10

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

CRITERIOS DE FLUENCIA APLICADOS A SUELOS

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE :

MAESTRIA EN INGENIERIA

P R E S E N T A

JESÚS ALBERRO ARAMBURU

MÉXICO 1962

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DEL DOCTORADO

CRITERIOS DE FLUENCIA APLICADOS A SUELOS

Tesis para obtener el grado de maestro en Ingeniería (especialidad: mecánica de suelos) que presenta el Ing. Civil

Jesús Alberro Aramburu

196

Indice

Títulos de las figuras

I. Introducción

El propósito de este trabajo es revisar y discutir los criterios de fluencia, propuestos por la teoría de la plasticidad, aplicándolos a suelos. En este estudio, se considera que los suelos son materiales homogéneos e isótropos, y los resultados obtenidos teóricamente, basándose en la teoría matemática de la plasticidad, se comparan con los resultados experimentales. Este trabajo consta de cuatro capítulos. El primero es un resumen rápido de los conceptos fundamentales de la teoría de la plasticidad, necesario para los desarrollos ulteriores. En el segundo capítulo se ha tratado de hacer resaltar algunas de las propiedades de los suelos, útiles para el análisis de los criterios de fluencia que se lleva a cabo en los capítulos dos y tres. Dichos criterios pueden dividirse en dos categorías.

- Los propios de materiales elasto-plásticos perfectos (Capítulo III).
- Los correspondientes a materiales elasto-plásticos con endurecimiento a la deformación (Capítulo IV).

I. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD

A) Hipótesis generales de la teoria de la plasticidad

¿Cuales son las hipótesis básicas de la teoría de los materiales plásticos? Nos concretaremos en enumerarlas, y trataremos de su aplicabilidad a los suelos en el Capítulo II.

1) El elemento tiempo no se toma en cuenta en la teoría matemática de la plasticidad.

2) La teoría es válida para temperaturas tales que no se producen fenómenos de fluencia térmica.

3) No se toman en cuenta los fenómenos consecuentes a defectos de uniformidad a escala microscópica tales como: efecto Bauschinger, ciclos de histeresis. Estos efectos se deben a un endurecimiento diferencial de las partículas, orientadas diversamente, durante las deformaciones.

B) Materiales elastoplásticos perfectos y materiales elastoplásticos con endurecimiento a la deformación

Se pueden distinguir dos tipos de materiales elasto-plásticos: los materiales elasto-plásticos perfectos y los materiales elasto-plásticos con endurecimiento a la deformación. Se pueden diferenciar claramente dichos materiales mediante la observación de sus curvas respectivas de esfuerzo-deformación en una prueba de tensión simple.

En el caso de la Fig. (1a), la relación esfuerzo-deformación no es unívoca; por lo contrario en la Fig. (1b) la relación esfuerzo deformación es unívoca.

El sentido del vocablo "endurecimiento a la deformacion" resulta claro en el caso de tension simple: el esfuerzo es una función monotónicamente creciente de las deformaciones. En el caso de un sistema más complejo de esfuerzos, el estado de deformaciones no se puede representar en forma tan sencilla en función de los esfuerzos. El concepto de endurecimiento puede en tal caso expresarse en función del trabajo realizado por un agente externo, que aplica y remueve un conjunto de esfuerzos adicionales.

La configuración del estado de deformaciones puede resultar idéntica o diferente a la primitiva, después de la eliminación de los esfuerzos aditivos. El agente externo se debe entender como totalmente separado y distinto del agente que causó el estado de esfuerzos existente.

El endurecimiento a la deformación, para ese incremento del estado de esfuerzos, implica que el material se mantendrá en equilibrio estable y que:

a) el agente externo realiza un trabajo positivo durante la aplicación de los incrementos de esfuerzos.

b) el trabajo neto realizado por este agente, a lo largo de un ciclo de carga y descarga es nulo o positivo.

Es preciso subrayar que el trabajo al cual nos referimos no es el trabajo total realizado por todas las fuerzas actuantes, sino únicamente el trabajo realizado por el conjunto de incrementos de esfuerzos.

Designando por $d\sigma_{ij}$ el conjunto de esfuerzos adicionales,

$d\varepsilon_{ij}$ las deformaciones totales resultantes,

$d\varepsilon_{ij}^{e}$ las deformaciones de carácter elástico,

$d\varepsilon_{ij}^{p}$ las deformaciones de carácter plástico.

Obtenemos, empleando la convención de suma de Einstein.

$$d\varepsilon_{ij} = \text{[illegible]}$$

y de a) $\quad d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} > 0$

b) $\quad d\sigma_{ij}\, d\varepsilon^{p}_{ij} \geq 0$

En otras palabras, un material con endurecimiento a la deformación, absorbe energía al deformarse plásticamente. Es preciso notar sin embargo que todo sistema disipativo, sea con endurecimiento o no, provoca la disminución del potencial energético total de las fuerzas externas e internas, al deformarse inelásticamente. Esta condición resulta necesaria, para un material con endurecimiento a la deformación conforme a la definición de dicho fenómeno, pero no resulta suficiente. Numerosos ejemplos de sistemas friccionantes, citados en la referencia No. 1, hacen resaltar esta última afirmación, a pesar de presentar curvas del tipo de la figura No. 1 en una prueba de tensión simple. Volveremos sobre este punto a propósito de las propiedades de los suelos.

Es interesante subrayar que un material real puede asimilarse según el nivel de esfuerzos aplicados, a un material elasto-plástico perfecto o a un material elasto-plástico con endurecimiento a la deformación como lo muestra la figura No. 2.

C) Criterio de fluencia. Superficie de fluencia

1) Definiciones

Supongamos que el cuerpo está sometido a un sistema de esfuerzos principales σ_x, σ_y, σ_z. Al modificar dicho estado de esfuerzos, las deformaciones resultantes pueden ser de tipo puramente elástico o de tipo elasto-plástico. La ley que define el límite de elasticidad bajo cualquier combinación de esfuerzos posible se llama criterio de fluencia y se puede escribir en la forma

$$f(\sigma_{ij}) = k$$

En cada punto del material, para cada estado existente de deformaciones plásticas existe un valor k^2 y una funcion $f(\sigma_{ij})$ de los esfuerzos σ_{ij} tal que ocurre una deformación plástica únicamente cuando

$$f(\sigma_{ij}) \geq k^2$$

Se verifica la igualdad en el caso de un material plástico perfecto y la desigualdad para un material plástico con endurecimiento a la deformación. En esta ecuación f y k pueden depender del estado de deformaciones plásticas y de la historia de dichas deformaciones. La función $f(\sigma_{ij})$ puede ser tan anisotrópica como se desee y de cualquier grado en función de los esfuerzos.

La ecuación $f(\sigma_{ij}) = k^2$ representa en un sistema cartesiano ortogonal de ejes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ siendo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ los esfuerzos principales en el punto del cuerpo considerado, una superficie denominada: superficie de fluencia.

En el caso de un estado plano de esfuerzos la superficie de fluencia se reduce a una curva.

2) Propiedades de los superficies y curvas de fluencia.

Nos concretaremos en enunciar las diversas propiedades de las superficies y curvas de fluencia, subrayando sin embargo las hipotesissobre las cuales se basan las demostraciones de dichas propiedades

a) Hipótesis básicas

Trataremos únicamente de los materiales plásticos perfectos o de los materiales con endurecimiento a la deformación. Esto implica que $d\sigma_{ij}\, d\varepsilon^{p}_{ij} \geq 0$ y que el material se mantendrá en equilibrio estable. En este caso se puede demostrar (Ref. No. 2) las siguientes propiedades de las superficies y curvas de fluencia

b) Propiedades básicas

1. Las superficies y curvas de fluencia son convexas, es decir que ningún punto de una recta, que une dos puntos que pertenecen a la superficie o a la curva, es exterior a dicha superficie o curva.

2. Consideramos la superficie de fluencia referida al sistema de ejes σ_1, σ_2, σ_3

Si superponemos a los ejes σ_1, σ_2, σ_3 los ejes ε_1, ε_2, ε_3 (deformaciones principales) entonces podemos en el mismo espacio representar los esfuerzos y las deformaciones a las cuales está sometido el cuerpo.

En estas condiciones se demuestra que :

- si la superficie de fluencia no tiene puntos singulares el vector incremento de deformaciones plásticas $d\varepsilon_{ij}^{p}$ es en cada punto perpendicular a la superficie. En consecuencia la dirección del vector $d\varepsilon_{ij}^{p}$ es independiente de la dirección del vector incremento de esfuerzos $d\sigma_{ij}$ para todo estado de esfuerzos σ_{ij} de fluencia.Fig. No. 3
- en los puntos singulares de la superficie o curva de fluencia, el vector $d\varepsilon_{ij}^{p}$ queda comprendido entre las normales a la superficie en dicho punto y es una combinación lineal de los vectores incremento de deformaciones plásticas correspondientes a cada tramo regular (Fig. No. 4)

3) Relaciones esfuerzos-deformaciones

La ortogonalidad del vector incremento de deformaciones $d\varepsilon_{ij}^{p}$ se puede expresar matemáticamente,

$$(1) \quad d\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \, d\lambda$$

(Siendo $d\lambda$ un escalar positivo si se considera $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ dirigido según la normal exterior, y que depende de la función f.)

o sea escribiendo la proporcionalidad del gradiente de la función $f(\sigma_{ij})$ con el vector $d\varepsilon_{ij}^{p}$

Se puede demostrar (referencia No. 1) que en el caso de un material elasto-plástico con endurecimiento a la deformación el escalar $d\lambda$ toma la forma

$$(2) \qquad d\lambda = G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}$$

Siendo G un escalar que depende del estado de esfuerzos, del estado de deformaciones y de la historia del material, y basándose en las siguientes hipótesis

1) Existe una función $f(\sigma_{ij})$ tal que se produce flujo plástico si $f(\sigma_{ij}) > k$

2) La relación entre los incrementos diferenciales de esfuerzos y deformaciones es lineal.

II. APLICABILIDAD DE LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD A LOS SUELOS

La teoría clásica de la plasticidad implica ciertas hipótesis fundamentales que hemos señalado en el capítulo anterior. A continuación discutiremos si los suelos verifican dichas hipótesis.

A) Curvas esfuerzos-deformaciones

Trataremos por separado el caso de los suelos cohesivos y el de los suelos granulares.

a) Arenas

En el caso de las arenas resulta prácticamente imposible definir un campo elástico en el sentido clásico. Considerando un ciclo de carga y de descarga, en cualquiera de las pruebas comúnmente realizadas en el laboratorio, se puede observar que siempre se obtiene una deformación residual: este fenómeno se verifica aún y cuando la carga máxima aplicada es pequeña. Por ejemplo, en el caso de probetas sometidas a pruebas triaxiales, Habib (referencia No. 3) ha mostrado que el cociente

$$\frac{\text{deformación residual después de un ciclo de carga-descarga}}{\text{carga máxima alcanzada}}$$

es una función lineal de la carga máxima alcanzada cuando estas últimas varían en progresión aritmética. Es necesario subrayar que las deformaciones observadas no aumentan si se mantiene la carga constante; en otras palabras no se verifica en este caso fenómeno de fluencia de tipo flujo viscoso.

La forma de la curva esfuerzo-deformación depende esencialmente de la densidad relativa (Fig. 5). Cuando la porosidad inicial es alta, el valor máximo del esfuerzo cortante corresponde a deformaciones axiales de 15 a 25% y la deformación posterior no provoca más que una leve disminución del esfuerzo. Para valores bajos de la porosidad, la resistencia no solo aumenta en forma apreciable, pero además la ruptura ocurre para valores de la deformación de 5%, y las deformaciones posteriores provocan una disminución de los esfuerzos, hasta alcanzar un valor límite igual al obtenido para la arena en estado suelto.

b) Arcillas

Se pueden clasificar, en cuanto a sus propiedades de resistencia, en tres categorías, para pruebas rápidas no drenadas.

α) Arcillas normalmente consolidadas. En estado no remoldeado, la ruptura se verifica para valores de la deformación axial de 5% aproximadamente. Después de haber alcanzado el máximo, se observa una caída rápida de los esfuerzos, al seguir aumentando las deformaciones. Si la arcilla se remoldea, disminuye, por lo general notablemente el valor de su resistencia (Fig. 6).

β) Arcillas fisuradas. En estado no remoldeado, la curva esfuerzos-deformaciones es semejante a la que se observa en el caso de las arcillas normalmente consolidadas; en estado remoldeado la resistencia de estas arcillas es apenas ligeramente inferior a la del estado no remoldeado.

γ) Arcillas sobreconsolidadas. Las curvas esfuerzos-deformaciones, en estado remoldeado o no remoldeado, son muy semejantes y las deformaciones observadas en el momento de la falla son de 15 a 30% y pueden alcanzar valores hasta de 40% (Fig. 7).

c) Conclusiones del estudio de las curvas esfuerzos-deformaciones

α) Para todos los suelos las deformaciones, a partir de la primera carga, son irreversibles, aún cuando el esfuerzo aplicado es muy inferior a la resistencia del suelo.

β) La curva esfuerzos-deformaciones de una arcilla normalmente consolidada y en estado no remoldeado, es muy semejante por su forma a la curva esfuerzo-deformaciones de una arena en estado denso, sin embargo es preciso subrayar que las causas que provocan la presencia del máximo de resistencia son diferentes en los dos casos.

En el caso de la arena el máximo se obtiene debido al trabajo necesario para destruir el trabazón de los granos, siendo relacionado este fenómeno con el de fricción en suelos.

Por lo contrario, en el caso de las arcillas normalmente consolidadas, la compacidad es siempre inferior a la compacidad crítica como en el caso de una arena con porosidad inicial elevada. La presencia del máximo de resistencia se debe a la destrucción de la estructura por distorsión progresiva de la muestra.

Hablaremos por lo tanto a continuación de los fenomenos de cohesión y de fricción en los suelos.

B) Cohesión y fricción en los suelos

a) Fricción de los suelos

Comunmente se asimila el coeficiente de fricción de las arenas al coeficiente de fricción de Coulomb entre sólidos, sin embargo cabe hacer notar que una muestra de arena sometida a una prueba de cortante verifica una variación de volumen en todos los casos. Por lo tanto en el caso de la fricción de Coulomb entre dos sólidos que deslizan uno sobre otro el movimiento Δ se efectúa según la dirección de la fuerza F (Fig. No. 9) mientras en el caso de un suelo friccionante la dirección del desplazamiento Δ no coincide con la dirección de la fuerza cortante F Fig. No. 9).

Este hecho resulta importante, ya que como lo veremos posteriormente un material plástico perfecto necesariamente debe verificar una variación de volumen cuando falla por cortante.

En el caso de las arenas densas y de las arcillas sobreconsolidadas se observa una expansión, en el caso de arenas sueltas o arcillas normalmente consolidadas se observa una contracción.

b) Cohesión

La noción de cohesión es hoy en día todavía oscura. La cohesión parece ser una consecuencia de las atracciones moleculares entre partículas. En forma macromolecular se puede definir la cohesión como "una resistencia adicional debida a una deformación inelástica de la estructura granular, que deja subsistir después de una primera consolidación una deformación permanente" (Ref. No. 4).

Habiendo tratado de definir los caracteres esenciales de la fricción y de la cohesión en los suelos, veremos ahora la influencia del factor tiempo sobre la resistencia al cortante de los suelos. Es importante analizar dicha influencia, ya que como lo hemos visto, la teoría clásica de la plasticidad no la toma en cuenta.

C) <u>Influencia del factor tiempo sobre la resistencia al cortante de los suelos</u>

En los materiales viscosos, las curvas esfuerzo-deformación varían de forma al considerar velocidades de deformación distintas, y se producen los fenómenos denominados: flujo viscoso y relajación de esfuerzos.

¿Tienen dichos fenómenos importancia en los suelos?

En la naturaleza existen ejemplos notables del efecto del tiempo sobre la resistencia al esfuerzo cortante de los suelos. Por ejemplo en el caso de excavaciones permanentes, la aplicación de esfuerzos duraderos puede provocar deformaciones de tipo viscoso, capaces de anular la cohesión primitiva de la arcilla. Este fenómeno comunmente observado, puede explicarse si se considera que la cohesión se debe a reacciones entre las capas reticuladas de agua que rodean las partículas: en efecto para separar dos retículas cristalinas se necesita sea un esfuerzo rapido pero elevado, sea un esfuerzo lento pero prolongado.

Para analizar el efecto de la velocidad de deformación, o de la velocidad de carga, sobre la resistencia de los suelos medida en laboratorio, numerosos estudios experimentales se han llevado a cabo.

Para la arena Casagrande y Shannon han mostrado que la resistencia y las características esfuerzos-deformaciones no resultan influenciadas por la velocidad de deformación, con una buena aproximación. Como se ve en la figura No. 10, en pruebas triaxiales al aumentar la velocidad de deformación axial de 1% por minuto hasta 1000% por minuto la resistencia de la arena probada aumentó de 10% solamente. Para las arcillas el efecto es más notable; las arcillas verifican el fenómeno de flujo viscoso bajo carga constante sin llegar a la falla cuando dicho esfuerzo constante es inferior por lo general al 80% de σ_f (siendo σ_f la resistencia a la compresión medida en el aparato triaxial con una velocidad de deformación de 1% por minuto (Fig. No. 11a) y pueden llegar a la falla si $\sigma > 0.8\sigma_f$ (Fig. No. 11b).

En la referencia No. 5 se subrayan los efectos del factor tiempo sobre la resistencia de las arcillas, tanto en pruebas drenadas como no drenadas. Se puede decir en conclusion que por lo general:

1) El esfuerzo desviador de falla disminuye si el tiempo necesario para llegar a

la falla aumenta.

2) El valor del coeficiente de presión de poro de Skempton A varía en forma significativa con el tiempo necesario para llegar a la falla. Es preciso señalar que la velocidad de deformación también influye sobre el valor del gradiente de presión de poro que existe entre el plano de falla y la base de la cámara triaxial.

3) Las velocidades muy pequeñas de deformación provocan una disminución de la resistencia adicional desarrollada por la preconsolidación.

4) La envolvente de Mohr se ve influenciada en forma significativa por las velocidades de deformación impuestas.

D) Influencia de la temperatura

El efecto de la temperatura se considera por lo general como despreciable Habib (ref. No. 3). Sin embargo las pruebas realizadas por Lambe (ref. No. 6) y Gray (ref. No. 6) muestran que las curvas de consolidación relación de vacíos vs logaritmo de la presión se alteran cuando la temperatura varía de 10 a 22° centígrados. Bajo carga constante un aumento de temperatura provoca una disminución de volumen de la arcilla y viceversa. El efecto indirecto de la temperatura sobre el contenido de humedad del suelo puede también ser importante (acción de las heladas).

E) Ciclos de histéresis. Efecto Bauschinger

Tanto la arena como la arcilla presentan durante los procesos de carga y descarga, fenomenos de histéresis.

El caso más comunmente observado en el laboratorio del fenomeno de histéresis es el correspondiente a la prueba de consolidación:fig. No. 13.

La teoría de la plasticidad no toma en cuenta los fenómenos de histéresis, pero se puede en primera aproximación admitir que el ciclo de histéresis ACBC se puede aproximar por una curva media BC a lo largo de la cual el suelo verifica propiedades elásticas no lineales. En esta forma, se verifica la hipótesis según la cual el material no presenta fenómenos de histéresis.

El efecto Bauschinger existe para los suelos, siendo el límite de fluencia en tensión, diferente del límite de fluencia en compresión. Por lo general se admite, que el suelo no tiene resistencia a tensión.

F) Conclusión

Del estudio de las curvas esfuerzo-deformación, de la cohesión y fricción en suelos sobresale un hecho importante: las deformaciones en suelos son la mayoría de las veces inelásticas y por lo tanto resulta interesante tratar de estudiar estos materiales basándose en conceptos plásticos. En los párrafos C, D, E sin embargo hemos visto que tanto el tiempo, como la temperatura tienen influencia en el comportamiento de los suelos, y que se presentan fenómenos como ciclos de histéresis en las curvas de consolidación. La importancia de la discrepancia entre las hipótesis básicas de la teoría de la plasticidad y el comportamiento de los suelos con respecto a los factores tiempo, temperatura, etc... se podrá evaluar en forma cualitativa al estudiar los criterios de fluencia aplicados a suelos.

III. CRITERIOS DE FLUENCIA APLICADOS A LOS SUELOS CONSIDERADOS COMO MATERIALES ELASTO-PLASTICOS PERFECTOS

A) Introducción

En este capítulo, trataremos de los criterios de fluencia aplicados a materiales plásticos perfectos. Para los suelos se ha utilizado la ley de Mohr - Coulomb.

Sin embargo numerosos fenómenos observados experimentalmente pueden explicarse considerando dicha ley como un criterio de fluencia de material plástico, lo cual resulta imposible si se limita uno a considerar la ley de Mohr - Coulomb, tal y como la enunciaron sus autores.

Citaremos los siguientes criterios de fluencia, y trataremos de enunciar las limitaciones de cada uno de ellos.

1. Ley de falla de Mohr - Coulomb.
2. Criterio de fluencia de Tresca y von Mises.
3. Criterios de fluencia de von Mises generalizados.
4. Criterio generalizado de Mohr - Coulomb.

No hablaremos por lo tanto de los criterios ya discutidos por P. Rutledge (Ref. No. 7): criterios de Rankine, de St. Venant, de Navier.

B) Criterio de Mohr - Coulomb

El estado de esfuerzos en un cuerpo que no ha alcanzado su límite de fluencia puede representarse, aplicando el método de Mohr por tres círculos en un plano de coordenadas τ, σ.

Mohr enunció la ley: la falla del material ocurre debido a un deslizamiento por esfuerzo cortante, o sea en otras palabras, la deformación máxima debida al esfuerzo cortante es una función del esfuerzo normal que actúa sobre el plano de falla.

$$\tau_{max.} = f(p)$$

Esta concepción es, de hecho, una generalización de la célebre ley de Coulomb. Se sabe, que los puntos representativos del estado de esfuerzos en donde ocurre la máxima deformación de cortante se localizan, en la representación de Mohr, precisamente en el círculo llamado círculo de Mohr, de diámetro $(\sigma_1 - \sigma_3)$ siendo

σ_1 el esfuerzo principal máximo

σ_3 el esfuerzo principal mínimo

El criterio de Mohr implica por lo tanto la no-influencia del esfuerzo intermedio σ_2.

Si modificamos, en forma continua, los valores de σ_1 y σ_3, σ_2 quedando siempre comprendido entre σ_1 y σ_3, obtenemos una familia de círculos que dependen de un solo parámetro independiente, y por lo tanto tangente por lo general a una envolvente. En efecto el círculo de Mohr verifica la ecuación:

$$\tau^2 + \sigma^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma + \sigma_1\sigma_3 = 0$$

y la hipótesis de falla de Mohr es

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)$$

y por lo tanto se puede considerar que la familia de círculos de ecuación (3) depende de un solo parámetro σ_1 o σ_3.

En forma recíproca, es preciso subrayar que la simple hipótesis según la cual el esfuerzo intermedio no interviene conduce directamente al criterio de Mohr. En efecto si la ley de falla se enuncia como:

$$h(\sigma_1, \sigma_3) = 0 \qquad (4)$$

se puede plantear :

$$2R = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{máx}$$
$$2p = \sigma_1 + \sigma_3$$

y la relación (4) se transforma en

$$g(R, p) = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \tau_{máx} = R = f(p)$$

De acuerdo con la teoría de Mohr, ningún punto representativo de un estado de esfuerzos en el cuerpo puede estar localizado por encima de la línea de falla.

Mohr a continuación anuncio las bien conocidas consecuencias de su hipótesis:

a) La línea de ruptura es independiente de los medios utilizados para obtenerla.

b) La línea de falla es independiente del esfuerzo principal intermedio.

c) El ángulo entre la línea de falla y una vertical es igual con el ángulo formado por los planos de falla en el material Fig. No. 14.

Las limitaciones de este criterio son conocidas:

α) El criterio de Mohr - Coulomb es un criterio de falla por deslizamiento a lo largo de planos de menor resistencia y como lo afirmaron Nishari, Frandtzaug y Brown:

"Muchos de los resultados numéricos concuerdan con la teoría de fricción interna, de falla por deslizamiento (teoría de Mohr); sin embargo, el importante incremento de deformación lateral ... no puede conciliarse con una concepción de la falla debida a un deslizamiento a lo largo de planos continuos a través del material. Por lo tanto, parece muy sospechoso que la teoría de Mohr o cualquier otra teoría, basada sobre la suposición de un deslizamiento a lo largo de planos continuos de menor resistencia en un material homogéneo pueda representar correctamente la falla ..."

β) La teoría de Mohr implica que la línea de falla es independiente del esfuerzo intermedio. Sin embargo esta consecuencia de la hipótesis de Mohr ha sido muy discutida y los datos experimentales obtenidos por diversos autores son contradictorios. Terzaghi en 1936, señaló que el esfuerzo intermedio tenía influencia en el caso de una arena limpia sin cohesión (φ variaría de 10%) Habib en 1953, obtuvo en sus pruebas sobre arenas que los ángulos φ variaban de 31° a 24° ½ en compresión y tensión respectivamente; en el caso de las arcillas obtuvo una resistencia a la extensión prácticamente igual con la resistencia a compresión, para pruebas no drenadas.

En contradicción con estos resultados Bishop y Gamal Eldin (1953) obtuvieron que los ángulos de fricción interna medidos en compresión o en extensión son idénticos, tratándose de arenas. Kirkpatrick (1957) obtuvo resultados idénticos a los señalados por Bishop y Gamal Eldin.

En consecuencia no queda claramente definida experimentalmente la influencia del esfuerzo principal intermedio, tanto en arenas como en arcillas, y no se ha explicado el por qué de las discrepancias obtenidas en el laboratorio.

γ) Para las arcillas, la línea de falla no es constante en posición, pendiente o curvatura sino que depende de la historia del material y del procedimiento de prueba.

δ) El ángulo entre los planos de ruptura es igual con el ángulo entre una vertical y una tangente a la línea de falla únicamente en casos especiales para los cuales no existen presiones de poro. Además en numerosos casos la "falla" ocurre sin presentarse planos de falla definidos, por ejemplo para pruebas realizadas con arcillas plásticas.

Considerando el material como un material plástico perfecto, discutiremos ahora los diversos criterios propuestos para explicar las propiedades de los suelos.

C) <u>Criterios de Tresca y de von Mises</u>

a) Criterio de Tresca o de Guest

Este criterio afirma que el flujo plástico se presenta para un valor crítico constante del esfuerzo cortante máximo: por ejemplo si $\sigma_1' \leq \sigma_2' \leq \sigma_3'$ siendo $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ los esfuerzos principales efectivos:

$$\sigma_3' - \sigma_1' = 2K$$

Evidentemente dicho criterio queda incluido en el criterio de Mohr y por lo tanto es susceptible de las mismas críticas, a excepción de una: este criterio no implica la falla por deslizamiento de cortante (por lo tanto contrariamente al criterio de Mohr no se aplica a materiales frágiles). Además de las críticas ya expuestas acerca del criterio de Mohr, el criterio de Tresca presenta otra insuficiencia: no toma en cuenta la influencia del esfuerzo hidrostático.

En el espacio de los esfuerzos $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ el lugar geométrico de los esfuerzos hidrostáticos es la recta L de cosenos directores $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ Fig. No. 15, perpendicular al plano octaédrico Π.

Siendo independiente del estado de esfuerzos hidrostáticos, la superficie de fluencia representativa del criterio de Tresca es un cilindro de generatrices perpendiculares al plano Π y cuya sección en el plano Π, en el caso de no estar ordenados los esfuerzos, está dada por

$$\left[(\sigma_1' - \sigma_3') - 2K\right]\left[(\sigma_1' - \sigma_2') - 2K\right]\left[(\sigma_2' - \sigma_3') - 2K\right] = 0$$

y se representa en el exágono en el punto [illegible] (Fig. 14).

En esta figura las rectas [illegible] representan las proyecciones de $O\sigma_1'$, $O\sigma_2'$, $O\sigma_3'$ respectivamente sobre el plano Π. Veremos posteriormente en el caso del criterio de Mohr generalizado la deducción de este exágono.

Se puede decir que el criterio de Tresca es válido para pruebas rápidas no consolidadas sobre arcillas saturadas en donde el ángulo de fricción aparente $\varphi_u = 0$. Pero en tal caso el valor de K tendría que tomar en cuenta la historia previa del material y se vuelve al criterio de Mohr – Coulomb – Hvorslev.

Algunas arcillas verifican en las pruebas rápidas no consolidadas valores de $\varphi_u \neq 0$: en tal caso siempre se trata de arcillas fisuradas, o heterogéneas, o no saturadas, o constituídas por una mezcla de arcilla limo y arena.

b) Criterio de von Mises (o de Huber, o de Maxwell)

El criterio de von Mises según Hencky se basa sobre la noción de trabajo de deformación elástica que se puede escribir en función de los esfuerzos principales σ_1, σ_2, σ_3 y de las deformaciones principales ε_1, ε_2, ε_3

$$U = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3\right)$$

reemplazando ε_1, ε_2, ε_3 por sus expresiones en función de σ_1, σ_2, σ_3 se obtiene $U = U' + U''$ siendo U' y U'' las energías potenciales de distorsión y de dilatación respectivamente.

Se demuestra que $$U' = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12\,G} = \frac{3}{4G}\,\tau_{oct}^2$$

siendo G el módulo de deformación al cortante.

El criterio de von Mises se escribe en el caso de los suelos considerando los esfuer zos efectivos : $\left(\sigma_1' - \sigma_2'\right)^2 + \left(\sigma_2' - \sigma_3'\right)^2 + \left(\sigma_3' - \sigma_1'\right)^2 = 9\,\tau_{oct}^2 = 9K^2$ (5)

Resulta fácil ver que, este criterio admite la no-influencia sobre la fluencia del material del esfuerzo hidrostático. En efecto la ecuación (5) sigue verificándose si se reemplazan los valores de σ_1', σ_2', σ_3' por σ_1'', σ_2'', σ_3''

con
$$\sigma_1' = \sigma_1'' + \sigma$$
$$\sigma_2' = \sigma_2'' + \sigma$$
$$\sigma_3' = \sigma_3'' + \sigma$$

En otras palabras, no se modifica el estado de equilibrio si al sistema de esfuerzos iniciales se agrega una presión hidrostática cualquiera (positiva o negativa); el criterio de von Mises por lo tanto no permite interpretar la falla por tensión hidrostática.

También es útil subrayar que esta teoría se aplica únicamente a materiales que posean un mismo valor del límite elástico en tensión y compresión simples.

El criterio de von Mises implica la constancia del esfuerzo octaédrico $\tau_{oct} = K$ y por lo tanto en el espacio de los esfuerzos σ_1', σ_2', σ_3' la intersección del plano octaédrico Π con la superficie de fluencia representativa del criterio de von Mises es un círculo (C) de radio K (Fig. No. 17). Dicha superficie de fluencia es un cilindro de generatrices paralelas a la recta L de cosenos directores $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y de directriz (C).

Cuando el valor del esfuerzo intermedio σ_2 varía, los radios de los correspondientes círculos de Mohr límites varían.

En efecto consideremos el estado de esfuerzos σ_1', $\sigma_2' = \frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2}$, σ_3'

reemplazando estos valores en (5) obtenemos como valor límite del radio del círculo de Mohr:

$$\left(\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2}\right)^2 + \left(\sigma_1' - \sigma_3'\right)^2 = 9\,\tau_{oct}^2$$

$$\left(\sigma_1' - \sigma_3'\right)^2 = 6\,\tau_{oct}^2 = R_o^2$$

Considerando ahora los estados de esfuerzos

$$\begin{cases} \sigma_3' < \sigma_2' = \sigma_1' & \text{(tensión simple)} \\ \sigma_1' > \sigma_2' = \sigma_3' & \text{(compresión simple)} \end{cases}$$

obtenemos

$$R_1^2 = \left(\sigma_1' - \sigma_3'\right)^2 = 4.5\,\tau_{oct}^2$$

lo cual demuestra la afirmación anterior.

c) Conclusiones sobre los criterios clásicos de Tresca y von Mises.

- Estos criterios son aplicables únicamente a materiales elasto-plásticos perfectos, que verifiquen un mismo valor del límite elástico en tensión y compresión simples.
- Dichos criterios no toman en cuenta el efecto del esfuerzo hidrostático.
- El criterio de von Mises toma en cuenta el valor del esfuerzo intermedio; el criterio de Tresca es un caso particular del criterio de Mohr - Coulomb.
- Los criterios de Von Mises y de Tresca no toman en cuenta la historia de cargas o de deformaciones del suelo.

Con el objeto de ampliar el campo de aplicación de los criterios clásicos de Tresca y von Mises para materiales elasto-plásticos perfectos, Drucker y Prager (Ref. 8) han propuesto un criterio de von Mises generalizado que toma en cuenta el efecto del esfuerzo hidrostático, y que analizaremos a continuación.

(5) Criterio de von Mises generalizado

a) Función de fluencia y relaciones esfuerzos-deformaciones plásticas.

El criterio clásico de von Mises puede escribirse:

$$J_2' = k^2$$

siendo J_2' el segundo invariante del tensor de los esfuerzos desviadores de componentes $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}(J_1/3)$ en donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, σ_{ij} son las componentes del tensor de los esfuerzos totales y $J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

Empleando la convención de suma de Einstein, la expresión $\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = J_2'$ es un invariante (por ser un escalar) y se puede desarrollar en la siguiente forma:

$$J_2' = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \quad (6)$$

Para tomar en cuenta la influencia del esfuerzo hidrostático se escribe el criterio de von Mises generalizado

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha J_1 + J_2'^{1/2} = \alpha \delta_{ij}\sigma_{ij} + \left[\frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \delta_{ij} J_1/3)(\sigma_{ij} - \delta_{ij} J_1/3)\right]^{1/2}$$

De acuerdo con la ecuación (5) se pueden escribir las expresiones de los incrementos de deformaciones plásticas :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_{Mises}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda_{Mises}\left(\alpha\delta_{ij} + \frac{1}{2} J_2'^{-1/2} s_{ij}\right)$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \left[\alpha\delta_{ij} + \frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2'}}\right] d\lambda_{Mises}$$

La variación plástica de volumen es $d\varepsilon^p_{ii}$;

$$d\varepsilon^p_{ii} = \left[\alpha\,\delta_{ii} + \frac{s_{ii}}{2\sqrt{J_2'}}\right] d\lambda_{Mises} \qquad \text{pero} \qquad s_{ii} = 0,\quad \delta_{ii} = 3$$

entonces

$$d\varepsilon^p_{ii} = 3\alpha\, d\lambda_{Mises} \qquad (7)$$

Por lo tanto la deformación plástica involucra una expansión volumétrica si $\alpha \neq 0$ (por ser α y $d\lambda$ positivos).

b) Reducción de la función de fluencia generalizada de von Mises en el caso de un estado plano de deformaciones.

En el caso de un estado plano de deformaciones (Fig. No. 10) los incrementos de deformaciones $d\varepsilon^p_{13}$, $d\varepsilon^p_{23}$, $d\varepsilon^p_{33}$ son nulos y por lo tanto

$$d\varepsilon^p_{13} = 0 = \frac{s_{13}}{2\sqrt{J_2'}}\, d\lambda_{Mises} \qquad \therefore \qquad s_{13} = 0$$

$$d\varepsilon^p_{23} = 0 = \frac{s_{23}}{2\sqrt{J_2'}}\, d\lambda_{Mises} \qquad \therefore \qquad s_{23} = 0$$

$$d\varepsilon^p_{33} = 0 = \left[\alpha + \frac{s_{33}}{2\sqrt{J_2'}}\right] d\lambda_{Mises} \qquad \therefore \qquad s_{33} = -2\alpha\sqrt{J_2'}$$

En consecuencia $\quad J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \left(s_{33} + J_1/3\right)$

$$J_1 = \frac{3}{2}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) - 3\alpha\sqrt{J_2'} \qquad (8)$$

Podemos escribir $\quad s_{33} = -2\alpha\sqrt{J_2'} = \frac{2}{3}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$

de donde $\quad \sigma_z = -3\alpha\sqrt{J_2'} + \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$

Reemplazando esta expresión de σ_z en la expresion (6) obtenemos

$$J_2' = \frac{1}{1-3\alpha^2}\left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2\right] \qquad (9)$$

finalmente empleando (8)

$$f = k = \alpha J_1 + J_2'^{\,1/2} = 3\alpha\,\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + (1-3\alpha^2)\,J_2'^{\,1/2}$$

o
$$\frac{k}{(1-3\alpha^2)^{1/2}} = \frac{3\alpha}{(1-3\alpha^2)^{1/2}}\;\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$

expresión que coincide con la ley de Coulomb en el caso de pruebas de compresión

$$c\cos\varphi = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\,\operatorname{sen}\varphi + \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$

haciendo:

$$c = \frac{k}{(1-12\alpha^2)^{1/2}} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{3\alpha}{(1-3\alpha^2)^{1/2}} \qquad \cos\varphi = \frac{(1-12\alpha^2)^{1/2}}{(1-3\alpha^2)^{1/2}}$$

Veamos en una aplicacion los resultados obtenidos con la ley de fluencia generalizada de von Mises que se reduce a la ley de Coulomb para un estado plano de deformaciones.

Consideremos una falla de línea, es decir, una línea en la que se alcanza el estado de falla considerando que las zonas adyacentes a ella se comportan rígidamente durante el proceso, e idealicémosla por una zona de espesor finito t, t tendiendo a cero Fig. No. 19.

Como A y B se consideran rígidas la zona de transición C es inextensible en el sentido X entonces :

$$d\varepsilon_x^p = 0$$

Siendo plano el estado de deformaciones entonces :

$$d\varepsilon_z^p = 0$$

Pero hemos visto que : $\quad d\varepsilon_{ii}^p = 3\alpha \, d\lambda_{Mises} = d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p$

$$\therefore \quad d\varepsilon_y^p = 3\alpha \, d\lambda_{Mises} \neq 0$$

si el suelo verifica un $\varphi \neq 0$

Por lo tanto un suelo friccionante, en una prueba de cortante, verifica una variación de volumen. Esta propiedad se observa comunmente en el laboratorio, y resulta interesante ver que se puede explicar basándose en la teoría de la plasticidad.

Este resultado también hace resaltar una inconsistencia en las hipótesis básicas de numerosas teorías aplicadas en problemas de mecánica de los suelos, en donde se supone a la vez que el suelo es un material plástico perfecto pero que no ocurre variación de volumen de la masa de suelo al ocurrir la falla, tratandose de suelo friccionante.

A partir de la definición de un cuerpo plástico perfecto

$$d\varepsilon_{ij}^p \, d\sigma_{ij} = 0$$

se puede ver también que es necesario que el suelo verifique una deformación en el sentido γ (Fig. No. 19) para que se pueda considerar como un material plástico. En efecto consideremos que los ejes σ, τ y $d\varepsilon_{ii}^p, d\gamma_{ij}^p$ coinciden (Fig. No. 20).

Consideremos el estado de esfuerzos $\tau_0 = c + \sigma_0 \tan \varphi$ representado por el punto P_c ; supongamos que [illegible] [illegible] $\left[\ldots \right]$

de tal modo que el punto [illegible] [illegible] el punto

P , que representa un estado de fluencia plástica. Si el vector $d\varepsilon_{ij}^{p}$ fuera para-

lelo al eje $d\gamma_{ij}^{p}$ la deformación [illegible] sería una deformación de

cortante pura sin variación de volumen y el producto [illegible] $= d\varepsilon_{ij}^{p} \cdot t$

es < 0 ; para que $d\varepsilon_{ij}^{p} \cdot d\sigma_{ij} > 0$, es necesario que se produzca un tra-

bajo positivo y por lo tanto que [illegible] > 0 lo cual implica que

$d\varepsilon_{ij}^{p}$ no es paralelo a $d\gamma_{ij}^{p}$ y por lo tanto la componente de $d\varepsilon_{ij}^{p}$ sobre el

eje $d\varepsilon_{ij}^{p}$ es diferente de 0 : necesariamente ocurre una variación de volumen.

- Caso de la [illegible] en arcillas:

Haciendo [illegible] $= 0$ [illegible] y la variación plástica de vo-

lumen es nula.

- Caso en donde [illegible]

si [illegible] caso de las arenas

si [illegible] $\neq 0$ caso de las arcillas

en estos dos casos la variación de volumen es diferente de cero

c) Conclusiones

Del criterio generalizado de [illegible] se puede [illegible] los siguientes

limitaciones:

1) [illegible]

valor del [illegible] realiza

[illegible] $d\sigma_{ij}$ [illegible] hasta la falla en un caso incrementando la presion axial $\sigma_3 = \sigma_a$: prueba de compresión en el otro disminuyendo la presion axial $\sigma_3 = \sigma_a'$: prueba de extensión.

Consideremos la intersección del plano Σ con la superficie de fluencia de von Mises (Fig. No. 21 y No. 22).

La intersección está formada por dos rectas, igualmente inclinadas respecto a la recta L (Fig. No. 22). Los puntos representativos de la falla para las dos pruebas son respectivamente B (compresión) y C (extensión).

Podemos escribir las siguientes relaciones

$$\overline{AB} = \sigma_a - \sigma_r$$
$$\overline{CA} = \sigma_r - \sigma_a'$$

y de los triángulos semejantes ACC', y ABB'; OC'C'' y OB'B con C'C'' = CC'

$$\frac{\sigma_a - \sigma_r}{\sigma_r - \sigma_a'} = \frac{OB'}{OC'} = \frac{OA + AB'}{OA - AC'}$$

$$OA = \sigma_r \sqrt{3}$$
$$AB' = (\sigma_a - \sigma_r)\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \qquad \frac{\sigma_a - \sigma_r}{\sigma_r - \sigma_a'} = \frac{2\sigma_r + \sigma_a}{2\sigma_r + \sigma_a'} \qquad (10)$$
$$AC' = (\sigma_r - \sigma_a')\frac{1}{\sqrt{3}}$$

En un diagrama de Mohr representativo de la condición de falla del suelo tendríamos que el angulo φ del material es el mismo en extensión y en compresión (Fig. No. 23):

$$\frac{\sigma_a - \sigma_r}{\sigma_r - \sigma_a'} = \frac{R}{R'} = \frac{\sigma_r + \sigma_a}{\sigma_r + \sigma_a'}$$

y no coincide esta expresion con la (10)

Por lo tanto se puede decir que el criterio de Von Mises coincide con el criterio de Mohr únicamente en las pruebas de compresión, lo que comprobaremos posteriormente en otra forma. Los ángulos φ dados por el criterio de von Mises generalizado son diferentes cuando se trata de una prueba de extensión o de una prueba de compresión.

2) El criterio de von Mises generalizado no toma en cuenta la historia de cargas o deformaciones del suelo.

3) La variación de volumen que acompaña una deformación de cortante es siempre positiva.

Con el objeto de ampliar el campo de aplicación de un criterio de fluencia para suelos, Kirkpatrick y Shield han generalizado el criterio de Mohr-Coulomb al espacio. este criterio, como lo ha comprobado Kirkpatrick realizando numerosas pruebas drenadas sobre arena, verifica las mismas limitaciones que el criterio de von Mises generalizado, a excepción de la limitación 1 anteriormente citada. Analizaremos a continuación el criterio generalizado de Mohr-Coulomb.

E) Criterio generalizado de Mohr-Coulomb

Con el fin de obtener el criterio generalizado de Mohr-Coulomb, se puede razonar en la siguiente forma. Sabiendo que $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los esfuerzos principales máximo, intermedio y mínimo respectivamente el criterio clásico de Mohr-Coulomb se escribe en el caso de suelos no cohesivos:

$$\left\{ (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \left[\operatorname{sen} \phi \, (\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 \right\} = 0$$

pero de no saber cual es el esfuerzo maximo, mínimo o intermedio la condición de

Mohr-Coulomb se escribe, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ siendo los esfuerzos principales

$$(11) \quad \left\{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \left[\operatorname{sen}\phi\,(\sigma_1 + \sigma_3)\right]^2\right\}\left\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \left[\operatorname{sen}\phi\,(\sigma_1 + \sigma_2)\right]^2\right\}\left\{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \left[\operatorname{sen}\phi\,(\sigma_2 + \sigma_3)\right]^2\right\} = 0$$

Esta ecuación responde a todos los casos

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ $\qquad$ $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$

$\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ $\qquad$ $\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2$

$\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$ $\qquad$ $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$

De hecho la ecuación (11) representa seis condiciones de flujo, cada una de ellas siendo independiente del esfuerzo intermedio correspondiente.

a) Superficie de fluencia del criterio de Mohr-Coulomb generalizado. La ecuación (11) representa en el espacio de los esfuerzos una pirámide ya que si σ_1, σ_2, σ_3, verifican dicha ecuación tambien $\lambda\sigma_1, \lambda\sigma_2, \lambda\sigma_3$ lo verifican. Consideremos el sistema de ejes $O'XYZ$ (Fig. No. 24) siendo $O'Y$ perpendicular a $O'Z$ y contenido en el plano $(O\sigma_1', O\sigma_2')$, $O'X$ perpendicular al plano $(O'Y, O'Z)$, $O'Z$ dirigido según la recta (L).

El cuadro de los cosenos directores que corresponden al cambio de ejes es

	X	Y	Z
σ_3	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
σ_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
σ_2		$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Y tenemos las siguientes relaciones considerando que las coordenadas de O

con $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = k$

$$(12) \qquad X = -\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sqrt{2}} \qquad Y = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{\sqrt{6}} \qquad Z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 3k\right]$$

$$(13) \qquad \sigma_3 = \frac{Z}{\sqrt{3}} - \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{6}} + k \; ; \quad \sigma_1 = \frac{Z}{\sqrt{3}} + \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{6}} + k \; ; \quad \sigma_2 = \frac{Z}{\sqrt{3}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + k$$

Reemplazando (13) en (11) obtenemos la ecuacion

$$\left\{\left[(X\sqrt{3} - 3Y)^2 - sen^2\phi\left[Y + 2Z\sqrt{2} + 2k\sqrt{6} + X\sqrt{3}\right]^2\right\} \times$$
$$\left\{\left[(3Y + X\sqrt{3})^2 - sen^2\phi\left[2Z\sqrt{2} + 2k\sqrt{6} - X\sqrt{3} + Y\right]^2\right\} \times$$
$$\left\{(2X\sqrt{3})^2 - sen^2\phi\left(-2Y + 2Z\sqrt{2} + 2k\sqrt{6}\right)^2\right\} = 0 \qquad (14)$$

La relacion (14) indica una simetria con respecto a $O'Y$ debido a que dicha expresión no varía cuando se sustituye $+X$ por $-X$. Para obtener la forma de la interseccion de la superficie por el plano $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3k$ transformemos a la forma polar (Fig. No. 25) la ecuacion (14) considerado

$$(15) \qquad \begin{aligned} X &= \rho\cos\theta \\ Y &= \rho\,sen\,\theta \\ Z &= 0 \end{aligned}$$

Debido a la simetría con respecto a $O'Y$, basta hacer variar θ de $-90°$ a $+90°$

Reemplazando (15) en (14) se obtiene

$$\left[(\rho\cos\theta\sqrt{3} + 3\rho\,sen\,\theta)^2 - sen^2\phi\left(2Z\sqrt{2} + 2k\sqrt{6} - \rho\cos\theta\sqrt{3} + \rho\,sen\,\theta\right)^2\right] \times$$
$$(16) \qquad \left[(3\rho\,sen\,\theta - \rho\cos\theta\sqrt{3})^2 - sen^2\phi\left(2Z\sqrt{2} + 2k\sqrt{6} + \rho\cos\theta\sqrt{3} + \rho\,sen\,\theta\right)^2\right] \times$$
$$\left[(2\rho\cos\theta\sqrt{3})^2 - sen^2\phi\left(-2\rho\,sen\,\theta + 2Z\sqrt{2} + 2k\sqrt{6}\right)^2\right] = 0$$

Haciendo una rotacion de ejes para que el nuevo eje a partir del cual se midan los θ_x sea el eje OX_1 (Fig. No. 26) obtenemos $\theta = \theta_{x_1} - \frac{\pi}{6}$ (17)

Reemplazando (17) en (16) obtenemos :

$$\left[\left(2\sqrt{3}\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta_{x_1}\right)^2 - \mathrm{sen}^2\phi\left(2z\sqrt{2}+2h\sqrt{6}-2\rho\cos\theta_{x_1}\right)^2\right]\times$$
$$\left[\left(\rho\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_{x_1}-3\rho\cos\theta_{x_1}\right)^2-\mathrm{sen}^2\phi\left(2z\sqrt{2}+2h\sqrt{6}+\rho\cos\theta_{x_1}+\rho\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_{x_1}\right)^2\right]\times$$
$$\left[\left(\rho\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_{x_1}+3\rho\cos\theta_{x_1}\right)^2-\mathrm{sen}^2\phi\left(2z\sqrt{2}+2h\sqrt{6}+\rho\cos\theta_{x_1}-\rho\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_{x_1}\right)^2\right]$$
$$= 0 \qquad (18)$$

Al sustituir en (18) θ_{x_1} por $-\theta_{x_1}$ la ecuacion no cambia de forma, existiendo por lo tanto simetria con respecto al eje OX_1 que coincide con la proyeccion de OE_1 sobre el plano $Z = 0$ (Fig. No. 24). De la misma manera se puede mostrar que tambien existe una simetria con respecto al eje OX_3 (Fig. No. 26) que coincide con la proyeccion sobre el plano $Z = 0$ del eje OE_3 haciendo el cambio de variables en (16) : $\theta = \theta_{x_3} + \frac{\pi}{6}$. Se obtiene en esa forma:

$$\left[\left(\rho\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_{x_3}+3\rho\cos\theta_{x_3}\right)^2-\mathrm{sen}^2\phi\left(2z\sqrt{2}+2h\sqrt{6}+\rho\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_{x_3}-\rho\cos\theta_{x_3}\right)^2\right]\times$$
$$\left[\left(2\rho\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_{x_3}\right)^2-\mathrm{sen}^2\phi\left(2z\sqrt{2}+2h\sqrt{6}+2\rho\cos\theta_{x_3}\right)^2\right]\times$$
$$\left[\left(3\rho\cos\theta_{x_3}-\rho\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_{x_3}\right)^2-\mathrm{sen}^2\phi\left(2z\sqrt{2}+2h\sqrt{6}-\rho\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_{x_3}-\rho\cos\theta_{x_3}\right)^2\right]$$
$$= 0 \qquad (19)$$

Haciendo $\theta_{x_1} = 0$ en (18) se obtiene $\rho_1 = \dfrac{2h\sqrt{6}\,\mathrm{sen}\,\phi}{3 - \mathrm{sen}\,\phi}$

$\theta_{x_3} = 0$ en (19) se obtiene $\rho_3 = \dfrac{2h\sqrt{6}\,\mathrm{sen}\,\phi}{3 + \mathrm{sen}\,\phi}$

y podemos ver de las relaciones (17) que en

$$\rho_3 = \rho_3 < \rho_1$$

$$\text{en } C \qquad \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$$

Entonces el punto B representa el estado de fluencia en una prueba de compresión, el punto C representa el estado de fluencia en una prueba de extensión.

Finalmente la superficie representativa del criterio generalizado de Mohr-Coulomb es una pirámide de cúspide O (en el caso de suelos no cohesivos) y en el plano $Z=0$ su directriz es un exágono irregular que tiene la forma representada en la Fig. No. 27.

b) Pruebas realizadas en arenas

Para verificar los resultados del criterio de Mohr-Coulomb generalizado Kirkpatrick (Ref. 9) hizo numerosas pruebas drenadas en arenas, de compresión, de extensión, y pruebas en donde el esfuerzo intermedio podía variar entre los valores de los esfuerzos principales extremos (prueba del cilindro de pared gruesa). Por ejemplo en pruebas de compresión conocemos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y sabemos que :

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \qquad \therefore \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p = \sigma_1 + 2\sigma_3$$

$$\therefore \quad p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$$

y se obtiene el ángulo ϕ trazando el diagrama de Mohr de dichas pruebas.

Por lo tanto conocemos empíricamente

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(\sigma_1 - \sigma_3)$$

y lo comparamos con el valor teórico

$$\rho = \frac{2p\sqrt{6}\,\text{sen}\,\phi}{3 - \text{sen}\,\phi} = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}\,\text{sen}\,\phi}{3 - \text{sen}\,\phi}$$

Operando en la misma forma, para las pruebas de extensión y del cilindro de pared gruesa se obtienen los resultados experimentales representados en la Fig. No. 27; se puede ver la muy buena concordancia que existe entre los resultados experimentales y los teóricos.

c) Extensión al caso de suelos cohesivos

En el caso de suelos cohesivos, se puede generalizar en la misma forma el criterio de Mohr-Coulomb tomando en cuenta los esfuerzos efectivos y suponiendo que el material es plástico perfecto. En el caso de $\sigma_1' \geq \sigma_2' \geq \sigma_3'$, en el plano τ, σ el criterio de Mohr se escribe:

$$\sigma_1' - \sigma_3' = 2c\cos\phi + (\sigma_1' + \sigma_3')\operatorname{sen}\phi \quad (20)$$

o bien $(\sigma_1' - \sigma_3') - [(\sigma_1' + c\cot g\,\phi) + (\sigma_3' + c\cot g\,\phi)]\operatorname{sen}\phi$ (21)

haciendo el cambio de variable : $\sigma_1' + c\cot g\,\phi = \bar{\sigma}_1$

$$\sigma_3' + c\cot g\,\phi = \bar{\sigma}_3$$

la ecuación (21) se escribe

$(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3) - (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)\operatorname{sen}\phi = 0$ y por lo tanto al generalizar el criterio de Mohr-Coulomb para casos tridimensionales obtenemos en el espacio de esfuerzos $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$, la misma superficie de fluencia que en el inciso a) anterior. Podemos representarla en el espacio $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ como aparece en la Fig. No. 28.

d) Como en los criterios anteriormente analizados el concepto de material perfectamente plástico se supone aplicable al suelo ideal que se considera. Con esta hipótesis el vector incremento de deformación plástica es normal a la superficie de fluencia en sus puntos regulares, y está situado entre las normales a la superficie en los puntos de las caras vecinas, para un punto localizado sobre una arista.

Consideremos la cara de la pirámide en donde se verifica $\sigma'_1 \geq \sigma'_2 \geq \sigma'_3$ en este caso se verifica la ecuación $f = \operatorname{sen}\phi\,(\sigma'_1+\sigma'_3) - (\sigma'_1-\sigma'_3) \ldots$

El gradiente de la función de fluencia f tiene como componentes

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_1} = -1 + \operatorname{sen}\phi \qquad \frac{\partial f}{\partial \sigma'_2} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \sigma'_3} = 1 + \operatorname{sen}\phi$$

y la variación plástica de volumen es:

$$d\varepsilon^p_{ii} = 2\operatorname{sen}\phi\; d\lambda_{Mohr}$$

lo cual corresponde en todos los casos (siendo positivo el escalar $d\lambda_{Mohr}$ y con $0° < \phi < 90°$) a una expansión de volumen.

Cuando $\phi = 0$ de (21) obtenemos $\sigma'_1 - \sigma'_3 = 2c$: la ley de Mohr-Coulomb se reduce al criterio de fluencia de Tresca y de la ecuación (22) vemos que en este caso la variación plástica de volumen es nula.

e) Conclusiones sobre el criterio de Mohr-Coulomb generalizado

1. Limitaciones

- El criterio de Mohr-Coulomb generalizado no toma en cuenta la historia de cargas o deformaciones del material que se supone plástico perfecto.
- Este criterio conduce para el caso de material friccionante a una expansión plástica de volumen en el momento de la fluencia, (experimentalmente se comprueba que la variación de volumen puede según los casos corresponder a una expansión o a una contracción).

2. Relación con los otros criterios analizados

- El criterio de von Mises generalizado coincide con el criterio de Mohr-Coulomb generalizado únicamente para el caso de compresión (puntos A, B, D de la Fig. No. 27).

- Para un suelo puramente cohesivo, el criterio de Mohr-Coulomb se reduce a criterio de Tresca, y la variación plástica de volumen durante la fluencia es nula; teóricamente, se puede considerar una superficie de falla circular para un talud en este caso únicamente, si se admite que el material es plástico perfecto.

Hemos analizado hasta ahora los criterios aplicables a un material plástico perfecto, pero puede un suelo considerarse como plástico perfecto? A partir de las limitaciones que comportan los criterios analizados se puede ver que fundamentalmente la más grave crítica que se puede hacer a dichos criterios es la de no tomar en cuenta la historia de cargas y deformaciones del material. Con el objeto de eliminar esta limitación, se puede pensar en tratar al suelo basándose en el concepto de material plástico con endurecimiento a la deformación, lo cual permite introducir las nociones de presión de poro, deformaciones volumétricas, etc ..

IV. ANALISIS DE LAS PROPIEDADES DE LOS SUELOS CONSIDERANDOLOS COMO MATERIALES ELASTICOS CON ENDURECIMIENTO A LA DEFORMACION

A) Ecuacion de Mohr-Coulomb - Hvorslav

El criterio de Mohr.Coulomb-Hvorslav se puede escribir ;

(23) $\tau_f = \mu_0 \sigma'_f + \gamma e^{-Be_f}$ siendo τ_f, σ'_f, e_f respectivamente a resistencia al esfuerzo cortante, el esfuerzo efectivo normal, y la relacion de vacios en el momento de la falla, μ_0, γ, B parámetros característicos del suelo considerado.

En el espacio de coordenadas τ, σ', e, la ecuación (23) queda representada por una superficie denominada superficie de Hvorslev (Fig. No. 29).

La superficie de Hvorslev verifica las siguientes propiedades:

1) La intersección de la superficie con el plano $\tau = 0$ consta de dos curvas la recta : $\begin{cases} \tau = 0 \\ \sigma' = 0 \end{cases}$ y la curva (C) de consolidacion.

2) Para $\sigma' = 0$ obtenemos la curva DEF de ecuación

$$\tau_f = \gamma e^{-Be_f}$$

3) Los puntos A_1, C_1 situados sobre la curva de consolidación (C) verifican la ecuación

(24) $$e - e_0 = -\frac{1}{b} \log_e \left(\frac{\sigma'}{\sigma'_0} \right)$$

Los puntos A, C deben entonces verificar las ecuaciones (23) y (24)

$$\therefore \quad \tau_f = \mu_0 \sigma'_f + \xi \sigma'_f \quad \text{en donde} \quad \xi = \frac{\gamma}{\sigma'_0} e^{-Be}$$

ξ es una constante del suelo.

(23) $\tau_f = (\mu + B_1)\sigma'_f$ la proyección de la curva ABC sobre el plano $e = 0$ es una recta que pasa por el origen de las coordenadas.

4) Consideramos la recta $F_1 C_1$ del plano $\tau = 0$ para todos los puntos de esa recta $e = e_0$ y por lo tanto los puntos intersección de la superficie de Hvorslev con el plano vertical que pasa por $F_1 C_1$ verifican la ecuación.

$$\tau_f = \mu_0 \sigma'_f + \tau_1 \quad \text{con} \quad \tau_1 = [illegible]^{Be_0}$$

La curva FC es una recta de ecuación

$$\begin{cases} \tau_f = \mu_1 \sigma'_f + \tau_1 \\ e = e_0 \end{cases}$$

Se ha supuesto en la deducción de la forma de la superficie de Hvorslev que la curva ABC se proyecta sobre el plano $\tau = 0$ sobre la curva de consolidación (C). En realidad, se sabe que cuando una muestra normalmente consolidada de arcilla se somete a una prueba de cortante drenada disminuye de volumen y expulsa agua de sus vacíos.

Consideremos entonces el caso de una muestra de arcilla normalmente consolidada sometida a una prueba no drenada. La variación de volumen de la muestra durante la prueba es nula y por lo tanto $e = e_0$. La intersección de la superficie de Hvorslev por un plano vertical de ecuación $e = e_0$ se representa en la Fig. No. 30 en donde se tomó como plano vertical el plano $A_1 AD$ de la Fig. No. 29 siendo A'_1, A'_0, D', C' las proyecciones de A_1, A_0, D, C sobre el plano $e = 0$.

El punto A'_1 representa el estado de la muestra después de consolidada. Se ve en la Fig. No. 30 que la hipótesis según la cual ABC es proyecta sobre el plano $\tau = 0$ según la curva de consolidación IC implica que la recta $A'A'_1$ es vertical y en tal caso se llegaría a la falla sin que $\overline{e}$ variara lo cual contradice los datos experimentales.

En realidad como lo han mostrado Roscoe, Shoffield, y Wroth (Ref. No. 10) la curva ABC se proyecta según una curva A" B" C" en el plano $\tau = 0$ y su localización con respecto a la curva de consolidación aparece en la Fig. No. 31.

Esta curva A" B" C" es la denominada "línea de relación crítica de vacíos" por Roscoe, Shoffield, Wroth; las experiencias realizadas por estos autores muestran que los suelos fallan en los puntos localizados sobre dicha línea, empleando la siguiente definición del término "falla": se dirá que una muestra sometida a deformaciones crecientes está en estado de falla cuando el esfuerzo cortante total aplicado alcanza su valor máximo.

La superficie experimental de fluencia obtenida por estos autores para la arcilla de Weald se representa en la Fig. No. 32, y la Fig. No. 33 representa la sección de dicha superficie por un plano $W = C^{te}$

Con $p' = \frac{1}{3}\left(\sigma'_1 + 2\sigma'_3\right)$ siendo σ'_1 el esfuerzo efectivo axial

σ'_3 el esfuerzo efectivo radial

y $q' = \sigma'_1 - \sigma'_3$ el esfuerzo desviador.

La curva PRQ representa en la Fig. No. 33 el conjunto de valores p y q observados durante una prueba no drenada sobre la arcilla de Weald normalmente consolidada con una presion de $p = 60$ lb. Las curvas punteadas interiores al campo CPRQUV representan los conjuntos de valores de p y q observados durante pruebas no drenadas realizadas sobre muestras con distintos valores del coeficiente de sobreconsolidación $n = \frac{p'}{p'_m} = \frac{\sigma_0}{p'_m}$ variando n de 1.7 a 126.

E) Endurecimiento a la deformación del suelo

I) Comportamiento volumétrico del suelo

Una muestra virgen de suelo sometida a una presión hidrostática se consolida, cuando las condiciones de drenaje son las adecuadas. La curva de consolidación, obtenida a partir de los datos de una prueba de consolidación estándar, se muestra en la Fig. No. 34.

La variación de volumen plástica o sea no recuperable, que verifica la muestra durante el proceso de carga OA está representada por la longitud OB. Por lo tanto el suelo se deforma plásticamente bajo un estado hidrostático de esfuerzos. En el espacio $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ la curva de fluencia obtenida, considerando el suelo como un material plástico perfecto, que obedece la ley de Mohr-Coulomb generalizada es una pirámide exagonal que intersecta el plano P $\left(\sigma'_r \sqrt{2}, \sigma'_a\right)$ según las dos rectas representadas en la Fig. No. 35. El punto A de la Fig. No. 34 se localiza en la Fig. No. 35 sobre la recta (L) de ecuación $\sigma'_r = \sigma'_a$ y de coordenadas $p_A \sqrt{2}$ y p_A.

Durante el proceso de carga de la prueba de consolidación estándar, el punto representativo del estado de esfuerzos hidrostáticos recorre el tramo OA de la recta (L). Para que en el diagrama de la Fig. No. 35, ocurran variaciones de volumen plásticas durante la consolidación de la muestra, es preciso suponer que las curvas de fluencia correspondientes a cada valor de la presión de consolidación cortan la recta (L).

Supongamos entonces que la superficie piramidal representativa de la condición de Mohr generalizada, esté limitada por un plano de ecuación $\frac{1}{3}\left(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'\right) = p_c'$

En tal caso el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb generalizado se representa por una pirámide limitada como aparece en la Fig. No. 36.

Veamos como se transforma esta superficie de fluencia, durante el proceso de carga.

1) Variación de $c \cot g\, \phi$ en función de σ

De la ecuación de Mohr-Coulomb - Haorslev obtenemos para una muestra normalmente consolidada (Fig. No. 37)

$$\tau^{1} = (\mu_0 + \xi)\, p_c' \qquad \text{por la ecuación (25)}$$

pero $\tau^{1} = (p_c' + c \cot g\, \phi)\, tg\, \phi$

$$\therefore \quad c + p_c'\, tg\, \phi = (\mu_0 + \xi)\, p_c'$$

$c = p_c'(\mu_0 + \xi - tg\, \phi)$ y considerando que el ángulo ϕ no depende del valor de la presión de consolidación, o sea considerando que en la Fig. No. 29 las rectas AD, BE, CF, etc. ... son paralelas

$$c = \chi\, p_c' \qquad \text{con} \qquad \chi = \mu_0 + \xi - tg\, \phi$$

y podemos representar la variación de $c \cot g\, \phi$ vs p_c Fig. No. 37.

Reemplazando la expresión (26) en la ley de Mohr-Coulomb obtenemos la ecuación de la pirámide limitada por el plano $\sigma' = p_c'$

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2 \operatorname{sen} \phi} - \dfrac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2} - \chi \cot \phi \; p_c' = 0 \\ \sigma' \leq p_c' \end{cases} \tag{27}$$

o en función de las coordenadas $\begin{cases} p' = \frac{1}{3}(\sigma_1' + 2\sigma_3') \\ q' = \sigma_1' - \sigma_3' \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{q'}{2 \operatorname{sen} \phi} - \left(p' + \dfrac{q'}{6}\right) - \chi \cot \phi \; p_c' = 0 \\ p' \leq p_c' \end{cases} \tag{28}$$

También se puede expresar (28) en función del contenido de humedad en el caso de muestras saturadas: W

La presión de consolidación de la curva virgen está relacionada con el contenido de humedad por

$$W_c - W_o = -\frac{1}{B\gamma_s} \log\left(\frac{p_c'}{p_{oc}'}\right) = -\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{p_c'}{p_{oc}'}\right)$$

(28) se transforma en :

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{q'}{2 \operatorname{sen} \phi} - \left(p' + \dfrac{q'}{6}\right) - \chi \cot \phi \; p_{oc}' \, e^{-\lambda (W_c - W_o)} = 0 \\ W \geq W_c \end{cases}$$

La desigualdad $p' \leq p_c'$ implica que la pirámide está limitada por el plano $\frac{1}{3}(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3') = p_c'$. La ecuación (28) representa una familia de pirámides de vértices A localizados sobre la recta $\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_3'$, siendo variable el valor de la longitud AO, dependiendo del valor del parámetro p_c'. (Fig. No. 38).

Los vectores figurados en los puntos B, C y D son los vectores incrementos de deformaciones plásticas

en D: la dirección del vector incremento de deformaciones plásticas correspon

de a una contracción de volumen de la muestra.

en B: la dirección del vector incremento de deformaciones plásticas corresponde

a una expansión de volumen de la muestra.

en C: pueden ocurrir tanto contracciones como expansiones de volumen de la

muestra;

En el plano p', q' empleado por Roscoe y al, para reportar los resultados experimentales obtenidos la Fig. No. 38 se transforma en la Fig. No. 39 y la recta MO coincide con la recta denominada "línea de relación crítica de vacíos" por estos autores.

2) Significado experimental y teórico de la recta (M) (línea de relación crítica de vacíos).

Como lo hemos visto anteriormente la recta (M) es el lugar geométrico de los puntos C de la familia de pirámides, en donde la variación de volumen plástica puede corresponder a una contracción o una expansión de la muestra. Como lo han mostrado teóricamente Jenike y Shield (Ref. No. 11) en el caso de materiales que poseen la propiedad de dilatancia, a lo largo de la recta (M) la variación de volumen plástica es nula. Experimentalmente para los suelos, la línea de relación crítica de vacíos (M), representa los estados de esfuerzos para los cuales la variación de volumen plástica es nula, como lo ha mostrado Perry (Ref. No. 12) al analizar los datos experimentales proporcionados por Roscoe y al.

En la Fig. No. 39 hemos representado en el sistema de coordenadas: $\frac{dV^p}{V}$, $d\gamma^p$ siendo $\frac{dV^p}{V}$ la variación de volumen plástico (positiva para contracción), $d\gamma^p$ la variación de distorsión plástica, las direcciones de los vectores $d\varepsilon^p_{ij}$ correspondientes respectivamente a los tramos AC y CC' y al punto C.

Siendo nula la variación de volumen plástico en el punto C, el vector $(d\varepsilon^p_{ij})_C$ es paralelo a la dirección de $d\gamma^p$.

C) <u>Comparación de los resultados teóricos y experimentales en suelos arcillosos Considerados como materiales plásticos con endurecimiento a la deformación</u>

Resultados teóricos -

1) Arcillas remoldeadas normalmente consolidadas.

Consideremos dos muestras de arcilla normalmente consolidadas bajo una presión hidrostática p_c y supongamos que realizamos con ellas dos pruebas una drenada, otra no drenada.

Las dos muestras antes de someterlas a un estado de esfuerzos desviadores verifican la ley de fluencia:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2\,\mathrm{sen}\,\varphi} - \dfrac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} = \lambda \cot g\, \varphi\, p'_c = f \\ \sigma' \leq p'_c \end{cases}$$

representada en la Fig. No. 40 por el triángulo ACC'

con $$p' = \frac{1}{3}\left(\sigma'_1 + 2\,\sigma'_3\right)$$

$$q' = \sigma'_1 - \sigma'_3$$

Introduciendo $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$

$q = \sigma_1 - \sigma_3$ siendo σ_1 y σ_3 los esfuerzos principales totales en una prueba triaxial drenada o no drenada tenemos

$$dp = \frac{1}{3}(d\sigma_1 + 2d\sigma_3)\ ;\ dq = d\sigma_1 - d\sigma_3 \text{ pero } \sigma_3 = \text{Cte.}$$

$\therefore \frac{dp}{dq} = \frac{1}{3}$ y la recta C'C" de ecuación :

$q = 3(p' - p'_c)$ es el lugar geométrico de los puntos representativos del estado de esfuerzos totales durante las dos pruebas.

a) Prueba drenada

Al iniciar la prueba el punto representativo del estado de esfuerzos en el espacio (p', q') es el punto C'. En el caso de una prueba drenada los esfuerzos totales coinciden con los esfuerzos efectivos ; al incrementar el esfuerzo desviador $q' = q$, también aumenta el esfuerzo hidrostático p y el material se endurece. La variación de volumen plástica corresponde a una contracción. En efecto la recta C'C" corta las sucesivas curvas de fluencia en puntos en donde el vector $d\varepsilon_{ij}^{p}$ es paralelo al eje de coordenadas $\frac{dV^p}{V}$.

El material se endurece durante el proceso de carga hasta alcanzar el punto C". En ese punto la variación plástica de volumen es nula, el material se transforma en un material plástico perfecto y el esfuerzo desviador q' permanece constante.

b) Prueba consolidada no drenada

Consideremos una muestra consolidada hidrostáticamente a la presión p'_c (punto representativo c' de la Fig. No. 40). Al someterla a un esfuerzo desviador, despues de haber cerrado el drenaje, se originan en la muestra presiones de poro y suponiendo que antes de aplicar el esfuerzo desviador $u_o = 0$

$$q' = q = \sigma_1' - \sigma_3' = \sigma_1 - \sigma_3$$
$$p' = \frac{1}{3}\left(\sigma_1' + 2\sigma_3'\right) = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + 2\sigma_3\right) - \Delta u = p - \Delta u$$

Consideremos un punto R (Fig. No. 42) representativo del estado de esfuerzos efectivos (p', q') en un instante dado de la prueba: la longitud del segmento $\overline{RS}$ es igual con $\overline{RS} = p - p' = \Delta u$.

Durante una triaxial consolidada no drenada $W = Cte$. El recorrido de los esfuerzos efectivos es por lo tanto tal que

$$d\ell = 0 \quad \text{pero si} \quad d\ell = 0$$

$$\frac{dV^P}{V} = G\,\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\,\delta_{ij}\,(d\ell) = 0$$

El suelo se comporta elasticamente en cuanto a sus propiedades volumétricas entonces el parámetro A de presion de poro de Skempton (Ref. No. 13) es igual con $\frac{1}{3}$: la curva vectorial representativa de los esfuerzos efectivos durante la prueba es la recta C'C.

c) Prueba no consolidada rápida

En este caso, la única variación que se necesita introducir en el razonamiento del inciso b) anterior es la siguiente: en el instante inicial la presion de poro no es nula sino igual con :

$$u_o = p_o - p$$

suponiendo que p' sea la presión efectiva de consolidación del suelo

p_s la presión confinante hidrostática aplicada.

Durante el transcurso de la prueba $W = C E_c$ y por lo tanto $d\epsilon^{p} = 0$

Siendo C' el punto representativo del estado de esfuerzos antes de cargar axialmente la probeta.

La curva vectorial de los esfuerzos efectivos sigue siendo la recta CC" y cual sea el valor de p_s la "falla" ocurre para un valor de q constante e igual con C'C.

<u>Comparación con los resultados experimentales</u>

Del "análisis teórico anterior surgen varias contradicciones con los resultados experimentales:

1) Supongamos que en el laboratorio se realice una prueba drenada con p' = Cte. A partir de los resultados obtenidos por Henkel (Fig. No. 1,2 de la Ref. No. 16) y Roscoe y al se puede ver que en tal caso, se produce una variación de volumen de la muestra. Esta variación de volumen siendo p' constante, no puede ser elástica. Si en la Fig. No. 42 representamos el recorrido de los esfuerzos efectivos observados durante la prueba obtenemos la recta C'C; la variación plástica de volumen es nula en este caso. Por lo tanto la forma linear de la curva de fluencia a lo largo de C'C no puede representar teóricamente esta variación de volumen, observada experimentalmente.

2) Si consideramos una prueba no drenada sobre una arcilla normalmente consolidada, hemos visto que en tal caso se obtiene teóricamente un valor de 1/3 para el coeficiente de presión de poro de Skempton.

Veamos los resultados obtenidos por Henkel (Ref. No. 14) y Roscoe y al. En la

Figura No. 18 de la Ref. 10 se puede ver que en tal caso los valores experimentales de A son superiores a 1/3.

3) Considerando que el suelo es un material plástico con endurecimiento a la deformación que verifica la ley de Mohr.Coulomb – Hvorslev, en el interior del campo limitado por la curva de fluencia que corresponde a un valor del contenido de humedad constante, el suelo debe comportarse elásticamente y por lo tanto $A = \frac{1}{3}$ para $W = Cte.$ cual sea la historia de cargas del material.

Refiriéndonos a la Fig. No. 18 del trabajo de Roscoe y al, vemos que para un mismo valor del contenido de humedad los valores de A varían en función del coeficiente de preconsolidación n lo cual desmiente las conclusiones teóricas.

4) Las experiencias realizadas por Henkel, Roscoe, Shoffield y Wroth muestran que en pruebas de cortante realizadas con las velocidades de deformación convencionales, las curvas vectoriales de esfuerzos efectivos para un $W = Cte$ no son rectas sino curvas del tipo de la curva PRQ en la Fig. No. 33.

Con el objeto de eliminar la primera de las contradicciones entre la teoría y la experiencia, que acabamos de exponer se podría pensar en proponer una ley de endurecimiento del suelo que tomara en cuenta el dato experimental señalado en el punto 4. En tal caso, se supone que la variación de la relación de vacíos es una función tanto del esfuerzo normal promedio p como del esfuerzo desviador q.

$$e = f(p, q)$$

El fenómeno de dilatancia, que se puede observar durante una prueba drenada que verifique la condición $p = Cte.$ se puede en tal caso explicar por la teoría de la plasticidad. En efecto si $p = Cte.$ el recorrido de los esfuerzos durante la prueba queda representado por la recta CC' (Fig. No. 43, que corta las curvas de fluencia sucesivas en puntos R en donde la proyección del vector incremento de deformaciones plásticas según el eje $\frac{dV^p}{V}$ es diferente de cero.

Quedan por analizar los puntos 2 y 3 anteriormente señalados. Durante una prueba no drenada sobre una arcilla normalmente consolidada, la curva vectorial de los esfuerzos coincide con una de las curvas de fluencia puesto que $W = Cte.$ y por lo tanto $df = 0$. Entonces aplicando la ley de endurecimiento de Drücker obtenemos que $\frac{dV^p}{V} = 0$ y el comportamiento volumétrico del suelo es elástico. Pero en tal caso el coeficiente de presión de poro de Skempton es igual con 1/3. Esta incompatibilidad parece mostrar que el suelo no puede verificar la ley de endurecimiento propuesta por Drücker, la cual implica que a lo largo de una curva de fluencia la variación plástica de volumen es nula.

En conclusión para explicar los datos proporcionados por la experiencia, es preciso verificar las siguientes condiciones para la ley de fluencia propuesta:

1) La ley de endurecimiento debe ser de la forma :

$$e = f(p, q) \quad \text{o bien para materiales saturados} \quad W = g(p, q)$$

2) A lo largo de una curva de fluencia, la variación plástica de volumen debe ser diferente de cero y por lo tanto no se puede expresar el $d\lambda$ basándose en las hipótesis de Drucker.

Roscoe y al han propuesto una expresión de la forma $W = g(p, q)$ que representa la curva PRQ de la Fig. No. 32 pero se sabe (ver por ejemplo Whitman ref. No. 15) que la forma de la curva PRQ depende de la velocidad de deformación observada durante la prueba, debido a la viscosidad estructural del esqueleto mineral como lo sugirieron Casagrande y Wilson.

En conclusión, el estudio de la resistencia al corte de los suelos cohesivos basado en las leyes de endurecimiento y de fluencia propuestas por la teoría matemática de la plasticidad parece restringido, debido a que no puede tomar en cuenta los fenómenos viscosos propios de los suelos.

CONCLUSIONES

Los conceptos fundamentales de la teoría matemática de la plasticidad parecen poderse aplicar en el caso de suelos no cohesivos como lo han mostrado las pruebas realizadas en arenas por Kirkpatrick (Ref. No. 9), tomando como criterio de fluencia el criterio de Mohr-Coulomb generalizado, y tratándose de arenas en estado suelto. Basándose en estos conceptos Drucker y Prager han mostrado que se podía explicar teóricamente el fenómeno de dilatancia, observado experimentalmente en el momento de la falla. Este fenómeno implica que un material que verifique un ángulo $\phi \neq 0$ no se puede considerar como un material incompresible en el momento de fallar por cortante.

Al tratar de aplicar los conceptos fundamentales de la teoría de la plasticidad a los suelos cohesivos y friccionantes, surgen numerosas discrepancias entre los resultados de la teoría y de la experiencia. La definición de un material plástico se basa en conceptos termodinámicos. Hemos visto que un cuerpo plástico absorbe energía al deformarse plásticamente, y por lo tanto su curva de fluencia ha de ser convexa.

Consideremos entonces un suelo cohesivo sobreconsolidado: en tal caso se sabe que al realizar una prueba de cortante el suelo se deforma plásticamente y se expande proporcionando energía al medio ambiente lo cual resulta incompatible con la definición de un material plástico. Debido a esta discrepancia fundamental no se ha considerado en este trabajo el caso de los suelos cohesivos sobreconsolidados.

El caso de los suelos normalmente consolidados se ha estudiado con detalle y se han obtenido los siguientes resultados:

- el fenómeno de dilatancia puede ser explicado por la teoría de la plasticidad si se considera el suelo como un material elasto-plástico con endurecimiento a la deformación.

- la recta denominada "línea de relación crítica de vacíos" por Roscoe y al que coincide con la recta $\tau = \sigma \operatorname{tg} \phi$ del criterio de Mohr-Coulomb - Hvorslev corresponde al lugar geométrico de los puntos representativos de los estados de esfuerzos para los cuales la variación plástica de volumen es nula.

- Los valores experimentales del coeficiente de presión de poro A de Skempton nos han conducido a la conclusión de que no se puede emplear la ley de endurecimiento propuesta por Drucker en el caso de los suelos.

La teoría de los materiales plásticos no toma en cuenta la influencia del tiempo, sin embargo se ha visto que las velocidades de carga o de deformación eran importantes en la determinación de las propiedades de los suelos. Por lo tanto parece necesario estudiar el comportamiento del suelo en forma reológica, lo cual permite tomar en cuenta tanto las propiedades viscosas como plásticas del suelo.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar finalmente mi profundo agradecimiento al Sr. Ing. Javier Salazar Resines, por el sincero interés que mostró en la realización de esta tesis, al Sr. Dr. Melchor Rodríguez Caballero, en cuyo curso de plasticidad fue posible adquirir los conocimientos fundamentales utilizados en el presente trabajo y al Instituto de Ingeniería que permitió con su apoyo llevar a cabo esta tesis.

REFERENCIAS

1 "Some Implications of Work-Hardening and Ideal Plasticity" por D. C. Drucker Quaterly of Applied Mathematics. Vol. 7, 1950.

2. "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations" por D.C. Drucker. Proceedings, 1st U. S. National Congress for Applied Mechanics ASME 1951.

3. "La resistance au cisaillement des sols" Thèse de Doctorat de P. Habib. Paris 1953.

4. "Fundamentals of soil Mechanics" D. W. Taylor

5. "The Influence of rate of strain on effective stresses in sensitive clay" por Crawford ASTM Papers on Soils 1959

6. "The structure of compacted clay " Lambe. Proc. ASCE May 1958.

7. "Theories of failure of materials applied to the shearing resistance of soils" P. Rutledge, Purdue Conference, 1940.

8. "Soil Mechanics and Plastic Analysis of Limit design", D. C. Drucker y W. Prager. Quaterly of Applied Mathematics. Vol. X 1952.

9. "The Condition of failure for sands" W. M. Kirkpatrick, Proceedings of the IV International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering Vol. I 1957.

10. "On the yielding of soils" Roscoe K. H. Schoffield A.M. and Wroth C.P. 1958 Geothechnique 8.22.

11. "On the plastic flow of Coulomb Solids beyond original failure" A.W. Jenike and R.T. Shield. Journal of Applied Mechanics December 1959.

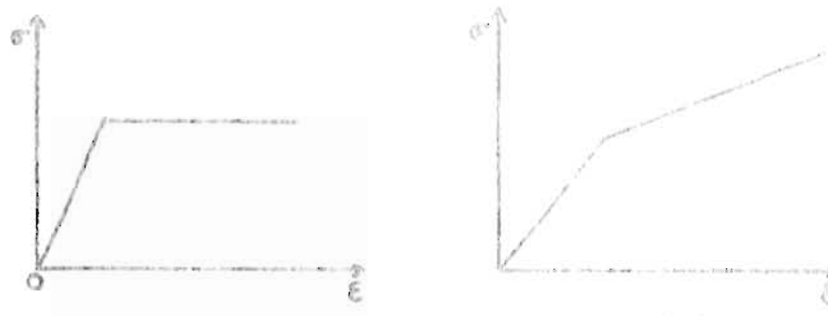
12. Correspondence. R. H. G. Parry 1958 Geotechnique VIII - 4.

13. "The pore pressure coefficients A and B " A. W. Skempton 1954 Geotechnique IV (143-148)

14. "The effect of overconsolidation on the behaviour of clays during shear" Henkel D. J. 1956 Geotechnique 6.

15. "Some considerations and data regarding the shear strength of clays" por R. V. Whitman, Research conference on shear strength of cohesive soils, Colorado 1960.

16. "The shear-strength of saturated remolded clays" por D. J. Henkel Research Conference on Shear strength of cohesive soils, Colorado, 1960.



(a) (b)

Fig. 1

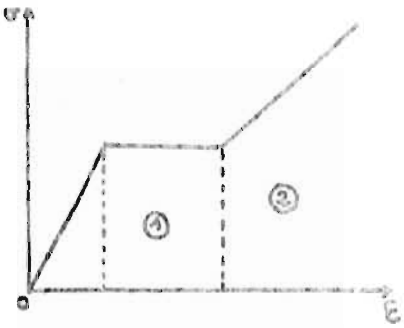


Fig 2

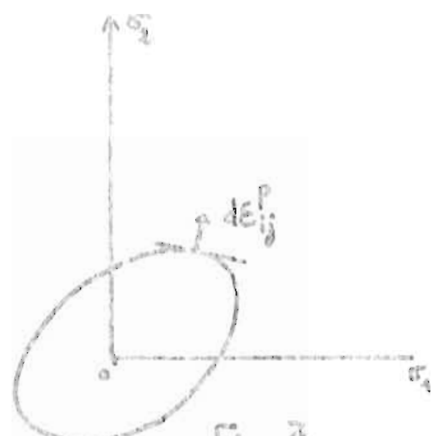


Fig 3

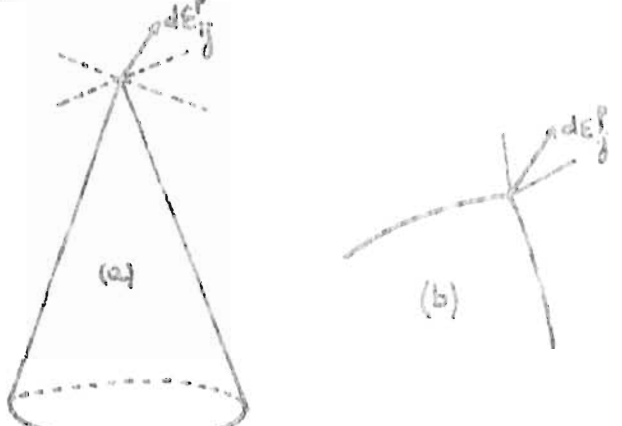
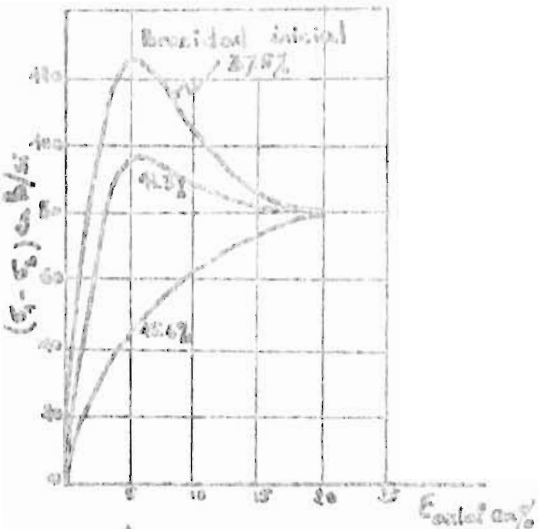
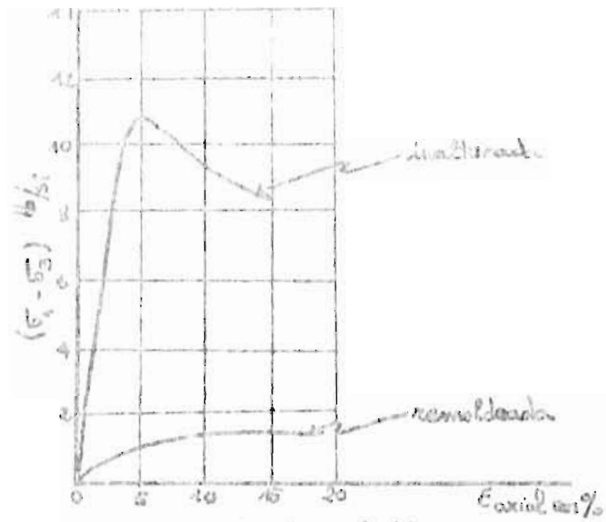


Fig 4



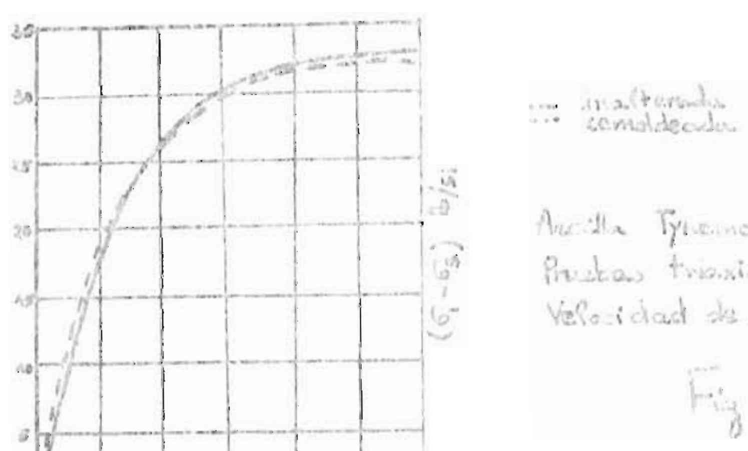
Arena.
Pruebas triaxiales drenadas
Velocidad constante de deformación

Fig 5



Arcilla de Shellhaven
Normalmente consolidada. Prueba triaxial rápida $\phi_u = 0$. Velocidad de deformación 1% por minuto
W = 70 LL = 93 LP = 29
Sensibilidad : 7.6

Fig 6



Arcilla Tynemouth sobreconsolidada
Pruebas triaxiales rapidas $\phi_u = 0$
Velocidad de deformacion : 1% por min

Fig 7.

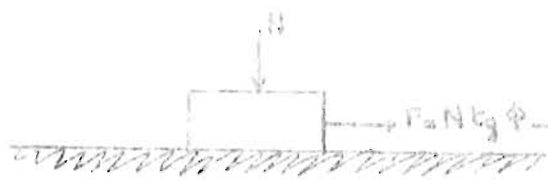
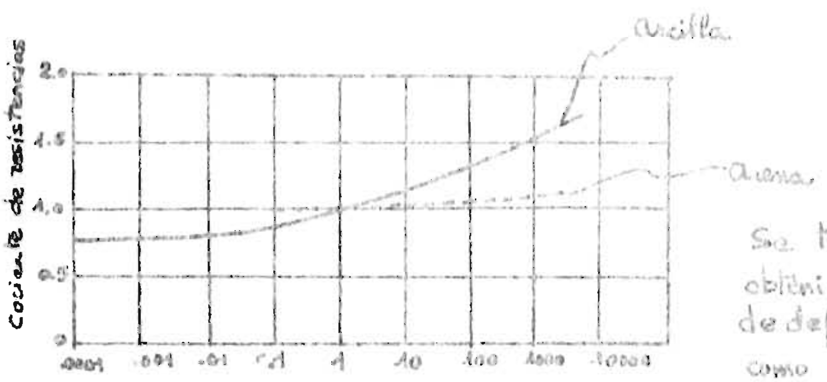


Fig 8

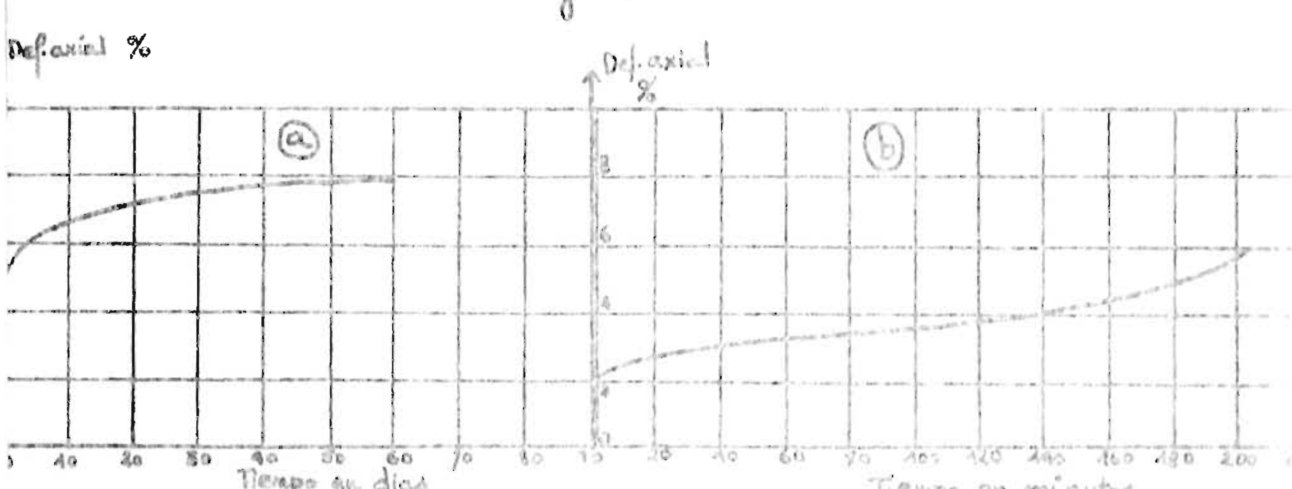
Fig 9



Se tomo la resistencia obtenida con una velocidad de deformación de 1% por min. como valor base

Fig 10. Relacion entre resistencia y velocidad de deformacion Taylor (1943) y Casagrande y Shannon (1948)

Fig 11



Esfuerzo desviador : 11.5 lb/si

Resist. en prueba en p convencional : 16 lb/si

Esfuerzo desviador 7.7 lb/si

Resist. en prueba convencional : 8.5

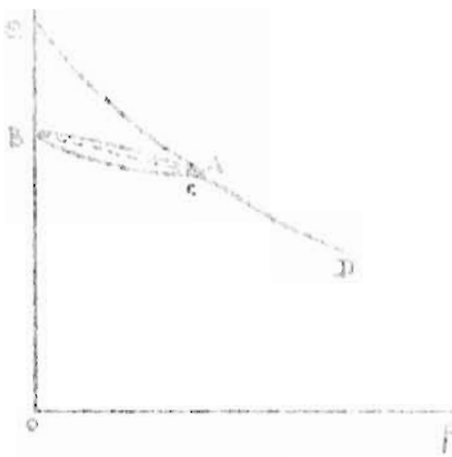


Fig 13

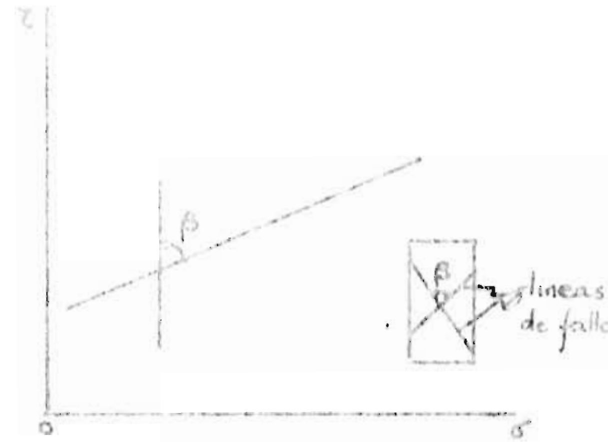


Fig 14

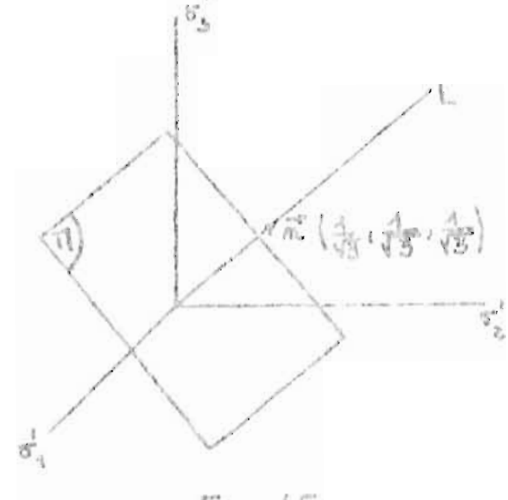


Fig 15

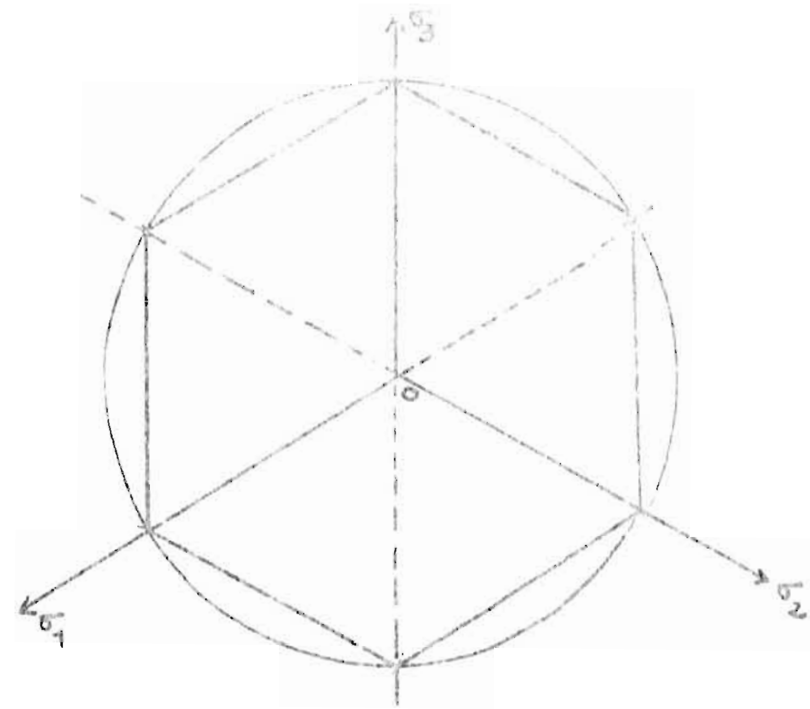


Fig 16.

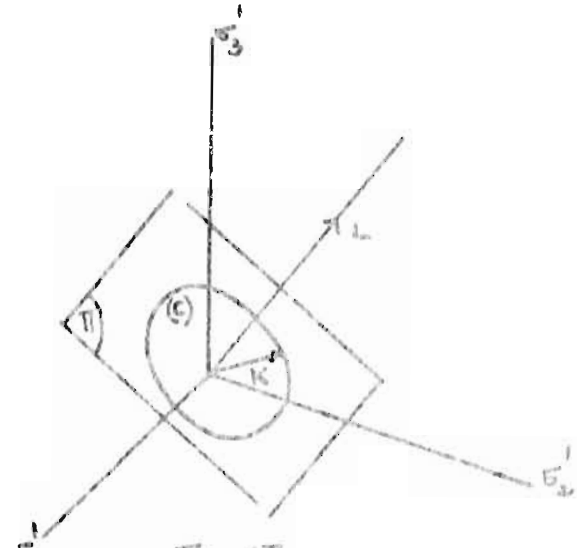


Fig 17

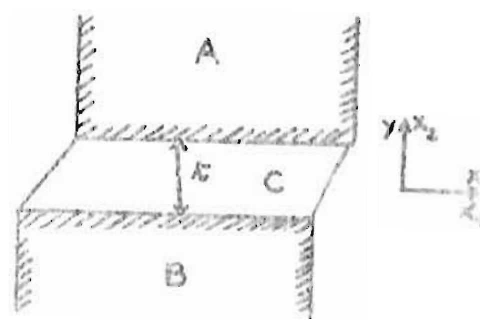


Fig 18 y 19

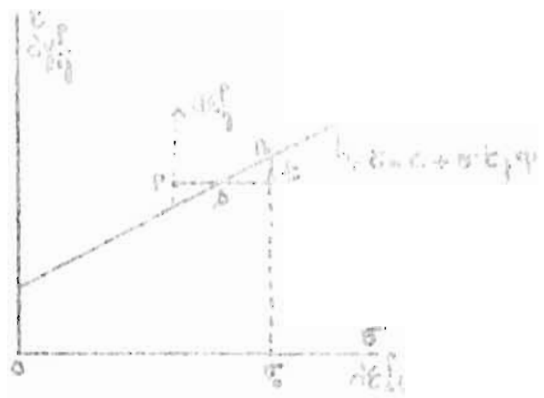


Fig 20

Fig 21

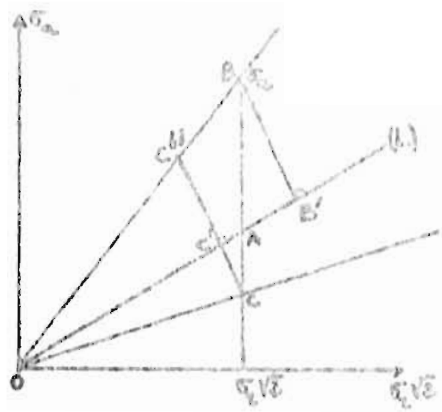


Fig 22

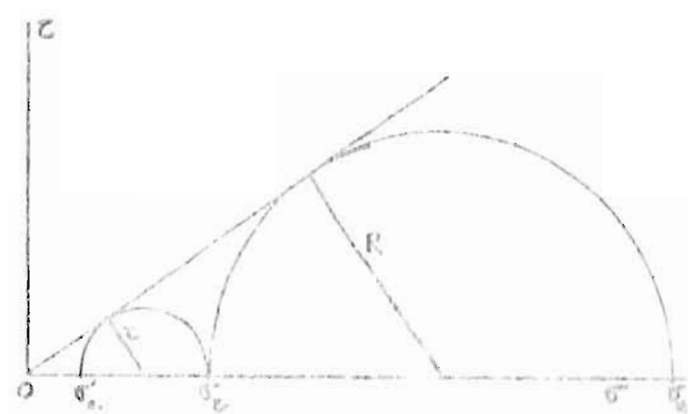


Fig 23

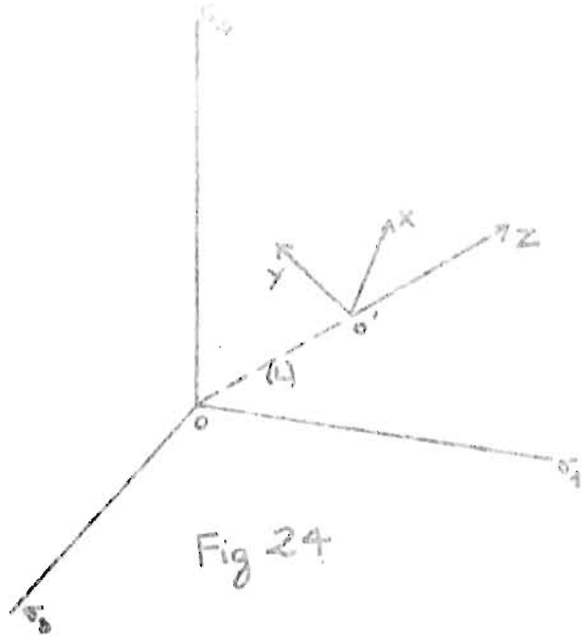


Fig 24

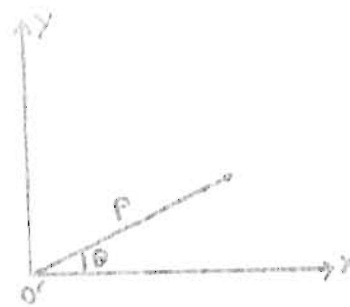


Fig 25

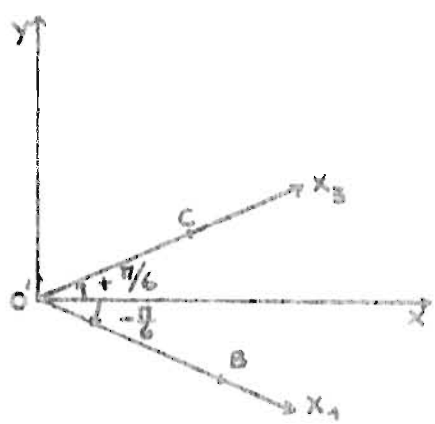


Fig 26

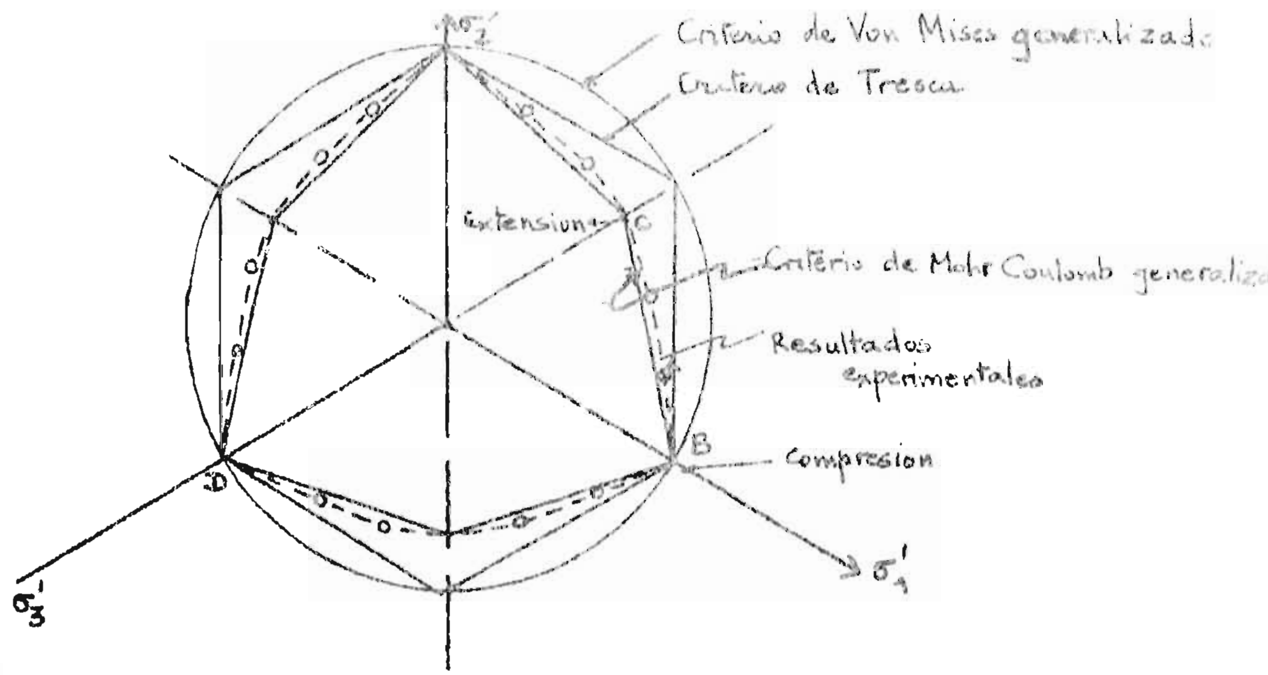

σ'₂
Criterio de Von Mises generalizado
Criterio de Tresca
Extension
C
Criterio de Mohr Coulomb generalizado
Resultados experimentales
B
Compresion
D
σ'₁
σ'₃

Fig 27

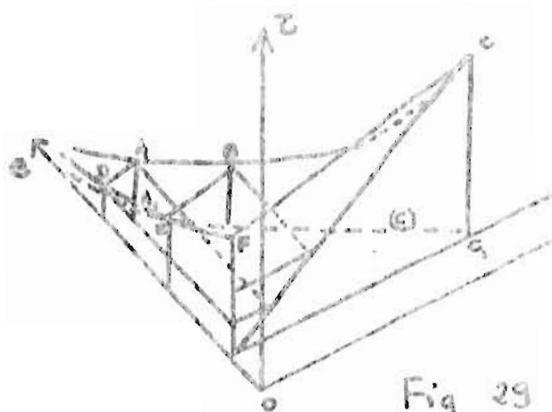


Fig 29

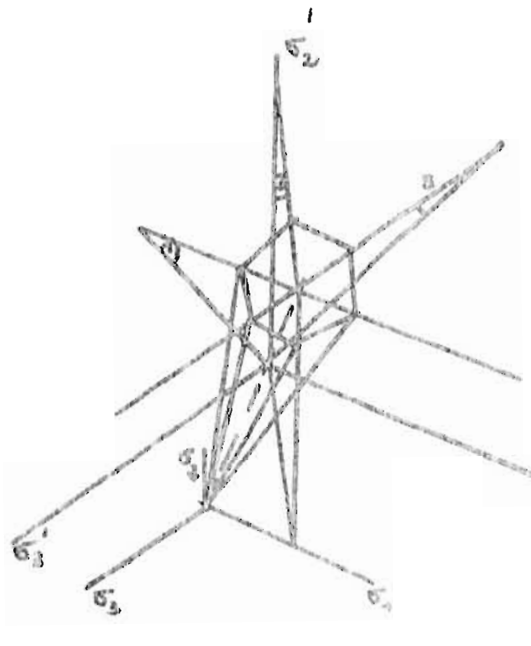


Fig 28

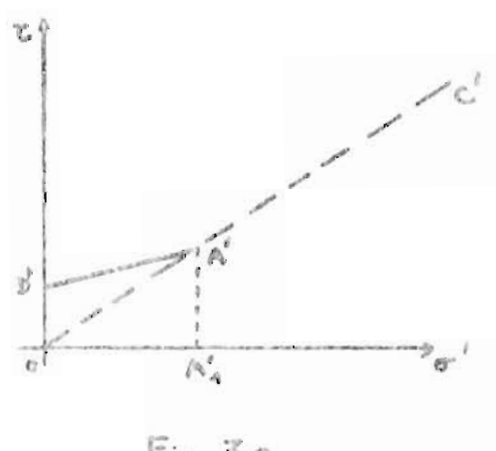


Fig 30

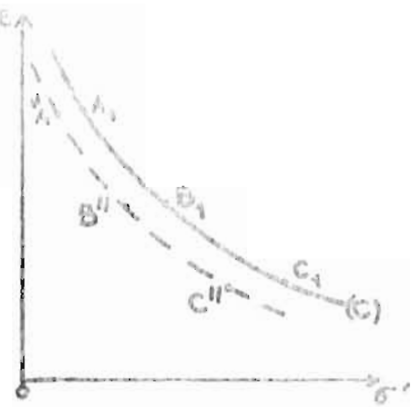


Fig 31

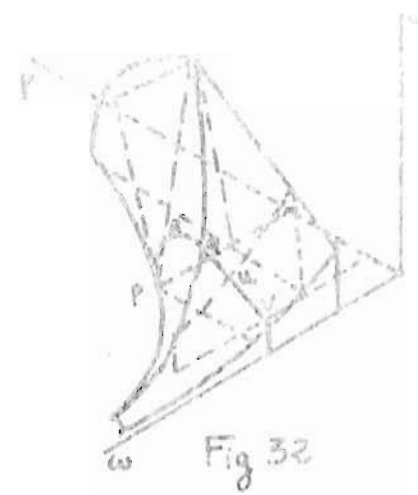


Fig 32

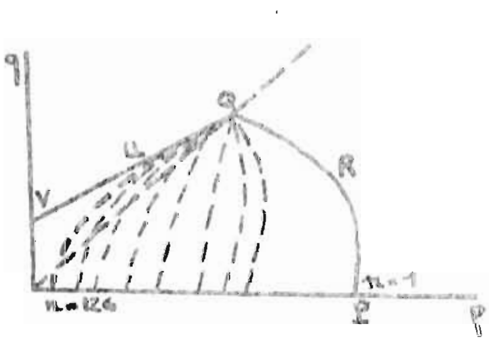


Fig 33

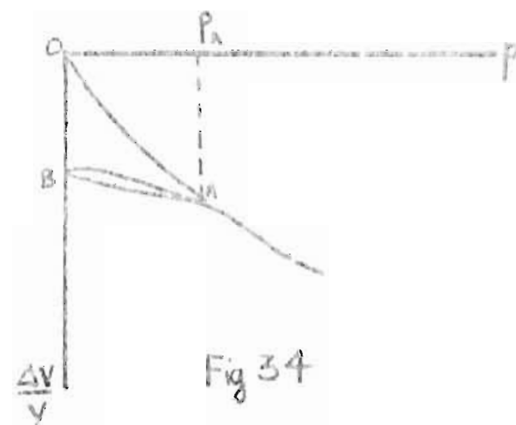


Fig 34

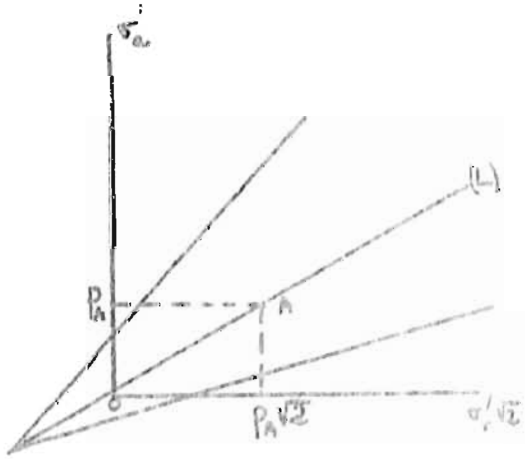


Fig 35

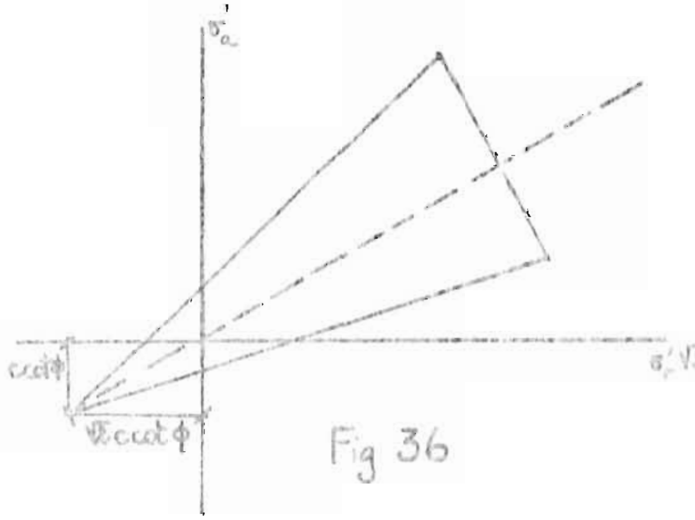


Fig 36

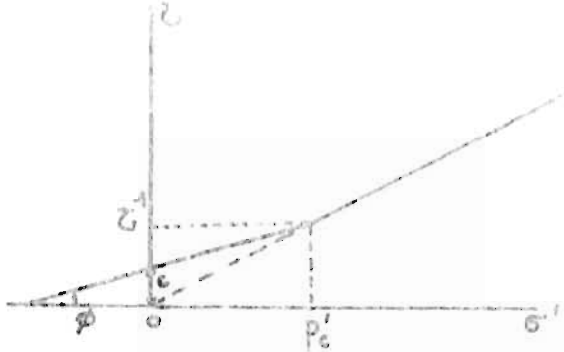


Fig 37

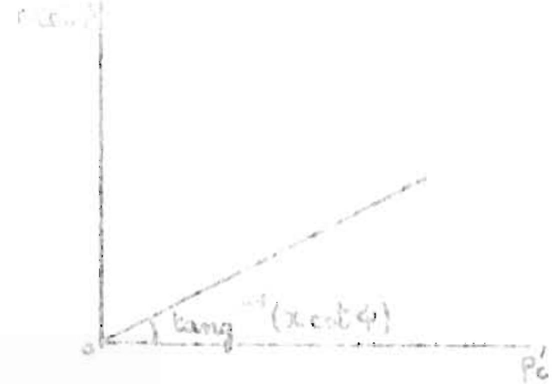


Fig 37'

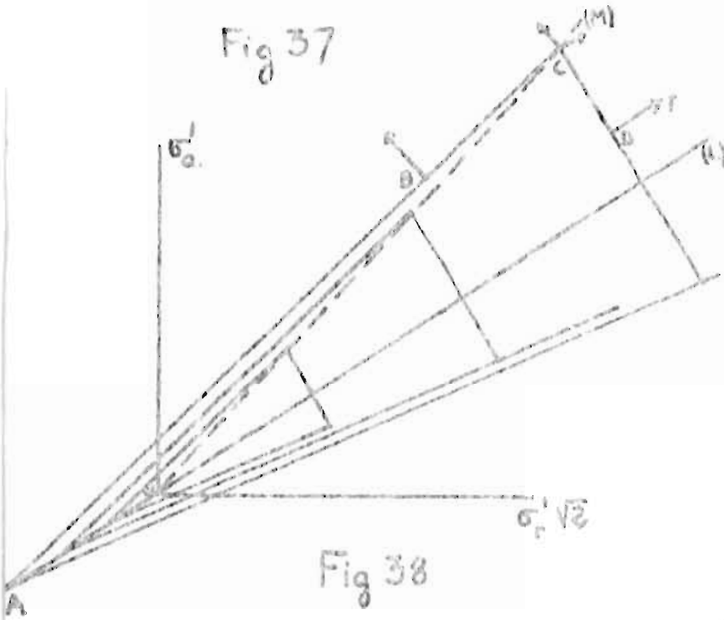


Fig 38

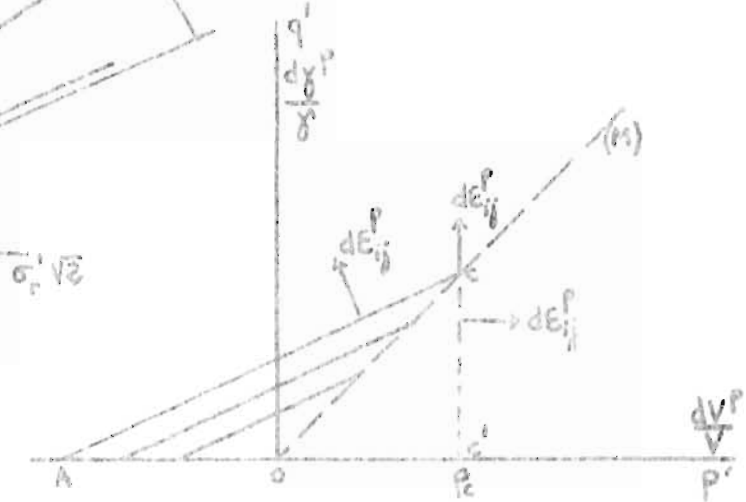


Fig 39

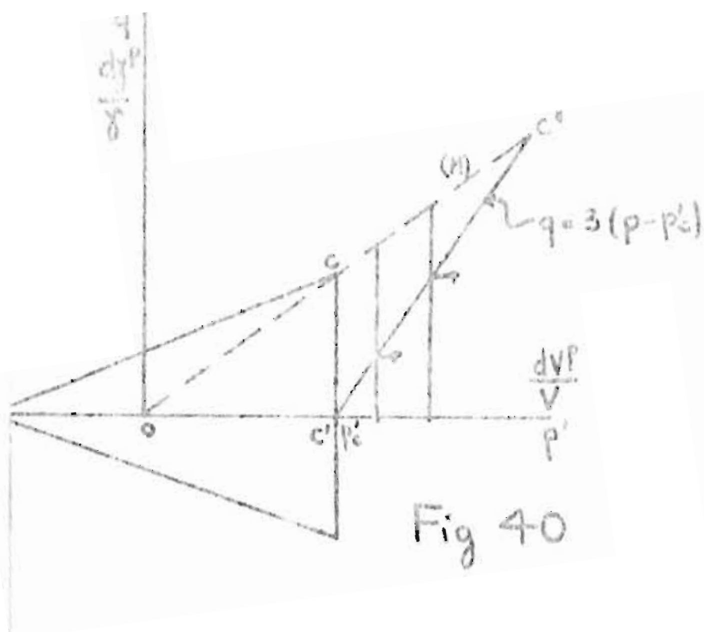


Fig 40

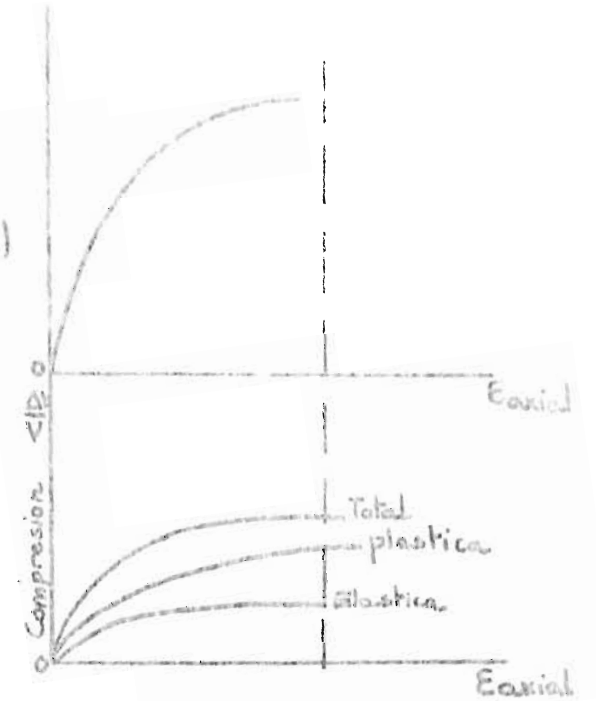


Fig 41

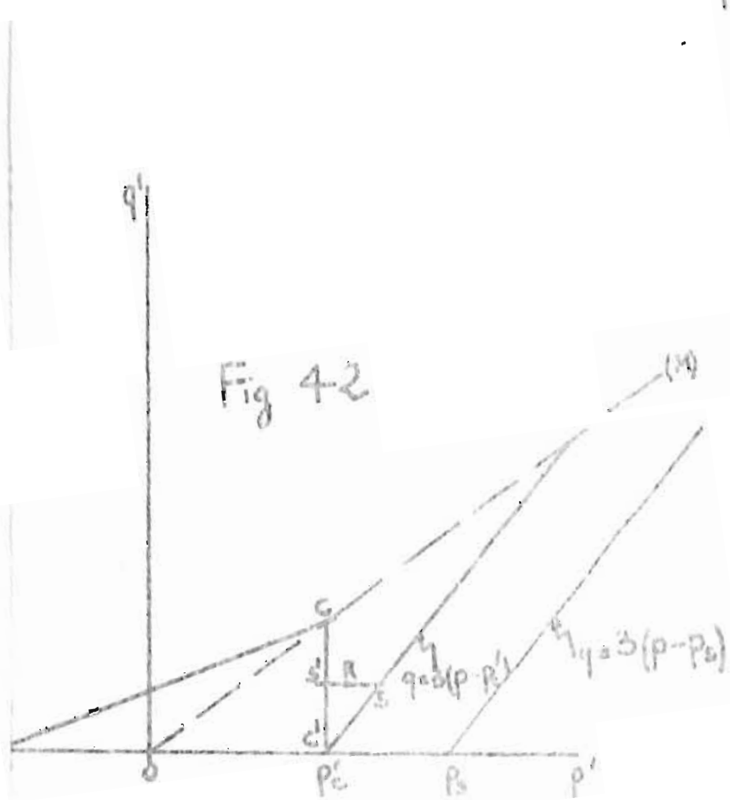


Fig 42

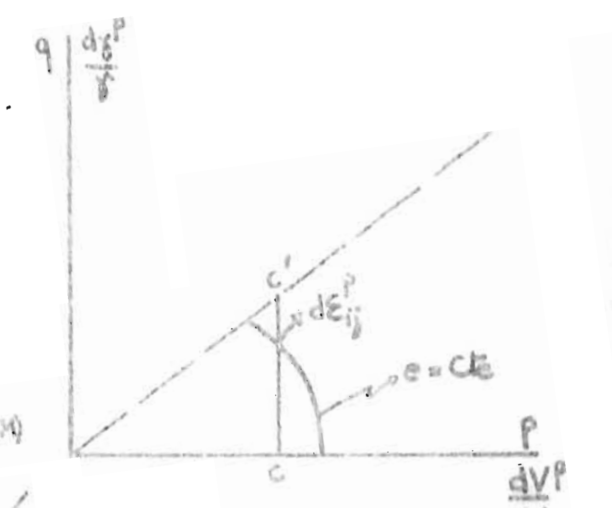


Fig 43