

0399

01149

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE

E. S.

MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA.

DIVISION DEL DOCTORADO.

**BIBLIOTECA DE LA  
DIVISION DEL DOCTORADO**

"DISEÑO SISMICO DE CERTAS ESTRUCTURAS  
ELASTO - PLASTICAS: ESTUDIOS  
PRELIMINARES".

Tesis que para obtener  
el grado de Maestro en  
Ingenieria (estructuras)

Presenta:

ALFONSO MARTINEZ M.

Ing. Civil con Esq. en  
Vias de Comun.

(C.S.I.A. - I.I.N.)

- 1 9 6 1 -

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

El presente trabajo ha sido elaborado como requisito parcial para la obtención del grado - de maestro en Ingeniería (estructuras) bajo la dirección del Dr. Emilio Rosenblueth a quien el autor hace patente su reconocimiento, y a la - vez agradece sus consejos durante el desarrollo.

El autor agradece sinceramente la ayuda - que le brindo Fundación Ingeniería A.C. al proporcionarle la beca que hizo posible tanto los estudios como este trabajo.

DISEÑO SISMICO DE CIERTAS ESTRUCTURAS ELASTO-PLASTICAS:  
ESTUDIOS PRELIMINARES.

CONTENIDO

- 1.- Objeto
  - 2.- Notación
  - 3.- Introducción
  - 4.- Antecedentes
  - 5.- Falla plástica de estructuras durante un sismo.
  - 6.- I.- Estructura con una masa soportada por una columna  
de material elasto-plástico.
  - 7.- Marco simple
  - 8.- Estructuras de varios pisos
  - 9.- Características del temblor idealizado
  - 10.- Deducción de las ecuaciones
  - 11.- Integración paso a paso de las ecuaciones diferenciales.
- Bibliografía.
- Figuras.

### 1.- OBJETO DEL PRESENTE TRABAJO

Un criterio de diseño sísmico supone que la energía suministrada por un sismo, ha de ser tomada dentro del límite elástico con -- una cierta cantidad de energía disipada por amortiguamiento. Si esta -- hipótesis fuera cierta, fijado un límite para la deformación, para que no se excediera, habría de dotarse de una cierta rigidez a la estructura que define, al igualar la energía de un sismo con la energía de de-  
formación, una fuerza de diseño.

Se ve entonces que la fuerza de diseño sería mayor cada vez que se verificara un aumento en la rigidez que implica también una va-  
riación en la energía que suministra un sismo. En este sentido resulta ser un criterio del lado de la seguridad, el de limitar las deformaciones.

Para un cierto valor de la rigidez, cuando dentro del límite elástico no es posible almacenar toda la energía, se permiten deforma-  
ciones más allá del límite elástico, obteniendo así una disipación de la energía. Al tratar con la energía que suministra un sismo y su ab-  
sorción mediante deformaciones en el rango plástico, se observa que no tiene una influencia decisiva el período natural de la estructura. Es-  
ta razón hace suponer la existencia de coeficientes sísmicos equivalentes de diseño para estructuras con período natural diferente, tal como aconsejan algunos reglamentos.

La intención del presente trabajo es la de suministrar rela-  
ciones que conduzcan hacia esos valores. Cuando estas se apliquen a series casuales de impulsos se estará en condiciones de definir los coe-  
ficientes sísmicos más adecuados para diversos tipos de estructuras.

La hipótesis de series casuales se justifica en la comprobación que ha recibido en trabajos recientes (25) como son por ejemplo - los desarrollados a base de ruido blanco en computadoras analógicas cuya concordancia con resultados analíticos ha sido excelente (2). También empleando tablas de números casuales y comparando distribuciones teórica y empírica se ha corroborado la hipótesis de la naturaleza casual originalmente propuesta por G.W. Housner.

En el presente trabajo se introduce la pérdida de energía en el sistema que origina el descenso de la masa, así como el efecto de la carga de pandeo en las vibraciones libres (26) y en la vibración -- forzada ya que cabe suponer que su influencia será notoria por tratarse de amplitudes grandes.

BIBLIOTECA DE LA  
DIVISION DEL DOCTORADO

2.- NOTACION:

- $a$  = Amplitud de las oscilaciones libres  
 $c$  = Coeficiente de amortiguamiento.  
 $C_s$  = Coeficiente sísmico equivalente.  
 $C_{sk}$  = Coeficiente sísmico equivalente en el piso  $k$   
 $E$  = Módulo de Elasticidad ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )  
 $E$  = Esperanza matemática (operador).  
 $G$  = Aceleración de la gravedad ( $\text{cm}/\text{seg.}^2$ ).  
 $H$  = Altura total de un edificio de varios pisos.  
 $h$  = Altura de la estructura ó de un entrepiso.  
 $I$  = Momento de Inercia.  
 $J$  = Medida arbitraria de la intensidad del sismo.  
 $K$  = Energía cinética en un sistema conservador  
 $k$  = Constante de resorte  
 $k$  = Número de orden de un piso, contado a partir del extremo superior.  
 $M$  = Masa =  $\frac{W}{g}$   
 $M_0$  = Momento para el cual ocurre la fluencia.  
 $n$  = Factor de seguridad  
 $N$  = Número total de pisos en un edificio  
 $n$  = Número total de impulsos en un sismo idealizado.  
 $P$  = Carga axial.  
 $P_{crit}$  = Carga crítica.  
 $P_k$  = Factor que toma en cuenta la forma en que se verifica el colapso en el piso  $k$ .  
 $q_j$  = Coordenada generalizada  
 $S$  = Duración del sismo.  
 $T$  = Período natural  
 $t$  = Tiempo  
 $U_i$  = Impulso unitario en el instante  $t_i$



$i = 1, 2, 3, 4, 5 - - - - - n.$

$V_b =$  Cortante en la base

$V_k =$  Cortante en el piso  $k.$

$V =$  Energía potencial

$W =$  Peso total de la estructura.

$w =$  Peso por piso

$X_b =$  Desalojamiento en la base

$X =$  Desalojamiento de la estructura con respecto a la base.

$Z_k =$  Altura medida a partir del último nivel hasta el nivel del piso  $k.$

$\alpha = (1 + \rho \frac{Z_k}{H})$

$\beta = \frac{n S_V}{\sqrt{gh}} \sqrt{\rho k}$

$\delta =$  Delta de Dirac.

$\varepsilon =$  Incremento en el tiempo

$\mathcal{D} =$  Operador de derivada parcial

$\sigma =$  Desviación estándar

$\tau =$  Incremento finito del tiempo en la integración de las ecuaciones diferenciales.

$\theta =$  Rotación en un extremo.

$\rho =$  Coeficiente que define la variación en resistencia a lo largo de una estructura formada de varios pisos.

$\phi = \frac{x}{h}$

$\phi_{fl} =$  Valor de  $\frac{x}{h}$  para el cual ocurre la fluencia en la primera carga elástica.

$\mathcal{R} =$  Intensidad por unidad de tiempo en el sismo idealizado.

$\omega =$  Frecuencia circular natural

$\bar{\omega} =$  Frecuencia natural modificada debido a la existencia de carga axial.

$\bar{\bar{\omega}} =$  Frecuencia natural modificada por la carga axial y el descenso de la masa.

$\xi =$  Eje inclinado con respecto al eje  $X.$

## 3.- INTRODUCCION

Durante la vida útil de una estructura es posible que en alguna ocasión se vea sujeta a la acción de un movimiento sísmico. Cuando se analiza el comportamiento dinámico de la estructura se encuentran serias diferencias entre lo que teóricamente debiera ocurrir a la estructura y los daños reales. Así por ejemplo al analizar una estructura perfectamente elástica como constituida de un número de masas -- igual al número de pisos ligados entre sí por medio de elementos elásticos, cuando su base cambia de posición de acuerdo con un acelerograma de sismo intenso, se encuentra que la estructura debiera diseñarse con una carga muchas veces mayor que la que especificaría cualquier código de diseño. Las razones que justifican esta diferencia son múltiples. Entre ellas podemos mencionar principalmente al amortiguamiento y las deformaciones más allá del límite elástico también, la existencia de muros de relleno, escaleras, cubos de luz y otras reservas. Estos factores tienen influencia en el comportamiento dinámico de la estructura lo que se suele tomar en cuenta de una manera toscamente aproximada.

También se introducen aproximaciones al concentrar en cada nivel (+) la mitad del peso del entrepiso inmediato superior y la mitad del inmediato inferior. Esto puede ser una mala aproximación cuando se pretende determinar el período natural de una estructura (1) ya -- que la porción de peso que debe concentrarse depende de las características elásticas de los elementos verticales y horizontales así como de sus propiedades geométricas. Así en una estructura de un piso, cuando los miembros horizontales y verticales tienen las mismas pro-

---

(+) en este trabajo se usará la palabra "nivel" para designar el nivel de piso y la palabra "entrepiso" para designar al espacio comprendido entre dos niveles consecutivos.

piezadas elásticas y con igual sección, si la relación que existe entre el claro y la altura es 2.0, debe concentrarse al nivel de azotes el 38% del entrepiso inferior, pero si el claro a la altura se encuentran en la relación 5 a 1 debe concentrarse el 99%. Para las dimensiones usuales, la cantidad que debe concentrarse es del orden de 33 a 38%.

Sin embargo los errores que se introducen al adoptar aproximaciones de esta índole, no justifican todavía las grandes diferencias de que se habló antes; un factor importante es el amortiguamiento. Generalmente la fuerza debida al amortiguamiento se supone (+) proporcional a la velocidad o sea del tipo lineal. En estructuras con varios pisos, se acostumbra idealizar el amortiguamiento como medido relativamente entre los pisos consecutivos, esto hace suponer que el amortiguamiento aumenta con la frecuencia natural de cada modo (26). También se ha sugerido (3) medirlo en forma absoluta con respecto a la base y esto indica que el amortiguamiento debiera ser decreciente con la frecuencia de cada uno de los modos.

Es producto de unas cuantas observaciones el que el amortiguamiento es el mismo en todos los modos y por eso (2) en estudios mediante calculadoras analógicas se ha propuesto la combinación de ambas medidas de la fuerza debida al amortiguamiento.

Una vez considerado el amortiguamiento y adoptando la idealización consistente en suponer concentrada la mitad de la masa del entrepiso inferior y superior al nivel del piso, para poder ajustar entre sí los resultados del análisis teórico y de las observaciones, es necesario tomar en cuenta el comportamiento de los muros de relleno, de los cubos de elevador, de las escaleras y demás elementos decorativos que no son diseñados para resistir fuerzas sísmicas. Al ini--

(+) El amortiguamiento en realidad no es una función sencilla lineal, sino que se trata de una función complicada de la velocidad y que incluye otras variables.

ciarse la deformación, contribuyen por separado todos estos elementos, pero, una vez agotada su resistencia, toda la carga es tomada por el esqueleto estructural: sin embargo la contribución de los elementos mencionados (4) es decisiva en la absorción de energía.

Recientemente se ha venido trabajando ampliamente en el análisis y diseño plástico, como un medio de conseguir un mejor aprovechamiento del material constructivo, una comprensión más eficiente del comportamiento de las estructuras antes de llegar al colapso y una reserva adicional debida a la redistribución de momentos ocasionada por la fluencia plástica de algunas secciones. En el análisis dinámico (5, 6, 7) cuando se permite a la estructura que vaya más allá del límite elástico con regulares dimensiones para sus miembros, en un movimiento sísmico cuya duración  $S$  sea muchas veces mayor que el período natural de la estructura ( $S \gg T$ ) (+), se observa que las deformaciones plásticas son menores que las que se alcanzarían dentro del límite elástico, aún cuando se realicen solo unas cuantas incursiones en el rango plástico.

Pero esta observación no ha sido posible tomarla en cuenta en el diseño sísmico excepto mediante algunas aproximaciones de que trataremos después, de manera que se recurre casi siempre al análisis elástico modal, cuando se pretende mayor refinamiento en el cálculo.

El análisis modal consiste en determinar cada una de las formas de los modos, empleando para ello cualquier método (24). Con las formas de los modos y su frecuencia, se puede calcular el factor

---

(+) Esta limitación se basa en el hecho de que en perturbaciones locales como las debidas a explosión la duración es muy pequeña y si resulta ser una fracción del período natural, al alcanzarse el límite elástico, la estructura tendrá deformaciones excesivas (27).

de participación de cada modo. También se puede determinar cómo cada uno de los modos se comporta como independiente, en donde se aplica la respuesta máxima para cada modo a partir de un espectro de aceleración. Conocidas las respuestas máximas y el factor de participación se pueden combinar de acuerdo con una cierta relación (9) o bien se pueden sumar simplemente con lo cual se obtendrá un límite superior para la respuesta total de la estructura. A partir de la configuración de la estructura que de la combinación de las respuestas modales, pueden deducirse las fuerzas cortantes y demás elementos mecánicos de la estructura (9, 10, 29).

Debido a que buscamos con la aplicación y estudio de métodos más refinados una reducción en las secciones, tendrán ahora una influencia mayor aquellos efectos que antes eran tomados en cuenta de manera toscamente aproximada como son el pandeo de las estructuras.

En este trabajo se pretende dar las relaciones que permitirán introducir todas las variables antes mencionadas con la intención de proporcionar coeficientes sísmicos de diseño como primera base de un diseño que introduce el amortiguamiento, las deformaciones más allá del límite elástico y las variables inherentes a las estructuras esbeltas como son el pandeo y el ascenso de las masas debido a la deformación de los elementos estructurales.

Las relaciones que se proponen serán utilizables en máquinas calculadoras de manera que no lleve mayor complicación, la introducción de dichas variables simultáneamente. Se aplicarán a estructuras con un solo grado de libertad, cuando su base se ve sujeta a la acción de un movimiento sísmico idealizado como una serie de impulsos concentrados tal como se define después. Y posteriormente se aplicarán a estructuras de varios pisos.

## 4.- AMORTIGUAMIENTO

Cuando una estructura se analiza para un movimiento sísmico se obtienen para una rigidez dada, fuerzas horizontales equivalentes a un diseño estático que son máximas y que definen la resistencia - - elástica. Una manera de tomar en cuenta la influencia de las deformaciones más allá del límite elástico ha sido propuesta por J. Penzien (13) y consiste en considerar que la fluencia ocurre para un valor menor que el de la resistencia elástica necesaria, determinase cuando se supone a la estructura como elástica. Ambos valores se encuentran en la relación  $\theta$  tal como se muestra en la fig. 1. En ese estudio ha considerado su autor valores diferentes para el amortiguamiento en - términos del amortiguamiento crítico.

Analizando sucesivamente la estructura para cada valor de  $\theta$ , se obtiene que las deformaciones como medida de la respuesta disminuyen a medida que disminuye  $\theta$  alcanzándose para la deformación un valor mínimo para un cierto valor de  $\theta$  e incrementándose la respuesta considerablemente para valores más pequeños de  $\theta$ . La relación entre la respuesta y los valores de  $\theta$  se muestra en la fig. 2 y se ha deducido de los resultados obtenidos por J. Penzien, tomando el valor correspondiente para períodos naturales de 0.3, 0.6 y 0.9 segundos que cubren - un amplio rango en las estructuras reales.

Considerando como óptimo a aquel valor de diseño que dé el mínimo de deformación, J. Penzien, sugiere que para períodos naturales - comprendidos entre los del rango anterior, la estructura sea diseñada - con un coeficiente sísmico de 0.1 para estructuras altas y flexibles - y de 0.2 para estructuras rígidas. Puede verse sin embargo que el -

tenían un coeficiente de ligeros en los órdenes de la resistencia en la estructura (y por lo tanto de su costo) con un ligero aumento en las deflexiones con respecto al diseño. Los valores a dichos, se dedujeron a partir del acelerograma de Alameda Salina, de mayo 18 de 1940. En este trabajo no se tomó en cuenta el efecto de la carga axial en las columnas pero si se consideró la flexión plástica en uno o más de los pisos.

Considerando el comportamiento, otros estudios realizados recientemente (15) muestran que en los sistemas de un solo piso (con período natural), cuando se fijan las condiciones de frontera que su resistencia sea dada por una aceleración de 0.06 g, se aprecia una reducción en la deflexión total de la estructura con respecto a la que se obtendría idénticamente, que se daría en el resto de las alojamientos para valores del orden de 0.03g. Observándose una gran ampliación en la respuesta de desplazamiento, si se diseña para 0.01g. Parece ser que un valor apropiado para el diseño sería de 0.05 g. Estas conclusiones se prueban estadísticamente los obtenidos por Lanzier.

Del trabajo de G.V. exp.(15) se observa que en general el amortiguamiento reduce la respuesta de desplazamiento, pero que en términos de energía, cuando se tiene una resistencia baja como la que se obtendría al diseñar con 0.01 g, la energía que llega a la estructura es mayor, e incluso mayor es el momento flector. Es tanto que casi no varía, cuando el valor de diseño es 0.03g. Pero siempre es mejor para valores de diseño con 0.10 g y superiores, la relación inversa con la cantidad de amortiguamiento. Este hecho resulta de importancia para la elección del coeficiente de diseño de diseño.

Para tener en cuenta el efecto de las deformaciones elásticas en la reducción de la resistencia, J. J. Neuberger (14) un procedimiento en donde la curva viene de deformación del material de que se trata y para más detalles véase la estructura. A partir de esta gráfica se construye el diagrama para la estructura, que debe resolverse una vez haya ocurrido el sismo y se obtiene el valor de la reducción de la resistencia reducida elásticamente para un espectro de diseño. El objeto de este trabajo es el sentido de que se genera el efecto de la forma es que podría verificarse la fluencia y el fallo a la estructura por el procedimiento cuando se trata de un trabajo de diseño.

Procedimiento muy diferente al que surge de lo que al presente trabajo es el sugerido por G. J. Neuberger en la II Conferencia Mundial de Ingeniería Sísmica, dicho trabajo se resume a continuación.



5.- FALTA PLÁSTICA DE  
ESTRUCTURAS DURANT  
TE UN SISMO.

El criterio propuesto por Housner (16) se basa en que la energía que suministra un sismo puede medirse a partir de un espectro de velocidad como el que se ilustra en la figura 3, mediante la relación.

$$E = \frac{1}{2} M S_v^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

con E = energía suministrada

$$M = \text{masa de la estructura} = \frac{W}{g}$$

S<sub>v</sub> = ordenada medida en el espectro de velocidad.

Esta energía debe almacenarse mediante deformaciones en el rango elástico con una energía potencial (V) y si ésta no es suficiente, la diferencia debe disiparse (D) por amortiguamiento o bien mediante deformaciones más allá del límite elástico, es decir, debe cumplirse:

$$D + V = E = \frac{1}{2} M S_v^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

La relación mostrada se basa en una hipótesis aproximada, - la de considerar que la energía total desencadenada por un sismo es - tomada en su totalidad por la estructura y que puede medirse en un espectro.

La energía disipada mediante amortiguamiento puede tomarse - en cuenta tomando un espectro para un cierto valor del amortiguamiento en la estructura.

G.W.Housner, tomando únicamente las deformaciones más allá del límite elástico con un diagrama como el de la figura 4, aplica su criterio a las estructuras siguientes:

6.- I.- ESTRUCTURA CON UNA MASA EN LA CIMA POR UNA COLUMNA DE MATERIAL ELÁSTICO-FRÁGIL (fig. 5)

La expresión 2 puede ponerse para este caso como:

$$\frac{1}{2} \frac{W}{E} S_v^2 = W_0 \phi - \frac{1}{2} W \phi^2 \dots\dots\dots (3)$$

cuando se considera la energía potencial perdida por el sistema al descender la masa. El descenso puede valuar, despreciando las deformaciones elásticas como:  $h(1 - \cos \phi) = \frac{h \phi^2}{2}$

Al llegar la energía E del sistema a la estructura, puede -- llevarla a la fluencia y de ahí al colapso. Si el colapso ocurre por deformación en una sola dirección, fig. 6a., entonces toda la energía es tomada por el sistema. Pero el colapso puede ocurrir con deformaciones en una y otra dirección, entonces una parte de la energía se consume en la dirección opuesta de manera que solo llega al sistema una fracción p E.

Entonces p puede definirse como la diferencia entre la energía que es absorbida en una dirección y la cantidad que se absorbe en la dirección opuesta; así,  $p = \frac{1}{2}$  corresponde a la absorción de 3/4 de la energía total en una dirección y 1/4 en la dirección opuesta (fig. 6b).

La ecuación 3 puede quedar como:

$$p \left[ \frac{1}{2} \frac{W}{E} S_v^2 \right] - \frac{1}{2} W \phi^2 = W_0 \phi \dots\dots\dots (4)$$

y se muestra gráficamente en fig. 7. Se puede ver de esta figura, -- que el valor mínimo de  $W_0$  se tiene para aquel valor de  $\phi$  en el cual la recta es tangente a la curva, o sea cuando se cumple la relación.

$$\frac{\partial W_0}{\partial \phi} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

Hasta aquí se ha tratado considerando el colapso de la estructura, pero las estructuras deben diseñarse con un cierto factor

de seguridad que Housner introduce como "n" en la forma que convierte a la ecuación 3 en:

$$\rho \left[ \frac{1}{2} \frac{W}{g} (n S_v)^2 \right] + \frac{Wh \phi^2}{2} = M_0 \phi \dots\dots\dots 6 (a)$$

o sea que afecta la ordenada del espectro de velocidad de un cierto factor mayor que la unidad para tomar en cuenta la posibilidad de que se vea superado el valor fijado en el espectro. Ello equivale a la -- adopción de un factor de seguridad para el momento resistente en la -- sección. Existe sin embargo otra posibilidad que consiste en ampliar la energía que llega al sistema en la cantidad n, o sea ,

$$np \frac{W}{2g} S_v^2 + \frac{Wh \phi^2}{2} = M_0 \phi \dots\dots\dots 6 (b)$$

Despejando de la Ec. 6 el momento  $M_0$  y verificando la Ec.5

$$- \frac{\rho}{2} \frac{W}{g} n^2 S_v^2 \frac{1}{\phi^2} + \frac{Wh}{2} = 0$$

es decir,

$$\phi = \frac{n \sqrt{p}}{\sqrt{gh}} S_v = n \sqrt{\frac{p}{gh}} \cdot S_v \dots\dots\dots (7)$$

Sustituyendo en la Ec. 6 y despejando  $M_0$  queda

$$M_0 = \frac{\rho \left[ \frac{W}{2g} (n S_v)^2 \right]}{n \sqrt{\frac{p}{gh}} S_v} + \frac{Wh}{2} \cdot n \sqrt{\frac{p}{gh}} \cdot S_v$$

es decir,

$$M_0 = n \sqrt{p} S_v \sqrt{\frac{h}{g}} \dots\dots\dots (8)$$

de la fig. 5 se deduce que

$$M = F \cdot h + W \cdot X$$

o bien, si no se considera la excentricidad de W y si se hace

$$F = C_s W$$

con  $C_s$  = coeficiente sísmico, quedará

$$C_s = \frac{n \sqrt{p}}{\sqrt{gh}} S_v \dots\dots\dots (9 (a))$$

BIBLIOTECA DE LA  
DIVISION DEL DOCTORADO

Puede verse que el coeficiente sísmico es función del término  $p$  que es desconocido. Si se pudiera determinar la forma en que se verifica el colapso,  $p$  se conocería.

Si se hubiera tomado  $n$  como un factor de amplificación de la energía, se tendría:

$$C_s = \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{gh}} \cdot S_v$$

Se observa que el coeficiente sísmico es función de la raíz cuadrada del factor de seguridad para esta elección. Housner prefiere usar el primer concepto de factor de seguridad.

7.- MARCO SIMPLE .

II.- Considérese ahora una estructura como la de la fig. 8 consti-  
tuida por una barra horizontal de suficiente rigidez y de dos  
columnas que se unen rígidamente a ella y están empotradas en  
el piso. Se puede aplicar el mismo procedimiento anterior, si  
se toma en cuenta que ahora existe la posibilidad de que se for-  
men dos articulaciones por cada columna.

Así se tiene

Si  $M_{0T} = M_{01} + M_{02} = 2 M_0$  que:

$$M_0 = n \sqrt{p} \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{Sv}{4} (w_1 + w_2).$$

$$M_0 = n \sqrt{p} \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{Sv}{4} (w_T) \dots\dots\dots 10$$

que puede generalizarse a un sistema formado con m columnas y poner-  
se en la forma

$$M_0 = n \sqrt{p} \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{Sv}{2} \left( \frac{w_T}{m} \right) \dots\dots 11$$

Siendo  $M_0$  el momento de fluencia en una de las columnas -  
que se suponen de igual capacidad. El coeficiente sísmico resulta --  
ser  $C_s = \sqrt{p} \frac{nSv}{\sqrt{gh}}$  para toda la estructura .... 11 a

Si se trata de un grupo de cuatro columnas situadas como -  
se indica en la planta de la figura 9 (a), cuando el colapso ocurre  
con desalojamiento en una sola dirección y todas las columnas son de  
la misma sección:

$$M_0 = n \sqrt{p} \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{Sv}{2} \frac{w_T}{4} \dots\dots\dots 12$$

con  $C_s$  definido nuevamente como:

$$C_s = \frac{Sv}{\sqrt{gh}} n \sqrt{p} \dots\dots\dots 12 (a)$$

BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
MENDOZA

Pero para la misma planta de fig. 9 (a) se puede tener colapso debido a la rotación alrededor de un punto con lo cual se excitan las dos componentes del movimiento. El punto puede ser una de las columnas, o bien el centro de las rigideces. Se verificará la rotación con respecto a aquel punto que implique el mínimo de energía tal como ocurre con los modos de pandeo de una columna sujeta a carga axial. Considérese el primer caso:

Al excitarse las dos componentes del movimiento, debe sumarse la energía que suministra cada una de ellas. La relación que guardan entre sí ambas cantidades varía grandemente pero no pueden ser iguales, ya que los máximos no ocurrirán simultáneamente y una parte de la energía es consumida mediante rotación del sistema. G.W. Housner considera que en este caso la energía suministrada es el doble, entonces la ecuación 2 se torna como

$$\rho \frac{W_T}{g} (nSv)^2 + \sum_{i=1}^{i=4} \frac{W_i^2 h \phi_i^2}{2} = 2 \sum_{i=1}^{i=4} M_o \phi_i \quad \dots (13)$$

Si la rotación se verifica con respecto a la columna 1, fig.9 (b),

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \theta \\ \phi_2 &= \frac{b}{h} \theta \\ \phi_3 &= \frac{b}{h} \theta \\ \phi_4 &= \sqrt{2} \frac{b}{h} \theta \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

sustituyendo en 13, queda

$$\rho \frac{W_T}{g} (nSv)^2 + \frac{W}{g} h \theta^2 \left(1 + \frac{4b^2}{h^2}\right) = 2 M_o \theta \left[1 + (2 + \sqrt{2}) \frac{b}{h}\right]$$

verificando 5 después de despejar  $M_o$  y sustituir el valor de  $\theta$  que hace mínima la ecuación; se tiene la relación

$$M_o = 1.7 \left( \frac{n S v}{2} \sqrt{p} \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \frac{W}{4} \right) \dots (15)a$$

Sin embargo, tal como se dijo antes, la estructura real toma la energía mediante translaciones combinadas con rotación, y esto

reduce la influencia que tendrá la ocurrencia del colapso por rotación tal como indica la relación 15a.

### 3.- ESTRUCTURAS DE VARIOS PISOS

Para este caso se plantea a continuación una generalización del desarrollo de Housner, para deducir después algunos casos particulares (fig.10).

III.- Una estructura con más de un piso puede alcanzar el colapso - fluyendo plásticamente uno solo de sus pisos, algunos pisos - aislados o bien todos los pisos de la estructura. Considérese una estructura cuya resistencia tenga una variación del tipo:

$$M_k = M_0 \left( 1 + \frac{P Z_k}{H} \right) = M_0 \alpha_k$$

donde  $M_0$  = momento resistente en el último nivel.

$H$  = altura total del edificio

$Z_k$  = altura hasta el nivel  $k$  medida a partir del último nivel.

$P$  = un coeficiente que determina la variación de resistencia.

$M_k$  = momento de fluencia en el nivel  $k$

Se supondrá que todos los niveles tienen el mismo peso y - que cada una de las columnas, soporta la misma proporción de la carga total en cada nivel, esta última hipótesis es análoga a la de suponer que la carga que soporta es proporcional a su capacidad con lo cual puede tomarse a la columna como representativa de todas las del piso.

Tómes: entonces un piso cualquiera  $k$  y supóngase que todos los pisos fluyen simultáneamente y que la energía suministrada es -- proporcional a la resistencia. Entonces,

$$\frac{1}{2} P_k \left( 1 + \frac{P Z_k}{H} \right) \cdot \frac{W}{g} (n S_v)^2 + \frac{1}{2} k w h^2 = 2 M_0 \left( 1 + \frac{P Z_k}{H} \right) \dots (17)$$



siendo  $w =$  peso de un nivel.

haciendo  $(1 + \frac{P_k}{I}) = \alpha$  se obtiene

$$M_k = n S_v \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{k}} \cdot k w \frac{n}{\sqrt{gh}} \sqrt{p_k} \dots\dots\dots (18)$$

El hecho de que figure  $p_k$  se debe a que aún cuando fluyan todos los pisos, pueden hacerlo de diferente manera;

Entonces siendo:  $M_k = V_k \cdot \frac{h}{c}$  se tendrá

$$V_k = n S_v \cdot \sqrt{p_k} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{gh}} \cdot k w \dots\dots\dots (19)$$

es decir que

$$C_s = n S_v \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{p_k} \dots\dots\dots (19)a$$

Se pueden considerar ahora dos casos particulares:

a) El edificio es de sección uniforme. Se tiene entonces

$$C_s = n S_v \frac{\sqrt{p_k}}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \dots\dots\dots (20)$$

puesto que  $\alpha = 1$

Se puede observar que:

BIBLIOTECA DE  
DIVISION DEL DOCTORADO

$$C_s = \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{con} \quad \beta = \frac{n S_v}{\sqrt{gh}} \cdot \sqrt{p_k}$$

O sea que la envolvente de cortantes para diseño será una parábola, que coincide con la obtenida en el análisis elástico de edificios de cortante con sección uniforme (17), cuando  $p_k$  es la misma en todos los pisos.

También puede pensarse como:

$$C_s = \beta (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \dots\dots\dots (21)$$

b) La variación de resistencia es lineal con cero en el último nivel.

En estas condiciones,

$$\alpha = \frac{Zk}{H} \quad \text{o bien} \quad \alpha = \frac{h}{N}$$

siendo  $N$  = número total de pisos. El coeficiente sísmico queda:

$$C_s = nS_v \frac{1}{\sqrt{gn}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{1k} \dots \dots \dots (22)$$

Obsérvese que en este caso la envolvente de cortantes sísmicos es una recta con cero en la azotea y máximo en la base, ya que el coeficiente sísmico es constante en todos los valores de  $k$ .

Hemos partido del supuesto que todos los pisos fluyen simultáneamente, sin embargo se ha encontrado (2) que para una resistencia uniforme,  $\rho = 0$ , se tiene mayor número de articulaciones cerca de la base, en tanto que para la variación lineal (caso b), las articulaciones se forman cerca del último nivel. La condición más conveniente resulta cuando se tiene fluencia práctica en la mayor parte de los pisos o en todos. Esto se consigue para un cierto valor de  $\rho$ . Cuando la estructura es elástica linealmente se encuentra que para un edificio de 5 pisos  $\rho$  debe tomar valores comprendidos entre 1.5 y 3, es decir, aumentar la rigidez de las columnas de los pisos inmediatamente al último - en 0.3-0.6 la resistencia de éste progresivamente. Resulta más complicado hallar una relación de este tipo para el caso elasto-plástico ya que es  $\rho$  dependiente del amortiguamiento, del periodo natural, así como de la resistencia en la base. No obstante parece ser que un buen valor para la variación es del orden de 0.6.

Para tener idea del orden de los valores obtenidos por las ecuaciones antes deducidas supóngase que el factor de fluencia  $p_k$  es el mismo en todos los pisos e igual a  $\frac{1}{2}$ ; ésto es,

$$p_k = \frac{1}{2}$$

que el número total de pisos  $N$  es 10; que la variación de rigidez es -

tal que la resistencia en la base es el doble de la que se tiene en el último nivel, esto es  $\rho = 1$ . Considerese además que el valor de  $S_v$  es 0.5 m/seg que corresponde a un valor medio. La altura de cada nivel será  $h = 3$  m.

El cortante en la base estará dado por

$$V_{\text{base}} = S_v \frac{Nw}{\sqrt{gh}} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{p}$$
$$= \sqrt{p} \cdot n S_v \frac{W}{\sqrt{gh}} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{N}} \quad ; \quad \sqrt{gh} = 5.44 \text{ m/seg.}$$

$$V_{\text{base}} = 0.5 \frac{1.4}{5.44} \frac{1}{3.15} \cdot n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$V_b = 0.0287 \cdot W \cdot n$$

O sea que la estructura alcanzará el colapso si se diseña con un coeficiente de 0.0287 en su base. La envolvente en este caso es tal como se ilustra en la fig. 11.

9.- CARACTERÍSTICAS DEL TERRENO IDEALIZADO.

Se ha dicho antes que las relaciones que se deducirán después serán aplicables a temblores idealizados, es conveniente ahora definir sus características (30) antes de pasar a las ecuaciones.

El movimiento sísmico idealizado está formada por un gran número de impulsos de aceleración cuya distribución en el tiempo puede ser casual o en pequeños intervalos de tiempo con separación constante. Un sólo impulso  $U_i$  puede representarse como:

$$U_i = \int_{t_i - \varepsilon}^{t_i + \varepsilon} \ddot{x}_b dz \quad \dots\dots\dots(23)$$

donde:  $\ddot{x}_b$  ... la aceleración del terreno

$\varepsilon$  = incremento en el tiempo.

En la fig. 12 se ve que  $U_i$ , el impulso  $i$ -ésimo, es el cambio de velocidad en el terreno, llámese  $n$  al número total de impulsos,  $\sigma$  a la dispersión y  $E$  a la esperanza matemática. No existirá desviación sistemática en los valores de  $U_i$  si se cumple que el límite hacia el cual tiende el promedio de  $U_i$ , cuando  $n$  tiende a infinito es nulo, es decir cuando

$$E ( U_i ) = 0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

Para que se cumpla que el número de impulsos que tiende a infinito comprende un gran número de impulsos pequeños, debe verificarse:

$$\sigma^2 ( U_i ) \ll E ( \sum_{i=1}^n U_i^2 ) \quad \dots\dots\dots(25)$$

Se definirá en forma arbitraria la intensidad del sismo mediante la relación:

$$J \propto \sqrt{E ( \sum_{i=1}^n U_i^2 )} \quad \dots\dots\dots(26)$$

es decir como proporcional a la raíz cuadrada de la esperanza de la -

suma de los cuadrados de  $U_j$ .

Se considerará que el temblor es de intensidad constante - por unidad de tiempo. Esto puede representarse como:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{E \left( \sum_{t_1}^{t_2} U_i^2 \right)}{t_2 - t_1} = \Omega^2 (t_1) \dots \dots \dots (27) \text{ a}$$

$$\Omega^2 (t_1) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } t_2 < 0 \\ 0 & \text{cuando } S < t_1 \dots \dots \dots (27) \text{ b} \\ 2k & \text{cuando } 0 < t_1 < S \end{cases}$$

cuando  $S$  es la duración del sismo y  $t_1 < t_2$  de manera que  $\Omega$  es la intensidad por unidad de tiempo.

Designando con  $t$  un tiempo comprendido entre 0 y  $S$  se tiene que el movimiento del terreno se define a partir de la serie de impulsos concentrados de aceleración como:

$$\ddot{x}_b(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \sum_{i=1}^j U_i \delta(t-t_i) & \dots \dots \dots (28) \\ 0 & \text{si } t > S \end{cases}$$

siendo  $\ddot{x}_b$  la aceleración del terreno;  $j$  es tal que  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  y  $\delta$  es la función delta de Dirac, tal que su valor es nulo en todos los puntos diferentes de  $i$  en tanto que vale uno en el punto  $i$ .

Estas son entonces las características de la serie de temblores que se usarán.

10.- DEDUCCION DE LAS ECUACIONES

Considerense inicialmente las vibraciones libres en un sistema como el de la figura 13a. Se desprecia la masa del elemento elástico y se supone que la base que sirve de apoyo al sistema es indeformable. Siempre que la longitud de la barra sea suficientemente grande, se verifica en la masa superior un descenso vertical que es función del desalojamiento horizontal. Ahora, debido a la existencia de una carga axial, las deformaciones horizontales se verán amplificadas en una cierta relación. Se estudia primeramente el caso que corresponde a la existencia de la carga axial y así se pueden considerar dos casos de la oscilación libre:

a).- Si la carga axial es despreciable, se tendrá por la segunda ley de Newton

$$M\ddot{x} = - kx \dots\dots\dots (29)$$

siendo k, la constante elástica de deformación, se puede hacer

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \dots\dots\dots (29) a$$

y el movimiento será armónico del tipo  $x = a \text{sen} \omega t \dots (29) b$

b).- Supóngase que la carga axial suministrada por el peso es considerable; entonces las deformaciones producidas por una carga lateral se ven incrementadas (16, 19) en la relación

$$y = y_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \dots\dots\dots (30)$$

siendo  $y_0$  las deformaciones sin la carga axial P y  $P_{cr}$  la carga crítica ó de pandeo para la estructura; la constante de resorte pasa a ser

$$\bar{k} = k \left( 1 - \frac{P}{P_{cr}} \right) \dots\dots\dots (31)$$

de manera que el elemento elástico posee una rigidez nula cuando

P = P crítica.

Cuando se supone que la masa no desciende y se acepta que las oscilaciones son armónicas, se puede poner en forma análoga a como se hizo en 29:

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\bar{k}}{m} \dots (32) \text{ es con: } \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{1}{Pcr} \dots (32'a)$$

Se demuestra que esta relación es lineal para sistemas isostáticos y que resulta casi lineal para sistemas hiperestáticos (20) con restricciones elásticas en los apoyos. Por esta razón puede afirmarse que es aproximadamente válida para arcos de estructuras.

Pero el descenso de la masa siempre existe, aunque solo sea considerable su influencia cuando las amplitudes son grandes. Se procederá ahora con un poco de más precisión, para definir el descenso de la masa. El descenso se verifica sobre una trayectoria curva.

De la fig. 13 (L) se tiene:

$$Y = \lambda \text{sen } \theta \quad \approx \quad X \theta$$

Cuando en el extremo se aplica una fuerza F, la rotación en el extremo vale:

$$\theta = \frac{F h^2}{2 EI}$$

y el desalojamiento

$$X = \frac{F h^3}{3EI}$$

de manera que

$$\theta = \frac{3}{2} \frac{X}{h}$$

ahora haciendo:  $\phi = \frac{X}{h}$  se tiene  $y = \frac{3}{2} \frac{X^2}{h} \dots (33)$

Ahora la componente de la fuerza de aceleración en la dirección vertical es:

$$\frac{W}{g} \ddot{X} \theta = \frac{3}{2} \frac{W}{gh} \dot{\phi}^2$$

esta fuerza debe sumarse a W. queda entonces

BIBLIOTECA DE LA  
DIVISION DEL DISEÑO

$$P = W + \frac{3}{2} \cdot \frac{W}{gh} \dot{\phi} \phi \quad \dots\dots\dots(34)$$

y la nueva frecuencia del sistema  $\bar{\omega}$  estará dada por :

$$\left( \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^2 = 1 - \frac{W + \frac{3}{2} \frac{W}{gh} \dot{\phi} \phi}{P_{crit.}}$$

Ahora de manera análoga a 22:

$$\ddot{X} = -\bar{\omega}^2 X$$

cuando  $x = a \text{ sen } \bar{\omega} t$  aproximadamente, se tendrá

$$\left( \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^2 = 1 - \frac{W + \frac{3}{2} \frac{W}{gh} \cdot \bar{\omega}^2 X^2}{P_{crit.}}$$

que puede ponerse como:

$$\left( \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^2 = \left( 1 - \frac{W}{P_{cr}} \right) \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \frac{k}{P_{cr}} \frac{X^2}{h}} \quad \dots\dots (35)$$

mediante una transformación algebraica

Para el caso de la figura 13,

$$P_{cr} = 2.48 \frac{EI}{L^2}$$

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

$$\left( \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^2 = \left( 1 - \frac{W}{P_{cr}} \right) \frac{1}{1 + 1.81 \phi^2} \quad \dots\dots\dots(36)$$

La relación 35 es válida también para un marco como el de la fig. 14 cuando están empotradas las columnas y la trabe ofrece una cierta restricción.

Podemos establecer, de acuerdo con la relación 22a, que

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\bar{k}}{M} \quad \dots\dots\dots(37)$$

siendo k una rigidez que toma en cuenta el descenso de la masa, y l carga axial, y aceptar que el movimiento es armónico de frecuencia

$$X = a \text{ sen } \bar{\omega} t.$$



con la diferencia de que ahora  $\bar{w}$  no es constante, sino que varía con la amplitud en cada instante.

II.- INTEGRACION PASO A PASO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES:

Considerese, una ecuación diferencial del tipo:

$$\ddot{X} = f(x, t)$$

y que se conocen como condiciones iniciales:

$$X_0 = X(0)$$

$$\dot{X}_0 = \dot{X}(0)$$

se puede calcular:  $X_1$  y  $X_0$  como:

$$\dot{X}_1 = \dot{X}_0 + \ddot{X} z \quad ; \quad X_1 = X_0 + z \dot{X}, \dots\dots\dots 38$$

siendo  $z$  la separación entre los puntos 0 y 1 sobre el eje del tiempo. O bien, calcular los valores en mitad del intervalo como:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_{0,1} &= \dot{X}_0 + \ddot{X}_0 \frac{z}{2} \\ \bar{X}_{0,1} &= X_0 + \dot{X}_0 \frac{z}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 39a$$

Una vez conocidos los valores en el centro del intervalo, se puede hacer:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= \dot{X}_{0,1} + \ddot{X} z \\ X_1 &= \bar{X} + \dot{X}_0 z + \frac{\ddot{X}}{2} \frac{z^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 39b$$

Los primeros valores corresponden a una aproximación lineal en tanto que 39 b, corresponde a una de segundo grado. Considerese ahora

$$X = A + Bt + ct^2 + Dt^3$$

con lo cual se puede calcular:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= \dot{X}_0 + \frac{z}{2} (\ddot{X}_0 + \ddot{X}_1) \\ X_1 &= X_0 + \dot{X}_0 z + \frac{\ddot{X}_0}{9} z^2 + \frac{\ddot{X}_1}{6} z^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 40$$

después de considerar el significado de los derivados para valuar -

las constantes al principio del intervalo. Esta es una aproximación del tercer grado.

A cada uno de estos valores debe agregarse una pequeña cantidad, llamada el error debido a la " discretización " de la función.

Una vez conocida la derivada segunda de la función, para definir la función, N.M. Newmark (31) ha propuesto otras relaciones definidas a partir de los parámetros  $\beta, \gamma$ . E. Rosenbluth (31 a) ha sugerido otras que implican mejor aproximación para un intervalo de integración más amplio basándose en la analogía que existe entre el eje de una viga, la carga y su deformación elástica con el eje del tiempo, la aceleración y el valor de la posición sucesiva de X.

También puede resolverse el problema, sustituyendo las derivadas por sus equivalentes en términos de diferencias finitas.

Procederemos ahora a la deducción de las ecuaciones diferenciales. Bajo un movimiento sísmico, la estructura puede encontrarse en una de las tres siguientes zonas ( Fig. 15 ).

- a) zona de carga permanente elástica
- b) deformación plástica
- c) zona de descarga rigurosamente elástica
- d) zona de carga permanente elástica.

BIBLIOTECA DE LA  
DIVISION DEL DOCTORADO

La ecuación de Lagrange (5), cuando no existe amortiguamiento ni carga exterior al sistema es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} - (Y - X) = 0 \quad \dots\dots(41)$$

siendo:

- K = energía cinética
- V = energía potencial
- $q_j$  = coordenada generalizada  
el punto sobre  $q_j$  indica primera derivada con respecto al tiempo.

Cuando en la posición de equilibrio se cumple para el sistema de coordenadas que:

- a).- El nivel de energía potencial es nulo y
- b).-  $q_j = 0$  con  $j= 1, 2 \dots n$ ; la ecuación de Lagrange se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

ahora

$$K = \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

pero

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{h} \quad ; \quad \dot{y} = 3 \frac{x}{h} \dot{x}$$

es decir:

$$K = \frac{M}{2} \dot{x}^2 \left( 1 + 9 \frac{x^2}{h^2} \right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} \left( 1 + \frac{9x^2}{h^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) = M \ddot{x} \left( 1 + 9 \frac{x^2}{h^2} \right) + M (\dot{x})^2 \cdot \frac{18x}{h^2}$$

Se aceptará que aproximadamente:  $V = \frac{\bar{k}x^2}{2}$

Siendo  $\bar{k}$ , de acuerdo con 37, una función de  $x$ . Al verificar la derivación indicada por la ecuación de Lagrange se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \bar{k}x$$

Al sustituir en la ecuación de Lagrange se deduce

$$M \ddot{x} \left( 1 + \frac{9x^2}{h^2} \right) + M (\dot{x})^2 \left( \frac{18x}{h^2} \right) + \bar{k}x = 0$$

usando en lugar de  $x$ , la variable parametrica  $\phi = \frac{x}{h}$

$$M \ddot{\phi} (1 + 9\phi^2) + 18M\phi (\dot{\phi})^2 + \bar{k}\phi = 0$$

que también puede ponerse como:

$$\ddot{\phi} = - \frac{\phi [18 \dot{\phi}^2 + \bar{\omega}^2]}{(1 + 9\phi^2)} \quad \dots\dots\dots (43)$$

Puede verse que si se desprecian las cantidades  $\phi^2$  del denominador y  $\dot{\phi}^2$  del numerador por ser de segundo orden, la ecuación queda

$$\ddot{\phi} = - \bar{\omega}^2 \phi$$

Que tiene la misma forma que la que corresponde a vibraciones libres, cuando no se consideran los efectos adicionales que aquí se han introducido.

Si existiera el amortiguamiento, esta ecuación sería

$$\ddot{\phi} = - \bar{\omega}^2 \phi - \frac{c}{M} \dot{\phi}$$

siendo  $c$  la constante de amortiguamiento viscoso, De manera análoga a como se ha procedido en esta última relación, se puede introducir en la 43 el amortiguamiento y modificarla como sigue:

$$\ddot{\phi} = - \left[ \frac{\phi (18 \phi^2 + \bar{\omega}^2) + \frac{c}{M} \dot{\phi}}{1 + 9 \phi^2} \right] \dots\dots\dots 44$$

Una vez conocida la derivada segunda, es posible deducir la derivada primera y la función mediante las relaciones siguientes tal como se ha descrito antes en el art. 11.

- a) 
$$\dot{\phi}_{i+1} = - \left\{ \frac{\phi_i [18 (\dot{\phi}_i^+)^2 + \bar{\omega}_i^2] + \frac{c}{M} (\dot{\phi}_i^+)^2}{(1 + 9 \phi_i^2)} \right\}$$
- b) 
$$\dot{\phi}_{i+1}^- = \dot{\phi}_i^+ + \dot{\phi}_{i+1}^- \cdot \tau$$
- c) 
$$\dot{\phi}_{i+1}^+ = \dot{\phi}_{i+1}^- + \frac{\omega_{i+1}}{h}$$
- d) 
$$\phi_{i+1} = \phi_i + (\dot{\phi}_{i+1}^- + \dot{\phi}_{i+1}^+) \frac{\tau}{2} \dots\dots\dots 45$$

Este grupo de ecuaciones tiene como límite de aplicación el valor de  $\phi$  para el cual se alcanza la fluencia de la sección crítica. Entre cada par de impulsos no existe acción externa.

En las ecuaciones anteriores se implica que la velocidad en la proximidad de un punto, tiene dos valores diferentes; esto se debe a que

la velocidad en el terreno sufre un cambio instantáneo que modifica también instantáneamente la velocidad de la estructura. Se concluye que la configuración es como en la fig. 16.

b) En el rango plástico. Si una estructura del tipo del de la fig.13 a - se ve sujeta a la acción de un cambio instantáneo de velocidad puede ocurrir la fluencia plástica en secciones intermedias entre la masa y la base (23). La posición de la articulación depende de la relación que existe entre la masa concentrada y la masa del elemento elástico, así como de la duración del impulso. Se considerará sin embargo, que la articulación se forma en la base. Una vez alcanzada la fluencia en la sección de la base, para considerar a la deformación plástica puede desprejarse el efecto de las deformaciones elásticas y considerar el cuerpo como rígido girando al rededor de la base.

Si la masa se encontrase unida a la barra tal como se indica en fig. 17a. aplicando el principio de D' Alambert en la dirección del eje  $\xi$  normal al eje de la barra, se tendría

$$-\frac{M_0}{h} + Mg \text{sen } \phi - \ddot{\phi} h M - \frac{c \dot{\phi}}{h} = 0 \quad \dots\dots (45)a$$

siendo  $Mg \text{sen } \phi$ , la proyección de W en la dirección del eje.

En la relación anterior, se ha desprejado el efecto de la inercia rotacional, además de las deformaciones del terreno y las de cortante. Pero la masa en realidad ha girado la cantidad  $\theta$ , al menos en el momento de iniciarse la fluencia, por lo tanto la componente en la dirección del eje vale  $Mg \text{sen } \theta$

Ahora después de iniciada la fluencia (fig 17-b), el ángulo vale  $(\theta + d\theta)$  de manera que deberá tomarse la componente como:

$$Mg \text{sen } (\theta + \phi') \quad \text{siendo} \quad \phi' = \phi - \phi_{FL} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{3}{2} \phi$$

$$Mg \text{sen } (\frac{3}{2} \phi + \phi - \phi_{f1}) = Mg \text{sen } (\frac{5}{2} \phi - \phi_{f1})$$

la ec. 45 se vuelve:

$$-\frac{M_0}{h} + Mg \left[ \frac{5}{2} \phi - \phi_{f1} \right] - \dot{\phi} h M - \frac{c \dot{\phi}}{h} = 0 \dots\dots(45) b$$

de donde se puede despejar

$$\ddot{\phi} = -\frac{M_0}{M h^2} + \frac{g}{M} \operatorname{sen} \left( \frac{5}{2} \phi - \phi_{f1} \right) - \frac{c \dot{\phi}}{h} \dots\dots(45) c$$

La serie de ecuaciones que debe aplicarse es

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_{i+1} &= -\frac{M_0}{M h^2} + \frac{g}{h} \operatorname{sen} \phi_i - \frac{c \dot{\phi}_i^+}{M} \\ \dot{\phi}_{i+1}^- &= \dot{\phi}_i^+ + \dot{\phi}_{i+1}^- \omega \\ \phi_{i+1} &= \phi_i + \frac{1}{2} \omega (\phi_i^+ + \phi_{i+1}^-) \end{aligned} \right\} \dots\dots(46-I)$$

modificándose únicamente el valor de  $\phi_{f1}$  porque debe tomarse la proyección del cambio instantáneo de velocidad; es decir:

$$\dot{\phi}_{i+1}^+ = \dot{\phi}_{i+1}^- - \frac{U_{i+1} \cos \phi_{i+1}}{h}$$

Las ecuaciones (46-I) son validas, hasta el momento en que la velocidad cambia de signo ya que en este momento el desalojamiento alcanza un máximo o un mínimo y empieza a disminuir en valor absoluto.

c) Descarga elástica.

En el rango de descarga elástica debe emplarse la ecuación 41 ya que el nivel de energía potencial es diferente de cero.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial}{\partial q_j} (V-K) = 0 \dots\dots\dots(41)$$

de manera análoga a como se procedió en el rango elástico (a)

$$K = \frac{M}{2} (\dot{X})^2 \left( 1 + \frac{9X^2}{h^2} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) = M \ddot{X} \left( 1 + \frac{9X^2}{h^2} \right) + M (\dot{X})^2 \cdot \frac{18X}{h^2}$$

Sólo que ahora

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{\partial K}{\partial X} = \frac{qX}{\eta^2} M (\dot{X})^2$$

También

$$V = \frac{1}{2} \bar{k} (X_p - X)^2$$

siendo  $x_p$  el valor para el cual se inicia la descarga

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\partial V}{\partial X} = -\bar{k} (X_p - X)$$

Substituyendo en 41

$$M \ddot{X} \left(1 + \frac{qX^2}{h^2}\right) + M(\dot{X}) \cdot \frac{18X}{h^2} - \frac{qX}{h^2} M (\dot{X})^2 - \bar{k} (X_p - X) = 0$$

y despejando

$$\dot{\phi} = - \left[ \frac{q(\phi)^2 \phi - \bar{\omega}^2 (\phi_p - \phi)}{1 + q\phi^2} \right]$$

Introduciendo nuevamente el amortiguamiento de la misma manera que en 46

$$\dot{\phi} = - \left[ \frac{q(\phi)^2 \phi - \bar{\omega}^2 (\phi_p - \phi) + \frac{c}{M} \dot{\phi}}{1 + q\phi^2} \right]$$

y la serie de ecuaciones que se usará en este caso es

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_{i+1} &= - \left\{ \frac{q(\phi_i^+)^2 \phi_i - \bar{\omega}_i^2 (\phi_p - \phi_i) + \frac{c}{M} \dot{\phi}_i^+}{1 + q\phi^2} \right\} \\ \dot{\phi}_{i+1}^- &= \dot{\phi}_i^+ + \dot{\phi}_{i+1}^- \tau \\ \dot{\phi}_{i+1}^+ &= \dot{\phi}_{i+1}^- + \frac{u_{i+1}}{h} \\ \phi_{i+1} &= \phi_i + (\dot{\phi}_{i+1}^- + \dot{\phi}_{i+1}^+) \frac{\tau}{2} \end{aligned} \right\}$$

El límite de validez de estas ecuaciones para la primera excursión se alcanza cuando

$$\phi = \phi_p - 2\phi_{FL}$$



siendo  $\phi_{Fi}$  el valor anotado antes.

Para la segunda excursión, deberá cambiarse el valor de  $\phi_p$ .  
 II.- Tratándose del marco de la fig. 14 la iniciación de la fluencia en cada uno de los puntos donde es posible la formación, ocupa un lugar en el tiempo, es posible seguir el comportamiento paso a paso durante la integración en cuyo caso se modificará el diagrama de esfuerzo-deformación.

Si se considera que todos los puntos fluyen simultáneamente, se podría aplicar el grupo de ecuaciones que corresponde a carga - elástica y descarga, modificándose únicamente el grupo correspondiente al rango plástico para tenerse como:

$$\ddot{\phi}_c = - \frac{m M_0}{M h^2} + \frac{g}{h} \operatorname{sen} \phi_c - \frac{c \dot{\phi}_c}{M}$$

designando con  $m$  el número de articulaciones posibles (dos por cada columna).

#### CONCLUSIONES.

Se han desarrollado expresiones generales para la solución numérica del problema de estructuras sujetas a movimientos sísmicos reales o idealizados, haciendo intervenir el comportamiento elasto-plástico del material que constituye la estructura, el pandeo y el efecto del descenso de la masa durante el movimiento, con el propósito de obtener coeficientes sísmicos para diseño que tiendan a ser realistas.

La generalización presentada para la determinación del coeficiente sísmico en edificios de varios pisos con base en el criterio de la energía de deformación suministra una manera cualitativa de estimar el daño causado por sismo.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- K. Kanai., "Examination of the assumption of the concentrated mass in the vibration of framed structure" (Rahmen) Earth - - quake Research Institute, Tokyo University.
- 2.- G. N. Bycroft., "Yield displacements in multistory aseismic - design" ., Boletín de la Seismological Society of América.
- 3.- R. L. Jennings and N. M. Newmark., "Elastic response of multi story shear beam type structures subjected to strong ground - motion"., Segundo Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, - - Tokyo (1960).
- 4.- J. A. Blume "Structural dynamics in earthquake resistant de- sign" Trans. A.S.C.E. Vol.125 (1960).
- 5.- G. L. Rogers "Dynamics of framed structures". Jnon Wiley and Sons, Inc. New York (1959).
- 6.- J. M. Biggs., "Efectos de las fuerzas horizontales en los edi ficios"., ciclo de conferencias en la Escuela Nacional de - - Ingeniería., U.N.A.M. (1959).
- 7.- Rodriguez Caballero M., Tesis Profesional, Escuela Nacional - de Ingeniería., U.N.A.M. (1952).
- 8.- Goodman. L. E., Rosenblueth, E. y Newmark N. M. "Aseismic de- sign of firmly founded elastic structures". Trans. ASCE., Vol 120 (1955).
- 9.- I. L. Korchninsky. "The design of flexible structures for sísmic Loads"., Translations in earthquake engineering 10. Earth- quake Engineering Research Institute (1960).
- 10.- A. Martínez M., Tesis profesional., Escuela Superior de Inge- niería y Arquitectura., I.P.N. (1961).
- 11.- G. A. Housner "The Plastic Failure of frames during earth- -- quakes" Segundo Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica. Tokyo (1960).
- 12.- E. Rosenblueth. "Teoría estadística de las respuestas sísmi- cas". Revista Mexicana de Física 1, 3, 1955. pags. 193, 203.
- 13.- J. Penzien. "Elasto-plastic response of idealized multistory - structures subjected to a strong ground motion", Segundo Con- greso Mundial de Ingeniería Sísmica, Tokyo (1960).
- 14.- J. A. Blume., "A reserve energy technique for the earthquake resistance design"., Segundo Congreso Mundial de Ingeniería - Sísmica, Tokyo (1960).
- 15.- G. V. Berg., E. S. Encarnades "Energy absorption by structures - in earthquakes". Segundo Congreso Mundial de Ingeniería Sí- mica, Tokyo (1960).

- 16.- G. W. Housner "Limit design of structures to resist earthquakes" Primer Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, - - Berkeley (1956).
- 17.- E. Rosenblueth. "Estructuras a prueba de temblores cimentadas sobre terreno firme" Ediciones I. C. A. Serie B, No.17 Noviembre 1954.
- 18.- S. Timoshenko "Theory of elastic stability", Mc Graw Hill Book Company, Inc. New York., 1936.
- 19.- N. M. Newmark., "Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads". Trans. ASCE., Vol. 108 (1943).
- 20.- D. Burgreen "End Fixity effect on vibration and instability" Procs. ASCE (Eng'g Mechanics Div'n) Dec. 1960.
- 21.- E. Rosenblueth "apuntes de clase del curso sobre "aplicaciones de análisis estructural" Div. del Doctorado F. de I U. N. A. M. 1960.
- 22.- S. Crandall., "Engineering Analysis" Mc Graw Hill Book - -- Company., Inc.- 1956.
- 23.- P. G. Hodge., "Plastic analysis of structures" Mc Graw-Hill Book Co. Inc. 1959.
- 24.- E. Rosenblueth. "algunas aplicaciones de la teoría de probabilidades al diseño sísmico" Rev. Ingeniería Oct. 1957.
- 25.- E. Rosenblueth. "Diseño sísmico de las estructuras elásticas" Ediciones ICA, Serie B. No. 13 Octubre 1952.
- 26.- Norris C.H., Hansen R.J., Holley M.J.Jr., Siggs J. M., - -- Namyet. S., Minami. J. K., "Structural design for dynamics loads" Mc Graw-Hill book Co. New York 1959.
- 27.- N. M. Newmark " An Eng'g meeting app' to blast resistant design"., Trans. A.S.C.E. vol. 121. 1955.
- 28.- G. N. Bycroft., "Analogue computer techniques in aseismic - design" Segundo Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, - - Tokyo, 1960.
- 29.- J. J. Bustamante., "Reglamento del S. F. - Estudio comparativo entre los métodos estático y dinámico de análisis sísmicos". Rev. Ingeniería Abril 1961.
- 30.- E. Rosenblueth y J.J. Bustamante "Distribution of simple -- structure response to earthquakes" Artículo inédito.

- 31.- N. M. Newmark.- "A method of computation for structural dynamics" Procs. A. S. C. E., Eng. Mech. Div. July 1959.
  - 31A- D. Rosenbluth.- Discusión al artículo anterior, Procs. A. S. C. E. Eng. Mech. Div. Jan. 1960.
  - 32.- A. L. L. Baker., "Ultimate load theory for concrete -- frame analysis"., Procs. A. S. C. E. Structural Div. -- Nov. 1959.
-

Fig. 1

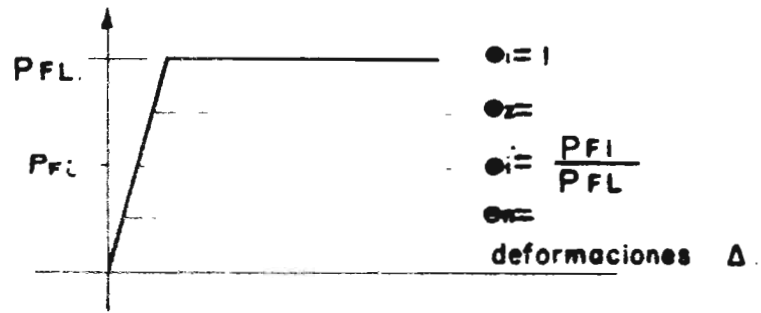


Fig. 4

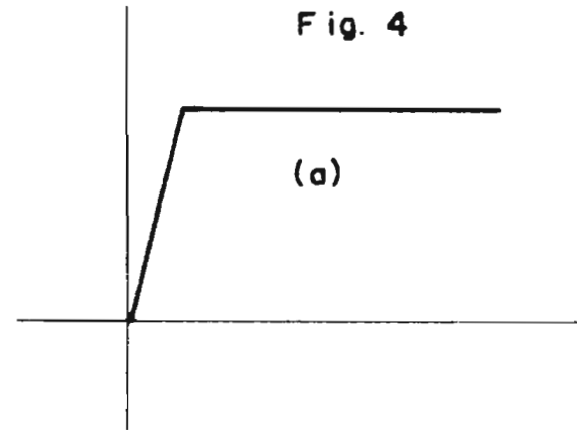
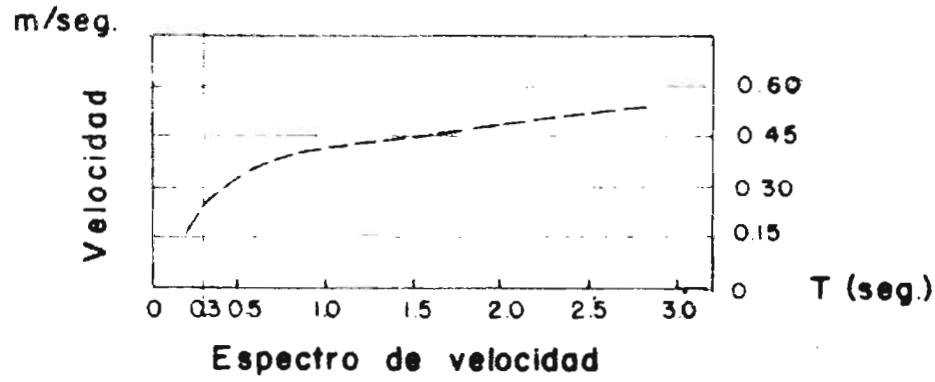
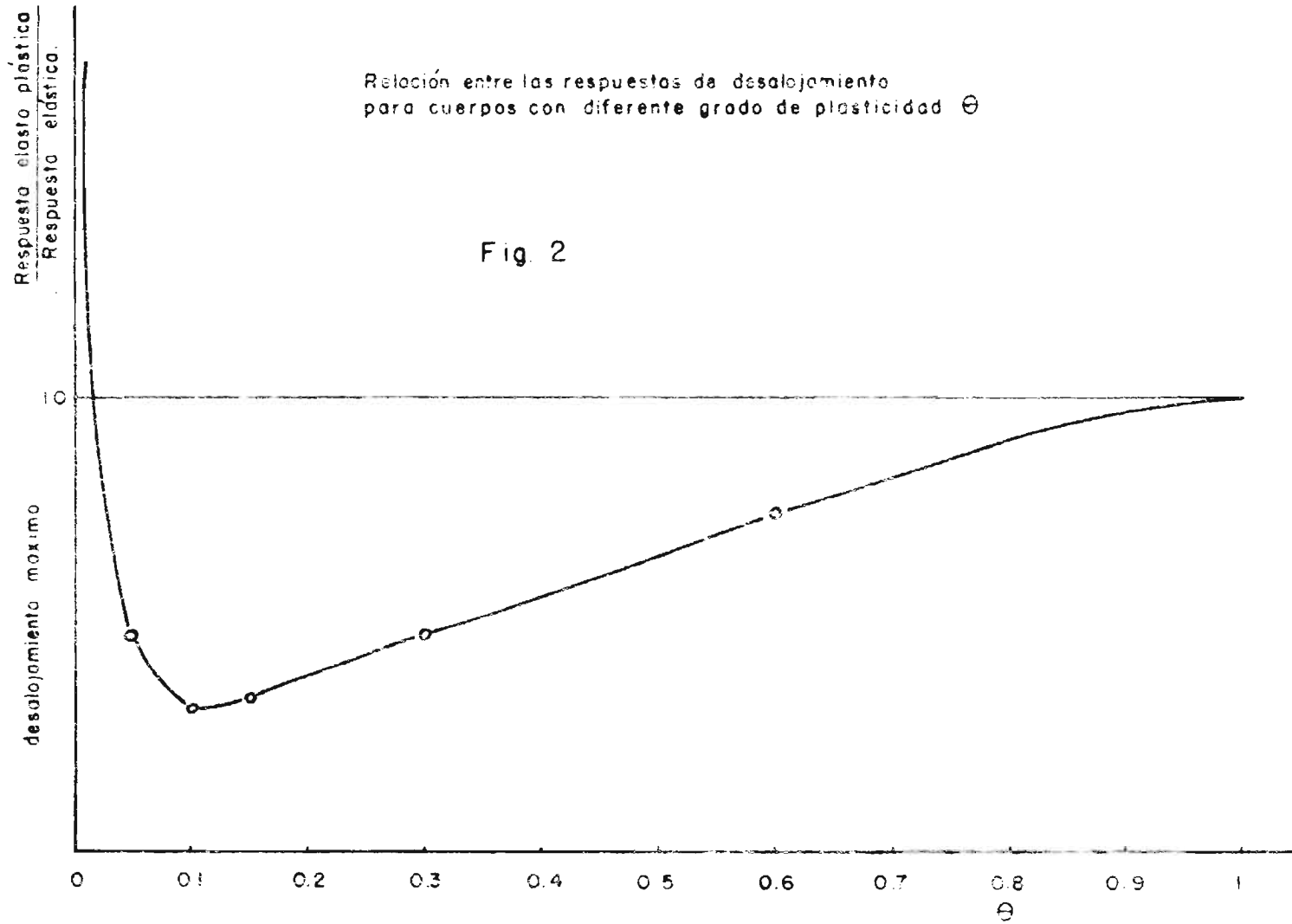


Fig. 3



$$\left( \frac{\text{Resp. Elasto - Plástica}}{\text{Resp. Elástica}} \right) \text{desalojamiento}$$



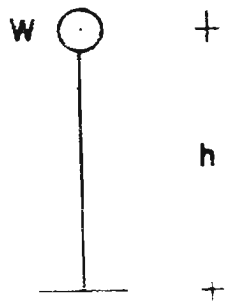


Fig. 5

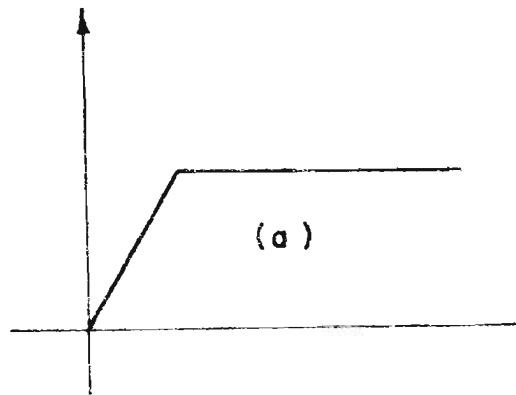


Fig. 6

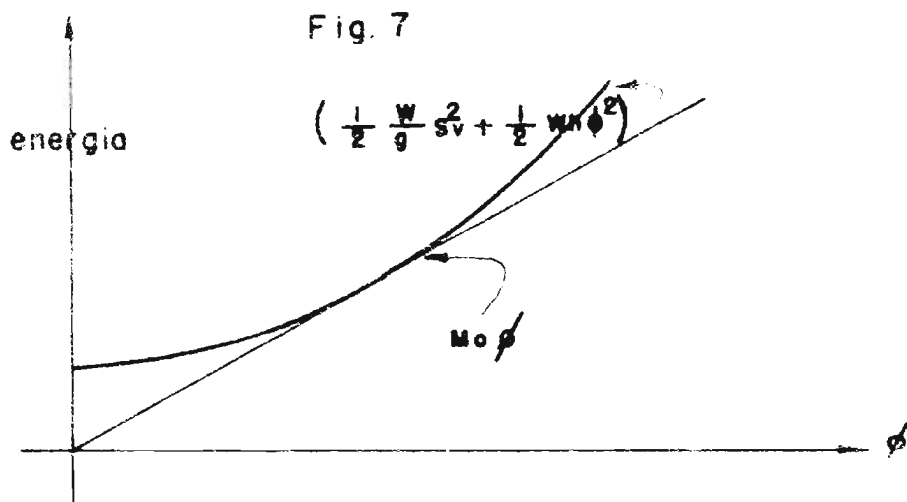
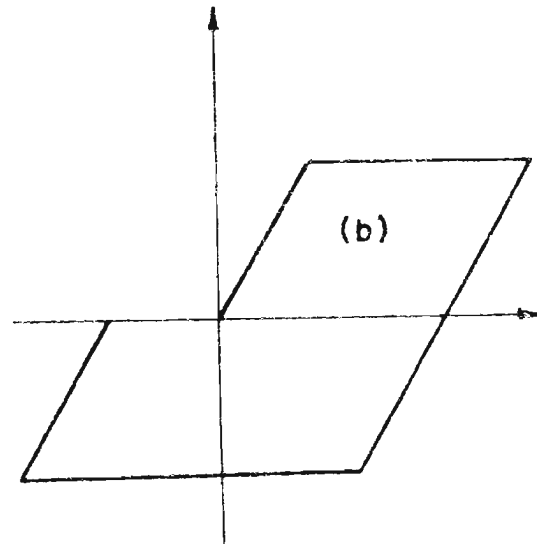


Fig. 7

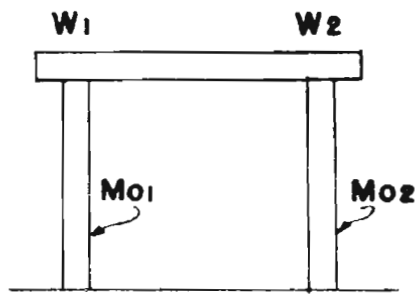


Fig. 8

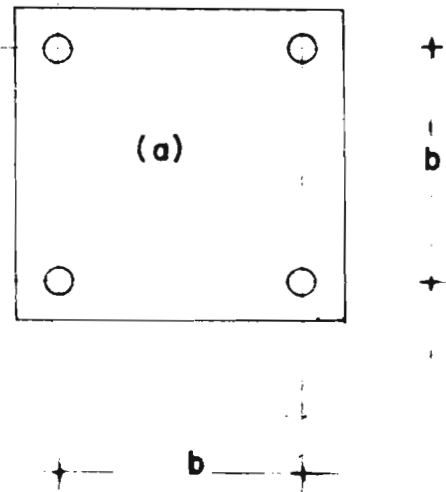
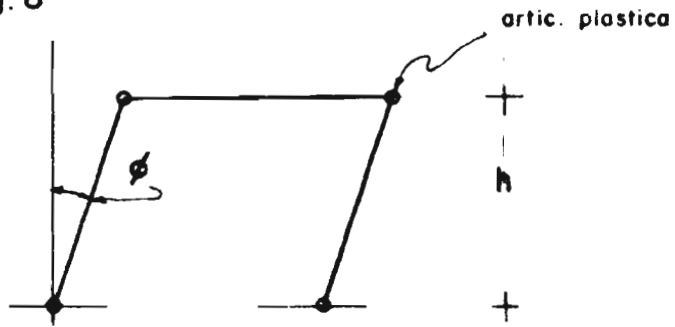
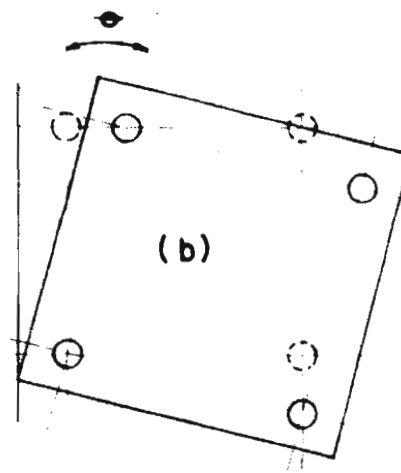


Fig. 9





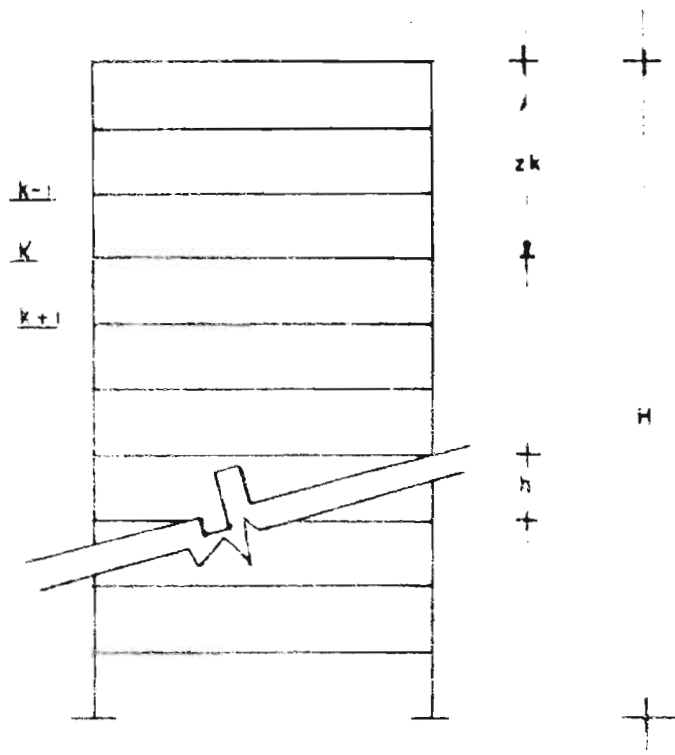


Fig 10

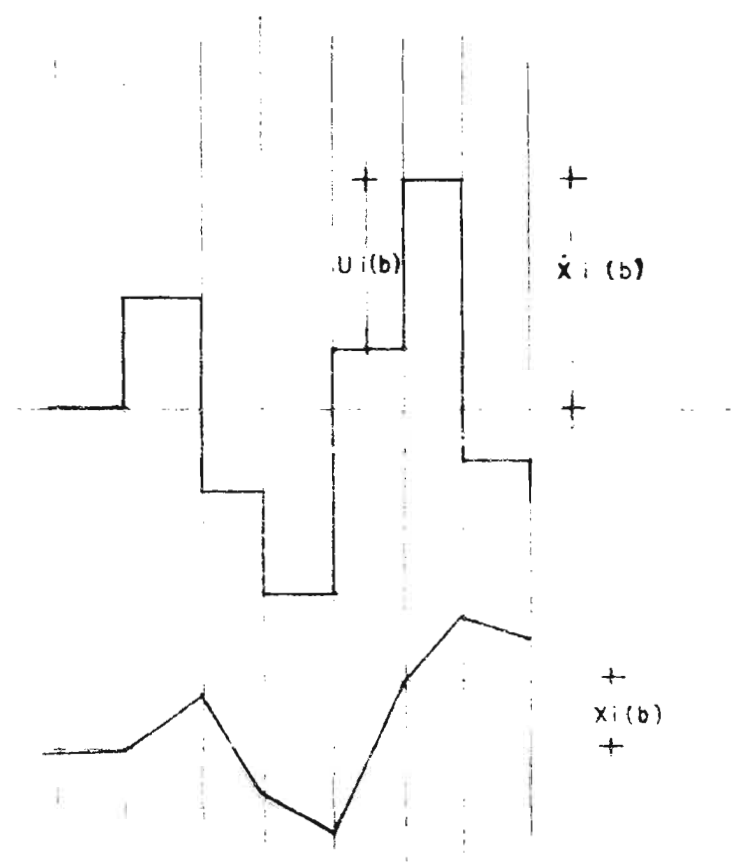


Fig 12

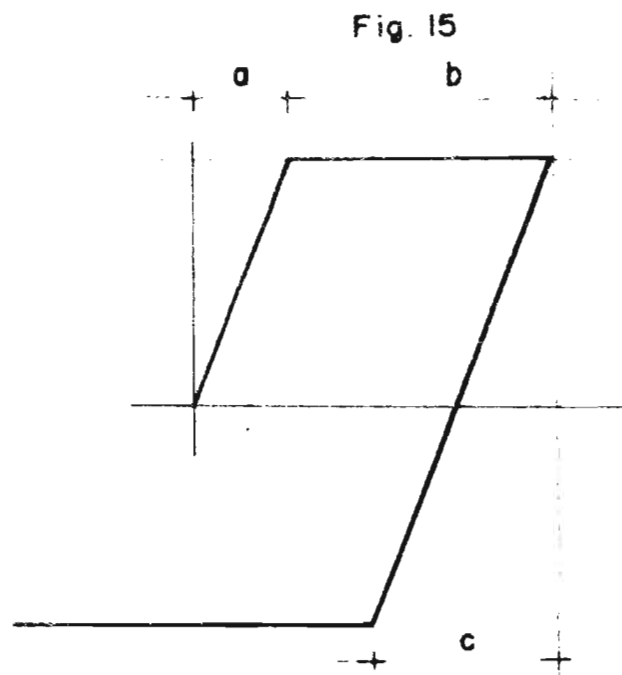
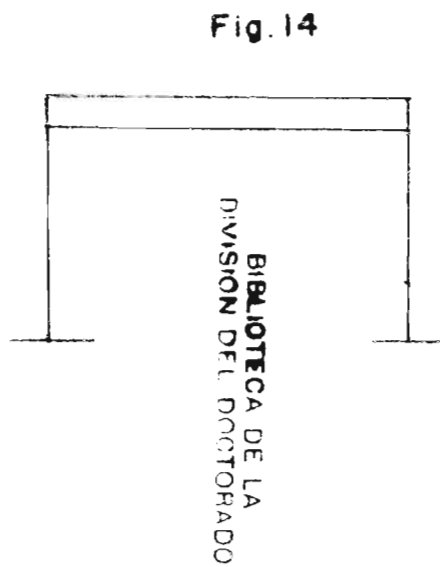
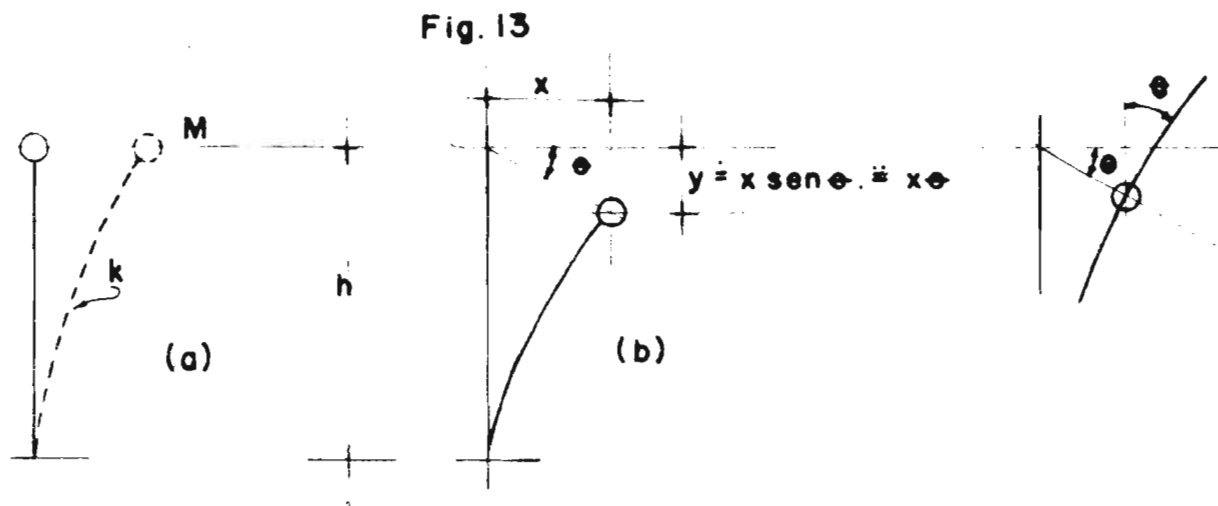


Fig. 16

