

T-91  
R  
DES

01149  
0281

118

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DEL DOCTORADO

247

ALGUNOS METODOS DE LA MECANICA DE SUELOS  
BASADOS EN LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD

Tesis para obtener el grado de Maestro  
en Ingenieria (especialidad en Mecáni-  
ca de Suelos) que presenta el Ingeniero  
Civil Daniel Reséndiz Núñez.

1962

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

I

	Pág.
Titulos de tablas y figuras	( III )
<b>INTRODUCCION</b>	
<b>I. GRADO DE VALIDEZ DE LAS HIPOTESIS</b>	<b>3</b>
<b>II. ALGUNOS CONCEPTOS DE LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD APLICABLES EN MECANICA DE SUELOS</b>	<b>17</b>
1. Relaciones esfuerzo-deformación	17
2. Potencial plástico	22
3. Teoremas de colapso plástico y análisis límite	25
<b>III. IMPLICACIONES DE LA PLASTICIDAD EN SUELOS</b>	<b>30</b>
1. Expansión volumétrica o dilatación	30
2. Líneas de falla permisibles	35
3. Función de disipación plástica	36
<b>IV. APLICACIONES</b>	<b>41</b>
1. Estabilidad de taludes verticales	41
2. Estabilidad de taludes verticales con grietas de tensión	45
3. Presión pasiva y presión activa sobre muros de retención	50
A. Presión pasiva	51
B. Presión activa	53
C. Fallas de zona en problemas de presión de tierra	55

	ii
	Rig.
4. Capacidad de carga de cimentaciones	58
V. CONCLUSIONES	62
AGRADECIMIENTOS	67
VI. REFERENCIAS	68
FIGURAS Y TABLAS	70

	Títulos de tablas y figuras	
		Pág.
<b>Fig. 1</b>	Material elastoplástico perfecto	70
<b>Fig. 2</b>	Material elastoplástico con endurecimiento por deformación	70
<b>Fig. 3</b>	Superficie de fluencia del criterio de von Mises generalizado	70
<b>Fig. 4</b>	Superficie de fluencia del criterio Mohr-Coulomb generalizado	70
<b>Fig. 5</b>	Corte según un plano octaédrico de las superficies de fluencia Mohr-Coulomb, Tresca y von Mises para material con $\phi = 0$	71
<b>Fig. 6</b>	Estado de esfuerzos cilíndrico	71
<b>Fig. 7</b>	Incrementos de esfuerzos principales e incrementos correspondientes de la presión de poro	71
<b>Fig. 8</b>	Deslizamiento simple	72
<b>Fig. 9</b>	Ley de Coulomb	72
<b>Fig. 10</b>	Líneas de falla permisibles	72
<b>Fig. 11</b>	Disipación de energía	72
<b>Fig. 12</b>	Distribución de esfuerzos estáticamente admisible en un talud vertical	73
<b>Fig. 13</b>	Mecanismo de colapso cinemáticamente admisible en un talud vertical	73
<b>Fig. 14</b>	Criterio de fluencia para suelo incapaz de tomar tensión	73
<b>Fig. 15</b>	Mecanismo cinemáticamente admisible para un talud vertical con grieta de tensión	74

<b>Fig. 16</b>	<b>Distribución de esfuerzos estáticamente admisible con variación lineal de la presión</b>	<b>74</b>
<b>Fig. 17</b>	<b>Mecanismo de falla en presión pasiva</b>	<b>74</b>
<b>Fig. 18</b>	<b>Fronteras de <math>p/c</math> para zapata corrida</b>	<b>75</b>
<b>Tabla I.</b>	<b>Fronteras de <math>p/c</math> para zapata rectangular</b>	<b>76</b>

## INTRODUCCION

Es indudable que antes de que el comportamiento y resistencia de los suelos puedan interpretarse por medio de un modelo matemático general y antes de que los problemas prácticos de la Mecánica de Suelos puedan resolverse por el uso de una teoría consistente aplicable a todos ellos, habrá de realizarse un amplio trabajo de investigación teórica y experimental. Dos de los intentos más prometedores en este sentido son por una parte la interpretación realística del comportamiento de los suelos y por otra la consideración de los problemas de aplicación de la Mecánica de Suelos, con base en la Teoría de la Plasticidad; esto último es el objeto del presente trabajo.

Para tratar tales problemas (estabilidad de taludes, presión de tierra y capacidad de cimentaciones) utilizando los resultados obtenidos por la Teoría de la Plasticidad, el suelo se reemplaza por un material ideal con comportamiento elástico hasta cierto nivel de esfuerzos a partir del cual ocurre la falla o flujo plástico con cierta ley (material elastoplástico perfecto o material elastoplástico con endurecimiento por deformación, Figs. (1) y (2)).

Al tratar el problema de este modo surgen dos cuestiones igualmente interesantes.

a) Grado de validez de la hipótesis de que el suelo es un material idealmente plástico.

b) Implicaciones de tal hipótesis.

La importancia de estos dos aspectos del problema parece evidente si se con-

sidera que cualquier teoría debe ser al menos consistente consigo misma, es decir, no debe encerrar contradicciones entre sus propias hipótesis; tal rigor puede conducir a soluciones muy complejas, pero permite concluir algo con certeza: si no hay concordancia entre la realidad física y las predicciones de una teoría auto-consistente, las hipótesis en que se basa tal teoría necesitan reexaminarse e independientemente de la dificultad para llegar a soluciones exactas, siempre puo de obtenerse un mejor conocimiento y una interpretación más correcta del compor tamiento de los suslos.

## I. GRADO DE VALIDEZ DE LAS HIPOTESIS

Considerar a los suelos como materiales idealmente plásticos en el sentido indicado arriba lleva implícitas las hipótesis generales de la Teoría de la Plasticidad que a continuación se señalan:

1. No se consideran efectos con el tiempo. En Mecánica de Suelos se puede hablar de los efectos del tiempo desde diversos puntos de vista, todos ellos íntimamente ligados al hecho de que el suelo es un sistema constituido por tres fases (sólidos, agua y gases) o en ciertos casos por dos (sólidos y agua), lo que ocasiona por una parte un comportamiento viscoso dando lugar a que las gráficas esfuerzo-deformación dependan de la velocidad de aplicación de las cargas, y por otro lado haciendo que las características de resistencia de las masas de suelo cambien al transcurrir el tiempo (principalmente en suelos cohesivos) debido a la disipación paulatina de la presión en el agua de los poros (consolidación). Esta última forma de dependencia del tiempo puede tomarse en cuenta de la manera usual considerando el estado de trabajo más desfavorable a que estará sometido el suelo durante el período de vida de la estructura teniendo en cuenta por ejemplo que la resistencia al cortante aumenta al consolidarse la masa de suelo y disminuye si está expuesta a expansión. Además de esto, el parámetro que representa la "cohesión" también cambia con el tiempo debido a procesos físico-químicos no bien definidos que alteran las fuerzas intermoleculares (o entre partículas pequeñas) a las que se debe la "cohesión"; no parece importante ni práctico introducir este factor en el desarrollo de una teoría en Mecánica de Suelos, pero debe tomarse en cuenta en la inter-

pretación de los fenómenos de flujo ("creep") o de relajación que ocurren en el campo o en el laboratorio y que pueden deberse a la disminución paulatina de la "cohesión" del suelo.

Por lo que se refiere al otro tipo de influencia del tiempo mencionado, Casagrande y Shannon han demostrado experimentalmente que en las arenas la influencia de la velocidad de carga es despreciable tanto en la resistencia máxima como en la forma de las curvas de esfuerzo-deformación, en las pruebas de laboratorio ordinarias (Ref. 1).

En los suelos arcillosos, con ser más notable este fenómeno, puede también considerarse despreciable según se deduce de las experiencias realizadas por Habib (Ref. 2).

Consecuentemente, para los fines prácticos puede decirse que la influencia del tiempo en la resistencia al esfuerzo cortante de los suelos tanto granulares como "cohesivos" es en general despreciable, o bien pueden hacerse consideraciones cualitativas para tomarla en cuenta.

2. El material es homogéneo o isotrópico. Esta hipótesis puede hacerse menos restrictiva a expensas de hacer más complicados los desarrollos de la teoría, introduciendo ciertas condiciones simples de anisotropía o heterogeneidad en los casos en que se juzgan convenientes (por ejemplo, en suelos estratificados o en masas con propiedades diferentes en las direcciones horizontal y vertical); pero en general es satisfactoria para materiales que se han remoldado bien al trabajarlos, excepto quizá en las arcillas, en que la anisotropía producida por consolidación es

de importancia, pudiendo tomarse en cuenta como se mencionó arriba.

Desde el punto de vista teórico, suponer que el material es homogéneo o isotrópico conduciría a resultados contrarios a la seguridad pues implica suponer que la fluencia del material sólo es provocada por el estado de esfuerzos desviadores ya que un estado esférico de esfuerzos no produce distorsiones; pero si el material es heterogéneo y/o anisotrópico los esfuerzos hidrostáticos también producen distorsiones y por tanto su efecto es adelantar el colapso plástico. Sin embargo debe tenerse en cuenta que los parámetros que definen la forma de la superficie de fluencia se determinan experimentalmente y por tanto ya se han tomado en cuenta implícitamente al obtenerlos los efectos de las posibles pequeñas desviaciones con respecto a las condiciones ideales de isotropía y homogeneidad. Así, la hipótesis de homogeneidad e isotropía estadísticas puede ser poco apropiada para la interpretación de los fenómenos intergranulares básicos del comportamiento de los suelos, pero es una buena aproximación para los objetos de aplicación de la teoría a problemas macroscópicos particulares.

3. No se consideran fenómenos de histéresis en las gráficas esfuerzo-deformación. Dentro de estos fenómenos de histéresis se encuentra el efecto Bauschinger que es de gran importancia en otros materiales (por ejemplo, metales) pero que tratándose de suelos no tiene mucho sentido en virtud de que su comportamiento en pruebas de tensión no es el de un material plástico, sino el de uno frágil, y por otra parte la capacidad de los suelos para trabajar a la tensión no se utiliza por ser muy pequeña.

Otros ciclos de histeresis, por ejemplo en la curva  $e-p$  pueden tratarse dentro del marco de la Teoría de la Plasticidad considerando cada vez procesos de carga solamente o procesos sólo de descarga interpretando cada tramo de la curva como una ley esfuerzo-deformación particular (Ref. 3).

Por otro lado los trabajos de Hvorslev (1937) y de Gibson (1953) parecen mostrar que en la resistencia al cortante de los suelos cohesivos, saturados y remoldeados el esfuerzo máximo en la falla es una función del esfuerzo normal efectivo en el plano de falla y de la relación de vacíos en las proximidades de ese plano en el instante de la falla, y que esta función es independiente de la historia de esfuerzos de la muestra (Ref. 4).

4. No se consideran efectos de temperatura. Habib considera que en general la influencia directa de la temperatura en el comportamiento de los suelos es despreciable en vista de que el rango de variación de la temperatura en la naturaleza es pequeño; su influencia indirecta por ejemplo en el contenido de humedad es preferible tomarla en cuenta como variación de humedad y no como variación de temperatura, y los fenómenos ocasionales como acción de las heladas deben considerarse separadamente.

5. En el presente trabajo usaremos la teoría lineal de la deformación, es decir, no consideraremos los posibles cambios en la geometría del sistema y por tanto las conclusiones en cuanto a la Teoría de la Plasticidad sólo serán válidas en el instante de la falla y no cuando las deformaciones plásticas hayan alcanzado un valor finito. Por otra parte, como ha sido señalado desde hace tiempo (Ref. 5)

las deformaciones elásticas necesarias para llegar al flujo plástico incipiente son muy pequeñas, por lo que pueden considerarse despreciables (lo que conduce a considerar al suelo como material rigidoplástico).

6. En cada problema de plasticidad, además de las hipótesis generales discutidas arriba brevemente, debe establecerse una condición de plasticidad adicional que generalmente se da por lo que se llama una función de fluencia  $f$ , relación entre los esfuerzos que debe satisfacer el material como condición necesaria y suficiente para que ocurra el deslizamiento o flujo plástico.

Para el estudio de los problemas de Mecánica de Suelos se han usado generalmente como leyes de resistencia el criterio generalizado de von Mises, el criterio de Tresca y, sobre todo, el criterio generalizado de Mohr-Coulomb.

El primero consiste en usar como condición de fluencia (Ref. 6) la ley

$$f = \alpha J_1 + J_2^{1/2} - k \quad (1)$$

en que  $\alpha$  y  $k$  son constantes positivas en cada punto del material y  $J_1$ ,  $J_2$  son respectivamente el primero y segundo invariantes del estado de esfuerzos en el punto en cuestión, dados por

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} \quad (2)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (3)$$

siendo

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} J_1 \delta_{ij} \quad (4)$$

el tensor desviador de esfuerzos.

En las expresiones (3) y (4) se hace uso de la convención de suma para índices repetidos, que por comodidad se seguirá empleando en adelante, a menos que específicamente se indique lo contrario.

Puede verse que en este criterio la función de fluencia  $f$  representa para el caso general de  $\alpha \neq 0$  un cono circular recto en el espacio de esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , con eje perpendicular al plano octaédrico<sup>o</sup> del primer octante y vértice en el octante de tensión, en el punto de coordenadas  $(c \cot \phi, c \cot \phi, c \cot \phi)$  como se indica en la Fig. 3.

El criterio de Mohr-Coulomb, llamado así por usar la teoría de resistencia de Mohr en tal forma que la envolvente de los círculos de falla sea una recta cuya ecuación es la ley de Coulomb

$$\tau = c + \sigma \tan \phi$$

puede definirse por medio de tres ecuaciones de la forma

$$f = (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi - 2 \left[ \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} + 2c \cos \phi = 0 \quad (5)$$

que nos definen una superficie de fluencia irregular (con aristas).

<sup>o</sup> Para la definición del concepto de plano octaédrico, ver por ejemplo: Hoffman and Sachs, Introduction to the theory of plasticity for Engineers (Ref. 16).

Puede demostrarse que para el estado de esfuerzos plano los criterios de fluencia representados por (1) y (5) coinciden (Ref. 6); sin embargo para el caso tridimensional los dos criterios dan resultados diferentes pues la superficie de fluencia dada por (5) es una pirámide exagonal irregular en el espacio  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , para un material con  $\phi \neq 0$  y un prisma exagonal regular para materiales con  $\phi = 0$ , como se indica respectivamente en las Figs. 4 y 5.

En este caso particular de  $\phi = 0$  representado en la Fig. 5 el criterio de Mohr-Coulomb coincide exactamente con el criterio de Tresca, que puede expresarse diciendo: la fluencia ocurre cuando el máximo esfuerzo cortante alcanza cierto valor constante; ese valor constante para el caso de suelos es precisamente la cohesión (para  $\phi = 0$ ) como puede verse en la ecuación (5). Entonces el criterio de Tresca puede representarse con la función

$$f = 2 \left[ \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} - 2c = 0 \quad (5')$$

o bien, en términos de los esfuerzos principales

$$f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - c = 0 \quad (5'')$$

Este criterio es aplicable a arcillas que trabajan en condiciones no drenadas, siendo  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  los esfuerzos principales máximo y mínimo respectivamente (Ref. 7).

Puede observarse que el criterio de von Mises generalizado hace intervenir en la función de fluencia los tres esfuerzos principales, es decir

$$f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

en tanto que el criterio de Mohr-Coulomb considera que la fluencia sólo es producida por el máximo y el mínimo esfuerzos principales. El uso preferente de uno u otro criterio debe decidirse entonces después de observar en el laboratorio si el efecto del esfuerzo principal intermedio, diferencia fundamental entre ambos criterios, es o no significativo. En este sentido hasta hace poco tiempo los resultados eran francamente contradictorios. Por una parte las pruebas realizadas por Habib (1952, 1953) reportaban diferencias notables en el ángulo  $\phi$  al variar el esfuerzo intermedio y por otra parte Bishop y Eldin (1953) obtenían una concordancia muy marcada en las mediciones de  $\phi$  en pruebas con distintos valores del esfuerzo intermedio. Posteriormente Kirkpatrick (Ref. 7) realizando pruebas triaxiales drenadas en arenas ha demostrado que la influencia del esfuerzo efectivo intermedio no es significativa en virtud de que apenas produce variaciones máximas en  $\phi$  del orden de  $15^\circ$  en materiales con  $\phi = 39^\circ$ . Este trabajo experimental fue realizado por una parte a través de pruebas triaxiales drenadas partiendo de un esfuerzo radial dado aumentando en un caso la presión axial y disminuyendo en otro la presión radial hasta llegar en ambos casos a la falla del espécimen; y por otra parte con ensayos en probetas huecas realizadas en un aparato de diseño especial (Ref. 7), que permite por medio de aplicación de presión exterior e interior variar el esfuerzo intermedio. En todos los casos la concordancia de resultados fue muy satisfactoria como se indica arriba. En vista de estos resultados era lógico esperar que una teoría de falla en la que no in-

terviniese el esfuerzo principal intermedio daría la mejor aproximación al comportamiento de este tipo de suelos. En efecto, usando el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb las desviaciones obtenidas entre la superficie de fluencia dada por tal criterio (figs. 4a y b) y la obtenida experimentalmente por Kirkpatrick fueron mínimas.

Para materiales que como la arcilla deben principalmente su resistencia al fenómeno de "cohesión" ha sido usual considerar que su resistencia al esfuerzo cortante no depende de los fenómenos de fricción interna sino que está dada por una constante comúnmente llamada cohesión del material; esta teoría que para otros cuerpos cuyo comportamiento es más cercano al del material plástico perfecto ha dado buenos resultados, tiene sin embargo serias objeciones al aplicarse a la arcilla; la más importante es quizá la que surge al tener en cuenta la interacción entre las fases líquida y sólida. Terzaghi y otros investigadores han señalado desde hace tiempo que las arcillas no son materiales sin fricción, pues dependiendo de las condiciones de trabajo pueden exhibir un ángulo de fricción interna muy apreciable, y cuando una arcilla presenta una resistencia constante independiente de las presiones exteriores aplicadas esto se debe a que los cambios de tales presiones son tomados exclusivamente por el agua de los poros mientras que los esfuerzos intergranulares no sufren ningún cambio. En tales condiciones, debe introducirse un criterio de fluencia que considere no la acción de los cambios de la presión total aplicada sino de la parte de tal presión que se convierte en esfuerzos intergranulares efectivos.

Roscoe, Schofield, Wroth (Ref. 4) y Brinch Hansen (Ref. 8) han encontrado

que un criterio conveniente es el dado por la ley general de Mohr-Coulomb-Hvorslev

$$\tau = k p + (\sigma - u) \tan \phi_e \quad (6)$$

en que:

- $\tau$ , esfuerzo cortante en el plano de falla,
- $\sigma$ , esfuerzo normal total en el plano de falla,
- $u$ , parte del esfuerzo normal total tomado por presión en el agua de los poros,
- $k$ , factor de cohesión,
- $p$ , presión de consolidación máxima,
- $\phi_e$ , ángulo efectivo de fricción interna

La condición de falla (6) puede ilustrarse como es sabido por medio del círculo de Mohr llevando en el eje de esfuerzos normales la cantidad  $(\sigma - u)$ .

Otro criterio aplicable a suelos cohesivos considerándolos como materiales que presentan endurecimiento por deformación ha sido desarrollado por Drucker, Gibson y Kenkel (Ref. 3).

A pesar de los intentos de comprobación experimental hechos principalmente por los investigadores citados en los párrafos anteriores los resultados no han llegado a ser muy satisfactorios principalmente en condiciones de ensayo no drenado pues la valuación o medición de la presión de poro ofrece grandes dificultades y hasta la fecha ningún procedimiento que dé resultados cuantitativos confiables ha sido desarrollado, a pesar de la importancia de este problema en los procesos de deformación de

la mayor parte de los suelos. En condiciones de trabajo sin drenado de los suelos, lo más conveniente parece ser expresar los incrementos de presión de poro en función de los cambios en los esfuerzos principales que los ocasionan (Ref. 9). Teniendo en cuenta los parámetros que se manejan en la teoría de la plasticidad esto parece ser también lo más conveniente desde el punto de vista de tal teoría. Se encuentra que esa relación está dada por

$$\Delta u = B [\Delta \sigma_3 + A(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)] \quad (7)$$

en que

$\Delta u$ , incremento de la presión de poro,

A y B, coeficientes de presión de poro determinados experimentalmente,

$\Delta \sigma_1$ , incremento del esfuerzo principal mayor,

$\Delta \sigma_3$ , incremento del esfuerzo principal menor,

La anterior expresión es válida para un estado de esfuerzos cilíndrico (Fig. 6) es decir en que

$$\sigma_3 = \sigma_2 \quad \text{y} \quad \Delta \sigma_3 = \Delta \sigma_2$$

Para comprender el significado de A y B consideremos una probeta de suelo inicialmente en equilibrio bajo la acción de un estado esférico de esfuerzos  $p$ . Si posteriormente aplicamos incrementos de esfuerzos  $\Delta \sigma_1$  y  $\Delta \sigma_3$  en las direcciones vertical y horizontal respectivamente, se producirá un incremento  $\Delta u$  de la presión de poro. Si  $\Delta \sigma_1 \neq \Delta \sigma_3$  podemos pensar que el incremento  $\Delta u$  se debe

a dos incrementos del estado de esfuerzos (Fig. 7), un incremento hidrostático y un incremento desviador de los esfuerzos. Entonces como se indica en la Fig. 6 el incremento final de esfuerzos de la probeta puede descomponerse en dos partes con los cambios correspondientes  $\Delta u_h$  y  $\Delta u_d$  en la presión de poro.

El incremento de presión de poro correspondiente al incremento hidrostático de esfuerzos principales es:

$$\Delta u_h = B \Delta \sigma_3 \quad (8)$$

El incremento correspondiente al incremento desviador de esfuerzos principales es

$$\Delta u_d = BA (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) \quad (9)$$

Las expresiones (8) y (9) nos dan la expresión (7) escrita antes. Es fácil ver que realizando pruebas de compresión uniforme y de compresión simple pueden calcularse los valores de las constantes de proporcionalidad B y AB respectivamente.

Teóricamente B debe variar de 0 para suelos con grado de saturación nulo, hasta 1 para suelos totalmente saturados y los ensayos de laboratorio han confirmado plenamente este resultado. Para suelos parcialmente saturados debe ser

$$0 < B < 1$$

y para la humedad óptima Proctor se ha encontrado que B cae consistentemente en el intervalo 0.1 - 0.5 .

El coeficiente  $A$  varía con los esfuerzos y las deformaciones para un suelo dado. Su valor puede calcularse en el instante de la falla (esfuerzo desviador máximo), a esfuerzo efectivo principal máximo, o en cualquier otro punto requerido. En el instante de falla se obtienen distintos valores de  $A$  para ensayos con esfuerzo creciente o decreciente.

Bishop (Ref. 10) ha dado algunas aplicaciones de los coeficientes  $A$  y  $B$ .

Resumiendo la última parte de la discusión, puede decirse que de las posibles teorías de fluencia plástica aplicables a suelos como hipótesis de partida, los experimentos indican que para pruebas drenadas en materiales friccionantes la teoría de ruptura de Mohr-Coulomb (ecuación 5) da los resultados más satisfactorios con desviaciones insignificantes, y que para suelos cohesivos en que las condiciones de trabajo hagan aparecer presiones de poro notables la ley de fluencia más satisfactoria es la generalización Mohr-Coulomb-Hvorslev (ecuación 6).

Debe notarse sin embargo que con respecto a la aplicación de una ley de fluencia en este último caso todo es muy discutible hasta la fecha en virtud de la influencia poco conocida de la fase líquida en el comportamiento de los suelos; los caminos para atacar este problema son muy inciertos; uno de ellos, hasta ahora inexplorado, puede ser el de proceder por analogía con la termodinámica de los procesos irreversibles y con la termoelasticidad.

Hemos discutido brevemente en las páginas anteriores hasta qué punto es válido considerar que un suelo es idealmente plástico, a la luz de los resultados obtenidos hasta ahora por numerosos investigadores. Queda en pie la segunda cuestión.

planteada; si se tienen suficientes argumentos teóricos y experimentales para suponer que un suelo cumple con suficiente aproximación las hipótesis de la Teoría de la Plasticidad y la fluencia se presenta según determinada ley, ¿qué implicaciones prácticas importantes resultan de que el suelo se comporte plásticamente y cómo se toman en cuenta tales implicaciones en los diversos procedimientos de cálculo de la Mecánica de Suelos? ¿Son compatibles las suposiciones en que se basan estos procedimientos con la hipótesis adoptada inicialmente de que el suelo es un material plástico con determinada ley?

Antes de discutir estas cuestiones se darán algunos conceptos elementales de la Teoría de la Plasticidad necesarios para atacar el problema.

## II. ALGUNOS CONCEPTOS DE LA TEORÍA DE LA PLASTICIDAD APLICABLES EN MECÁNICA DE SUELOS

La exposición presentada en este capítulo se restringirá a los casos en que las deformaciones son pequeñas en virtud de lo dicho en la parte 5 del capítulo anterior; en ese mismo inciso se justificó considerar despreciables las deformaciones elásticas en comparación con las deformaciones plásticas, lo que equivale a considerar a los suelos como materiales rígido-plásticos; sin embargo el desarrollo de este capítulo se ha presentado de tal modo que cubra los aspectos fundamentales del comportamiento de los cuerpos elasto-plásticos por considerar que de esta manera pueden aclararse algunas diferencias importantes entre el comportamiento de las masas de suelo antes y en el instante en que se presenta la falla, lo que justifica ampliamente las complicaciones que se introducen al establecer estos conceptos en forma un poco más general. Desde luego, el paso a los conceptos particulares válidos para los sólidos rígido-plásticos es inmediato si se consideran tales cuerpos como el límite de un sólido elasto-plástico en que las constantes elásticas crecen indefinidamente.

### 1. Relaciones esfuerzo-deformación

Usaremos como marco de referencia un sistema cartesiano ortogonal que se desplaza con el cuerpo y cuyas coordenadas pueden referirse indistintamente al estado original del cuerpo o al estado deformado del mismo en virtud de que se ha supuesto que las deformaciones son pequeñas. En tal sistema el tensor de deformaciones

$\epsilon_{ij}$  (simétrico) puede expresarse en función de los desplazamientos  $u_i$  del

punto por medio de la relación

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

en que la coma colocada antes de cualquier índice denota derivación parcial con respecto a la coordenada correspondiente (por ejemplo  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ).

Análogamente el tensor de velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  queda expresado, en términos de las velocidades de desplazamiento  $\dot{u}_i$  por la ecuación

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (11)$$

Llamando  $\sigma_{ij}$  al tensor de esfuerzos (simétrico),  $\chi_i$  a las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen y  $p_i$  a las fuerzas de superficie por unidad de área, las ecuaciones de equilibrio se pueden expresar

$$\sigma_{ij,j} + \chi_i = 0 \quad (12)$$

que deben satisfacer las condiciones de frontera

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad (13)$$

en que  $n_i$  es el vector exterior unitario normal a la superficie.

En las ecuaciones (12) (13) y siguientes se continúa usando la convención de suma para índices repetidos como se indicó en el capítulo anterior.

Como las condiciones de equilibrio (12) deben cumplirse en todo punto del

cuerpo, el estado de equilibrio para todo el cuerpo de volumen  $V$  encerrado por la superficie  $S$  con condiciones de frontera (13) puede expresarse

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_V \chi_i u_i dV + \int_S p_i u_i dS \quad (14)$$

La ecuación (14) (también llamada del trabajo virtual) es la base para la obtención de los teoremas que posteriormente se enuncian.

Una expresión de la forma (14) es válida también para un campo de velocidades de desplazamiento  $u_i$  y su correspondiente distribución de velocidades de deformación  $\epsilon_{ij}$ .

Si las fuerzas  $\chi_i$  y  $p_i$  son funciones del tiempo con velocidades de incremento  $\dot{\chi}_i$  y  $\dot{p}_i$  suficientemente pequeñas, la ecuación del trabajo virtual también es válida para cualquier campo de velocidades de incremento de esfuerzos  $\sigma_{ij}$  que esté en equilibrio en cada instante con las velocidades de incremento de carga  $\dot{\chi}_i$  y  $\dot{p}_i$ .

Más aún, físicamente pueden admitirse discontinuidades en los esfuerzos y en las velocidades de incremento de los esfuerzos através de superficies internas siempre que  $\sigma_{ij} n_j$  y  $\dot{\sigma}_{ij} n_j$  sean continuas, siendo  $n_j$  el vector unitario normal a la superficie de discontinuidad. Discontinuidades en los desplazamientos y velocidades también son admisibles através de superficies interiores si se cumple que  $u_i n_i$  y  $\dot{u}_i n_i$  son continuas. Entonces la ecuación (14) continúa siendo válida si agregamos al primer miembro el término

$$\sum_{\mu} \int_{S_{\mu}} \sigma_{ij} n_j \Delta u_i ds_{\mu} \quad (15)$$

en que  $S_{\mu}$  es una superficie interna de discontinuidad y  $\Delta u_i$  es la correspondiente discontinuidad de los desplazamientos.

Por simplicidad no mencionaremos en adelante el término aditivo (15) pero se supondrá implícitamente que se ha considerado siempre que se trata un problema con campos de desplazamientos o de velocidades discontinuos.

Se supone que las deformaciones totales  $\epsilon_{ij}$  de un cuerpo elastoplástico pueden descomponerse en la suma de una deformación elástica  $\epsilon'_{ij}$  y una deformación plástica  $\epsilon''_{ij}$ .

Las deformaciones elásticas están dadas por la ley de Hooke (Ref. 11)

$$\epsilon'_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (16)$$

en que los coeficientes elásticos (con carácter tensorial) tienen las propiedades de simetría

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}$$

A menos que todos los esfuerzos sean nulos, se cumple

$$\frac{1}{2} A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} > 0$$

Las relaciones esfuerzo deformación en el rango plástico pueden establecerse

a partir de ciertas consideraciones termodinámicas (Ref. 12). Se supone que si el esfuerzo cae en cierta región del espacio  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , llamado dominio elástico, no ocurre ningún cambio en las deformaciones plásticas del elemento; llamaremos "seguro" a tal estado de esfuerzos  $(\sigma_{ij}^s)$ . Sólo ocurrirán incrementos de deformación plástica si el esfuerzo cae sobre la frontera del dominio elástico (llamado límite de fluencia y representado geoméricamente en el espacio de esfuerzos principales por lo que hemos definido en el capítulo anterior como superficie de fluencia). Un estado de esfuerzos que cae en el dominio elástico o en la superficie de fluencia se llamará "posible"  $(\sigma_{ij}^p)$ . Se obtiene (Ref. 12) que

a) Si  $\sigma_{ij}$  es un estado de esfuerzos que cae en la superficie de fluencia (en la cual ocurren incrementos de deformación plástica  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  no nulos), entonces

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0 \quad (17)$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^p) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (18)$$

para todo estado de esfuerzos "seguro"  $\sigma_{ij}^s$  y para todo estado de esfuerzos "posible"  $\sigma_{ij}^p$ .

(En virtud de (18) la superficie de fluencia es convexa).

b) Si  $\dot{\sigma}_{ij}$  son las velocidades de incremento de esfuerzo correspondientes a las velocidades de deformación plástica  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad (19)$$

Nótese que las anteriores conclusiones sólo son válidas para velocidades de deformación plástica, y no pueden aplicarse a deformaciones plásticas totales.

## 2. Potencial plástico

Un material elasto-plástico o rígido-plástico perfecto tiene la propiedad de no poder soportar esfuerzos superiores a cierto valor llamado límite de fluencia. Para tales materiales la superficie de fluencia y el dominio elástico son independientes de la historia de cargas y además el dominio elástico debe contener al estado de esfuerzos nulo ( $\sigma_{ij} = 0$ ). Entonces la velocidad de disipación de energía por unidad de volumen

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) > 0 \quad (20)$$

en que  $\sigma_{ij}$  es el estado de esfuerzos sobre la superficie de fluencia al ocurrir las velocidades de deformación plástica no nulas  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ , es una función uniforme de  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  y que crece proporcionalmente a  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  en vista de que  $\sigma_{ij} = cte.$

Para un material plástico perfecto la desigualdad (19) se convierte en

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \quad (21)$$

para estados de esfuerzos tanto en el dominio elástico como en la superficie de fluencia, pues en el dominio elástico  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = 0$  y en la superficie de fluencia  $\dot{\sigma}_{ij}$  y  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  son normales.

Las anteriores relaciones pueden expresarse en forma más explícita del siguiente modo. Si la superficie de fluencia es regular en el contorno de un punto de ella (continua y derivable, ella y todas sus derivadas), puede representarse por la función de fluencia.

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (22)$$

en que el signo de  $f$  (simétrica con respecto a  $\sigma_{ij}$  y  $\sigma_{ji}$ ) se elige de modo que  $f < 0$  represente el dominio elástico. Entonces, por (20) las velocidades de deformación plástica pueden expresarse

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (23)$$

en que

$$\left. \begin{aligned} \lambda = 0 & \quad \text{si } f < 0 \quad \text{o bien si } f = 0 \text{ y } \dot{f} < 0 \\ \lambda \geq 0 & \quad \text{si } f = 0 \quad \text{y } \dot{f} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

En vista de la forma de estas relaciones, la función de fluencia  $f$  juega el papel de un potencial para las velocidades de deformación plástica, y se llama también potencial plástico. En términos geométricos, se dice que el tensor de velocidades de deformación plástica tiene la misma dirección que la normal exterior a la superficie de fluencia.

Las condiciones (24) tienen el siguiente significado físico: si  $\dot{f} > 0$  la variación de los esfuerzos es tal que ocurre incremento de carga; si  $\dot{f} < 0$  la

variación de los esfuerzos corresponde a descarga. Por tanto puede decirse que  $\lambda$  nunca es negativo, y es distinto de cero sólo si  $\sigma_{ij}$  correspondo a la superficie de fluencia y no ocurre descarga. Debe notarse que  $\lambda$  es un parámetro indeterminado (con unidades tiempo a la -1) y de ninguna manera una constante del material.

Las superficies de fluencia con aristas o vértices (caso de la superficie de fluencia del criterio Mohr-Coulomb) pueden representarse como hemos visto en el capítulo anterior por cierto número (finito o infinito) de funciones de fluencia

$$f_{\alpha}(\sigma_{ij}) = 0 \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots \quad (23')$$

El dominio elástico queda definido entonces por los valores negativos de todas las funciones de fluencia. Un estado de esfuerzos sobre la superficie de fluencia corresponde al valor cero de una o más funciones de fluencia, siendo todas las restantes negativas.

Las velocidades de deformación plástica quedan

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{no sumar en } \alpha) \quad (25)$$

con condiciones para  $\lambda$  semejantes a las dadas en (24).

Derivando (16) con respecto al tiempo y combinando el resultado con (25) se obtienen las relaciones esfuerzo-deformación para el tipo más general de sólidos elasto-plásticos perfectos

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} + A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (\text{no sumar en } \alpha) \quad (26)$$

### 3. Teoremas de colapso plástico y análisis límite

Fuiste que los esfuerzos en un material plástico perfecto no pueden exceder en ningún punto el valor del límite de fluencia, las cargas exteriores sobre un cuerpo de material perfectamente plástico no pueden aumentar indefinidamente, sino que llegan a un cierto valor crítico en el cual se presenta el estado de colapso plástico, esto es, se presentan deformaciones crecientes indefinidamente bajo cargas constantes, lo que hace al cuerpo incapaz de soportar cualquier incremento en las cargas exteriores. Tal sistema de cargas crítico se llama sistema de cargas límite. La distribución de velocidades de deformación  $\dot{\epsilon}_{ij}^c$  correspondientes al instante de iniciación del colapso plástico se llama mecanismo de colapso.

En virtud de que hemos considerado sólo deformaciones pequeñas y por tanto hemos despreciado los cambios en la geometría del cuerpo al establecer las ecuaciones de equilibrio, la definición de colapso plástico dada y los teoremas que de ella se derivarán son válidas sólo para el estado inicial de colapso.

Introduciremos las definiciones siguientes:

a) Se dice que una distribución de esfuerzos  $\sigma_{ij}^s$  es estáticamente admisible si satisface las ecuaciones de equilibrio (12) en el interior del cuerpo y las condiciones de frontera (13) sobre la superficie  $S_p$  en que se especifican las fuerzas de superficie  $p_i$ .

b) La distribución de esfuerzos  $\sigma_{ij}^s$  definida en a) se dice que es segura y

se representa con  $\sigma_{ij}^{ns}$  si el punto representativo del estado de esfuerzos en el espacio de esfuerzos principales queda encerrado por la superficie de fluencia, y se dice que es "posible",  $\sigma_{ij}^{ps}$ , si el esfuerzo cae dentro o sobre la superficie de fluencia.

c) Se dice que una distribución de velocidades de deformación es cinemáticamente admisible, y se designa con  $\dot{\epsilon}_{ij}^a$  si puede obtenerse por medio de (11) a partir de un campo de velocidades  $\dot{u}_i$  con velocidades nulas sobre  $S_u$ . A este campo de velocidades de deformación también se le llama algunas veces mecanismo de colapso admisible.

d) Se llama factor de seguridad  $n$  correspondiente a un sistema dado de cargas exteriores  $X_i, p_i$ , al factor que hace que las fuerzas  $nX_i, np_i$  constituyan un sistema de cargas límite.

Usando estas definiciones los teoremas de colapso plástico pueden expresarse de la manera siguiente:

Primer Teorema. Un cuerpo es capaz de soportar las cargas exteriores si se puede encontrar una distribución de esfuerzos estáticamente admisible; y segura  $\sigma_{ij}^{ns}$  en todo instante del proceso de carga. Por otra parte, el cuerpo no podrá soportar un sistema de cargas exteriores para el cual no existe una distribución de esfuerzos posible estáticamente admisible  $\sigma_{ij}^{ps}$ .

Puede verse en este Teorema que la existencia de una distribución de esfuerzos "posible" es condición necesaria, y la existencia de una distribución de esfuerzos "segura" es condición suficiente para la capacidad del cuerpo de sopor-

tar las cargas exteriores.

Segundo Teorema. El cuerpo no puede soportar un sistema de cargas exteriores dado si existe alguna distribución de velocidades de deformación  $\dot{\epsilon}_{ij}^0$  cinemáticamente admisible en la cual la rapidez de realización de trabajo por las cargas exteriores dadas sea mayor que la rapidez de disipación de energía plástica en el cuerpo para velocidades de deformación plástica  $\dot{\epsilon}_{ij}^A = \dot{\epsilon}_{ij}^0$ , \* es decir

$$\int_V X_i \dot{u}_i^0 dV + \int_{S_f} p_i \dot{u}_i^0 dS > \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^0) dV \quad (27)$$

en que  $D(\dot{\epsilon}_{ij}^0)$  es la velocidad de disipación de energía por unidad de volumen o función de disipación definida por (20).

(Como ya se mencionó, si el campo de velocidades es discontinuo a lo largo de una superficie interior  $S_p$  debe agregarse el término dado en (15) al segundo miembro de (27).).

Por otra parte, el cuerpo es capaz de soportar las cargas exteriores si el sentido de la desigualdad (27) es el contrario para todo campo de velocidades cinemáticamente admisible. En otras palabras, la desigualdad

$$\int_V X_i \dot{u}_i^0 dV + \int_{S_f} p_i \dot{u}_i^0 dS \leq \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^0) dV \quad (28)$$

\* Como sólo estamos tratando con estados de colapso o estados límite, en cuerpos plásticos perfectos, las velocidades de deformación en tales estados son plásticas exclusivamente, y por tanto podemos poner  $\dot{\epsilon}_{ij}^A = \dot{\epsilon}_{ij}^0$ .

válida para todo mecanismo de colapso admisible es una condición necesaria, y la misma expresión suprimiendo el signo de igualdad, es una condición suficiente para definir la capacidad del cuerpo de soportar las cargas exteriores.

La demostración de estos teoremas, así como el establecimiento de la unicidad del estado de esfuerzos en el colapso puede verse en el trabajo de W. T. Koiter (Ref. 13).

Los teoremas de colapso plástico enunciados son la base del procedimiento de cálculo llamado análisis límite y constituyen quizá las conclusiones más importantes y útiles de la Teoría de la Plasticidad, en virtud de que el procedimiento de análisis límite es mucho más simple de aplicar que un análisis completo de esfuerzos en el rango elasto-plástico de un cuerpo; también nos permite obtener el factor de seguridad independientemente de los procesos de carga previos de la estructura como veremos enseguida usando uno o los dos Teoremas de colapso. Debe recordarse sin embargo que los cambios grandes en la geometría del cuerpo analizado imponen una limitación importante a los Teoremas cuando ocurren deformaciones excesivas al acercarse el sistema a la carga límite.

Nótese que la aplicación del Primer Teorema permite obtener una frontera inferior para el factor de seguridad correspondiente a un sistema de cargas dado  $X_1, \dots, p_1$  con sólo elegir convenientemente una distribución de esfuerzos estáticamente admisible  $\sigma_{ij}^0$  para tales cargas, ya que entonces los esfuerzos  $n \sigma_{ij}^0$  son estáticamente admisibles para las cargas  $nX_1, \dots, np_1$  y para obtener la frontera inferior de  $n$  basta asegurar que los esfuerzos  $n \sigma_{ij}^0$  no sobrepasan el límite de

fluencia en ningún punto. De la misma manera, el Segundo Teorema nos da una frontera superior para el factor de seguridad cuando elegimos convenientemente un mecanismo de colapso admisible  $\dot{\epsilon}_{ij}^0$  para el cual el primer miembro de la expresión (26) es positivo, pudiendo entonces determinar  $n$  de la ecuación

$$n \left\{ \int_V \chi_i \dot{u}_i^0 dV + \int_{s_p} p_i \dot{u}_i^0 dS \right\} = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^0) dV \quad (29)$$

Se discutieron en páginas anteriores (Capítulo I) las limitaciones que a la teoría de la plasticidad impone el comportamiento de los suelos, y se pudo concluir que para ciertos materiales y en determinadas condiciones de trabajo se obtiene un buen modelo para representar sus propiedades introduciendo el concepto de material plástico perfecto ideal. Pero esta no es de ninguna manera una hipótesis simple, sino que encierra implícitamente varias condiciones que deben tenerse en cuenta en los procedimientos de resolución de los problemas usuales. Nos proponemos ahora discutir estas implicaciones en los términos en que quedaron planteadas en el Capítulo I.

#### 1. Expansión volumétrica o dilatación

De acuerdo con el concepto de potencial plástico introducido en el capítulo anterior, las relaciones esfuerzo deformación correspondientes a una cierta función de fluencia  $f$  son:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^u = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (23)$$

Si la función de fluencia empleada es la dada por la generalización (1) del criterio de von Mises

$$f = \alpha J_1 + J_2^{1/2} = k \quad (1)$$

sustituyendo (1) en (23) se obtiene:

$$\dot{\epsilon}_{ij}'' = \lambda \left[ \alpha \delta_{ij} + \frac{S_{ij}}{2 J_2^{1/2}} \right] \quad (30)$$

De esta expresión se puede obtener la rapidez de expansión volumétrica que resulta

$$\dot{\epsilon}_{ii}'' = 3\alpha\lambda \quad (31)$$

Análogamente, si como criterio de fluencia se usa el de Mohr-Coulomb representado por la función

$$f = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \operatorname{sen} \phi + \left[ \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} - c \cos \phi = 0 \quad (5)$$

sustituyendo (5) en (23) encontramos:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x'' &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \operatorname{sen} \phi + \frac{\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y)}{\left[ \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}} \right\} \\ \dot{\epsilon}_y'' &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \operatorname{sen} \phi - \frac{\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y)}{\left[ \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}} \right\} \\ \dot{\gamma}_{xy}'' &= \lambda \frac{\tau_{xy}}{\left[ \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

siendo la rapidez de expansión volumétrica

$$\dot{\epsilon}_{ii}'' = \dot{\epsilon}_x'' + \dot{\epsilon}_y'' = \lambda \operatorname{sen} \phi \quad (33)$$

En virtud de que en la expresión (1)  $\alpha \geq 0$  y de que hemos visto que  $\lambda$

es un parámetro que nunca puede tomar valores negativos (expresiones (24)), el hecho más importante que se desprende de las anteriores relaciones es que en los materiales friccionantes ( $\alpha \neq 0$  ó  $\beta \neq 0$ ) todo proceso de deformación plástica debe ir acompañado de un aumento de volumen según se observa en (31) y (33). En esta conclusión concuerdan como se ve los dos criterios de fluencia (1) y (5) comunmente usadas en suelos.

Con respecto a esta propiedad de dilatancia, consecuencia del comportamiento plástico de un suelo friccionante, las experiencias de laboratorio muestran que efectivamente se presenta cuando la relación de vacíos tiene un valor inferior a la relación de vacíos crítica  $e_{cc}$ , pero que por el contrario el volumen de una masa de suelo disminuye al ocurrir un deslizamiento con relación de vacíos superior a la crítica, lo que hace que en tal caso, como es también sabido la ley de Coulomb

$$\tau = c + \sigma \tan \phi$$

no se cumpla. Entonces si en materiales friccionantes  $e > e_{cc}$  no se cumple la hipótesis de cuerpo plástico y por tanto no son aplicables los procedimientos desarrollados a partir de la teoría de la plasticidad, pero tampoco será válido cualquier otro procedimiento que utilice la expresión de Coulomb como ley de resistencia.

Las relaciones de plasticidad y sus consecuencias en la expansión volumétrica del material al ocurrir un deslizamiento pueden comprenderse claramente si consideramos el esquema de deformaciones planas mostrado en la Fig. 8, en

que se ha considerado un cuerpo de material plástico friccionante que se hace fallar de modo que las partes A y B de él se comporten rígidamente, ligadas por una zona de transición de espesor  $l$  en estado plástico. Si esta zona de transición es suficientemente angosta el esquema puede representar un deslizamiento simple o falla de línea.

Es importante notar que puesto que  $\dot{\epsilon}_x = 0$ , y por estar considerando estado de deformaciones planas, entonces  $\dot{\epsilon}_y$  no pueda ser nulo pues debe presentarse expansión volumétrica.

Entonces de (31)

$$\dot{\epsilon}_y = 3\alpha\lambda \quad (35)$$

y en consecuencia la parte A del sistema no sólo se desplaza a la derecha, sino que también se mueve verticalmente hacia arriba (considerando que la parte B está fija).

Como para que un desplazamiento pueda ocurrir las velocidades de deformación deben ser compatibles con las velocidades de desplazamiento en cada punto, debe cumplirse entre ambas la relación (11), que podemos escribir

$$\dot{\epsilon}_{ij}'' = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (36)$$

en virtud de estar considerando sólo deformaciones plásticas (ver Capítulo I, inciso 5). Cuando  $l \rightarrow 0$ , podemos escribir, en virtud de (36):

$$l \dot{\epsilon}_{12}'' = l \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}'' = \frac{1}{2} \delta \dot{u}_x \quad (37)$$

$$l \dot{\epsilon}_{22}'' = l \dot{\epsilon}_y'' = \delta \dot{u}_y \quad (38)$$

De (37)

$$l = \frac{\delta \dot{u}_x}{\dot{\gamma}_{xy}} \quad (39)$$

De (38) y (39):

$$\delta \dot{u}_y = \frac{\dot{\epsilon}_{22}''}{2 \dot{\epsilon}_{12}''} \delta \dot{u}_x \quad (40)$$

Puede demostrarse (Ref. 6) que en el caso de deformaciones planas los parámetros  $\alpha$ ,  $k$ ,  $c$  y  $\phi$  están ligados por las relaciones

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{k}{(1-12\alpha^2)^{1/2}} \\ \tan \phi &= \frac{3\alpha}{(1-3\alpha^2)^{1/2}} \\ \cos \phi &= \frac{(1-12\alpha^2)^{1/2}}{(1-3\alpha^2)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Sustituyendo (30) en (40) y teniendo en cuenta las relaciones (41):

$$\delta \dot{u}_y = \delta \dot{u}_x \tan \phi \quad (42)$$

La ecuación (42) indica la diferencia fundamental entre la ley de Coulomb aplicada a un cuerpo que desliza sobre una superficie con fricción y la misma ley aplicada a un suelo friccionante sometido a esfuerzo cortante. La Fig. 9 ilustra esta diferencia; se puede ver que en el caso del cuerpo que desliza

za, el desplazamiento ocurre en la dirección de la fuerza que lo produce, en tanto que en el suelo friccionante el desplazamiento ocurre con una inclinación con respecto a la fuerza que lo ocasiona.

## 2. Líneas de falla permisibles

Hemos dicho que un material plástico perfecto fluye en cierto punto cuando el estado de esfuerzos que actúa en tal punto satisface la ecuación  $f = 0$ , siendo  $f$  la función de fluencia para tal material. De acuerdo con esto diremos que se presenta una falla de línea en un problema de deformaciones planas, cuando el colapso plástico del cuerpo ocurre de tal modo que la ecuación  $f = 0$  se satisface para todos los puntos de una cierta curva en el plano de la sección considerada y sólo para ellos; a esa curva en que  $f = 0$  le llamaremos línea de falla.

Para propósitos de cálculo es conveniente considerar a las superficies de discontinuidad de desplazamientos (líneas de falla) como el límite de una zona de transición en estado plástico cuando su espesor tiende a cero. Sin embargo, en materiales friccionantes ( $\phi \neq 0$ ) hemos visto que una discontinuidad  $\delta \dot{u}_x$  en las velocidades de desplazamiento tangenciales implica necesariamente una separación o discontinuidad en las velocidades de desplazamiento normales  $\delta \dot{u}_y$ ; por tanto en materiales con  $\phi \neq 0$  ( $\alpha \neq 0$ ) se requerirá que la zona de transición tenga cierto espesor, en tanto que en materiales puramente cohesivos ( $\phi = 0$ ) tal zona de transición no hace falta.

En particular en una masa de suelo, por ejemplo el talud de la Fig. 10, sólo

pueden ocurrir fallas de línea de dos menaras, teniendo en cuenta que en las superficies de discontinuidad de desplazamientos debe cumplirse la relación (42). Como se sabe, esas formas de falla ocurren para un material con  $\phi=0$  según superficies de discontinuidad (idealizaciones de las zonas de transición) que son cilindros planos o circulares. En casos de materiales con  $\alpha \neq 0$  la superficie de discontinuidad plana, como se ve, puede aún admitirse en vista de que permite a lo largo de ella la existencia de  $\delta u_x$  y  $\delta u_y$  relacionados por (42), pero la superficie circular debe reemplazarse por una espiral logarítmica cuyo radio vector forma en todo punto un ángulo  $\phi$  con la normal a la curva, lo que hace que se cumpla la relación obtenida para  $\delta u_x$  y  $\delta u_y$ , pues como se ve el ángulo entre el vector velocidad y la superficie de discontinuidad es  $\phi$  en cada punto; en una superficie circular esta condición no se cumple si se supone movimiento de cuerpo rígido, y por tanto el círculo no es una línea de discontinuidad permisible.

### 3. Función de disipación plástica

La aplicación del Segundo Teorema de colapso plástico, como se puede ver en su enunciado, requiere el cálculo de la función de punto D definida por la expresión (20) y que nos da la velocidad de disipación de energía por unidad de volumen debida a las deformaciones plásticas que ocurren en el instante del colapso.

Como en principio la falla de un material puede ocurrir con una infinidad de estados del esfuerzos (representados por todos los puntos de la superficie

de fluencia), tendríamos que calcular  $\dot{D}$  para todos los puntos de la superficie  $f = 0$ . Sin embargo puede verse fácilmente que la función de disipación  $\dot{D}$  puede expresarse como función sólo de  $\dot{\epsilon}_{ij}^u$ , es decir

$$\dot{D} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^u = \dot{D}(\dot{\epsilon}_{ij}^u) \quad (20)$$

También se puede demostrar que  $\dot{D}$  tiene la misma forma tanto para el criterio de von Mises generalizado (ecuación (1), fig. (3)) como para el criterio generalizado de Mohr-Coulomb (ecuación (3), fig. 4).

Consideremos (Fig. 11) la superficie de fluencia de cualquiera de los dos criterios mencionados, cortada por un plano que contenga al eje (normal a los planos octaédricos del primer octante) y pase por el punto de la superficie de fluencia,  $P$ , que representa el estado de esfuerzos bajo el cual ocurre la fluencia del material. El punto  $O$  es el origen del sistema coordenado y el punto  $C$  es el vértice de la superficie de fluencia (cono o pirámida), cuyas coordenadas son  $C(c \cot \phi, c \cot \phi, c \cot \phi)$  en el octante de tensión.

En vista de que  $f$  juega el papel de un potencial para las velocidades de deformación plástica (ver Capítulo II, Índice 2), el vector  $\dot{\epsilon}_{ij}^u$  es normal exterior a la superficie  $f$ .

La función  $\dot{D}$  dada por (20) puede interpretarse entonces como el producto escalar de los vectores  $\vec{OP}$  y  $\dot{\epsilon}_{ij}^u$ . Pero vemos que

$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP}$$

y como

$$\vec{CP} \perp \vec{E}_{ij}$$

podemos escribir

$$\dot{D} = \vec{OC} \cdot \vec{E}_{ij} \quad (43)$$

y por tanto para cualquier punto de la superficie de fluencia

$$D = (\sigma_{ij})_c \cdot (\dot{E}_{ij})$$

o bien, puesto que para el punto C

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{y} \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = c \cot \phi$$

$$\therefore \dot{D} = c \cot \phi \dot{E}_{ii} \quad (44)$$

en que  $\dot{E}_{ii}$  es la velocidad de dilatación volumétrica dada por (31), en donde podemos sustituir el valor de  $\lambda$  dado por

$$\dot{E}_{ij} \dot{E}_{ij} = \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda^2 \left( 3\alpha^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (45)$$

para obtener

$$\dot{E}_{ii} = \frac{3\alpha}{(1+6\alpha^2)^{1/2}} \left( 2\dot{E}_{ij} \dot{E}_{ij} \right)^{1/2} \quad (46)$$

o bien teniendo en cuenta las relaciones (41)

$$\dot{\epsilon}_{11} = \frac{\operatorname{sen} \phi}{(1 + \operatorname{sen}^2 \phi)^{1/2}} (2\dot{\epsilon}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*)^{1/2} \quad (47)$$

que es la velocidad de expansión volumétrica de que debe ir acompañada la deformación plástica de un material friccionante cuyo comportamiento es elastoplástico perfecto.

Para un estado de deformaciones planas:

$$\dot{\epsilon}_{11}^* = \frac{\operatorname{sen} \phi}{(1 + \operatorname{sen}^2 \phi)^{1/2}} (2\dot{\epsilon}_x^{*2} + 2\dot{\epsilon}_y^{*2} + \dot{\gamma}_{xy}^{*2})^{1/2} = \operatorname{sen} \phi [( \dot{\epsilon}_x^* - \dot{\epsilon}_y^* )^2 + \dot{\gamma}_{xy}^{*2}]^{1/2} \quad (48)$$

De donde puede obtenerse una importante relación si se consideran los componentes principales de la velocidad de deformación plana:

$$\dot{\epsilon}_1^* = -\dot{\epsilon}_2^* \frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} = -\dot{\epsilon}_2^* \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (49)$$

Para el caso particular de un material con  $\phi = 0$ , se ha dicho anteriormente que la superficie de fluencia es un prisma exagonal con eje  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  en el espacio de esfuerzos principales y por tanto no vale en ese caso la expresión de  $\dot{D}$  dada por (44) pues no existe al vértice C. Una expresión válida en este caso es (Ref. 14)

$$\dot{D} = 2C |\dot{\epsilon}_{\max}^*| \quad (44')$$

o para el caso de deformaciones planas:

$$\dot{D} = c \dot{\gamma}_{máx.} \quad (44'')$$

Como se mencionó en el capítulo anterior si en un problema se tiene una superficie de discontinuidad de velocidades de desplazamiento (por ejemplo en las fallas de línea representadas por la Fig. 9), la aplicación correcta del Segundo Teorema de colapso plástico requiere agregar al segundo miembro de la desigualdad (27) el término adicional dado por la expresión (15), que representa la velocidad de disipación de energía a lo largo de la superficie de discontinuidad; esa velocidad de disipación de energía por unidad de área de la superficie de discontinuidad es

$$\dot{D}_A = z \delta \dot{u}_x + \sigma \delta \dot{u}_y \quad (50)$$

Si en (50) usamos (42):

$$\dot{D}_A = (z + \sigma \tan \phi) \delta \dot{u}_x$$

pero  $z + \sigma \tan \phi = c$  por la ley de Coulomb (considerando  $\sigma$  de compresión negativo)

$$\therefore \dot{D}_A = c \delta \dot{u}_x \quad (51)$$

que es la misma expresión hallada por Drucker y Prager (Ref. 6) por un camino diferente, usando el criterio de fluencia de von Mises generalizado.

Se ve que (51) vale para cualquiera de los dos criterios, von Mises o Mohr-Coulomb.

#### IV. APLICACIONES

Se tratarán en este capítulo algunos de los problemas de Mecánica de Suelos haciendo uso de los conceptos introducidos anteriormente en el capítulo II y teniendo en cuenta las conclusiones obtenidas en los capítulos I y III de modo que los procedimientos que se sigan sean consistentes con la Teoría de la Plasticidad, sus hipótesis y sus implicaciones.

##### 1. Estabilidad de taludes verticales

Los dos teoremas de colapso plástico enunciados se usarán ahora para la obtención de dos fronteras entre las cuales debe caer el valor de la altura crítica de un paramento vertical de gran longitud de material cohesivo y friccionante cuyo comportamiento suponemos puede interpretarse como plástico perfecto con una ley de fluencia de la forma (1) o de la forma (5).

##### a) Obtención de la frontera inferior

La aplicación del primer teorema de colapso plástico requiere conocer una distribución de esfuerzos estáticamente admisible en el interior de la masa de suelo analizada; tal distribución de esfuerzos puede ser continua o discontinua y no tiene que guardar semejanza alguna con la distribución real, siempre que cumpla con las condiciones de equilibrio en el interior y en los bordes del talud. Puede verse que la distribución de esfuerzos mostrada en la Fig. 12 es muy simple y cumple con la condición de ser estáticamente admisible si se mantienen los valores de los esfuerzos por debajo de los valores límites dados indistintamente por (1) o por (5) en virtud de tratarse de un problema de deformaciones planas.

En la distribución supuesta el máximo esfuerzo cortante se presenta al nivel  $y = h$ ,  $x \geq 0$  y vale  $\frac{\gamma h}{2}$  siendo  $\gamma$  el peso volumétrico del material y a ese mismo nivel el esfuerzo promedio vale  $-\frac{\gamma h}{2}$ .

Entonces en la ecuación (5)

$$(\sigma_x + \sigma_y) = -\gamma h$$

$$2\left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + z_{xy}^2\right]^{1/2} = \gamma h$$

$$\therefore \gamma h = \gamma h \operatorname{sen} \phi + 2c \cos \phi$$

de donde

$$h = \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} = \frac{2c}{\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

Así pues, teniendo en cuenta las conclusiones que nos permite el Primer Teorema de colapso plástico, la altura crítica  $h_c$  debe ser tal que

$$h_c \geq \frac{2c}{\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (52)$$

b) Obtención de la frontera superior

Si tomamos como mecanismo de colapso una superficie de discontinuidad simple ésta debe ser alguna de las dos cuya forma hemos establecido que es compatible con las hipótesis de la plasticidad (capítulo III, inciso 2). Por simplicidad elegiremos un plano de deslizamiento que forma un ángulo  $\beta$  con la ver-

tical (Fig. 13).

Debemos calcular la energía disipada por las fuerzas exteriores y la energía disipada por las fuerzas interiores; de la ecuación (51) esta última es

$$\dot{D}_A \times \frac{h}{\cos \beta} = \frac{c h}{\cos \beta} \Delta \dot{u}_x \quad (53)$$

La energía de las fuerzas exteriores vale  $\vec{W} \cdot (\overline{\Delta \dot{u}_x} + \overline{\Delta \dot{u}_y})$ , siendo  $W$  el peso de la cufia deslizante que es la única fuerza exterior que actúa. Entonces

$$|\vec{W}| = \frac{\gamma h^2}{2} \tan \beta \quad (\text{vertical hacia abajo})$$

$$|\overline{(\Delta \dot{u}_x + \Delta \dot{u}_y)}| = \frac{\Delta \dot{u}_x}{\cos \phi} \quad (\text{hacia abajo inclinada } \phi + \beta \text{ con respecto a la vertical})$$

La componente vertical de la velocidad de desplazamiento es entonces

$$|\overline{(\Delta \dot{u}_x + \Delta \dot{u}_y)}|_{\text{VERT.}} = \frac{\Delta \dot{u}_x}{\cos \phi} \cos(\phi + \beta)$$

Por tanto

$$\vec{W} \cdot (\overline{\Delta \dot{u}_x} + \overline{\Delta \dot{u}_y}) = \frac{\gamma h^2}{2} \tan \beta \frac{\Delta \dot{u}_x}{\cos \phi} \cos(\phi + \beta) \quad (54)$$

Iguando (53) y (54):

$$h = \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos \phi}{\sin \beta \cos(\phi + \beta)}$$

cuyo mínimo valor se presenta para  $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$

y es

$$h = \frac{4c}{\gamma} \frac{\cos \phi}{(1 - \sin \phi)} = \frac{4c}{\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

Por el segundo teorema de colapso plástico podemos concluir

$$h_c \leq \frac{4c}{\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (55)$$

El segundo miembro de (55) es precisamente el valor de la altura crítica dado por los métodos usuales (Ref. 5); sin embargo ha quedado claro que la teoría de la plasticidad sólo nos permite decir que tal valor de  $h$  es una frontera superior para  $h_c$ , muy probablemente del lado contrario a la seguridad si se toma como altura crítica.

Los segundos miembros de (52) y (55) nos dan pues los valores extremos del intervalo cerrado dentro del cual debe encontrarse  $h_c$ . En vista de que el intervalo es aun muy amplio (obsérvese que la relación entre las fronteras superior e inferior es de dos) se podría intentar bajar la frontera superior considerando como mecanismo de colapso una superficie de discontinuidad espiral logarítmica, que también es cinemáticamente admisible; esa aproximación posterior tendría sin embargo poca utilidad si se tiene en cuenta que hemos aplicado la ley de fluencia (5) como si los suelos fuesen capaces de tomar tensiones, siendo un hecho comprobado que la formación de grietas en la parte superior del talud impide el trabajo

del suelo a tensión. Parece ser de más valor práctico modificar el criterio de fluencia de modo que no se considere al suelo capaz de trabajar a tensión, y aplicar el Segundo Teorema de colapso plástico introduciendo un mecanismo de falla que incluya grietas de tensión.

## 2. Estabilidad de taludes verticales con grietas de tensión.

Para resolver este problema el primer paso debe ser modificar el criterio de fluencia (5) de modo que no se permita al suelo tomar tensiones; esto puede hacerse simplemente imponiendo la condición

$$-\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \geq R \quad (56)$$

a la función  $f$  definida por (5), lo que significa que para deformaciones planas la forma de la curva de fluencia en el plano  $\sigma - \tau$  es la representada en la Fig. 14a con línea llena. La función (5), la relación (42) entre  $\delta u_x$  y  $\delta u_y$ , la función de disipación (44), y todas las consecuencias de ellas, sólo son válidas ahora para las partes rectas de tal curva; pero la condición de normalidad entre los vectores velocidad de deformación y la curva deben cumplirse en todo punto, de modo que si se considera un punto P sobre el tramo representado por el arco circular, los vectores velocidad de desplazamiento normal  $\delta u_n$  y tangencial  $\delta u_t$  deben ser como en la Fig. 14b, siendo  $\theta \geq \phi$  el ángulo entre la superficie de discontinuidad y el vector desplazamiento total.

La velocidad de disipación de energía  $\dot{D}_A$  que ocurre en un área unitaria de una superficie de discontinuidad tendrá para este criterio de fluencia modificado

una expresión distinta a la obtenida antes, al menos para el tramo curvo de la envolvente de la fig. (14a).

Para un punto P cualquiera sobre ella

$$\dot{D}_A = \vec{OP} \cdot (\vec{\delta u}_z + \vec{\delta u}_r)$$

Pero

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$\therefore \dot{D}_A = \vec{OA} \cdot \vec{\delta u}_z + \vec{OA} \cdot \vec{\delta u}_r + \vec{AP} \cdot (\vec{\delta u}_z + \vec{\delta u}_r)$$

y de la fig. 14b:

$$\vec{OA} \cdot \vec{\delta u}_z = 0$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{\delta u}_r = R_0 \delta u_r = R_0 \delta u_z \tan \theta$$

$$\vec{AP} \cdot (\vec{\delta u}_z + \vec{\delta u}_r) = R_0 \frac{\delta u_z}{\cos \theta}$$

$$\therefore \dot{D}_A = R_0 \delta u_z \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} = R_0 \delta u_z \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})}$$

Pero de la figura 14a:

$$R_0 = c \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$$

Por lo que la forma general de la función de disipación por unidad de área de superficie de deslizamiento es

$$D_A = c \int u_B \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \quad (57)$$

Puede verse que para un punto sobre el tramo recto, por ejemplo el Q, la expresión (57) toma la forma (51) obtenida antes, pues  $\theta = \phi$  para tales puntos.

Para calcular el intervalo de  $h_c$  debemos elegir una distribución de esfuerzos estáticamente admisible con el criterio de fluencia (5) modificado por (56), y un mecanismo de falla que contenga grietas de tensión.

En cuanto a la distribución de esfuerzos sigue siendo válida la usada en la aplicación anterior (Fig. 11); para que en ella no se viole la condición (56) debe ser cuando nos

$$R_o = \frac{1}{2} \gamma h$$

o sea

$$h = \frac{2R_o}{\gamma} = \frac{2c}{\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

y por el Primer Teorema de colapso

$$h_c \geq \frac{2c}{\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (58)$$

En cuanto al mecanismo de colapso para hallar una cota superior, puede usarse el mostrado en la Fig. 15 que resulta también muy simple y contiene una

grieta de tensión AB.

En tal mecanismo el bloque ABDE gira rigidamente en torno al punto B con una velocidad angular  $\omega$ .

En consecuencia las velocidades de desplazamiento a lo largo de la frontera BD de la zona plástica son perpendiculares a BD y varían linealmente con la distancia a B, siendo cero en este punto.

Puesto que la masa de suelo a la derecha de ABC está en reposo, otra condición de frontera es que en BC las velocidades de desplazamiento también son nulas.

Por la condición (42) en todo punto de la región plástica BCD, el vector velocidad de desplazamiento formará un ángulo  $\phi$  con BC, lo que físicamente indica como se mostró en la Fig. 9, deslizamiento paralelo a BC y expansión perpendicularmente. Tomando los ejes  $x$  - y indicados en la Fig. 15 (paralelos y normales a BC en cada punto), en cualquier punto de la zona BCD debe cumplirse (capítulo III, inciso 1) que  $\dot{\epsilon}_x = 0$  y  $\dot{\epsilon}_y = \omega \tan \phi$ . La ecuación (44) nos da entonces que en BCD

$$\dot{D} = c \cot \phi \cdot \omega \tan \phi = c\omega$$

\*En el trabajo indicado en la Ref. 18 se ha demostrado independientemente que la velocidad de deformación a lo largo de las líneas de falla es nula.

Tomando una longitud unitaria perpendicularmente al plano de la fig. 15, la energía total disipada en BCD vale:

$$D \cdot l^2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = c \omega l^2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

A lo largo de la superficie de discontinuidad BC la disipación es nula puesto que las velocidades de desplazamiento lo son, y en las discontinuidades AB y BD, la disipación  $\dot{D}_A$  también es nula como puede verse de la ecuación (57) pues  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Por otra parte la velocidad de disipación de energía por las fuerzas exteriores ( $W$  exclusivamente) si  $l$  es suficientemente pequeño, caso más desfavorable, vale  $\frac{\omega}{2} \gamma h l^2$ , pues el peso de la zona BCD puede despreciarse por ser pequeño de orden superior con respecto al peso de la parte ABDE.

Comparando la energía de disipación de las fuerzas exteriores e interiores como establece el Segundo Teorema de colapso plástico se tiene;

$$\frac{\omega}{2} \gamma h_c l^2 \leq c \omega l^2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$\therefore h_c \leq \frac{2c}{\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (59)$$

lo que nos da la frontera superior buscada.

Puede observarse que en este caso las fronteras inferior y superior (58) y (59) respectivamente) coinciden, por lo que de acuerdo con la teoría que esta-

mos usando podemos afirmar que

$$h_c = \frac{2c}{\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (60)$$

### 3. Presión pasiva y presión activa sobre muros de retención.

El planteamiento de este problema y su solución por cualquier método es indudablemente uno de los problemas prácticos de la Mecánica de Suelos más complejos debido a que involucra principalmente una interacción mutua entre el suelo y otra estructura de material distinto. El comportamiento de esta última estructura bajo la acción de las cargas y su libertad o sus restricciones para moverse son determinantes como es sabido en la magnitud y distribución de la presión ejercida sobre ella por el suelo, introduciendo por lo menos una incógnita adicional.

En virtud de que la distribución de la presión sobre el muro es en principio indeterminable teóricamente, excepto para fallas de zona<sup>o</sup>, al tratar el problema por medio de los teoremas de colapso plástico hace falta introducir una hipótesis adicional que es quizá el factor más importante. Esta hipótesis adicional

---

<sup>o</sup> Usamos los términos "falla de zona" y "falla de línea" introducidos por Brinch Hansen (Ref. 17) con el siguiente significado: ruptura de zona es aquel tipo de falla que ocurre cuando la condición de fluencia se satisface en todos los puntos de una región de la masa de suelo llamada zona de ruptura; ruptura de línea es el tipo de falla que se presenta cuando la condición de fluencia se satisface en todos los puntos de una superficie cilíndrica en la masa de suelo, cuya intersección con un plano perpendicular a sus generatrices se llama línea de ruptura.

es precisamente la distribución de presiones, y debe ser tal que sea la más congruente con las condiciones de deformación del muro; en la introducción de tal hipótesis pueden ser muy útiles las mediciones experimentales de la presión hechas para distintos tipos de estructura y diversos suelos.

Se ve entonces que en este problema cuando el mecanismo de colapso sólo contiene fallas de línea no puede haber una solución general y por tanto sólo se ilustrará el uso de los teoremas de colapso para los casos de empuje activo y empuje pasivo con una hipótesis de distribución de presiones muy simple: variación lineal, que para algunas características del muro puede ser adecuada. Cualquiera otra distribución puede introducirse para hallar la correspondiente solución por un procedimiento análogo.

Cuando las características del suelo y las condiciones de deformación del muro hacen posible predecir una falla de zona la distribución de presiones sí puede calcularse, bastando para ello considerar que en el mecanismo de colapso por cada punto del muro pasa una línea de deslizamiento (ver por ejemplo Ref. 17), o bien aplicar el Primer Teorema de colapso plástico en la forma que se indicará más adelante.

#### A. Presión pasiva

##### a) Cálculo de la cota inferior

Usaremos primero la distribución de esfuerzos mostrada en la Fig. 16, en que como puede verse se ha supuesto una variación lineal de la presión sobre el muro. En empuje pasivo el esfuerzo horizontal es el mayor.

Para que tal distribución proporcione una cota inferior no debe violarse la condición de fluencia (ecuación 5) en ningún punto de la masa de suelo; esto es, para el elemento más castigado ( $y = h$ ) debe cumplirse que

$$p - \gamma h = zc \cos \phi + (\gamma h + p) \tan \phi$$

de donde

$$p = \gamma h \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) + zc \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

y aplicando el Primer Teorema de colapso plástico

$$p_p \geq \gamma h \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) + zc \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (61)$$

b) Cálculo de la cota superior

Consideremos como mecanismo de falla el ilustrado en la Fig. 17 con la hipótesis de distribución hidrostática de presiones empleada.

Por la ecuación (51) la velocidad de disipación de energía por las fuerzas interiores es:

$$\dot{D}_A = \frac{h}{\cos \beta} = \frac{ch}{\cos \beta} \delta \dot{u}_x$$

La velocidad de disipación de energía por las fuerzas exteriores consta ahora de dos partes; la debida al peso  $W$  de la cota deslizante es

$$\vec{W} \cdot (\vec{\delta \dot{u}_x} + \vec{\delta \dot{u}_y}) = -\frac{\gamma h^2}{2} \tan \phi \frac{\delta \dot{u}_x}{\cos \phi} \cos(\phi - \beta)$$

y la producida por la presión del muro es

$$\left(\frac{ph}{2}\right) \cdot (\delta\dot{u}_x + \delta\dot{u}_y) = \frac{ph}{2} \frac{\delta\dot{u}_x}{\cos\phi} \sin(\beta - \phi)$$

Según el Segundo Teorema de colapso plástico, la falla no ocurrirá si para el mecanismo cinemáticamente admisible considerando se cumple que

$$\frac{ch}{\cos\beta} \delta\dot{u}_x \geq - \frac{\gamma h^2 \tan\beta \cos(\beta - \phi)}{\cos\phi} \delta\dot{u}_x + \frac{ph}{2} \frac{\sin(\beta - \phi)}{\cos\phi} \delta\dot{u}_x$$

De donde

$$P_p \leq \gamma h \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + 4c \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (62)$$

si se usa la condición de mínimo dada por  $\beta = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$ .

En consecuencia, cuando las condiciones de deformación del muro son tales que se cumple la hipótesis de distribución de la presión introducida, la presión pasiva total  $P_p$  por unidad de longitud de muro debe encontrarse en el intervalo

$$\frac{\gamma h^2}{2} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + ch \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \leq P_p \leq \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + 2ch \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (63)$$

#### B. Presión activa

Como en este caso lo que causa la falla de la masa de suelo es una disminución de la presión lateral, el Primer Teorema de colapso plástico nos da ahora la cota superior de la presión activa y el Segundo Teorema nos da la cota inferior de

la misma.

a) Obtención de la cota superior

Para la aplicación del primer teorema de colapso plástico haremos uso de la misma distribución de esfuerzos empleada en el caso de empuje pasivo, (Fig. 16) pero teniendo en cuenta que ahora el esfuerzo horizontal es el menor en la masa de suelo con  $y \leq h$  y que es una disminución en el valor de este esfuerzo horizontal lo que produce la falla.

Por la condición de fluencia expresada en la ecuación (5) debe cumplirse que para  $y = h$

$$\gamma h - p = 2c \cos \phi + (\gamma h + p) \sin \phi$$

de donde se obtiene fácilmente que

$$p = \gamma h \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - 2c \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

y por el Primer Teorema de colapso plástico puede afirmarse que

$$p_A \leq \gamma h \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - 2c \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (64)$$

b) Obtención de la cota inferior

Podemos emplear como mecanismo de colapso el representado en la Fig. 13 que se usó antes para el cálculo de la altura crítica de un talud vertical, usando en el caso que ahora se estudia la condición adicional de distribución hidrostática de presiones. En el inciso 1(b) de este mismo capítulo se calculó la veloci-

dad de disipación de energía debida a las fuerzas interiores para el mecanismo de la Fig. 13, que resultó (ecuación 53):

$$\frac{ch}{\cos\beta} \delta u_x$$

y la velocidad de disipación de energía debida al peso de la masa deslizante que vale, por la ecuación (54):

$$\frac{\gamma h^2}{2} \tan\beta \frac{\delta u_x}{\cos\beta} \cos(\phi+\beta)$$

Si la distribución de presiones es hidrostática la velocidad de disipación de energía de las fuerzas de presión sobre el muro vale:

$$-\frac{ph}{12} \frac{\delta u_x}{\cos\beta} \operatorname{sen}(\phi+\beta)$$

Para que la falla no ocurra debe cumplirse que

$$\frac{ch}{\cos\beta} \delta u_x \geq \frac{\gamma h^2}{2} \tan\beta \frac{\delta u_x}{\cos\beta} \cos(\phi+\beta) - \frac{ph}{12} \frac{\delta u_x}{\cos\beta} \operatorname{sen}(\phi+\beta)$$

es decir

$$p \geq \gamma h \tan\beta \cot(\phi+\beta) - 2c \frac{\cos\phi}{\cos\beta \operatorname{sen}(\phi+\beta)} \quad (65)$$

el máximo valor del segundo miembro de (65) se obtiene para  $\beta = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$

de donde

$$P_A \geq \gamma h \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - c \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (66)$$

Para las condiciones consideradas, entonces, la presión activa  $P_A$  por unidad de longitud de muro debe tener un valor comprendido en el intervalo

$$\frac{\gamma h^2}{2} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - 2c h \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \leq P_A \leq \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - c h \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (67)$$

Tanto en el caso de presión pasiva como en el de presión activa considerados, los intervalos para los valores de la presión pueden cerrarse considerando un mecanismo de colapso en que la línea de discontinuidad de desplazamientos sea una espiral logarítmica.

### C) Fallas de zona en problemas de presión de tierra.

Cuando en la masa de suelo en contacto con el muro se forma una zona de falla, es posible como se dijo antes, calcular la distribución de presiones sobre tal estructura. Suponiendo que en la Fig. 16 la distribución de esfuerzos verticales en la proximidad del muro está dada por

$$\sigma_y = \gamma y$$

se determinará la distribución de esfuerzos horizontales  $\sigma_x$  de modo que en cualquier punto de la masa de suelo contigua al muro se cumpla la condición de fluencia (5), es decir, de manera que se presente una falla de zona. Al ocurrir esto, para toda  $y$  comprendida en el intervalo  $0 \leq y \leq h$  debe cumplirse

que para un estado de empuje pasivo ( $\sigma_x > \sigma_y$ ):

$$\sigma_x - \gamma y = 2c \cos \phi + (\gamma y + \sigma_x) \sin \phi \quad (68)$$

y para un estado de empuje activo ( $\sigma_x < \sigma_y$ ):

$$\gamma y - \sigma_x = 2c \cos \phi + (\gamma y + \sigma_x) \sin \phi \quad (69)$$

De (68) y (69) se obtiene respectivamente:

$$\sigma_x = 2c \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) + \gamma y \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (70)$$

$$\sigma_x = -2c \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) + \gamma y \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \quad (71)$$

de donde se obtiene que la distribución de presiones en ambos casos es lineal.

Aplicando el Primer Teorema de colapso plástico se tiene

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{\text{pasivo}} &\geq \gamma y \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) + 2c \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\ (\sigma_x)_{\text{activo}} &\leq \gamma y \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) - 2c \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned} \right\} (72)$$

Puede verse que las expresiones (70) y (71) coinciden con los resultados de la teoría clásica (Refs. 5) y por tanto tales resultados están ambos del lado de la seguridad según se ve en las desigualdades (72).

#### 4. Capacidad de carga de cimentaciones

Considerando que la definición de capacidad de carga de una zapata desplantada sobre un material plástico perfecto coincide con la definición de sistema de cargas límite dada previamente, es posible acotar tal valor dentro de un intervalo conveniente aplicando los mismos conceptos de plasticidad que se han venido usando hasta aquí. Los detalles de este desarrollo pueden verse en la Tesis Profesional recientemente presentada (Ref. 18) en la que se llegó a los siguientes resultados:

A. El mecanismo de falla propuesto por Prandtl nos proporciona una cota superior de la capacidad de carga de una zapata de longitud infinita sobre material puramente cohesivo, siendo  $(2+\pi)c$  el valor de tal cota. Para el mismo tipo de zapata y material se puede obtener la cota inferior  $5c$  usando una distribución de esfuerzos conveniente estáticamente admisible, por lo que la presión de indentación queda acotada en el intervalo

$$5c \leq p \leq (2+\pi)c \quad (73)$$

La misma cota superior se obtiene usando el mecanismo propuesto por Hill, por lo que el valor  $(2+\pi)c$  es válido tanto para zapata lisa como para zapata rugosa.

B. Cuando la zapata es rectangular (con dimensiones de largo y ancho comparables), y está desplantada sobre material puramente cohesivo una generalización de las distribuciones de esfuerzos y de deformaciones usadas para los cálculos del

Inciso A proporcionan el siguiente intervalo para la capacidad de carga:

$$5c \leq p \leq \left[ (2+\pi) + 0.8 \frac{l}{m} \right] c \quad (74)$$

siendo  $\frac{l}{m}$  la relación del lado menor entre el lado mayor de la zapata.

Puede verse que cuando  $\frac{l}{m} \rightarrow 0$  (zapata muy larga) la expresión (74) nos da el mismo intervalo (73) calculado independientemente para zapata de longitud infinita.

Se puede demostrar que la misma cota inferior  $5c$  es válida para toda zapata plana con área de contacto limitada por un perímetro convexo cualquiera y desplantada sobre material puramente cohesivo.

C. Para una zapata de longitud infinita sobre material cohesivo y friccionante se obtiene que el intervalo dentro del cual debe caer el valor de la capacidad de carga está dado por las siguientes cotas

$$\text{Cota inferior: } c \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + 2c \tan^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + 2c \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (75)$$

$$\text{Cota superior: } c \cot \phi \left[ e^{\pi \tan \phi} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - 1 \right] \quad (76)$$

La cota inferior (75) da valores notablemente superiores a los de la frontera inferior obtenida por Shield (Ref. 19) cuya expresión es

$$\frac{1}{2} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \left\{ 1 + \tan \phi + \tan^2 \phi + (1 + \tan \phi)(1 + \tan^2 \phi) \right\}^{1/2} + 2c \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

La cota superior (76), en cambio, coincide con la dada por Prandtl y por Shield (Ref. cit.).

En la gráfica de la Fig. 18 aparecen, con fines de comparación, las curvas dadas por (75) y (76) así como la solución de Terzaghi al mismo problema y la frontera inferior de Shield.

D. Generalizando para tres dimensiones la distribución de esfuerzos usada para calcular (75) se encuentra que la misma expresión es válida como cota inferior de la capacidad de carga de una zapata rectangular apoyada sobre material cohesivo y friccionante, y se concluye finalmente que, análogamente a como ocurre con la frontera inferior del intervalo (74), la dada por (75) continúa siendo válida cuando se cambia la forma de la zapata siempre que el área de contacto sea plana y quede limitada por un polígono convexo de forma cualquiera.

La frontera superior de la capacidad de carga de una zapata rectangular sobre material cohesivo y friccionante también se ha calculado utilizando un mecanismo de colapso cinemáticamente admisible. Su valor depende de  $\phi$ , de  $c$  y de la rotación  $\frac{l}{m}$  y está dado por una expresión que puede escribirse en la forma

$$P \leq c \left\{ Q + \frac{l}{m} R \right\} \quad (77)$$

en que  $Q$  y  $R$  dependen sólo del parámetro  $\phi$  en la siguiente forma:

$$Q = \cot \phi \left\{ e^{-\pi \tan \phi} \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - 1 \right\} \quad (78)$$

$$R = \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \left\{ e^{\pi \tan \phi} \left[ 1 + e^{\pi \tan \phi} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^{1/2} + \left[ 1 + \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^{1/2} \right\}$$

$$+ \frac{2}{3} \operatorname{secc} \phi \operatorname{csc} \phi \left\{ \left[ 1 + e^{\pi \tan \phi} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^{3/2} - \left[ 1 + \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^{3/2} \right\}$$

$$- \frac{1}{2} \cot \phi \left\{ e^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - 1 \right\} - \frac{1}{2} \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \left\{ e^{\pi \tan \phi} + 1 \right\} \quad (79)$$

Para el caso particular de zapata de longitud infinita la cota dada por (77) coincide con la de la expresión (76) obtenida independientemente como solución bidimensional del mismo problema.

## V. CONCLUSIONES

En cada uno de los métodos usuales en la Mecánica de Suelos puede encontrarse cierto número de hipótesis comunes con la Teoría de la Plasticidad, y ocasionalmente procedimientos basados directa o indirectamente en ella; para comprobar esto basta observar que las hipótesis de la Plasticidad discutidas en el capítulo I, quedan todas ellas dentro del número mínimo de suposiciones de partida que se consideran en cualquiera de los procedimientos de cálculo empleados en Mecánica de Suelos. Sin embargo, las consecuencias de tales hipótesis de trabajo raramente se han considerado en todos sus aspectos, a tal grado que con el deseo explicable de obtener los métodos más simples para su aplicación por el ingeniero se haya caído en el abuso de hipótesis simplificadoras casi siempre en contradicción con las inicialmente adoptadas, o bien se haya dado poca o ninguna importancia a las condiciones de deformación de las masas de suelo y las estructuras en contacto con ellas, así como a la interacción y compatibilidad de ambas.

Como se mostró previamente (capítulo III) las incongruencias más importantes en los métodos usuales surgen cuando se estudian los tipos de falla que deben ocurrir en una masa de suelo en ciertas condiciones de trabajo. Se ha cometido sistemáticamente un error al considerar que la forma de las líneas de discontinuidad en una distribución de desplazamientos puede elegirse arbitrariamente como una hipótesis independiente de la ley de resistencia adoptada; se demostró que, como lo han señalado Drucker y Prager (Ref. 6), cuando se usa como ley de resistencia la ley de Coulomb  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  o una generalización cualquiera de

ella para materiales con  $\phi \neq 0$  (criterios generalizados de von Mises, Tresca, o Mohr-Coulomb) un mecanismo de falla cinemáticamente admisible sólo puede contener líneas de discontinuidad de desplazamientos rectas o espirales logarítmicas, y que los arcos circulares como líneas de discontinuidad sólo son admisibles en materiales cuyas condiciones de trabajo los hagan presentar un ángulo de fricción  $\phi$  nulo. En este sentido pueden criticarse el conocido método de Fellenius para estabilidad de taludes o presión de tierra cuando se utiliza en materiales friccionantes, pues emplea líneas de deslizamiento circulares; y el método de Brinch Hansen desarrollado principalmente para problemas de presión de tierra (Ref. 17) y que sólo considera como líneas de deslizamiento posibles, rectas, arcos circulares y combinaciones de ellas.

El mismo tipo de error se observa en todos los métodos conocidos que usan la hipótesis de incompresibilidad del suelo, pues como se puede ver de las ecuaciones (31) y (33) tal suposición tampoco es independiente de la ley de resistencia, y cualquier generalización de la ley de Coulomb implica necesariamente una expansión en el material que la satisfaga al ser sometido a esfuerzos cortantes, fenómeno observado experimentalmente y que se conoce en Mecánica de Suelos como dilatación (capítulo III, inciso I). Los métodos de Coulomb, Fellenius, Rendulic y Brinch Hansen, así como las aplicaciones que se hacen de la solución de Rankine de las ecuaciones que da la Plasticidad, contienen esta hipótesis contradictoria. En la exposición de su método de cálculo, Brinch Hansen (Ref. 17) considera que puede desprejiciarse la dilatación en virtud de que la zona plasti

ficada en una falla de línea es en general angosta; en opinión nuestra esta afirmación puede ser verdadera o falsa según el punto de vista; si se considera que lo importante de la dilatación es el cambio de volumen en sí, parece claro que en una falla de línea ésta sea despreciable, pero como se demostró en el capítulo III la importancia de la expansión volumétrica en una zona plastificada muy angosta radica en que es la condición que determina la forma de las líneas de deslizamiento, haciendo que estas no puedan ser arcos circulares. Por otra parte cuando todos los puntos de una región finita cumplen la ley de Coulomb la expansión volumétrica seguramente no puede considerarse despreciable. En contraposición con esto debe decirse que ni los métodos usuales ni los procedimientos que se han presentado basados en el análisis límite son aplicables al estudio de fallas progresivas que con mucha frecuencia se presentan en la naturaleza.

De los métodos mencionados en el párrafo anterior, en especial el método de Rendulic, por utilizar espirales logarítmicas como líneas de ruptura en suelos friccionantes puede proporcionar la misma cota que el Segundo Teorema de colapso plástico con un mecanismo cinemáticamente admisible, con sólo eliminar la hipótesis redundante de incompresibilidad. En estas condiciones el método de Rendulic aplicado a presión de tierra proporciona además del valor de ésta, el centro de rotación del muro (Ref. 17), que no puede obtenerse si se supone material incompresible.

En la breve exposición de los fundamentos teóricos del análisis límite presentada en el capítulo II puede observarse que, dentro del rango de validez de las

hipótesis y con el grado de aproximación que las mismas proporcionen, puede predecirse a partir de consideraciones puramente teóricas cuándo un resultado obtenido por el análisis plástico de un problema (o por cualquier otro de los procedimientos usuales que cumpla las hipótesis de la Plasticidad y no contra- rife sus implicaciones) está del lado de la seguridad o del lado contrario. Así, en la parte en que se presentan algunas aplicaciones pudo observarse que la altura crítica de un talud vertical en material cohesivo y friccionante dada por la teoría clásica de la Mecánica de Suelos (expresión (35)) está del lado contra- rio a la seguridad por representar una cota superior de tal altura, que la misma teoría da también tanto para empuje pasivo como para empuje activo valores del lado de la seguridad (expresiones (70), (71) y (72)), y que también son ligeramente inseguros los valores calculados por Prandtl para la capacidad última de una zapata de longitud infinita sobre material cohesivo lo mismo que sobre material cohesivo y friccionante; en cada uno de los problemas mencionados se acotó el valor correspondiente entre dos fronteras que para los fines prácticos pueden consi- derarse satisfactorias. En las gráficas que se presentan en la Fig. 10 se puede apreciar que el valor de la capacidad de carga de la conocida solución de Terzaghi al problema bidimensional (valor  $N_c$ , Ref. 5) está del lado contrario a la segu- ridad para todo valor de  $\phi$ .

Por otra parte se logró acotar superiormente la capacidad de carga de una zapata rectangular sobre material cohesivo y friccionante; cuando uno de los lados de la zapata crece indefinidamente, la expresión general de tal cota tiende al va-

lor calculado previamente por Prandtl para el caso particular de zapata de longitud infinita. La cota inferior (75) nos da el otro extremo del intervalo correspondiente a este problema tridimensional. Las dos fronteras de tal intervalo para diversos valores de  $\phi$  y  $\frac{1}{m}$  se presentan en la Tabla 1.

Por supuesto, como cualesquiera otros procedimientos de cálculo, los métodos de análisis límite están basados en un conjunto de suposiciones simplificatorias y aproximaciones (discutidas en el Capítulo I) lo que hace importante y aun necesaria la comparación entre las predicciones y los resultados experimentales. En virtud de que los procedimientos presentados son autoconsistentes, esto es, congruentes en todo caso con las hipótesis de partida y sus implicaciones, de los resultados de tal comparación podrá estimarse el valor de las hipótesis adoptadas.

Es fácil darse cuenta de que el punto más débil o más discutible (de hecho está ya en plena discusión y reexaminación) es sin duda el relativo a la ley de resistencia del suelo, pues, como se ha señalado, los criterios existentes pasan por alto muchos aspectos y siguen sin interpretar muchos fenómenos observados en el comportamiento de los suelos. Sin embargo, cuando las posibles interpretaciones reológicas o termodinámicas que se investigan actualmente lleguen a los resultados que parecen prometer, es probable que algunos de ellos puedan incorporarse al conjunto de fundamentos del análisis límite con la misma facilidad, en principio, con que se han introducido los criterios de resistencia usuales.

## VI. REFERENCIAS

1. A. Casagrande y W.L. Shannon, "Research on stress-deformation and strength characteristics of soils and soft rocks under transient loading" Publications from the Graduate School of Engineering No. 447, Junio 1948, Harvard University.
2. P. Habib, "La resistance au cisaillement des sols", Tesis Doctoral Universidad de Paris, 1952.
3. D.C. Drucker, R.E. Gibson y D.J. Henkel, "Soil Mechanics and work-hardening theories of plasticity" Trans, ASCE, Paper No. 2864.
4. K.H. Roscoe, A.N. Schfield y C.P. Wroth, "On the yielding of soils" <sup>que cito</sup> Geotechnique Vol. 8 No. 1, 1958.
5. K. Terzaghi, "Theoretical soil mechanics", John Wiley and Sons, Inc. Nueva York, 1954.
6. D.C. Drucker y W. Prager, "Soil mechanics and plastic analysis or limit design", Quart. Applied Mathematics, Vol. 10, 1952.
7. W.M. Kirkpatrick "The condition of failure for sands", Proc. IV International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 1, Londres, 1957.
8. J. Brinch Hansen, "A general plasticity theory for clay", Geotechnique Vol. 3, No. 4, 1952.
9. A.W. Skempton, "The pore-pressure coefficients A and B", Geotechnique Vol. 4, No. 4, 1954.

10. A.W. Bishop, "The use of pore-pressure coefficients in practice" *Geotechnique*, Vol. 4, No. 4, 1954..
11. A.E. Green y W. Zerna, "Theoretical Elasticity", Oxford University Press, 1960.
12. D.C. Drucker, "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations", Proc. First U.S. National Congress of Applied Mechanics, Junio, 1951
13. W.T. Kofter, "General theorems for elastic plastic solids", *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 1, 1960.
14. R.T. Shield y D.C. Drucker, "The application of limit analysis to punch-indentation problems", *J. Applied Mechanics*, Vol. 20, No. 4 1953.
15. W. Prager y P.G. Hodge, "Theory of perfectly plastic solids", John Wiley and Sons, Inc. Nueva York, 1951.
16. O. Hoffman y G. Sachs, "Introduction to the theory of plasticity for engineers", Mc-Graw-Hill Book Co. Inc., 1953.
17. J. Brinch Hansen, "Earth pressure calculation", The Danish Technical Press, Copenhagen, 1953.
18. D. Roséndiz N, "Aplicación del análisis límite al cálculo de la capacidad de carga de cimentaciones", Tesis Profesional, UNAM, 1961.
19. R.T. Shield, "On Coulomb law of failure in soils", *J. Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 4, No. 1, 1955.

## AGRADECIMIENTO

El autor expresa su sincero agradecimiento al Ing. Raúl J. Masari y al Dr. Emilio Rosenbluath, Director del Instituto de Ingeniería, por las facilidades brindadas para la elaboración de este trabajo. Asimismo agradece la orientación y ayuda del Ing. Javier Salazar Rosinas, director de la tesis, y del Dr. Melchor Rodríguez Caballero.



FIG. 1.- MATERIAL ELASTOPLASTICO PERFECTO.

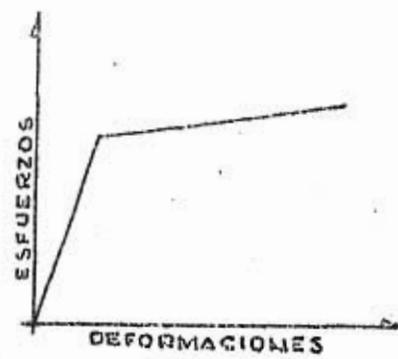


FIG. 2.- MATERIAL ELASTOPLASTICO CON ENDURECIMIENTO POR DEFORMACION

70.

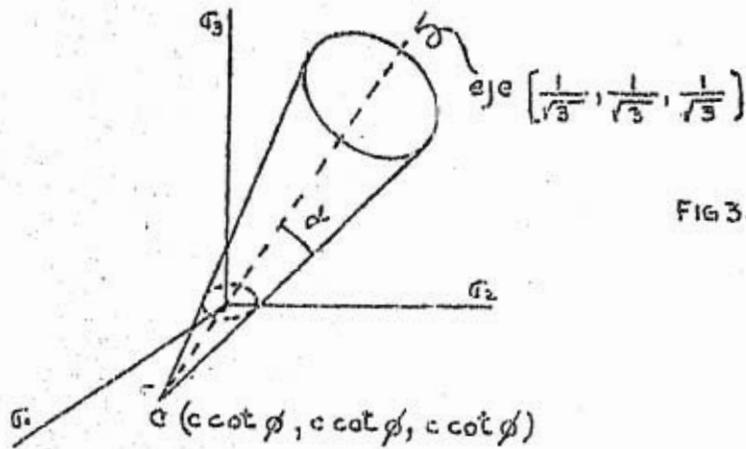


FIG. 3.- SUPERFICIE DE FLUENCIA DEL CRITERIO DE VON MISES GENERALIZADO.

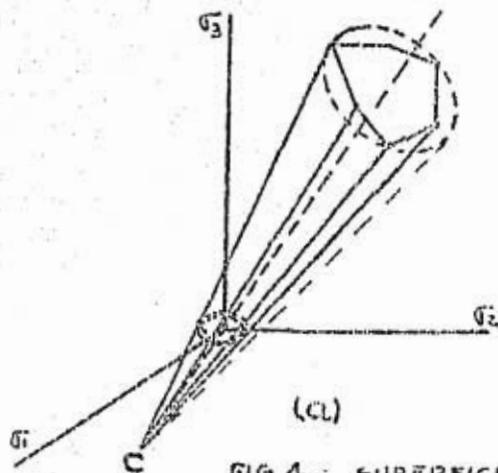
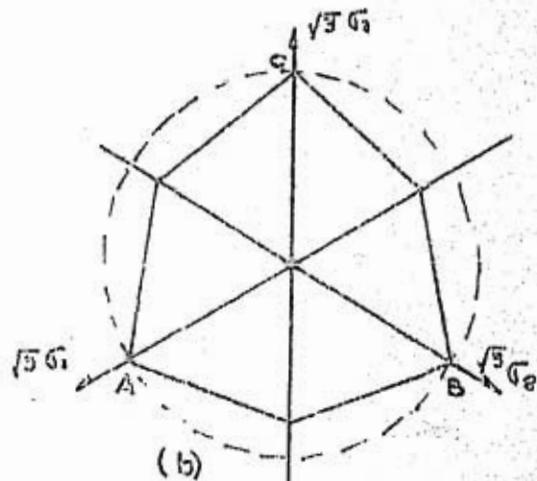


FIG. 4.- SUPERFICIE DE FLUENCIA DEL CRITERIO MOHR-COULOMB GENERALIZADO; (a) REPRESENTACION EN EL ESPACIO  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ; (b) CORTE SEGUN UN PLANO OCTAEDRICO



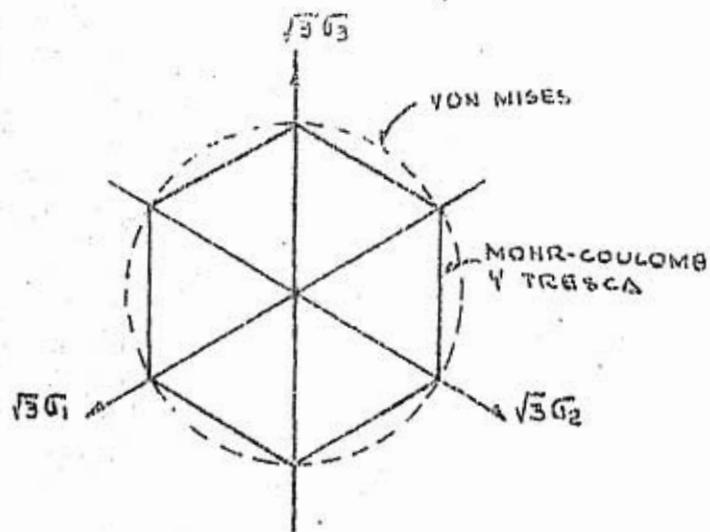


FIG. 5.- CORTE SEGUN UN  $\Omega$  OCTAEDRICO DE LA SUPERFICIE DE FLUENCIA PRISMATICA PARA MATERIAL CON  $\phi = 0$ , SEGUN LOS CRITERIOS DE MOHR-COULOMB, TRESCA Y VON MISES

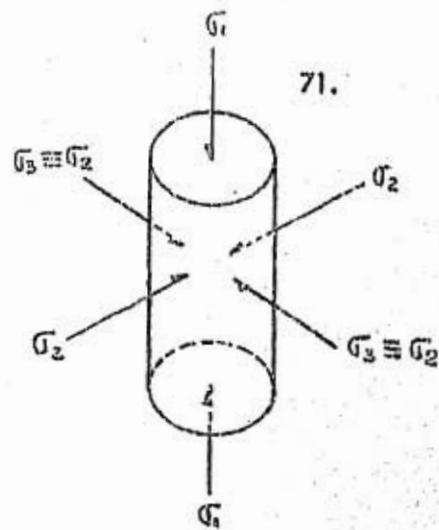


FIG. 6.- ESTADO DE ESFUERZOS CILINDRICO

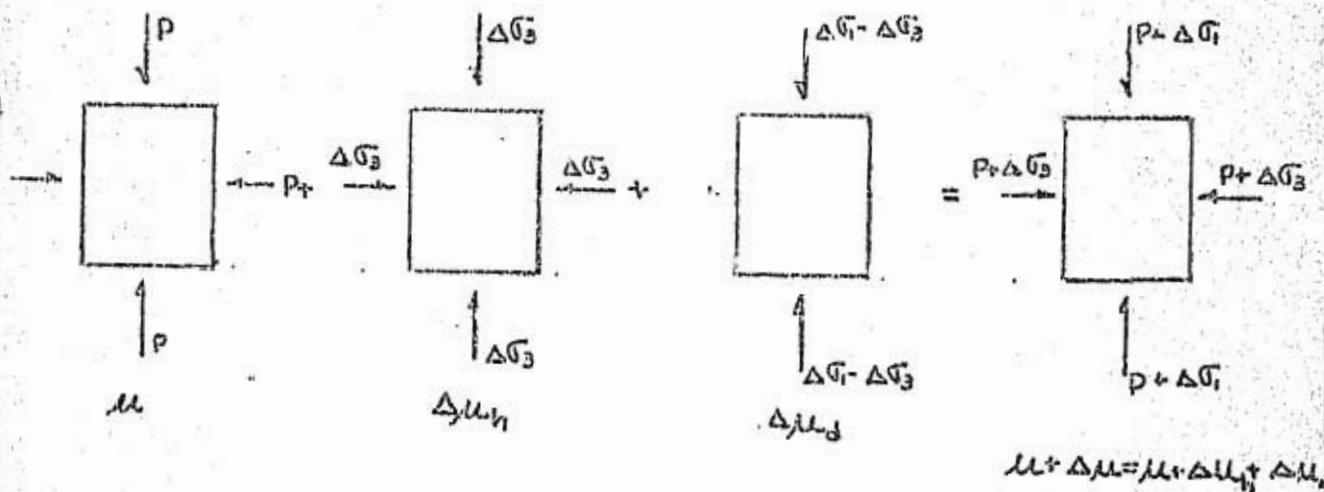


FIG. 7.- INCREMENTOS DE ESFUERZOS PRINCIPALES E INCREMENTOS CORRESPONDIENTES DE LA PRESION DE PORO

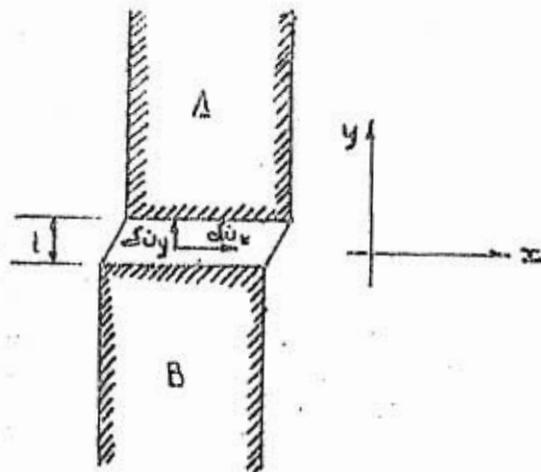


FIG. 8. - DESLIZAMIENTO SIMPLE

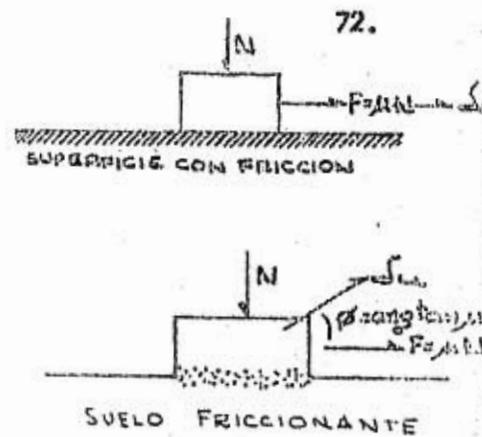


FIG. 9. - LEY DE COULOMB

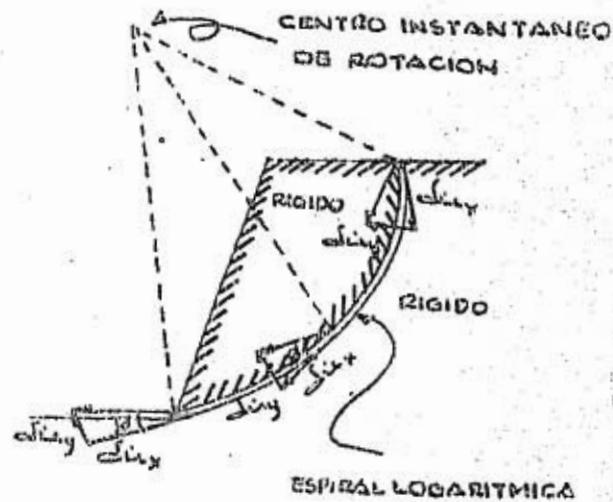
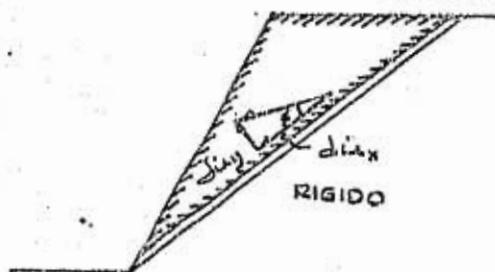


FIG. 10. - LINEAS DE FALLA PERMISIBLES

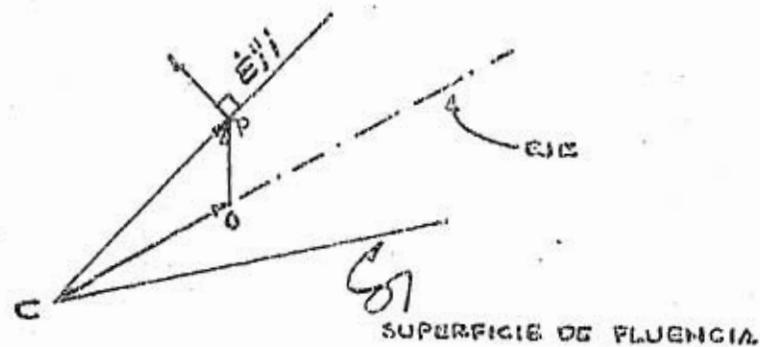


FIG. 11



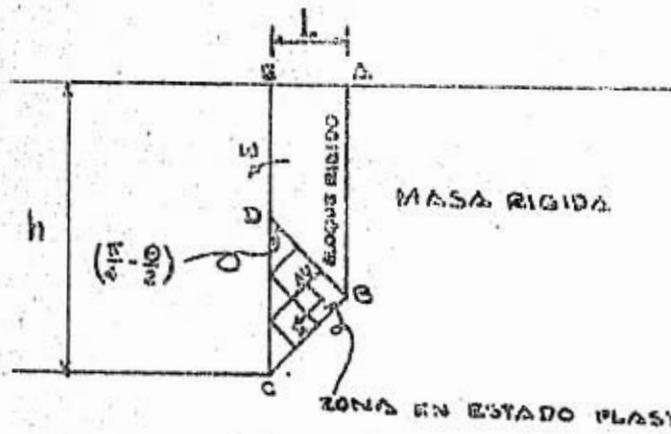


FIG. 15.- MECANISMO DE FALLA CINEMATICAMENTE ADMISIBLE PARA UN TALUD VERTICAL CONSIDERANDO GRIETA DE TENSION (PROPUESTO POR D.C. DRUCKER.)

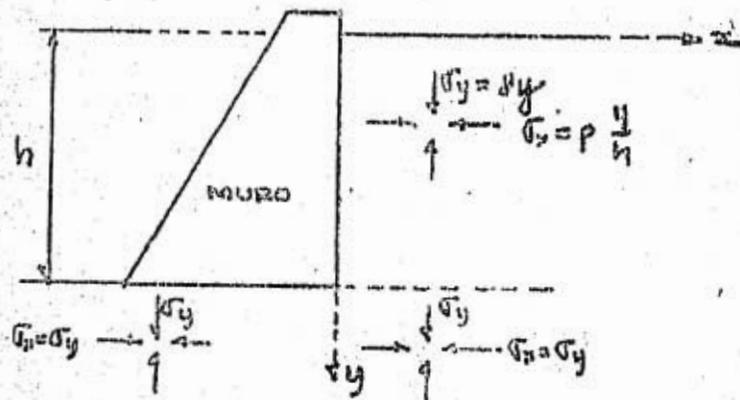


FIG. 16.- DISTRIBUCION DE ESFUERZOS ESTATICAMENTE ADMISIBLE CON VARIACION LINEAL DE LA PRESION

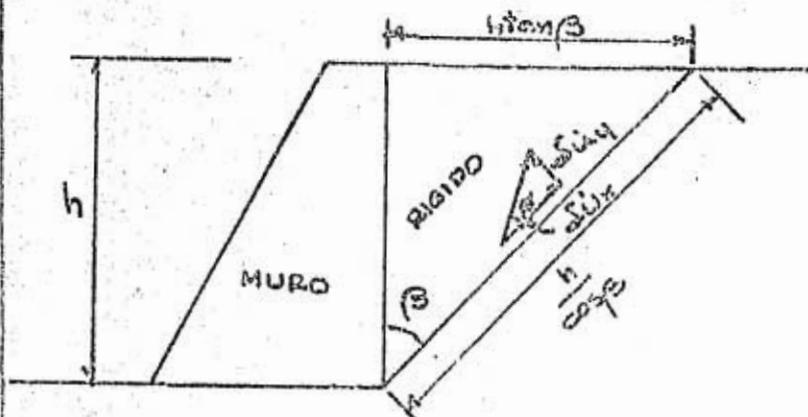


FIG. 17.- MECANISMO DE FALLA DE PRESION PASIVA

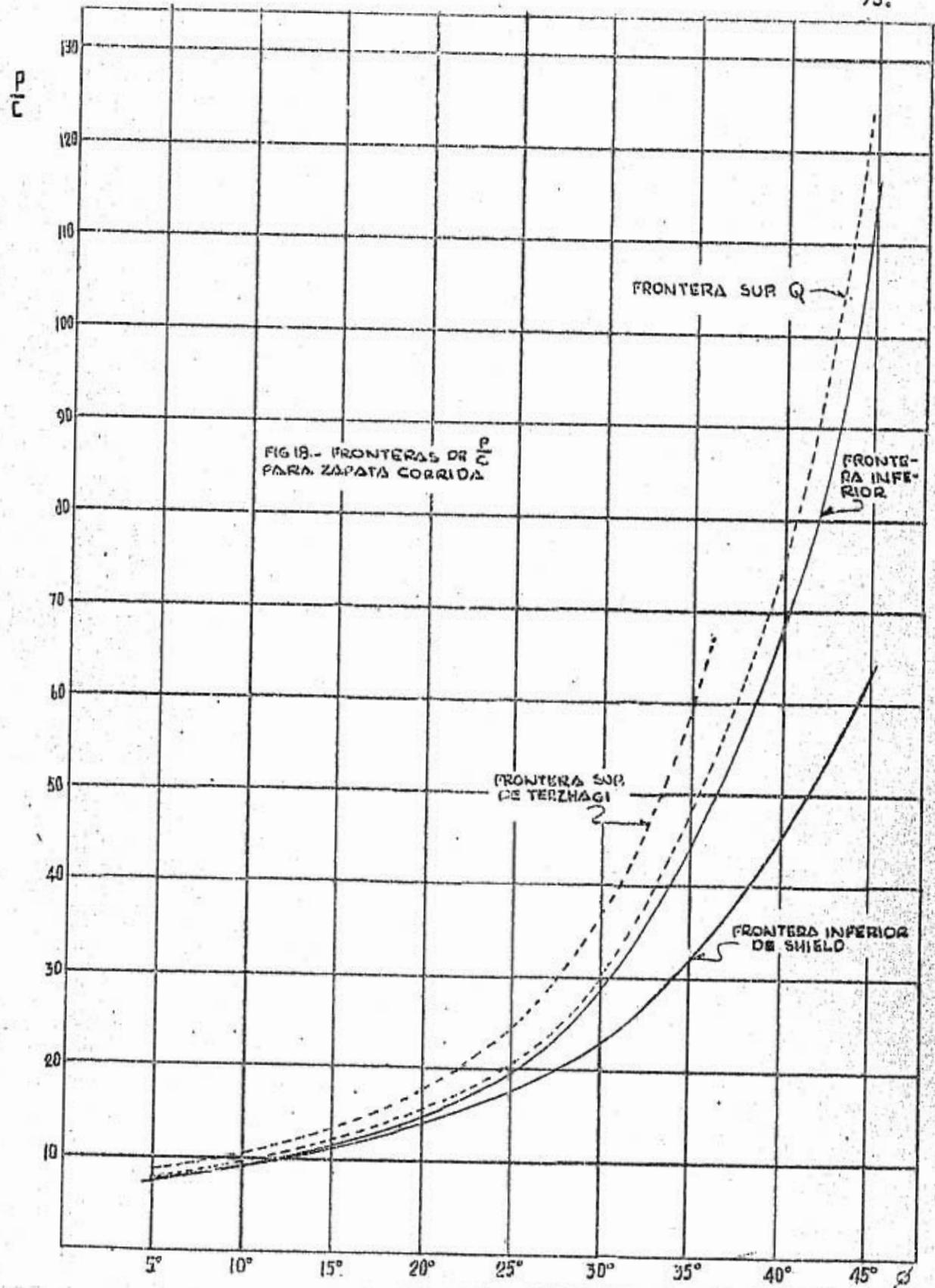


TABLA I

COTAS SUPERIOR E INFERIOR DE  $\frac{P}{C}$  PARA ZAPATA RECTANGULAR

$\beta$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0	5.14 5.00	6.47 6.33	8.35 8.17	10.97 10.79	14.84 14.62	20.73 20.40	30.14 29.45	46.13 44.18	75.28 69.37	133.86 114.98
0.1	5.22 5.00	6.59 6.33	8.55 8.17	11.31 10.79	15.44 14.62	21.87 20.40	32.41 29.45	50.94 44.18	86.31 69.37	162.23 114.98
0.2	5.30 5.00	6.71 6.33	8.75 8.17	11.65 10.79	16.05 14.62	23.01 20.40	34.68 29.45	55.76 44.18	97.35 69.37	190.61 114.98
0.3	5.38 5.00	6.83 6.33	8.95 8.17	11.98 10.79	16.65 14.62	24.15 20.40	36.95 29.45	60.57 44.18	108.39 69.37	218.99 114.98
0.4	5.46 5.00	6.95 6.33	9.15 8.17	12.32 10.79	17.26 14.62	25.28 20.40	39.22 29.45	65.38 44.18	119.43 69.37	247.36 114.98
0.5	5.54 5.00	7.07 6.33	9.35 8.17	12.66 10.79	17.87 14.62	26.42 20.40	41.49 29.45	70.20 44.18	130.47 69.37	275.76 114.98
0.6	5.62 5.00	7.18 6.33	9.55 8.17	12.99 10.79	18.47 14.62	27.56 20.40	43.76 29.45	75.01 44.18	141.51 69.37	304.12 114.98
0.7	5.70 5.00	7.30 6.33	9.75 8.17	13.33 10.79	19.08 14.62	28.69 20.40	46.03 29.45	79.82 44.18	152.55 69.37	332.49 114.98
0.8	5.78 5.00	7.43 6.33	9.95 8.17	13.67 10.79	19.69 14.62	29.83 20.40	48.30 29.45	84.64 44.18	163.59 69.37	360.81 114.98
0.9	5.86 5.00	7.55 6.33	10.15 8.17	14.00 10.79	20.29 14.62	30.97 20.40	50.56 29.45	89.45 44.18	174.62 69.37	389.25 114.98
1.0	5.94 5.00	7.66 6.33	10.34 8.17	14.34 10.79	20.90 14.62	32.11 20.40	52.83 29.45	94.26 44.18	185.66 69.37	417.62 114.98

76.