

T-185
R
DES

01149

0364

128

246

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DEL DOCTORADO

Estudio bibliográfico del comportamiento reológico
del concreto

Tesis para obtener el grado
de maestro en ingeniería
(especialidad: estructuras)
que presenta el Ing. Civil
Fernando Rozado Pérez

1962

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Indice	i
Títulos de las figuras	ii
Introducción	1
I. Comportamiento del concreto	2
II. Reología	8
III. Teoría del flujo del concreto	16
A. Teoría lineal del cuerpo viscoelástico	16
1. Ecuaciones fundamentales	16
2. Estado de esfuerzos producido por la deformación	20
3. Efectos de la temperatura	23
4. Efectos producidos por la contracción	25
B. Teoría del envejecimiento	26
1. Ecuación fundamental	26
2. Estado de esfuerzos producido por la contracción	27
3. Estructuras de concreto presforzado	31
4. Estado de desplazamientos y rigidez	37
5. Relajación de esfuerzos en estructuras de concreto	40
6. Flujo no lineal del concreto	43
7. Relajación de esfuerzos	46
IV. Observaciones y conclusiones	51
Referencias	56
Figuras	58

Títulos de las figuras

- Fig. 1** Diagrama. Reducción de la humedad relativa del concreto en % - deformación relativa de contracción.
- Fig. 2** Diagrama. Aumento de la humedad relativa en % - deformación relativa.
- Fig. 3** Diagrama. Variación de la humedad relativa en % - deformación relativa.
- Fig. 4** Elemento elástico lineal
- Fig. 5** Elemento viscoso lineal
- Fig. 6** Elemento friccionante
- Fig. 7** Diagrama deformación-tiempo
- Fig. 8** Diagrama esfuerzo-tiempo
- Fig. 9** Función Heaviside
- Fig. 10** Diagrama velocidad de fluencia-esfuerzo cortante
- Fig. 11** Modelo de Freudenthal y Roll
- Fig. 12 y 13** Modelo de Gluelich
- Fig. 14, 15 y 16** Sección transversal
- Fig. 17** Diagrama $\beta(t) - \sigma_c(t)/R$
- Fig. 18, 19 y 20** Diagramas $\beta(t) - t$
- Fig. 21** Sección transversal

INTRODUCCION

1.

El flujo, contracción y variación de las propiedades mecánicas del concreto con el tiempo en ocasiones influyen considerablemente en el estado de esfuerzos y deformaciones. Se conoce que en estructuras de concreto bajo carga prolongada las deformaciones inelásticas debidas al flujo pueden ser varias veces mayores que las deformaciones iniciales instantáneas, reduciendo la estabilidad de la estructura. Al mismo tiempo se presenta redistribución de esfuerzos entre el concreto y refuerzo. En caso que el estado de esfuerzos sea producido por la deformación, el flujo conduce a la relajación de esfuerzos y en ocasiones cambia cualitativamente el estado de esfuerzos.

Es por esto que para la determinación del estado de esfuerzos en estructuras de concreto simple, reforzado y presforzado bajo carga, bajo causas especiales (variación de temperatura, contracción del concreto, etc.) y en aquellas en que la aparición y desarrollo de grietas es inadmisibles desde el punto de vista de su funcionamiento, es necesario considerar la deformabilidad y variación de las propiedades mecánicas del concreto con el tiempo.

El propósito de este estudio es presentar un esquema del conocimiento actual sobre el comportamiento del concreto con el tiempo.

En el primer capítulo se presentan los resultados fundamentales del comportamiento del concreto obtenidos experimentalmente.

Tomando en cuenta la tendencia de estudiar el problema mediante modelos reológicos, en el segundo capítulo se da un breve resumen de reología y los resultados obtenidos últimamente.

En el tercer capítulo se presentan las ideas básicas de la teoría del flujo del concreto.

El autor expresa su agradecimiento al Dr. Melchor Rodríguez Caballero por haber sugerido el tema de tesis, al M. en I. Javier Salazar Resines por su ayuda prestada como consejero, al Dr. Emilio Rosenbluth por la revisión crítica y al Instituto de Ingeniería por las facilidades brindadas.

CAPITULO I

COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO

Se han propuesto varias teorías para tratar de explicar el mecanismo interno de la deformación del concreto con el tiempo. Entre ellos se pueden citar la teoría viscosa, la teoría plástica, la teoría de la filtración, etc. (19). Ninguna de las teorías anteriores puede explicar totalmente el problema, habiéndose comprobado experimentalmente que en distintas etapas se presentan en diverso grado, flujo viscoso, flujo plástico y filtración. No es posible precisar qué parte del flujo se debe a cada factor, pero es probable que ello dependa de las condiciones a que está sujeto el concreto.

Desde el punto de vista estructural los fenómenos de flujo y contracción del concreto dependen de los procesos físico-químicos que se presentan durante la hidratación del cemento y la expulsión o absorción del agua. El concreto está compuesto de material granular, pasta de cemento, micro y macroporos llenos de agua, vapor y aire. La microestructura de la pasta de cemento está formada fundamentalmente de granos no hidratados, soluciones y un conjunto de productos hidratados que forman el coloide gel (forma de materia intermedia entre líquido y sólido). Estudios de Grudemo (14) señalan que el proceso de hidratación presenta tres etapas. En la primera se forma la estructura fundamental que es el coloide. La segunda etapa, caracterizada por la reducción de la hidratación primaria, se manifiesta en la formación de la estructura cristalina de tipo fibroso. En la última etapa de carácter transitorio se presentan recristalización y otros cambios, todos ellos a velocidad muy baja.

De las dos fases que componen la pasta de cemento el gel es la de mayor estabilidad estructural, mientras que la fase amorfa es la que contiene la mayor cantidad de agua. El agua en el concreto puede separarse en tres grupos fundamentales: 1) agua químicamente combinada; 2) agua coloidal; 3) agua libre. El agua químicamente combinada forma parte de los fenómenos irreversibles. La cantidad de agua coloidal se reduce constantemente por la transformación del coloide a gel. El agua libre disminuye continuamente por evaporación e hidratación del cemento.

Grudemo ha encontrado que la variación que se presenta en la composición química del cemento no altera sustancialmente la microestructura del producto final.

Según la concepción actual (4) la contracción y expansión

del concreto se deben fundamentalmente a las variaciones volumétricas del gel. Los fenómenos capilares producidos por la filtración también influyen, pero tienen un carácter secundario. Experimentalmente se ha concluido que la relación deformación por contracción-humedad relativa se inicia a partir de cierto contenido de humedad (humedad crítica) con variación rápida transformándose en una recta según muestra la fig. 1. En caso que la humedad exterior sea mayor que la del concreto, la gráfica se inicia a partir de cierto grado de saturación en forma semejante al caso anterior; la parte final de la curva refleja la expansión volumétrica del gel (fig. 2). El proceso repetido de evaporación y humedecimiento conduce a la combinación de las curvas anteriores, presentándose un fenómeno de histéresis, y las deformaciones son irreversibles (fig. 3).

Para poder controlar convenientemente las deformaciones de flujo y contracción es necesario saber cuáles son los factores más importantes que influyen en los fenómenos anteriores. A continuación se presentan algunos de ellos y su efecto en el comportamiento del concreto con el tiempo, obtenidos con base en pruebas experimentales realizadas en varios países.

1. Calidad del cemento

Durante la hidratación del cemento se libera gran cantidad de calor, que en estructuras usuales y condiciones normales de trabajo se disipa rápidamente por radiación. Las variaciones de temperatura dentro de la estructura son relativamente bajas y de poca importancia. En estructuras masivas la baja conductividad térmica del concreto impide la radiación rápida pudiéndose presentar temperaturas elevadas en el interior de la masa, que en ocasiones conducen a una contracción considerable y agrietamiento. Por tanto, los cementos de alto calor agudizan los problemas anteriores. Sin embargo, la porosidad del gel aumenta con el tamaño del grano del cemento.

2. Contenido de humedad y relación agua-cemento

Como se dijo anteriormente, en concretos con un contenido de humedad (o con una relación A/C) elevado la contracción se inicia a partir de un contenido crítico, después de lo cual se manifiestan los cambios volumétricos del gel. El valor de la humedad crítica aumenta con la relación agua-cemento (1).

Por otro lado, para relaciones A/C altas la evaporación es

más intensa, produciéndose mayores esfuerzos de contracción y grietas.

Experimentalmente se ha comprobado (2) que para relaciones A/C bajas las diferencias de temperatura producidas por la hidratación se disipan rápidamente.

3. Cantidad de cemento

Para una relación A/C dada, a mayor cantidad de cemento en el concreto la contracción se inicia más tarde y su magnitud aumenta debido a que la evaporación superficial es más intensa (2); la distribución de humedad es menos uniforme, lo que hace que el comportamiento de estos concretos sea más desfavorable desde el punto de vista de los esfuerzos de contracción. Además, la parte fundamental del flujo viscoso se debe a la pasta de cemento, por tanto en concretos ricos en cemento la magnitud del flujo aumenta.

4. Propiedades de los agregados

Según Fluck y Washa (9) los agregados densos con un módulo de elasticidad elevado y baja absorción reducen la contracción y flujo del concreto. Lo mismo resulta al aumentar el tamaño máximo del agregado y cuando se emplea mejor granulometría. A mayor concentración volumétrica del agregado al flujo se reduce por la resistencia que presenta al flujo viscoso de la pasta de cemento.

De acuerdo con Hansen (14) la permeabilidad del agregado favorece al proceso de filtración.

5. Condiciones de humedad

Según Hansen (14) la primera etapa de la evaporación afecta al flujo debido a cierta modificación irreversible en la estructura del gel, la cual no se repite en las etapas subsiguientes. Picket atribuye dicha modificación a que las partículas adquirieron una posición más estable desarrollando vínculos químicos que previenen una separación futura. La aparición de grietas intensifica la evaporación (ver inciso 7).

6. Etapas de hidratación al aplicar la carga

Se ha comprobado que cuanto más avanzado se encuentre el

proceso de hidratación al aplicar la carga, la magnitud del flujo se reduce debido a que la estructura del concreto es más estable. El curado en vapor acelera la hidratación, reduciendo el flujo.

Como en el inciso 2, entre menos edad del concreto a la cual se aplique carga más tardía y mayor será la contracción (1).

7. Tamaño de la estructura

Al aumentar el tamaño se reduce la superficie específica disminuyéndose la velocidad y magnitud del flujo y contracción, pero ésta última es más uniforme (6). En general, el proceso de evaporación en la superficie se inicia en forma intensa dando lugar a tensiones en los poros capilares, con lo que la densidad del gel y la resistencia en los capilares aumentan reduciendo la evaporación e hidratación. En elementos de gran tamaño la reserva de agua libre es mayor, con lo que aumenta la velocidad de formación y cantidad de CaCO_3 , el cual se sedimenta en la superficie obstruyendo la evaporación de la masa interior y reduciendo la uniformidad de la contracción.

8. Proceso de compactación

La magnitud del flujo varía inversamente con la densidad del concreto. El vibrado, además, disipa los esfuerzos internos producidos por la contracción no uniforme y permite utilizar menor cantidad de agua y cemento, reduciendo el flujo y la contracción.

9. Variaciones de la temperatura

De acuerdo con Hansen (14) la magnitud del flujo aumenta con la temperatura. Las deformaciones de la pasta y agregado producidas por la temperatura son distintas dando lugar a esfuerzos internos.

10. Tipo y nivel de esfuerzos

En general, la aplicación de carga exterior acelera el flujo y contracción del concreto.

Dentro del rango de esfuerzos de trabajo el flujo es proporcional al esfuerzo aplicado. Experimentalmente se ha obtenido (17) que para esfuerzos del 70% de la resistencia, R , del con

creto la no linealidad decrece y después de un tiempo las deformaciones de fluencia se hacen proporcionales al esfuerzo. Esto se debe a que en el momento inicial la relación σ/R es grande, pero al aumentar R con el tiempo la anterior decrece hasta que la relación esfuerzo-deformación por fluencia se hace lineal. Si la edad del concreto al aplicar la carga es avanzada, la no linealidad puede conservarse puesto que el incremento de R puede no ser suficiente.

En pruebas (18) bajo esfuerzos de tensión elevados resultó que el flujo es proporcional al esfuerzo para $\sigma = 0.91R$.

Las deformaciones de flujo y contracción no son aditivas (3). Esto hecho es cierto tanto en compresión como en tensión. La suma de los efectos separados es menor que la deformación conjunta. A menor resistencia (menor edad y mayor relación A/C) y esfuerzo mayor la diferencia en la aditividad es mayor.

En elementos bajo tensión la evaporación es más rápida que en elementos sin carga (5). En elementos bajo compresión a mayor dimensión la evaporación es más rápida. De acuerdo con las pruebas, en elementos con un módulo de superficie reducido los factores más importantes son los volumétricos que aumentan la velocidad de evaporación, mientras que en elementos con un módulo mayor predominan los factores superficiales que reducen la velocidad de evaporación.

En las mismas pruebas resultó que el coeficiente de Poisson aumenta con la carga debido a cierta deformación del concreto producida por la presencia de poros, los cuales se deben a la imperfectación de la compactación y la presencia de agua que se consume en la hidratación y evaporación, y la aparición de microgrietas.

Al aplicar una carga en el concreto el esfuerzo se distribuye entre las componentes viscosa y granular produciéndose flujo en ambas, siendo la primera de mucho mayor importancia. Debido a esto se manifiesta una redistribución de esfuerzos de la pasta al agregado. Puesto que el flujo del gel varía directamente con la relación del esfuerzo a la resistencia y debido a que dicha resistencia aumenta con el tiempo como consecuencia de la cristalización y a que la estructura rígida del agregado retarda el fenómeno, la velocidad del flujo se reduce con el tiempo.

La estructuración del concreto es un proceso producido por

la hidratación continua del concreto. La estructura inicial está orientada en forma arbitraria, excepto por la influencia que impongan los fenómenos de flujo y contracción.

Al aplicar un esfuerzo, sea variable o constante, la hidratación se acelera con respecto a lo que ocurre en la ausencia de esfuerzo, pero en ambos casos presenta las mismas etapas. En el concreto el esfuerzo se distribuye entre las componentes viscosa y granular. En la primera componente la cristalización que se presenta desde este momento tenderá a orientarse en una forma conveniente para resistir el esfuerzo aplicado, encontrando resistencia por parte de la estructura anterior que se encuentra en etapa de recristalización. Estos cambios cualitativos se manifiestan exteriormente con la aparición de pequeñas fisuras o microgrietas que representan reajustes estructurales. Este proceso de reajuste y reorientación no se presenta en toda la masa al mismo tiempo debido a las heterogeneidades del material y distribución de esfuerzos. Una vez logrado el cambio las fisuras desaparecen, pero pueden aparecer en otras zonas de la masa. Si el proceso de carga es rápido, es posible que el elemento falle antes de que la estructura interna logre la orientación más estable en cuanto al esfuerzo aplicado. Si el proceso de carga es lento, puede ser que se logre la máxima estabilidad en la mayor parte de la estructura. Los cambios anteriores se presentan en forma de saltos, y es por lo que en la representación gráfica $\epsilon - t$ se manifiestan en forma de irregularidades que desaparecen al verificarse el salto. El siguiente salto que pueda presentarse deberá ser menor, hasta que llegue un momento en que los cambios sean prácticamente imperceptibles. Si se incrementan los esfuerzos aplicados, en algún instante aparecerán microgrietas progresivas que conducirán a la falla del elemento.

A todo esto hay que agregar el fenómeno de evaporación que es el responsable de la aparición de capilares, los cuales presentan nuevas trayectorias potenciales de reajuste y agrietamiento. El proceso de evaporación es decreciente con el tiempo, lo que hace más brusca la diferencia entre cada salto.

CAPITULO II

REOLOGIA

La reología (21) es la rama de la física relacionado con el flujo y deformación de los materiales. En ella se estudia el comportamiento de los materiales viscoelásticos, en los cuales los efectos del tiempo, y consecuentemente la velocidad, juegan un papel importante.

El comportamiento reológico de los materiales queda determinado por la relación entre esfuerzos y deformaciones y sus derivadas respecto al tiempo. Esta relación recibe el nombre de ecuación reológica (8). Los parámetros que en ella aparecen son las constantes reológicas, mientras que los esfuerzos y las deformaciones son las variables.

Tomando en cuenta que el comportamiento de los materiales es distinto, bajo cambios de volumen y bajo distorsión, es conveniente plantear dos ecuaciones reológicas independientes.

En la teoría lineal de la elasticidad (13) las ecuaciones de equilibrio referidas a un sistema cartesiano ortogonal se expresan en la forma

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0 \quad (11.1)$$

en que σ_{ij} son las componentes del tensor esfuerzo, f_i son las componentes de la fuerza de cuerpo por unidad de masa, ρ es la densidad y la coma representa derivación parcial respecto a la coordenada x_j .

Las relaciones deformación-desplazamiento son:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (11.2)$$

en donde ϵ_{ij} son las componentes del tensor deformación y u_i son las componentes del tensor desplazamiento.

El tensor fluencia se define como:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (11.3)$$

en que v_i son las componentes del vector velocidad y el punto representa derivación parcial con respecto al tiempo;

Las ecs. de compatibilidad

$$\epsilon_{i,jk} = \epsilon_{j,ki} = \epsilon_{k,ji} = \epsilon_{i,jk} = 0. \quad (11.4)$$

y las condiciones de frontera:

$$\sigma_{ij} n_j = P_i \quad (11.5)$$

donde n_i es el vector unitario normal a la superficie exterior y P_i es la fuerza exterior por unidad de área de la superficie.

Las relaciones esfuerzo-deformación están dadas por:

$$\sigma_{ij} = E_{ij}^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \quad (11.6)$$

donde $E_{ij}^{\alpha\beta}$ son las constantes elásticas que dependen de las propiedades mecánicas del material y del sistema de referencia (tensor métrico). Para un material homogéneo e isotrópico la relación anterior puede presentarse en la forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda g_{ij} \epsilon_k^k + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (11.7)$$

o

$$\epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \nu/E g_{ij} \epsilon_k^k \quad (11.8)$$

en que g_{ij} es el tensor métrico, E es el módulo de elasticidad lineal, ν es el coeficiente de Poisson y λ y μ son los coeficientes de Lamé. Entre estas constantes existen las siguientes relaciones:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (11.9)$$

La viscosidad lineal, según la definición de Newton, se expresa mediante la siguiente ecuación reológica:

$$\eta D\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \quad (11.10)$$

en donde D es un operador diferencial lineal. Si $1/\eta \neq 0$, el cuerpo es un fluido; si $1/\eta = 0$, el cuerpo es un sólido. La constante elástica η recibe el nombre de coeficiente de viscosidad.

La elasticidad, viscosidad y plasticidad son las propiedades fundamentales de la reología. Estas tres propiedades pueden representarse mediante:

1. El elemento elástico - un resorte que simboliza el cuerpo de Hooke (fig. 4).
2. Elementos disipadores: a) un amortiguador que simboliza el líquido de Newton, b) un elemento friccionante que simboliza el cuerpo de Saint Venant (figs. 5 y 6).

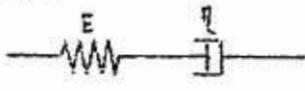
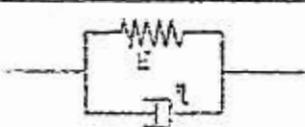
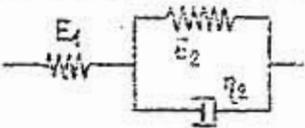
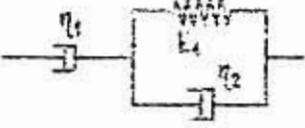
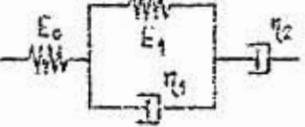
La combinación de estos elementos da lugar a relaciones complicadas que permiten representar aproximadamente a los materiales reales. En la siguiente tabla se presentan algunos modelos simples y las ecuaciones reológicas correspondientes.

Si la deformación de un cuerpo bajo esfuerzo constante es función del tiempo, se dice que el cuerpo fluye o que se presenta el fenómeno de flujo (fig. 7).

Si por el contrario, el esfuerzo que se presenta en un cuerpo sometido a una deformación constante es función del tiempo, se dice que se presenta el fenómeno de relajación (fig. 8).

El problema de flujo se plantea en la forma siguiente (8): dados $\sigma = CH(t)$ y la relación entre σ y ε , encontrar ε (H es la función unitaria Heaviside, fig. 9).

El problema de relajación consiste en determinar σ dados $\varepsilon = KH(t)$ y la relación entre σ y ε (K es una constante).

No	Modelo	Esquema	Ecuación Reológica
1	Maxwell		$D\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{D\sigma}{E}$
2	Kelvin		$\sigma = E\varepsilon + \eta D\varepsilon$
3	Bingham		$\begin{aligned} \text{si } \sigma < \sigma_f & \quad \sigma = E\varepsilon \\ \text{si } \sigma \geq \sigma_f & \quad \sigma = \sigma_f + \eta D\varepsilon \end{aligned}$
4	—		$D\sigma + \frac{E_1 + E_2}{\eta_2} \sigma = E_1 D\varepsilon + \frac{E_1 E_2}{\eta_2} \varepsilon$
5	Jeffreys		$D^2\varepsilon + \frac{E_1}{\eta_1} D\varepsilon = \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) D\sigma + \frac{E_1}{\eta_1 \eta_2} \sigma$
6	Burgers		$D^2\varepsilon + \frac{E_1}{\eta_1} D\varepsilon = \frac{E_1}{\eta_1 \eta_2} \sigma + \left(\frac{E_1}{\eta_1 E_0} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1} \right) D\sigma + \frac{1}{E_0} D^2\sigma$

De acuerdo con lo anterior, para el modelo de Kelvin con $C=1$ se obtiene:

$$f(t) = \frac{1}{E} \left\{ 1 - e^{-\frac{Et}{\tau}} \right\} H(t) \quad (11.11)$$

que por definición representa la función fluencia, en la cual $\tau = \eta/E$ recibe el nombre de tiempo de retardo.

Para el modelo de Maxwell con $K=1$ resulta:

$$r(t) = E e^{-\frac{Et}{\tau}} H(t) \quad (11.12)$$

que es la función relajación y en la que $\tau = \eta/E$ es el tiempo de relajación.

De lo anterior resulta que la deformación en cualquier instante puede separarse en dos partes: la deformación instantánea proporcional al esfuerzo que actúa en dicho instante y la deformación diferida como función de la historia de carga. Puesto que la función fluencia representa la componente diferida de la deformación, resulta:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{t_1}^t \sigma(\tau) f'(t-\tau) d\tau \quad (11.13)$$

en que $f'(t-\tau)$ representa la velocidad de fluencia o la función memoria, según Boltzman. En esta expresión se supone que para $t < t_1$ la deformación diferida es nula, en que t_1 es el instante de aplicación de la carga. La fórmula representa el principio de superposición expresado por Becker.

Aplicando el mismo razonamiento para el esfuerzo, se obtiene:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \int_{t_1}^t \varepsilon(\tau) r'(t-\tau) d\tau \quad (11.14)$$

en que $r'(t-\tau)$ es la velocidad de relajación o la función memoria. Esta expresión representa el principio de superposición dado por Boltzman.

Hasta aquí se ha considerado que las deformaciones son pequeñas, por lo que se obtienen relaciones lineales entre esfuerzos y deformaciones o sus velocidades.

Si las deformaciones son finitas, se pueda presentar elasticidad no lineal independiente del tiempo y no linealidad por efectos del tiempo. En general (20), la no linealidad independiente del tiempo se debe a consideraciones geométricas (efecto de los desplazamientos en los cambios de los elementos de línea) y físicas (cuando la deformación excede el límite proporcional del material) independientes entre sí. En estos casos se tienen relaciones no lineales en la carga y deformaciones reversibles totales o parciales en la descarga. Sin embargo, aún cuando las deformaciones sean totalmente reversibles, los diagramas de carga y descarga no son idénticos, presentándose el fenómeno de histéresis en cada ciclo de carga-descarga, el cual representa un proceso de disipación de energía. Los mecanismos fundamentales de la disipación son (16):

1. Disipación externa por fricción;
2. Disipación interna por cambios en la posición de las partículas en materiales amorfos;
3. Disipación interna por endurecimiento de los cristales;
4. Disipación interna por recristalización;
5. Disipación de la energía aplicada debido a variación de temperatura, etc.

De esto se concluye que el fenómeno de disipación es bastante complejo, por lo que los elementos disipadores lineales no pueden reproducir el comportamiento de los materiales reales, que es fundamentalmente no lineal. Sin embargo, la introducción de elementos no lineales da lugar a complicaciones matemáticas tales que obligan a que se recurran a ciertas idealizaciones que, aún limitando el tipo de respuestas, conducen a relaciones matemáticas accesibles.

Por lo que respecta al nivel de esfuerzos, se conoce que en materiales con límite proporcional arriba de éste se presenta comportamiento no lineal (reológico). En cuanto a las deformaciones inelásticas los materiales pueden dividirse en: 1. Plásticos y 2. Viscoelásticos.

El concreto puede considerarse perteneciente al segundo grupo por comportarse aproximadamente como material viscoelástico. La pasta de cemento (gel) puede decirse que es un sólido por tener un límite de fluencia τ_f , por tanto, elasticidad y rigidez abajo de este límite. El límite de fluencia está representado por el valor mínimo del esfuerzo cortante necesario para destruir la estructura del gel a tal grado que se presente el flujo no lineal. El comportamiento mecánico del gel se describe por la relación esfuerzo cortante-velocidad de fluencia (fig. 10). La ecuación general de estado del gel es:

$$\dot{\epsilon}(t) = f(\tau_t - \tau_{tf}) \quad (11.15)$$

en la cual τ_t es el esfuerzo cortante en el instante t . Para $\dot{\epsilon}(t) \rightarrow 0$, resulta $\tau_t = \tau_{tf}$ que es la definición de cuerpo de Saint Venant. De la figura se observa que la viscosidad η crece con el tiempo como resultado de la cristalización.

En general, los líquidos simples, como agua y aceites, se dicen líquidos de Newton. La presencia de material suspendido incrementa la viscosidad; si la concentración no es muy grande, la viscosidad puede determinarse de la fórmula de Einstein:

$$\eta = \eta_0 (1 + 2.5 C_v) \quad (11.16)$$

donde η_0 es la viscosidad del solvente y C_v es la concentración volumétrica. Reinar anota que esta expresión es aplicable a morteros de cemento con una concentración volumétrica muy alta. En este caso η deja de ser constante y depende del nivel de esfuerzos. Los líquidos con η variable se dicen no newtonianos.

Varios autores han tratado de estudiar el comportamiento del concreto por medio de modelos reológicos.

Freudenthal y Roll (10) realizan una serie de pruebas experimentales para el estudio del flujo del concreto y proponen el modelo de la fig. 11 compuesto de:

1. Un elemento de Maxwell que representa la respuesta visco-elástica;
2. Un elemento de Kelvin que representa la interacción visco-elástica de las fases sólida y líquida;
3. Un elemento de Kelvin no lineal que representa el efecto de la consolidación;
4. Un elemento de Kelvin no lineal que representa el reajuste interior.

La ecuación reológica del modelo es:

$$\epsilon(\sigma, t) = C e^{-b} T_1 (1 - e^{-\sigma/\tau_1}) + \sigma \sum_{i=2}^4 \frac{1}{E_i} (1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (11.17)$$

De acuerdo con los resultados de las pruebas

$$\begin{aligned} \tau_3 &= 10\tau_4 = 10\tau_2 \\ 1/E_3 &= 1/E_2 + 1/E_4 \end{aligned} \quad (11.18)$$

Para la zona de comportamiento lineal se encontró $\sigma_s/f'_c \leq 0.23$, de donde:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{f'_c} \left\{ \left[\frac{C e^{-b}}{\sigma_s/f'_c} \right] + \sum_{i=2}^4 \frac{1}{E_i} \frac{f'_c}{f'_c} e^{-t/\tau_i} \right\} \quad (11.19)$$

para $\sigma/f'_c \approx \sigma_s/f'_c$:

$$\epsilon = C T_1 e^{-2.62(\sigma/f'_c - \sigma_s/f'_c)} \left[1 - e^{-t/\tau_1} \right] + \sum_{i=2}^4 \frac{\sigma}{E_i f'_c} f'_c (1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (11.20)$$

Gluech (11) estudia experimentalmente el comportamiento de la pasta de cemento antes de la aparición de grietas y propone para considerar la deformación elástica instantánea y el flujo reversible e irreversible los modelos de la fig: 12, en que:

1. Representa la deformación permanente;
2. Representa el flujo irreversible;
3. Representa el flujo reversible.

Posteriormente (12) el autor confirma la posibilidad de utilizar estos modelos y propone un tercer modelo (fig. 13) en que:

1. Representa la respuesta elástica instantánea;
2. y 3. " / la elasticidad retardada;
4. " / el flujo irreversible;
5. " / la deformación permanente retardada y una componente de la elasticidad retardada.

La ecuación reológica del modelo es:

$$\varepsilon = \sigma \left[\frac{1}{E_1} + \sum_{i=2}^5 \frac{1}{E_i} (1 - e^{-t/\tau_i}) \right] \quad (11.21)$$

De los resultados experimentales se obtuvieron los parámetros reológicos representados en la tabla 3, pág. 961, ACI, II 1961.

Hansen (14), al igual que Flügge y Reiner, propone el modelo de Burgers para la descripción fenomenológica del comportamiento viscoelástico del concreto. El modelo es válido mientras no se presenten grietas y no toma en cuenta la deformación permanente. Este modelo se utilizó para comparar con resultados experimentales obtenidos durante 1930-1958 en varios países en especímenes con $\sigma = \text{const.}$ y sin contracción. Las dispersiones fueron 12-16%.

CAPITULO III

TEORIA DEL FLUJO DEL CONCRETO

Las tres tendencias fundamentales en la construcción de la teoría del flujo del concreto son:

1. Teoría del cuerpo viscoelástico.
2. Teoría de la herencia elástica.
3. Teoría del envejecimiento.

En este capítulo se presentan las teorías del cuerpo viscoelástico y del envejecimiento, las cuales pueden considerarse como las teorías "matemática" y "técnica" del cuerpo viscoelástico, respectivamente. La teoría de la herencia elástica no se presenta por ser ésta un caso particular de la primera.

A. Teoría lineal del cuerpo viscoelástico [7]

En la teoría lineal del cuerpo viscoelástico se aceptan las siguientes hipótesis:

1. El material (concreto) es homogéneo e isótropo.
2. Entre las deformaciones (instantánea y por fluencia) y los esfuerzos existe una relación lineal.
3. Para las deformaciones por fluencia es aplicable el principio de superposición.
4. Los valores absolutos de las deformaciones no dependen del signo del esfuerzo.

La cuarta hipótesis presupone que el material se comporta igual bajo tensión y compresión.

1. Ecuaciones fundamentales

En lo que sigue, la deformación (esfuerzo) que aparece en el momento de aplicación de las cargas se denominará deformación (esfuerzo) elástica instantánea.

Tomaremos como punto de partida el momento de fabricación del concreto. La edad del material se designará con t' y el ins-

tante en que se determina la deformación (esfuerzo) con t , de manera que $0 < \tau \leq t$.

Considérese un elemento bajo un estado uniaxial de esfuerzos de intensidad unitaria aplicado a la edad τ . La deformación total se expresa:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (III.1)$$

donde el primer término de la derecha representa la deformación elástica y el segundo término la deformación por fluencia.

Si el esfuerzo aplicado a la edad τ es función del tiempo, por el principio de superposición resulta:

$$\epsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \quad (III.2)$$

La deformación transversal puede expresarse:

$$\epsilon_y(t) = \epsilon_z(t) = -\nu_1(t) \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} + \int_{\tau_1}^t \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\nu_1(\tau) + \nu_2(t, \tau) \Psi(t, \tau)}{E(\tau)} \right] d\tau \quad (III.3)$$

en que $\nu_1(t)$ y $\nu_2(t, \tau)$ son los coeficientes de la deformación transversal para las componentes elástica e inelástica, respectivamente, y $\Psi(t, \tau)$ es la característica de fluencia definida como la relación entre la deformación por fluencia y la deformación elástica instantánea. Entonces:

$$\Psi(t, \tau) = \frac{C(t, \tau) \sigma(t)}{\epsilon_0(\tau)} = E(t) C(t, \tau)$$

de donde:

$$\nu_2(t, \tau) C(t, \tau) \sigma(t) = \frac{\nu_2(t, \tau) \Psi(t, \tau)}{E(t)} \sigma(t)$$

Por tanto, en la expresión (III.3) el primer término de la derecha representa la deformación transversal elástica, mientras que el término integral representa la deformación por fluencia.

Siguiendo el mismo razonamiento que en la obtención de (III.2) se tiene que para un estado de cortante puro:

$$\gamma_{xy}(t) = \frac{\tau_{xy}(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \tau_{xy}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(t)} + w(t, \tau) \right] d\tau \quad (III.4)$$

donde $G(t)$ es el módulo de la deformación angular y $w(t, \tau)$ es la medida del flujo bajo deformación angular pura, relacionada con $C(t, \tau)$ mediante la siguiente expresión:

$$w(t, \tau) = 2 \left[1 + \nu_2(t, \tau) \right] C(t, \tau) \quad (III.5)$$

Para el estado tridimensional de esfuerzos, de (III.2), (III.3) y (III.4), aplicando el principio de superposición, resulta:

$$\begin{aligned} \epsilon_x(t) &= \frac{\sigma_x(t) \left[1 + \nu_1(t) \right] - \nu_1(t) S(t)}{E(t)} - \\ &- \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau) \right] - S(\tau) \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau \\ \gamma_{xy}(t) &= 2 \left\{ \frac{\tau_{xy}(t) \left[1 + \nu_1(t) \right]}{E(t)} - \right. \\ &- \int_{\tau_1}^t \tau_{xy}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (III.6)$$

(x, y, z)*

donde

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)$$

$$\delta_1(t, \tau) = \frac{\nu_1(\tau)}{E(\tau)} + \nu_2(t, \tau) C(t, \tau)$$

$$S^*(t) = \sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \sigma_z(t)$$

En (III.6) el primer término de la parte derecha corresponde a la deformación elástica instantánea comúnmente usada en la teoría lineal de la elasticidad; el término integral representa la deformación diferida (fluencia).

Sustituyendo (III.6) en las condiciones de compatibilidad (II.5) se obtiene:

$$\frac{1}{E(t)} \left\{ [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \sigma_x^*(t) + \frac{\partial^2 S^*(t)}{\partial x^2} \right\} -$$

$$- \int_{\tau_1}^t \left\{ \nabla^2 \sigma_x^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] + \frac{\partial^2 S^*(\tau)}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) \right\} d\tau = 0$$

(III.7)

$$\frac{1}{E(t)} \left\{ [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \sigma_{xy}^*(t) + \frac{\partial^2 S^*(t)}{\partial x \partial y} \right\} -$$

$$- \int_{\tau_1}^t \left\{ \nabla^2 \sigma_{xy}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] + \frac{\partial^2 S^*(\tau)}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) \right\} d\tau = 0$$

que junto con las ecuaciones de equilibrio (II.1) (sin las fuerzas de cuerpo) y las condiciones de frontera (II.6) forman el sistema de ecuaciones del medio viscoelástico bajo la acción de carga exterior. En estas expresiones $\sigma_x^*(t), \dots, \sigma_{xy}^*(t), \dots$ y $\epsilon_x^*(t), \dots,$

$\epsilon_{xy}^*(t), \dots$ son las componentes del tensor esfuerzo y tensor deformación considerando el flujo y variación del módulo $E(t)$. En ellas el primer término representa las ecuaciones de Baltrami-Michell del problema elástico instantáneo y el segundo término refleja la influencia del fenómeno de flujo en el estado de esfuerzos y deformaciones.

Se puede demostrar que en el caso que se verifique

$$\nu_1(\tau) = \nu_2(t, \tau) = \nu \quad (III.8)$$

*El símbolo (x, y, z) indica que las demás componentes del tensor deformación (esfuerzo) se obtienen permutando cíclicamente los índices x, y, z .

el fenómeno de fluencia influye únicamente en la magnitud de las deformaciones, mientras que el estado de esfuerzos coincide con el correspondiente al problema elástico instantáneo.

2. Estado de esfuerzos producido por la deformación

Existen, sin embargo, casos en que el fenómeno de fluencia influye no solo en la magnitud de las deformaciones, sino también en el estado de esfuerzos. Esto se presenta cuando el estado de esfuerzos es producido por la deformación, por ejemplo, debido a variación de temperatura, fenómenos de contracción, asentamiento de los apoyos, etc.

Suponiendo que las componentes de la variación de la deformación sean $\epsilon_x^0(t), \dots, \gamma_{xy}^0(t), \dots$ y considerando (III.6) se obtiene un sistema de ecuaciones tal que, si las componentes anteriores satisfacen las condiciones de compatibilidad y la relación (III.8), el sistema se reduce a las ecuaciones de Beltrami-Michell. En el caso general en que dichas componentes no satisfagan las condiciones de compatibilidad, se demuestra que el problema queda resuelto si se conoce la solución del problema elástico instantáneo. Si, además, se cumple (III.8), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(t) &= \sigma_x(t) + \int_{t_1}^t \sigma_x^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} E(t) \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \\ \tau_{xy}^*(t) &= \tau_{xy}(t) + \int_{t_1}^t \tau_{xy}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} G(t) \left[\frac{1}{G(\tau)} + w(t, \tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (III.9)$$

en que $\sigma_x(t), \dots, \tau_{xy}(t), \dots$ son las componentes del tensor esfuerzo del problema elástico instantáneo y el segundo término representa la relajación de esfuerzos.

Para la solución de las ecuaciones (III.9) es importante la elección del núcleo, por lo que hay necesidad de conocer la expresión analítica de $C(t, \tau)$ y $E(\tau)$.

Las características fundamentales de $C(t, \tau)$ son las si-

siguientes

- 1) $C(t, \tau) > 0$ para $t > \tau$
 $C(t, \tau) = 0$ para $t = \tau$
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} = 0$ para $0 < \tau \leq t$
- 3) $\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} < 0$ $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(t, \tau) = C_0$
- 4) A partir de cierta edad, $C(t, \tau)$ difiere muy poco del valor de la función fluencia para un material viejo.

De acuerdo con esto, se propone la siguiente relación funcional:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau)$$

en que:

$$f(t - \tau) = \sum_{k=0}^m B_k e^{-\gamma_k(t - \tau)}$$

en donde B_k y γ_k son constantes del material y

$$B_0 = 1 \quad \gamma_0 = 0 \quad \gamma_k > 0$$

(III.10)

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = C_0$$

Con base en pruebas experimentales se ha visto posible expresar:

$$\varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{\tau^k}$$

y para fines prácticos puede aceptarse:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t - \tau)}] \quad \varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau} \quad \text{(III.11)}$$

Por lo que respecta a la ley de variación del módulo de la deformación instantánea, se han propuesto varias relaciones hiperbólicas en función de la resistencia $R(\tau)$ del concreto, las cuales complican considerablemente la solución del problema. Las rela-

ciones de tipo exponencial son más accesibles matemáticamente y por tanto se aceptará:

$$E(\tau) = E_0 [1 - \beta e^{-\alpha \tau}] \quad (III.12)$$

en que E , β y α son constantes que dependen de la granulometría y condiciones de fraguado del concreto.

Sustituyendo (III.11) y (III.12) en (III.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(t) = & \sigma_x(\tau_1) + \left\{ \frac{\sigma_x'(\tau_1)}{E(\tau_1)} - \frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)} \left[\frac{E'(\tau_1)}{E(\tau_1)} + \gamma E(\tau_1) \varphi(\tau_1) \right] \right\} \int_{\tau_1}^t E(\tau) e^{-\eta^*(\tau)} d\tau + \\ & + \int_{\tau_1}^t E(\tau) e^{-\eta^*(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{\eta^*(z)} \left\{ \frac{\sigma_x''(z)}{E(z)} + \frac{\sigma_x'(z)}{E(z)} \left(\gamma - 2 \frac{E'(z)}{E(z)} \right) - \frac{\sigma_x(z)}{E(z)} \left[\frac{E'(z)}{E(z)} \left(\gamma - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 2 \frac{E'(z)}{E(z)} \right) + \frac{E''(z)}{E(z)} \right] \right\} dz \end{aligned} \quad (III.13)$$

donde:

$$\eta^*(\tau) = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} [1 + \varphi(\tau) E(\tau)] d\tau$$

En esta expresión el primer término representa el esfuerzo elástico instantáneo; el segundo término expresa la influencia de la variación del esfuerzo instantáneo con el tiempo de la deformación elástica instantánea por efecto de la variación del módulo

$E(\tau_1)$ y del flujo del material; el tercer término simboliza la relajación del esfuerzo debido al flujo y variación de $E(\tau)$.

Si se considera que el módulo $E(\tau)$ varía muy lentamente con el tiempo, de manera que pueda considerarse constante, la expresión (III.13) se reduce a la forma:

$$\sigma_x^*(t) = \sigma_x(\tau_1) \left\{ 1 - \gamma E_0 r^{(1-p)} \left[\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right] \tau_1^p e^{-\tau_1} [\phi(r t, p) - \phi(r \tau_1, p)] \right\} \quad (III.14)$$

donde:

$$r = \gamma [1 + E_0 C_0] \quad p = \gamma A_1 E_0$$

y $\Phi(\xi, q)$ es la función gama incompleta

$$\phi(\bar{r}, \rho) = \int_0^{\bar{r}} \frac{e^{-r}}{r^2} dr$$

El segundo término dentro del paréntesis puede considerarse como el coeficiente de relajación de los esfuerzos por efecto del flujo del concreto.

3. Efectos de la temperatura

Suponiendo que la ley de variación de la temperatura del medio pueda expresarse en la forma

$$T = w(t) = \sum_{i=1}^n \left[T_i \operatorname{sen} \frac{2\pi i t}{\Theta} + F_i \operatorname{cos} \frac{2\pi i t}{\Theta} \right] \quad (\text{III.15})$$

y que las componentes del tensor esfuerzo correspondiente al problema elástico instantáneo estén dadas por

$$\sigma_x(t) = \sigma_x^0(x, y, z) E_0 \alpha [w(t) - w(t_1)] \quad (\text{III.16})$$

$$\sigma_{xy}(t) = \sigma_{xy}^0(x, y, z) G_0 \alpha [w(t) - w(t_1)] \quad (x, y, z)$$

las componentes del tensor esfuerzo considerando el flujo del concreto puedan expresarse:

$$\sigma_x^*(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_x^0(x, y, z) \gamma_i(t) \quad (\text{III.17})$$

En estas relaciones Θ es el período de la función $w(t)$ o igual a un año; $w(t_1)$ es la ley de distribución de la temperatura una vez fabricado el elemento; α es el coeficiente de dilatación térmica del concreto; $\sigma_x^0(x, y, z)$ define la ley de distribución del esfuerzo elástico instantáneo en función de las variables x, y, z .

Sustituyendo (III.15), (III.16) y (III.17) en (III.13) y considerando $E(t) = E_0$ resulta:

$$\begin{aligned} \gamma_i(t) = E_0 \alpha \left\{ w_i(t) - w_i(t_1) - \delta E_0 r^{(p-1)} \left[\phi(r\bar{r}, \rho) \int_{t_1}^t \left(\frac{A_1}{r} + C_0 \right) w_i'(v) e^{r^2} e^{\rho} dv - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{t_1}^t \left(\frac{A_1}{r} + C_0 \right) w_i'(v) \phi(r\bar{r}, \rho) e^{r^2} e^{\rho} dv \right] \right\} \quad (\text{III.18}) \end{aligned}$$

Para el caso de flujo estacionario las componentes elásticas instantáneas son independientes del tiempo y de la expresión anterior se obtiene

$$\sigma_x^*(t) = \sigma_x(x, y, z, \tau_1) \chi(t, \tau_1) \quad (III.19)$$

en que

$$\chi(t, \tau_1) = 1 - \frac{\gamma E_0}{r(1-p)} \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) \tau_1^p e^{r\tau_1} [\phi(r^2 t, p) - \phi(r\tau_1, p)] \quad (III.20)$$

refleja la influencia de la edad del concreto τ_1 y la medida de fluencia en la variación de los esfuerzos. Para $t = \tau_1$, este término adquiere su valor máximo igual a la unidad y para $t \rightarrow \infty$ adquiere su valor mínimo;

Por lo que respecta a la edad del concreto τ_1 , $\chi(\infty, \tau_1)$ por medio de su desarrollo asintótico resulta ser creciente con τ_1 , y para $\tau_1 \rightarrow \infty$ vale $1 - \frac{\gamma E_0 C_0}{r}$.

En el caso de flujo no estacionario, la solución puede expresarse en la forma:

$$\sigma_x^*(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_x^{(i)}(x, y, z) \chi_i(t) \quad (III.21)$$

en que $\sigma_x^{(i)}(x, y, z)$ representa la ley de distribución de los esfuerzos térmicos en la sección transversal del elemento.

De (III.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} \chi_i(t) = & e^{-\alpha_i(t-\tau_1)} - \gamma E_0 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) e^{r\tau_1} \tau_1^p \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau + \\ & + \gamma E_0 \alpha_i e^{\alpha_i \tau_1} \left\{ A_1 \int_{\tau_1}^t e^{-r\tau} \tau^{-p} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-\alpha_i)\frac{z}{h}(p-1)} dz + \right. \\ & \left. + C_0 \int_{\tau_1}^t e^{-r\tau} \tau^{-p} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-\alpha_i)\frac{z}{h} p} dz \right\}. \end{aligned} \quad (III.22)$$

en que

$$\alpha_i = \frac{i^2 \pi^2 a}{h^2}$$

donde \underline{a} es el coeficiente que caracteriza el flujo de calor y \underline{h} es el espesor del elemento.

4. Efectos producidos por la contracción

Como indican varios autores, la expresión más apropiada de la variación de la contracción es:

$$S_n(t) = S_0(1 - e^{-st}) \quad (III.23)$$

donde S_0 es el valor máximo de la contracción (experimental) y s caracteriza la velocidad del proceso de contracción. Se supone que la contracción es una deformación volumétrica libre y que la reducción de los elementos de línea en tres direcciones ortogonales es la misma.

Designando con $\epsilon_{xs}(t), \dots$ a las componentes del tensor deformación elástica instantánea, entonces

$$\begin{aligned} \epsilon_{xs}(t) &= \frac{1}{E(t)} \left\{ [1 + \nu_1(t)] \sigma_{xs}(t) - \nu_1(t) S(t) \right\} - S_n(x, y, z, t) \\ \gamma_{xy}^{(e)}(t) &= \frac{2[1 + \nu_1(t)]}{E(t)} \tau_{xy}^{(e)}(t) \end{aligned} \quad (III.24)$$

(x, y, z)

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones de compatibilidad se obtiene

$$\begin{aligned} [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \sigma_{xs}(t) + \frac{\partial^2 S(t)}{\partial x^2} &= \\ &= E(t) \left[\frac{1 + \nu_1(t)}{1 - \nu_1(t)} \nabla^2 S_n(t) + \frac{\partial^2 S_n(t)}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (III.25)$$

$$[1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \tau_{xy}^{(e)}(t) + \frac{\partial^2 S(t)}{\partial x \partial y} = E(t) \frac{\partial^2 S_n(t)}{\partial x \partial y} \quad (x, y, z)$$

que junto con las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera determinan las componentes elásticas instantáneas del tensor esfuerzo producidas por la contracción.

Conocidas las componentes elásticas instantáneas, de (III.13) se obtiene

$$\sigma_{x_3}^*(t) = H_{x_3}^*(t, \tau_1) \sigma_{x_3}(t) \quad (\text{III.26})$$

donde:

$$H_{x_3}^*(t, \tau_1) = 1 - \frac{\gamma E_0 s}{z^{-s\tau_1} - e^{st}} \int_{\tau_1}^t e^{-r\tau} \tau^{-p} d\tau \cdot \int_{\tau_1}^{\tau} \left(\frac{A_1}{z} + C_0 \right) e^{(r-s)\tau} z^p dz. \quad (\text{III.27})$$

B. Teoría del envejecimiento 23

1. Ecuación fundamental

La teoría del envejecimiento fue propuesta por F. Dischinger y Ch. S. Whitney y desarrollada por varios investigadores.

Las hipótesis de partida son las mismas que se utilizan en la teoría del cuerpo viscoelástico y, además, se acepta que las curvas de fluencia del concreto bajo un mismo esfuerzo, pero cargado a distinta edad, son paralelas.

Experimentalmente se comprobó que las desviaciones del paralelismo son pequeñas y debe suponerse que para fines prácticos la hipótesis anterior es aceptable.

Partiendo de esta hipótesis, la relación entre esfuerzos y deformaciones para el estado uniaxial se expresa en la forma

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} (1 + \Psi_t) + \int_0^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \frac{\Psi_t - \Psi_\tau}{E_0} \right] d\tau \quad (\text{III.28})$$

que es la ecuación fundamental de la teoría del envejecimiento.

Como puede observarse, la hipótesis del paralelismo de las curvas de fluencia toma en cuenta la influencia del envejecimiento

en el flujo del concreto.

2. Estado de esfuerzos producido por la contracción

La aparición de un estado de esfuerzos producido por la contracción en elementos de concreto reforzado se debe a la presencia del refuerzo que retarda la deformación libre de contracción.

En esta sección se considera el estado de esfuerzos producido por la contracción en elementos de concreto reforzado considerando el flujo del concreto, la variación del módulo de elasticidad y el carácter prolongado del proceso de contracción. El estado de esfuerzos se analiza en secciones alejadas de los apoyos (en las que puede aceptarse la hipótesis de la sección plana) suponiendo que no se alteró la adherencia entre el concreto y refuerzo.

El proceso de contracción se expresa

$$\alpha_y(t) = \alpha_y \frac{\psi_t}{m} \quad (III.29)$$

donde:

- $\alpha_y(t)$ es la deformación unitaria de contracción en el instante t ;
- α_y es el valor máximo de $\alpha_y(t)$;
- ψ_t es la característica de fluencia en el instante t ;
- m es el valor máximo de ψ_t .

Para la ley de variación del módulo de elasticidad del concreto en esta teoría se acepta la expresión

$$E(t) = E_0 (1 + \delta \psi_t) \quad (III.30)$$

en que E_0 es el módulo del concreto en el instante de aplicación de la carga y δ es un parámetro experimental.

En una sección como la mostrada en la fig. 14, partiendo de las condiciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones del refuerzo y concreto en el nivel del refuerzo, los esfuerzos en el concreto en dichos niveles resultan

$$\sigma_{cy} = C_1 e^{w_1 \psi_t} + C_2 e^{w_2 \psi_t} + C_3 \quad (III.31)$$

$$\sigma'_{cy} = C_4 e^{w_1 \psi_t} + C_5 e^{w_2 \psi_t} + C_6$$

Los esfuerzos en el refuerzo

$$\sigma_{ay} = \frac{\sigma'_{cy} \rho_3 - \sigma_{cy} \rho_2}{\mu_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2)}$$

$$\sigma'_{ay} = \frac{\sigma_{cy} \rho_3 - \sigma'_{cy} \rho_1}{\mu'_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2)} \quad (III.32)$$

$$\sigma_{aoy} = \frac{n_a}{n_p} \sigma_{ay}$$

$$\sigma'_{aoy} = \frac{n_a}{n_p} \sigma'_{ay}$$

En estas expresiones:

$$\mu_A = \frac{F_p + \frac{n_a}{n_p} F_a}{F_c} \quad \mu'_A = \frac{F'_p + \frac{n_a}{n_p} F'_a}{F_c}$$

$$n_a = \frac{E_a}{E_o} \quad n_p = \frac{E_p}{E_o} \quad r_c^2 = \frac{I_c}{F_c}$$

$$A_1 = \frac{n_p \mu_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2)}{n_p \mu_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2) + \rho_2}; \quad B_1 = \frac{\rho_3}{n_p \mu_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2) + \rho_2} \quad (III.33)$$

$$A_2 = \frac{n_p \mu'_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2)}{n_p \mu'_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2) + \rho_1}; \quad B_2 = \frac{\rho_3}{n_p \mu'_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2) + \rho_1}$$

$$A_3 = \frac{\rho_2 + n_p \mu_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2) (1 + \frac{\psi_t}{2})}{\rho_3}; \quad B_3 = \frac{n_p \mu_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2)}{\rho_3} \psi_t$$

$$A_4 = \frac{\rho_1 + n_p \mu'_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2) (1 + \frac{\psi_t}{2})}{\rho_3}; \quad B_4 = \frac{n_p \mu'_A (\rho_1 \rho_2 - \rho_3^2)}{\rho_3} \psi_t.$$

$$a_1 = 1 - B_1 B_2$$

$$b_1 = 1 - B_1 B_2$$

$$a_2 = A_1 B_2$$

$$b_2 = A_1$$

$$a_3 = A_2$$

$$b_3 = A_2 B_1$$

$$a_4 = -\frac{\alpha y}{m} E_0 (A_1 B_2 + A_2)$$

$$b_4 = -\frac{\alpha y}{m} E_0 (A_2 B_1 + A_1)$$

$$K_1 = \frac{b_2}{b_1}$$

$$K_2 = \frac{b_3}{b_1}$$

(III.33)

$$K_3 = \frac{b_4}{b_1}$$

$$K_4 = \frac{a_2}{a_1}$$

$$K_5 = \frac{a_3}{a_1}$$

$$K_6 = \frac{a_4}{a_1}$$

$$w_{1,2} = -\frac{K_1 + K_5}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{K_1 + K_5}{2}\right]^2 - (K_1 K_5 - K_2 K_4)}$$

Las constantes de integración C_i se obtienen de:

$$a_2 C_3 + a_3 C_6 = a_4$$

$$C_1 + C_2 = -C_3$$

$$b_2 C_3 + b_3 C_6 = b_4$$

$$w_1 C_1 + w_2 C_2 = K_3$$

Existe la posibilidad de simplificar el procedimiento transformando las ecuaciones integrales (III.28) en ecuaciones algebraicas, lo cual se logra integrando por partes y utilizando el teorema del valor medio. Suponiendo, además, que la relación entre

$\sigma_c(t)$ y ψ_t es lineal se obtiene

$$\sigma_{cy} = \frac{\alpha_y}{m} E_o \frac{A_4 B_3 + B_4}{1 - A_3 A_4} \quad (III.34)$$

$$\sigma'_{cy} = \frac{\alpha_y}{m} E_o \frac{A_3 B_4 + B_3}{1 - A_3 A_4}$$

Los demás esfuerzos resultan de (III.32) y (III.33).

Otros métodos aproximados consisten en:

- 1) suponer que la excentricidad de la resultante del refuerzo es constante y coincide con el centro de gravedad del refuerzo;
- 2) resolver las ecuaciones de compatibilidad independientemente una de la otra e introducir un coeficiente de corrección.

De los resultados anteriores se puede concluir:

1. Debido al efecto de retardo en la contracción producido por el refuerzo, en el concreto aparecen esfuerzos de tensión y en el refuerzo esfuerzos de compresión.
2. Al aumentar el porcentaje de refuerzo los esfuerzos de compresión en el refuerzo decrecen y los esfuerzos de tensión en el concreto aumentan. Por lo tanto, en el concreto pueden aparecer grietas aun cuando no exista carga exterior.
3. Al aumentar el módulo del concreto los esfuerzos de tensión en el concreto y de compresión en el refuerzo aumentan.
4. En todos los casos el flujo del concreto reduce los esfuerzos de contracción.

3. Estructuras de concreto presforzado

Consideraremos ahora el caso de estructuras de concreto presforzado.

El efecto del presfuerzo se separa convencionalmente en dos fases: 1) la primera ($t = 0$) consiste en dar una tensión al acero y una compresión al concreto. La determinación del estado de esfuerzos se realiza por los métodos conocidos de la teoría elástica del concreto; 2) la segunda fase ($t > 0$) comprende toda la vida de la estructura, durante la cual el estado de esfuerzos varía debido al flujo y contracción del concreto.

A continuación se acepta la siguiente convención de signos: (+) para esfuerzos de compresión; (-) para esfuerzos de tensión.

1a. fase

a) presfuerzo sobre apoyos exteriores.

Considerando en la fig. 14 que el acero de presfuerzo es F_p y F'_p y transformando las ecuaciones integrales (III.25) en algebraicas se obtiene:

$$\sigma_{ap} = \frac{\sigma_{ak}(1+q'p_3) - \sigma'_{ak}q'p_2}{(1+q'p_3)(1+qp_1) - qp_2q'p_2}$$

$$\sigma'_{ap} = \frac{\sigma'_{ak}(1+qp_1) - \sigma_{ak}qp_2}{(1+q'p_3)(1+qp_1) - qp_2q'p_2}$$

$$\sigma_{cp} = - (q\sigma_{ap}p_1 + q'\sigma'_{ap}p_2) \frac{1}{n_p}$$

$$\sigma'_{cp} = - (q\sigma_{ap}p_2 + q'\sigma'_{ap}p_3) \frac{1}{n_p}$$

(III.35)

$$\sigma_{ao} = n_a \sigma_{cp}$$

$$\sigma'_{ao} = n_a \sigma'_{cp}$$

que son los esfuerzos en el acero de presfuerzo, en el concreto en los niveles del presfuerzo y en el refuerzo ordinario, respectivamente.

En estas expresiones σ_{ak} y σ'_{ak} son los esfuerzos controlados inferior y superior;

$$q = \frac{n_p \mu_p}{1 + n_a(\mu + \mu')} ; \quad q' = \frac{n_p \mu'_p}{1 + n_a(\mu + \mu')}$$

$$p_1 = 1 + \frac{y_o^2}{r_o^2} \quad p_2 = 1 - \frac{y'_o y_o}{r_o^2} \quad p_3 = 1 + \frac{y_o'^2}{r_o^2}$$

Debido al flujo del concreto los esfuerzos producidos por el presfuerzo varían continuamente. Para cualquier instante:

$$\sigma_{af}(t) = \sigma_{ap} + \sigma_{pr} \quad \sigma_c(t) = \sigma_{cp} + \sigma_{cpr}$$

$$\sigma'_{ap}(t) = \sigma'_{ap} + \sigma'_{pr} \quad \sigma'_c(t) = \sigma'_{cp} + \sigma'_{cpr}$$

$$\sigma_{ao}(t) = \sigma_{ao} + \sigma_{opr} \quad (III.36)$$

$$\sigma'_{ao}(t) = \sigma'_{ao} + \sigma'_{opr}$$

donde con el índice "pr" se designa la pérdida del esfuerzo correspondiente debido al flujo.

b) presfuerzo sobre la estructura;

En este caso

$$\sigma_{cp} = - \sigma_{ak} \frac{\mu_p + a_{ak} \mu'_p}{1 + n_a(\mu + \mu')} \left(1 + \frac{e_{ao} y_o}{r_o^2} \right)$$

$$\sigma'_{cp} = - \sigma_{ak} \frac{\mu_p + a_{ak} \mu'_p}{1 + n_a(\mu + \mu')} \left(1 - \frac{e_{ao} y'_o}{r_o^2} \right)$$

(III.37)

Para cualquier instante t :

$$\sigma_{ap}(t) = \sigma_{ak} + \sigma_{pr} \quad (III.38)$$

$$\sigma'_{ap}(t) = \sigma'_{ak} + \sigma'_{pr}$$

y los demás esfuerzos se obtienen de (III.36) considerando (III.37).

En estas expresiones:

$$\mu_p = \frac{F_p}{F_c} \quad \mu'_p = \frac{F'_p}{F_c} \quad \mu = \frac{F_a}{F_c} \quad \mu' = \frac{F'_a}{F_c}$$

$$n_a = \frac{E_a}{E_o} \quad n_p = \frac{E_p}{E_o} \quad a_{ak} = \frac{\sigma'_{ak}}{\sigma_{ak}}$$

y e_{ao} es la distancia del centro de gravedad de la sección modificada al punto de aplicación de la resultante del presfuerzo.

2a. fase

La compresión inicial del elemento es acompañada de pérdidas de esfuerzos producidas por el flujo del concreto. Las pérdidas en el acero de presfuerzo conducen a que la sección se encuentre bajo tensión excéntrica.

Para determinar las pérdidas del presfuerzo se plantean las ecuaciones de equilibrio en los niveles del refuerzo superior e inferior, resultando:

$$\sigma_{pr} = \frac{\sigma'_{cpr} p_3 - \sigma_{cpr} p_2}{\mu'_A (p_1 p_2 - p_3^2)}$$

$$\sigma'_{pr} = \frac{\sigma_{cpr} p_3 - \sigma'_{cpr} p_4}{\mu_A (p_1 p_2 - p_3^2)} \quad (III.39)$$

Para determinar los esfuerzos en el concreto producidos por σ_{pr} y σ'_{pr} se plantean las condiciones de compatibilidad en el nivel del refuerzo superior e inferior, obteniéndose:

$$\begin{aligned}\sigma_{cpr} &= C'_1 e^{w_1 \psi_t} + C'_2 e^{w_2 \psi_t} + C'_3 \\ \sigma'_{cpr} &= C'_4 e^{w_1 \psi_t} + C'_5 e^{w_2 \psi_t} + C'_6\end{aligned}\quad (III.40)$$

Entonces, las pérdidas de esfuerzos en el refuerzo ordinario valen:

$$\begin{aligned}\sigma_{opr} &= \frac{n_a}{n_p} \sigma_{pr} \\ \sigma'_{opr} &= \frac{n_a}{n_p} \sigma'_{pr}\end{aligned}\quad (III.41)$$

El valor de los esfuerzos para cualquier instante t se obtiene de (III.36). En caso de transformar las ecuaciones integrales en algebraicas:

$$\begin{aligned}\sigma_{cpr} &= \frac{\sigma_{cp} A_4 B_3 + \sigma'_{cp} B_4}{1 - A_3 A_4} \\ \sigma'_{cpr} &= \frac{\sigma'_{cp} A_3 B_4 + \sigma_{cp} B_3}{1 - A_3 A_4}\end{aligned}\quad (III.42)$$

Los esfuerzos que aparecen en el concreto y refuerzo producidos por carga exterior prolongada varían con el tiempo debido al flujo y crecimiento del módulo del concreto. Dicha variación se expresa en la redistribución de esfuerzos entre el concreto y refuerzo.

Como en el caso anterior, el trabajo de la estructura se analiza en dos fases.

1a. fase

Consideremos la sección mostrada en la fig. 15 bajo un momento flexionante M_e constante.

Los esfuerzos que aparecen en $t = 0$ se determinan por la teoría elástica del concreto;

$$\sigma_{ce} = -\frac{Me}{I} y_a$$

$$\sigma'_{ce} = \frac{Me}{I} y'_a \quad \text{etc.}$$

Los esfuerzos en cualquier instante t valen:

$$\sigma_{cz}(t) = \sigma_{ce} + \sigma_{cd}$$

$$\sigma'_{ce}(t) = \sigma'_{ce} + \sigma'_{cd}$$

$$\sigma_{ae}(t) = \sigma_{ae} + \sigma_d$$

(III.43)

$$\sigma'_{ae}(t) = \sigma'_{ae} + \sigma'_d$$

$$\sigma_{oe}(t) = \sigma_{oe} + \sigma_{od}$$

$$\sigma'_{oe}(t) = \sigma'_{oe} + \sigma'_{od}$$

donde con el índice "d" se designa los esfuerzos adicionales correspondientes que aparecen en el instante t .

2a. fase

Como consecuencia de los esfuerzos adicionales σ_d y σ'_d la sección se encontrará bajo compresión excéntrica. Partiendo de las ecuaciones de equilibrio para la sección, se obtiene:

$$\sigma_d = \frac{\sigma'_{cd} p_3 - \sigma_{cd} p_2}{\mu_A (p_1 p_2 - p_3^2)}$$

$$\sigma'_d = \frac{\sigma_{cd} p_3 - \sigma'_{cd} p_1}{\mu_A (p_1 p_2 - p_3^2)}$$

(III.44)

$$\sigma_{cd} = C_1'' e^{w_1 \Psi_t} + C_2'' e^{w_2 \Psi_t} + C_3'' \quad (III.45)$$

$$\sigma'_{cd} = C_4'' e^{w_1 \Psi_t} + C_5'' e^{w_2 \Psi_t} + C_6''$$

Si las ecuaciones integrales se transforman en algebraicas:

$$\sigma_{cd} = \frac{\sigma_{ce} A_4 B_3 + \sigma'_{cd} B_4}{1 - A_3 A_4} \quad (III.46)$$

$$\sigma'_{cd} = \frac{\sigma_{ce} A_3 B_4 + \sigma_{cd} B_3}{1 - A_3 A_4}$$

De los resultados anteriores se puede concluir lo siguiente:

1. En las estructuras de concreto presfuerzo, debido al flujo del concreto, pueden presentarse pérdidas de esfuerzos considerables.
2. Al aumentar la característica de fluencia Ψ_t las pérdidas de presfuerzo aumentan, por lo que resulta conveniente tomar medidas para reducir Ψ_t como: utilizar relaciones A/C bajas y concretos de bajo cemento, realizar el presfuerzo a la mayor edad posible del concreto, condiciones atmosféricas húmedas, etc.
3. Al aumentar μ_p las pérdidas crecen; al aumentar μ las pérdidas decrecen ligeramente.
4. Al aumentar E_o (concretos de alta resistencia) las pérdidas se reducen.
5. La variación del módulo con el tiempo aumenta las pérdidas del presfuerzo, pero en la mayoría de los casos su influencia no es importante.
6. La redistribución de esfuerzos en estructuras bajo carga de larga duración conduce a esfuerzos adicionales que en ocasiones exceden los esfuerzos iniciales. Los esfuerzos adicionales aumentan con Ψ_t y el coeficiente de refuerzo y se reducen al aumentar E_o .

4. Estado de desplazamientos y rigidez

Sobre el estado de esfuerzos y deformaciones de un elemento bajo flexión influyen los siguientes factores:

1. el esquema estático;
2. las dimensiones geométricas;
3. el tipo y magnitud de la carga;
4. la cantidad y disposición del acero de refuerzo;
5. la presencia de presfuerzo;
6. las propiedades del concreto y refuerzo;
7. el flujo del concreto en la zona de compresión;
8. el flujo y las deformaciones plásticas del concreto en la zona de tensión;
9. la aparición y desarrollo de grietas en la zona de tensión;
10. la contracción del concreto;
11. las variaciones de temperatura y humedad del medio;
12. el crecimiento del módulo de elasticidad del concreto;
13. el flujo del acero de refuerzo, etc.

Gran parte de los factores mencionados representan procesos prolongados: e influyen uno sobre el otro. En la mayoría de los casos el flujo del concreto en la zona de compresión es la causa fundamental del crecimiento de las deformaciones.

La aparición de grietas en la zona de tensión elimina, en mayor o menor grado, dicha zona del trabajo reduciendo la rigidez del elemento. La descripción teórica de los procesos de formación de grietas, o sea la creación de la teoría de la aparición y desarrollo de grietas considerando el factor tiempo es un problema muy complejo.

Por lo que respecta al refuerzo de la zona de compresión, este reduce los desplazamientos elásticos (debido a que dicho refuerzo aumenta la rigidez del elemento) y diferidos (puesto que el refuerzo retarda las deformaciones por fluencia).

En lo que sigue se acepta:

1. La hipótesis de la sección plana;
2. el diagrama de esfuerzos en la zona de compresión es triangular;
3. el concreto de la zona de tensión no participa en el trabajo.

Considerando la sección de la fig. 16 bajo un momento flexionante M_e , para el instante inicial ($t = 0$) según la teoría elástica:

$$\begin{aligned}\sigma_{ao} &= \frac{M_e}{\mu_o b h_o^2 \left(1 - \frac{\xi_o}{3}\right)} \\ \sigma_{co} &= \frac{2 M_e}{b h_o^2 \xi_o \left(1 - \frac{\xi_o}{3}\right)}\end{aligned}\tag{III.47}$$

donde:

$$\xi_o = \frac{x_o}{h_o} \quad \mu_o = \frac{F_a}{b h_o}$$

Para un instante cualquiera t , por condición de equilibrio:

$$\begin{aligned}\sigma_a(t) &= \frac{M_e}{\mu_o b h_o^2 \left(1 - \frac{\xi(t)}{3}\right)} \\ \sigma_c(t) &= \frac{2 M_e}{b \xi(t) h_o \left(1 - \frac{\xi(t)}{3}\right)} \\ \xi(t) &= \frac{x(t)}{h_o}\end{aligned}\tag{III.48}$$

Tomando en cuenta la hipótesis de la sección plana y (III.49) en (III.28) resulta:

$$x(t) = \frac{3}{2} h_o \left[1 - \sqrt{1 - \frac{24}{9} \frac{M_e}{b h_o^2} \frac{1}{\sigma_c(t)}} \right]$$

$$\frac{2.25 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{24}{9} \frac{M_e}{bh_0^2} \frac{1}{\sigma_c(t)}} \right]}{-1 + 3 \sqrt{1 - \frac{24}{9} \frac{M_e}{bh_0^2} \frac{1}{\sigma_c(t)}}} \sigma_c(t) =$$

$$= n_a \mu_0 \sigma_{c0} (1 + \Psi_t) + n_a \mu_0 \int_0^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} K(t, \tau) d\tau. \quad (III.49)$$

$$K(t, \tau) = \frac{E_0}{E(\tau)} + \Psi_t - \Psi_\tau$$

La solución de esta ecuación integral puede obtenerse por el método de A.V. Shvedov que consiste en dividir el tiempo en n intervalos y sustituir $K(t, \tau)$ por su valor medio en cada intervalo, obteniéndose una ecuación algebraica.

Un método aproximado más sencillo consiste en suponer que entre $\sigma_c(t)$ y Ψ_t existe una relación lineal, resultando:

$$C \xi^3(t) - [4C + 1] \xi^2(t) + [3C - D] \xi(t) + D = 0 \quad (III.50)$$

donde:

$$C = n_a \mu_0 \left(1 + \Psi_t - \frac{1}{1 + 8\Psi_t} \right) \frac{1}{\xi_0(3 - \xi_0)}$$

$$D = n_a \mu_0 \left(1 + \Psi_t + \frac{1}{1 + 8\Psi_t} \right)$$

Conocida $\xi(t)$, de (III.49) se obtienen $\sigma_a(t)$ y $\sigma_c(t)$.

De la ecuación del eje deformado se obtiene la rigidez $B(t)$ del elemento estructural para cualquier instante t :

$$B(t) = E_a F_a \varepsilon(t) [h_0 - x(t)] \quad (III.51)$$

$$\varepsilon(t) = h_0 - \frac{x(t)}{3}$$

Resumiendo, se puede indicar:

1. Las causas fundamentales de la variación de los desplazamientos en estructuras bajo carga de larga duración son:
 - a) el flujo del concreto en la zona de compresión;
 - b) la aparición y desarrollo de grietas en la zona de tensión;
 - c) la contracción del concreto y el flujo del refuerzo.
2. El refuerzo de la zona de compresión reduce los desplazamientos de la estructura.

5. Relajación de esfuerzos en estructuras de concreto

Para el estudio de la relajación de esfuerzos a la estructura se le impone una deformación constante con el tiempo.

Para un elemento de concreto simple bajo compresión axial, derivando (III.28) respecto al tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_c(t) &= \sigma_{c0} H(t) \\ N(t) &= N_0 H(t)\end{aligned}\tag{III.52}$$

donde $H(t)$ es el coeficiente de amortiguamiento

$$H(t) = e^{-(1 + \frac{\xi}{2} \psi_t) \psi_t}\tag{III.53}$$

En caso que el módulo de elasticidad se considere constante, deberá sustituirse $\xi = 0$.

Para un elemento de concreto con refuerzo simétrico las expresiones (III.53) se conservan, pero

$$H(t) = \frac{e^{-(1 + \frac{\xi}{2} \psi_t) \psi_t} + n_a \mu}{1 + n_a \mu}\tag{III.54}$$

En el caso de un elemento de concreto simplemente reforzado bajo flexión, sin la presencia de grietas, en general, en la sección transversal las líneas de esfuerzos y deformaciones nulas no coinciden debido al flujo del concreto. Sin embargo, como hipótesis sim

plificatoria se admite que dichas líneas coinciden en todo instante.

Para un instante cualquiera t , por equilibrio de fuerzas:

$$\sigma_c(t) = -\frac{2\mu \xi(t)}{2\xi(t) - 1} \sigma_a(t)$$

y por equilibrio de momentos:

$$M(t) = bh^2 \sigma_c(t) \left[\xi - 0.5 - \frac{3\xi - 2}{6\xi(t)} \right] \quad (III.55)$$

donde:

$$\xi(t) = \frac{x(t)}{h} \quad \xi = \frac{h_0}{h}$$

Tomando en cuenta la hipótesis de la sección plana y la condición de compatibilidad de las deformaciones del refuerzo y del concreto en el nivel del refuerzo, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_c(t) - \xi R_0}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2R_0 \sigma_c(t)}{[\sigma_c(t) - \xi R_0]^2}} \right\} = \\ & = n_a \mu \sigma_{c0} (1 + \psi_t) + n_a \mu \int_0^t \frac{d\sigma_c(t)}{d\tau} K(t, \tau) d\tau \quad (III.56) \\ & R_0 = \frac{\mu \sigma_{a0}}{\xi - \xi_0} \end{aligned}$$

La ecuación (III.57) puede resolverse utilizando el método de A.V. Shvedov y obtener $\sigma_c(t)$, con la cual se determinan las demás incógnitas.

Si suponemos una relación lineal entre $\sigma_c(t)$ y ψ_t y utilizamos el teorema del valor medio, la ecuación integral se transforma en:

$$[2 + D] \xi^2(t) - [1 + 2C + D\xi] \xi(t) + C = 0 \quad (III.57)$$

Conociendo $\xi(t)$, se determinan $\sigma_c(t)$, $\sigma_a(t)$ y $M(t)$.

En caso que la sección transversal esté reforzada simétricamente, la posición del eje neutro no varía con el tiempo. Si el desplazamiento impuesto se conserva constante, los esfuerzos en el acero también serán constantes con el tiempo.

Por la hipótesis de la sección plana

$$\sigma_{ao} = n_a \sigma_{co} \frac{2y}{h} \quad (III.58)$$

Considerando que las deformaciones del concreto son constantes, de (III.28) resulta:

$$\sigma_c(t) = \sigma_{co} H(t)$$

$$M(t) = \sigma_{co} \frac{2I_c}{h} [H(t) + n_a \mu \rho] \quad (III.59)$$

donde:

$$H(t) = e^{-(1 + \frac{\sigma}{2} \Psi_t) \Psi_t}$$

Si en el elemento estructural simplemente reforzado se presentan grietas en la zona de tensión, por condición de equilibrio:

$$\sigma_a(t) = \frac{M(t)}{\mu_o b h_o^2 \left[1 - \frac{\xi(t)}{3}\right]} \quad (III.60)$$

$$\sigma_c(t) = \frac{2M(t)}{b h_o^2 \xi(t) \left[1 - \frac{\xi(t)}{3}\right]}$$

De la condición de desplazamiento constante se obtiene:

$$H(t) = \frac{x(t) [h_o - x(t)]}{z_o (h_o - x_o)} \quad (III.61)$$

Utilizando la hipótesis de la sección plana resulta:

$$\frac{1}{1 + R_o \sigma_c(t)} \frac{1}{2 \mu_o R_o} =$$

$$= n_a \sigma_{co} (1 + \Psi_t) + n_a \int_0^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} K(t, \tau) d\tau \quad (III.62)$$

cuya solución puede obtenerse por el método de A.V. Shvedov.

Aceptando una relación lineal entre $\sigma_c(t)$ y ψ_t y utilizando el teorema del valor medio, la ecuación (III.63) se reduce a

$$\xi^2(t) + [D-C] \xi(t) - D = 0 \quad (\text{III.63})$$

donde:

$$C = n_a \mu_0 \left(1 + \psi_t - \frac{1}{1 + \delta \psi_t} \right) \frac{1 - \xi_0}{\xi_0}$$

$$D = n_a \mu_0 \left(1 + \psi_t + \frac{1}{1 + \delta \psi_t} \right)$$

De estos resultados se concluye:

- Para elementos de concreto reforzado bajo flexión el proceso de relajación es más intenso en la primera etapa (sin agrietamiento).
- El efecto de la variación del módulo del concreto con el tiempo consiste en intensificar el proceso de relajación.

6. Flujo no lineal del concreto

La relación lineal entre esfuerzos y deformaciones por fluencia se presenta hasta cierto nivel de esfuerzos. Este límite varía ampliamente y dependen en gran parte de la resistencia del concreto.

En esta etapa las deformaciones por fluencia son acompañadas por deformaciones plásticas relacionadas con la aparición de grietas muy pequeñas en el concreto. Las deformaciones inelásticas tales pueden referirse convencionalmente a la zona de flujo no lineal.

En muchos problemas de la teoría del concreto el flujo no lineal tiene un carácter transitorio. El paso de la zona de flujo no lineal a la zona de flujo lineal se debe al aumento en la resistencia del concreto, reducción de los esfuerzos durante la relajación, redistribución de esfuerzos del concreto al refuerzo, cierre de grietas, etc.

En la teoría del flujo no lineal se admiten las siguientes hipótesis:

1. El material es homogéneo e isótropo.
2. Entre las deformaciones elásticas y los esfuerzos existe una relación lineal.
3. Para las deformaciones por fluencia se acepta el principio de superposición.
4. La hipótesis del paralelismo de las curvas de fluencia se extiende a la zona de flujo no lineal.
5. Los valores absolutos de las deformaciones no dependen del signo de los esfuerzos.
6. Se supone que las curvas de fluencia para esfuerzos distintos son semejantes. Esto significa que la deformación por fluencia $\epsilon_{fl}(t)$ producida por el esfuerzo σ_c puede obtenerse de la deformación $C(t)$ producida por un esfuerzo de 1 kg/cm^2 multiplicada por cierta función del esfuerzo $F(\sigma_c)$:

$$\epsilon_{fl}(t) = F(\sigma_c) C(t) \quad (III.64)$$

en que

$$\begin{aligned} F(\sigma_c) &= \sigma_c & \text{para} & & \sigma_c \leq \eta R \\ F(\sigma_c) &= f(\sigma_c) & \text{para} & & \sigma_c > \eta R \end{aligned} \quad (III.65)$$

donde R es la resistencia del concreto y η es la relación $\frac{\sigma_c}{R}$ para la cual el flujo lineal se transforma en no lineal.

La forma más general de la función $f(\sigma_c)$ es

$$f(\sigma) = \alpha\sigma + \beta\sigma^m$$

pero en este caso aceptaremos

$$f(\sigma) = \sigma + \beta\sigma^2 \quad (III.66)$$

donde α y β son parámetros experimentales.

Supongamos un elemento de concreto simple bajo un esfuerzo constante σ_{co} . La deformación total vale:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_{fl}(t) = \frac{\sigma_{c0}}{E_0} + f(\sigma_{c0}) C(t)$$

Si en $t = \tau_0$ el esfuerzo recibe un incremento $\Delta\sigma_c(\tau_0)$, la deformación total en $t_1 > \tau_0$ será

$$\varepsilon_c(t_1) = \frac{\sigma_{c0}}{E_0} + \frac{\Delta\sigma_c(\tau_0)}{E(\tau_0)} + f(\sigma_{c0}) C(t_1) + \Delta f \cdot C(t_1, \tau_0)$$

en que los dos primeros términos representan la deformación instantánea producida por σ_{c0} y $\Delta\sigma_c(\tau_0)$; los dos segundos términos representan la deformación por fluencia: la primera producida por σ_{c0} en $t - t_1$ y la segunda por Δf debido a $\Delta\sigma_c(\tau_0)$.

Si $\sigma_c = \sigma_c(t)$, considerando la cuarta hipótesis y que $\Psi_t = C(t) E_0$, se obtiene:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_{c0}}{E_0} + \frac{f(\sigma_{c0})}{E_0} \Psi_t + \int_0^t \left[\frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \frac{1}{E(\tau)} + \frac{df[\sigma_c(\tau)]}{d\tau} \frac{\Psi_t - \Psi_\tau}{E_0} \right] d\tau \quad (III.67)$$

que es la ecuación fundamental de la teoría de envejecimiento para la zona de flujo no lineal.

De las condiciones (III.66) resulta:

$$\begin{aligned} \beta = 0 & \quad \frac{\sigma_c(t)}{R} \leq \eta \\ \beta > 0 & \quad \frac{\sigma_c(t)}{R} > \eta \end{aligned}$$

de manera que se puede escribir (fig. 17)

$$\beta(t) = v \left[\frac{\sigma_c(t)}{R} - \eta \right]^2 *$$

*Una relación más general sería

$$\beta(t) = v \left[\frac{\sigma_c(t)}{R} - \eta \right]^n$$

en que v es un parámetro experimental (fig. 18).

En caso de considerar $\beta(t) = \beta_0 = \text{constante}$, se tendría flujo estacionario no lineal.

Una suposición más correcta sería considerar (fig. 19)

$$\beta(t) = \beta_0 \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq t'$$

$$\beta(t) = 0 \quad \text{para} \quad t > t'$$

El caso más general sería $\beta(t) \neq \text{constante}$, es decir, $\beta(t)$ varía desde β_0 en $t=0$ hasta $\beta(t)=0$ en $t > t'$ (fig. 20).

7. Relajación de esfuerzos

Consideremos un elemento de concreto simple bajo compresión axial. Tomando en cuenta que $\epsilon_c(t) = \text{constante}$, derivando (III.68) y considerando $\beta(t) = \beta_0 = \text{constante}$ se obtiene

$$\sigma_c(t) = \sigma_{co} \frac{e^{-\psi_t \left[1 + \frac{\sigma}{2} \psi_t \right]}}{1 + \beta_0 \sigma_{co} \left[1 - e^{-\psi_t \left(1 + \frac{\sigma}{2} \psi_t \right)} \right]} \quad (\text{III.67})$$

e comparada con la expresión correspondiente al caso de flujo real muestra que el proceso de relajación es más intenso.

En el caso de un elemento de concreto reforzado, por condición de equilibrio:

$$\sigma_{ce}(t)F_c + \sigma_{ae}(t)F_a = N_e$$

por la condición de compatibilidad de deformaciones se obtiene:

$$\sigma_{ce}(t) = \frac{\sigma_{ce}}{1 + \beta_0 \sigma_{ce} (1 - e^{-\xi \Psi_t})} e^{-\xi \Psi_t} \quad (III.68)$$

donde

$$\xi = n_a \mu \left[1 - \frac{n_a \mu}{\delta \Psi_t} \ln \frac{1 + n_a \mu + \delta \Psi_t}{1 + n_a \mu} \right]$$

en que se consideró (III.20).

En estos problemas es posible adoptar otras relaciones funcionales para $f[\sigma_{ce}(t)]$, puesto que la ecuación fundamental permite separar las variables independientemente del tipo de $f[\sigma_{ce}]$.

Considerando un elemento de concreto reforzado con presfuerzo sobre apoyos exteriores, cuya sección se muestra en la fig 21, al soltar el presfuerzo:

$$\sigma_{cc} = - \frac{\mu_p}{1 + n_p(\mu_p + \mu)} \sigma_{ak}$$

$$\sigma_{ap} = \sigma_{ak} + n_p \sigma_{co} \quad (III.69)$$

$$\sigma_{ao} = n_p \sigma_{co}$$

Para cualquier instante t , por efecto del flujo:

$$\sigma_c(t) = \sigma_{co} + \sigma_{cp}(t)$$

$$\sigma_{ap}(t) = \sigma_{ap} + \sigma_p(t)$$

(III.70)

$$\sigma_{ao}(t) = \sigma_{ao} + \sigma_p(t)$$

Por condición de compatibilidad de deformaciones, utilizando (III.68), después de algunas transformaciones se obtiene:

$$\sigma_{cp}(t) = -\sigma_{co} \left[1 - \frac{e^{-\xi \Psi_t}}{1 + \beta_0 \sigma_{co} (1 - e^{-\xi \Psi_t})} \right]$$

(III.71)

$$\sigma_p(t) = \frac{\sigma_{co}}{\mu_p + \mu} \left[1 - \frac{e^{-\xi \Psi_t}}{1 + \beta_0 \sigma_{co} (1 - e^{-\xi \Psi_t})} \right]$$

donde

$$\xi = n_p (\mu_p + \mu) \left[1 - \frac{n_p (\mu_p + \mu)}{\delta \Psi_t} \ln \frac{1 + n_p (\mu_p + \mu) + \delta \Psi_t}{1 + n_p (\mu_p + \mu)} \right]$$

En caso de presfuerzo sobre la estructura:

$$\sigma_{ap} = \sigma_{ax}$$

$$\sigma_{co} = - \frac{\mu_p \sigma_{ax}}{1 + n_p \mu}$$

(III.72)

$$\sigma_{ao} = n_p \sigma_{co}$$

mientras que $\sigma_{cp}(t)$ y $\sigma_p(t)$ se determinan de (III.73).

En estos resultados se consideró $E_a = E_p$.

Como se indicó anteriormente, el flujo no lineal tiene un carácter transitorio, es decir el parámetro β es función del tiempo. Para considerar esto hecho, se supondrá que el módulo y resistencia del concreto son constantes. El efecto de la varia-

ción del módulo es insignificante, sin embargo el crecimiento de la resistencia puede acelerar la transición del flujo no lineal al flujo lineal y por lo tanto reducir las pérdidas de presfuerzo.

Sustituyendo $\sigma_c(t) = \eta R'$ en las ecuaciones anteriores se obtiene el valor de $\Psi_{t'}$ para el instante $t = t'$ de transición del flujo no lineal al flujo lineal:

$$\Psi_{t'} = \frac{1}{5} \ln \frac{\frac{\sigma_{co}}{R'} + \eta \beta_0 \sigma_{co}}{\eta + \eta \beta_0 \sigma_{co}} \quad (III.73)$$

con

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 & 0 \leq t \leq t' \\ \beta &= 0 & t > t' \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Psi_{t'} &= \frac{1}{5} \left[-\ln \eta R' + \frac{1+A}{2} \ln(\eta R' + \sigma_0) + \frac{B}{2} \ln(-\sigma_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Bb-2D}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{\sqrt{\Delta}} + F(\sigma_{co}) \right] \quad (III.74) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \beta(t) &= v \left[\frac{\sigma_c(t)}{R'} - \eta \right]^2 & 0 \leq t \leq t' \\ \beta &= 0 & t > t' \end{aligned}$$

En estas expresiones σ_0 es la raíz de la ecuación:

$$\sigma_c(t) [\sigma_c(t) - \eta R']^2 + \frac{R'^2}{v} = 0$$

$$b = \sigma_0 - 2\eta R' \quad A = \frac{c}{\Delta + \eta^2 R'^2}$$

$$C = (\sigma_0 - \eta R')^2 \quad B = 1 - A$$

$$\Delta = 4C - b^2 \quad D = \sigma_0 (4A - 1)$$

$$F(\sigma_{co}) = \int_{\sigma_{co}}^{\sigma_c} \frac{d\sigma_c(t)}{\sigma_c(t) + \nu \left[\frac{\sigma_c(t)}{R'} - \eta \right]^2 \sigma_c^2(t)} \quad (III.75)$$

Si se desea determinar el estado de esfuerzos en t_0 al que corresponde una característica de fluencia Ψ_{t_0} , se sigue el procedimiento siguiente:

- 1) Se calcula $\Psi_{t'}$ según las expresiones anteriores.
- 2) Si $\Psi_{t_0} < \Psi_{t'}$, en t_0 se tiene flujo no lineal y los esfuerzos se determinan de (III.73).
- 3) Si $\Psi_{t_0} > \Psi_{t'}$, entonces hasta t' se presenta flujo no lineal; en $t' \leq t \leq t_0$ se tiene flujo lineal con un esfuerzo inicial $\sigma_c = \eta R'$.

De los resultados obtenidos en la teoría no lineal se deduce:

1. La relajación de esfuerzos en el concreto bajo compresión axial aumenta en comparación con el caso lineal.
2. Bajo carga axial de larga duración la redistribución de esfuerzos del concreto al refuerzo es más intensa que en la zona de flujo lineal.
3. Las pérdidas de esfuerzos en el concreto y refuerzo son mayores.
4. En muchos casos el flujo no lineal es transitorio debido a la reducción de los esfuerzos en el concreto con el tiempo, aumento de la resistencia, cierre de grietas, etc.
5. Al considerar el carácter transitorio del flujo no lineal las pérdidas de presfuerzo se reducen.
6. Considerando que en la ecuación fundamental las variables se separan independientemente de la forma de $f(\sigma_c)$, existe libertad en la selección de dicha relación.

CAPITULO IV

OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

En este trabajo se han expuesto las ideas fundamentales de las teorías matemática y técnica del flujo del concreto.

Con base en las hipótesis de partida se obtuvieron las ecuaciones fundamentales que permitieron plantear las relaciones necesarias para la determinación del estado de esfuerzos y deformaciones producidas por carga exterior y deformaciones impuestas.

La diferencia fundamental entre las teorías matemática y técnica atribuye en una hipótesis adicional adoptada en esta última, según la cual las curvas de fluencia son paralelas. Debido a esta hipótesis es posible resolver satisfactoriamente las ecuaciones integrales que resultan y aplicar la teoría a una gran variedad de problemas de estructuras de concreto, tanto en el rango lineal como no lineal.

Respecto a las teorías anteriores cabe hacer las siguientes observaciones.

1. En la teoría matemática la contracción del concreto se expresa mediante:

$$S_n = S_0 (1 - e^{-st}) \quad (IV.1)$$

Considerando (22)

$$\psi_t = m (1 - e^{-bt}) \quad (IV.2)$$

en (III.) resulta

$$\alpha_y(t) = \alpha_y (1 - e^{-bt}) \quad (IV.3)$$

Estas expresiones son semejantes entre sí, con la diferencia que s está relacionada con el problema de contracción, mientras que b se refiere al fenómeno de flujo. Así, la teoría matemática separa los fenómenos de flujo y contracción. Para evitar la superposición sería necesario valorar s de una prueba de contracción combinada con flujo.

2. Experimentalmente se ha hallado (15) que la mayor influencia en las deformaciones se debe al esfuerzo aplicado a edad temprana y al esfuerzo inmediatamente anterior al instante de observación. Los esfuerzos en el período intermedio se suavizan por la elasticidad diferida. Considerando lo anterior se ha visto que la forma de $C(t, \tau)$ propuesta por Arutjunian subestima la influencia del esfuerzo anterior al instante t , no presentándose este hecho al considerar

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) \phi(t - \tau) + F(\tau) - F(t) \quad (IV.4)$$

El autor consideró

$$C(t, \tau) = \left(1 + \frac{A_1}{\tau}\right) \left[B_1 \left(1 - e^{-\frac{1}{\beta_1}(t-\tau)}\right) + B_2 \left(1 - e^{-\frac{1}{\beta_2}(t-\tau)}\right) \right] + K e^{-\frac{\tau}{\alpha_1}} - K e^{-\frac{t}{\alpha_1}} \quad (IV.5)$$

Esta misma expresión se utilizó para determinar la relajación de esfuerzos, resultando que la teoría lineal sobrestima el fenómeno, en un máximo de 15 por ciento.

3. Por lo que respecta a la ley de variación del módulo de elasticidad, en la teoría matemática éste se acostumbra expresar en función de $E_{\text{máx}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E(\tau)$, mientras que en la teoría técnica se relaciona con el valor inicial E_0 . La ventaja de (III.12) consiste en que la variación de $E(\tau)$ puede iniciarse desde cero.

4. Considerando que la determinación de Ψ_t , m , $\alpha_y(t)$ y α_y en la teoría técnica se hace en condiciones de laboratorio, resulta conveniente relacionar éstos, obtenidos en condiciones medias, con la realidad. Para ello se ha propuesto (24):

$$\begin{aligned} m &= \Psi_{\infty}^m \eta_1 \eta_2 \eta_3 \\ \alpha_y &= \alpha_y^m \eta_1 \eta_2 \eta_4 \end{aligned} \quad (IV.6)$$

en que:

Ψ_{∞}^m es el valor máximo de la característica de fluencia para las condiciones medias de laboratorio;

α_y^m es el valor máximo de la contracción para las condiciones medias de laboratorio;

η_1 es el coeficiente de corrección que depende de la humedad del medio en que se encuentre la estructura;

η_2 es el coeficiente de corrección que considera el factor de escala (dimensiones reales de la estructura);

η_3 es el coeficiente de corrección que depende de la edad del concreto al aplicar la carga;

η_4 es el coeficiente de corrección que depende del tiempo t_1^c en que se comienza a considerar la influencia de la contracción.

Los valores de estos parámetros obtenidos experimentalmente se dan en (24).

5. Para poder utilizar las teorías anteriores es necesario realizar una serie de pruebas experimentales y determinar los parámetros que en ellas aparezcan para distintos tipos de concretos y condiciones del medio.

Las conclusiones más importantes de este estudio son las siguientes.

1. De las teorías existentes, la teoría del cuerpo viscoelástico (matemática) es la más rigurosa y general, mientras que la teoría del envejecimiento (técnica) es una simplificación de la anterior.

2. La influencia del envejecimiento del concreto en el flujo en la teoría matemática se considera mediante la función de envejecimiento

$$\varphi(\tau) = C(\infty, \tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau} \quad (IV.7)$$

mientras que en la teoría técnica esto se logra por medio de la hipótesis del paralelismo de las curvas de fluencia. La función de envejecimiento $\varphi(\tau)$ implica irreversibilidad parcial de las deformaciones de flujo, así como la hipótesis del paralelismo de las curvas de fluencia presupone la irreversibilidad total de las deformaciones de flujo en la descarga (relajación).

3. Las desventajas fundamentales de la teoría del cuerpo viscoelástico consisten en que debido a dificultades matemáticas frecuentemente no es posible tomar en cuenta el envejecimiento del material, tanto por lo que respecta a $E(\tau)$ como a la edad. Estas dificultades son mayores en el rango no lineal, que no considera el carácter transitorio del fenómeno. Todo esto hace que en ciertos casos las soluciones obtenidas mediante la teoría técnica sean más correctas, aun cuando la teoría matemática sea más rigurosa.

4. La teoría técnica permite resolver los siguientes problemas:

- a) determinar el estado de esfuerzos producido por la contracción en secciones simétricas y asimétricas (reforzadas y presforzadas) bajo carga exterior y sin ella, considerando el flujo, la variación de $E(\tau)$ y el carácter prolongado de la contracción del concreto (artículos 2 y 3).
- b) determinar la rigidez y desplazamientos en elementos estructurales en cualquier instante considerando la influencia del flujo, contracción, variación de $E(\tau)$, la presencia de refuerzo en la zona de compresión que reduce el flujo y la influencia de la zona de tensión cubierta por grietas progresivas (artículo 4).
- c) Resolver el problema de relajación de esfuerzos en elementos bajo compresión y flexión considerando el flujo y variación de $E(\tau)$ (artículo 5).
- d) determinar el estado de esfuerzos, relajación y pérdidas de presfuerzo en compresión axial, el estado de esfuerzos en elementos bajo flexión y las pérdidas de presfuerzo en compresión considerando en todos los casos la variación de Ψ_t y $E(\tau)$ y el carácter transitorio del flujo no lineal con $\beta \neq$ constante (artículos 6 y 7).

5. En la teoría técnica se han presentado soluciones a problemas unidimensionales. Parece posible extender la teoría a problemas bi y tridimensionales siguiendo el procedimiento utilizado en la teoría matemática.

REFERENCIAS

1. Aleksandrovsky, S.V., "Algunas particularidades de la contracción del concreto, Concreto simple y reforzado"
2. Aleksandrovsky, S.V., Acerca de las características del concreto bajo cambios de temperatura y humedad, Moscú, 1959.
3. Aleksandrovsky, S.V., Sobre la influencia de la carga exterior prolongada en el régimen de secado y contracción del concreto, Moscú, 1959.
4. Aleksandrovsky, S.V., Sobre la reversibilidad de la contracción y expansión del concreto, Moscú, 1960.
5. Aleksandrovsky, S.V., Sobre la influencia de la tensión prolongada en el régimen de evaporación y contracción del concreto, Moscú, 1960.
6. Aleksandrovsky, S.V., Sobre la influencia del factor de escala en las deformaciones por humedad del concreto, Moscú, 1961.
7. Arutiunian, N.J., "Algunos problemas de la teoría del flujo, Moscú, 1952.
8. Bland, D.R., The theory of linear viscoelasticity, Pergamon Press, 1960.
9. Fluck, P.G. y Washa, G.W., Creep of plain and reinforced concrete, ACI, IV - 1958.
10. Freudenthal, A.M. y Roll, F., Creep and creep-recovery of concrete under high compressive stress, ACI, VI - 1958.
11. Gluecklich, J., Rheological behavior of hardened cement paste under low stresses, ACI, X - 1959
12. Gluecklich, J. y Ori Ishoi, Rheological behavior of hardened cement paste under low stresses, ACI, II - 1961.
13. Green, A.E. y Zerna, W., Theoretical elasticity, Oxford, 1960.
14. Hanson, T.C., Creep and relaxation of stresses in concrete, 1960.
15. Iashin, A.V., Flujo del concreto a edad temprana, Moscú, 1959.

16. Joseph Marin, Mechanical behavior of engineering materials, Prentice Hall Inc., 1962.
17. Karapetian, K.S., Flujo del concreto bajo esfuerzos elevados, 1953.
18. Katin, N.I., Investigación del flujo del concreto bajo esfuerzos elevados, Moscú, 1959.
19. Neville, A.M., Theories of creep in concrete, ACI, IX - 1955.
20. Novozhilov, V.V., Foundations of nonlinear theory of elasticity, Graylock, 1953.
21. Reiner, M., Building materials. Their elasticity and inelasticity, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1954.
22. Ulitsky, I.I. y Chsan Chsun-iao, Investigación experimental del flujo y relajación de esfuerzos en el concreto simple y reforzado, Concreto simple y reforzado, 3, 1959.
23. Ulitsky, I.I., Chsan Chsun-iao y Golishev, A.B., Análisis de estructuras de concreto reforzado considerando los procesos prolongados, Kiev, 1960.
24. Ulitsky, I.I., Método práctico para la determinación de las deformaciones de flujo y contracción del concreto, Concreto simple y reforzado, 4, 1962.

FIGURAS



Fig. 1



Fig. 2

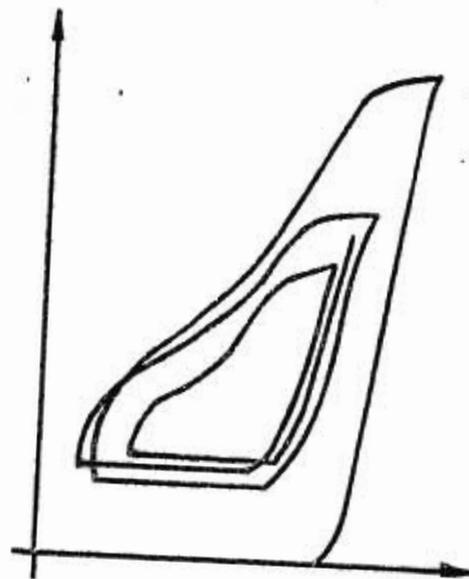
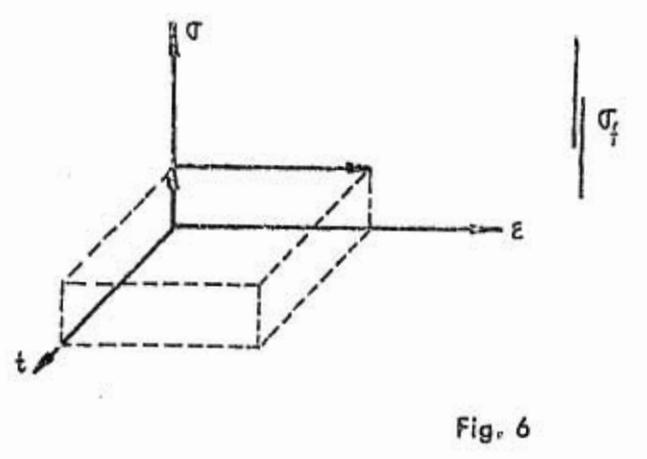
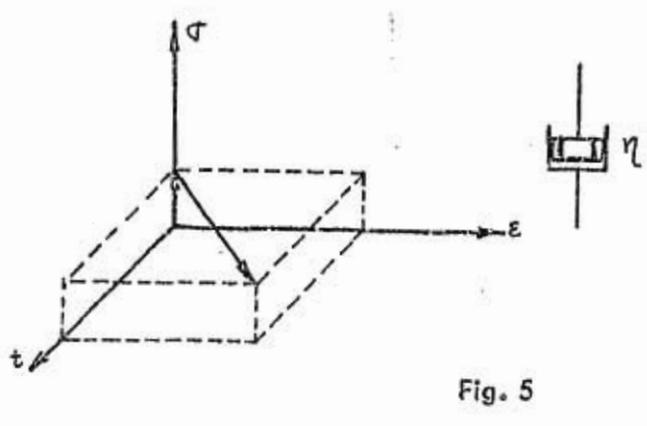
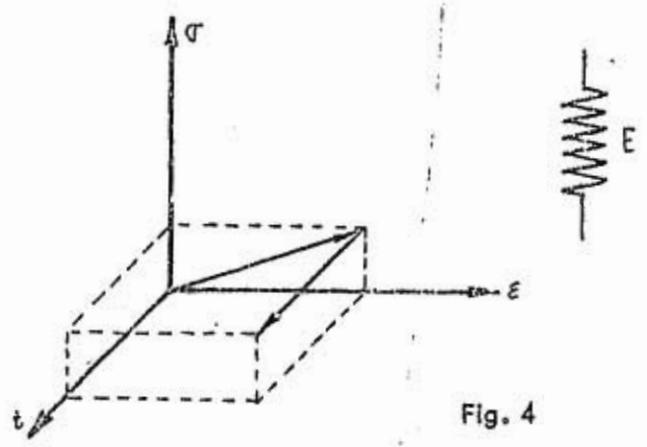


Fig. 3



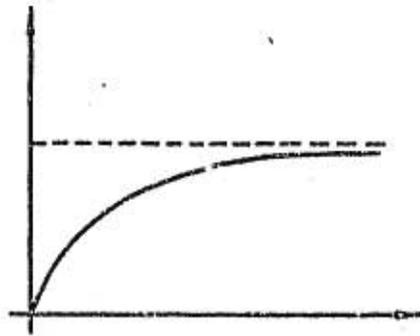


Fig. 7

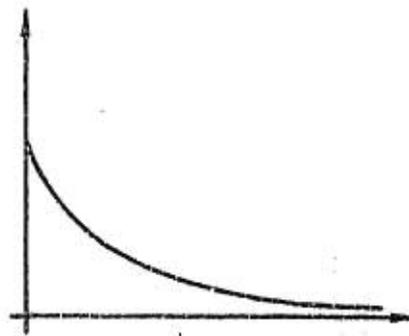


Fig. 8

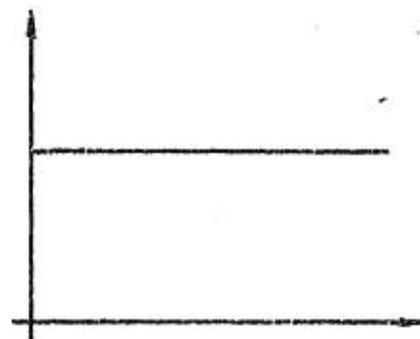


Fig. 9

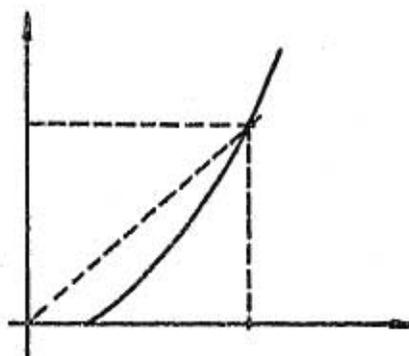


Fig. 10

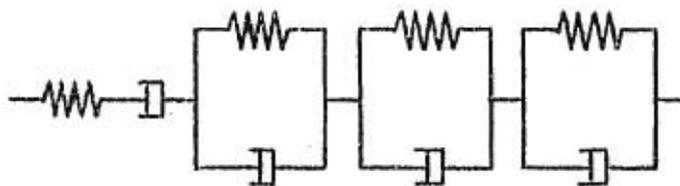


Fig. 11

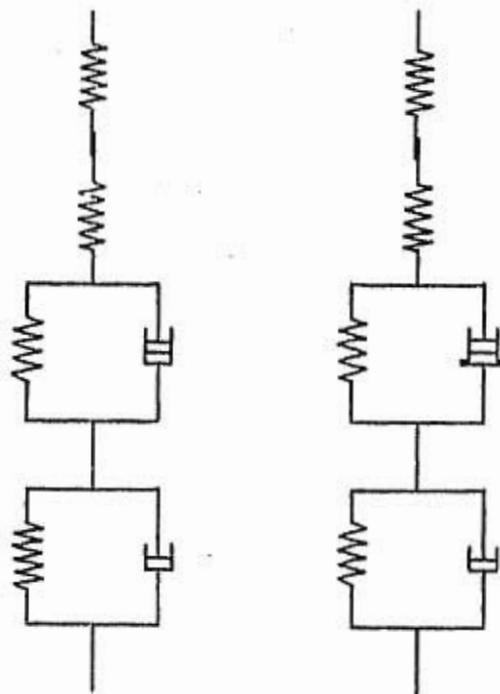


Fig. 12

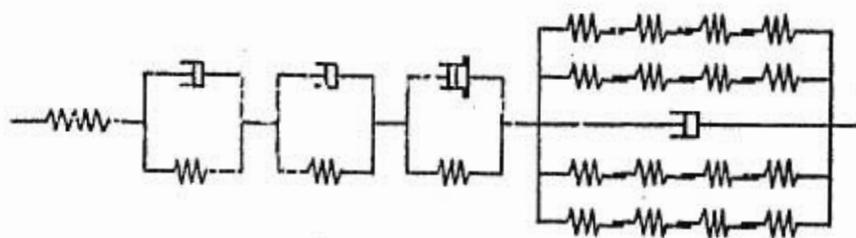


Fig. 13

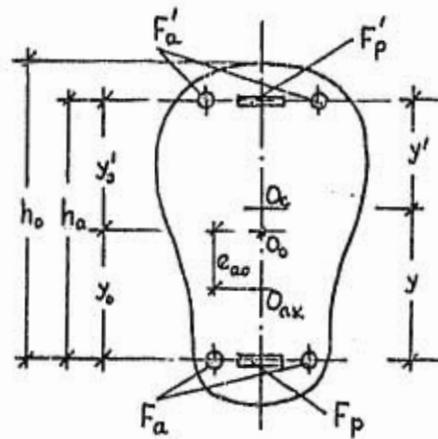


Fig. 14

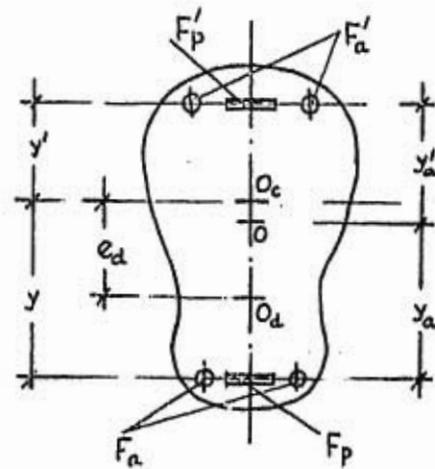


Fig. 15

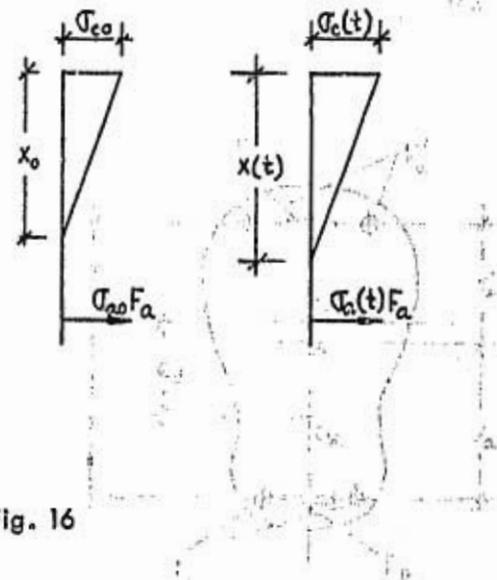
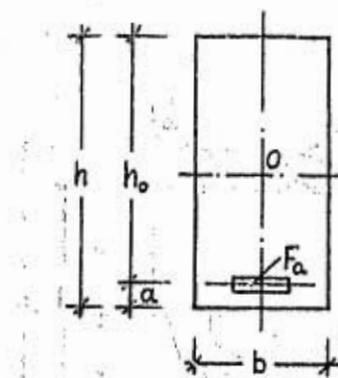


Fig. 16



Fig. 12



Fig. 14

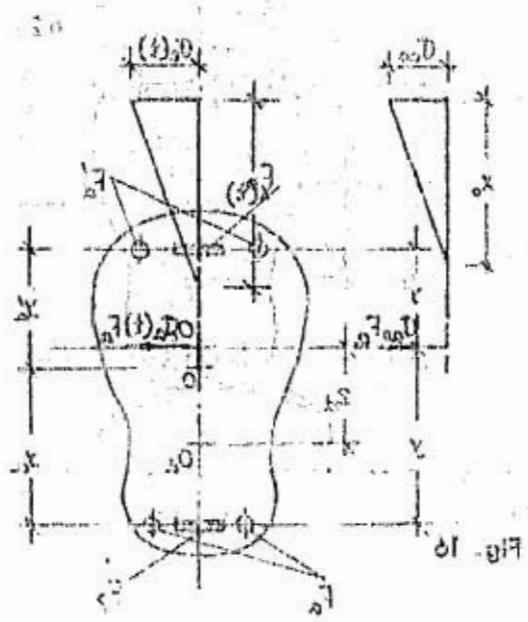


Fig. 10

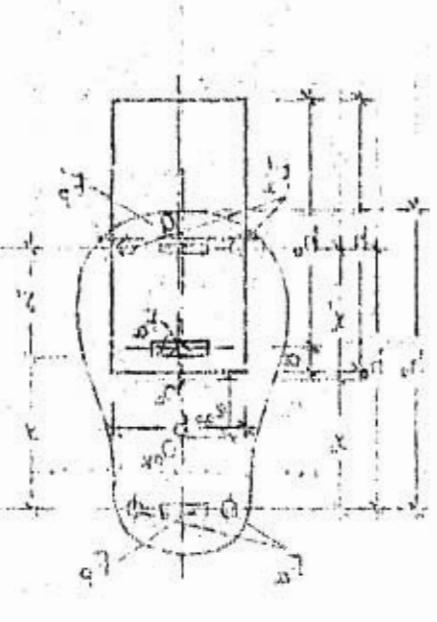


Fig. 11

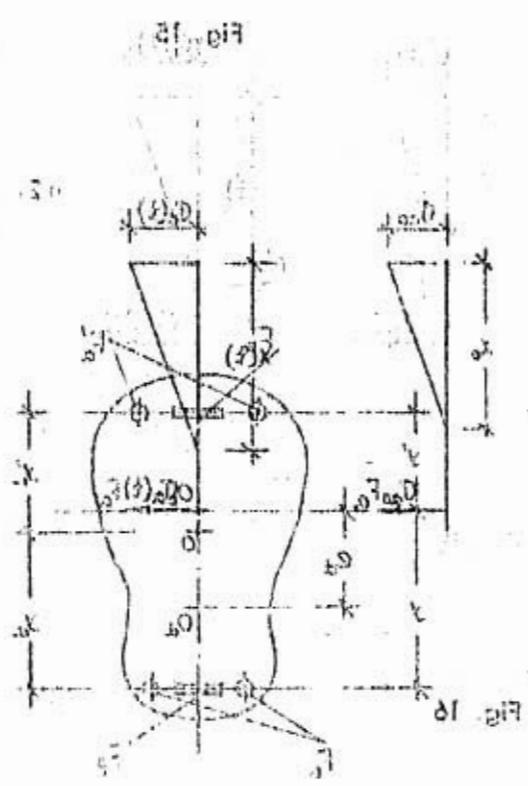


Fig. 13

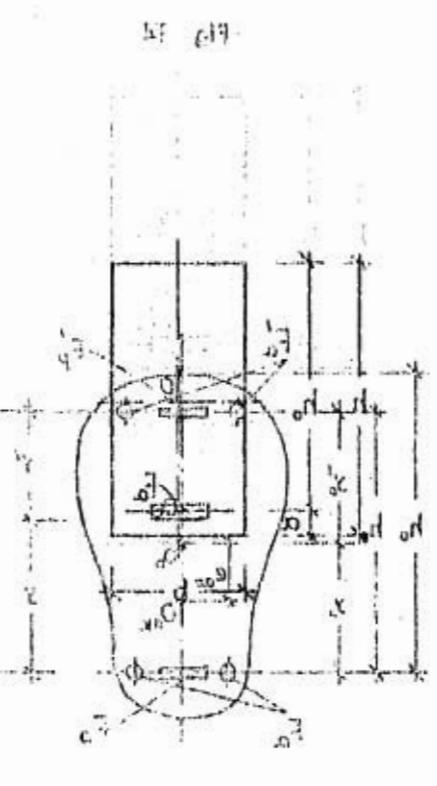


Fig. 15

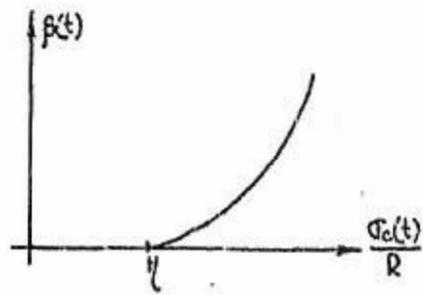


Fig. 17

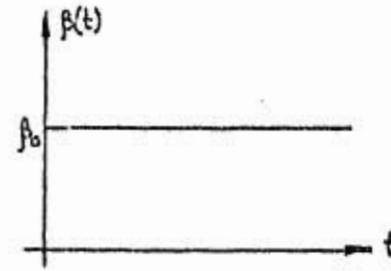


Fig. 18

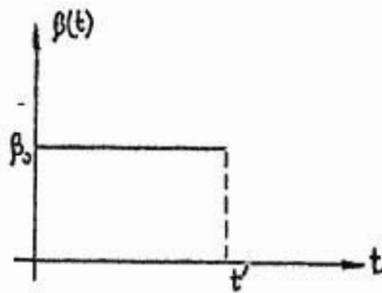


Fig. 19

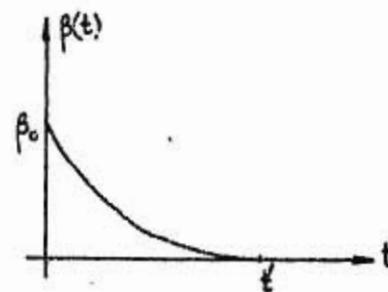


Fig. 20

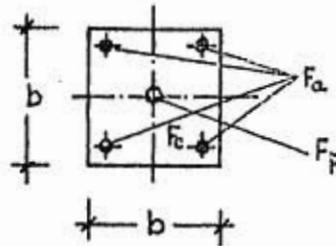


Fig. 21