_{j}^{T} = W_{j} + (u_{i}^{j_{i+1}} - u_{i}^{j_{i+1}}) S_{i}^{j} + (u_{x}^{j_{x+1}} - u_{x}^{j_{x+1}}) S_{x}^{j}$$
(6.13)

en que $S_1^T = 5 \times n \frac{\varphi_1^T}{2}$ $S_2^T = 5 \times n \frac{\varphi_2^T}{2}$ (6.14)

Esta derivación se justifica en la rig. 6.9.

6.4.3 Campies en las curvaturas y en la torsión de la su perficie inicial.

141

"Al verificarse las rotaciones en las placas que forman ---

el mudelo fusico de estermon, de ornouran a dificaciones en la_

- curvatura inicial. En la Pag. 6.14, se aprecia este efecto. -
- Eluns modificacionen en la curvatura introducen leformaciones -

que son proporcionales a lu distancia ε_1 modidu a partir de la su perficie modia de los elementos deformables. En lugar de calcular curectamente estos cambios de curvatura, se procede a valuar sus efectos. Fara este fin considerese la fig. 6.8 en que aparecen las rotaciones ε_1 y ε_2 de las placas en las direcciones ε_2 y ε_2 respectivamente; debido a la rotación ε_1^2 , fa linea me dia vertical de la placa en la dirección ε_2 , se desplaza en esa dirección la cantidad ε_1^2 . Anora considerese la fig. 6.13 en_ que se muestran estas rotaciones y el desplazamiento que originan a la distancia ε_1 . Estos desplazamientos introducen de--formaciones que se calculan en la misma forma que aquellas que_ fueron deducidas en 6.4.2, es decir

$$\Xi H_{i}^{J} = \Xi \left(\frac{H_{i}^{J_{i+1}} - H_{i}^{J_{i-1}}}{\omega C_{ij}} C_{i}^{T} + L_{i2} - \frac{H_{i}^{J_{2+1}} + H_{2}^{J_{2-1}}}{2} \right)$$

En esta deformación se ha introducido la rotación \mathcal{A}_{i}^{2} , para indicar que se trita de un cambio en la curvatura \mathcal{A}_{i}^{2} de la superficie, de manera que unando cata rotación, se puede escribir,

142



y analogamente

$$\mathcal{X}_{2}^{J} = \frac{\mathcal{X}_{2}^{J_{2+1}} - \mathcal{X}_{2}^{J_{2-1}}}{c_{2}^{J}} - c_{2}^{J} + l_{21}^{J} - \frac{\mathcal{X}_{2}^{J_{2+1}} + \mathcal{X}_{2}^{J_{2-1}}}{2}$$
(6.16)

Fara la completa analogia con los resultados del inciso -6.4.2, soria necesario introducir la rotación al rededor de la_ normal a la superficie; designando esta rotación con S, el tér mino adicional en X_i^T resultaria un $\neq C^* k_i^T$; sin embargo esta cantidad es espreciable.

Debido a las rotaciones en los planos de las placas que forman un recuadro, se origina a la distancia $\neq 0$, una modificación en el ángulo que forman las placas en la dirección β_1 con_ las de la dirección β_2 . Esta modificación constituye real--mente con aumento en la torsión de la superficie. Empleando la analogia anterior relativa a las expresiones de las deformaciones $\beta_1 \beta_2$ y con las deformaciones producidas por \neq y β_2 , es_ posible escribir, por analogia con β_1 modificación a la torsión de la superficie en la forma

 $G^{k} = \frac{X_{2}^{l_{2+1}} - X_{2}^{l_{2+1}}}{\infty_{1}^{k}} + \frac{X_{1}^{n_{1+1}} - Y_{1}^{l_{1+1}}}{\omega_{1}^{k}} + \frac{I_{12}^{k}}{V_{1}^{l_{1+1}}} + \frac{I_{21}^{k}}{V_{2}^{l_{2+1}}}$

143

(6.17)

· · · · · ·

6.4.4 Forma explicita para las rotaciones 👌 y 怕

Para poder expressar los cambios de curvatura \mathscr{X}_{1} y \mathscr{X}_{2}^{*} y el cambio en la torsión 3 , es necesario conocer las cantida--des 3' y \mathscr{X}_{1}^{*} . Estas cantidades, se deducen ahora, empleando_ los desplazamientos totales %'ver ec. 6.13. Con este fin, con siderarse la fig. 6.16. Los des lazamientos \mathscr{W}_{1}^{*} y \mathscr{W}_{1}^{*} , deben -ber projectaros en la dirección de la normal al eje de la placa y en la dirección de la tangente les lon cada parto. La dif<u>e</u> rencia de las projecciones sobre las normales a cada placa en -las pentas extremas, permite calcular la rotación $\mathscr{E}_{1}^{(i,i)}$. Al_ projectar sobre la tangente local el desplazamiento a del extremo de cada placa, se consi, ue cancelar estas proyecciones en los principales. Le otra manera las proyecciones in--trodecirán deformeriones adicionales. Ste hecho se ilustra -en la fig. 6.16.

El cambio angular 2000 ne juode escribur entonces:

 $X_{i}^{J_{i+1}} = 2 \frac{W_{j}^{J} \Lambda_{i}^{J} - W_{\phi} \Lambda_{i}^{\phi}}{(\alpha_{ij} + \alpha_{iq})}$

$$= \frac{2}{\alpha_{i}^{q} + \alpha_{i}^{j}} \left[\left(W_{j} D_{i}^{j} + (u_{i}^{j+1} - u_{i}^{j+1}) t_{i}^{j} + (u_{2}^{j+1} - u_{3}^{j+1}) 5_{2}^{j} D_{i}^{j} \right) \right]$$

$$-\left(W_{q}, D_{1}^{Q} + \frac{1}{2}\left(u_{1}^{J_{1}, -1}, u_{2}^{Y_{1}}\right) \tilde{5}_{1}^{Q} + \left(u_{2}^{Y_{1}, +1}, u_{3}^{Y_{1}, -1}\right) \tilde{5}_{3}^{Q}, D_{1}^{Q}\right)\right)$$

(6.18)

en forma analoga

$$\begin{split} \mathcal{B}_{2}^{j_{2-i}} &= \frac{2}{e \kappa_{2}^{j} + e \kappa_{2}^{j}} \left[\left(W_{j} D_{j}^{j} + (U_{2}^{j_{2+i}} - U_{2}^{j_{2-i}}) t_{2}^{j} + (U_{i}^{j_{i+i}} - U_{i}^{j_{i-i}}) S_{i}^{j} D_{2}^{j} \right) \\ &- (W_{T} D_{2}^{j} + \frac{1}{2} (U_{2}^{j_{2-i}} - U_{2}^{t_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{i}^{t_{i+i}} - U_{i}^{t_{i-i}}) S_{i}^{j} D_{2}^{T} \\ &- (W_{T} D_{2}^{j} + \frac{1}{2} (U_{2}^{j_{2-i}} - U_{2}^{t_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{i}^{t_{i+i}} - U_{i}^{t_{i-i}}) S_{i}^{j} D_{2}^{T} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j} + \frac{1}{2} (U_{2}^{j_{2-i}} - U_{2}^{t_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{i}^{t_{i+i}} - U_{i}^{t_{i-i}}) S_{i}^{j} D_{2}^{T} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j} + \frac{1}{2} (U_{2}^{j_{2-i}} - U_{2}^{t_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{i}^{t_{i+i}} - U_{i}^{t_{i-i}}) S_{i}^{j} D_{2}^{T} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j} + \frac{1}{2} (U_{2}^{j_{2-i}} - U_{2}^{t_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{i}^{t_{i+i}} - U_{i}^{t_{i-i}}) S_{i}^{j} D_{2}^{T} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j} + \frac{1}{2} (U_{2}^{j_{2-i}} - U_{2}^{t_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{i}^{t_{i+i}} - U_{i}^{t_{i-i}}) S_{i}^{j} D_{2}^{T} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j} + \frac{1}{2} (U_{2}^{j_{2-i}} - U_{2}^{t_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{i}^{t_{i+i}} - U_{i}^{t_{i-i}}) S_{i}^{j} D_{2}^{T} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j} + \frac{1}{2} (U_{2}^{j_{2-i}} - U_{2}^{t_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{i}^{t_{i+i}} - U_{i}^{t_{i+i}}) S_{i}^{j} D_{2}^{T} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j_{2}} - U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{2}^{j_{2}} - U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{i}^{t_{i+i}} - U_{i}^{t_{i+i}}) \tilde{S}_{i}^{j} D_{2}^{j} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j_{2}} - U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} + (U_{i}^{j_{2}} - U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j_{2}} - U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j_{2}} + U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j_{2}} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j_{2}} - U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j_{2}} + (U_{i}^{j_{2}} - U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j_{2}} + U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j_{2}} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j_{2}} - U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j_{2}} + (U_{i}^{j_{2}} - U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j_{2}} + U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j_{2}} \\ &- (\tilde{W}_{T} D_{2}^{j_{2}} - U_{2}^{j_{2}}) \tilde{S}_{i}^{j_{2}} + U_{2}^{j_{2}$$

En estas equaciones se la utilizado la rotación

$$t_{i}^{T} = t_{an} \frac{\mu_{i}^{T}}{2}$$

$$\bar{s}_{i}^{q} = s_{en} \frac{\mu_{i}^{q}}{2}$$

$$b_{i}^{T} = (c_{i}^{T})^{-1}$$

$$(6.20)$$

y se ha introducido la cantidad g $(\infty_{i}^{T} + \infty_{i}^{T})$ como longitud de la placa que se puede sustituir por 🗐 .

Subtituyendo las contidades & y X, , así como las que corresponden a strikt, trikt, strikt y to , que se deducen en forna --analoga, en las equaciones 6.15, 6.17 y 6.17, se leduce, de la ee. 6.15.

$$\begin{split} \mathcal{S}_{i}^{J} &= \frac{2C_{i}^{J}}{\alpha_{i}^{J}} \left[\left[W_{L} \Delta_{i}^{L} + (u_{i}^{J_{1}} - u_{i}^{J_{1+1}}) t_{i}^{L} + (u_{2}^{J_{2+1}} - u_{3}^{J_{2+1}}) S_{2}^{L} \Delta_{i}^{L} \right] / (\alpha_{i}^{J} + \alpha_{i}^{L}) \\ &- \left[W_{J} \Delta_{i}^{J} + \frac{i}{2} \left(u_{i}^{J_{1+1}} - u_{i}^{J_{1+1}} \right) S_{i}^{J} + \left(u_{2}^{J_{2+1}} - u_{3}^{J_{2+1}} \right) S_{2}^{J} \Delta_{i}^{J} \right] / (\alpha_{i}^{J} + \alpha_{i}^{L}) \\ &- \left[W_{J} \Delta_{i}^{J} + \left(u_{i}^{J_{1+1}} - u_{i}^{J_{1+1}} \right) t_{i}^{J} + \left(u_{2}^{J_{2+1}} - u_{3}^{J_{2+1}} \right) S_{4}^{J} \Delta_{i}^{J} \right] / (\alpha_{i}^{Q} + \alpha_{i}^{J}) \\ &+ \left[W_{Q} \Delta_{i}^{Q} + \frac{i}{2} S_{i}^{Q} \left(u_{i}^{J_{1}} - u_{i}^{J_{i+1}} \right) + \left(u_{3}^{J_{2+1}} - u_{3}^{J_{2+1}} \right) S_{2}^{Q} \Delta_{i}^{J} \right] / (\alpha_{i}^{Q} + \alpha_{i}^{J}) \right] \\ & \left(C_{i} \geq 1 \right) \end{split}$$

145

6.5 Consideración del efecto de deformación por esfuerzo cortante.

Aquí como en el capítulo 3, so buce uso de la función \mathcal{Y} para incluir el efecto de la beformación por cortante. Esta función, según se dedujo en el cap 3, origina deformaciones adicionales similares e las de convatura, pero proporcionales a χ^3 . La función \mathcal{Y} se uncuentra digada a las fuerzas cortan tes Q₁ y Q₂, mediante las relaciones

$$Q_{1} = -\frac{2}{3} \operatorname{Gt} \frac{y_{1}}{x_{1}} = -\frac{2}{3} \operatorname{Gt} \overline{\vartheta}_{1}$$

$$Q_{2} = -\frac{2}{3} \operatorname{Gt} \frac{y_{12}}{x_{2}} = -\frac{2}{3} \operatorname{Gt} \overline{\vartheta}_{2}$$
(6.24)

de manera que si se acepta que la fuerza cortante introduce ---una deformación en la forma de una enduente, pue'e aceptane que V tiene el sentido de un desplamaziento. A ora bien, la rotación adicional que introduce el cortante en la deformación -del modelo no se distribuye linealmente y de suponerlo así se t tendría un error considerable. For esta razon, se adopta aquí el man o resultado que para el costena continuo. Este result<u>a</u>

```
do según se indica arriba, establece que la deformación es pro-
porcional a la tercera jotencia de 2.
```

Lue ourvaturas chieronales pre aparecel debidas – a la – runción \mathcal{V} son:

$$\mathcal{X}_{i}^{JC} = \frac{\tilde{\delta}_{i}^{J_{i+1}} - \tilde{\delta}_{i}^{J_{i+1}}}{\alpha_{i}^{J}} C_{i}^{J}$$

$$\mathcal{X}_{2}^{JC} = \frac{\tilde{\delta}_{2}^{J_{2+1}} - \tilde{\delta}_{2}^{J_{2+1}}}{\alpha_{2}^{J}} C_{2}^{J}$$

$$\tilde{\delta}_{k}^{C} = \frac{\tilde{\delta}_{2}^{J_{2+1}} - \tilde{\delta}_{2}^{J_{2+1}}}{\alpha_{2}^{J}} + \frac{\tilde{\delta}_{i}^{n_{i+1}} - \tilde{\delta}_{i}^{J_{i+1}}}{\alpha_{2k}}$$
(0.25)

en que las cantidades $\tilde{\mathcal{V}}$, y $\tilde{\mathcal{V}}_{z}$ son las rotaciones debidas al corvante y se calculan en la forma

$$\overline{\delta}_{2}^{J_{1+1}} = 2 \frac{\Psi_{3} D_{1}^{3} - \Psi_{2} D_{1}^{2}}{(\alpha_{1}^{3} + \alpha_{1}^{2})}$$

$$\overline{\delta}_{2}^{J_{2-1}} = 2 \frac{\Psi_{3} D_{2}^{3} - \Psi_{7} D_{1}^{7}}{(\alpha_{1}^{3} + \alpha_{2}^{7})} \qquad (6.26)$$

Las expresiones correspondientes a X_i , X_i , $y \in C_i$, se deducen mediante sustituciones similares a las practicadas antes.

Resultantes de Inerza (N., Na, Niz, Na) , de momento (M., Mz. 6.6 M_{α} , M_{α_1}) y de cortante (Q, Q₂)

En la discusión previa se han tratado los problemas rela-

147

tivos e las oformaciones en la superficie media y a los cambios Sin encargo no se ha considerado que las fichas de curvatura. a le distancia x^* le las fichas en la parte media de cada ele monto, poseen das hongitos distinta. De hecho, a una distan-cin X , la longitur de las fichas es (-2k) medida en la di--rección de la cerva B. y 1976.) en la dirección de la curva

Así resulta que las deformaciones en la superficie a la distancia # son:

$$P_{C_{1}} = \frac{C_{1}}{1 + \frac{R}{R_{1}}} = \frac{C_{1}}{C_{1}}$$

$$P_{C_{2}} = \frac{C_{2}}{1 + \frac{R}{R_{2}}} = \frac{C_{2}}{C_{2}}$$

$$(6.27)$$

$$P_{W} = \frac{W}{C_{1}C_{2}}$$

El electo de caubi de geometria en las superficies paralelas, de tema en cuente al calcular los resultantes mediante in tegnación, a travez del espesor, de los esfuerzos deducidos mediante la log de Hooke . La ley de Hooke establece que

$$P_{\tau_{1}} = \frac{E}{1 - v^{2}} \left(e_{1} + v e_{2} \right) c_{1}^{-1}$$

$$P_{\tau_{1}} = \frac{E}{1 - v^{2}} \left(e_{2} + v e_{1} \right) c_{2}^{-1}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{1} \left(\omega \right) c_{1}^{-1} c_{2}^{-1}$$

$$\left(c_{1} c_{3} \right)$$

$$\left(c_{1} c_{3} \right)$$

y subus esfuenzos notume en elementes cuya longitud es distin-ta de 1, por ejemplo p_1 motua en una sección que mide $d \ge c_2$.

148

Vurificendo la frequención como spondiente os posible de-

ducir

149

$$N_{1} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{P}{U_{1}} C_{2} d =$$

= $\frac{Et}{1 - U^{2}} (e_{1} + Ue_{2}) - \frac{Et^{3}}{12(1 - U^{2})} D K_{1}$
$$N_{2} = \frac{Et}{1 - U^{2}} (e_{2} + Ue_{1}) + \frac{Et^{5}}{12(1 - U^{2})} D K_{2}$$

$$N_{12} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} P_{U_{12}} C_{2} d =$$

(6.29)

$$= G t w - \frac{G t^{3}}{12} D G$$

$$N_{21} = G t w + \frac{G t^{3}}{12} D G$$

$$= N_{12} + \frac{G h^{3}}{G} D B$$

$$A_{1} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} P(\zeta_{2}, Z dZ)$$
$$= \frac{Et^{3}}{i2(1-v^{2})} \left[(\partial l_{1} + v dL_{2}) + D dL_{1} \right]$$

$$M_{2} = \frac{E L^{2}}{12 (1 - U^{2})} \left[(H_{1} + UH_{1}) - DC_{2} \right]$$

$$M_{12} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu}{U_{12}} C_{2} Z dZ$$

$$= \frac{E L^{3}}{12 (1 + U)} \left(\overline{C} - \frac{\omega}{2R_{1}} \right)$$

(6.30)

$$M_{21} = \frac{Et^{3}}{12(1+2)} \left(\delta - \frac{\omega}{2R_{2}}\right)$$
$$= H_{1} + \frac{Et^{*}}{24(1+2)} D\omega$$

En estas ocuaciones de ha intra ducido la rotación

$$D = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

(6.31)

Las resultantes de mellento flexionante, que corresponden_ a lus deformaciones por cortante, se deducen al considerar el hecho de que la distribución de las deformaciones es proporcio nal a \mathbb{Z}^3 . Las resultantes son:

$$M_{1}^{c} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{E}{(1-v^{2})} \frac{z^{5}}{t^{2}} \left(\mathcal{H}_{1}^{c} + v\mathcal{H}_{2}^{c}\right) dz$$

$$= \frac{Et^{5}}{i20(1-v^{2})} \left[\mathcal{H}_{1}^{c} + v\mathcal{H}_{2}^{c}\right]$$

$$M_{2}^{c} = \frac{Et^{5}}{i20(1-v^{2})} \left[\mathcal{H}_{2}^{c} + v\mathcal{H}_{2}^{c}\right]$$
(6.32)

 $M_{12}^{c} + M_{21}^{c} = \frac{4t^{3}}{120}(3^{c})$

150

6.7 Pobre la deducción del elsopma de consecuención de constituina-

"I sistema de eculationes de equilibrio puble inducirse, en madelos finicos del tipo pue aquí se discute, mediante el empleo de distantas tecnicas; - un di madelo Sanobeich-Lewaark ⁽⁸³⁾, - se emplea el principio del trabajo virtual, en tanto que en la formulación matricial de argyris⁽²²⁾, se hace uso de los teoramas le custigliano. Estos dos ejemplos son realmente técnicas del cálculo le variaciones^(65,22) y se puede usar directimente el cálculo de variaciones, en la forma en que describe Suler (ver cap. 1) en su tratamiento mediante diferencias finitas. Este tratamiento ha sido empleado en distintos problemas carticiares^(1,2,69); en la teoría de cascarones, finitas.

151

Aquí se pres nou un tritamiento similar al de Edier, porque, en este caro, hace mas opmpresible la aparición de rientos términos y porque sigue paralelamente los desarrolios de las ecuaciones etaboradas antes en el sistema continuo.

En un cascarén idealizado metiante un motelo, es positie calcular la correcta le telepreseión del conjunto de elementas leferendares que le constituyen; en los puntos principuies es posible site distin la energía de deformación debida a tierza axial (2) y a momento flexionante (2). Esta energía de deformación est

 $V_{N,M} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left\{ \left(N_{i}^{J} e_{i}^{J} + M_{i}^{J} d_{i}^{J} + N_{2}^{J} e_{2}^{J} + M_{2}^{J} d_{2}^{J} + \right. \right. \right\}$ $+M_1^{Jc}H_1^J+M_2^{Jc}H_3^J)\propto J^{J}\propto J^{J}$ (5, 33)

en que m es el número total de puntos principales, incluyendo aquellos que se encuentran cerca de las fronteras. Pára los puntos que estan cerca de las fronteras, las fuerzas o las deformaciones se escogen de modo que se satisfagan las condiciones de frontera. Lo mismo deberá hacerce con los momentos y las curvaturas.

La energía de deformación total, debe incluir también los elementos deformables que se localizan en los recuadros y las placas deformables en que se supone concentrada la deformación por cortante transversal para cada tramo. Esta energía se escribe

$$V_{s,H,Q} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left\{ \left(N_{12}^{K} \omega_{k} + N_{21}^{K} + M_{12}^{K} \overline{\sigma}_{k} + M_{12}^{K} \overline{\sigma}_$$

en que m, es el número de recuadros

ħ;

De esta manera, puede estructurarse la energía de deformación total, para el sistema que constituye el cascarón, en la forma

$$V = V_{H,M} + V_{S,H,Q} \qquad (6.35)$$

152

134 4

Las ecuaciones de equilibrio pueden deducirse a partir de V, mediante derivación, en virtud de que el sistema elástico es discreto. Si se protendiera encontrar la ecuación de equilibrio en la dirección de la curva \mathcal{A}_i y en el punto j_{i+i} , ello se conseguiria haciendo.

$$\frac{\partial V}{\partial u_i^{s+1}} = X_i^{s+1} \tag{6.36}$$

en que X³⁴⁴es la fuerza que actua en el punto, y en la direccion /s, .Pero calcular el valor total de V como se expresa en las ecs 33, 34, y 35, seria complicado e innecesario porque solamente unos terminos contendran a la variable con respecto a la cual, interesa derivar.

Entonces para deducir la scuacion de equilibrio 36, en la direccion de la curva β_i , la cantidad V debe calcularse su---mando unicamente aquellos terminos que contienen a $U_i^{A_{ell}}$. En este caso, la energia de deformacion $V_{\mu,M}$ se calcula como

$$V_{N,M} = \frac{1}{2} \left(\sum \left\{ (N_{1}^{\lambda} e_{1}^{\lambda} + M_{1}^{\lambda} k_{1}^{\lambda} + M_{1}^{\lambda} k_{1}^{\lambda} + M_{1}^{\lambda} k_{1}^{\lambda} + M_{1}^{\lambda} k_{1}^{\lambda} + M_{2}^{\lambda} k_{2}^{\lambda} + M_{2}^{\lambda} + M_{2}^{\lambda} k_{2}^{\lambda} + M_{2}^{\lambda} + M_{$$

en forma análoga,

$$V_{B_{1}} H_{1} q = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2} \left(N_{1}^{\lambda} \omega^{\lambda} + N_{1}^{\lambda} \omega^{\lambda} + N_{2}^{\lambda} \omega^{\lambda} + M_{1}^{\lambda} \omega^{\lambda} + M_{1}^{\lambda} \omega^{\lambda} + Q_{2}^{\lambda} \overline{P}_{1}^{\lambda} + Q_{2}^{\lambda} \overline{P}_{2}^{\lambda} \right) \frac{1}{2} (0.38)$$

$$(0.38)$$

Así, resulta que las acuacionas de aquilibrio se dedaces en la forma

D u/**

pare la cirección 2, , en tanto que como

CONTRO ON THERE OF IN CONTROLS IN OUTILIATION AN LAURZON ON
dirección \mathcal{B}_2 . En forme análogu, la estuación en la dirección normal a la sur-effecte en or canto \mathcal{I} provida sep

$$\frac{\partial (V_{N,M} + V_{S,H,Q})}{\partial W_J} = Z_J \qquad (5.41)$$

y finalmente, se cuede de main la secterión que conversado a la variable Ψ , mediante la expresión,

$$\frac{\partial (V_{N,M} + V_{S,H,Q})}{\partial Y_{c}} = 0 \qquad (1.4.7)$$

Uni fedición le lus eccletones correspontientes, resulta femasiato farma y apús se omite, mostrántose for depurato (figs f.17, c.13, f.17 y 6.20) los resultados de esta derivación. Fara el culo forticidar de cascarones cilináricos, los resultados se consignan en forma menos breve en el trabajo de chuane y Veletsos(72).

El manejo de las secarciones 29, 40, 41, 4, 45, 55 forma explis ta indicado en las visso 4.12, 4.12, 5.19 y 1.20, resulta compleja por los medios ordinarios de citado 5 dolamente en riecada su polícación, cambo el contexa de estadones correspondiente conte torsar por por medio de una compatidore duvital.

154

cascarones rebujados de espesor variable y de doble curvatura. Consideración de las condiciones de frontera.

Como un caso particular de el sistema de cuatro ecuaciones deducido en la sección 6.7, es posible obtener un sistema de tres ecuaciones en las variables $\mathcal{U}_{\cdot}, \mathcal{U}_2$ y \mathcal{W} . Para agregar simplicidad, se habrán de introducir algunas consideraciones adicionales. Estas consideraciones son puramente geométricas y toman en cuenta el hecho de que por tratarse de cascarones rebajados, la geometría de la superficie puede suponerse representada por la geometría del plano en que se proyecta la superficie del cascarón. Así, resulta aceptable suponer que la separación de la malla es constante, es decir

 $\omega_1 = \text{constante}$

$\infty_2 = \text{constante}$

Por otro lado si se suponeqque la superficie del cascarón está formada mediante arcos de círculo (cuyo radio es variable) que se apoyan o deslizan en otra curva perpendicular (según se discutió en la sección 6.3), se puede aceptar que el ángulo \mathcal{P}_i permanece constante a lo largo de las líneas que contienen a

155

As.

los arcos de circulo. Bajo estas consideraciones es posible escribir el sistema de ecuaciones que se presenta en un grupo de hojas por separado al final de este capítulo. En esta presentación, se encuentran las tres ecuaciones de equilibrio que corresponden a un punto general y a un punto situado en un borde libre. En este caso minicular, el slotema le consciones correspondiente o plantes en la micma forma que se lescribió en la sección o.º, por la liferencia de que co introducen las conditiones de frantema consectondiences y no se toman en cuenta las partes que que in fuera del borde libre. En la fig. 6.21, se describe esta situación. El hecno de que el momento y la fuerza en la dirección normal al borde en el punto 1, detan ser nuice, origina que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_{2}^{J} &= -\mathcal{V}\mathcal{Q}_{q}^{J} \\
 \mathcal{X}_{2}^{J} &= -\mathcal{V}\mathcal{H}_{q}^{J}
 \end{aligned}
 \left. \left(6.43 \right) \right.$$

for ser,

 $\begin{array}{l} N_{2}^{J} = Et(e_{1} + ve_{1}) = 0 \\ Et^{3} \\ M_{2}^{J} = \frac{Et^{3}}{12(1 - v^{2})} \left(k_{2} + vk_{1} \right) = 0 \end{array} \right\}$ (6.44)

custituyento las ecuaciones 6.43 en la expresión de la enernia de deformación, en posible dedacio el cintema de ecuacionos de equinimie, nuevamente, mediante la aplicación del principio de factionnal. Das ecuaciones de muestran en hojas

6.9 Deducción de un mastema de ecuaciones de compatibilidad



En cota sección de recura anciatez de ecusciones para el modelo físico, en jes e atinica la malogía estáticogeométrica desarrollada en el apéndice A5 y utilizada en el capítulo 2. Las ecuaciones que aquí se deducen, son análogas a las desarrolladas en el capítulo 2 y se emplea la misma analogía que permite tomar en cuenta la deformación por cortante transversal.

El sistema de ecuaciones, se dedujo pensando en la posibilidad de que la obtención de los eceficientes, fuese hecha en una computadora digital,* por esta razón, la malla de la fig 6.22, no conserva la notación anterior en cuanto a la designación de los puntos.

Cuando en las expresiones para los cambios de curvatura, deducidos en la sección 6. , se desprecia el efecto de los desplazamientos y , se pueden obtener expresiones simplificadas que son las que se usaron aquí. Las expresiones resultantes, son aproximadamente válidas para cascarones rebajadas y se escriben,

$$\mathcal{X}_{n}^{T} = \Gamma_{1}^{J} \left[\mathcal{S}_{1}^{J} W_{J-1}^{-2} - 2 W_{J} \mathcal{S}_{1}^{J} + W_{J+1} \mathcal{S}_{1}^{J+1} \right]$$
(6.45)

 $X_{2}^{J} = r_{2}^{J} \left[D_{1}^{J} W_{1} - 2 W_{1} J_{2}^{J} + J_{2}^{K} W_{K} \right]$ (6.46)

en tanto que el cambio de torsión en el punto j_1 se escri-

be,

157

 $\sigma_{j} = \alpha_{j} \left[W_{k+1} \bar{S}^{k+1} + W_{j} \bar{S}^{J} - W_{j} \bar{S}^{J+1} - W_{k} \bar{S}^{k} \right] (6.47)$

* Actualmente, lassección de análisis numérico del Instituto de Ingeniería, elabora un programa para el empleo de les ecuaciones que aquí se deducen en el diseño de cortinas. en estas eculciones se ha utilizado la notación

$$F_{i}^{J} = \frac{12 c_{i}^{J}}{\alpha_{i}^{J} (\alpha_{i}^{J-1} + 10 \alpha_{i}^{J} + \alpha_{i}^{J+1})}$$

$$F_{2}^{J} = \frac{12 c_{2}^{J}}{\alpha_{3}^{J} (\alpha_{2}^{K} + 10 \alpha_{3}^{J} + \alpha_{2}^{J})} \qquad (6...3)$$

$$G_{J_{1}} = \frac{1}{\alpha_{i}^{J_{1}} \alpha_{i}^{J_{2}}}$$

$$= \frac{1}{\alpha_{i}^{J_{1}} \alpha_{i}^{J_{2}}}$$

que regultan de sujoner que las cantilades & varian sobre la superficie como una parábola de segundo juano.

Debito a la analogia encâtico-geométrica, co goste en-

$$N_{z}^{J} = r_{1}^{J} \left[\mathcal{S}_{1}^{J+1} \mathcal{Y}_{J+1}^{-} - 2\mathcal{Y}_{J}^{J} \mathcal{S}_{2}^{J} + \mathcal{Y}_{J-1}^{J} \mathcal{S}_{1}^{J-1} \right] \qquad (\dots, \dots, \dots)$$

$$N_{1}^{J} = r_{2}^{J} \left[\mathcal{Y}_{K}^{-} \mathcal{S}_{2}^{K} - 2\mathcal{Y}_{J}^{-} \mathcal{S}_{2}^{J} + \mathcal{Y}_{J}^{-} \mathcal{S}_{1}^{J} \right]$$

$$N_{12}^{J_1} = N_{21}^{J_1} = S_{J_1} = \mathcal{U}_{J_1} [\mathcal{Y}_{k+1} \bar{\mathcal{J}}^{k+1} + \mathcal{Y}_{\mathcal{J}} \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}}^{J} - \mathcal{Y}_{3+1} \bar{\mathcal{J}}^{3+1} - \mathcal{Y}_{n-1} \bar{\mathcal{J}}^{n-1}]$$

$$(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$$

y febido a la analoría presentada en el veritilo , regue-

$$Q_{id_{3}} = \frac{2(Y_{i+1}, \Delta_{i}^{i+1} - Y_{j}, \Lambda_{i}^{j})}{(\alpha_{i}^{j+1} + \alpha_{i}^{j})} k_{ij}$$

$$Q_{id_{3}} = \frac{2(Y_{i}, \Delta_{i}^{j} - Y_{j}, \Delta_{i}^{j})}{(\alpha_{i}^{j+1} + \alpha_{i}^{j})} k_{ij}$$

La rotación total de pala elemento se leduce en la forma

En cuanto a la dedución del sistema de ecarciones, se sigue uquí el mismo camino deserito en la sección 6.7 . En este caso, la energía de deformación se escrite en la forma

$$V = \frac{1}{2} \left[\sum \left(\left\{ N_{i}^{\lambda} \mathcal{C}_{i}^{\lambda} + N_{2}^{\lambda} \mathcal{C}_{2}^{\lambda} + M_{i}^{\lambda} \mathcal{J}_{i}^{\lambda} + \lambda = I, J, k, J - i, J + i \right\} \right)$$

$$+ N_{2}^{\lambda} \mathcal{J}_{2}^{\lambda} \left\{ \omega_{i}^{\lambda} \omega_{2}^{\lambda} \right\} + \sum \left(\left\{ k_{i}^{\lambda} N_{i}^{\lambda} + k_{2}^{\lambda} N_{2}^{\lambda} \right\} \omega_{i}^{\lambda} \omega_{2}^{\lambda} \right) \right)$$

$$+ \sum \left(\mathcal{Q}_{2}^{\lambda} \mathcal{J}_{2\lambda} \right) \omega_{i}^{\lambda} \omega_{2}^{\lambda} + \sum \left(\mathcal{Q}_{i}^{\lambda} \mathcal{J}_{i}^{\lambda} \right) \omega_{i}^{\lambda} \omega_{2}^{\lambda} \right)$$

$$+ \sum \left(\left\{ Q_{2}^{\lambda} \mathcal{J}_{2\lambda} \right\} \omega_{i}^{\lambda} \omega_{2}^{\lambda} + \sum \left(\mathcal{Q}_{i}^{\lambda} \mathcal{J}_{i}^{\lambda} \right) \omega_{i}^{\lambda} \omega_{2}^{\lambda} \right) \right\}$$

$$+ \sum \left(\left\{ S_{\lambda} \omega_{\lambda} + H_{\lambda} \mathcal{G}_{\lambda} \right\} \omega_{i}^{\lambda} \omega_{2}^{\lambda} \right)$$

$$+ \sum \left(\left\{ S_{\lambda} \omega_{\lambda} + H_{\lambda} \mathcal{G}_{\lambda} \right\} \omega_{i}^{\lambda} \omega_{2}^{\lambda} \right) \right\}$$

$$+ \sum \left(\left\{ S_{\lambda} \omega_{\lambda} + H_{\lambda} \mathcal{G}_{\lambda} \right\} \omega_{i}^{\lambda} \omega_{2}^{\lambda} \right)$$

Mediante el empleo de la ley de Hooke, de operation las des formaciones, en términos de las fortas const

$$e_{i}^{J} = \frac{1}{E_{j}t_{j}} \left[N_{i}^{J} - V N_{z}^{J} \right] = T_{j}^{-1} \left[K_{i}^{J} - V N_{z}^{J} \right]$$

 $\mathbf{e}_{2}^{\mathbf{j}} = \mathbf{E}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{j}'} \left[\mathbf{N}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{j}} - \mathbf{\mathcal{U}} \mathbf{N}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{j}} \right]$ $\omega_{j_1} = \frac{1}{q_j t_{j_1}} S_{j_1} = q_{j_1}^{-1} S_{j_1}$

.

.

(* * ***)

y los momentos, mediante los cambios le carvatora y torsión en la forma:

$$M_{i}^{J} = \frac{E_{r} t_{r}^{3}}{i2(1-v^{2})} \left[\mathcal{H}_{i}^{J} + v \mathcal{H}_{2}^{J} \right] = E_{J}^{"} \left[\mathcal{H}_{i}^{J} + v \mathcal{H}_{2}^{J} \right]$$

$$M_{2}^{J} = E_{J}^{"} \left[\mathcal{H}_{2}^{J} + v \mathcal{H}_{i}^{J} \right]$$

$$(0.57)$$

$$\mathcal{H}_{2} = G_{J}^{"} \left[\mathcal{H}_{2}^{J} + v \mathcal{H}_{i}^{J} \right]$$

La ecuación de equilibrio se denuce nuevamente mediante el empleo le los teoremas de Castigliano en la forma

$$\frac{\partial V}{\partial W_J} = \frac{4}{3}$$
(6.58)

y la ecuación de compatibilitad se deduce en la forma,

$$\frac{\partial V}{\partial Y_r} = 0 \qquad (6.59)$$

Los resultados de estas demivaciones para el caso de puntos generales sin confición le frontera, se muestran en la forma de operadores, en los fagores 6.23. 6.24, 0.25 y 6 160

6. 6. Las conficience de frontera imprestas en un borde li-

bre como el initato en la fig. 5.21, se complen escribien-

$$\begin{cases}
\psi_{j} = 0 \\
\psi_{2j} = -\psi_{ij} \\
\psi_{ij} \\
\psi_{$$

los results for the third end of the term of the second second second second second second second second second



MODELO FISICO DE LA TEORIA DE LA DEFORMACION EN CASCARONES GRUESOS DE DOBLE CURVATURA

FIG.6.1







GEOMETRIA DEL MODELO FISICO. 6.3 $< \eta^{21}$ ÷ . •



N, Q CORTE b-b 6.4 CARACTERISTICAS EN LA DIRECCION <u>B 2</u>



 \odot P2+1 XL [mati . \odot 1×1+2 X1-1 Atte , © Ø G mati . 0 n2. P2-1 mr Ρ. $\boldsymbol{\Theta}$ Ø \odot 0 11-1 H 1+1 h1,+1 1111 Pill Pi £2+1 1 @ 4.+ Juni @ 0 4241 WZ+1 14 0 0 Ъ, 8 61+1 0 V, Ø $\textcircled{\baselinetwidth}$ 41 0 J1-1 J1+1 T12-1 @ 9 ----® ୖୄୖ \$1-1 We-1 72-1 12-1 + 51 Sil 5 Ð 0 + v, ri+1 Ø, 0 **G**. ${\bf G}$ Tr2 32 12 $\overline{
 }$ Z,-1 121+1 - -• ÷ 22 ۲ i 1

6.5 DESIGNACION DE LOS PUNTOS SOBRE LA

SUPERFICIE DEL CASCARON; MODELO COMPLETO



65' DESIGNACION DE LOS PUNTOS EN EL MODELO

SIMPLIFICADO

16-15-19 Chief of the last fair of the state

.





.

DETERMINACION ARITMETICA DE LAS CURVAS ORTOGONALES A LAS CURVAS DE LOS ARCOS DE CIRCULO DE LA CORTINA



FIG. 6.7

•

ţ



ł

`

FIG. 6.7







.







Ι.,	·	and so the second second second second





por relación de triangulos

 $\frac{e_{iwc}c_{ij}}{W} = \frac{cc_{ij}}{R_i^j} \quad \therefore \quad e_{iw} = Wk_i^j$



fig G. 11(b) DESPLAZAMIENTOS A LA DISTANCIA 2=1, JEBIDOS A LAS ROTACIONES YIYY2.

ł











\$













TERMINO PRINCIPAL DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO FIG. 6.27





TERMINO DE INTERACCION DE LA ECUACION DE COMPATIBILIDAD

FIG.6.29b



DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN LAS VARIABLES, U_1 , U_2 , W CORRESPONDIENTES A LA SECCION 6.8 (VER TAMBIEN 6.56).

医黄疸 医马克氏试验 化分子 化分子分子 化分子分子 化分子分子 化分子分子 化分子分子 化分子分子

ORGANIZACION:

1).- Ecuaciones de Equilibrio en un punto general

a)- EN LA DIRECCION NORMAL

b). En la Dirección Bi

C).- EN LA DIRECCION B2

2)- Ecuaciones de equilibrio en el Borde Libre

a). En la dirección Normal

b).- EN LA DIRECCION (3,



$$W_{1} \left\{ \frac{Ed^{2}d^{2}}{12(1-D^{2})} \left\{ \frac{A+3}{d_{1}^{4}} + \frac{4}{d_{1}^{4}} \frac{d^{2}}{d_{1}^{2}} + \frac{1}{d_{1}^{4}} + \frac{4}{d_{1}^{4}} \frac{d^{2}}{d_{1}^{4}} + \frac{4}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}{d_{1}^{4}} + \frac{4}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}{d_{1}^{4}} + \frac{4}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}{d_{1}^{4}} + \frac{2}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}}{d_{1}^{4}} + \frac{2}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}{d_{1}^{4}} + \frac{2}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}{d_{1}^{4}} + \frac{2}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}{d_{1}^{4}} + \frac{2}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}{d_{1}^{4}} + \frac{2}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}}{d_{1}^{4}} + \frac{2}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}{d_{1}^{4}} + \frac{2}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}{d_{1}^{4}} + \frac{2}{d_{1}^{4}} \frac{\partial L_{1}^{3}}{d_{1}^{4}$$

 $W_{x} \left\{ \begin{array}{c} E a^{1} a^{1} \\ 12 \left(1 - b^{2}\right) \\ x_{2}^{4} \end{array} \right\}$

WN E didi [11]

 $W_{V} = Edida = \left\{ e = \overline{p} \\ 12(1-\overline{p}) \right\} \left\{ e = \overline{p} \\ dida = 1 \\ dida =$
$W_{e} \left\{ \frac{E d_{1}^{i} d_{2}^{i}}{12 (1 - v^{e})} \left[t_{R} \frac{2(1 - v)}{d_{1}^{i^{2}} d_{2}^{i^{2}}} + t_{e}^{R} \frac{-v}{d_{1}^{i^{2}} d_{1}^{i^{2}}} + t_{T}^{R} \frac{-v}{d_{1}^{i^{2}} d_{2}^{i^{2}}} \right] \right\}$ $W_{Y}\left\{\begin{array}{c} \underline{Ed_{i}^{i}d_{i}}\\ 12(1-\mathcal{D}^{2}) \\ \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} \underline{t_{q}}\\ \underline{d_{i}^{i}} \end{array}\right]$ $W_{2}\left\{\frac{\operatorname{Edid}_{1}^{\prime}}{12(1-D^{2})}\left[\frac{t_{T}}{d_{2}^{\prime}}\right]\right\}$ $U_{1}^{j,H} \underbrace{Edid_{1}}_{IZ(1-D^{2})} \left[t_{1}^{s} \left(-\frac{2b_{1}}{d_{1}^{s}} - \frac{2bk_{1}^{s}}{d_{1}^{s}} \right) + t_{k}^{s} \frac{2(1-D)k_{1}^{k}}{\alpha_{1}^{s} \alpha_{2}^{s}} - t_{1}^{s} \frac{k_{1}^{t}}{\alpha_{1}^{s}} + t_{0}^{s} \frac{2(1-D)k_{1}^{s}}{\alpha_{1}^{s} \alpha_{2}^{s}} \right]$ $\left[l_{1}^{j^{\prime}} \frac{E d_{1}^{j} d_{1}^{j}}{|2(1-\vartheta^{2})|} \left[t_{1}^{3} \left(\frac{z k_{1}^{j}}{d_{1}^{j}} + \frac{2 \vartheta k_{1}^{j}}{d_{1}^{j} d_{1}^{j^{2}}} - t_{0}^{3} \frac{z (1-\vartheta) k_{1}^{0}}{d_{1}^{j} d_{1}^{j^{2}}} - t_{0}^{3} \frac{z (1-\vartheta) k_{1}^{0}}{d_{1}^{j} d_{1}^{j^{2}}} - t_{0}^{3} \frac{z (1-\vartheta) k_{1}^{0}}{d_{1}^{j} d_{1}^{j^{2}}} + t_{0}^{3} \frac{k_{1}^{0}}{d_{1}^{j}} \right]$ $U_{i}^{h_{i}+1} = \frac{Ed_{i}d_{2}}{12(1-D^{2})} \left[-\frac{t^{3}}{k} \frac{z(1-z)k_{i}^{k}}{d_{i}^{j}d_{2}^{jz}} + \frac{t^{3}}{k} \frac{zk_{i}^{N}}{d_{i}^{j}d_{2}^{jz}} \right]$ $U_{1}^{hr'} \frac{Ed_{1}^{i}d_{2}^{i}}{12(1-D^{2})} \left[t_{0}^{3} \frac{2(1-v)}{d_{1}^{i}} t_{1}^{2} - t_{N}^{i} \frac{vk_{1}^{N}}{d_{1}^{i}} d_{2}^{i} \right]$ $U_{1}^{11} = \frac{Ed_{1}^{2}d_{2}^{2}}{12(1-D^{2})} \begin{bmatrix} \frac{3}{L} & k_{1}^{2} \\ L & \alpha_{1}^{2} \end{bmatrix}$

2.

 $\begin{bmatrix} \int_{1}^{t_{H}} \frac{E d^{2} d^{2}}{I^{2} (1-\tau)^{2}} \begin{bmatrix} -t^{3} 2(1-\tau) & k_{1} \\ 0 & d^{2} d^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^{3} 2(1-\tau) & k_{1} \\ 0 & d^{2} d^{2} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} t_{i}^{t_{i}} & Ed_{i}^{t_{i}} d_{i}^{t_{i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & E(1-2) k_{i}^{t_{i}} \\ 1 & z(1-2)^{t_{i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & E(1-2) k_{i}^{t_{i}} \\ d_{i}^{t_{i}} d_{i}^{t_{i}} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} l \\ l \\ l \\ 12(l \cdot D^{T}) \end{bmatrix} = l = l = \frac{k^{2}}{d_{1}^{2}}$

3 $\bigcup_{z}^{j_{z}+1} E d_{i}^{j} d_{z}^{j} \left[f_{s}^{s} \left(\frac{zb_{z}}{d_{i}^{s}} - \frac{z\partial b_{z}^{j}}{d_{i}^{s} d_{z}^{j}} \right) + t_{k}^{s} \frac{2(1-2)b_{z}^{k}}{d_{i}^{s}^{2} d_{z}^{j}} - t_{k}^{s} \frac{b_{z}^{k'}}{\alpha_{z}^{j}} + t_{c}^{s} \frac{2(1-2)b_{z}^{s}}{\alpha_{z}^{j} d_{z}^{j}} \right]$ $\frac{||_{1}^{j_{1}'}}{||_{1}^{j_{1}'}} = \frac{||_{1}^{j_{1}'}}{||_{1}^{j_{1}'}} \left[\frac{2k_{1}^{j_{1}'}}{d_{1}^{j_{2}'}} + \frac{2\pi}{d_{1}^{j_{2}'}} \frac{k_{2}^{j_{1}'}}{d_{1}^{j_{2}'}} + \frac{1}{2} \frac{2(1-2)k_{2}^{R}}{d_{1}^{j_{2}'}} - \frac{1}{2} \frac{2(1-2)k_{2}^{R}}{d_{1}^{j_{2}'}}} - \frac{1}{2} \frac{2(1-2)k_{2}^{R}}{d_{1}^{j_{2}'}} - \frac{1}{2} \frac{2(1-2)k_{2}^{R}}{d_{1}^{j_{2}'}} - \frac{1}{2} \frac{2(1-2)k_{2}^{R}}{d_{1}^{j_{2}'}} - \frac{1}{2} \frac{2(1-2)k_{2}^{R}}{d_{1}^{j_{2}'}} - \frac{1}{2} \frac{2(1-2)k_{2}}{d_{$ $\begin{aligned} \| l_{2}^{l_{2}+1} & \frac{Fd_{1}^{l_{1}}d_{2}^{l_{2}}}{I2(1-2)^{2}l} \Big\{ l_{k}^{*} & \frac{2(1-2)k_{2}^{k}}{d_{1}^{l_{2}}d_{2}^{l_{2}}} + l_{l}^{*} & \frac{2}{d_{1}^{l_{2}}d_{2}^{l_{2}}} \Big\} \end{aligned}$ $U_z^{n_z} = \frac{E d_1^1 d_2^1}{12(1-D^2)} \left(t_N^3 = \frac{k_z^N}{d_2^3} \right)$ $U_{2}^{k,H} = \frac{1}{12(1-2^{2})} \left[-t^{3} \frac{z(1-z)}{d^{2}} \frac{k^{2}}{d^{2}} + t^{3} \frac{z}{d^{2}} \frac{z(1-z)}{d^{2}} \right]$ $\frac{|l_{2}^{1}|}{|2(1-2)|} = \frac{1}{2} \frac{2k_{2}}{k_{1}} + \frac{1}{2} \frac{2(1-2)k_{1}}{k_{1}}$ $\begin{aligned} \| l_{z}^{2} & E dr d_{z}^{j} \\ & I_{z}(1-D^{2}) \end{aligned} \begin{bmatrix} l_{R} & 2(1-\bar{t}^{2})k_{z}^{R} \\ d_{1}^{j^{2}} x_{z}^{j} & - t_{R}^{j} & d_{1}^{j^{2}} x_{z}^{j} \end{bmatrix} \\ \end{aligned}$ 12 Exit: [-1] ki

Ecuación de Equilibrio en la Dirección Bi $\begin{bmatrix} I_{1}^{in} & \underline{Ed_{1}^{i}d_{2}^{i}} \\ \underline{Z(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{2}{d_{1}^{i\pi}} + t_{k} \frac{(1-i)}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{(1-i)}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{Ed_{1}^{i}d_{2}^{i}}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{Ed_{1}^{i}d_{2}^{i}}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2}^{i\pi}} + t_{k} \frac{2}{d_{2}^{i\pi}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \frac{1}{12(1-D^{*})} \begin{bmatrix} 1, \frac{k}{d_{2$ $+t_{L}^{3}\frac{k^{2}}{dt^{2}}+t_{0}^{3}\frac{2(1-2)k_{1}^{2}}{dt^{2}}$ $\frac{U_{1}^{j+1}}{Z(1-D^{2})} \left[-t_{j} \frac{2}{d^{j}z} \right] + \frac{Ed^{j}d^{j}z}{I2(1-D)} \left[-t_{j}^{3} \frac{b^{j}z}{d^{j}z} \right]$ $\mathcal{U}_{i}^{l_{1}} \underbrace{Ed_{i}^{i}d_{i}^{j}}_{2(1-\eta^{2})} \left[-t_{L} \frac{2}{dt^{n}} + \frac{Ed_{i}^{i}d_{i}^{j}}{12(1-\eta^{2})} - t_{L} \frac{k_{i}^{i}}{dt^{n}} \right]$ $U_{i}^{\mathbf{H}_{i}+1} \frac{E d_{i}^{\mathbf{J}} d_{i}^{\mathbf{J}}}{2(1-\overline{\mathcal{D}}^{2})} \left[-t_{\mathbf{K}} \frac{1-\overline{\mathcal{D}}}{d_{i}^{\mathbf{J}^{\mathbf{L}}}} \right] + \frac{E d_{i}^{\mathbf{J}} d_{i}^{\mathbf{J}}}{12(1-\overline{\mathcal{D}}^{\mathbf{K}})} \left[-t_{\mathbf{K}}^{\mathbf{J}} \frac{2(1-\overline{\mathcal{D}}) k_{i}^{\mathbf{K}^{\mathbf{Z}}}}{d_{i}^{\mathbf{J}^{\mathbf{Z}}}} \right]$ $\frac{U_{1}^{t,H}}{2(L-2)^{2}} \left[-t_{0} \frac{1-2}{d^{\frac{1}{2}}} + \frac{Ed^{\frac{1}{2}}}{12(1-2)^{2}} \right] \left[-t_{0}^{\frac{3}{2}} \frac{2(1-2)k_{1}^{\frac{3}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}} \right]$ $\frac{\left| \int_{a}^{ati} E d_{1}^{i} d_{2}^{i} - \frac{2v}{d_{1}^{i} d_{2}^{i}} + \frac{1-v}{k_{1}^{i} d_{2}^{i}} + \frac{E d_{1}^{i} d_{2}^{i}}{12(1-v^{2})} \right|_{J} \frac{\partial k_{1}^{i} h_{2}^{j}}{d_{1}^{i} d_{2}^{i}} + \frac{1}{k_{1}^{i}} \frac{2(1-v)}{d_{1}^{i} d_{2}^{i}} \right|_{L}$ $\frac{|\int_{z}^{z} E dld!}{2(1-D^2)} \left[-t_{j} \frac{zv}{did!} - t_{j} \frac{1-v}{did!} \right] + \frac{E did!}{12(1-v^2)} \left[-t_{j}^{3} \frac{vk!v!}{d!d!} - t_{j}^{3} \frac{z(1-v)k!v!}{d!d!} \right]$ $U_{*}^{let} \underbrace{Ed^{l}d^{l}}_{2(l-v^{*})} \left[-t_{k} \frac{1-v}{d^{l}d^{l}} - t_{k} \frac{z^{*}v}{d^{l}d^{l}} \right] + \underbrace{Ed^{l}d^{l}}_{l^{2}(l-\delta^{*})} \left[-t_{k}^{*} \frac{2(l-v)k_{*}^{*}k_{k}^{*}}{x_{*}^{*}x_{k}^{*}} + t_{*}^{*} - \frac{v}{x_{*}^{*}} \frac{k_{*}^{*}}{x_{*}^{*}} \right]$ $\mathbb{U}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{j}\mathbf{z}'} \underbrace{\mathsf{Edid}}_{\mathbf{z}(1-D^2)} \left[t_1 \frac{20}{d_1 d_1^2} + t_2 \frac{1-0}{d_1^2 d_2^2} \right] + \underbrace{\mathsf{Ext}d\mathbf{z}}_{12(1-D^2)} \left[t_2 \frac{\mathsf{Dkik}}{d_1^2 d_2^2} + t_2^2 \frac{2(1-0)\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}{d_1^2 d_2^2} \right]$

4

8 $W_{Q} = Ed_{1}^{2}d_{2}^{2} \left[t_{j} = \frac{h_{i}}{K_{j}}\right]$ $W_{j} = \frac{E d_{1}^{3} d_{2}^{3}}{12(1-v^{4})} \left[-t_{j}^{3} \left(\frac{2b_{1}^{3}}{d_{1}^{3}} + \frac{2vb_{4}^{3}}{d_{3}^{3}} + t_{k}^{3} \frac{2(1-v)b_{1}^{2}}{d_{1}^{3} d_{3}^{3}} - t_{k}^{3} \frac{b_{1}^{4}}{d_{1}^{3}} + t_{k}^{3} \frac{2(1-v)b_{1}^{4}}{d_{1}^{3} d_{3}^{3}} \right]$ $\mathbb{W}_{L} = \begin{bmatrix} d_{1}^{2} d_{2}^{2} \\ 12(1-v^{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{3} \frac{b_{1}^{2}}{d_{1}^{3}} - t_{k}^{3} \frac{2(1-v)b_{k}^{k}}{d_{1}^{3} d_{2}^{2}} + t_{k}^{2} \left(\frac{2b_{k}^{k}}{d_{1}^{3}} + \frac{2vb_{k}^{k}}{d_{1}^{3} d_{2}^{3}} \right) - t_{v}^{2} \frac{2(1-v)b_{v}^{v}}{d_{1}^{3} d_{2}^{v}} \end{bmatrix}$ $W_{\rm H} = \frac{E d^3 d_2^3}{12(1-v^2)} \left[t_1^3 \frac{2)k_1^3}{d^3 d_2^3} - t_{\rm K}^3 \frac{e(1-v)k_1^3}{d_1^3 d_2^3} \right]$ $W_{r} = \frac{Ed_{1}^{1}d_{2}^{1}}{12(1-v^{2})} \left[t_{1}^{2} \frac{v k_{1}^{2}}{d_{1}^{2} d_{2}^{2}} - t_{1}^{3} \frac{2(1-v) k_{1}^{2}}{d_{1}^{2} d_{2}^{2}} \right]$ $W_{M} \stackrel{Edidi}{=} \left[t_{m}^{*} \frac{2(1-2)k_{1}^{*}}{\chi_{1}^{*} d_{2}^{*}} - t_{L}^{*} \frac{\partial k_{1}^{*}}{\chi_{1}^{*} d_{2}^{*}} \right]$ $W_{W} \stackrel{Edidi}{\vdash} \frac{f}{\vdash} \stackrel{b}{\vdash} \frac{b}{dis}$ $W_{v} = \frac{E d_{i}^{2} d_{i}^{2}}{Iz(1-\eta^{2})} \left[t_{v}^{2} \frac{\partial b_{v}^{2}}{d_{i}^{2} d_{2}^{2}} + t_{v}^{2} \frac{2(1-\eta)b_{v}^{2}}{\alpha t d_{i}^{2}} \right]$

.

Ecuación de Equilibrio en la Dirección
$$\beta_{22}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1}^{i_{1}i_{1}} & \left[\frac{E \alpha_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}{2(1-p^{2})} \right] \left[\frac{L_{3} \frac{2D}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{2q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}} + \frac{L_{k} \frac{1-D}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{12(1-p^{2})} \right] \left[\frac{L_{3} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{2(1-p^{2})} \left[\frac{L_{3} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{2(1-p^{2})} \left[-\frac{L_{3} \frac{2D}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{(L_{3} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} - \frac{L_{s} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{(L_{1} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} - \frac{L_{s} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{(L_{1} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} - \frac{L_{s} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{(L_{1} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} - \frac{L_{s} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{(L_{1} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} - \frac{L_{s} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{(L_{1} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} - \frac{L_{s} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{(L_{1} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} - \frac{L_{s} \frac{p k_{1}^{i} k_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} \right] \right] \\ \mathcal{U}_{1}^{i} \frac{k_{1}^{i}}{2(1-p^{2})} \left[\frac{L_{s} \frac{2 p}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{L_{s} \frac{1-p}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} + \frac{E \alpha_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} \right] + \frac{E \alpha_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} \right] + \frac{E \alpha_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} + \frac{E \alpha_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} \right] \\ \mathcal{U}_{2}^{i} \frac{k_{1}^{i}}{2(1-p^{2})}} \left[\frac{L_{s} \frac{2}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{L_{s} \frac{1-p}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} + \frac{E \alpha_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} + \frac{L_{s} \frac{2 \alpha_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i}}} \right] \\ \mathcal{U}_{2}^{i} \frac{L_{s}^{i}}{2(1-p^{2})}} \left[\frac{L_{s} \frac{2}{q_{1}^{i} \alpha_{2}^{i$$

an talan kanang penangkan ang pelangkan ang mengerakan pangkangkang penangkan ng penangkan penangkan kenangkan Penang

 $\mathcal{U}_{1}^{n_{2}}\left[\frac{E\alpha_{1}^{3}\alpha_{1}^{3}}{2(1-\nu^{2})}-t_{H}\frac{2}{\alpha_{1}^{32}}\right]+\frac{E\alpha_{1}^{3}\alpha_{1}^{3}}{12(1-\nu^{2})}\left[-t_{H}^{3}\frac{k_{2}^{2}}{\alpha_{1}^{32}}\right]$ $\mathbb{U}_{2}^{k_{i}+1} \left[\frac{E\alpha_{i}^{j}\alpha_{j}^{j}}{2(1-u^{2})} \left[-t_{0}\frac{1-u}{\alpha_{i}^{j}} \right] + \frac{E\alpha_{i}^{j}\alpha_{j}^{j}}{12(1-u^{2})} \left[-t_{0}^{3}\frac{2(1-u)k_{z}^{o2}}{\alpha_{i}^{j}} \right] \right]$ $W_{Q} \left\{ \frac{E\alpha_{i}^{J}\alpha_{i}^{J}}{12(1-y^{2})} \left\{ t_{J}^{3} \frac{yk_{i}^{J}}{\alpha_{i}^{J}\alpha_{i}^{J}} + t_{o}^{3} \frac{-2(1-y)k_{o}^{o}}{\alpha_{i}^{J}\alpha_{i}^{J}} \right\} \right\}$

 $W_{j} = \frac{Ed^{j} d^{j}_{1}}{I_{2}(1-D^{L})} \left[-\frac{t^{3} e^{-y} k_{1}}{d^{j^{2}} d^{j}_{1}} - \frac{t^{3} e^{-y} k_{2}}{d^{j^{2}} d^{j}_{1}} + \frac{t^{3} e^{-y} k_{1}}{d^{j^{2}} d^{j}_{1}} - \frac{t^{3} k_{2}}{d^{j^{2}} d^{j^{2}} - \frac{t^{3} k_{2}}{d^{j^{2}} - \frac{t^{3} k_{2}}}{d^{j^{2}} - \frac{t^{3} k_{2$ $W_{L} = \frac{E d^{3} d^{3}}{12(1-\eta^{4})} \left[t_{J} \frac{\partial k_{z}}{dt^{2} d_{z}^{2}} + t_{K}^{2} - \frac{2(1-\hat{z}) k_{z}}{dt^{2} d_{z}^{2}} \right]$ $W_{N} = \frac{Ed^{2}d^{2}}{12(1-D^{2})} \left[t_{j} \frac{k_{j}^{2}}{d_{j}^{2}} + t_{K}^{2} - \frac{2(1-D)k_{z}^{2}}{d_{j}^{2}} + t_{K}^{2} \frac{z\partial k_{z}^{2}}{d_{j}^{2}} + t_{K}^{3} \frac{zb_{z}^{N}}{d_{z}^{2}} + t_{K}^{3} \frac{zb_{z}^{N}}{d_{z}^{2}} - t_{e}^{2} \frac{z(1-D)k_{z}^{e}}{K_{j}^{2}} \right]$ $W_{T} \stackrel{Edi'dz}{|z(1-\overline{p}^{2})|} \begin{bmatrix} t_{3} \\ t_{3} \\ t_{3} \\ d_{1}^{3} \end{bmatrix}$ $W_{\rm M} = \frac{Ed^2 dz^2}{12(1-\eta^2)} \left[\frac{1^3}{k} \frac{2(1-\eta)k^2}{dt^2} - \frac{1^3}{\eta^2} \frac{-\eta k^3}{dt^2} \right]$ $W_{P} = \frac{Ed_{1}d_{2}}{12(1-v^{2})} \left[-t_{H}^{3} \frac{v_{L}}{d_{1}^{2}d_{2}^{3}} + t_{o}^{3} \frac{2(1-v)}{d_{1}^{2}d_{2}^{3}} \right]$ $W_{r} = \frac{Ed^{i}d^{j}}{12(1-\eta^{2})} \left[-t^{3} \frac{k^{n}}{k^{n}} \right]$

à la chuir ann an t-airte ann an t-



$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i}^{A} \left\{ \frac{E}{-\frac{\omega_{i}^{2}}{2}} \frac{\omega_{i}^{2}}{L_{i}^{2}} \left[t_{i}^{A} \frac{n_{i}^{*}}{\omega_{i}^{*}} \right] \right\} \\ \left| \bigcup_{i}^{A} \left\{ \frac{E}{-\frac{\omega_{i}^{2}}{2}} \frac{\omega_{i}^{*}}{2} \left[-t_{0}^{A} \frac{n_{i}^{0}}{\omega_{i}^{*}} \right] \right\} \\ \left| \bigcup_{i}^{A} \left\{ \frac{E}{-\frac{\omega_{i}^{2}}{2}} \frac{\omega_{i}^{*}}{2} \left[t_{n}^{A} \frac{2}{-\frac{2}{2}} \frac{n_{i}^{n}}{n_{i}^{*}} \frac{n_{i}^{*}}{2} \left[1 + \frac{2}{2} \frac{n_{i}^{n}}{n_{i}^{*}} \frac{n_{i}^{*}}{2} \left[1 + \frac{2}{2} \frac{n_{i}^{n}}{2} \frac{n_{i}^{*}}{2} \frac{n_{i}^{*}}{2} \left[1 + \frac{2}{2} \frac{n_{i}^{n}}{2} \frac{n_{i}^{*}}{2} \frac{n_{i}^{*}}{2}$$

Echacionas de Equilibrio an la Dirección A. (borde libre) $\frac{|l_{1}^{l_{1+1}}\left(\frac{E-\omega_{1}^{\prime}\omega_{2}^{\prime}}{2}\left(t_{j}\frac{2}{\omega_{1}^{\prime}u_{1}}+t_{j}\frac{2}{\omega_{1}^{\prime}u_{1}}+\frac{t_{m}}{\omega_{1}^{\prime}u_{1}^{\prime}(1+2)}\right)+\frac{E-\omega_{1}^{\prime}\omega_{2}^{\prime}}{12}\left(t_{j}\frac{h_{1}^{\prime}u_{1}}{\omega_{1}^{\prime}u_{1}}+t_{m}^{\prime}\frac{h_{1}^{\prime}u_{1}}{\omega_{1}^{\prime}u_{1}^{\prime}(1+2)}\right)+\frac{E-\omega_{1}^{\prime}\omega_{2}^{\prime}}{12}\left(t_{j}\frac{h_{1}^{\prime}u_{1}}{\omega_{1}^{\prime}u_{1}}+t_{m}^{\prime}\frac{h_{1}^{\prime}u_{1}}{\omega_{1}^{\prime}u_{1}^{\prime}(1+2)}\right)$ $\left| U_{1}^{3,3} \left(\frac{E \alpha_{1}^{3} \alpha_{2}^{4}}{2} \left(-t_{3} \frac{z}{\alpha_{1}^{3}} \right) + \frac{E \alpha_{1}^{3} \alpha_{3}^{4}}{12} \left(-t_{3}^{3} \frac{R_{1}^{3} z}{\alpha_{1}^{3}} \right) \right\}$ $\left| L_{I_{1}}^{I_{1}} \left\{ \frac{E_{-u_{1}}^{I} u_{u_{1}}^{I}}{2} \left[-t_{L_{-u_{1}}}^{I} \right] + \frac{E_{-u_{1}}^{I} u_{u_{1}}^{I}}{12} \left[-t_{L_{-u_{1}}}^{I} \right] \right\}$ $\left| \bigcup_{i}^{t_{i}+V} \underbrace{\mathbb{E}_{u_{i}^{u_{i}^{u}}u_{i}^{u_{i}^{u}}}}_{2} \left| -t_{u} \frac{1}{-t_{u}^{u_{i}^{u_{i}^{u}}}(1+\mathcal{V})} \right| + \underbrace{\mathbb{E}_{u_{i}^{u_{i}^{u_{i}^{u}}}u_{i}^{u_{i}^{u_{i}^{u}}}}_{12} \left| -t_{u}^{u} \frac{2R_{i}^{u_{i}^{u_{i}^{u}}}}{-u_{i}^{u_{i}^{u_{i}^{u}}}(1+\mathcal{V})} \right| \right\}$ $W_{j}\left\{\frac{E_{m_{1}^{2}m_{2}^{2}}}{2}\left[t_{j}\frac{2k_{j}^{2}}{\alpha_{j}^{2}}+\frac{E_{m_{1}^{2}}\alpha_{j}^{2}}{12}\left[-t_{j}^{3}\frac{2k_{j}^{2}}{\alpha_{j}^{2}}-t_{L}^{3}\frac{k_{L}^{2}}{\alpha_{j}^{2}}+t_{u}^{3}\frac{2k_{u}^{2}}{\alpha_{j}^{2}}+t_{u}^{3}\frac{2k_{u}^{2}}{\alpha_{j}^{2}}\right]\right\}$ $W_{L}\left\{\frac{E.w_{1}^{2}w_{2}^{2}}{2}-t_{L}\frac{zh_{1}^{2}}{\alpha_{1}^{2}}+\frac{E.w_{1}^{2}w_{2}^{2}}{12}\left[t_{j}^{3}\frac{h_{1}^{2}}{\alpha_{1}^{2}}+t_{L}^{3}\frac{zh_{1}^{2}}{\alpha_{1}^{2}}-t_{u}^{3}\frac{zh_{1}^{u}}{\alpha_{1}^{2}}\frac{zh_{1}^{u}}{\alpha_{1}^{2}}\right]\right\}$ $W_{Q} \left\{ \frac{E_{w_{1}^{d} w_{1}^{d}}}{12} \left\{ t_{j} \frac{k_{j}^{d}}{w_{1}^{d}} \right\} \right\}$

10



100 A. 100 A.

$$L_{2}^{l_{2}-l}\left\{\frac{E_{\omega_{1}^{l}}\omega_{2}^{l}}{2}\left\{\frac{E_{\omega_{1}^{l}}\omega_{3}^{l}}{2}\left(\frac{t_{u}}{\omega_{1}^{l}}\frac{E_{\omega_{1}^{l}}\omega_{3}^{l}}{\omega_{3}^{l}}(1+\vartheta)\right)+\frac{E_{\omega_{1}^{l}}\omega_{2}^{l}}{12}\left(\frac{t_{u}^{l}}{\omega_{1}^{l}}\frac{2h_{1}^{u}h_{1}^{u}}{h_{1}^{l}}\right)\right\}$$

$$L_{2}^{l_{1}-l}\left\{\frac{E_{\omega_{1}^{l}}\omega_{3}^{l}}{2}\left(-\frac{t_{u}}{\omega_{1}^{l}}\frac{2h_{1}^{u}h_{1}^{u}}{u_{1}^{l}}(1+\vartheta)\right)+\frac{E_{\omega_{1}^{l}}\omega_{3}^{l}}{12}\left(-t_{u}^{l}\frac{2h_{1}^{u}h_{1}^{u}}{u_{1}^{l}}\frac{h_{u}}{u_{1}^{l}}\frac{h_{u}}{u_{1}^{l}}(1+\vartheta)\right)\right\}$$

ų

,一方面有这个地域,有效还是我们就是这些"这些是不是这个人,不可能是这个人的,你们就是一个你们的是不可以不是不是这些事实的事实,而且我们知道这些是不是不是是不是没有是是是是是 第二章

٠

State of the second second

and	t. (m.)	k,	ħ.	حن	22	C_{i}^{J}	C_{4}^{J}	r, ^J	
تو به تو	2 0000	0.0100000	0 0030891	13.61	18.098	. 99075	.94786	. 005.3487	.0
130	3 3505	0.0116279	0.0027298	13,63	16.922	.58746	.99878	.0053/52	.0
1 1 1 5	4.8111	0 0123333	0.0027810	13,15	15.665	.98466	. 99 907	. 0056943	. 0
200	5 2433	0.0153846	0.0032042	12.75	15.495	98084	.99893	0060337	,0
685	25987	00175438	3.0040144	1235	15,330	.97661	.99847	0064032	.0
670	8.8393	0.0204081	0.0052230	11.99	15.175	.97023	.99752	.0067489	.0
*ئ <i>ى ئى 4</i>	9.8291	0.0243902	0.0068329	11.70	15.051	95956	.99588	.0070097	.0
:40	10,4472	00307492				1.00000	1.00000	.0073127	.0
s B Temperatur - Henrichter (s Annes Jeban -	2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	2							

TABLA 7.1 CONSTANTES DE LA CONTINA.







in the second second

این افکاری از باری باری میکند. این از میکند وی از این میکند و این این این این میکند و این این



APENDICE A1 GEOMETRIA DE SUPERFICIES

161

A1.0 Alcance

En este apéndice se presentan en forma resumida algunos resultados de la geometría diferencial, que se usar**a**n para los desarrollos analíticos de los capítulos 2 y 3. Los resultados se presentan a manera de una colección de fórmulas en virtud de que su justificación conceptual se encuentra en diversos tratados sobre el tema^(23, 26, 28, 52, 64) y muy particularmente en las referencias 87 y 88.

A1.1 Representación paramétrica

Una superficie como la de la fig A1.1, puede ubicarse en un espacio tridimensional de ejes coordenados X_1, X_2, X_3 y además puede representarse intrinsecamente mediante dos parámetros usados como coordenados paramétricos. Estos parámetros, se designan β_1 , y β_2 , de manera que para un valor $\beta_1 = \text{cte.}$, el otro parámetro describe una curva β_2 . La representación de la superficie se puede escribir entonces, mediante el vector de posición

 $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}}(\beta_1, \beta_2)$ (A1.1)

al bacer variar simultáneamente los dos parámetros β , y β_2 el vector \overrightarrow{R} sufre un incremento $d\mathcal{R}$ que se escribe

 $d\vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta_2} d\beta_2$ (A1.2)

Designando

$$\overline{Q_{i}} = \frac{\partial R}{\partial \beta_{i}} = \frac{R_{i,i}}{R_{i,i}}$$

$$\overline{Q_{i}} = \frac{\partial R}{\partial \beta_{i}} = \overline{R_{i,i}}$$
(A1.3)

en que la coma despiés de $\overline{\mathcal{R}}$ indica derivación con respecto al parámetro cuyo índice es iguni al número que sigue a la coma; entonces es posible escribir

$$d\vec{R} = \vec{a}_1 d\beta_1 + \vec{4}_2 d\beta_2 \qquad (A1.4)$$

Los vectores 4_1 y $\overline{\partial_2}$ se designan vectores base en la superficie. La magnitud de dR, es naturalmente, la distancia entre los puntos $P(\beta_1,\beta_2)$ y $P'(\beta_1+q\beta_1,\beta_2+q\beta_2)$, medila sobre la superficie. Esta distancia es:

$$dS^{2} = \hat{I}_{11} d\beta_{1}^{2} + 2\theta_{12} d\beta_{1} d\beta_{2} + 4\eta_{22} d\beta_{2}^{2} (A1.5)$$

en que

$$\begin{array}{rcl} \hat{u}_{11} &=& \overline{\hat{u}_1} \cdot \overline{\hat{u}_1} \\ \hat{u}_{12} &=& \overline{\hat{u}_1} \cdot \overline{\hat{u}_2} &=& \overline{\hat{u}_2} \cdot \overline{\hat{u}_1} \\ \hat{u}_{22} &=& \overline{\hat{u}_2} \cdot \overline{\hat{u}_2} \end{array} \tag{A2.6}$$

y se puede demostran^(87,88) que estas cantilidas forman un

162

tensor, llumado tensor métrico. En ocasiones la ecuación

A1.9 recibe el nombre de "primera forma fundamental". Gi

los vectores base en la superficie son ortogonales, enton-

ces

112 a 0 (11.2)

En adelante se cesarán únicamente curvas de referencia ortogonales, de manera que

$$dS^{2} = a_{11} d\beta_{1}^{2} + a_{22} d\beta_{2}^{2} \qquad (A1.8)$$

entonces conviene introducir la notación

$$\mathcal{A}_{2}^{2} = \mathcal{Q}_{22} \qquad (A1.9)$$

porque es posible encontrar vectores base unitaries en la superficie y que se designan,

$$\overline{T_1} = \frac{\overline{a_1}}{\alpha_1}$$
(A1.10)
$$\overline{\overline{T_2}} = \frac{\overline{a_2}}{\alpha_2}$$

(A1.11)

El vector normal a la superficie en el punto $\frac{1}{2}$, se define como $n = T_1 \times T_2$

Tensor curvatura & Segunda forma fundamental S. FA Sobre la curva C, es posible determinar un vector tangentr 💋 el cual se escribe

163

$$\overline{t} = \frac{dR}{ds} = \frac{\partial R}{\partial \beta_1} \frac{\partial R}{\partial s} \frac{\partial R}{\partial \beta_2} \frac{\partial R}{\partial \beta_$$

sobre esta línea, existe un vector normal D el cual se supone que forma un ángulo ϕ con el vector normal \overline{p} (ver fig A1.2). La derivada del vector 🖌 sobre la curva C se escribe

 $\frac{a^{\prime}t}{ds} = \overline{R_{II}} \left(\frac{dB_{I}}{ds}\right)^{2} + 2\overline{R_{I2}} \frac{qB_{I}}{ds} \frac{dB_{2}}{ds} + \frac{dB_{2}}{ds} \frac{P_{I22}}{R_{I22}}$ (A1.13)

y multiplicando escalarmente por \overline{n} se obtiene,

 $\frac{dt}{dt} \cdot \vec{n} = \frac{1}{p} \cos \phi = \vec{R}_{ii} \cdot \vec{n} \left(\frac{qR_{i}^{2}}{ds} + \vec{2}\vec{R}_{j2} \cdot \vec{n} \frac{qR_{i}}{ds} + \vec{P}_{22} \cdot \vec{n} \frac{d\Phi_{i}}{ds} \right)^{2} (A1.14)$

en que / es el radio de curvatura de la curva C y en la ecuación A1.14 se ha usado una de las fórmulas de Frenet-Serret⁽⁸⁷⁾.

Ahora es posible definir el "<u>tensor curvatura normal de</u> <u>La superficie</u>" con sus componentes tensoriales

> $b_{11} = \vec{n} \cdot \vec{z}_{11}$ $b_{22} = \vec{n} \cdot \vec{z}_{122}$ (A1.15) $b_{12} = \vec{n} \cdot \vec{z}_{12}$

Las curvataras métricas en la superficie son:

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{b_{11}}{\alpha_1^2} = R_1$$

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{b_{22}}{\alpha_2^2} = h_2 \qquad (A1.16)$$

164

 $\frac{1}{R_{12}} = -\frac{b_{12}}{\alpha_{12}} = \frac{b_{12}}{\alpha_{12}}$

de manera que la ecuación 41.14, puede escribirse

dr. dn = ~, k, d, 3, + 2d, x2 k2 db, d32 + x2 k2 dB2 (A1.17)

que recibe el nombre de "segunda forma fundamental".

Suando en particular resulta $B_{12} = 0$, se dice que las líneas $B_1 B_2$ son de <u>curvatura principal</u>.

A1.3 <u>Derivadas de los vectores base unitarios</u>. <u>Derivadas</u> <u>del vector normal</u>

Al pasar de un punto a otro sobre la superficie, los vectores base, $\overline{A_1}$ y $\overline{A_2}$, cambian de magnitud y dirección. Como los vectores unitarios se expresan en términos de estos vectores y aus magnitudes (ver ecuación A1.40), para calcular las derivadas de los vectores unitarios, es necesario tomar en cuenta esa cualitad. Las expresiones de las derivadas de los vectores base $\overline{A_1}$ y $\overline{A_2}$ y del vector normal $\overline{A_2}$ se conocen como ecuaciones de Jauss-Weingarten^(52,88), con base en la definición A1.40, y utilizando emas ecuaciones, es posible deducir

$$\overline{T_{1,1}} = \frac{\langle x_{1,2} \rangle}{\langle x_{2} \rangle} \overline{T_{2}} - \frac{\langle x_{1} \rangle}{R_{1}} \overline{T_{2}} - \frac{\langle x_{2} \rangle}{R_{1}} \overline{T_{2}} - \frac{\langle x_{2} \rangle}{\langle x_{2} \rangle} \overline{T_{2}} - \frac{\langle x_{$$



.

como expresiones para las derivadas le los vectores unitarios. Las ecuaciones le las derivadas del vector normal 🖉 son:

(A1.19)

Al.4 Ecusciones de Jodazzi-Gauss

Las eculciones de Joiazzi-Galso son eculciones que permiten expressi la relación entre los coeficientes lel tensor métrico y del tensor de curvatura. Las expresiones que ahora se presentan, fueron deducidas mediante especialización de los correspondientes en forma tensorial (ver refs 52 y 88). Estas relaciones se pueden escribir,

$$\mathcal{A}_{1}^{2}R_{1,2} + \mathcal{A}_{1}\mathcal{A}_{1,2} - \frac{R_{1}^{2}}{R_{2}} - \frac{R_{1}\mathcal{A}_{1}\mathcal{A}_{1,2}}{R_{2}} = 0 \qquad (A1.00)$$

$$\mathcal{A}_{2}^{2}R_{2,1} + \mathcal{A}_{2}\mathcal{A}_{2,1} - \frac{R_{2}^{2}}{R_{1}} - \frac{R_{2}\mathcal{A}_{2}\mathcal{A}_{2,1}}{R_{1}} = 0$$

que son las ecuaciones le Jolazzi. La ecuación de Gauss se escribe,

$$d_1 d_2 k_1 k_2 + \left(\frac{d_{2,1}}{d_1}\right)_1 + \left(\frac{d_{1,2}}{d_2}\right)_2 = 0$$
 (A1.21)

Las economes Al. 20, pueden escritirse también en la

166

famili

(2, k,), 2 = ×1,2 k2

(11.3%)

(2 k2),1 = ~2,1 k1

 $\boldsymbol{\chi}_{i}$ $P(\beta_1, \beta_2) \rightarrow P$ $(\beta_1, \beta_2) \rightarrow P$ $(\beta_1, \beta_2) \rightarrow P$ $P'(\beta_1, \beta_2, \beta_2, \beta_2)$ CURVO 32 J.S. Curvo si R 1 CURVO C (CUO/guiero) RtdR X X, 0 7 y Fis All Sexmetria de una superficie surva de $\pi_{\chi}\phi_{f}$



and gover o

1. F. A. A. C. C. M. J. T. M. J.

 \mathcal{X} 201032 A)(,B1, B2) 20 D' (B, tajs, Batajs) CUrvo Si R 1 Curva C (cualquiera) RtdR X X, 5.7% : Fis Al. Gesnetria de una suberficie CULAN 195 # # 1 D = 1 D Convo 5

Fig. A. 2 Carristan Auril'

167

APENDICE A2 CURVATURAS EN LA SUPERFICIE. GEOMETRIA DE UNA SUPERFICIE PARALELA

Curvaturas en la superficie 45.1

En las expresiones del apéndice A1 y en los desarrollos analíticos del trabajo, aparecen las cantidades ×1,2 У

x 2,1 que son las derivadas de las magnitudes de los vectores base. Estas cantidades, pueden inteppretarse gráficamente usando las definiciones de «, y «. Considérese por ejemplo, la definición de 🏑 (ver ecuación A1.9) que puede escribirse

$$\alpha_i^2 = \overline{a_i \cdot a_i} \qquad (A2.1)$$

derivando con respecto a β_2 , se obtiene $2\alpha_1 \alpha_1, 2 = \overline{\alpha_1}, 2 \cdot \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_1}, 2$ (A2.2) $\gamma_{i,2} = \overline{a_{i,2}} \cdot \overline{T_i}$

o sea,

$$X_{jz} = R_{jz} \cdot T_{j} \qquad (A2.3)$$

si se compara esta ecuación con las definiciones del tensor de curvatura normal de las curvas de la superficie (ecuacio-

nes A1.15), es posible definir ahora la cantidad "curvatura

en la superficie" (ver fig A2.1) y en su forma real, puede

escribirse

 $l_{12} = \frac{\langle \chi_{1,2} \rangle}{\langle \chi_{1,2} \rangle}$ (A2.4)

en analogía con las ecuaciones Al.16. En forma semejante se puede definir

$$\frac{l^2}{d_1d_2} = \frac{d^2}{d_1d_2}$$
(A2.5)

Estas cantidades aunque novedosas en agariencia, fueron usadas en la formulación algebraica de la cometría diferencial⁽⁸⁹⁾ y ahorahhan caido en desuso debido a que no poseen naturaleza tensorial.

ad.2 Geometría de una superficie paralela

Jonnidérese como en la fig 22.2, una superficie designada "media" y otra superficie paraleta que se encuentra a una distancia Z. El vector de posición de la superficie paralela se escribe

$$P_2 = R + Z \eta \qquad (AZ, \eta)$$

. 1

y los vectores base a escriber entonce.

168

respecto a la constructione desta medinal de parte de parte

alors come on a sub-lic dervic de perfertant son ortopende

1834 - 1220 june non mersenand annaldes ses samy at tha print the set of Paper

or paperthele canadal, el fierro di topo de estre of les

* I, P I = P I = Q12 - 22 x, x2 k12 + 2 x, x2 k12 (k1+ k2)

The maneral state the successful the process of the strength of the second balance

das ortogonales, si la torsión de la superficie (Endes nula.

Las magnitudes de los vectores base de la superficie paralela se pueden escribir

$$p_{x_{i}}^{2} = \chi_{i}^{2} \left(1 + 2 \frac{z}{R_{i}} + \frac{z^{2}}{R_{i}^{2}} \right)$$

$$p_{x_{i}}^{2} = \chi_{i}^{2} \left(1 + 2 \frac{z}{R_{i}} \right)^{2}$$

$$p_{x_{i}}^{2} = \chi_{i}^{2} \left(1 + 2 \frac{z}{R_{i}} \right)^{2}$$

d sea

 $c_{i} = \left(i + \frac{\overline{z}}{R_{i}}\right) = \left(i + \overline{z}k_{i}\right)$

en que

(A2.9)

(95.8)

y análogamente

$$A_2 = A_2 C_2 \qquad (A2.10)$$

con

$$C_2 = \left(1 + \frac{2}{R_2}\right) = \left(1 + 2k_2\right)$$
 (A2.11)

Los vectores unitarios de la superficie paralela se deducen en forma similar a los le la superficie media, es decir,

 $p_{T_{i}} = \frac{p_{a_{i}}}{p_{c_{i}}} = \frac{\overline{T_{i}c_{i}} - \overline{z} k_{iz} \overline{z}}{\int c_{i}^{2} + (\overline{z} k_{iz})^{2} \overline{T_{z}}}$ (A2.12) 169



y como una aproximación, cuando la torolón je la superfice

es to deput ne trade everteit



(Ad.13)



A2.1 CURVATURAS EN LA SUPERFICIE



APENDICE A-3

A 3.1 Cálculo de Variaciones

En este apéndice se presentan en forma condensada algu--nos resultados que serán utilizados en el desarrollo del presen te trabajo. Aquí se presenta el problema fundamental del cálculo de variaciones conocido (72) como el de los puntos extre-mos fijos en el plano y los resultados que corresponden al caso de dos variables independiente. También se presenta el teorema de Gelfand y Fomin (69) relativo al problema de un funcional su jeto a condiciones subsordiarias que estan dados también en la_ forma de un funcional.

Supongase como en la fig. A-3.1.1, que en el plano, existen dos puntos fijos por los que ha de pasar una determinada -curva sobre la cual ha de calcularse la integral

$$I(y) = \int \phi(x, y, y') dx$$

Ì

A-3.1.1

170

en que x, y son los eges de referencia, y' es la derivada de y con respecto a ϕ y ϕ es una función conocida de los variables y'y y x . Una vez figula la curva, la integral I se invierte en an número, es necir, el problema es el cel cálculo in tegral. Fero suponase que la incomita es proclemente la cur va y que la condición que permite determinaria, es que la integral I (ahora funcional I) adquiera un calor estacionario; ---además se compone la condición de que esa curva pase precisamen te por los puntos A y B.

Supóngse que la curva que cumple esta condición, es vecina a la curva 1. De manera que puede escribirse para la curva v<u>e</u> cina.

$$Y(x) = Y(x) + \delta Y(x)$$
 A-3.1.2

en que $\xi \gamma(\mathbf{x})$ es un cambio posible a la forma de la curva y que cumple las condiciones de frontera.. Este cambio posible 5 - $\gamma_i\gamma_i$ ual se designa como <u>variación</u> de Y. Al pasar de una -curva a otra, el funcional cambia de valor y este cambio se designa $\Delta \mathbf{I}$ y puede escribirse

$$\Delta I = h \delta I + \frac{h^2}{2} \delta^2 I + \dots \qquad A - 3.1.3$$

con que $\delta^2 I$ es la segunda variación del funcional I y h es un rarametro. Por ahora no interesa la segunda variación, de ma-

nera que al introducir el cambio en Y , para hal se tiene

$$I + \delta I = \int_{a}^{b} \phi(x, y + \delta Y, y' + \delta Y') dx$$

A-3.1.4

restando la cc A-3.1.1, empleando un desarrollo en serie de ----Taylor y conservando unicamente el primer término, resulta

$$\delta I = \int_{a}^{b} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \delta y' \right) dx \qquad A-3.1.5$$

integrando por partes el término subrayado de manera que pueda_ despejarse $\delta \gamma$, se puede deducir

$$\delta I = \left[\delta \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \gamma'} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta \gamma \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \gamma'} \right) \right\} dx \qquad A-3.1.6$$

El término subrayado a la derecha de la ec. A-3.1.6, toma en cuenta las condiciones naturales de frontera. Si la curvainicial hace del funcional I un valor estacionario, entonces &I debe ser nulo y siendo & y arbitrario, excepto en los extremos, desaparece el término que contiene las condiciones naturales de frontera y se puede escribir

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$$

A-3.1.6

que en la conción de Euler-Lagrange

Pi el funcional I es de la torna

$$I = \int_{a_1}^{d_1} \oint (x, y, W, W, x, W, y, W, xy) dx dy$$

A-3.1.7 en que W = W(x,y) $W_{,x} = \frac{\partial W}{\partial x}$ etc., la ecuación de -----Fuler resulta ser,

$$\frac{\partial \phi}{\partial W} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial W_{x}} = \frac{\partial \phi}{\partial W_{y}} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

A-3.1.8

Teorema de Gelfand y Fomin. (69)

Considerese nuevamente el funcional A-3.1.1, para el que se pretende encontrar la curva y = y(x) que la al funcional un valor estacionarlo. Las condiciones con los extremos, son mevalente, que la curva pare por la punta A y B. Pero alora supongase que el funcional I, iebe satisfacer una condución a-dicional y que esa condución está da la en la forma de un funcio nal, y se escribe

173

$$K(y) = \int_{a}^{b} G(x, y, y') dx = \ell$$

A-3.1.9

en que l es una construte.

Si yy(x) no conduce an valor extremo máximo ó mínimo del_ funcional K , entoneus existe una constante λ cal que la curva yy(x) have del immediat

$$\int_{a}^{b} (+\lambda G) dx$$

A-3.1.10

un máximo ó un mínamo. De intronuce entonces la variación de Y en la rorma indicana anves)ec A-3.1..). Pero anora se impo ne como condución aurorent, la ne que el funcional & conserve_ el misio valor, antes y lespués de la variación, es decir

k[y] = k[y]

A-3.1.11

en que Y es la trajectoria vicilia in la cruva y según lo ex-presa la de. A-g. 1.2.

Froe diendo obf, et positie deposition que la scuación de_ Ther correspondente al problema ch exection prede escribirse,

174

 $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$ A-3.1.12

a really que la corre e cuán e subsectuarán acterencial, envole end of the restored as justed or new testes A y B (fag.-A-3.11) yourse provides and 1[9] decides a value expression,

alchás le culptar con la condición ingle sta por el fulcional -- k[y].

La cond dión angues a lo que y(*) no haja que el funcional K tome un valor entreno puele aclararse modiante la co. A-3.1.12; en virtur de que su k toma un valor extreme el término subraya do recaparece, quedanto la scuación atterencial A-3.1.6.

Estos con los resultados de selfand y Fomin. En ellos si observo la analogía de el astodo de multiplicados de Lagrange⁽⁷¹⁾.

In algunas consideres, soure todo en problemas filsions, sue le controque λ (see ser une function de la dolas variables inde pendientes (sec(a el esso), es tecir, $\lambda = \lambda(\infty)$.

Th auto cost, al inclonal A-3.1.10, tota la forma,

 $\int_{a}^{b} (\varphi + \lambda(x) \dot{\varphi}) dx$

A-3.1.13

y la forne le la committé antérionaleix repulsance es

175

 $\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \quad A=3.1.14$

que contra ecutione del sector de Sul de Subman, que amera -

. . 16 ()ATECH. 3.;

Dado el tuncional

$$I[y] = \int_{a}^{b} F(x, y, y') dx$$

sean las condiciones pura las curvas admisibles

y(a) = A y(b) = B $k[y] = \int_{a}^{b} G(x, y, y') dx = l$ en que k[y]es otra funcional, ; sea I(y) un extremo para y = y(x). Entonces si y = y(x) no es un extremo de k[y], existe una cons-cante λ tal que y = y(x) conduce a un extremo para el funcional.

 $\int_{q}^{b} (F + \lambda q) dx$

es decir, y = y(x) substace la conación diferencial A-3.1.

176

A-3.2 Folimonilos de Le engre

en problemas de ---so is le las funciones que ingeniería, or egenolo aquellas relacionadas con fenomenos dinamicos, possen una cualidad designada como propiedad de ortogo nallied. Le un propo le functiones $\phi_i(\xi)$, $\phi_2(\xi) \dots \phi_i(\xi)$ se duce que son ortogonales, crando se cumple que

$$\int_{\mathcal{B}_{0}}^{\mathcal{B}_{1}} \phi_{L}(\beta) \phi_{j}(\beta) = 0 \quad \text{(in)} \quad i \neq j$$
A-3.2.1

El sisme ser se fonciones, puede resultar ortogonal_ en la forna

$$\int_{B_{1}}^{B_{1}} \omega(\xi) \phi_{1}(\xi) \phi_{1}(\xi) d\xi = 0 \quad \text{ juma } i \neq j = k-3.2.2$$

en que w (8) se las construcer constructor de peso y se dice --, we has functioned som or ogonales conflactor de jeso ω (x).

In grajo he functioner que es ortogonal, se juete deducir, mediante le capileo de las ecs. A-3.1.1 y A-3.1.2, por ejemplo $\mathcal{F}_{a}=-1$, $\mathcal{F}_{a}=-1$, Cantend be for an un constanto -9300

177

de fenerones artegondies en la forma de polinomos; Supergane

que

 $\psi_{i} = \psi_{i} = \chi_{i}$

con un factor de peso $\omega(\beta)=1$. Como se ve al introducir es-tas funciones en la co. A-3.2.1, $\phi_0 = \phi_1$, son ortogonales. -Supongase ahora que el sugmiente polinomio debe ser de grado 2, y de la forma

$$\phi_2 = a_0 + a_2 \beta^2$$
 A-3.2.3

las constates, se determinan de las condiciones,

$$\left| \begin{array}{c} \phi_{1} \phi_{2} dg = 0 \\ \phi_{1} \phi_{2} dg = 0 \end{array} \right| \quad A=3.2.4$$

y así resulta

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (3\beta^2 \cdot 1) = P_2$$
 A-3.2.5

y en forma anclosa,

 $\psi_3 = \frac{1}{2}(55^3 - 35) = P_3$ A-3.2.5

los polimenios que auf reselvan se conocen como rolino----

mios le Legan re y 5 o propiedades son

 $\int R(R) R(R) = c$ $\int P^{2}(X_{i}) dX_{i} = \frac{2}{2i+1}$

A-3.2.6

Estos polinomics, pueden escuibirse,

$$P_{0} = 1$$

$$P_{1} = \beta$$

$$P_{2} = \frac{1}{2}(3\beta^{2} - 1)$$

$$P_{3} = \frac{1}{2}(5\beta^{5} - 3\beta)$$

$$P_{4} = \frac{1}{8}(35\beta^{4} - 30\beta^{2} + 3)$$

$$P_{5} = \frac{1}{8}(63\beta^{5} - 70\beta^{3} + 15\beta)$$

y se puede demostrar que

$$I = P_{0}$$

$$B = P_{1}$$

$$B^{2} = \frac{1}{3}(2P_{3} + P_{0})$$

$$B^{3} = \frac{1}{5}(2P_{3} + 3P_{1})$$

$$A = 3.2.8$$

$$B^{3} = \frac{1}{5}(8P_{4} + 20P_{4} + 7P_{0})$$

$$B^{3} = \frac{1}{63}(8P_{6} + 28P_{3} + 27P_{1})$$

Estos polinomos, satisfacen la ecuación diferencial

179



cuando p en un entero positivo.

1

Las mismas relaciones deducidas antes para los cinco promeros polinomios de Leganare, pueden deducirse como en caso part<u>i</u> cular le la formula de Rodríguez. Los polinomios se deducen,
180

en la forma

$$P_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dg^n} (1 - \xi^2)^n \qquad A=3.2.10$$

Los resultados que aquí se ban leducido, se utilizarán en el capítulo 4, aprovechando la propledad de ortogonalidad.

En la fig. A-3.2.1, se muestran en forma grafica algunas, de estas funciones. En esta figura, puede verse que la propi<u>e</u> dad de ortogonalidad de las funciones $P_k(\beta)$ para k=2, implica que el arca comprendida entre el eje 5 y la curva --del polinomio es coro y que que das su memento estatico o su valor meãio, es nulo. Dicho de cera manera que su fuerza y su momento resultante son coro, si se piensa de las funciones como distribuciones de estderze en cha acceión.











j







1.0









FIG. A3.2

APENDICE A-4

ECUACIONES DE EQUILIBILIO

En el apéndice presente se deducen las ecuaciones del el<u>e</u> mento infinitamente pequeño contenido en el cascarón y mediante integración a través del espesor se deducen las ecuaciones de equilitrio en un elemento finito de cascarón. El elemento infinitamente pequeño se caracteriza porque sus tres dimensiones son cantidades diferenciales, en tanto que el elemento designado finito está definido por dos dimensiones diferenciales y una de magnitud considerable o igual al espesor . Como se indica en la figura Al al pasar de la superficie media a una superficie paralela y que dista Z de ella, las mismas cantidades dp₁ y dp₂ dan lugar a elementos distintos de volumen.

Si se hace dZ = C en ambos casos, solamente existirá la diferencia entre las magnitudes \prec_{i} , $\propto_{i} \propto \propto_{i}'$, \propto_{i}' , \propto_{i}' , cuyo cociente se designa:

$$C_{i} = \frac{\alpha_{i}}{\alpha_{i}} = \left(1 + \frac{\overline{z}}{R_{i}} \right)$$

$$C_{i} = \frac{\alpha_{i}^{2}}{\alpha_{i}^{2}} = \left(1 + \frac{\overline{z}}{R_{i}} \right)$$

$$(A4.1)$$

El grupo de conaciones A4.1 es estrictamente válido en un sis-

181

tema de referencia ortogonal y de curvatura principal, en tanto que cólo es aproximadamente válido en un mistema ortogonal y no le curvatura principal.

El área elementas en la outerficie paraiei**n** a la superfimedia est

15' = 19 d/3, d/32

(A4.2)

y en la superficie media

$$dS = \sqrt{\alpha} \ \delta \beta_1 \ d\beta_2 \qquad (A4.3)$$

utilizando la notación

$$b = \sqrt{g/x} \qquad (A4.4)$$

se tiene

El conjunto de esfuerzos que actúan en el elemento a una distancia z, tiene resultantes en cada una de las direcciones, una de las cuales es, por ejemplo,

$$\overline{P_{i}} = \frac{\sqrt{a}b}{\sqrt{c_{i}}} \int \overline{C_{i}} \overline{T_{i}} + C_{2} \overline{V_{i2}} \overline{T_{2}} + \overline{V_{i3}} \overline{D}^{\dagger} \qquad (A4.6)$$

que representa la fuerza que actúa en la cara normal a la curva A_1 y es la suma de fuerzas por unidad del área en que actúan. En la figura A4.2, se muestran los esfuerzos en las caras del elemento. Debido a que en una sistema ortogonal, se tiene $\sqrt{a} = \propto_1 \ll_2$, de donde,

$$\overline{P_{i}} = \lambda_{2}h\left(c_{i}\overline{U_{i}}\overline{T_{i}} + c_{2}\overline{U_{i2}}\overline{T_{2}} + \overline{U_{i3}}\overline{D}\right) \qquad (A4.7)$$

182

análogamente,

estas resultantes estas valuadas por unitad de d / θ_1 y de d / θ_2 .

En un cubo elemental, como el que se cuentra en la ligura

A6.3, al pasar de una cara a la siguiente es una cierta dirección, las resultantes experimentan incrementos. Si se suman las resultantes y sus incrementos, tomando en cuenta el signo relativo, se deduce la condición de equilibrio. Esta condición es

$$\left(\frac{R_1}{2} + \frac{\partial R_1}{\partial \beta_1} + \frac{R_2}{2} + \frac{\partial R_2}{\partial \beta_2} + \frac{\partial R_3}{\partial \beta_2} + \frac{\partial R_3}{\partial z} \right)$$
$$- \left(\frac{R_1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2} + \frac{R_3}{R_3} \right) = 0$$

quedando entonces

$$\overline{R_{1,1}} + \overline{R_{2,2}} + \overline{R_{3,3}} = 0$$
 (A4.10)

en que Z = 2Z/t y se le ha asignado el findice 3 para indicar la derivada con respecto a ella.

Tomando en cuenta las expresiones correspondientes a las resultantes $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$ y $\overline{R_3}$ (ecuaciones A4.7-9), así como las ecuaciones de Gauss-Weingarten del apéndice Al, es posible ded<u>u</u> cir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de equil<u>i</u> librio en el elemento infinitesimal.

Ecuación A

[h x 2 (c, 0 ii)], + [x, c, (h 0 iz)], z - dz,1 h (c2 Viz) + d1,2 (c,+ c2) (h Jiz)

$$\frac{f}{f} \int \sqrt{3} x_{1} d_{2} d_{1} \int_{3}^{3} f \left[d_{1} d_{2} h \frac{\sqrt{3}}{R_{1}} \right]^{2} = 0 \quad (A4.11)$$
Equación B

$$\int d_{2} c_{2} h \sqrt{2} \int_{1}^{3} f \int h d_{1} \left(c_{2} \sqrt{2} \right) \int_{1}^{7} z$$

$$- d_{1,2} h \left(c_{1} \int_{1}^{3} f d_{2} \right) \left(c_{1} + c_{2} \right) \left(h \int_{2}^{7} \right)$$

$$f \int h \sqrt{3} z c_{2} d_{1} d_{2} \int_{1}^{3} f \int h d_{1} d_{2} \left(c_{3} + c_{2} \right) \left(h \int_{2}^{7} \right)$$

$$(A4.12)$$

Ecuación C

$$\frac{1}{R_{i}}(bc,\overline{U_{i}}) + \frac{1}{R_{2}}(bc_{2}\overline{U_{22}}) - \frac{1}{2\sqrt{R_{2}}}\left\{\int A_{2}b\overline{U_{3}}\right\},$$

$$+ \int A_{i}b\overline{U_{32}}\int_{2} = (b\overline{U_{33}}), 3 \qquad (A4.13)$$

Una vez deducido el sistema de ecuaciones de equilibrio para el elemento infinitosimal, es posible establecer las que corresponden al elemento finito. Con este fin, se introduce ahora la siguiente notación, que difiere únicamente en detalles con respecto a las utilizadas por Love(5), por Vlasov(26) y por sus seguidores:

Fuergas

 $N_{I} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} hc_{i} G_{i} dz$ $Q_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} hG_{31} dz$ $N_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h c_2 \sqrt{2} dz$ $Q_2 = 1^{\frac{t}{2}} b \overline{D} \overline{a} z d \overline{z}$ (A4.14) $N_{21} = \frac{1}{2} = \frac{1}{$

 $N_{12} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} hc_{1} T_{12} dz$

Momentos $M_{I} = \left(\begin{array}{c} \frac{\xi}{2} \\ h \end{array} \right) h_{I} c_{I} f_{II} c_{I} c_{I}$ M2 = / = h C2 V22 Z dZ $M_{12} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} hc_i \operatorname{Tre} 2 d2$ $M_{21} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h c_2 \sqrt{21} dd$

Ahora integrando a través del espesor cada una de las ecuaciones A, B y C, es posible deducir el primer grupo de tres ecuaciones de equilibrio de las fuerzas definidas en el grupo de <u>e</u> cuaciones A4.14. Procediendo a integrar en el espesor se ded<u>u</u> ce:

185

(A4.15)

Ecuación D $(A)^{\dagger}$ [~ NI], I + [d, Sre], 2 - dz, Ne + d, 2 SzI + daz - Q, = S, (A4.16) Ecuación E (B) [d, N2] 2 + [x2S21], - x, 2 Nit d2, 15,2 + d, d2 - G2 - S2 (A4.17)

$$\frac{Ecuación F}{R_i} (C) = \frac{N_i}{R_i} + \frac{N_z}{R_i} - \frac{1}{\alpha_i \alpha_z} \left\{ \left(\frac{d_z R_i}{d_z R_i} \right)_{i,j} + \left(\frac{d_i R_j}{R_j} \right)_{i,j} \right\} = \frac{1}{\beta} \quad (A4.18)$$

En calas ecuaciones, S_1 y S_2 son las fuerzas tangenciales en la dirección de las curvas de referencia y sobre la superficie; además se ha supuesto q = 0.

+Los letras en paréntesis, indican la ecuación anterior de que fué deducida la ecuación.

Las ecuaciones que corresponden al equilibrio de momentos se deducen de las A, B y C mediante multiplicación por Z e in tegración a través del espesor. Así utilizando las definiciones del grupo de ecuaciones A4.15, se deduce el grupo de ecuaciones de equilibrio para el elemento finito en la forma:

Ecuación G
$$(A)^{+}$$

 $\left[\mathcal{A}_{2} M_{1} \right]_{,1}^{,1} + \left[\mathcal{A}_{1} M_{12} \right]_{,2}^{,2} - \mathcal{A}_{2,1} M_{2} + \mathcal{A}_{1,2} M_{21} - \mathcal{A}_{1} \mathcal{A}_{2} Q_{1} = 0 \quad (A4.19) \right]_{,1}^{,2}$

Ecuación II (B)

$$\left[d_2 M_{21} \right]_{, +} \left[d_1 M_2 \right]_{, -} d_{, 2} M_{, +} d_{2, 1} M_{, 2} - d_1 d_2 Q_2 = 0 \quad (A4.20)$$

Feuación I (C)

$$S_{12} - S_{21} + \frac{M_{21}}{R_1} - \frac{M_{12}}{R_2} = 0$$
 (A4.21)

Si en la ecuación A4.21 se sustituyen las definiciones co rrespondientes a T_{12} y T_{21} como se especifica en el grupo de <u>e</u> cuaciones A4.14 y las correspondientes a M_{12} y M_{21} especificados en el grupo de ecuaciones A4.15, y si además se utilizan las definiciones de C_1 y C_2 , se puede establecer que la ecuación A4.21 se convierte en

 $\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h(\overline{z}_{1}(c,-c_{1})dz - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h(\overline{z}_{1}(c,-c_{1})dz + o) - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h(\overline{z}_{1}(c$

 $\frac{f-\frac{2}{2}}{pero:}$ pero: $\frac{C_{1}-C_{2}}{C_{2}} = \left(I-\frac{2}{R_{1}}\right) - \left(I+\frac{2}{R_{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{R_{1}}-\frac{1}{R_{2}}\right)$ $C_{2} = \frac{2}{R_{1}} - C_{1} = \frac{2}{R_{2}} - \left(I+\frac{2}{R_{2}}\right)^{\frac{2}{R_{1}}} - \left(I+\frac{2}{R_{2}}\right)^{\frac{2}{R_{2}}} = 2\left(\frac{1}{R_{1}}-\frac{1}{R_{2}}\right)$

de manera que la ecoación A4.21 se reduce a la forma

Aquí nuevamente la leuma en paréntesis indica la ecuación de la que se dedujo la nueva couación.

 $\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(\overline{f_{12}} - \overline{f_{21}} \right) d^{2} = 0$

es decir se satisface idénticamente debido a la simetría del tensor esfuerzo.

187

and the second second

-

.

.

.

·

APENDICE A5

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD Y ANALOGIA ESTATICO-GEOMETRICA DE LA TEORIA DE JOS CASCARONES DELGADOS.

En los desarrollos de este apendice, se usará un sistema curvilineo ortogonal de referencia pero no necesariamente de curvatura principal. El modelo de deformacion que aqui se emplea, ha sido usado por Gron y Zerna⁽⁵²⁾, Zerna⁽⁵⁴⁾; Goldenveizer⁽⁵³⁾, Mushtari y Galimov⁽⁷³⁾, M. Rodriguez Caballero⁽⁵⁴⁾ Reissner⁽⁵⁶⁾, Este moielo se ilustra en las figs A5.1, A5.2 y A5.3. En la fig A5.1 se muestra el vector desplazamiento y en la fig A5.2 se muestra el vector rotacion, cada uno con sus componentes respectivas. La superficie deformada se caracteriza por el vector

$$\vec{R}^{*} = \vec{R} + \vec{U}$$
 (A5.1)

referido a las coordenadas β_i y β_2 y que se expresa referido a las coordenadas $\beta_i^{,*}$ y $\beta_i^{,*}$ que corresponden a la superficie deformada como

$$\overline{S} = \overline{P} =$$

188

En is ac 10.1, al vector \overline{U} as escribe,

Ĵ

$$\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_{1} \overline{\mathcal{T}} + \mathcal{O}_{2} \overline{\mathcal{T}} + \mathcal{O}_{1} \overline{\mathcal{T}} \qquad (15.3)$$

el sistema de referencia originalmente ortogonal de convierte, despues de la deformación , en an anatema cuyo ángulo vale

 $\Theta = \frac{T}{2} - \omega$

siendo

 $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

Las cantilades ω , y ω_2 se muestran en la ti₆ura A-5.3. Debido a la diferencia de magnitud de estos ángulos, el vector_ normal a la superficie media antes de la deformación, sufre una rotación angular alrededor de si mismo euya magnitud es

d = dz - d,

(A-5.6)

(A-5.4)

(A. 5.5)

"1 vector 7 + Lormal a la superficie deformanda, puede representarse en términos del vector normal \vec{n} de la superficie original y en términos de los ángulos H, y H2 que, como se muestra en la fig. A-3.4, son las cuntidudes que giran los vectores base miturios $\overline{71}$ y $\overline{72}$, so la superficie original pa- $\overline{74}$ $\overline{74}$ $\overline{74}$ ra convertirse en los

maga. Intonces

$$\overline{\Lambda^{*}} = \overline{\Lambda} - \overline{\Lambda} \overline{\overline{\Lambda}} - \overline{\Lambda} \overline{\overline{\Lambda}} \overline{\overline{\Lambda}}$$
 (A-5.7)
An evanue al vector $\overline{\overline{\Lambda}}$ que represente la rotación que juran
te la deformación experimenta el vector normal a la superficie.

media, es decir la cantidad vectorial que tiene que girar el -vector normal a la superficie media original para convertirse en el correspondiente a la superficie deformada, se puede escri bir

$$-\hat{l} = -\gamma_{e} \vec{T}_{i} + \gamma_{i} \vec{T}_{2} + \delta \vec{n} \qquad (A-5.8)$$

según se deduce de las consideraciones introducidas en las ecua ciones A-5.6 y A-5.7. También puede deducirse haciendo $\overline{\mathcal{O}}=0$, es decir llevando el origen local a coincidir en la superficie_ media original. En este caso, el vector

$$\vec{m} = \vec{n}^{*} - \vec{n} \qquad (A-5.9)$$

que se ilustra en la figura A-5.5 es paralelo a la superficie media y se puede expresar en la forma

$$\overline{n} \times \overline{R} = \overline{m} \qquad (A-5.10)$$

en cuyo caso se comprueba la exactitud de la ecuación A-5.8 a través de las ecuaciones A-5.6 y A-5.7.

190

Las cantilides utilizadas pueden conocerse aprovechando el hecho de que el sistema local original es ortogonal. Los vecto res base que corr sponden a la superficie deformada se deducen_ de las ecuaciones A-5.1 y A-1, y son

at a Rix + Use (der,2) (A-9,11)

191

con magnitudes

$$a'_{R} = (a'_{R} \cdot a'_{R})^{\frac{1}{2}} \quad (a=1,2) \quad (A-5.12)$$

quedando entonces

$$Y'_{1} = \frac{\overline{U}_{1}}{\alpha_{1}} \cdot \overline{n} = \frac{\overline{U}_{1}}{\alpha_{1}} \cdot \overline{n} \qquad (A-5.13)$$

$$Y'_{2} = \frac{\overline{U}_{12}}{\alpha_{2}} \cdot \overline{n}$$

Estas relaciones aunque aproximadas son adecuadas en la teoría de deformaciones pequeñas (en que $\in = 0.005$). Si se desig nan los vectores unitarios sobre la superficie deformada como $\overline{\mathcal{T}_{a}}^{*}$ es decir,

$$T_{\alpha}^{++} = \frac{\overline{a_{\alpha}}^{+}}{q_{\alpha}^{++}}$$

(A-5.14)

se puede comprobar que

.

 $\overline{\omega}_{1} \doteq \overline{T_{1}}^{*} \cdot \overline{T_{R}}$ $\overline{\omega}_{2} \doteq \overline{T_{2}}^{*} \cdot \overline{T_{r}}$ (A-5.15)

estus ecuaciones se comprueban en la fag A5.3,

De scaesio con las nociones introducidas en el apéndice -

A-1, la primera forma fondamental so expresse

and = and and

y de acuerdo con la ec. A-5.1,

$$a_{ij} = (\bar{a}_{i} + \bar{U}_{,\kappa}) \cdot (\bar{a}_{j} + \bar{U}_{,\kappa}) \quad (\Delta - 5.17)$$

en que se ha introducido la aproximación utilizada en el grupo_ de ecuaciones A-5.13. Desarrollando la ecuación A-5.17 se pue de cacribir

$$\mathcal{Q}_{qs}^{*} = \left(I + \frac{U_{j\alpha}}{\alpha_{\alpha}} \cdot \overline{T}_{\beta} + \frac{U_{j\beta}}{\alpha_{\beta}} \cdot \overline{T}_{\beta} \right) \alpha_{\alpha} \alpha_{\beta} \qquad (A-5.19)$$

e introduciendo la notación

$$C_{\alpha\beta} = \frac{U_{j\alpha}}{\alpha_{\alpha}} \cdot \overline{T_{\beta}}$$

$$C_{j\beta\alpha} = \frac{U_{j\beta}}{\alpha_{\beta}} \cdot \overline{T_{\alpha}}$$

$$(A-5.20)$$

se escribirá

$$a_{\alpha\beta} = (1 + e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha}) a'_{\alpha} a'_{\beta} \qquad (A-5.21)$$

donde Ens se designa vensor deformación.

Las contidades expresadas en el grupo de ecuaciones A-5.20,

192

son realmente las deformaciones tanto lineales conc angulares -

según se lesprende de lo miguiente; farsiendo de la primera -

de las cos. A-5.15 se pacie ver que



Entonees

$$\partial_1 = \frac{\partial_{11}}{\alpha_1} \cdot T_2$$

que coincide con la expressión de C_{12} obtenida a partir de las d<u>e</u> finiciones A-5.20 quando se hace $C_{12} = \omega_1$. En general, se usará la siguiente equivalencia;

$$E_{II} = \frac{U_{II}}{d_{I}} \cdot \overline{T_{I}} = C,$$

$$E_{22} = \frac{U_{II}}{d_{II}} \cdot \overline{T_{II}} = C_{2}$$

$$(A-5.22)$$

$$E_{I2} = \frac{U_{II}}{d_{II}} \cdot \overline{T_{II}} = \hat{U}_{II},$$

$$(A-5.22)$$

$$E_{II} = \frac{U_{III}}{d_{III}} \cdot \overline{T_{III}} = \hat{U}_{III}$$

[one serve, its cantidades $e_1, e_2, \partial_1 = y \partial_2$ se deducen come el producto escalar de des vectores analógamente a le que ocurre con las cantidades $\mathcal{M}_1 = y \mathcal{M}_2$. In un sistema de referencia ortogonal se puede e crierr usendo los grupos de ecuació nes A-5.22 y A-5.13,

(A-5.23)

si ne toman en caeste las courrences A-5.12 y A-5.19, ne puede

ver que

21, * + N. (1+20) det a de CAREN

2. Segonda forma fundamental en la superficie deformada

Nuevamente según la definición de tensor de curvatura introducida en el apéndice A-1, se tiene ahora para la superficie deformada

$$b_{qs}^{*} = -R_{jx}^{*} \cdot \tilde{n}_{jp}^{*}$$

$$= -(\tilde{a}_{x} + \tilde{u}_{jx}) \cdot (\tilde{n}_{p} + \tilde{m}_{jp})$$

$$= b_{qs} - \tilde{a}_{x} \cdot \tilde{m}_{jp} - \tilde{u}_{x} \cdot \tilde{n}_{ps}^{*} - \tilde{u}_{px} \cdot \tilde{m}_{s}^{*}$$
(A-5.25)

El término subrayado dos veces es un término no lineal que no se considerará en esta formulación que trata con desplazamien tos \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 pequeños. El término subrayado una vez, contiene cantinades del orden de $\frac{2}{2}$ que son despreciables en el tipo de cascarones que aquí se estudia; por ejemplo haciendo $\alpha = 1, \beta = 1$ se puede ver que

U, . n, - U, # - U, + + + + (k++) + + (k + k) (k + k)

de donde se comprueba lo anterior. Por tanto la ecuación A-5.25

194

puede juouar

į

bas - bas = - ax mis (A-5.16)

y representa el incomento en la carvature le la sujerficie, al verificarse la deformación. Elle curvatures reales en la super ficie original, de represenvaren en el apéndice A-1 como

kap = - bas dadp

en forma análoga los cambios reales de curvatura al pasar de la superficie original a la deformada se expresan como

$$\mathcal{K}_{a\beta} = \frac{b_{a\beta} - b_{a\beta}}{\alpha_{a} \alpha_{\beta}} \qquad (A-5.28)$$

B96 0

$$\mathcal{K}_{AB} = -\overline{T}_{A} \cdot \frac{\overline{m}_{A}}{\overline{a}_{A}} \qquad (A-5.29)$$

$$\mathcal{K}_{BK} = -\overline{T}_{A} \cdot \frac{\overline{m}_{A}}{\overline{a}_{K}}$$

observándose así entonces la analogía existente con el grupo de ecuaciones A-5.20. Tomanão en cuenta la ecuación A-5.10 que - expresa al vector \vec{m} en términos de $\vec{J2}$, se puede escribir

$$\mathcal{R}_{ap} = \vec{n} \times \vec{T}_{a} \cdot \frac{\vec{R}_{ap}}{q_{p}} \qquad (A-5.30)$$

y asignando los valores adecuados a los indices $\pi \gamma/3$

$$\mathcal{K}_{1i} = \overline{f_2} \cdot \frac{R_i}{\alpha_i} = \mathcal{K}_i$$

$$\mathcal{K}_{22} = -\overline{f_i} \cdot \frac{R_i}{\alpha_i} = \mathcal{K}_2$$

(A-5.31)

195



Empleando estas expresiones es posible escribir las derivadas del vector \vec{N} en forma análoga a coro se sizo con las -- derivadas de \tilde{U} . Para este fín, es necesario introducir las cantidades

$$\overline{T_1} = \frac{\widehat{R_{11}}}{\widehat{R_1}} \cdot \widehat{n} \qquad (A-5.32)$$

$$\overline{T_2} = \frac{\widehat{R_{12}}}{\widehat{R_2}} \cdot \widehat{n}$$

encontrándo

$$\frac{\overline{R_{i}}}{\overline{R_{i}}} = -\overline{R_{e}}\overline{T_{i}} + \overline{R_{i}}\overline{T_{e}} + \overline{T_{i}}\overline{n}$$

$$(A-5.33)$$

$$\frac{\overline{R_{e}}}{\overline{R_{e}}} = -\overline{R_{e}}\overline{T_{i}} + \overline{C_{i}}\overline{T_{e}} + \overline{T_{e}}\overline{n}$$
3.- Ecuaciones de compatibilidad

La deducción de las ecuaciones de compatibilidad requiere un estudio más cuidadoso que el que a menudo se presenta (35).-Dado que un estudio cuidadoso implica ciertas consideraciones generales, es mejor intentarlo con base en el cálculo tensorial. En otro apéndice de este trabajo se pr senta una discusión de este tipo que tiene por objeto aclarar algunas de las cuestio-nes pertinentes y justificar lo que abora habrá de presentarse, en notación vectorial. La presentación que abora se hace fue_

discutida inicialmente por V. Z. Vlasov (ref. 26, p. 230) y ha sido ampliamente decarrollada por diversos autores rucos. La forma que aquí de cuta es esencialmente análoga a la rue preson ta deldenveiger (53). La deformación de la superficie media se caracteriza mediante dos vectores $\vec{U} \cdot \vec{D}$. Fatos vectores como funciones de las coordennans de la superficie, serán cont<u>i</u> muos si se verifica que el orden en la derivación no altera el resultado, os decir si se cumple

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{i}} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta_{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta_{2}} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta_{i}} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{i}} \left(\frac{\partial R}{\partial \beta_{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta_{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \beta_{i}} \right)$$

$$(A-5.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{i}} \left(\frac{\partial R}{\partial \beta_{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta_{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \beta_{i}} \right)$$

De lus conaciones A-5.23 y A-5.33, se conocen las prime ras derivadas de los vectores $\vec{U} \cdot \vec{J} \vec{L}$. Al verificar la der<u>i</u> vación como se indica en el grupo de ecuaciones A-5.34 se deduce, una conación vectorial de cada una te ellas. Así se obtiene para la primera ecuación,

$$T_{i}\left[-\left(\partial_{k}a_{2}\right)_{i}+\partial_{k}a_{2}-\left(a_{i}c_{i}\right)_{i}e+\omega_{i}a_{2}i-a_{i}a_{2}E\right] +$$

$$T_{2}\left[\left(a_{2}c_{2}\right)_{i}+\partial_{e}a_{i}e-\left(\partial_{i}a_{i}\right)_{i}e-c_{i}a_{2}i-a_{i}a_{e}E\right] + (A-4,35)$$

$$T_{1}\left[\frac{\partial_{2}a_{i}a_{e}}{R_{i}}-\frac{\mu_{e}a_{i}a_{e}}{R_{i}e}+\frac{a_{i}a_{i}e-c_{i}}{R_{i}e}+\frac{\omega_{i}a_{i}e}{R_{i}e}-a_{i}a_{e}E\right] + (A-4,35)$$

$$T_{1}\left[\frac{\partial_{2}a_{i}a_{e}}{R_{i}}-\frac{\mu_{e}a_{i}a_{e}}{R_{i}e}+\frac{a_{i}a_{i}e-c_{i}}{R_{i}e}+\frac{\omega_{i}a_{i}e}{R_{i}e}-a_{i}a_{e}E\right]$$

y al cincelar los coeficientes de los vectores base universos,se obtiene el siguiente primer sistema de econciones de compat<u>i</u> bilidad

- (W, R2), + 22 A1,2 - (A, e,),2 + W, d21 - A, d2 T, 00

(Care), + We dist - (Widd) 2 - Cide, - a.d. The mo (A-5.35)

 $-\mathcal{K}_{RI} + \mathcal{K}_{IR} + \frac{\partial_{R}}{R_{I}} + \frac{\partial_{I}}{R_{2}} + \frac{\partial_{I}}{R_{IR}} = 0$

En forma análoga, operando con la segunda ecuación del -grupo A-5.34, es posible deducir el segundo sistema de ecuaciones de compatibilidad. Este segundo grupo de ecuaciones se es cribe como:

$$- (d_2 \, \mathcal{R}_2)_{,1} + d_{1,2} \, \mathcal{R}_{12} + (d_1 \, \mathcal{R}_{21})_{,2} + d_{2,1} \, \mathcal{R}_{1}^{2}$$

$$+ \frac{d_1 \, \mathcal{R}_2}{R_1} \, \Pi_2 - \frac{d_1 \, \mathcal{R}_2}{R_{12}} = 0$$

$$d_{1,2} \, \mathcal{R}_2 + (d_2 \, \mathcal{R}_{12})_{,1} + d_{2,1} \, \mathcal{R}_{2,1} - d_1 \, (\mathcal{R}_1)_{,2} \qquad (A-5.37)$$

$$+ \frac{d_1 \, \mathcal{R}_2}{R_{12}} \, \frac{d_1 \, \mathcal{R}_2}{R_1} = 0$$

$$\frac{d_1 \, \mathcal{R}_2}{R_1} - \frac{d_1 \, \mathcal{R}_2}{R_1} = 0$$

$$\frac{d_1 \, \mathcal{R}_2}{R_2} - \frac{d_1 \, \mathcal{R}_2}{R_2} - \frac{d_1 \, \mathcal{R}_2}{R_1} = 0$$

Si resulta posible considerar que

$$\vec{\omega}_{r} = \vec{\omega}_{2} = \frac{\vec{\omega}}{2}$$

o lo que es lo mismo, cuando se acepta que de o y en conse---



$L_{12}Y_{1} = L_{21}Y_{2} \qquad (A-5.38)$

en que lir g lr son las curvaturas en la superficie como se de fine en el apéndice A-2.

Entonces el sistema de seis ecuaciones de compatibilidad contiene seis incógnitas que son $e_r, e_x, \omega, k_r, k_x \vee c$.

Mediante el desarrollo completo de las ecuaciones que definen a cada una de las variables que intervienen en el sistema de ecuaciones de compatibilidad, al hacer la sustitución en estas ecuaciones, es posible demostrar que se satisfacen idéntica mente.

4. Forma explicita de las expresiones de Gi, e. W. Z. K. N. N. T.

Weingarten, deducidas en el apéndice A1, utilizando las ecuaciones A-5.22, A-5.31 y A-5.32 así como las definiciones de -- \overline{U} y $\overline{\overline{M}}$ introducidas en las ecuaciones A-5.3 y A-5.3, es posi ble deducir las aprosiones desendas. Así para $c_{1}, c_{2} \in \overline{U}$

$$C_{1} = \frac{U_{1,1}}{\sigma_{1}} + \frac{U_{2}\alpha_{1,2}}{\alpha_{1}\alpha_{2}} + \frac{W}{R_{1}}$$

$$E_2 = \frac{U_{2,2}}{q_2} + \frac{U_1 q_{2,1}}{q_1 q_2} + \frac{W}{R_2}$$
 (A-5.39)

$$\omega = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{u_2}{\alpha_2} \right)_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\frac{u_1}{\alpha_1} \right)_2 + \frac{\alpha_2}{R_{12}}$$

o utilizando las curvaturas en la superficie, le y les

 $\begin{aligned} \mathcal{C}_{1} &= \frac{\mathcal{U}_{1,1}}{\alpha_{1}} + l_{12}\mathcal{U}_{2} + k_{1}W \\ \mathcal{C}_{2} &= \frac{\mathcal{U}_{2,2}}{\alpha_{2}} + l_{21}\mathcal{U}_{1} + k_{2}W \\ (A-5.40) \\ \tilde{\mathcal{U}} &= \frac{\mathcal{U}_{2,1}}{\alpha_{1}} + \frac{\mathcal{U}_{1,2}}{\alpha_{1}} - l_{12}\mathcal{U}_{2} - l_{21}\mathcal{U}_{2} + 2k_{12}W \end{aligned}$

en que
$$k_i = 1/R_i$$
, $k_z = 1/R_z$: $k_{iz} = 1/R_{iz}$

Los éngulos \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 que lefinen a las curvaturas ----

$$Y_i = -\frac{W_i}{\alpha_i} - k_i u_i - k_{re} u_e$$

82 = - Wit - Relle - Rizll,

(A-9.41)

200

y los cambres ac curvitura se expectant entances en forma análoga a las deferminaciones $e_1, e_2 \in \mathcal{O}$, in tanera que utilizan-

do las contaconte en la superficir de trone.

<u>_</u>

$$k_{2} = -\frac{\gamma_{2,2}}{q_{2}} - l_{2}\gamma_{1}$$

$$\ddot{c}_{1} = -\frac{\gamma_{1,2}}{q_{2}} - l_{3}\gamma_{3}$$

$$(A-5.42)$$

$$\ddot{c}_{2} = -\frac{\gamma_{2,1}}{q_{1}} - l_{12}\gamma_{1}$$

Haciendo las sustituciones pertinentes, se encuentra para \mathcal{K}_1 ,

Ri = + i (Wi), + Wie liz - kiliz U - kieler Uz + Riz [(U,d),2 - (Uzde),1] - t. [(R,U,), + (Riz Uz),]

Los términos subrayalos suclem despreciarse en las formulaciones de autores soviéticos para los fines de la analogía es tático-geométrica. Las cantidades subrayadas son realmente ps queñas para la mayoría de los cascarones usuales en ingeniería, de modo que puele escribirse:

 $k_{i} = \frac{1}{d_{i}} \left(\frac{W_{i}}{d_{i}} \right)_{i} + \frac{W_{i2}}{d_{2}} \ln 2$ $\mathcal{K}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{d_2} \left(\frac{W_{1L}}{d_2} \right)_2 + \frac{W_{11}}{d_1} L_{21}$ (A-9.44)

 $\overline{c} = \frac{1}{d_2} \left(\frac{W_{11}}{d_1} \right)_2 + lar \left(\frac{W_{12}}{d_2} \right) + liz \left(\frac{W_{11}}{d_1} \right)$

y así de deverdo con lus ecs. A-p.32



Relaciones no linéales entre deformaciones *e, e y D*, 5. y desplazamiento w.

Las expresiones no lineales para las deformaciones, pueden deducirse de la definición del tensor deformación, en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{l} &= \frac{\mathcal{U}_{l,l}}{d_{l}} + \ln 2 \, k_{2} + k_{l} \, W + (k_{l} \, W)^{2} + \left(\frac{W_{l,l}}{d_{l}}\right)^{2} \\ \mathcal{P}_{2} &= \frac{\mathcal{U}_{3,2}}{d_{2}} + l_{2} \, \mathcal{U}_{l} + k_{2} \, W + (k_{2} \, W)^{2} + \left(\frac{W_{l,2}}{d_{2}}\right)^{2} \\ \mathcal{U} &= \frac{\mathcal{U}_{l,2}}{d_{1}} + \frac{\mathcal{U}_{2,l}}{d_{l}} + l_{2} \, \mathcal{U}_{l} + l_{2} \, \mathcal{U}_{2} + \frac{\mathcal{U}_{2,l,2}}{d_{1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{\mathcal{U}_{l,2}}{d_{1}} + \frac{\mathcal{U}_{2,l}}{d_{l}} + \frac{l_{2} \, \mathcal{U}_{l}}{d_{l}} + l_{2} \, \mathcal{U}_{2} + \frac{\mathcal{U}_{2,l,2}}{d_{l}} \end{aligned}$$

202

and the second second

i. Na

•



.)

•





ĵ.

CUTVO B

, ,

чта с**ала**т



FIG. A5.5

.

APPENDICE AG. PRODELO TALDILARALCHAL SINTLE

A6. <u>Modelo de desplazamiento de una superficie paralela</u> <u>a la modia y localizada entre las superficies extremas</u> <u>de un cascarón</u>.

Un modelo de deformación que no adopte la hipótesis de Kirchoff o de las fibras normales rectas, puede ser

$$\overline{W} = W + \overline{z}^2 N^{(2)}$$

$$(A6-1)$$

$$\overline{U}_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}}^{\alpha} + \overline{z} U_{\mathcal{A}}^{(1)} + \overline{z}^3 U_{\mathcal{A}}^{(3)}$$

en que $\mathcal{H}^{(2)}$ $\mathcal{U}^{(1)}_{\mathcal{A}}$ son funciones que van a ser establecidas.

Un modelo quizá más interesante se puede escribir.

$$\overline{W} = W + 2W^{(1)} + 2^2 W^{(2)}$$

$$\overline{U}_{R} = U_{R}^{(0)} + 2U_{R}^{(1)} + 2^2 U_{R}^{(2)} + 2^3 U_{R}^{(3)}$$
(AU-2)

o bien

$$\overline{W} = W + W^{(e)}$$
 (A6-3)

en que $\mathcal{W}^{(c)}$ representa una corrección al desplazamiento \mathcal{W} y que se escribe

$$W^{(c)} = 2 W^{(i)} + 2^{2} W^{(c)} \qquad (ic - 4)$$

así mismo

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathcal{R}} &= \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{R}}^{(\ell)} + \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{R}}^{(\ell)} & (A6-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathcal{R}}^{(c)} &= -2 \, \mathcal{U}_{\mathcal{R}}^{(l)} + 2^2 \, \mathcal{U}_{\mathcal{R}}^{(2)} + 2^2 \, \mathcal{U}_{\mathcal{R}}^{(3)} & (A6-6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{R}}^{(\ell)} &= \mathcal{U}_{\mathcal{R}}^{(0)} + 2 \, \mathcal{U}_{\mathcal{R}}^{(0)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{R}}^{(\ell)} &= \mathcal{U}_{\mathcal{R}}^{(0)} + 2 \, \mathcal{U}_{\mathcal{R}}^{(0)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{R}}^{(\ell)} &= \mathcal{U}_{\mathcal{R}}^{(0)} + 2 \, \mathcal{U}_{\mathcal{R}}^{(0)},
\end{aligned}$$

de Kirchhoff. La secuela que aquí de sicue para obtener los resultados que se deducen, son aplicables a los dos modelos de de formación de las ecuaciones Ab-l y Ab-2 y en reneral a cualquier otro similar

En las ecs. AG-5 y AG-6 se ha introducido la separación:

$$\mathcal{U}_{a}^{(i)} = \mathcal{U}_{a}^{(i)} + \mathcal{U}_{a}^{(i)}$$
(30-7)

con lo cual se pretende representar la interacción entre las partes $\overset{(k)}{U_{k}}$ y $\overset{(k)}{U_{k}}$. Las cantidades $\overset{(k)}{U_{k}}$, que hacen las veces de rotaciones, se pueden suponer formadas de dos partes, una de ellas delida a la hipótecis de direbhoff y la otra considerada adicional y debida al efecto de la componente de corrección. Así se puede excresar:

$$u_a^{(i)} = -Y_a + \mathcal{G}_a \qquad (A6-8)$$

en que se la introducido

$$\mathcal{Y}_{\alpha} = \frac{\mathcal{Y}_{\alpha}}{\alpha_{\alpha}} \qquad (Ab-9)$$

y serún la deuxción Au-7,

204

(A(,-)C)

Poniendo en Comunez/Press. Los valores de 22 contenará

$$\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{W} + \overline{z} \, \mathcal{W}^{(1)} + \underline{z}^{2} \, \mathcal{W}^{(2)}$$

$$\overline{\mathcal{U}}_{A} = \mathcal{U}_{A} + \underline{z} \left(\frac{\mathcal{W}_{A}}{\mathcal{U}_{A}} + \frac{\mathcal{U}_{A}}{\mathcal{R}_{A}} + \frac{\mathcal{U}_{A}}{\mathcal{R}_{A}} + \frac{\mathcal{U}_{A}}{\mathcal{R}_{A}} \right) + \underline{z}^{2} \mathcal{U}^{(2)} + \underline{z}^{2} \mathcal{U}^{(2)}$$

$$(\mathcal{M}_{A} - 11)$$

ente entre texte enclate an tax de la companya estate e

(110-12)

en que R es el mayor de los radios R_1 y R_2 ; debido a que, para valores mayores de $1/R_{r_2}$, las curvas ortogonales de referencia en la superficie media, dejan de ser ortogonales en las superficies paralelas y ésto modifica las ecuaciones de equil<u>i</u> brio y el valor de la deformación ω_{r_3} y ω_{23} (ver ec. A6-32).

De acuerdo con estas consideraciones, el vector que define el desplazamiento en el continuo tridimensional del cascaron es:

$$\vec{u} = u_{1}^{(0)}\vec{r}_{1} + u_{2}^{(0)}\vec{r}_{2} + \vec{n}\vec{r}_{2} + 2^{2}(u_{1}^{(0)}\vec{r}_{1} + u_{2}^{(0)}\vec{r}_{2}) + 2^{3}(u_{1}^{(0)}\vec{r}_{1} + u_{2}^{(0)}\vec{r}_{2}) - (w + 2w^{(0)} + 2^{2}w^{(0)})\vec{r}_{1}$$

de manera que para el modelo de Kirchhoff se tiene:

$$\vec{U} = (\vec{v}_{1}, \vec{r}_{1} + u_{2}, \vec{r}_{2} - (\vec{v}_{1} - \frac{\vec{v}_{1}}{d_{1}})_{2} \vec{T}_{1} - (\vec{v}_{2} - \frac{\vec{v}_{2}}{d_{2}})_{2} \vec{T}_{2} - w\vec{n} \quad (\mathbf{k} - 14)$$

y para la corrección:

$$\vec{u}^{(e)} = -\left(\frac{\psi_{i}}{\pi_{i}}\right) = \vec{T}_{i} - \left(\frac{\psi_{i}}{\pi_{i}}\right) = \vec{T}_{i} - \frac{\psi_{i}}{\pi_{i}} = \frac{1}{2} e^{(i)} \vec{T}_{i} + \frac{$$

El modelo de desplazamiento se ilustra en la fig. Aó-1.

Au-1 Deformación en el modelo tridimensional

Además de las deformaciones sobre la superficie paralela, es necesario definir deformaciones en planos normales localmen

te a la superfici , para que esto sea posible se debe tener en

cuenta que los parámetros que caracterizan estos planos son

$$\alpha_{s}(\beta_{i},\beta_{z},z)=1 \qquad (A6-16)$$

$$b_{ss}=0$$

para superficies paralelas (espesor constante) y

613 = 620 = 0

que se cancelan si las curvas coordenadas consideradas como t<u>a</u> les tienen torsión nula (ver apéndice A2).

Para el modelo de Kircshoff se puede escribir la deformación en las superficies paralelas como en la ec. A5.13,

$$f = \frac{f}{4\beta} = \frac{\beta U_{jk}}{F d_k} \cdot \overline{T}_{jk}$$
(AU-17)

en que $\mathcal{A}_{\mathcal{A}} = \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{\mathcal{A}}$ (ver apéndices Al y A2). Tomando en cuenta la definición A3.30 y haciendo

$$\Theta_{\mu\rho} = \frac{\overline{m}_{,\mu}}{\kappa_{\alpha}} \cdot \overline{T}_{\beta} \qquad (A6-18)$$

con

se deduce:

$$\stackrel{\text{\tiny P}}{=} \stackrel{\text{\tiny C}}{=} \frac{1}{C_{\text{\tiny R}}} \left[e_{\text{\tiny A}\beta} + e \left(e_{\text{\tiny A}\beta} + e_{\text{\tiny A}\beta} \right) \right]$$
 (A6-19)

en que $e_{\alpha\beta}$ es la deformación en la superficie media, $E_{\alpha\beta}$ es la curvatura debida a la corrección,

La ecuación Av.17 se desprende de las consideraciones de

los apéndicos A5 y A2, + and - (* Rin + + U, n) · (* Rin + + U, p) - Pars + PErs (AL-19)

con

tegs = (tegs + teps) tax tas

(Ab-20)

y queda definido entonces como en la ecuación Aú.17. Para el vector desplazamiento de corrección se tienen las deformaciones

$$e_{qs}^{(c)} = \frac{\overline{U}_{jx}^{(c)}}{\overline{P}d_{ic}} \cdot \overline{T}_{js} \qquad (A6-21)$$

pero de la ec. Ab.15 se deduce,

$$\overline{U_{jk}^{(C)}} = \left\{ \left[-\left(\frac{\eta_{ij}}{\eta_{i}}\right)_{R}^{R} + 2^{2} U_{i}^{(R)} + 2^{3} U_{i}^{(G)} \right]_{T_{i}}^{T_{i}} + \left[-\left(\frac{\eta_{i}}{\eta_{i}}\right)_{R}^{R} + 2^{2} U_{i}^{(G)} + 2^{3} U_{i}^{(G)} \right]_{T_{i}}^{T_{i}} - \left[\frac{1}{2} W^{(G)} + 2^{2} W^{(G)} \right]_{T_{i}}^{T_{i}} \right\}, \alpha \qquad (A6.-22)$$

de manera que sustituyendo la ec. A6.22 en la cc. A6-21, para $\mathcal{A} = \beta = 1$, $\beta = 1$, $\beta = 1$, $\beta = 1$

$$C_{ii}^{(c)} = \frac{1}{C_{i}\alpha_{i}} \left\{ -2\left(\frac{\eta_{i}}{\alpha_{i}}\right), -2\alpha_{i} lie\left(\frac{\eta_{i}e}{\alpha_{i}e}\right) + 2^{2}\left(li_{i}, +\alpha_{i} lie lie^{2} - \frac{2\alpha_{i}}{R_{i}} - \alpha_{i} 2^{2} \frac{\eta_{i}(e)}{R_{i}}\right) \right\}$$

o lo que es lo mismo,

$$C_{II}^{(e)} = -\frac{1}{G_{I}} \frac{2}{G_{I}} \left(\frac{\psi_{I}}{d_{I}}\right)_{I} - \frac{2}{G_{I}} \left(\frac{\psi_{I}}{d_{Z}}\right) - \frac{E}{G_{I}} W^{(I)}_{I} + \frac{2}{G_{I}} \left(\frac{\psi_{I}}{d_{I}}\right)_{I} + \frac{2}{G_{I}} \left(\frac{\psi_{I}}{d_{I}}\right)_{I} + \frac{2}{G_{I}} \left(\frac{\psi_{I}}{d_{I}}\right)_{I} + \frac{2}{G_{I}} \left(\frac{\psi_{I}}{d_{Z}}\right) - \frac{E}{G_{I}} W^{(I)}_{I} + \frac{2}{G_{I}} \left(\frac{\psi_{I}}{d_{I}}\right)_{I} + \frac{2}{G_{I}} \left(\frac{\psi_{I}}{d_{I}}\right)_{I$$

Análogamente, para «-/s - 2,

207

 $\mathcal{C}_{22}^{(c)} = \frac{2}{c_2} \left[-\frac{1}{c_1} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{c_2}} \right) - \frac{1}{c_1} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{c_1}} \right) - \frac{2}{c_2} \left(\frac{1}{c_1} \right) - \frac{2}{c_2} \left(\frac{1}{c_1} \right) + \frac{2}{c_1} \left(\frac{1}{c_1} \right) + \frac{2}{c_2} \left(\frac{1}{c_1} \right) + \frac{2}{c_1} \left(\frac{1}{c_1} \right) + \frac{2}{c_2} \left(\frac{1}{c_1} \right) + \frac{2}{c_1} \left(\frac{1}{c_1} \right) + \frac{2}{c_2} \left(\frac{1}{c_1} \right) + \frac{2}{c_1} \left(\frac{1}{c_1} \right) +$ $+ l_{e_1} u_2^{(e)} - \frac{w^{(e)}}{R_2} + \frac{R^3}{G} \left[\frac{u_{e_2}}{R_2} + l_{2_1} u_2 \right] = \frac{2}{C_2} e_{2_2}^{(n)} + \frac{2}{C_2} e_{2_2}^{(e)} + \frac{2}{C$ (46-24)

y en forma similar,

 $e_{12}^{(c)} = \frac{1}{c} e_{12}^{(i)} + \frac{1}{c} e_{12}^{(c)} + \frac{1}{c} e_{12}^{(c)} + \frac{1}{c} e_{12}^{(c)}$

(A6-25)

en esta ecuación se ha introducido

$$C_{12}^{(i)} = \frac{u_{2,1}^{(i)}}{\kappa_1} - \frac{L_{12}(L_1^{(i)} - R_{12})}{\kappa_1}$$
 (A6-26)

tomande (i) los valores de La 3 para $e_{R_2}U_1,U_2$ y de La 2 para Ra W. En forma similar para las ecc. A6.23 y A6.24 y para e_{R_2} se ha usado

$$C_{II}^{(i)} = \frac{u_{I,I}^{(i)}}{d_{I}} + l_{IZ} u_{Z}^{(i)} - \frac{w_{L}^{(i)}}{R_{I}}$$

$$C_{ZZ}^{(i)} = \frac{u_{ZZ}^{(i)}}{H_{Z}} + l_{ZI} u_{I}^{(i)} - \frac{w_{L}^{(i)}}{R_{0}}$$

$$(A6-27)$$

$$C_{ZZ}^{(i)} = \frac{u_{I,Z}^{(i)}}{H_{Z}} - l_{ZI} u_{Z}^{(i)} - \frac{w_{L}^{(i)}}{R_{1Z}}$$

Respecto a la consideración de no-linealidad que se discu te en el apéndice A5, dada la pequencz de $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$, compa rada con $W^{(0)}$, es suficiente con atribuir a $W^{(0)} = W$ la existencia de los términos no-lineales.

En reguide se procede a analitar la deformación en ros pla nos normales localmente a la superficie media. Según se indicó en el ajéndice Al, ectos planor en la linección de las curvas \mathbf{A}_{i} y \mathbf{A}_{2} con es realidad superficies y exp rimentan un cam-

208





(AL-28)

2021

Sure.

BAR y Re 1,2

e and the same the same in the same is

 $\mathcal{D}_{\mu\mu} = \frac{\mathcal{C}_{\mu}}{(\mu e_{\mu})} \int_{\mathcal{A}} \int_$

ble.

Ahora, la deformación de las fitras normales a la superf<u>i</u> cie media se puede calcular como:

$$C_{33} = \frac{\overline{U}_{,3}^{(c)}}{\overline{A_3}} \cdot \overline{n}$$
 (n0-30)

y de acuardo con la counción A .l.A.

$$C_{33} \sim -W^{(1)} - Z_{+}^{2} W^{(2)}$$
 (46-31)

La fictore de la total que se verifica en el plano normal de calcule también totando en cuenta el vector corrección al des la amiento o sea $\overline{\mathcal{C}^{(c)}}$, de manera que

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{U}_{13} &= & \widehat{C}_{13} + & \widehat{C}_{31} \\
&= & & & & & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & & & & \\
\hline & & & & & & & \\
\hline & & & &$$

por in definice on an Un chande cerilir

$$e_{13} = -\frac{1}{GR_{1}} \left[-\frac{2}{4} \frac{\psi_{1}}{w_{1}} + \frac{2^{2}u_{1}^{(2)}}{w_{1}} + \frac{2^{3}u_{1}^{(2)}}{w_{1}} \right]$$

 $\frac{-1}{4R_{12}} \int \frac{1}{4R_{12}} \int \frac{1}{4R_{12$

(10-33)

C31 = - (3) + 22 (2) + 322 (4)








FIG. A 6.3

	and the second
· · · ·	

Wio	U ₁₀	VID	wii	U.II	Y 11	W12	U12	V12
			+ 94.41		- 3.15			
мана транцици, транци	n and a grant stand and a stand a stand A stand a stand A stand a stand	արդապատեստատում կատում է գորց նաև է, արտեղին հանձները 	an ng ito an ny page ny population ano a dia 14 Milandes (
Tra in a substance of a der affer sty of a substance	an an fean an a		and a consideration of the forestion of the state of the			+ 44.41		
					na sa sana nga na manga na manga nga nga nga nga nga nga nga nga nga	an haite an	Lanin gerge geenwijk nijskradat geva angek hinder stationer a	an an a cana an
							کرد	na na sana ang mga na
**************************************		an a sharan an a					an man ngangan mangan pangangan pangangan na mangan ngangan ngangan pangangan ngangan ngangan ngangan ngangan n	a na a bud an 101 ya ku adalah sana kualan an ana ginanaki kika dari dari
61,95	and the set of the set	+ 2.46			·			
1895	an an air air an	+ 5880						1990 - 4-0-114-0-14-5-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-
24,11	- 9.17	- 2.68						
1895	- 5190	- 5880			an a			
			-1000	- 61.94	- 8.31	540.8		20.04
	a Ale 1999 - Angel an Angel 1		- 26.33	- 51 90	- 1520	26.53		106 30
		ann a gu a gu a chuir a chuir ann ann ann ann ann ann ann ann ann an	2.41		-14470			
a an i suga dan a n an			270.4	33.97	10.02	-1000.0	- 33,47	- 8.31
						- 26.33	- 51 40	-15.20
						2.41	e an anton o toton anton anton antonato en comune	-144 10
9550						2.10.4	33.47	10.02
15.0				n gyn hynny a twe i mefod martan Mhargantald synadol Miller (* 1	ر چې چې چې چې کې	an a an		ang ng mga ng
					an a Guerra and an	an a sain al anna a gu a ta gu anna an anna an anna an an anna an anna an an		
121.0	14.96	- 2.55	an a	a an		an a suit faithe a' a gclasse she a suit fa the suit and a suit faith a suit faith a suit faith a suit faith a		دون در این می وارد این
1.3	-18540	- 106 30	ang 🖌 kana panga lamag agan gang kang tang tang santan . In sa ka				ان میں اور	an marana ana - manaka ang a sanadan katalah kumulan kumulan sarahara s
2.58		- 6650						an ng sing ngangangan making paga taupa kan ta distrika kanangang at segar

7.54	- 15.62	C 25			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	andready and a second and a second at the second	مور به و بر بر بو میدود از می و میکند. مور با مورد بر بود میدود از میکند با میکند با میکند از می	n Versin of montropolary "ay on Anomyte successation of
5 .7	68860	7520					. (h	a a gargangaliy, se o o analyki, ny minika di kilajasiyo yeny
C.20	7520	27800						
alastan an a	a og af sentenskalder af sense samlige och i besteller af sen af sen af senten af senten af senten af senten a	an a	4661	- 18.40	1.80	- 4112	101.20	- 11.70
grade, villagene ved met lekter ge grade glater i er de	a Anno an air air air an Anna an Anna Anna Anna Anna Anna An	an a	- E.41	145 140	11340	5485	266.00	-14520
ار ه ای کرد. بود و ماننده این که میکویونون و ا ^{رد} باش میکویود ا	a y a gagagagaga gaabaa maan a marayoo consederahii a gab bi too yoo goona kad	an a	1.45	226 80	55513	- 11.20		-20360
a alamatik perintahan menantik dikena ana akin s	an an an ann an ann ann ann an ann an an	α - αφοριατικά πουταιτές - ουμά (μ/ πουδρί 1994 μ.). Οι που το π	- 2036	54.9	8 95	49.40	- 4.2	1. 8.1
	ан на ууу уураадын 2 малар түрөртөлөн улуундугчулуу талагаан улуундугчулу талагаан түрөөн түрөөн түрөөн түрөөн	g,g capacinuterritannikang karapat di midrikki k/Apolitisi	30.15	-11895	an a	- 8.91	+11845	11040
an an an Anna an an Anna an Anna Anna A	n an an Alexandre - Marte Chatter (Mart - Andre Chatter - Andre Andre Chatter - Andre Chatte	an a coor annand ar comme chrometer i million e	- F.44	- 11340	-101.80	1.45	11540	52515
	1							ويبتدع وغريتهم المتكائلة وعلو بالناوب ويتقاهم واأته

		••••••••••••••••••••••••••••••••••••••			-					
U.4	₩6	Us	₩6	u 6	∀6	\sim_{7}	u7	7	we	uB
			- 324.71	- 18.34	- 2.68	+ 135.90		+ 5.82		
			- 1895	- 5190	- 5880	+ 18.95		+ 58 80	nen er i konstrumenten er i sonren de kalan de ander son de sonre	
* ** ····			+ 67.95	+ 9 17	+ 2.91	-324.71	- 9.17	- 2.68	+ 61.95	
9-20-2						- 18 95	- 51.90	- 58 80	+ 1895	
- 2.74	+ 20,08					+ 67,95	+ 9.17	+ 2.91	- 324.71	- 9.1
10 9 74	- 2.71	r							- 1B95	- 514
1.05	-118.19	+ 2.70				,		han an an ann an an an an an an an an an	+ 67.95	+ 4.1
27110	+ 8.13	- 10974				1			an a sa a sa an	-
1.05	+ 370.79	- 1,65							-	
10974	- 10,84	+ 38084							an a ann an an an ann an an ann an an an	
an a	•		+ 16.65	+ 2.68	+ 0.25	-1442	+ 29.92	- 5.10	+ 141	**
			+ 1.30	+68860	+ 7520	+ 13.70	- 185 40	- 10630	- 15.0	
			+ 0.20	+15040	+27800	- 5.16		-13300		
ter and the second s			- 721.00	1362	- 2.55	+ 1750	1.34	+ 0.25	- 721	14.96
			15.00	- 18 5 40		1.3	50320	75 20	- 1.3	- 185.44
	*		- 2.52	- 7520	- 6650	+ 0.20	7520	278 00	- 2.58	
	,		95.50	- 14.96		- 721.00	- 1,34	- 2.55	1655	1.3.4
						15.00	- 185 40		1.30	5030
1 Million Constanting Constanting Constanting Constanting Constanting Constanting Constanting Constanting Constant						- 2.58	- 7520	- 6650	0.20	1520
10.42	76.76					95.50	- 1496		- 721.0	• 1. ±4
5190	- 1.01								15.0	- 18541
6868	2.82								- 2.58	- 1540
1042	- 318.0	- 10.42							95.50	- 14:46
	1.01	- 5190								••••••••••••••••••••••••••••••••••••••
6858	- 0.47	- 6852)* # * :: # ###:: : ###::: : ###::: : #::::::::::	
			- 999.2	- 84.20	2,48	640,60			a an	
			- 3.88	- 79.25		9.88			9 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 -	n andrean antalania antara general a sense a sense a se e
			- 7.10	- 212.60	-144 50	18.80				-
			270.30	42.10		- 999.2	42.10	2.48	210,30	a dan parti di tanan dan da sa d
			•			3.88	- 79 25		3,88	na afanlanan darak gila in kanak ngan diganan c
			9.50	106.30		- 7.10	-10630	- 14450	9.40	la ya nama na

i

	Ne		UL 7	×7	We	Up	Vc	XX/.		Va
				1 5 0 2		~8	8.			
	- 2.68			+ 9.02	h e h - h - hanga dh - bhair a shink angan da alka a - ma a an a	n de la montos contratos que la delana delas	n - 1997 - 1999 - 1996 kalamat d'als relay sign (s. 1999 ga di matanga di ana nginga	n manunun meruta dari dari dari dari dari dari dari dar		in an ann an tarth an tarth an tart a tart an tart a tarth an tart
- 51 70	- 5880	-+ 18.78	0 17	+ 50 00	4 6195	nte 🖇 verteklik det di – waar Anger Herringsarge, tetasanga e – aktorisymp		an a		agar ang a magaan gabaray nas asara a ing ang ang ang ang ang ang ang ang ang a
	+ 4.41	- 2 24, 11	- 5190	- 2.68	T OLID	ar fe Ministerio - 1990 1999 1990 190 1994 19 anno 1994 1994 1994 1994 1994 1994 1994 199	+ 2.97	n 1911 - 1917 - Anna da anna - Angalangan 1974 n. an gan na dar bor a right 1	an - Sarah Malaysia ang ikang kanalakan kanakan sa kanakan sa - 1 ori Kan	19-29 - 2-20 75, -2-2-27, -2-20, -
	na filosofia de la seria Maria de la seria de la seria La seria de la seria	- 10 75	± 9 17	- 58 80	1845		+ 58 60		4	A 12 (41
		+ 0/.13	T 1. 1/	+ 2.91	- 0/2 4, /1		- 2.68	+ 61.45	n a a ha a ann h-ad thatha ga dharan an a salainn ann a bha	+ 2. 11
				er en anhændersesse at Weindersedersesse in an andersederse so de eiger res	- 1895	- 5140	- 5880	+ 1845	a a sa ay	1+ 5080
					+ 61.45	(+· 9,17	+ 2.41	- 324 /1	- 9,17	- 2.68
		n de termina page Marecolo tra 1877						- 18 45	- 5140	- 5880
						·	-	+ 61.45	+ 9.17	+ 2:91
	L D 25					• • • • • • • • • • • • • • • • • • •			ar a single de la constant de la co	
+ 2.68	+ 0.25		+ 29,92	- 5.10	+ 141				99 Juli 1965 Million and Statistical Statistics of a statistical Statistics	anaan aa ahaa ahaa ahaa ahaa ahaa ahaa
+ 68 860	+ 1520	+ 13.70	- 185 40	- 10630	- 15.0	a an				
+15040	+27800	- 5.16		-13300	7.01			n de maar nijnde eksensen mensen i heksensen van de seksensen seksensen.	ing angula Perenang Antoni ya palangan palangan da angula sa ang	
1362	- 2.55	+.1750	1.34	+ 0.25	- 121	14.96	- 2.55	95.50	and and the state of the state	
- 18 5 40			50320	75 20	- 1.3	- 185.40	- 10630	- 15.C		
- 7520	- 66 50	+ 0.20	7520	278 00	- 2.58		- 66 50		an a	
- 14.96		-721.00	- 1,34	- 2.55	1655	1.34	0.25	- 721.0	14.96	- 2.55
		15.00	- 185 40		1.30	50320	7520	1.3	- 18540	-10630
		- 2.58	- 7520	- 6650	0.20	1520	27800	- 2.58		- 66 50
		95.50	- 1496		- 121.0	- 1.54	- 2.55	1655	1. 34	0.25
					15.0	- 18540		1.3C	50 3 20	7520
-				······································	- 2.58	- 1520	- 6650	0.20	1520	27800
					95.50	- 14.96	a a serie a serie de la companya de	-721.C	- 1.31	- 2.55
	······		· ·			erenden bezahan Militarya angen 1 daranga da bagana ara gang	n an anna an an anna an anna an anna an an	15.c	- IB 540	an a
and the second						a adalah dan sebutu da sa da saran nga degalah da sa sa sa sa s		- 2.58	- 1520	- 6651
- 84.20	2.18	540.60					a a chailleann air feach ann mac air air an abhailte a chuir a	M. C.S. C.S. Namerican and Statements and American Statements	anne 1914 tale tale dige districtioned in segmentary of the state of the	
- 79.25		5.88				a Names was a statement of a statement of the property of a state of the statement of the s	and the second	n		and a state of the
- 212.60	-144 50	18.80			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	a de sus la facilitação de termina de la compansión de la desemplação de la compansión de la compansión de la c				eren ministration (Perfolgandige indexe and an oper o
42.10		- 9 99.2	42,10	2.48	210,20			i i i i i i i i i i i i i i i i i i i	romania in antinia anti	o o o an an ann an Ann - Ann a channa an Ann Ann Ann a chuir ann an Ann Ann Ann Ann Ann Ann Ann Ann
		3.88	- 79 25		3,88			o o e e e e e e e e e e e e e e e e e e	n an	n manage y a to the internet and the second se
106,30		- 7.10	-10630	- 14450	9.40			an and a first state of the second		and a close provide the set of the
	,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,									

Þ

SUBMATRIZ An

	والمراجع والمراجع والمراجع والمتعالية والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع						
No.ed	c. wi	u,	~ ₂	u ₂	₩3	U3	w _A
w,	+ 350.71	+ 2.10	- 296.38	+ 5.40	+ 20.08	1. 1. 1.	
U.	- 8,13	+ 3 8 0 84	+ 10.84	- 10974	- 2.71	a de la companya de l C	n a nanna hann na
W2	- 148.19	+ 1.65	+3 50.71	+ 1.05	- 148.19	+ 2.70	+ 20.08
· u2	+ 2.71	- 10974	- 8.13	+ 27110	+ 8.13	- 10974	- 2.71
Wz		- 2.70-	- 14 8.19	- 105	+ 350.71	+ 1.05	- 148.19
U3			+ 2.71	- 10974	- 8.13	+ 271 10	+ 8.13
₩4				- 2.70	- 148.19	- 1.05	+ 350.71
U.4				an a	+ 2.71	-10974	- 8.13
W5						- 2.70	- 148.19
Us							+ 2.71
w ₆	- 3.18	- 20.84	+ 153.5				
U.G	+ 1.01	- 5190	- 1.01			na han ya kuto a ta a kuto a ta a kuto a ta a kuto a ta a kuto	
٧6	- 0.47	- 13716	+ 5.64	4	·		
W_7	76.76	10.42	- 318.0	-10.42	76.76		an a
47			1.01	-5190	- 1.01		
V7	2.82	68.58	- 0.47	- 6858	2.82		
WB			76.76	1042	- 318.0	- 10.42	76,76
UB					1.01	- 5190	- 1.01
٧ ₈			2.82	6858	- 0.47	- 6858	2.82
w9					- 76.76	10.42	- 318.0
Ug							1.01
Vq					2.82	68 58	- 0.47
Wio				**************************************		**************************************	76,76
L io				n de la constanta de la constan	a 1997 - Barry of Version House and Anna Anna Anna Anna Anna Anna Anna	۵۵۵۵۵۵۰۰۰۰۰۵۵۵۵۰۰۰۰۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵	an Martin antara ing pilipin dari Manari yang ang saya ng kang panaka dari
V 10				ante di fono de printi presenta de un presenta e segui e segui con de conservadore per segui de segui de segui		ана да се бата бата бар ма да се на села села се се на реше на села се на села се на села се се села се села с -	2.82
Wii	57.78		The second statement of the second	na Marian indeficiendo de las construirs de las compañías debaterizados y a con	,	an fan de ferste finder finde fan de ferste fin de ferste fin de ferste finder finder finder finder finder fin	a de andre de un formalista de la
Uij				andre in definition of the statement reasons, a summaries that		ne fennin in fellen fellen gerte sterner statur meg er fenske nigeretaret for et ge	n af fair Maanaharna an ag glang basa An Agan da ang may na an ag -
Y II	- 2.4B					MANA ARTIN ATTAN ARTIN ANTANA ANTANA ARTINA	العالمة اليه العالمة المسالية المسالية المسالية عن عليه الله بالمسالية المسالية المسالية المسالية ال
W12		1979 - Sanda Bill Alfrancisto vallenzo del calabo de deservoro - Luo verte de	57.78	nan lan - ek analaka kan na na anala ang kanaka manyi saka kana na ang kanakan na saka sa saka sa saga saka	n di cheni me chada chi que un plana qui plana cana acada a	н адаби не – теліттиканайнад барлаасаны — Эр ужарарын Ар елекцаруны с	الله المراجع و 1949 مسلم الله الله الله الله المراجع من المراجع الله من المراجع المراجع من المراجع ا
UIZ		eremennen etter biller etter biller statistik mit sig den an og etter biller sig detter som etter biller	for allow more and on the owned baseling of the second second of the	n - n 1997 taller dem den men sinderskapitaliskapital og som den den gen (som gen (som gen (som gen (som gen (D. Excellence and the rate of the resource specific phases is a support of the process of the second sec	n men da alterna senti da presida da departo da tagon nacionari caldo da gr	maan oog tiledigen giv ald megstegdelig giv anditigene vie "topog virus".
Y12			2.48	anna, a annananan an anna an an an ar an ar an ar an ar an	 Pro 1 Hallhammer moneyeelige samoumige cup to stand or any or any 	n an	an a tao 1997 yili waxaa ark a na alka ang ka gangar in 1895 ya asa

•

u ₂₀	Y20	W21	Un.	You				
1					22	422	V22	
*****	******						-	
*** **********************************								
							1	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					***			
				¥				
							:	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							
			•					
	6.96							ی میشوند و در است کار میشند. در از این میشن میکرد و می میکرد و ا

• • . .

(2)

		· · ·			1		
				}			
	373.82		- 16 66				
			10.06				
						۰ مستقد میکند استان از این میکند میکند و میکند میکند. میکند ا	-
A				373.82	n Marandadi anangan gamatang dagang digan kanangan a saga - saga	- 16.66	*** -9 \$9000\$14444
					an a		ar a taran an a
				an an an ann an an an an an an an an an	a Martin ang ana a a sa a sa ang ang ang ang ang ang ang ang ang an		
l						1. W Makalani un den angendigi Islamora anggin gingkon anadamanjan gingkon a	
			l				
<u>ن</u>							

Y15 Uis UI6 V. WIG V_{I6} w_{ii} Un WIB • * 7 -- 3,15 171 - 6.46 يست جا ---111 6.16 171 4

10.02 10630 35.41 - 8.31

						ար։ անություններ, անունքում, ընդեր, ներություն, ու որ շրջանը։	1 ··· 0. 21	
a analy and a fin an an angle for the second se		ne de referencia de de regla della de la contra de reference namena della regla de con-		a da			- 15 20	51.40
n a fa a agus an an an Arlanda an Arlanda a tha ann an Arlanda an Arlanda an Arlanda an Arlanda an Arlanda an		und fra den eine eine eine eine eine eine eine	an ann an an ann an an ann an ann an ann an a				-14470	
	46.42	1 - Mer Alle Annonemister under gehen sowe andere soweigen open gehen des hann vers eine 1 - Mer Alle Annonemister under soweigen des hannes andere soweigen des hannes andere soweigen des hannes andere	1335.80	- 16.46	- 194.60	- 2429	unge vang grung generatie geleken waarde van angebruikelijken oppen op in de	
	14520	n na na na anna ann an Anna an Anna an Anna ann an Anna ann an Anna ann an Anna an Anna an Anna an Anna an Anna	68.40	-113 30	- 14 25	- 68,40		
	9 - 19 straps have approximately as a second s Second second sec second second sec	n - Anna a' na annaichtean agus annaichte annan a' spiel stàraine an ann an an		-20160		6.8		
661.90	- 1646	- 9730	- 2429	23,46	4130	661.96	· · · · · · · · · · · · ·	و مر من
68.40	- 11330	- 1425	- 68.40	ning an calm a district dian camp campage on objects	A new later of goodies: spay, on going or new core was an an any approximate		n maarin ya ku ku ka	
	- 20160		6.EA		,	l		

Yin	Чп	V.	WIB	U1B	V ₁₈	Wiq	U 19	V19	W20	
							•	ł		
			^{11,7} ***********************************	9-22-9 - 10-2 <u>0-0</u> 9-9 - 10-10-10-10-10-10-10-10-10-10-10-10-10-1		مەرىپە يەھەرلەر ھەرەپەر بىلەرلەر بىلەرلەر بىلەرلەر بىلەرلەر بىلەرلەر يەرىپىلەر بىلەرلەر يەرىپىلەر بىلەرلەر بىل				
				4						
			nan an	ναμη α δ. ποι ματαξρία η του π ου του το διαδιατή του διατοργατικό του του του που του του που που του που που π Γ						
ala 1990 - Santa Santa 1991 - Santa Santa										
				an a tha an						
	nana aliyo da na na akao na katao akao na katao da na katao na katao na katao na katao na katao na katao na kat		ale (preside – s), de verde verde verderen generen en verderen beserver op de verdere en verdere – se verdere	nadalahan dari (angganana dalah tarih) yan sa sa sa sa sa sa sa dari sa dari sa sa sa dari sa dari sa sa sa sa						
	nan an	fer die Gescher Hundersenschlie (All Versiter und sind eine Seine	anagen of C. Angewalagers of a colorential statement in the second of	y, ile :algebrachtensenkoller (n)angebrachtenkakolisekom						
				yndeganet den den de genedelige og de sen en de en en de der den de genedelige sen en en en de der den de gene		adalah kacamatan kac				
				a na na ann an an an ann an ann ann ann						
				and a supply of a grant to replace the set of						
			ann an an Anna an Anna an Anna an Anna an Anna Ann	n gana an						
			, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	naganagan seran disabit (an), din dangan kunduk dingkar		an a				
	an a	- 6.16	antennen og en sign angelige om dere bill gete skund helt til en ensker av 12 met	n die eine Auguster au die Andreas in die Frankrike statischen Bernhäcken Bern die Frankrike Berneur (* 1					and a state of the	
			, yr nyw yn	ан на н			•			
			an na kata na gana ang ang ang ang ang ang ang an	an a						
			171	۵۰ میلید و واقع با این از این	- 6.96					
						Alexandra, and general a start of the Annual Ann				
			anna di giya mua digiya nga di digi na di giya di na di siya d							
			, <u>andre</u> ge - La dinane, <u>d</u> endigen - La dinane de			171		- 6.96		
	na an an ta Angala an Angala a	1970 - 19700 - 19700 - 19700 - 1970 - 19700 - 1970 - 1970 - 1970 - 1970	na ya na	n						
1			y a ya na mafa a daga mana mana ya naga maka sa ta kaya mataka ga na gana na mata na kaya a sa a	₩ 3499						

,

(7)

· .

e				1	1				
199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199 - 199	an de antening de la colonitation a de la construction des la colonitation de la colonitation de la colonitatio		د. به های این این این این این این این این این ا		a na na an	ματικό με πλητικό το τημβάτου τη προγολογια τη πορογοριατική το πορογοριατική το πορογοριατική το πορογοριατική Το πορογοριατική το πορογοριατική το πορογοριατική το πορογοριατική το πορογοριατική το πορογοριατική το πορογο	han ngalalan nga nga kangang dan dan kangan kang		
	9 may 2 4 magnatalas ny paper in ang ang ang ang ang ang ang ang ang an		g och ger frähaltigenessen franklikkeringshift atte frähligt och	a µ:, a == 1 dame + a a a b d +		a a na ang ang ang ang ang ang ang ang a	ann a dhuanna an air chu chu can an aige ann a' de fhàinn ann a		
35.80		46.42	9 - A						
68.40		14520	ан и сарана лини на Алдинија и наринија и који и на селини и нарини и на селини и на селини и на селини и на с На селини на селини н					ه ما توا کمپ آوانو مالک رود خود « المان المان و وود کود کرد. و دود در دود د	ante unandri all'Appendente angles angle
		annen innenger after den ogse ander gegenningen versiker at en versik der einer ander einer versik der einer de			an ganaga mastandaratika an uzarraya. An Alkandarata da Alkanda da Alkanda da Markika (1968) an uzarra da Marki			s - merundatiligidet i menerundatilitik (de cap ermatiliskabet - anno pro -	a sta in star starting of the power of the starting of the starting of the starting of the starting of the start
129	- 9730	- 1646	661.90		23.46	a a sa ang mang mang mang mang mang mang mang	un de nammente historia e antem "historia" - 11 -	en sindlig de alsandeligenskaleriske vijne gestate medare – k. 15. k. –	n na alah 1 matri sangan katala katala katala kata kata a sa
6.40	- 1425	- 11330	68.40		14520	a in a state a state of	و المار الم	ى مەربىيە يەرسىيە بەرسەر بەرسەر مەربىيە مەربىيە يەرسىيە	ng sama manangangangangan sa sa sa sa
6. 8 0		- 20160							

SUBMATRIE A12

•

 W_{i0}

}

1.5

.

.

	····	Y					
No.ec.	W13	Uis	VIB	w ₁₄	414	V14	W15
W,							
u,		an a chairte ann an Anna Anna Anna Anna Anna Anna A	na an a	b) S.	α ¹ Μαλατικου αλλατίτου στι τολογορή φορής τολογογογογογογογογογογογογογογογογογογο	- Puliti - D	n na
W_2					a and a second	6 - 6 - 7400 (Mago yana ang ang ang ang ang ang ang ang ang	n a falligenije de gene danosto seno gene and gene and gene and generation and gener
u.2				an a	n bin ge stædt fil falde, unserfant galan-mængynaling v 👾 i av kor		аналананан жанаруунун на балагы кушындан бой сойн.
W3	+ 91.41		- 3.15			te Bandinelle fin der anzeiten sich der Greger bereichen Billisten der son	ander en
U 3		**************************************	n (film and an ann an Anna an A	inne och pick för lär i ärna förs rädjang spär vinitetar af gangap og kvitta	an ann a bha ann ann ann ann ann ann ann ann ann a		αν τη πατηματική διαδολομοριατής δαυγουρία ματ. Ο βολογο το το το το το μαριο στο 2 το 10 100 π. Να τ
WA				+ 44.41	n generative industrie eine menten inde de seis erstellen dasselige in der eine	· 3.15	
U4		and and and any second s	Preserve M. 1995 Sono. Brillian Marcellon and Architecture is subject from page and and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antipage and an antitage and an antipage and an antipage and an antipage and	n de la 19 Sell (El Neurone non ar in sinchear mensektilligunen eige Villue)	an ann an t-rionn an bhann a' bha da ' ann an sun an bhainn an san an bhainn an san an bhainn an san an san an	n an an a	angen kannen er ssaar i ning of kans of de skalender op sterender fan de skalender op sterender fan de skalende
WS			an a	na na shana na shekara na shekara na shekara na shekara na shekara ka ka shekara na shekara ka ka shekara na s	an a	na an an an an an an ann an an ann an an	+ 94.41
Us			an a	ar 1949 - Marilla Ingell, Ingelly Y. de, Stream agents der Linne in des, allefer is Statistike	n an airinn hair a' channailt ann dre an ann ag an ann an ann an an ann an an ann an	1 - De alema de alemantes - Elemandes en alemantes de la participada de la participada de la participada de la	a an ann an an an ann an ann an ann ann
w6			an an an saidh an	nn fers a fallann nillen, i fi a' fil fallang Mr. Billingain i gan gann	an a	n a far fanger af sin strage - san a sin sin fan gynnas sin sin fan gynnas sin sin sin sin sin sin sin sin sin	an ann ann an air an aine an ann an ann an ann an ann an an ann an a
u ₆			n hand men in the first standing to be a standing to be a standing of the stan	Control Martine Prove (1993) 116 (1993) Control - Antonio Martine Science of Antonio Science (1993) Control of Antonio Science of Antonio Scien	an ann an Suite Mariaidhe - an ann an Suite ann an Suiteanna ann ann an Suite	an bann blinde fallen an blinde ferste einer einer eine einer einer einer einer einer einer son der der bester	 The state of the s
V ₆	ander al an	an a	alandinin da kupatri sunannan ni murumar anaran dain da muranan	ուսան՝ ավա հանցեն նաև և տեղ է չունեցի մի չունեցի հայցեն է այսեցի հետուլ պայց հեղեկ պահանցի։	an a	n gan a shi katar min na parta sa katar da gan da ya ka mayar ta da sa ya na da ya da ya da ya da ya da ya da y	n ne an Baile Sean (Baile Sean Sean Sean Sean Sean Sean Sean Sean Sean
₩7	210.4		1002	Man Andrewski (ποι ποι του) της τοποίο της στάδουση της μότο καις ταμετικου	an and an on the subsequences in subs of our or site of a subs of grant production of	• A star way have been by a star define at the second star property between a particular definition of particular definition of the second star at the second star	na na manana na manan
u7	26 33		10620	n an	a na gran i fonda monanen an inder constato e constato for a seta dore a parametera da a	an a	9 (1997) (1993) (1994) (1994) (1994) (1997) (1997) (1997) (1997) (1997) (1997) (1997) (1997) (1997) (1997) (19
٧7			na na servente e la servente e na servente en servente en servente e na servente e en servente e en servente e	n (frankriger offis 1979) in a manner - spender de skanske most i febrevel felger in degeger gesen in	an a	a den ge a risklichtungt mit angestägt äung, som gegin sing gift ange	9 1999-1998 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 -
Wg	- 1000.0	- 33.41	- 6.31	210.4	annifer Walddalafanarr greduna dalamysiyan va ayyana byye	10.02	an a
U8	- 26.33	- 5140	- 15 200	26.35	a Martin Martin Carller (1997) (Martin Alternation (1997) (1997) (1997) (1997) (1997) (1997) (1997) (1997) (199	106 30	a na sana an
٧ ₈	2.41		-144 10		norde fallenander (na orden et de fallen et de gelant et de	Construction of the second se Second second s Second second seco second second sec	an an the first state and the same state in a second state of the second state of the second state of the second
Wq	210.4	33.47	11.02	-1000.0	- 33.91	- 6 31	210.4
Uq.			and a second secon	- 26.33	- 5140	- 75 20	26.53
٧q			and a second s	2.41	n name kalan kandilan kandilan ka adaptangan kanda kanggapan perja dang an	- 14410	մ տրածանականում՝՝՝՝՝՝ ուսաների պահայտարապաշտպաստելու էլուս օնից, որ շնար, որ երա օ

210.4

33.41

- (CCC, C.C.

		•		,	•				
٧q	WID	U _{ID}	V10	Wii	UII	V11	W12	U12	V ₁₂
			-	282.0	- 50.6		- 2056	9.2	~ 8.92
n, 20-0 tinut - ing odrafingkang y∰katik oʻyri			ana una di kanta di si dana di kang senger seragina da ka				50.6	- 71845	n gallen allegar angesar man se a sha ingi ingi ingi ingi ingi ingi ingi ing
i nger i die land die die die die die gehale der gehale gehale.							- 8.94	- 11340	- 10180
2.48	210.30	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					282.0	- 50,6	
	3.88								
4450	9.40								
	- 999.2	- 42.10	2.48	andeline finnenskelende i grafstillenskele Samtin en rør omset gesterskeler om					
	- 3.88	- 7925							
	- 7.10	-10630	- 14450						
				- 2429	- 245.66	6.96	1339		
				- 24.69	-107 34		24.64		
				- 21.10	-24036	-20760	51.68		
				669.67	12283		- 2429	-122.83	6.96
							- 24.64	-107 34	
				25.84	14518		- 21.10	-145 18	- 20160
							669.67	122.83	
							25.84	14518	
					, 1				
	171.06	1							a forma a sub-fit sub-fit a sub-fit
1							and data way - up to fill sufficient restsions. Major wideway		ann agus na fhair an Albarach I Mary na bh' an Abharacan a san
	- 6.96							•	1 4 4 4 5 5 5 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
				373.00					a static cash table to a constant of the state of the sta

ł

3)



V4	W15	U ₅	w 6	⁰ 6	V _G	~7	υ _T	v ₇
						' 210.30	42.10	
							1	
الله الله الله المراجع المحافظ المراجع المحافظ المراجع المراجع المراجع المراجع المراجع المراجع المراجع المراجع	a naga na daga da daga naga saya ing na ng na ng na ng na ng					4.50	ା ୯୫୬୦	
a na manatan dari dari dari kana kana kana kana kana kana kana kan	e venaminiseriar anchestata assessa que tracem a reacha taxen e a rea		9 	Militatione Aprilia - Anno - Lange unbegigenting I - grapping april - Milita	a de cadaleire deviniere die constatiert is datatier die ander die st	nakaun kunun anaka kuto ardar da sawa yeara menenye etherar	andry standings believer any paper - and a standard any paper of the standard and gamma and	
	Nacional Website Provide Control and the set of the set	uuungaadh tarth dhaga malaacay i shaga magaalaan Milli yaa ah ya	N			1	angerinn ministriftelige gentyrn ferföligen denn får og det skaden i med	1 milje mente frijskeller Berger, dagt rejsker Livenskon opdatense
 A set of the property state provide state pro		a a na Mala an Indea an Anna an Anna Anna Anna Anna Anna A	a de haderande a dista differende est han differende differende differende de la de haderande a de la de haderande de haderan	د ماهیردانی زندر است. در به ماهیردانی زندر است.	a a formada. Ta capacitada, a un ca co companso, ao deredar il des anno	nesala ya churo go ku katala na fo ako fi Morka ka man	ու աստաստանի արդար նախարարություն է է է է է է է են աստանությ	tra suu solesu rason apader anaµeudenar
an the state of a same form to make book and same same same same same same	51.78	a an an an an an an ann an an an an an a	na samana mata manana sa	արագորի արտեր նախագահանգորություններություն է հանգանություն տարբերություն է են	n shari ni mila shi qafa kuca ci data shi shari da na muja ajjaranda	per ga ganzari anyamba ya maka maka maya mana me kamba 'Ya' aka di mata) 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 -	aun 187 (april 1971) - 1974 - 1974 - 1985 - 1986 - 1986 - 1986 - 1986 - 1986 - 1986 - 1986 - 1986 - 1986 - 1986
		ar mina an gunagan na na na manganan kan s	a De ginale i de dari da de galla (h anti bad de filado, 1988); for albaha, d antiph (angarang dan dari kanakakangangkan dari kanakan menggenakakan tan inger	a ya ku ata a a a a a a a a a a a a a a a a a			
un rinink fils unktif di kapatisigano di avabri	- 2.48		In manufactura de la plante en el la V devela de constructura en la ser el condition a se el	F 1975 - Signa Talan & Alikan Mandala ang man sala banar a sa kabasa ban Pani a	n al Principal anticipal factor allater hadaunan contra ar centra ar factor factor factor	a na ar tas sanaran sansaran kasara	a Baannan pritud kurdi n turi di parte mantitud nadan di su saka s	na 1999 a se a 1999
. We have to an origination of the state of	 ► Beller 19 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1	a 1		a myndiaeth a dharda gynghar-bhanda falladh ar aitea mara ma dh dhar-eadadar: ghirdee na spa	a de allebre an in an anternet an anternet an anternet de la contra de la contra de la contra de la contra ant) mana da baga an	
	n de misim servir në menullar, shune name i de anavne n	n dan karan sana ma sakana ma dak ana sa sana a sa sa sa	111.06	area) agus shina le craitean na nan berdhabade is mba adaista an	a de la compositiva de la compositiva de la compositiva de la compositiva de la definidada e	n in der misse demannschaft der als einstatlichen auf der der Kantigeren der einer	anna airdinig aig an	-aded-lader d analysi indial and a factor
1 - 1 99994 (j 3 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4		ann gar fe Brige e ratio bha a Maraige bailt dar e sheagar airdean an Brit a de saoine d	- C CI I	9. <mark>1994 - 1</mark> 9 19	n ga nag ang ang ang ang ang kanang nan ang ang ang ang ang ang ang an		}+************************************	
*	, miller ver 1996, sektriger verste siger - 1994 - an et tim geligte verseen af tim bester	a de a compañía de la de de activita y de compañía de la de activita y de compañía de compañía de la de activi	0.10) 	ana mallad apalituda da ar danan acardar (a tara manalir dalam	111.06		
) a a garang manang mang mang mang mang mang mang	aggent mit en som aftersammenser detteren skatter at som for gar	a, 47 karapena karinapinakan papenaka, 70 kari jakun dalam manga kurd -	a da 11 - Indonesija ar og det for næge de odkendense skøpe omprenden	a fadar (h. 18. kun da e kun da e kun	- 6,46	ybiorranismismis in accepted alteration in contrapt operations , accepted in	, valanta (
at your en av and be bet at an add to another and the	an ain air an tha sha sha sha sha sha sha sha sha sha s	anglan dalahilar olehake allahita dharongkaran kaso ayaan 🛛 🖉 🗛 🗤	ana y maayoy Badamaa Kabbara dininkata dininkata diyaanaha digka dalahaana ay a d	an a				
an a	a de la manage antico a des conse conte conteces de conteces de conteces de conteces de conteces de conteces d	4 ¹ unstitution republicity angularly of one down reput days days or a	n generalizati da en estendendo o e e novo bito o dover o la senderajo e majo el	angaga, ita pamapangkan pang kan bang dari yan dari kan kan kan kan kan bang dari bang pang bang dari bang bang	ar a' albhan bhadainte rugar ant na par ar do fhar Millen anns agu dhadana anns	k szere a manyamoto i a n a nichozo képedy di nagése til nadá vé péletele a nada) Markanillerendje Harrow de eus e annen i dette se kendepildeken e	- wedenkaman - adam kanad Alfrid dire - di Alfrid Hold i di dilatar
- 1 m/h nijns 2 d antin je stanovno na men stanovno da na da se stanovno na se s				anna ann an tha ann ann ann ann ann ann ann ann ann a	9		999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 -	
ay nay ay ang	ан фолособа бараран басса англиски а алгону чалан коло а алгону калан коло алгону чалан коло а алгону калан ко	an a	e de melor hannan kommenskommenskom en ander som en ander T	a na mana an an ann ann an taonachadh ann ann ann ann ann ann ann ann ann an	an ar ann an an an an Albana ann an Anna ann an Ann	ne an ea cruive in ann an a	annan an an Sarah Alfandina ann an Sarah an an an An A	
algebrand aller of a fight and a single algebraic descent and a fight and a single aller algebraic and a fight a	y synan i sa mili ang sa	994 die 19 West der voorscher Angelein van die State State 1994 was die 2005 voor die 200				anna ann an Sharin ann an Sharin ann an Sharin ann ann an Sharin ann an Sharin ann an Sharin ann an Sharin an S	, and an	
				n anna an sana a' sana an sana a' sana anna an	n de la seconda de			
	un auran antaria da un mare tradi di su armi, anger por su ar		and showing the statement and the first to the two	a naga kungagan su naga garamuni - na sikar ci magi si kunga kuka kuka	a construction of the second	n na vice (n. analysis) na sugar terminana a suga	ана, амараларынын алар ар ар ар алар алар байн сайна алар ар	

T

на се до за слоди, на пруговра цира, ника и обласи конститура на слоката страто се се со со со со со со со со с n persitano ambat as composito an specificar persito a de alcar como a la seri ад <mark>дар, рода</mark>тиа у у и саримат новос, сарод какустор на серето да наймалать на солоковите с зала събликото о с the second second second prices and provide a second second second second second second second second second se n depresentation of the management of the depresentation of the de بالانتفاع والمراجع المواجع فالواد بالمتحاج والموجوع وموجو an a sea a sea a secondar a second a service a service of the service o

. -anan di aan amin'ny fantan'na mandra ani Minahan Indonesia - anji a min'ny dia managiman

. مود الدا معد م مصيحين المربور والمتعادين والمتعا

- in investigation of some constants

فروده بالاسوار فكولو توتحفه فالتعوي الالتار

waxaan a ah ah ah ah

where it was an an in the second of the an an an an an an an an an 🛔 The second s and a second second

			t,	•						
₩6	ν _e	VG	w ₇	υ _η	٧ ₇	WB	ა ₈	ЧB	₩ 4	0 ₄
			1 210.30	42.10		- 999.2	- 42.10	2.48	210,30	
		a a gund a s-aguine amhaiceann an agu an s-ain Ann a agus chairtean		an de la fine aple, ajunt a contra for a contra de la fine de la fi	anna an an an an an ann an an an an an a	3.88	- 79.25		3.68	
		پېلېند بېيېرد لېرانې مېلې دا، د چې تې د پې والله گېرلې د چې د لېرون د پې د اول	9.50	106 50		- 7.10	-10630	- 14450	4.4 0	and a supervised of the second se
.		nengalajularan kaluntuko menutuko kanyan yitu yai yai kalian dapan simet				270-30	42.10		-999.2	- 42.10
ŋ		, gungangan kanalaran indon ne kiru nu deneral denerali							- 3.88	- 1925
						4.50	106 30		- 7.10	-10630
L									270,30	42.10
										and and a second se
					•				9.50	10630
								1) 1)		
11.06										
8		n ander pen van verkander sjon of en de de sken inderstation in en de de service de stationer de stationer de s								
.96			111.06							a star and a star and a star and a star a
					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	anne a suran ada ya suran sumara kata na far dala suran badili inida sular				e aan anaan dhe earainna ay an
			- 6.46				و مواد ماد ماد و مواد ماد و مواد ماد و مواد ماد و مواد ماد و			
e - 2 - Come Second Second						111.06		ng ng pang ng mang bang ng bang pang bang ng ba		
							and the second			
						- 6.96	Kons in a statement of a statement of the	alar salar puptakan dalar yan antara sala sala sala sala sala sala sala s	enny daarkay, magaana oo ka ayaanaand aasay 10-a	s at <u>ministra (anno 1996) (an</u> 1997) (an 1997)
							وروان و المراقب المراقب المراقب المراقب والمراقب والمراقب المراقب والمراقب والمراقب والمراقب والمراقب والمراقب		111.06	
and a state of the						u usada - vitase var usa huse y märt da usaan sadas attasetistestistes		gena man e secondo de any any deserro e de altra deserro de la co		na Marcala Marcalandar Marcalador (Marcala de cos e das la secución es e das asís
								ana - ang sanata sa	- 6.96	
-,	े <u>क</u> ार्थना कुछुड्डा के संसंसंद इनके हु। प्रायंत्र पण में से से प्रायंत्र के साथ उसन	n a china china china china and an anna anna anna anna anna anna								
9 4.200 (19.00) 19	a na na sana a sana	a de la casa de la casa de desenvolutions de la de la casa de la definión de la de la de	n yang sang sa ban dalam kasa manahasi an bananan a gaya.							
		andre standing between the second state of the	n ga na maran an an san an a	al a departation of the source o						
	ann a chuainteacht an steachta ann an ta na chuirte an an tha an Ar Ar Ar An Anna		ana an an in the state of the	and and a second se	an a	anna a chuireann ann an San Ann a	annan fan fan te te en	personan – a signate atom, kas in og mar i ner vikker af fildet de fin de		

	n an an amhair an an an ann ann an an an an an an an a	n versigen siger siger gewone tellback and a stablisher source area the orthogonal te	n 🗢 A 🗤 - California este das la Palaires das des aprares procados - Salares	ի համանակացի անձեր չափողածի է ներք է է է է է է է է է է է է է է է է է է է	and and the first of the state	a and an and a second secon	ан аланда түркта аландары дар улар анаруулар аркаларуу түрктүүлүү калана түрктүү түрктүү түрктүү түрктүү түрктү	aan maar - 2 sapaan waxaa 4,00 m,00 m,00 m,00 m maarii waxaa a sa sa sa a ahaa ahaa ahaa ahaa ahaa ah		an 	. .
								مى مۇرىسى بىرىكى بىر	n waa ay kanala magaa ka kupa na dagaalaada sa ahaa ya ka ya ka ka ka ka ka	anna manana mara da na gamanga ang ata saka para kata para sa para sa para sa sa	
nan man diga dinang digini an-ang digini di	n daara da daa saa sa	na aka <u>ka</u> na kuya na kikin kapisa pokisin king kabu king kapisa kina king kapisa kina kina kina kina k		n en an an anna agus agus agus anna ann an ann an ann ann ann ann ann							í
n – – ¹ januarish na sakala shini si kuta ku kuta k uta kuta kuta ingi k	a araansa miraka ilaa iyo ii aa ahaaya ahaadaa mirakka mirakka mirakka mirakka mirakka mirakka mirakka mirakka	a 1. Alexandro and a statement of the statement	a ana ang panana ang pang pang pang pang	a davang ng n	page par an analysis par a alannanda dari de Sis araaraa ay da ahaan a ma	an a	ang	a a guard an	an a	n an y 184 9 (1994) an an 1849 (1994) agus agus an a n an	• ••••••••
ar	a sun darasan dari kumur un un munandar darak kana kana dara kana kana kana kana kana kana kana k	ng ngana sa sa sa na	na – 7. go gapan Marin No. Ghudo ang p. 752. kauto ng apanggap kal	ya dagi maga adar, yan ya kutukan andar andar andar na da hada na dan sa basa kutukan para d							Ì
	ar e sanon a sindo a si -adamente det soss≩e l	2 го. ". у токологи на ст. Ст. с. на на се умени и и и и и и и и и и и и и и и и и и	ana Nacionaana a Kalan (in Gordinaa vitea) vienaka	րահանձակորդուցուցությունների մանդերն տետախորագրությ	n - 	a processor existence of matrice states and the instance of the matrix of the matrix of the matrix of the matrix	na na an a	and an interaction compare on the country constants	n (2001) merupakan atau ajar arangka kara pada kalar kara dalah Badawa keri dalah seri dal	n ne ann annais an chle faanse aanaan san araa is as as is s	
											į
n na ana na ana an an an an an an an an	ang ang ang sagang sang sang sang sang s	ււլ գ. է հենկաներ, օրա է անձո	an a		a is in single a seeda nan waaroosharoo mannintan a toota n		ang na ng da da ang tina mina da ang da na mina ng tina ng tin Ng tina ng tina	an a	 το στημείο ποι ποι στημείο τη ποι τη τημείο φροτα θα τημείο τη τημείο τη ποι τη τημείο τη ποι τη π Τημείο τημείο τη ποι τημείο τη ποι τημείο τημείο τη ποι τημείο τη ποι τημείο τη ποι τημείο τη ποι τη ποι τη ποι τημείο τημείο τη ποι τημείο τη ποι τημείο τημείο τημείο τημείο τημείο τημείο τημείο τη ποι τημείο τη ποι τημείο τημείο τημείο τη ποι τημείο τημ Επιστρισμο τημείο τημ Επιστρισμο τημείο τη τρισμο τημείο τη προ	n an	
an shear a she she	s		······································			an in an	ananan, ⊒n an anananan karan nan ban 2	ng nangén a la Seressing dan kenan dari sari ti si si akan seresing	նալ։ Այսպես է արդանակությունը համարությունները է համարարությո		
											l
	1				<u>.</u>	4				A construction of the second sec	-

SUEMATRIE AZI

.

No.ec.	\mathbf{w}_i	υ _i	W2	U2	w. ₃	U 3	WA
WIB					51.78		-
Uis	an forder and an organized by the second second second	n die der Stellendersteinigerent die all omenige im andere in seinen.	an balan di kabu ini unan kin da aya aya aya aya aya aya aya aya aya	- Contra da la contra da Contra	4 - 1, 5	a a chuir ann an t-ann ann an t-ann ann an t-ann ann ann ann	
Vis			andere specification for the second second projection and specific and	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •	- 2.48	a an	n de de la composition (1005) (2000) (2000) (2000) La composition (1005) (2000) (2000) (2000) (2000) (2000) (2000) (2000) (2000) (2000) (2000) (2000) (2000) (2000)
W14	n manifest million manga ming alak daga dar angar dar sumar na dara				n an	n naman dangan dalakan di nang. Kalalun kun nan nang dalam kun na	51.1
UIA	nit weigen an weisen als an an andere an					andel of a subsequent biological data (a solar party sparts) data a s	na gina ann ann ann an Albana an Albana a' Sala an Albana an Albana Albana
V14				*	n a farainn an an Sharanna ann an Sharanna an Sharanna an Sharanna an Sharanna an Sharanna an Sharanna an Shara	na – Kanangang Manang Provinsi Ang Provinsi Ang Provinsi Ang Provinsi Ang Provinsi Ang Provinsi Ang Provinsi An	- 2.4
WIS	1997 ar 1999	and some in the many source of any source of the source			an a	andrada ("Anna da Mindigan Angaran da Anna a na magang kabanaka kaba d	n Maar oo Maar oo Maar Maar Ar ahaa ahaa ahaa ahaa ahaa ahaa aha
015		- Window & Mayney - 10 - Majinaki 100 yi 1 <u>anay - 1 ana</u> 100-11-11-1 aya	and the state of the product of the state of		and a second	ծ բառաջաննանահետաստումի է ստեղ էջ է տեղ է էլ է է էլ է է է է։ -	ny kaolo ny paositra na mandritra na mandritra na manana amin' na manana amin' na manana amin' na manana amin'
V 15						n mangan kan penangkan kan kan menangkan penangkan sebagai kan penangkan kan kan kan penangkan kan kan kan kan Penangkan kan kan kan kan kan kan kan kan kan	n na na serie na serie de la constante de la co
WIG						anna an dhumudaana anga ee mana. Aya na paranga parangan anga	an an an Annaich ann an Annaich an Annaich an Annaich an ann an Annaich an Annaich an Annaich an Annaich an Ann
U16			annan far feiningen Africa, sansar, jan ar sa sa sa sa sa sa sa sa				 Compare March Compare (1) - 1 - 1 - 1 - 1
V16							
WIT		······································	n den Verste folgensetterneten er en verste segete i an enge			ande Maranininia andre-sparer angelandipada de organización e se se y g	na haf skalfte sliger i slindspessione vielskop proprint to rije skliper og
V17			al de anna an a				
Vil				and band a specific participants (bell subjects data participants data			
WIB				antin 19 100 - an aire da a' a airt dha a ann an	nut Mahimur (n. Anathanis ann an		
UIB							
Vie			an balanti da ang katalan ang katalan ang katalan ang katalan katalan ang katalan katalan katalan katalan katal	· · ·	·		
WI9			د. ۱۹ کمچه بر کمچک میکورد با محمد میکورد با محمد می در این میکورد بر میکورد ا	ر گفت ^ا (» در گواهی می بود وی وی میکرد. است است (می ویک ویک وی وی وی بر می میک	n and a start a start a start a start a		
Ulq		ан айуу арту				ى مەرەبىلەر بىلەر	
VI9		an fragman i a chuir ann an tart an taraige a' targan a' targa an tarainn a	na Martin ang kang kang kang kang kang kang kang	1944	and all a first water a state way and the state of a state where you are supported as		
W20		ant	na (1996) a star agus agus agus an san agus a	1999-1954)			
20		an a	 Meaning in the antidate study in the second system (provided) 	الله الله الله الله المعالية ا المعالية المعالية الم	1998 bis d fig: /m: da : campo come fig: (de ano e antara) ana angenera		
V20	an a		n a construction de la companya de l	1770-1890 - 1994 - 1995 - 1997 - 1996 - 1996 - 1996 - 1996 - 1996 - 1996 - 1996 - 1996 - 1996 - 1996 - 1996 - 1	n Man Dan with the general state of the stat		•
W21		111 - 1999 B Balancia, 1915, 1849, 1977, 484 (1979)	Shame work and the degramme and the state of the state of the				
021				•		n na	որդ առաջության անացանցեն անինչ որը չու ոչ աչ էլ աչ էլ

-]

Ł

•

V 24							
Wil	n fan de fan it fan it fan de fan	Mining Mining and a second state of the control of a second se Second second s Second second seco	a mana an an ann an an an an an an an an an	97 - Hori Anti-Hori Adamini ka kajati ini ingekanggan ang	911° ● 1961 7 10 - 1 1989)914-098991914 900,1000/00 700000 899999141	f en balle alle de la service de la servi	an dhu an san dhu an
17.22	n an an ann an an an an an an an an an a	• Monte all relations and the same in some in sec. Some sec. (a)	and a second	n 19 fe novine de la compositación y la compositación de	n Arrona Internetien er personen menenska kan besken skalan som	n sa a fan fan ar fan skriger felering sener san se an se a se a se	and a survey
V 22		of α 1996 - Andre Sternen, N get net som krist och som	Pi odotaranana no _{nga} ajang j	na anna anna anna an an an an an an an a	n in de le Frei e − , i , i date i de la manateria de la data.	an an Rainnean o a saoite anna a star ta sa saoite sa saoite saoite saoite saoite saoite saoite saoite saoite s Ta	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
			9 - 1997 - C. I. B. Boldmann, and F. B. Boldmann, and F. B. Boldmann, and F. B. Boldmann, and F. B. Boldmann, a	1998 - Conservation of Access Specific Conservation of the	են հայ հետև երերությունը հետարագետաները։ Դեստությունները	பட்டைக்கும்பாற்றியைன்கத்தாட் µப்பைத்தைற் சட் கிட்ட்டத்துக்கும்	······································

20	V20	V20	W21	Uzi	V21	W22	U22	V22	
1 - San San San Sala Sala Sala Sangaran San S									
		<u> </u>			_				
51.90		73.46	+				_		
,8.40		14520							

1 29	- 91.30	- 16.96	1					1	
3,40	- 7925	-11330							
		-20760							
			- 4714	- 4 4 3	- 31.15	2614		100.52	
a waaya <mark>ka ka ka sa sa</mark> a			-142.92	- 107 34	-15218	142.92		18200	
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	16.66		-26940				
	!		1307	221.50	50.26	- 4714	- 221.50	- 31,15	
						-142.92	-10734	-15218	
	!					1666		-26940	
1.11					·	1307	221.50	50.26	
1. 20			1				 	<u> </u>	
54	127.30	- 24.59				'	<u> </u> '		
61	-34626	-18200			+'	<u> </u> '	'		
.59		-13786			+	'		<u>├</u>	
541	-162.99	9.85			11				
2.47	128000	15218		1	11				
.91	15218	75210							
			11160	-114.00	31.5	- 15 860	526.76	-118.6	andersenander in Service Als Vilerians, i Sekalender vorziegen

.

	- 85.00	155600	18420	349.0	-420 00	-21820	
	 28.60	31840	94200	-118.6		- 34 500	
Name and the state of the state	 - 14 30	350.38	- 59.3	18810	- 87.00	3150)
American - Marci Mardinar	 264	- 42 000		- 85,00	113600	18920	
and the second	 - 59.30	-18420	-11250	28.64	18920	44200	

•	٨.	
	,	

WIB	VIT	Vij	Wig	۷۱۵	Vic	W16	VIS	U _t r,
- 2429	23.46	47.30	661.90					s.
- 68,40				a manan da da mana da arresta manda, in da ta nan da nay sana ayan sen da da arresta.				n na Mir polini a terrena a su a comencemente de seguieras.
6.8c				ar Third The Alexandrian and the South States of the South States and South				ر. مەربىلىقىقىرىمىرىكى بىرىمىرىكى قىلىغ بەربىرىكى بىرىكى بىرىكى بىرىكى بىرىكى بىرىكى بىرىكى بىرىكى بىرىكى بىرىكى
667.90	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •			a Madiller - Andre 1997 in 1997 and 19			- • 8.85	5 °.6
							-14520	-26600
				i Balle - Bin alle - Mithillipin etgeweiten en erstenste Alles Balle - en			-10160	. * 20 ⁰ 0000-00-00-00-00-000-0000-00-00-00-00-
	. Saini an ini ann an Ann ann a Saini a Saini a Saini ann an A	манан Ант Катана, 19 € Ц 19 – L — В 3 мар Аллин ану ну ану ану алу алу алу алу алу алу алу алу алу ал		, a ¹⁹⁹⁹ -			1.80	
n a santan ing di sang nggala dan ang ng pangan dan kang ng pangan dan kang ng pangan dan kang ng pangan dan ka		an a dalah a sama yang dari da ka na sama dan yang dari da ka na yan	n		n an	anala analan ana ang ana ang ang ang ang ang ang a	11340	48495
				99-199-199-199-199-199-199-199-199-199-			65513	11 340
12 33	- 49.18	254.56	8868	4.85	- 11.38	4424		
-127.30	-18200	- 34626	162.97	15218	128000	- 35.67		Merran Africa V Ann Bhacalan Lange Lange Lange Berge and an ann
	-21512		- 44.18	75270	30436	8.91		une la manufatencia e sugo collicitore de culturarias porta deste ana dese
- 4434	9.85	- 35.61	49.24	- 24.19	162.94	- 4434		
+ 35,67	15218	93375	- 35.61		- 34600	127.30		namet finale a dana da ya ing sa a damana da aka da ing yang yang sa da yang yang sa da yang yang yang yang ya
-24.59	15210	15218	1841	-13186	-15218	- 24.59	an a	n na standard a standard an
9924	- 24.59	+ 35.64	- 4434		-121,30	616.11	»	n 1 - 1918 / Balanceron Dage age (1919) (11 - 1918)
- 35.67	- THE BOARD - BIT CONTRACTOR OF THE REPORT	-34600	127.30					 Instruments to the state and the strang synchronized stranged as the second stranged strangest strange strangest strangest st strangest strangest s Strangest strangest stran
8.91	137 80	-15218	- 14.54			16-1-19-19-19-19-19-19-19-19-19-19-19-19-1	a mar ann frige i Mar ann fairteach ann an ann an ann an ann an ann ann an	ungenerate sola sola a company destantemente portante
-4434		-121.30	616.11					v or 1/2
12730					namely and so and the second state of the second state of the second state of the second state of the second st			9 - 900 - 90
- 24.59					n the second second start by the second s			n a statu
616.71						19 - 1990 - 19 - 19 - 19 - 19 - 19 - 19	6.46	- 122.83
	1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 - 1999 -							-17 134
						and a second	-20700	14 518
a na			2018	+ 1 - 10	- 541 8	- 4710		
		a a shekarar		n na mananan yan mili dina ingenin ngi yan na yana ingeningi ngi ngi ngi ngi ngi ngi ngi ngi ng	1.410	- 12/0		

•

•										2	
2	V16	WIT	Vii	VIT	WIB.	Uig	V _{IB}	Wig	Va	Viq	v
		661.90	97.30	23.46	- 2429	- 91.30	- 16.96	667.90		23.46	
					- 68,40	- 79.25	-11330	68.40		14520	
			-		6.80		- 20760				-
÷					667.90	97.30	2 3,46	- 24 29	- 97.30	- 16.96	6
								- 68.40	- 1925	-11330	
		-						6.80		- 20760	
: / . •- / • ••							1	667.90	97.3C	2.3.46	- 2
1977 - Anna Prantino 1											- 6
: 				· ·							
8	9.85	8868	254.56	- 49.18	1233					-	
)<')	15218	162.97	-34626	-18200	-127.30						readin at all an an at an a sec
6	75270	- 44.18		-21512						• • • • • • • • • • • • • • • • • • •	
4	- 24.19	9924	- 35 .6 4	9.85	- 4434	127.30	- 24.54	616.11			
(- 35.61	93375	15218	+ 35.67	- 34626	-18200	-121.30			
	-13186	18.41	15218	15210	-24.59		- 13 186		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
		- 4 4 3 4	4 35.69	- 24.59	9924	- 35.64	4.85	- 4434	127.30	- 24.59	
: he w <i>ang</i>		127.30	-34600		- 35.67	93375	15218	- 35.67	- 34620	-18200	- 12
		- 24.59	-15218	13780	8.91	15218	75270	- 24.59		-13186	
		616.71	-121,30		-4434	35.69	- 24.59	4924	- 35:64	4.85	- 4.
			·		12730	- 34600		- 35.67	43375	15218	- 28
b rapats	anna dh' anna ann anna ann ann ann ann ann ann	-			- 24.54	-15218	-13186	8.91	15218	75270	- 24
					616.71	- 127.30	in 8 an an San Anna Anna	- 4434	35.69	- 24.59	1.2
		•					n an Anna an An	121.30	-,34600		-16
							na an a	- 24.59	- 15 218	13786	
	+ 16.10	2018			99999999999999999999999999999999999999		n min den en ny - en	nan al 1963 / No. Bar Milanad - Anaton Santa Andrea (Angelang Santa)			
		13.00			, δ. Φαφιστού του βουντογ <u>ιατού π</u> αγ <u>αστά</u> τερα. 			nen en anna mar Marina en Sulton Marino (na sultante en anna anna anna anna anna anna a	. All All Charles and Antoning and a second second spectra and a second spectra and a second spectra and a seco	1 19 7 / Manufer - Handrid Caning - Manual Andrew - Andrew	
									and a second	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	1.

•

SUEMATRIE A22

.

No.ec.	WIB	C13	Vis	W 14	U ₁₄	√14	Wis
Wis	4667	- 9.2	1.80	- 2056	50.6	- 6,85	2.82.0
0 ₁₅	- 8.41	71895	11340	+ 9.25	- 266.00	14520	- 50.6
Y ₁₃	1.45	11340	55513	- 8.6	ing a general general set of a set of the set	-10180	and and an and an and the set of
WIA	- 20 56	9.2	- 8.43	4667	- 4.21	1. Ec	. 2056
Ω_{14}	50.6	-71895		- 8.91	71845	11:340	+ 9.25
V 14	- E.94	- 11 340	-10180	1.45	11'340	65513	- 8.6
Wite	282.0	- 50.6		- 2056	9. ²	· 6.43	4946
V ₁ 15	n Y Tana atan kata kata kata kanya nga kanya na na kanya		an fan sen en e	50.6	-718.45		- 54.8.
V _I r _a				- 8.94	-11340	-10180	1.45
WIE		n an an Anna a		a a a a a a a a a a a a a a a a a a a			
$v_{i\epsilon}$				a na			
۷۱6			n an		n - Mar Marine An de Lapita ann an ar an dhaonaidh agus an		
WIT	664.67	n ferfel angelek i san dinangen dan dan dak dan si gera angelek dan si si	n mangan kanangan kanan kanangan kanangan kanangan kanangan kanangan kanangan kanangan kanangan kanangan kanang	n a a dh' an an an Anna Anna Anna Anna Anna Anna			a maio apraeo gan gan antonin in yan salandor kara a sa
$\Sigma \eta$	24.69	na na o sina dalam kana kana kana kana kana kana kana ka	։ «Մերջան 1919 տանածներին համենակի հետրում աստել / է մաստես համարդություն։ 	ana reestaren olenako dala konstratuen generala.	**************************************		
V ₁₇	20 84		• If the second states of the second state back of the second second states are second states as a second state second state second states are second s are second states are second states a	ann anns de altere altere anno anno anno ann ann anno anno anno	an da anna da famili anna a shaanan umu a mu a a dasar	a da ana ana ana ana ana ana ana ana ana a	a and marked by any set of the set
Wig	- 24 24	-122.83	6.46	664.61		• • • • • • • • • • • • • • • • • • •	n fall fill fill fill fill an
9 ₁₈	- 9.4.64	-10/34		24.69	and the last of second design and the second se		an a
Vit	- 21.10	-14 5 18	- 20760	25.84		and an	an mar a san a san an a
Wig	669.67	122.83	1 Province - Reference Addition (e.g., of the low of a binary sector regime (e.g. or a binary sector) and a sector) and a sector regime (e.g. or a binary sec	- 2424	-122.83	6.96	664-61
Viq	ngalar ng la shingan ng kang ng sang ng tao ng t	an an fallan an a	and an	- 24,69	-10734	9 16 17 2 16 16 16 16 16 16 16 16 16 16 16 16 17 17 17 17 17 17 17 17 17 17 17 17 17	24.69
V _{IY}	25 84	14518		21.1C	-14518	· 20 160	25.84
Wao	annen an anna an anna an anna an anna an anna an an	արանները անձառագոր հետապարանությանը։ Սպետրության Ստետրությո	9 • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	664.6/	122.83	n ar ann an Sannaichte ann ann ann ann ann ann ann ann ann an	- 2424
t and the second se	ny mangana kangkangkan manangkan sa sang kang sang kang sa sang	State & S. S. et al. Her Mind (c) - c) - c is insumptional and co		nalis konstantakon misinako ingenera, a	Section and a sector of the sector and the sector of the s	S filts on Draw of the only conduct the the test starting on a set of the	- 24.64
Y.J.T.	anaran da anti-anti-anti-anti-anti-anti-anti-anti-	The first of the second s		25 84	14318	un an annalais a san sinn an a	· ··· 121.10°

l

 W_{il} 1.24 $\forall 21$ Manage and a second of the . Anti-anarran salara W12 122 mermit an et m ж. ю V27

P-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1		•						
Uso	V ₃₀	W 31	UBI	V31	V32	Yan	Val	

							+	
							· · · ·	
	· · ·				•			
		1						
								-
	×							
								-
1.4 1 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1								
		-						
	·····							
								
							· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	



025	Y215	W26	0.26	V26	w_{21}	⁽⁾ 21	V21	W-28
s set sense a sur sur sur sur s								
n waaraa gaaya in ku inaya na yaya ng ka yaa ay in	17 all states of the construction of the states of the course of the			n - 1 (n - p an f dhainin lin ann a' - ag p an saigeanna, an , ag a	a de 1 de milio de mala de Adales antes escale contra de perda esta esta esta de antes de antes de antes de ant		r men ogen andere i konnen som en som en forstatte förstatter att att som en som en som en som en som en som e	n a stand a fair an ann an
n 4 - Add - On Angelan - Sugaran Bray	a a a chailte an	an a						
·····			an a					
			teri s		19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 1			
a ata da ang ang ang ang ang ang ang ang ang an			ter	·····		1997 - Andre Baltune aller Metal al fin die der Las der Sa) 11. Tabler 17. að 187 æður af 197 að 1860 æður eftur ef seg ei seg seg eg seg seg seg seg seg seg seg	a da se anticipada en esta de desta de la desta de
n an na Star an	n ministerier in einer ein net ministerier auf die steren die stere einer die stere einer einer einer einer ein	1999 - M. M. Hall, Salar Salar Salar Salar Sanas In Sanasana Ing Sanasana Ing Salar Salar Salar	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				we have a react the anti-Table series as the spectrum.	
N en milit (en e transmission) en alta en antica en antica en a	n meneret form tomage to consiste offer all all all all all all all all all al						an a nàonan da aona Madambarta Naraha da ao aminina da aminina da a	a al-al-an-taidag arangangan sang aga sa
See Suffragent Contractor Contractor Contractor Contractor Contractor Contractor Contractor Contractor Contractor	- 36.60		- 1		a an			
1996 Berlinder Villisten den sie der gesternen eine Berlinder auf der State des	ner Malle deller forset denn, der i der gebierten bestellte desse kandelen einer einen kandelen einer einen kan	······································	n fan 'n ar frank finnske skillening af an an gerappe				مە ئەل ھى مەر ھە ھەرە « ئە مەرە « ئەل سەرە» ، ھەرە ھە ھى مەرە ھە ھەرە بەرە ھەرە ھە	
An Angele an accession and accession of a company					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			a er fan Malifeitheite an Aris Lainspiele spiele spiele spiele spiele spiele spiele spiele spiele spiele spiel
an a	n - 1999 Marine Andrea (d. 1989 n. n. 1984) dag kang kang kang kang kang kang kang ka	613.8		- 36.60		**************************************	n militar malie y set den internet antisk den statisk statisk set at set se statisk statisk set oppen. 	
19 - 19 - merember verset er en verset er som som som	an a					*******		
ant gall, a sec ou support to the second							an a	
	1. 1 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.		994 yu	a falle for a state of the fall of the state	673.82	Ter P That - 1 Min Bar (Bardad da andré Bardar da angel a gana da angel	- 36,60	
fe Donari di Barkeronatere, antanan sperger si sana a se			an an ann an Anna an Anna an Anna an	9 - 9 - 19 - 19 - 19 - 19 - 19 - 19 - 1				-
	·	nan-analas kali sisa da menindakan kalan kalan da ka				A	nden 15. Millerink Allen de Alle ywe ywe opgere opgere ordenadige af samaalger f	673.81
Principal and Ball concentration descent systematical and	n van men verken gewenningen op de settense begen der eine der viel e	48-18-94-94-94-94-94-94-94-94-94-94-94-94-94-				nan ar ar ar ar ar anna ann an an an ar an ar an ar an	ala baranda kana ang ng mga ng mg Ng	
 Contract (Contract) and a second s		(fortherd - 44 Marine Analysis), and a second or any second providing in the second second second second second		997 - That Alfred an Annual Alfred a Sharana Marana ang ang ang ang ang ang ang ang ang	an a		na 19 karlı - Handebrian di rangiyyanın kabarını gunquy g	a an Gar (a ann an a
an a				a an an an ann an an an an an an an an a				n de transmitten (degle ver er an geste belakken og ble bedage gjen of kan ander
	a - a - a - a - a - a - a - a - a - a -	Among Marine and a manager of the standard standard standard	ninin be destaure de desta de bude, cartas - av - a	ание на			n de 1999 de la companya de la comp En concentration de la companya de l	n - en la compañía com construint anno anna anna anna anna anna anna an
		. 19		Le c. 10. montaingtoir (14.0000)34 colors (c. 2.10.000)	an shake state a state a state and	ernen der anderen eine eine eine eine eine eine eine	بر المراجع معرفة من المراجع الم	
658.82	- 54.8	4515		205.6				

5 - 25 - 17 r_{0}

	18420	200.0		19-20				
--	-------	-------	--	-------	--	--	--	--

en en la destatuentem entre en la quert manne en la construction de la construction de la construction de la co n nieko zasobi w maliten idades dialektikowane w zasowa w kiele w star alektikowane z

1

$$\frac{102.8}{102.8} = \frac{1540}{-1540} = \frac{1540}{-1802} = \frac{102.8}{102.8}$$

naan araanaa ahaa

-1 1

a and the second as a 1

			: :							
				:	×	;	,			
Y26	W2.1	^U 21	V _{2.1}	₩2B	Uze,	V28	W24	U29	V29	W 30
				,						
	•	an a	a an		ny i kanang ngganggangga merupagga kangkandan kundundu nakanagan kunon	a an an Anna a tha ann an Anna Anna Anna Anna Anna Anna	ang yang daga ang ang ang ang ang ang ang ang ang	annen Bala lan gelangs och ben sindere strande bereistig der den som		
			n an				ana ama a da a sa a sa a sa ana ana a sa a sa	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	, generation and an experimental and the descent of the second second second second second second second second	
•	-				9, <u></u>		ann a mar i d a mar ann an Airmeada an			
					994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 -			<u>anna ainy againtan Andrany at Furferon</u> A Lago di - saidi ila g		
					nagan dagan di yanakagiga da da da na dalagi ayada nagan dang kati					
		gan ya yan o za ina ana ana ana ana ang ang ang ang ang a		a mar an a suite anna an a	na na nakaona ing	аларанана струка, колони — с с то — то — то — то — то — то — то	innennennen i ser primerinnen der mennen i ser primerinnen der		ann a baile a guran tean tar an an tean	na, annun avilan dein 3 an, anjän tri 3 a a
		ور د میرو بود. پر این		n ghandhann a na a nadhla shifigin ann an Banda agu a tha an Mar an	ge yn Lyngang, gegellwy web newsland of anwer a 'n Honard B	and a second second second and second and second and the second second second second second second second second				an a
					-maan alo to caapamaan da pilantan ayaa magana ayaa ayaa da ayaa ah		+			,
••••••••••••••••••••••••••••••••••••••) <u></u>				-				and a final data and a set and a set of a set
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				ang a manana a a ing na katan ang né a ting ng minang katan ng ng	9 - 9 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 -			a naga na mana na mana na mana na mana na mana na mana na ma
		·····				n <mark>an bang dan bahar saking saking di king di saka di king di</mark>				
- 36.6	0	ya mine nike any a ya na manga ana ina na ana dika dalah dana								
		,								
				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			<u></u>	· · · ·		nganih munipaka yang kan sarihar kan ika 190 Propinsi
	673.82		-36.60		anga mina makai kati matemake si se fela di ta Angang Matemat					
		9 M 200				a an	ann - Levar arrangeannair, airtin dersein airtin	ana ang ang ang ang ang ang ang ang ang		
								an a		and a set the block of the first the set
		in series a minimum and an ann an	na a na ang kang kang kang kang kang kan	673.82	ana dalam dan katala di	- 36.60				n
		, en en en alfrænske der Annen en ekke skyppe i det der Bartistan atter der etter - -	. 20 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2							
		e - n desgelagionnamentaristication i De vacatation proseitore		a dan santahan nagi ngganggi para kata pananakar magalaki katinaki inga t	n a sa kana ang mang mang mang mang mang mang ma	n	ay magaya sa ayan, ani - saray akar in shat yaka kiya sakit da takiti di sakiti d	and an		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
) ~	2 - 10 Y - 10 - 10 - 10 - 10 - 10 - 10 -		which is a die die alle die officielle to the state of the line of the second	1996 - 1997 - 19	
		s o a company and another give standard or the second second second second second second second second second s	nal (a a gang), 4 () and () and () and () a subscription () and () a		an an a gur an taga ang ang ang ang ang ang ang ang ang			8 - 48 - 48 - 48 - 48 - 48 - 48 - 48 -		
		nyy amerikanya kananana arise distri – sako diana diana kana o vo	und de la compañsión de la		a na an			99 - 98 - 98 - 99 - 99 - 99 - 99 - 99 -		Na an an Anna Anna Anna Anna Anna Anna A
205.0	6		te de legente de legender de lever en entre en e	n y sa anguna kana sa sa kanananini sa ta kanananini sa sa kanananini sa	a yan kura manakan yan dalah kulangan kunangan kunangan karanan manakan karanan k		1010	an yu a yana agama agama gamado di siya di a a di a di anan ni a	-14.5	y dia mangkan di kata da mangkan dia dia dia dia da mangkan dia da mangkan dia dia dia dia dia dia dia dia dia I
19.0	C	a a constant de segundo constante e da constante de la constante de constante de constante de constante de cons	an sa ang sa sa ang sa ang sa ang sa ang sa ang sa	an an amagangana ana at in ana ana ana ana ana ana ana ana ana	n na sa ang ang ang ang ang ang ang ang ang an	• • • • • • • • • • • • • • • • •	ι φ η η του του του τ	ی در میں دی ہوتا ہو کہ میں اور	algebrack grade in a state of the second	n in ann an a

1	L. Marke	a an ann ann ann ann ann ann ann ann an	yu in unannaa laga gaaggargada saa isi ku kabanina () ii ku i	ti bi matagona nago nago na anatérico fotente en						
411	- 54.8	2187	a an tao na ann anns an than tao tao tao an an tao an	102.8	a ng - gana com an an an anna an an an an an an an an a	an ann ann a' shaannara ah shaannara ah		a na garan a sa ang ang ang ang ang ang ang ang ang an	ander en angenen anvænser og som en angenen ander en angenen og som en angenen for en angenen angenen angenen a	1070
1	-18420	262.0		21820	A set of the second set of the second sec			w blag, salasini in kastisini pikasi pikas	agenta (Mari Valencia) (congressione a transfer	(14) - 14) - Maria Maria Managaria (14) - 14 - 14
	-32800	a and a star device and	en en energia en esta			L	 	Standartan itu itu an anan aku	a an shi na malayarayan an shi	·····

í

SUBMATRIE A23

•

. .

;

Vo.ec.	W23	U23	V23	W-24	024	¥24	W25
W ₁₃	313.82		- 16.66				
VIB	an an ann an Aonaichte ann an Aonaichte ann ann ann an Aonaichte ann Ann an Aonaichte	999999 - 2 - 12 - 2 - 12 - 12 - 14 - 14 - 14 -	an tha an ann an Anna Anna Anna Anna An	n an Angelen			an a
V13							و الارونية منظومين ورونية والمرونية من محافظ المرونية والمرونية والمرونية والمرونية والمرونية والمرونية والمرونية
W ₁₄				2 13.82		- 16.66	a nglangangang panganang panga-ana panganakar pang-ana pangana sanak
U14						د. از داری میکور از میکور از میکور میکور از میکور میکور از میکور از میکور از میکور میکور از میکور میکور از میکور م	a na managana ang ang ang ang ang ang ang ang
V14						ý - o ka nako stale o popopuje o nakodno od nosti pata poste doba ¹ na kaje	د دور و میروند. در دور و میروند میروند و میرون
W _{I5}				مىرىم بىرىم مىرىم مىرىم بىرىم بى	na janda wanya daya iyo kata ishika ishika ishika ishika i	ւ որու գու պատագելու դապեսու, դամ շ ուղել ընդելության անդր ներն է է։	n .
UIS						ւ ուսեցելու է է ու ու վետես ենտ Կորենենում էն, ու ուսեցետ ենեցեն նեցել եցենտե	
۷15					ay a galy water, in which <u>a galage can all is thanks</u> opens a significant	a na kana da kana na magamatan na garanan a kana da kana kana kana kana kana	
W16			analasa analasa ata da ang sana sa da da ang sa ang sa ang sa sa ang sa				673.8
U ₁₆			anda gana ganaratikatikati sadarapi ka silayah sinta atalah Sartak	, againsta (156) - Say any (16) kao minina ny definina mandro	ا المراجع الم	jadari anilan gangan ja ina ana sina ang ang ang ang ang ang ang ang ang a	ann an the second s
Vie				a and a star	وروب ومقارب بالمروم وروب والمروم وروب والمروم المروب والمروب	د معدم معرف معرف معرف معرف معرف معرف معرف معر	- ge-age-angebran gangang - yuu wage - Nayae haloo lativati - t
w _n	+ 1307		50.26	ան անցերացեր այսօր անցերութեն հետևուներին՝ էրութերատանութ	արտությունը որող է հայ որող հայ նախ նարկել է ու ու գենցի են հանում է նախնաննել։	ar 19 - 2014 1990 agus agu	
רוט	+ 142.92		18200	and the state of t	1	د هود اورستان خان اور در دور و موان و اورستان که دارد. در مراح اورستان که اور در مراح و مراح و اورستان که دارد.	Santa ann gàite ga Airianna dha karna Aireann a
Vi7					- 1911 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914 - 1914	ne generale againmente dan anna an concer administration dan se	- 21 22 3 - 28 1 - 20 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1
W۱8	- 4/14	- 2721.50	- 31.15	1307	ال من المراجع	50.20)
UIB	-142.92	-10734	-15218	142.42	an anna aitean an Annaichte an aite ann aite 190 ann	18.00	a a mai a ma agus agus agus a da sa dadhi i 18,472 (1
۷ _{iB}	16.66	a	- 26 410		n an	er 16 metalaggingen – nampen ginger, so indigender 1985–17 – 2	a given na water and the state of the state
W14	1307.0	221.50	50.26	114	- 221.20	· · · · · 15	n an
014			a na statu n	-146.46	- 13124	.12 218	an - Mala Jan (1 - 1 Liberty - Ing winnsport)
Viq			م من موسط مع الدور الدور من مربع من	16.0E		2+ ×1+40	(1) 2. The policy schedule fields that even one lines in the second schedule field in the second sch
W20	a geget wegen gebrung beinen beider beiden gebrung der beider bei der som	y shires and a second		1307	221.50	J. 246	 Margin pages or manufacture, the metric split Shill (e.g., 19)
1/20		anderstandigen auf in einer die gester die Steren aus beste bief. Die eine	n a su a superior and and a bag the set of a superior and	، مستحد که ، مقدم از مانده از م		a a ga nya nya ma na ana a kaya mara a 1996 (k. K. K. K.	Портимирали и редукт са се одруг токи и на порти порти и порти по
Vio	an a star a maganamangan an an antai si kata si kata si kata si kata s		and a supportant of the support of t	t i san an a	али сторон и алимира ставите ИМания с 10 и 1010 г. т. т.	erre - Mens elle (a. 1997)	
W_{21}	2.2.2.0	an de sample and a state and a statement and a set of the statement of the		1-0 1-100000000000000000000000000000000	the state of the s	an teo ang teo a	-7840
Uzi	. 264.0			a course and course and course and	an a	a an	-26-20
V-21			and the second	the open At the to the state	van yn hyfer ynwy ffrwy farte e me	a an a sugar a succession and the sugar	36.16
W22	- 19 :0	265.08	- 134.5	1115	1.2 X 3 41.1 44 4	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	2181.5
011	65.00	- 44000		- 264.0		и и , , и и ,	
V12	- 54.30		-11255				

		1	T	·····		Y		
U20	Y.20	W21	021	٧21	Waz	Unn	Var	
	۹ بوط- مۇر بولغۇر، دە ، ۋول بولۇ ، دورۇمچىچ مۇر، ئولورىزىي بولىرى بول	1110	-263,38	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- 79 30	+ 87.0	- 59.3	1
					+ 264	-42000		
	a				- 59.30	-18920	-11250	
					1110	-263.38		
							,	
		•						1
*****		- 7860	-1049	+ 36. 6	+ 4388			
	-	- 166	-16100		+ 166			P
		- 69.5	-43600	-32 800	+268.6			
	***	+2194	+524.5		- 7860	- 524.5	+ 36.6	1
	•		×		- 166	-16100		
** **** \$4**** ************************		+134.3	+21800		- 69.5	-21800	- 32800	
					+2194	+524.5		
1 4 1 1 1 1 1 1					+134.3	+21800		
		1060						

·····		-74.50						
		• •			1060			
n haard Ar an shi ne pamalaan ka baaya ayaada haad na yaa daa	1914 - 194 - 1914 - 1914 - 4. Martin Brigging (1914) - 20 - 1016 - 1446 - 14							-
	and annual to days their angles benchanges of the second of the				-14.50			19 77 - 1995 - 1996 - 1996 - 1996 - 1996 - 199 7 - 1997 -
name	**** ******				- The Arith of the Arithman and A			ny tempinyny diweny diwy yn yw y diwy y diwy y gyn
				an fra a standard frage stand s tan a standard standard standard standard standard standard standard standard st	n na hina manana da ing ang kang kang kang kang kang kang kan			
- Junio contro manima di Majari							-	
			Trans and an and a standard and a st	i na mini dan managan da na angki kangang kalin yi din k	Barranna, a tha Anna ann an Santa an Santa ann ann an Santa ann an Santa ann an Santa ann an Santa an Santa an	1		****
			антар — Челикар на баријанската и филар на на комрекци — на ферер и су су с Политира и селото на предоставањата и филар на на комрекција — на ферер и су су с		d ande oor vangelig en met kelse skrimenen opgekommen her en en en en	a "A bartalan menantika akang dipingkan di manang dipingkan di	n agus cont fan agus <mark>dhallannan gan san an a</mark>	
				n de la sectada e e de constructiva de la construcción (n. estado e de la construcción (n. estado e de la const	n in an	an the American Charles and the specific and the specific sector of	a a mananaka a kun mananaka mata mata sa ku	Quinter 1974 - Antonyon Mantagor Alan Ind I and a same a

. ----

						, t			
1115	YIG	WIG	Ulis	V ₁₆	Wij	0 ₁₁	VIT A	W18	
					1304.5	+ 210.4		-4710	
میر بی بوهو مورد به ایما ماه ۸۵ ^۹ ۸	rt ⇔, wr wediâ daad wredaa eirde aa	ու 10 հետո է հայտություն է հայտեն անձան չեն պատություն է է է է է երա պատություն է է է է է է է է է է է է է է է է -	a ann an a	energy and an angle of the control of the second state of the second s		unan ny Separata a nina mampinanana ina i		-13.00	
1999 AND 1999 AND 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 19	a formar i daga di galanda di nazi ya ku i daga			ուս արտանություն է անագործություն է հայտություն է է է է է է է է է է է է է է է է է է է	61.81	18250		- 54.14	·
	n er minne 38 træður fursan bosta í sværi si vir anar danamara		an a na an ann ann an an an an an an ann an a	n (n 1968) - coloridade de la color do color de la	an an Anna an A	and a second		1309.5	+ 1
	n an 1967 2 Mariningin wati kapatan ji yang di kapatan ji yang di kapatan ji kapat	n an	a na anna anna anna anna anna anna ann	A den de alimante antes servere a la conserve de la conserve a la		an ()		n 1000 anh basis mit un 1 000 million o stada superior materia.	
	n a na sha na shekara shekara shekara shekara	Ma Thursdan Ma Shan Fin Allahanan A shakaran da saya ku sana	angelige sinder-sension-generation. Ger spiper, Briggerming office y and	an a	n (, _{) yan} ga anangganana ku gangga daraga (a kama in kanandikil da Mir 1 m			61.87	1
n an anna an ann an an an an an an an an	. An third and the state of the	+ 675				1999 - 2000		4. To the interval life of Additional Addit Additional Additional Add Additional Additional Additiona Additional Additional Additional Addit	i provinski biogr
	and and a second se	and the state of t				Baan 1776, 1991-11-11-11-11-11-11-11-11-11-11-11-11			
	a ser kalmengiga diperaman (do ginamati, a mendiaman), a dir sema ada adamat	- 36.6				ar sang sa an ana sa da n ang ang ang ang ang ang ang ang ang an			
	er menseker men der versenker mense av mense ander mense	a - Nacional de la Constantina de Maria de Constantina de la Constantina de la Constantina de la Constantina de			+615	- r e a l'a se de la com te de la companya de la comp		an a she bar bar a far a bar bar bar a she a	
			a - Madala da Sama affanda affada ya Antara a Antara a Antara a Antar			an began an i rich menerana man a general ta menerana			
anton ato ato ato ato ato ato ato ato a	n	an frank an frankran 1. an frankran 1 . After den den sen after den sen after den sen after den sen after den se	a defensive constant of the strength of the strength of the strength of the		- 30.6	و		a banan dariya katala da saka aya ayiya taya kardan da sakaraya.	
a an	an de Ald Ingeland Alderse and an	-						+ 675	
A 1 Tombol and an	Andere Westerungs sein - als - myllen protein for daram fade or an opn. 30. or	an a			ana ana ing katalan ang ang ang ang ang ang ang ang ang a	. An an kaunge star de starte staten i samet ger spier			
1 A ala 140 BB BB	annennann an geolaithean an a	and a methodological statemethod of the statemethod of the statemethod of the statemethod of the statemethod of	a ann ann anns ar ann a cuinn a cuint an ann an an ann an ann an ann an ann an a		, 1960 - Selaman Marina, 1960 - 1970 - 1970 - 1970 - 1970 - 1970 - 1970 - 1970 - 1970 - 1970 - 1970 - 1970 - 1	n gant an talakan gan gan talakan gan daga saga saga saga saga saga saga saga			
a na falina dalar dalar dalariya na <u>kang kananana dalar</u> an	a membran també santa santa sa sa sa santa na santana ka sa	a a a a anna 1760 anna a anna a anna a anna a anna a anna an an				nda pasa ina sa a nakawa na ina katakan salam sangan sa kana naka			
	a na sa ang s	a the second		a na shin finggada fadh ek wik dwi kitu kitu kana na musaka sa				a a marana daga ar anga in ta ka ta gan da gan anga na ang ang ang ang ang	
en ne a sange geen gezin often eren notiet ere banen eren	ni fan Angela Antonio (ng Kulu-Gali a Salis) a sa s	s. Mainten kan kanan manifati yang mengembah yang mengembah kan kanan penganakan sebagai kan kanan penganakan kan	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			na 1990 – A marka ang kana ang tang kana ang kana sa		a na kanalan sera 110, an a isi na kanalasan di sali serah sebahan sababan ka	-
a - a ago, sago, ago a sa a sa a a a a	nan (111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 - 111 -	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	1 - B. (- 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 -			ang a na ang ang ang ang ang ang ang ang		n - 19- nin di ka - provinsi di ka provinsi di kala di ka da da ka angera di ka	
na n man a daga daga sa mananan daga sebandan ni manananan di mana	a santan dil per dina sua sua nanginganga supara (gran s - 1, se ana sa - 103) a	n malate suemens in mener, une also i as mentes de los sues seus sues seus	a na i fordanska i naslatska atazo uza za naslatska zak	an a		na vendejna i kralje na vendejna konstrukcija na sedena predstava predstava predstava predstava predstava preds			
ne - Alfe gang ng n	ya na kato na galongali na sa di ana cananangan galapang na nganasi sasi sana d	an ang ang ang ang ang ang ang ang ang a	n a maile Maille di McDourd Maile anna an t- dhonaid de Bara - a	e	a a constant of the second	n nin diputation and a second a large strategy of the second second second second second second second second s		gar baan da ada punton 10 m m 1 1 m data baangarati. Ka natinakanga sakabata ka	
u mulaush sadaradar sa bilandad ig kawabanangki m	an an Ballin a Spennen eile Statistich og a Statistica og fra Statistica og som en statistica					nte este de la tatala de la de la colona este de composition de la composition de la composition de la composi		r - enterin Warmania Andria Andria physical de - al angle agence a	
	nan an	ana ana ang a sa sana ang a sa s	n na maan maanaa kan maan aa aha na magaanaa waan	a dalam bari dalam dalam yana dalam kata dalam dalam yana dalam ya		n - Standard na sanaharan ayan a salah g	i da anti- i da anti- processo de la compositiva de la compositi	n an tha an an an ann an an an an an an an an a	-silva g a a
			a na an a su san an ang aga an a sana an a su	n na Singa ang sang sang na sa		ی اور ایک ایک میں والد ایک	 Contraction of the second secon	n an an anns a gus anns a sugar a' thuraga d' agus da	ar a na man
	им ефификалест — Арад — Актинориза — Ш. — — — — — — — — — — — — — — — — —	() ² → ¹ , 1 →	n an thair an the second s		1 44 44 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	 A set offer the mine is made by a set 		a an	v - 5 2 Jan (1990) - 4
	าสุขาครามเหตุการ รายเหตุการการการ ราชาวิต	• • • • • • • • • • • • • • •	e e construction à la provincia de la construction de la construction de la construction de la construction de	на президниет поставляет на президущит и статит п	و این و برد ایرونو ا	ووجو بالاستفاد والمتعاد والمتع		a na na sa	

	арания мало на стали и на стали и на на на који на стали на	 The second se Second second secon	a second	the second commence and and a second	and the second s	فسيود فسترقص فالمعاد وتوسد المدين المتعاليا المتراجبان المراجع والمادي
					A Second	
					e e e e e e e e e e e e e e e e e e e	
and the second	the second se	ter en la contenen en	and the second and the second	A CONTRACTOR OF A DESCRIPTION OF A DESCRIPANTE A DESCRIPANTE A DESCRIPANTE A DESCRIPTION OF A DESCRIPTION OF		
						1
			and the second	an a	and a second	and a second a second second a second s
	1					4
	1					1
				and a second	and the second and the second second	sa ana ang ang ang ang ang ang ang ang an
))				
				4		1
				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	harrs affairs and an a	
						1
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				a provide a state of the state	and the second secon	an ka pan da sana manana manangin ka panangin ka ka da sana sana sa

				а. - т							
ž	V ₁₆	Wii	υη	V _M	Wie	018	۲, ۶,	WIG	Viq	٧ _{١٩}	W20
		1309.5	+ 270.9		-4710	-210.9	+ 16.66	1309			
					-13.00	-13410	արան։ Սատաքի համանապես է հետ հետ է չի չի անձարձալարդին է է է դետացի։	73,00	999 - 99 99 - 5 - 59 99 99 99 99 99 99 99 99 99 99 99 99	n, ng kang ng n	ան <u>ի համանացի կատարությու</u> ն է տերերեր
		61.87	18250		- 54.14	-18250	- 26460	61.87	a Alarhabahi Ballan Alar kalala (Alalandron Quanninga) ku yanan Q Quan	bestelligt datenskynder (forstyrer oanse service oak en oar oak ekstelligt	A Annual Contraction of the state of the sta
				l I	1309.5	+270.9	9 - Terrer - J. H. 1999, and a second state of some sing of the last of the second second state of the second s	- 4710	- 270.9	+16.66	1309
i.					and the second se		ante ante a constante de la forma de la forma de la defensa de la defensa de la defensa de la defensa de la de	- 13.00	- 13410		73.00
			an a		61.87	18250	r / da dina in la l'aisteachadhar (b a nagh a na an an an an an an an	- 54.14	-182.50	- 26900	61.87
					n (v voi vina an china angayan vy r v	intensis intensis≢di na ada, si na ana si si si na si si mana si si si na si si mana di si si si mana di si si	trantan kalan kanan atar barta sara ara tara tara tara tara tar	a nordinar fan yn de yn y gelanan de o sening yn regene afwr o'r y		د التي الي من الي من العالم الله بين الي منافع الله الله الله الله الله الله الله الل	na n
-					a manana manana ka da manana ka sa)+ MLAN an Brud ninder uitelijs-generas- uidelik saagemper			nah dalaria 19-a militan de sancieralangum spata de sense prese den alem territore	a ser en angele an
-						and the an intervention of the second se) der net en erste kan ander prod ek en				
		+615) Maria Maria (a da anta) - agun da an da ang da an an anna a sama.			nar de la ladallar fa gerleanten de engele a latelle	9 4 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 -
							, 1999 - B. Marin A. Balanda, A. Mallinski, 1999 - M J.				
:		- 36.6	99 999-16 40 - 90 - 91 - 92 - 9 - 4 - 9 - 4 - 9 - 4 - 9 - 9 - 9 - 9	999-1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1 19			9 deraturnet) etternetischen Leisten – ette Allenstäte kom "d. Leis) mitesson elli elle elle sono, fogiancia ciantar ampòritari e o
		in fan ferske de ferste gefenske ferske gefenske de ferske sense om som		anna 2011 - Ta Agus Angus Angus Angus Angun Angun Angun Angun Angun Angus Angus Angus Angus Angus Angun Angun A Galaga Ga	+ 675	n a dh'air da alla 1940 maig da a ga agu an			*		
				na Maria II. Maria da Maria Adriana. Adriana da Angala da Angala yang da	and an and a second	a na Mandalan an Ale na an	, na man gan an a			an a	
					-36.0	9	444 444 40-4948 404 βορο βαβαθ αιο αργγορ				
					n nambu garnen verser in sin in Amerikaan angelen een sin ja een poo	han oleho suhan Baltomet ar gabarahar sutra sasahan dan kanana) en ang pangapang panggan ang panggan tang panggan panggan panggan	+615			annan 1991 ille a Brittin ann an Stàit ann an Stàit ann an 1
					- Verdenderstellender der Kannen (d. 1995) an 2. Die der verden zum	n a n ann an Anna an Anna an Anna an ann an) 1997 - Mari I. S. et Maria and Maria and Maria and Angel and Angel and Angel and Angel and Angel and Angel a				an a shafan an a
						a ministra di ministra di Antonio	Sangkangan dinggangganggangganggang sangkar si sangkar galan gada din daga bagalag	- 36.6	1997 - 1977 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1979 - 1		and a state of the state of the second s
							raalii dolfa wiitiitiin faitiitaan olfa akkoo vaa demandipaga migaa daamayo		h. Mayodigi di Manghan di Karala da din Alfar din sala Jama da katiga da katira ya kati	saan oo dhaxaanaa aadaa ahaa ahaa ahaa ahaa ahaa aha	a na
4 . verd					An ann an an an ann an ann an an ann an a	n nin kali di kalanin yik kalinin ta'an kalina yang kalina kata kalina kalina kalina kalina kalina kalina kalin	inningal er an an anna anna anna an an an an an an	. 1997 - Billio Villiano, Franciska († 2016), 1997 - Billion			a - <mark>Marindo Mandelando e de la d</mark> uctoria de presenta da seguina da seguin
,	а			and gamage is a specific strategy of this pay workship de trapporter on the tar of			andigenerative regime to a provide on the opposite of the land on the definition of the land of the opposite to				antinen den angelen og en en angelen som den som en
			n f an Bhanna a star an se an			anna 1979 an	n an aithinille fhaipinle shy iprior tippings oprings again again again ga				a i narnagan da dala kanar kan ni pinapa san nagan ar
				San	a Anna ann an Anna ann an Anna ann ann a	90. 994-994-994-994-994-994-994-994-994-994				en en brinnen inden anveken provinsionen et besteren en beste	T Magninini da kana ana ana ana ana ana ana ana ana a
	:			and the second	terrantisztan gizmen kispez arondra	a a na an a suadhannan ann an Anna ann an ann ann an ann an	ander an anna an a	an de la contra del 1980 (en la contra dels des de se en des services de se depunyos compositivamentes de la c	1		nationalise on a subjective de la construction de la construction de la construcción de la construcción de la c
		a provinsi af hear de la particular de la secondar	10.5 C C C MARINE SA VIANA AND AND AND AND AND AND AND AND AND	Bendagay, Luxian dilla diretti (3). Kri V		······	нову с н. найза мноногруга кадануланадинилан с	97.9 * 77 - 74 Viller Hangy y rodskerene ber 14 s rodskerene for			ner megendastis atlatistikase and desidentiginga, denagen, ins.

×

L			The second	The second second for some second	the second se	Comparison of the providence of the property comparison of the property of	4 V Labor deleteration de la calificación de la construction de la construction de la construcción de la	The second		an generative set of a second of the second	nage and an
	n ang kana mang kana sa sa mang kang kana sa sa sang kana sa	and a first of secondary mapping scapes and space () or "second second second second second second second seco									
				the second	W			S. S. S. COMPANY, AND CARD COMPANY, MARKED STREET, C. C.	an Ann a' Annaichean an Suidhean Annaichean ann an annaichean ann an Annaichean ann an Annaichean an Annaichean Annaichean ann an Annaichean ann an Annai	na magina mangkatang (197 mga 1990 mga 1997 - 19 mga ngabon ngapo ng mangkatang ng mangkatang ng mangkatang ng T	որում համանագահուն համանակությունը է արդյունը է արդյունը։ Հ
	* gtb-f-skatterick/decody = at 1 gradientation = 1 by consider add, = c.c.,, is	ann an tar ain aine ann ann ann ann ann ann ann ann ann a	a a a dharan ar an an an a n adhad kustan mananan a ataa ay an ay	and a second	n a an			An anna a' salanna an	n Ne Ne V I ne V I ne na na mainte co alte dese des dese des desageres de present	t - th - e-filler water with the second statement of the second paper.	n er man som er samte som er ger e
	an na 1 Jahon at 1975 an an Sangagayay n	n na marana ang kanalan ang kanalang kanalang kanalang kanalang kanalang kanalang kanalang kanalang kanalang ka	n a standard - ga e angaga a sana.	e englande - server et systemeter et strategi		· · · · · · · · · · ·			a a succession and a succession of the successio	ուներություններություններություններություններություններություններություններություններություններություններությո	
	1 եւ հեշև ենդանար ենցնացրել գրույն է է	44741 - 9 4911 - <mark>84</mark> 910 - 1	والمراجع والمعققية فرافع فرافع المحافظ والمحافظ	مهري ريونيو	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·		······································	a construction and a second		eter verse and a second
	a an Analas a cura an										
						2 					· v.v -
Å.			والمراجع والمحالية المتحالية المتحالية المراجع والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع	The second	ander in er alle de ar sounder na de skart souder of an ander souder of the				ومعرديه والمتراوين والمراج والمراج والمراجع والمتراوية والمراجع	وروب والمحرور ومريا ويرمونها والمراوية والكوامية والمراجع والمراجع والمراجع	

CUBALATRIE Haz

.

	No.ec.	$W_{1,5}$	915	Vis	WIA	14	$\sim V_{14}$	· WIG
	W25	273.00						
	V23	n na mar a na mar an ann an shearann a	ana na an	an ang tina kulan san san ng ang sagang na ng	and a star of the second star of the	an the second	a and an	• • • • • •
	V23	- 16.70	han - 11- inn andraitheanach hadra daoine an suis an a	enne 1960 ente i caj filondari e caj sente un teknogoging ugaginaj filondari Internet	n ar anna fraiche anna agus - an shrinn a shrain - andaran, sa ag	nan ferdi Marina and Chinashi Pinis, ang mang mga ping ping	n nongen ()	na antina di la casa di manda di la contra dalla di la casa di la c
	W-24	de Manama page fair contribuctions (), , , , , , , , , , , , , , , , , ,	n na 4 i Antonio i Sala A Banca A ng Jang A Anna A	annan a de an anair canadan neong co con y Boarge an	315.0	ne men o fa or none popular ,	Стан Фоло Со — нууд с станова	1 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 -
	() 24	na postana n Na postana na	terna halipus ========	and an an ann An	a an	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •	an an an ann an Anna an Anna an Anna an Anna Anna an An	ar e se a galer anna ann agus gu bhanagadh sagar a - 1996 T
	V ZA	na na anna an Stataine ann a tha suadhac ann a tha su anna an anna anna an anna anna anna	ile den general de la constatación	an a frag dharanga ang ng n	- 16.66	an an ann an Anna an An	்க்கு, மதாதை நல் நல்கிலையான ஆர்கொழுத் பத்துர்த	a ben man manimum of the bolic cost () () () () is a special of
	W 25	ŝ.		annan Allan agastri Daga Millingk pro 19 Maataya (anggalang	an an ann an Anna an Anna an Anna Anna	an a hann ann an Anna an Anna an Anna Anna	արտանությունները անդամանությունները համանական համանական համանական համանական համանական համանական համանական համա	Ny Barlon and The Accolor and the add a graph in
	U25			na n	an any amplementation of the general state of the general state.	and a second	n a na martina an an an an ann an an an an an an an	an a
	V25					n (* foldigite generaliser nover internet, in one en dista para presidente.	ne fin sense och finn fin skundigen gar grössa i gan af späraret.	ander and a second and the second and a second s
- - -	W26				a an ann an an ann an ann an ann ann an	an film fallen film film film film film film film film	In Proce School and the school and the school of the school and	ي معلمي مركز المركز المركز المركز المركز
	U26						in the source of the same second and second	nan nutren en sur un sur parente S
	V26	An Andrewson and a state of the					n an shin an	fallfill (den gj., nyg fall og (gj. s. s. s. s. gj. s. fall
	W21	1999-1999 - The State of the St			1440		n na mana manananan ing kang pang pang pang pang pang pang pang p	nan arreachann Bailte na a - agus n' Bobu - Lanaoide
	U27	ar an		an a	ى بىرىمىيە ب			(1) The second s Second second s Second second sec second second sec
	¥27	الله المحافظة المحافظ المحافظ ومن تحتي تعالم معيني المحافظ المحافظ والمحافظ والمحافظ المحافظ المحافظ		د مەسبىيە بىلەر	unite generation in contract the contract of the second states of the second states of the second states of the	ուս, բոններա էջոււթյուն, ու որու ու գոր, այլ ու		
	W28	and a statement of the	. 1993 - S	China Marine Marina Anna ann ann an ann an anna an ann an	n ann annsan 11-11-1990 ann an 11-1991 an Shuarp agus an	n 1997 a maladadi na 1960 alian an agina a ana ang pa da ya sa		
	U28		an en a la compañía de la compañía de la deserva de la		an a	enter and states and states and states and states and the states of the states of the	n na mana any kaominina any kaominina dia mampikambana amin'ny fisiana dia kaominina dia mampikambana dia kaomi	an a
	V-28		anna an tao ann anns anns an tao anns anns anns anns anns anns anns an	gallat han beginn andere mengen met her heren statum men eine der	میں در در میں میں در ۲۰ (۲۰ میں میں در در در م	Mar Maranda Maranda a series a de antes agos	anna a ththan a chairte an an tarainte an anna an anna an anna an anna an anna an an	annun ser ihn su kasan serie
	W ₂ q			ng ten 17 Mill digitalamakanakanakang pagga digaga gala atalasi na da kawa	e and a second	1.000.000.0000 - 0.020.000 - 4860 ,0000	en en angementen som til som en en störer. Men som er som er att störe som	ې چې د مېرونو ورو ورو و د د د د د د د د د د د د د و و و و
	V29	an a	gene were an	ang balap manana manangkang pangkana mangkang taun sangkang sa sa	and and in the first of the second	le neve elevente el seguidor el secondo	ւ Դեն Գեւլու ու ԴուԳետոնդելը էնչը, ուս շախար	n na star a s
	V29			z W materie and a construction of the second se	an a	l Magan Makaman di Mananan Salam - Maya garaman garangkan di	a na an	n gefage in the country in the register of the output wave
	WBC	a a afranta fala da ante ante a contra trata e por ante a contra de sera da sera da sera da se	ander and in the set of the set	e - 1887 Balandara (Nacional agrada anti-e a San Gara a sa	and and the second s	الم المعالية المراجع المعالية المعالية المعالية المعالية المعالية المعالية المعالية المعالية المعالية	ana a mata mata mata ya sa mata mata a sa sa sa sa sa sa	میتونند. مراجع از میتونند میتونند میتونند (وال میتونند) میتونند (وال میتونند) میتونند (وال میتونند) میتونند (و
	U30	neren hansalar (han an a	n (- anto da gue t - 1 a fuerta a sugar agos agos agos agos ana a sug			·····	and the state of the	and the treat of the second
	Vac	antes facenzaria antes estas e un la sur ya antes sur sur		san an singu an an		a i nazar eze		مەرىپەت بەرىپەت بەرىپەت بەرىپەت بەرىپە
	Wal	er men krake en de komponise av der eine som en gestadet av de	••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	·•··		an a	· · · · · · · · · ·	
	1	₿.		,				

(13) Vél W37 0₈₁ VSL

025	V25	W26	UZG	. V26	WZT	Uzi	Y21	W28
		218 7.5	429.41	102.8	- 7 8 40	- 429,41	- 59.8	2187
un 1 - depresentation (en 1 - main de la desse	1994 (1996) - 1996 (1996) (1996) (1996) (1996) (1996) (1996) (1996) (1996) (1996) (1996) (1996) (1996) (1996) (1				- 262.0	- 13410	- 18920	262.0
					36.66) 	- 32800	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	·		2187.5	429.41	+ 102.8	-7840
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	······································			yang manang kang mang mang mang mang mang mang mang m			- 26 2.0
		·	• · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	,		36,66
360	+ 77.4	- 24820	- 966	- 258.8	+ 3500	,	a, ya asu an	ann-nir a far maint ang a anan ar st as agan an gro
+181200	+ 22 400	+ 663	-49100	- 24900	- 484			1994 1994 1994 1994 1994 1994 1994 1994
+ 44 800	+112000	-258.8		-41000				
+ 663	- 129.4	+29400	- 180	+ 77.4	- 12410	+ 4 8 3	- 129,4	+ 1750
- 4 9100		- 179	+ 132100	+ 22400	+ 179	- 49100	- 24900	- 484
- 22400	- 20 500	+ 71,4	+22400	+ 112000	-129.4		- 20 500	
- 483		-12410	+ 180	- 129.4	+27650	- 180	+ 17,4	-12410
		484	- 4 9100		- 179	+ 132100	+ 22400	+ 179
Strag.		- 129.4	- 22400	- 20500	+ 71.4	+ 22400	11200	- 129.4
		+1150	483		-12410	+ 180	- 129.4	+29400
					+ 4 84	-49100		- 663
**************************************					- 129.4	- 22400	-20500	+ 71.4
-1816	74.6	64 18						
- 18120	144 1971 1974 - 1974 1972 1974	335				<u>, , , , , , , , , , , , , , , , , , , </u>		
+ 50640	- 3810	513			n den men en fan fan de fan	galar - salard kulturgang galar dan sejarah di salar di s -		-
908		-11460	- 408	74.6	3209	ρο ματοματικατή ματοποιο φαιαγματο στηθμικο - πολλατιλικοπο, στο του του του του - - - - -		a an ang ang ang ang ang ang ang ang ang
		- 335	-18120		335		an a	
25320	n an gan an a	2 51	-25320	- 3810	256.4	9-11-19-19-19-19-19-19-19-19-19-19-19-19	an an ann ann an Ann	 Children (Brann Children Primer P Primer Primer P Primer Primer Primer P Primer Primer P Primer Primer Primer Primer P Primer Primer P Primer P Primer P Primer P Pr
,		3209	408		- 11460	- 408	74.6	3209
a Granne ganterna i a correction de la corr			•	e -	- 335	-16120	4	335
n den sen einen seinen seine genenen seine volgen dass dass dass dass dass dass dass das	en er de rener en de sel d'Argen mig d'Alfren er syn en digerrenne er den som som som er af	256.4	25320		231	- 25 320	- 3810	256.4
 generalization of the standard state of the state of the								
	 Construction and a state of the state of the						nannan san san ann ann ann ann ann ann a	

,

.

...

. .

				4						4 - 4 a 2 - 4 a 2 - 4 a 2 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4	
UZG	. Y26	W27	UZI	Y21	W28	U2.8	V2B	W29	U24	٧,29	Witc
29.41	102.8	- 7840	- 429,41	- 59.8	2187		102.8				A
		- 262.0	- 13410	- 18920	262.0	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •	21820	իստիստիսային հայտներին կես սունց ուցեցում էրն նրաններին։ Կես ու մինսյան օրնն -		n die er verschriebengen verschen der Bertein der Berteinen der Berteinen der Berteinen der Berteinen der Berte 	C
		36.66		- 32 800					an an an an ann an an an an an an an an		
		2187.5	429,41	+102.8	-7840	- 429.41	· 59.8		a sa anna an ann an ann ann ann ann ann	in a second de la casa	
		*			- 262.0	- 13410	-18920) a derendine ofer dere annan andalande kann er er er eren kannen er er agen	in again ng mangan ng mangan dina na katalakan ng mangan katala ng mangan ng mangan ng mangan ng mangan ng man		
		*			36,66	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- 32800	karanteren an produk, in Liffichild and eine had in Main Bay dass open			
966	- 258.8	+ 3500						-11465	- 1464	- 101	+ 64
19100	- 24900	- 484		9				- 423	.16166	- 22400	+ 4
	-41000							-+ 75		- 38200	
1 80	+ 77.4	- 12410	+ 4 8 3	-129,4	+ 1750			+3210	+734.7	+ 194.4	- 114
32100	+ 22400	+ 179	-49100	-24900	- 484			Saint die je mie weren, en das die die witter winn and were			- 4
2400	+ 112000	-129.4		-20500							+ 1
180	- 129.4	+27650	- 180	+ 17.4	-12410	+ 4 8 3	-129.4				+ 321
19100		- 179	+ 132100	+ 22 400	+ 179	-49100	-24900				;
2400	- 20500	+ 71.4	+ 22400	11200	- 129.4		-20500			a the State manual result on the section of the section of the	
483		-12410	+ 180	-129.4	129400	•• 663	+77.4	and the following of the section of			
		+ 4 84	-49100		- 663	+181200	+22400				bedadefilitionstigening kateriyatalopgin oʻoga
		- 129.4	- 22400	-20500	+ 71.4	+22400	+112655				1 1149 8 - 1149 11 12 11 12 11 12 12 12 12 12 12 12 12
								BICCC.	+ 1350	161.0	- 331
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·								· 335	21.1 8 10	258 GC	11
								- 155.5	51600	12110	- 5
408	74.6	3209		-		ar mangan simu da a saya a saya a saya na saya	a nadi na nije i naveza na konstrukcio na se se na konstrukcio na se	-16960	· 615	- 249	53.
E120		335		a na sa	lands and day of some field data and on a finite field and an a first a -	. Na kaominina dia kaominina dia kaominina dia mampikambana dia kaominina dia kaominina dia kaominina dia kaomi		140	- 54 550		an a
р 320	- 3810	256.4	·	n an			n an	- 1259	- 25810	2315	
408		- 11460	- 408	74.6	3209			72 4 CC	- 14C		k · · · · ·
	• •	- 335	-18120	n an	335	a ar ad the minimum data and a state of the set of the s	, <u></u>	n managa mandaka managa ang kananan ng kanan	n - Constant Anna an Anna an Anna Anna Anna Anna	n 9 Marie 19 Marie II anno an ann an Anna	* 1
320		231	- 25320	- 3810	256.4		hanni, ann an bhair ann an tar an		میں میں اور	. A. A. A. M.	
			an , a dhan airte an ann a' a thairte tha ann airte an airte	•	a fan syngersjoner waarde alle alle alle alle alle alle alle al	a mar a sun anna an an anna anna an an anna an an	a a cara a la falancia que para com a falancia que de la compañía de como de como de como de como de como de c		- · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	·* 4 4 + 1/€	+ 8
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	a a chuir ann an an ann an an an ann ann an an an	, were read at a statement data state program constr	ر همی برد. در در در در در برده این از می بردن این و می میشود. ا	n naman ya ana ina kata kata kata kata na ana ana ana ana ana ana ana ana a		eren alter apresidante apresidante en la composición de la c	+- 4 2/	-t- Z/ 1025	ang an ana ang aga a	
			yn - Communist a Andreas an an an de berefer er Piller	· · • · · · · · · · · · · · · · · · · ·	u versensione	t na sta na sta sta sta sta sta sta sta sta sta st	a a na aba ay ana na mahadan ana ma		and Samada (s. 1)	a a a marina a sa a sa a sa a sa a sa a sa a	The set of set of the set

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•						,						
3	V28	W29	Uzy	¥29	Ŵ	bc.	V 30	Vac	Wal	UBI	V3I	V32	
×	102.8 .								1010		- 74,50		+-
	21820	and a second	 Belleville of the second s		e - Sandhang September (Saines - Barr	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	* A de la Marcelan, e dina e dina de anterés i dina persona actuación e su el anterés de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanistica de la mar Natura de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanistica de la marcelanis de la marcel	in a constant distribution in the second		ann a' an			
							and a second	* A set of the set	n a na an tha in an	a in a fan 'n onder onger op fer op angesting warren in an staat in te			-
.41	- 59.8							**************************************	n an standiger an	n - an	an - Sa a la na ann a bhliain ann an dù an taonn a bhliain ann an ann an ann ann ann ann ann a		••••
10	-18920							2014 - 27 - 2 Kindd Bolyns yr Anag Mallisonady (yr Ang Sugher, am Awr	kan kan sa				-
	- 32800							e e 🕈 Min del Yan II In general d'Alla (1999), del general de la compositor y e e e					-
		-11465	+ 1469	- 101	+ 64	2.0		+ 388.8	nan an ann an Anna Anna an San Anna Anna	n na an			
		- 423	+161CC	-22400	+ 4	ъ		+ 24400	ar an				-
		7 75		- 38200							-		
-		+3210	+734.7	+ 194.4	- 114	5	- 734.7	- 101	+ 3210		+ 194,4	······	+
					- 4	ځ	-16100	-22400	4 4 23	······································	+24900		-
					+ 1	៊ី		- 38200					
5	- 129.4				+ 321	()	+ 734.1	र । त चन	-11465	-754.7	- 107		1
C.	-24900								- 425	-16100	-22400		
	-20500								+ 15	in die verschiefen die die eine allege in date alle segment gegeneren gegeneer zugen zu der gegene	- 38200		
	+77.4	. 							+ 3210	1734.1	+194.4		T
<u>.</u>	+22400									*** An else men in the second second second second second in the second s second second seco second second sec			1
:	+11 2000					ster frankligen ig sommelje er u				n fer en hal men og eftersteller. Helsen angeliken er og egter gjerer som			
		ELCOC	+1350	161.0	- 33	<i>.</i> C	1560	· 498	4800	 aut 1⁻¹ transmitter (b) in anisation of systems (b) and anisation (b) and (b) a	a the standard disease and a standard and a standard disease and a standard disease and a standard disease and a	36	
		• 335	121 · He al.	258.00	11	يور المورية	-54 550	- 211	1 1 1 m	Den skullet i selek strander er gin anlegen sjoken i de skolet gin de skolet sjoken i de skolet gin sjoken sjo		-25800	
		. 195.5	51600	12110	••• 🚌	P	a a constant a constant a constant a sine constant and a constant are a constant and a constant are a constant					. 4250	
		-10460	· • • 15	- 249	53.	2 [™] r y n e	- 615	161	-1696	740	- 249	324	T
		190	- 54 550			5	146520	20,8-5	320	- 54 257	-21100		-
		- 259	-7.5810	2015	- 15	ала 	25810	1 6. 1 1	· 0.39		- a a 15	and the second	
		nare							in the second		An and a second s		-

4

-

			1	1					r	
\mathbb{N}	30	V30	V ₃₀	WBI	USI	VBI	VBrL	Vas	V34	
				10.10		- 74,50				
	-				(a) Que une lappe hard has blue der alle Gemeinenen versteren.		•	- Ball-addi Ballandin Albanda ar seya <u>Bara da sana</u> a a sana ana ana		ann a bhan air a bhan ann a bhanna ann a s- ann air ann an ann an ann ann ann ann ann ann
1997 - 1997 - 1989 1989 - 1997 1989 - 1997	<u>, 1</u>							an an an Shine an Shine an Shine an Shine an Shine an Anna an A	9 - 40 - 40 - 40 - 40 - 40 - 40 - 40 - 4	nnen ar ny s alan analan aka ny na disimana ana ana amin'ny salata ina a
				T T T T T T T T T T T T T T T T T T T				, m, , , , , , , , , , , , , , , , , ,		anna annan an annan an an annan an an an
								y y men men in granna regioni antenna nan var ancap en y gr	n - nyan gungalatan kana ka	uuuska utegaa ugeraalarka ukki "staantiigen suuti vii teaan repataan kai "Kii opei kiinneen
									an a	لهمین
64	20		+ 388.8					- And the second s second second sec second second sec	an a	
	3		+ 24900				n - a shiriye dalaya dalada da a a dayyaya yayan kuyar ya ya a shiri a a	a daga gaga saga na gaga na gaga na sa	ar annan a' fhair ann fhairtean Annana ann an Annana a' chuir fhairte.	anna ann an San Air
									an an ang ang ang a ang a sana an an ang ang ang ang ang ang ang an	97, 1927 - 1929 - 192
ILA	5	- 734.7	- 107	+ 3210		+ 194.4				
4	3	-16100	-224CC	+ 423		+24900		an ball france and a second	a personal and a conservation of the first second sector of the state of the second sector of the second sector	چېل د کې و د و د و د و د و د د اول د د و د و د و د و د و د و د و د و د و
	5	•	- 38200					a na para ser a ser a La ser a s		48 - 292 - 922 - 923 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933 - 933
321	0	+ 734.7	+ 1444	-11465	-734.7	- 107		palatala, gantan, la verdin men yann yang di di dan Bil Bi ^{la} n kilann		مىنىغانى بىرى ۋە ئىرى بەر يە يەكە ھەتھىلەك كىيەتچە ھىنىۋىر يەكەر بەرىيە ھەتھەر
				- 423	-16100	-22400		9 * 5 - 44		₩₩4
				+ 15	¹ Ministra and difference in the second se Second second secon second second sec	-38200				
	:			+ 3210	+734.7	1-194.4		- <u>Harrison yang kang kang kang kang kang kang kang k</u>		, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,
					an a sharan				n	
			1997 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 - 1994 -							an a
53	20	1580	- 498	4800			36	F-18		andina da dalaran manin undira da dan da
		-54 550	-21170	······································			-2580C	21100		να, μαι ματοροφιματικα π∕ το το στο στο πολλοποι το ποργογιατικο το το βργ
	F.	ř	- 4630				- 4250	an a		nan an dalah dagar kalengi dalam gina dalam dan dara dan dara dan dara dan dara dan dara dara
3,	17 y 19 1	- 615	161	-16415	740	- 249	324	Z€	*2-4	ny, y f bigar, manakarna, a si-sunakarna ganapadalang
3	-15	146520	25.800	335	-54351	-21100		- 25PC.	21105	ana shine asa asal - dadikan ƙilabar katarin t
5	5	25860	16/15	· 239		- 8 5 15	and an open complexities and reach one difficulty fields a	- 9450		
ğ	e En la constante de la consta	- 675	- 249	55400	- 115			324	36	n typp for an information of the South State (South States and South States and South States and South States a
- - -	3 ¹ 1	CALLAN		an a	n fraði sínar og nar hen skeindefindur undersjon voru sæður sams var sen som segur segur segur segur segur seg	- South - and solid in the last data and on a sub-state the last line of the last line o	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			nnan diniya ar a billa tarren yihili da sakadili bida yapa aykada ti'na kayan g

(7)

.



SUBMATRIZ A33

,

No.ec.	W23	U23	V23	W24	U24	V ₂₄	W25
W23	17760	- 87.00	\$1.50	- 7930	263.38	- 59.3	
U23	85.00	113600	18920	8500	42000	- 21820	and an appendix of a parameter with the second strained at the second strained strained strained at the second
V23	28.64	18920	44200	- 59.30		- 17250	
W24	- 7930	81,0	- 59.3	+18870	- 350.38	31,50	
U 24	+ 264	- 42000		- 3500	155 600	18920	
Y24	- 59.30	-18920	-17250	2 8.64	18920	94200	
W25							+27650
U25							- 179
V25							+ 71.4
W ₂₆	+2194						- 12410
U ₂₆	+ 166						+ 484
V26	+134.3						- 129.4
W ₂₇	- 1860	- 524.5	+ 36,6	+ 2194			+1750
U27	- 166	-16100		+ 166			
V21	- 69.5	- 21800	- 32800	+ 134.3			
W18	+2194	+ 524.5		- 7860	- 524.5	+ 36,6	
U ₂₈				- 166	- 16100		
V28	+134.3	+21800	•	-69.5	-21800	- 328,00	
W29							-11460
UZq							- 335
V24					(231.0
W ₃₀							3204
030				n - N a International (1966), and an an an			
V30						The formation of the second	256.4
W31	1060	ar ganalian tamihan kanala ang akan sara a sang a		er 19 % - Alley alle Market Langer der Alley Market alle Alley			
Uzi							
V3I	- 14.50	الموادقية، والحد طالبا والموادية والمراجع من والمراجع المواد والمراجع المراجع المراجع المراجع المراجع المراجع و					
YV37			. In the second statement is statement and statement of the second statement of th		J 1400 5470 - 1400 - 1400 - 1400 - 1400 - 1400 - 1400 - 1400 - 1400 - 1400 - 1400 - 1400 - 1400 - 1400 - 1	1. O F. M. Strikelik dis 1997 superconjecture of 1. 20. 199	A sector of the same sector descents the sector of the
Usl			North Color Manager Spectra and the spectrum of the	an de la consecuencia de particular de la consecuencia de la consecuencia de la consecuencia de la consecuencia	9	(2019) a sana aka dalamiti uto daga sa sa jagah sa sana - 2 yak sa	7 - No Monte en constantino d'Antonina de la constantino de la constantino de la constantino de la constantino de
V32		,	-nd to refer to the second		ner mille som bei som ble norskappersonarise spinaleret i se server i som	ner et haar antikker verske en de enskere kangesenderen in de enskere	n a su a com a secretar traba com ercia com esca de la su
		,					

Ş

BIBLICGRAFIA

- 1. Timoshenko, C. P. "History of Strength of Materials" Mc Graw Hill Book Co., 1953.
- 2. Lanczos, C. "The Variational Principles of Mechanics" University of Toronto Press, Toronto 1960.
- 3. Courant, R. y Hilbert, D. "Methods of Mathematical Physics", Vol. 1, Interscience Publishers Inc., New York, 1961.
- 4. Todhunter, I. y Pearson, K., "A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials" (en dos volúmenes), Dover Publications Inc., New York, 1960.
- 5. Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 4a edición, Dover Fublications Inc., New York, 1944.
- 6. "Treatise on Dams, Ch. 40, Arch Dams" United States Bureau of Reclamation.
- 7. Ritter, Hugo "Berechnung der bogenformigen staunauern", Diss. Kartsruhe 1913.
- 8. Julián, O. D. et al "Analysis of arch dams by the trial load method" Trans. ASCE, V. 93, 1929, p. 1191.
- 9. Lombardi, J. "Les Barrages en Voute Mince" Dunod, Faris, 1956.
- 1C. Guchy, A. "Sur l'equilibre et le nouvement d'une plaque solide", 16.3.
- 11. Poisson, D. D. "Memoire car l'equilibre et le mouvement les cortes solides" 1885.

- 42. Aron, H. "Das Gesichgewicht und die Biegung einen unendlich silnner besieblig gekrümmten elastichen Behale", J. Reine und. Anz. Math. 78, 1074.
- (j. "The Sullected rappression degreen). Timochenko" editado (or D. G. Young, as Greadel) Book So., Inc. 1983.
 - -a) "End + Statis.tats protiest der Elestizitats theorie" pp. 1-50.

م^{عر} م

- b) "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars", pp. 288-290.
- 14. Timoshenko, S. P. y Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability", 2a. edición, Mc Graw Hill Book Co., Inc. New York, 1961.
- Rayleign, J.W.S. "The Theory of Sound", (en dos volúmenes), 2a. edición, Dover Fublications, New York, 1945.
- 16. Belluzzi, O. "Scienza delle Costruzioni", Vol. IV, Nicola Zanichelli Editore, Bologna 1961.
- 17. Timoshenko, S.P. y Woinosky Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", 2a. edición, Mc Graw Hill Book Co., Inc., New York, 1959.
- 18. Ritz, W. "Theory der Transversalschwingungen einer quadatischen Flatte", Ann. der Physik, V. 28, p. 737, 1909.
- 19. Galerkin, B. G., "Placas elásticas delgadas". editado Estatal de la Construcción, Moscú 1933.
- 20. Timoshenko, S. F. y Goodier, J. N., "Theory of Elasticity" 2a. edición, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York, 1951.
- 21. Kalmanok, A. S. "Manual para cálculo de placas" traducido del ruso por Trucillo R., editora Inter Ciencia, Montevideo, 1961.
- 22. Argyris, J. H. y Kelsey, S., "Energy Theorems and Structural Analysis", Butterworths Scientific Publications, Londres, 1960.
- 23. Onisshvili, O. D. "Certain Dynamic Problems of the Theory of Shells", traducito del ruso yppublicado por Morris, D. Friedman, Inc. Massachusetts, 1959.
- 24. "Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs", ASCE, Manuals of engineering practice, No. 31, New York, 1953.
- 25. Flügge, N. "Stresses in Snello", Springer-Verlag,

Berlin 1960.

26. Vlasov, V. Z., "Allgemeine Schalentheorie und inre Anwendung in der Technik", troucello del ruso bajo la seuperficie de A. Kromm, Akademie-Verleg, Berlin, 1958.

- 27. Lundgren, H., "Cylindrical Shells", V.1. The Danish Technical Press, Copenhagen, 1951.
- 28. Novozhilov, V. V., "The Theory of Thin Shells" traducido del ruso por P. G. Lowe, P. Noordhoff Ltd. Groningen-The Netherlands, 1959.
- 29. Donnell, L. H., "Stability of thin walled tubes under torsion", NaCa Rep. No. 479, 1934.
- 30. Jenkins, R. S., "Theory and Design of Cylindrical Shell Structures", Ove Arap & Partners, Londres 1958.
- 31. Gibson, J. E., "The Design of Cylindrical Shell Roofs" 2a. edición, E. & F. N. Spon Ltd. Londres 1961.
- 32. Schorer, H., "Design of Large pipe lines" Trans. ASCE, V. 98, p. 104, 1933.
- 33. "Calcolo delle Volte cilindriche cinedhari sottili", Manuali per applicazioni techniche del calcolo, Gremonese Roma, 1960.
- 34. Pros. of the 2nd Symposium on "Concrete Shell Roof Construction", 1-3 July 1957, Teknisk Ukeblad, Oslo, 1958.
 - a) Holland, I., "A contribution to the theory of cylindrical snells", p. 257-263.
 - b) Vlasov, V. Z., "Cylindrical shells and new ways of developing thin walled spatial systems in structural mechanics", p. 101-146.
- 35. Fucher, A. "Uter die Spannungsfunktion Beliebig Gerkrümsten dünner Schalen", p. 134, Froc. 5th International Confress on Applied Mechanics, Cambridge Mass, 1936.
- 36. "Estudios Analíticos sobre presas Bóveda", informe del Instituto de Inteniería a la Comisión Feieral de Electricida", Addico D. F., inten. México.
- 37. Vlasov, V. 7. "Conovnie differentsialnie uravnenia o.sche teorii uprugikh obolochek", Prikladnaia Matematica I Mokhinika, Vol. 8, 1984, pp. 109-140.
- -38. "mbartzumi**a**n, J. A., "Teoriia (nizstrophikh O**bolo**chek", Gospiarstbennse Izdatelstbo Fiziko - Natematicheskoi Literaturii, Zouri 1961.

- 39. Naghdi, P. M., "On the theory of thin elastic shells", Quarterly of Applied Mathematics, V. MIV, No. 4, 1957.
- 40. Citala, P., "Sulla teoria elastica della parete sottile" Giornale del Genio Civile, V. 97, No. 4, p. 238.
- 41. Cicala, P., "Consistent approximations in shell theory" Trans. MJCE, V. 128, parte 1, 1963.
- 42. Axentian, C. K., Vorovich, I. I., "Napriashennoie sostoianie pliti maloi tolshchini", Prikladnaia Math. i Mekh., V. 27, No. 6, 1963, p. 1058-1074.
- Zerna, W. "Mathematischestrenge theorie elasticher 43. Schalen", grupo de conferencias en la Universidad Ibero-Americana, México 1961.
- Rodriguez Gaballero, M., "A general theory ofor the 44. analysis of non-shallow thin elastic shells", Memorias del II Simposio Panamericano de Estructuras en Lima, Perú, 1964.
- Terelgulov, I. G., "K Postroeniiu Utochnennikh teorii 45. plastin i obolochek" Friklafnait Mathematica i Mekh., Vol. 27, No. 2, p. 346-350, 1963.
- Teref falov, I. G., "Ob adnoi variatsionnoi teoreme 46. nelineinoi teorii uprugosti", Frikladnaiu Math. i Mekh. Vol. 26, No. 1, p. 167-171, 1962.
- Reissner, E., "On variational principles in elasticity" 47. Proc. of Symposia in Applied Mathematics', Vol. 7, American Mathematical Society, New York, 1949.
- 48. Rodríguez Caballero, M., "Una ceovia lineal para cascarones le espesor constante y forma arbitraria", Memorias del 1er Simposio Panamericano de Estructuras, en México D. F., México 1961.
- Herzog, W. "Die Grundglaichungen dur Flachen, dünnen, 49. elastione Consle unter beliebiger Belastung und Temperatur anderung", Die Bauleonnik, Vol. 32, No. 1, p. 27-22, 1960.

- 50. Koiter, J. T., editor, "The Theory of Thin Mlastic Shells", Frons. of the Symposium on the theory of thin elastic scells, North Holland Fublishing Co., amsterdam 1960.
- 51. a) Koiter, ". "., "A consistent approximation in the general theory of thin elastic shells. pp. 12-33

.
- b) Zerna, "., "Uber eine nichtlineare allgemeine Theorie der Schalen", pp. 34-42.
- 51. "Frogress in Applied Mechanics, The Prager anniversary Volume", Mc millan Co., New York, 1963.
 - a) Budiansky, B., Sanders, J. L. "On the "best" firstorder linear shell theory", pp. 129-140.
- 52. Green, A. E., Zerna, W., "Theoretical Elasticity", Oxford at the Clarendon Fress, London 1954.
- 53. Goldenveizer, A. E., "Theory of thin Elastic Shells" traducido del ruso, G. Herrmann, editor, Pergamon Press, London, 1961.
- 54. Rodríguez Caballero, M., "Teoría General de Cascarones" notas de clase, División del Doctorado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, México 1962.
- 55. Naghdi, P. M., "Note on the equations of shallow elastic snells", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XIV, p. 331, 1956.
- 55. Reissner, E., "Un some problems in shell theory", Proc. of the First Symposium on Naval Structural Mechanics, J. T. Goodier, N. J. Hoff, editores, Pergamon Press, 1964.
- 57. Rosenblueth, 2., "Métolos de análisis para presas b6veda", capítolo lo. de la ref. 36.
- 59. von Karman, T., "Non-linear buckling of thin shells", Congress on Fluid Dynamics and Applied Mathematics", editado por J.E. Díaz Plenun Fress, New York 1961.
- 59. Cicala, F., "Smlia teoria elastica della parete sottile" (continuazione), Siornale del Genio Jivile, Vol. 97, No. 5, pp. 489-449. 1959.
- 60. dieals, F., "Bulla veoria classica della parete sottile

214

(fine), diornale delaGenio livile, Vol. 97, No. 9, 1959.

61. Jicala, L., "Thin shells under assigned body and contour forces", gast. Sournal Rech. and App. Math., Vol. 3V1, 10. 1, 1963.

- 62. Hildebrand, F. B., "Methods of Applied Mathematics", Prentice Hall, Inc., New Jersey 1960.
- 63. "Collected Works of Theodorg von Karman", Vol.s III y IV, Butterwortns Scientific Publications, London 1956.
- 64. Langhar, H., "Energy Methods in applied Mechanics" John Wiley and Sons Co. Inc., 1962.
- 65. Bokolnikoff, I. S., "Mathematical Theory of Elasticity", Da. edición, Mc Graw Hill Book Do., Inc., New York, 1956.
- 66. Morley, L. S. D., "Ekewed Plates and Structures", Pergamon Press, Oxford, 1964.
- 67. von Karman, T., "Non-linear buckling of thin shells", Procs. of Symposia on Fluid Dynamics and Applied Mathematics, J. E. Diaz editor, Plenum Press, New York 1962.
- 68. Lekhnitskii, S. G., "Theory of Elasticity of an anisotropic elastic body", traducido del ruso por P. Fern, Holden Day series in mathematical physics, California 1963.
- 69. Gelfand , J. M., y Formin J. V., "Jalculus of Variations" traducido iel ruso por Richard A. Silverman, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1964.
- 70. Norse, F. N., Feshbach, H., "Methods of Theoretical Physics", Mc Graw Hill Book Co., Inc., New York 1953.
- 71. Hildebrand, F. B. "Advanced Calculus for Applications" Prentice Hall Jo. Inc., New Jersey 2901.
- 72. Irving, J., MMoullineaux, N., "Mathematics in Physics and Engineering", Vol. 6, Academic Press, New York 1959.
- Muchtari, Ch. M., Galimov, E. Z., "Non-Linear theory of Thin Elastic chelis" traincelon del riso rublicada for The National Frience foundation, "schington, D.C. Lych.
 La Salle, C., Lefschetz, ., "stability by Logarovin Direct Vetheor with applications" Actions by Logarovin York, Lefs.
- 29. .cimir, ... G. "Gibele Histinki S obolor.ci" (de la re-

į

and the second second

76. Atkinson, F. V., "Discrete and Continuous Boundary Froblems", Academic Press, New York.

- 77. Chuang, K. P., Veletsos, A. J., "A Study of two approximate methods of analyzing cylindridal shell roofs", University of Illinois, SRS No. 258, 1962.
- 78. Utku, S., Noeris, Ch. H., "Utilization of digital computers in the analysis of thin shells", Symposium on the use of computers in civil engineering, Lieboa Portugal, 1962.
- 79. Salvadori, M. G., "Extrapolation formulas in linear difference operatos" Proc. 1st Congress Applied Mechanics, New York 1951.
- 80. Hartree, D. P., "Numerical Analysis" 2a edición, Oxford at the Clarendon Press, Londres 1958.
- 81. Tseitlin, Ch. Tu., "Optimalnie operatori b metode konechnij raznostei i ij primenenie k raschetu plastinok u obolochek". Issledobanija po Teorij Soorusherii, Moscú 1961.
- 82. Novozhilov, V. V., "Foundations of the Non-Linear Theory of Wlasticity", Grayluck Press 1953.
- 83. Schnotrich, 7. J., "A Physical Analogue for the Numerical Analysis of Cylindrical Shells", Ph.D. Thesis, University of Illinois, 1962.
- 84. In "ituto de Inteniería, "Modelo para el análisis de rresas bóveda", herorte final del estudio ratrocinado por la Corisión Federal de Electricidad, Ciudad Universitaria, Agosto 1964.
- 85. Noor, A. E., Veletses, A. L., "A study of doubly curved shallow snells", DR Series Vo. 274, University of 11 linois 1963.
- 86. Rodriguez Jaballero, M., "Asplicación de la geometria diferencial a la teoría de los cascarones", 1. Jimpodic Faramericano de estructuras, 1.P.N., México 1961.

216

37. Elsenhurt, L. P., "An introduction to Differential deemetry", Princeton 'niversity Press, Princeton 1947.

The Gokolnikost, 1.2., "Pendor Analysis", Ca. edición, J. Wiley & Constinct, New York 1964.

8