FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

"DISEÑO SISMICO OPTIMO DE EDIFICIOS"

TESIS

Que para obtener el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA (Estructuras)

Presenta

ALEJANDRO PATRICIO ASFURA FACUSE

Director de tesis: Dr. Emilio Rosenblueth Deutsch

1975

a Mónica

Agradecimientos

El autor expresa su gratitud al Dr. Emilio Rosenblueth por la dirección de esta tesis y por su valiosa ayuda, al Dr. Gustavo Ayala por su apoyo y sus sugerencias y al Dr. Alejandro Velasco Levy por la colaboración prestada en la etapa de Programación no lineal. Tambien agradece al Instituto de Ingeniería de la UNAM y a la Universidad Técnica Federico Santa María de Valparaíso, Chile, el haberle permitido realizar los estudios correspondientes a la Maestría en Ingeniería.

INDICE

INTRODUCCION

En el diseño sísmico de edificios hay necesidad de encontrar métodos simplificados de rediseño. Estos, en pocas iteraciones, deben conducir a estructuras que satisfagan un conjunto de restricciones impuestas y cumplan además cierto criterio de optimización.

Usualmente el proceso de optimización de estructuras sometidas a sismo se supone dividido en dos etapas. La primera conduce a un espectro de diseño y la segunda a una estructura de costo mínimo que satisface un conjunto de restricciones. Aquí solo se tratará la segunda etapa.

El propósito fundamental de este trabajo es generalizar el método de diseño sísmico óptimo de edificios de cortante presentado en el apéndice C para aplicarlo a estructuras constituidas por marcos con deformaciones de flexión significativas, despreciando las de cortante.

Se supone un comportamiento lineal en la estructura y su respuesta dinámica se obtiene por análisis modal.

Con objeto de reducir la complejidad del problema, solamente se exige que la estructura cumpla dos restricciones: la deformación de entrepiso y el esfuerzo máximo en cada elemento no deben exceder a determinados valores. Además, el área, módulo de sección y momento de inercia de cada elemento se suponen correlacionados entre sí unívocamente (1), así que las únicas incógnicas son los momentos de inercia de cada elemento.

En el análisis de las estructuras se emplea el programa de computadora TABS (2).

El método de optimización se aplica a dos estructuras y se analizan los resultados obtenidos.

FORMULACION DEL PROBLEMA

Puede plantearse el proceso de diseño sísmico como el de encontrar una estructura que sea de costo mínimo y que bajo la acción de un sismo y de cargas verticales satisfaga un conjunto de restricciones.

Por simplicidad se supondrá que el costo de la estructura es proporcional a su volumen.

Con el objeto de facilitar la resolución de este problema de optimización, la geometría de cada marco (ubicaciones y longitudes de sus elementos) se considera constante en todo el proceso iterativo. Además solo se analizan estructuras de acero, ya que de este modo es válido suponer que el área A_i, el módulo de sección S_i y el momento de inercia I_i del elemento i se encuentran correlacionados entre sí unívocamente. Se adoptan las siguientes relaciones (1):

$$S_i = 0.78\ I_i^{3/4} \qquad (1)$$

$$A_i = 0.80\ I_i^{1/2} \qquad (2)$$

Así, las únicas incógnitas son los momentos de inercia de los elementos.

Las estructuras se suponen con comportamiento lineal y las únicas restricciones se refieren a las deformaciones de entrepiso δ_j y al esfuerzo máximo σ_i en cada elemento, estando σ_i dado por la expresión

$$\sigma_i = \frac{M_{i\,max}}{S_i} - \frac{P_{i\,max}}{A_i} \qquad (3)$$

donde $M_{i\,max}$ y $P_{i\,max}$ son respectivamente el momento máximo y la carga axial máxima en el elemento i.

Todas las simplificaciones que no se refieren a la geometría de la estructura son fácilmente removibles en el procedimiento de optimización que se presenta en este trabajo.

El problema a resolver puede plantearse de la siguiente manera:

Dada la geometría de un marco, un estado de cargas estáticas y un espectro de diseño, se trata de encontrar las dimensiones de los elementos del marco, tales que

$$\min F = \sum_i A_i L_i \qquad (4)$$

que en el entrepiso j la deformación de entrepiso máxima cumpla

$$\delta_j \leq \delta_{ja} \qquad (5)$$

y que en el elemento i, el esfuerzo máximo satisfaga

$$\sigma_i \leq \sigma_{ia} \qquad (6)$$

donde F es la función de objetivo, L_i la longitud del elemento i, δ_{ja} la deformación admisible en el entrepiso j y σ_{ia} el esfuerzo admisible en el elemento i.

PROCEDIMIENTO DE OPTIMIZACION

El procedimiento es el siguiente:

1. Se elige cualquier diseño de la estructura. Sea $\{K_i^{(o)}\}$ el vector de rigideces relativas I_i/L_i.

2. Se realiza análisis modal que conduce al periodo fundamental de vibración $T^{(o)}$, a las cortantes máximas del entrepiso $V_i^{(o)}$, a las deformaciones máximas de entrepiso $\delta_i^{(o)}$ y a los esfuerzos máximos en cada elemento $\sigma_i^{(o)}$.

3. Se calculan las rigideces de entrepiso $R_i^{(o)} = V_i^{(o)} / \delta_i^{(o)}$.

4. Suponiendo que el estado de fuerzas en la estructura no cambia, se modifican los momentos de inercia de los elementos de tal manera que se obtenga en cada uno de ellos un esfuerzo igual a σ_{ia}. Estos momentos de inercia se denominan $I_{i\sigma}$.

5. Se calculan rigideces de entrepiso $R_i^{(1)}$ tales que con $V_i^{(o)}$ se obtenga δ_{ia}. Así, $R_i^{(1)} = V_i^{(o)} / \delta_{ia}$.

6. Se calcula una combinación de momento de inercia elementales $I_i^{(1)} \geq I_{i\sigma}$ de tal forma que se cumpla que la rigidez de cada entrepiso i sea igual a $R_i^{(1)}$ y que den

el mínimo volumen para la estructura.

La manera de obtener estos $I_i^{(1)}$ se presenta en sección aparte.

7. Con $\{R_i^{(o)}\}$, $\{R_i^{(1)}\}$, $\{\delta_i^{(o)}\}$ y $T^{(o)}$ se obtiene un coeficiente β calculado mediante la aplicación del procedimiento de optimización para estructuras de cortante presentado en el apéndice C.

8. Se repite el procedimiento para una estructura cuyas propiedades están definidas por $\beta\{I_i^{(1)}\}$.

CALCULO DE RIGIDECES $K_i^{(1)}$

El tratar de calcular una combinación de momentos de inercia elementales $I_i^{(1)} \geqslant I_{i\sigma}$ de manera que las rigideces de entrepiso sean iguales a $R_i^{(1)}$ y que den el mínimo volumen para la estructura, conduce a un problema de programación no lineal. Las variables del problema se tomarán igual a las rigideces relativas $K_i^{(1)} = I_i^{(1)}/L_i$.

Debido a la correlación que existe entre el área de cada elemento y su momento de inercia se puede determinar una nueva función de objetivo proporcional al volumen, dada por la relación

$$F = \sum_i K_i^{(1)\,1/2} L_i^{3/2} \tag{7}$$

De esta forma el problema de programación no lineal consiste en

$$\min F = \sum_i K_i^{(1)\,1/2} L_i^{3/2}$$

$$\text{con} \qquad K_i^{(1)} \geqslant K_{i\sigma} \tag{8}$$

$$R_i(K_i^{(1)}) = R_i^{(1)}$$

La solución de este problema da un vector de momentos de inercia elementales $\{ I_i^{(1)} \}$, el cual, si se considera que el estado de fuerzas sobre la estructura se ha mantenido constante, hace que se cumplan las restricciones de esfuerzos, que las restricciones de desplazamiento se hagan activas y que el volumen sea mínimo.

Para resolver el problema de programación no lineal se usa al algorítmo SUMT desarrollado por Fiacco y McCormick (3).

Para resolver numéricamente el problema es necesario conocer una expresión que relacione las rigideces de entrepiso R_i con las rigideces relativas elementales K_i. Para esto se usan las fórmulas para rigideces de entrepiso de Wilbur (4) las cuales están dadas por las siguientes relaciones:

Para el primer entrepiso, suponiendo columnas empotradas en la cimentación,

$$R_1 = \frac{48\,E}{h_1 \left[\dfrac{4h_1}{\sum K c1} + \dfrac{h_1 + h_2}{\sum K v1 + \dfrac{\sum K c1}{12}} \right]} \qquad (9)$$

Para el segundo entrepiso suponiendo las columnas empotradas en la cimentación,

$$R_2 = \frac{48\,E}{h_2 \left[\dfrac{4h_2}{\sum K_{c2}} + \dfrac{h_1 + h_2}{\sum K_{v1} + \dfrac{\sum K_{c1}}{12}} - \dfrac{h_2 + h_3}{\sum K_{v2}} \right]} \qquad (10)$$

Para pisos intermedios,

$$R_n = \frac{48\,E}{h_n \left[\dfrac{4\,h_n}{\sum K_{cn}} - \dfrac{h_m + h_n}{\sum K_{vm}} - \dfrac{h_n - h_o}{\sum K_{vn}} \right]} \qquad (11)$$

En estas ecuaciones:

R_n = rigidez del entrepiso n

K_{vn} = rigidez relativa (I/L) de vigas del nivel sobre el entrepiso n

K_{cn} = rigidez relativa (I/L) de columnas del entrepiso n

m, n, o = índices que identifican tres niveles consecutivos de abajo hacia arriba

h_n = altura del entrepiso n

Estas fórmulas se pueden mejorar, ya que, en la etapa en la que se usan, las fuerzas cortantes de entrepiso se suponen conocidas. Así, las fórmulas de Wilbur se pueden expresar de la siguiente manera:

Para el primer entrepiso,

$$R_1 = \frac{48E}{h_1\left[\dfrac{4h_1}{\sum K_{c1}} + \dfrac{h_1 + (V_2/V_1)\,h_2}{\sum K_{v1} + \dfrac{\sum K_{c1}}{12}}\right]} \tag{12}$$

Para el segundo entrepiso,

$$R_2 = \frac{48E}{h_2\left[\dfrac{4h_2}{\sum K_{c2}} + \dfrac{(V_1/V_2)\,h_1 + h_2}{\sum K_{v1} + \dfrac{\sum K_{c1}}{12}} \quad \dfrac{h_2 + (V_3/V_2)\,h_3}{\sum K_{v2}}\right]} \tag{13}$$

Para pisos intermedios,

$$R_n = \frac{48E}{h_n\left[\dfrac{4h_n}{\sum K_{cn}} + \dfrac{(V_m/V_n)\,h_m + h_n}{\sum K_{vm}} + \dfrac{h_n + (V_o/V_n)\,h_o}{\sum K_{vn}}\right]} \tag{14}$$

donde V_i es la fuerza cortante en el entrepiso i.

DISCUSION

Durante el proceso de optimización, en el paso 6 al cambiar los momentos de inercia de la estructura varían los periodos y las ordenadas espectrales, lo que implica un cambio en la respuesta de la estructura. Ello hace que las restricciones no sean ya activas. Esto se corrige en el paso 7 al aplicar el método presentado en el apéndice C que consiste básicamente en lo siguiente. Dada la ordenada espectral correspondiente al modo fundamental de la estructura, se realiza un desplazamiento a lo largo de una recta que pasa por esa ordenada y el origen hasta alcanzar el periodo fundamental de la estructura modificada, de tal manera que se tengan restricciones activas. Esto equivale a la hipótesis de que las fuerzas cortantes no cambian. Desde ese punto se alcanza el espectro de diseño mediante una hipérbola la cual corresponde a un espectro de deformación constante. Así el punto obtenido corresponde a la solución buscada. Esta solución es una aproximación ya que el procedimiento es válido exactamente sólo para un sistema de un grado de libertad.

En la etapa 6, al usar las fórmulas de Wilbur se introducen errores debido a que estas fórmulas representan solo en forma aproximada la rigidez de entrepiso de un sistema deformable principalmente por flexión. Estos errores, si bien demoran la convergencia del método, no repercuten en los resultados finales ya que en cada iteración la estructura se reanaliza en forma "exacta". Para evitar estos errores y así acelerar la convergencia puede ser deseable obtener fórmulas para rigideces de entrepiso más precisas, o bien, en cada iteración modificar las fórmulas de Wilbur afectándolas por un coeficiente que haga que representen en mejor forma la relación cortante-deformación de entrepiso.

Uno de los principales problemas en el procedimiento presentado es el uso de programación no lineal, ya que es muy lenta y muy poco eficiente para problemas grandes, y si se considera que un marco mediano, por ejemplo, uno de 8 pisos y 3 crujías tiene en general 56 variables, 8 restricciones de igualdad y 56 de desigualdad, se hace muy conveniente, para el uso de este método, la linealización del problema. Con este fin se está trabajando en la obtención de rigideces de entrepiso lineales con respecto a los momentos de inercia de cada elemento. Los resultados preliminares son promisorios.

A la luz de los teoremas de diseño estructural de la ref 5 se concluye que el procedimiento aquí descrito converge al óptimo global para un marco dado. En efecto, el procedimiento descrito conduce a una estructura isostática que cumple todas las restricciones impuestas, luego, según el teorema 1 de la ref 5, el volumen encontrado será el mínimo, y para ese volumen, se tendrán desplazamientos mínimos.

Según el teorema 2 de la misma referencia esta solución puede no ser única, existiendo una familia de estructuras con el mismo volumen e idénticos desplazamientos. La conclusión se ve confirmada en los ejemplos resueltos en el presente trabajo.

EJEMPLOS

Se estudiaron dos marcos cuyas características particulares se presentan en las figs 1 y 2. Se usó el espectro de diseño de la fig 3.

Las características generales de los dos marcos son: módulo de elasticidad $E = 2100$ ton/cm^2, masa concentrada en el piso j. $M_j = 0.015$ ton seg^2/cm, altura del entrepiso j $h_j = 400$ cm, carga vertical en el piso j $w_j = 0.01$ ton/cm, deformación admisible en el entrepiso j $\delta_{ja} = 0.0025\ h_j = 1$ cm. En cada elemento i, $\sigma_{ia} = 1.52$ ton/cm^2, $A_i = 0.8\ I_i^{1/2}$ y $S_i = 0.78\ I_i^{3/4}$.

En las tablas 1-4 se presenta la variación de las estructuras en cada iteración del proceso de optimización y la fig 4 muestra la evolución de los volúmenes.

Para visualizar mejor los resultados, en las figs 5 y 6 se muestran en forma esquemática la distribución inicial y final de áreas en cada ejemplo.

DISCUSION DE RESULTADOS

Los resultados finales muestran una forma de estructuración totalmente distinta a la aceptada usualmente. La solución consiste en concentrar rigideces en ciertos elementos, y hacer más flexibles los demás. Si no existen restricciones en cuanto a esbeltez, flechas máximas ante carga gravitacional y procedimiento de construcción, la estructura se aproxima a una isostática.

Es interesante notar la rapidez en la convergencia del método, más aun si solo se quiere tener una idea de la estructuración a que tiende un marco dado, ya que para esto basta con una o dos iteraciones. En el ejemplo 1 el volumen después del primer ciclo fue 0.6487 m^3 resultando el final de 0.6417 m^3. Para el segundo ejemplo se tuvo un volumen de 0.7853 m^3 después de dos ciclos y un volumen final de 0.7539 m^3. Así, el volumen mínimo prácticamente se alcanza en una o dos iteraciones, pero no necesariamente en esta etapa se cumplen las restricciones. Esto puede servir para acelerar el proceso ya que conociendo el volumen final y la tendencia de la estructura se puede generar una estructura que se acerque bastante a la óptima evitándose varias iteraciones.

Con objeto de comparar resultados se analizaron tres estructuras con la misma geometría que la del ejemplo 2 y con su mismo volumen final. Las características de estas tres estructuras fueron:

Estructura 1. $A_v = A_c/4$

Estructura 2. $A_c = A_v/4$

Estructura 3. $A_v = A_c$

donde A_v = área de cada viga y A_c = área de cada columna.

Las estructuras 1 y 2 no cumplieron las restricciones de desplazamiento. La estructura 3 se comportó de manera muy parecida a la estructura final del ejemplo 2. Este último resultado queda cubierto por los teoremas de diseño estructural presentados en la ref 5. Así, aunque la estructructura con tendencia a la isostática y la estructura regular tienen comportamiento muy parecido e idéntico volumen, evidentemente es preferible trabajar con la estructura regular por problemas de esbeltez, flechas, de facilidad de construcción y de seguridad.

CONCLUSIONES

Las principales conclusiones obtenidas en este trabajo son:

1. Se presenta un método iterativo para optimizar estructuras deformables principalmente por flexión con cierto número de restricciones dado un espectro de diseño y un conjunto de cargas estáticas.
   El procedimiento emplea análisis modal y programación no lineal en cada ciclo.
   El método converge en corto número de ciclos.
2. El procedimiento lleva a una estructuración de volumen mínimo para cada marco. Esta estructuración consiste en rigidizar cierto número de elementos formando un esqueleto que tiende a ser una estructura isostática y reduciendo la rigidez de los demás. En los ejemplos resueltos, los elementos más rígidos contribuyen fuertemente a limitar los desplazamientos horizontales de la estructura y quedan bastante sobrados respecto a sus esfuerzos admisibles. En los elementos menos rígidos se nota la tendencia a quedar sometidos a sus esfuerzos admisibles. El mínimo que

se obtiene es global (5).

3. Haciendo uso de teoremas de diseño estructural (5) se puede encontrar una estructura con el mismo volumen y que cumpla las mismas restricciones que la estructura obtenida con el procedimiento presentado y que debido a su regularidad e hiperestaticidad tenga, desde un punto de vista estructural y de construcción y no tan solo de volumen, un diseño óptimo bajo la acción de cargas verticales y de sismo.

Las conclusiones mencionadas están restringidas por el número de ejemplos estudiados.

APENDICE A

Referencias

1. Ray, D., K. S. Pister y A. S. Chopra, "Optimum design of earthquake-resistant shear buildings", Report No. EERC 74-3, University of California, Berkeley, Cal., ene 1974.

2. Wilson, E. L. y H. H. Dovey, "Static and earthquake analysis of three-dimensional frame and shear wall buildings", Report No. EERC 72-1, University of California, Berkeley, Cal., may 1972.

3. Kuester, J. L. y J. H. Mize, Optimization techniques with fortran, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1973.

4. Rosenblueth, E., L. Esteva, Folleto complementario. Diseño sísmico de edificios, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1962.

5. Norris, C. H. y J. B. Wilbur, Elementary structural analysis, pp 541-544, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.

APENDICE B

Notación

A	=	área trasversal de los elementos
a	=	subíndice que identifica un valor admisible
c	=	subíndice que se refiere a columnas
E	=	módulo de elasticidad
F	=	función de objetivo
h	=	altura de entrepiso
I	=	momento de inercia de los elementos
i	=	subíndice que se refiere a un elemento
j	=	subíndice que se refiere a un piso
K	=	rigidez relativa de los elementos
L	=	longitud de los elementos
M	=	masa concentrada

M_{max} = momento máximo

P_{max} = fuerza axial máxima

R = rigidez de entrepiso

S = módulo de sección de los elementos

T = periodo natural

V = fuerza cortante máxima de entrepiso

v = subíndice que indica vigas

w = carga vertical

β = coeficiente que afecta al periodo fundamental

δ = deformación de entrepiso

σ = esfuerzo máximo

APENDICE C

Diseño sísmico óptimo de edificios de cortante*

El problema

Dada una estructura y un espectro de diseño se supone que la fuerza cortante en el entrepiso i es igual a la raíz de la suma de cuadrados de las cortantes modales en dicho entrepiso. (Esta hipótesis no reduce la generalidad del procedimiento de optimización. Se puede adoptar un criterio más refinado para combinar las respuestas modales sin necesidad de introducir cambios en el procedimiento.)

Para las columnas del entrepiso i, sea A_i el área de la sección trasversal, E el módulo de elasticidad, H_i la altura de entrepiso, I_i el momento de inercia, $K_i = 12EI_i/H_i^3$ la rigidez de entrepiso y S_i el módulo de sección. Sea M_i la masa que suponemos concentrada sobre una columna del entrepiso i. La fuerza de

* Sometido al ASCE para su publicación como "Optimum seismic design of linear shear buildings", por Emilio Rosenblueth y Alejandro Asfura.

gravedad sobre una columna en ese entrepiso es

$$P_i = g \sum_{j=i}^{N} M_j \qquad \text{(C1)}$$

donde g = aceleración de gravedad y N = número de pisos. Si se desprecia el efecto del momento de volteo, el máximo esfuerzo de compresión sobre una columna es

$$\sigma_i = P_i/A_i + H_i V_i/2S_i \qquad \text{(C2)}$$

donde V_i = cortante en cada columna del entrepiso i. La correspondiente deformación de entrepiso es

$$\delta_i = V_i/K_i \qquad \text{(C3)}$$

Sean el esfuerzo y deformación admisibles de entrepiso σ_a y δ_a respectivamente (no necesariamente iguales en todos los entrepisos). Se deben cumplir entonces las restricciones $\sigma_i \leq \sigma_a$ y $\delta_i \leq \delta_a$ para todo i. Cuando se cumple la igualdad se dice que la restricción es activa.

Se supone que el costo de las columnas crece monótonamente con $\sum_{i=1}^{N} A_i H_i$. Se desea minimizar este costo.

Procedimiento de optimización

El procedimiento es el siguiente:

1. Se elige cualquier diseño de la estructura. Sea $K_i^{(0)}$ la rigidez de entrepiso y $T^{(0)}$ el periodo fundamental de vibración.

2. Se realiza un análisis modal que conduce a las cortantes de entrepiso $V_i^{(0)}$ y deformaciones $\delta_i^{(0)}$.

3. Se calculan las rigideces requeridas para hacer activas las restric-

ciones de esfuerzo y deformación en cada entrepiso suponiendo que las cortantes no se modifican. Sea $K_i^{(1)}$ la mayor de estas dos rigideces en el entrepiso i.

4. Se supone que el periodo fundamental de la estructura con estas rigideces es $T^{(1)} = \alpha^{\frac{1}{2}} T^{(0)}$, donde

$$\alpha = \frac{\sum_i \alpha_i \delta_i^{(0)^2} K_i^{(0)}}{\sum_i \delta_i^{(0)^2} K_i^{(0)}} \qquad \text{(C4)}$$

$\alpha_i = K_i^{(0)}/K_i^{(1)}$ y la suma se extiende a todos los pisos.

5. Se repite el análisis con rigideces iguales a $\beta K_i^{(1)}$, donde β se obtiene como en la fig C1 cuando $dU/dT \geqslant 0$ en la región de interés, y $\beta = 1$ cuando $dU/dT \leqslant 0$ en esa región. U es la velocidad espectral de diseño que corresponde al periodo T.

El procedimiento se justifica como sigue: considérese una estructura con un solo grado de libertad. Un desplazamiento a lo largo de la recta AB en la fig C1 equivale a la hipótesis de que las fuerzas cortantes no cambian, ya que dicha línea es un espectro de aceleración constante. El punto B representaría la estructura de diseño óptimo si esta línea fuera el espectro de diseño, ya que dicha estructura tendría un diseño admisible con una restricción activa. Cuando la restricción activa es de deformación, los puntos a lo largo de la hipérbola BC producen la misma restricción activa para la ordenada espectral correspondiente, ya que la hipérbola es un espectro de deformación constante. Así la intersección de esta curva con el espectro de diseño (punto C) da la solución buscada. En un edificio de varios pisos, el uso de la ec C4 produce un periodo fundamental de vibración $T^{(1)}$

que es exacto, salvo por la aproximación que corresponde al uso del método de Rayleigh. Así, el procedimiento seguido da en un ciclo un tratamiento exacto para el modo fundamental (salvo por el cambio en la forma modal que se tiene en esta etapa debido nuevamente a la aproximación en el método de Rayleigh) y una aproximación al tratamiento requerido de los armónicos. Debido a que estos suelen contribuir poco a las cortantes de diseño en estructuras de este tipo, se puede esperar que el procedimiento converja rápidamente al diseño óptimo.

Cuando la restricción activa es de esfuerzo, en principio podría uno moverse a lo largo de una curva que no fuese la hipérbola, pero la diferencia generalmente es pequeña. Así, si A_i y S_i son proporcionales a $I_i^{1/2}$ y a $I_i^{3/4}$, respectivamente (1), la ec C2 conduce a una velocidad espectral U proporcional a $\sigma_a T^{-1/2} - \gamma T^{1/2}$, donde γ es una constante ($\gamma T = P/A$). En el rango usual de γT no es grande la diferencia con una hipérbola de primer grado. Por ejemplo, si $\gamma T^{(1)} = \sigma_a/2$, $\beta^{-1/2} = 1 + \epsilon$ y $\epsilon << 1$, U varía en proporción a $1-1.5\epsilon$ en vez de ser proporcional a $1-\epsilon$ como lo es la hipérbola. Si $T^{(1)} = 0.2\,\sigma_a$, U debería ser proporcional a $1-0.75\,\epsilon$.

En la fig C2 se consideran diferentes condiciones. En la fig C2a, U crece más rápidamente que T en la vecindad de $T^{(0)}$, y $\alpha < 1$. Al moverse a lo largo de AB, en un sistema de un grado de libertad se produce una estructura admisible sin restricciones activas. El moverse de B a C reduce su costo. En la fig C2b se tiene el mismo espectro U(T) pero $\alpha > 1$; el punto B representa una estructura inadmisible; C es más caro. En figs C2c y Cd, U varía más lentamente que T y los costos relativos para los puntos B y C se invierten en comparación con la situación de las figs C2a yCb. En todos estos casos el procedimiento converge y no existe ambiguedad. Consideremos ahora las figs C2e y Cf en que U es función decreciente de T en la proximidad de $T^{(0)}$. En la fig C2e, $\alpha < 1$ y la hipérbola puede intersectar a U(T) en más de un punto. C' representa una solución menos cara que C. Puede existir incluso una tercera intersección para T mayores. Sin embargo, si el esfuerzo máximo constituye o puede llegar a convertirse en restricción activa, probablemente $\sigma_a T^{-1/2} - \gamma T^{1/2}$ decrezca más rápidamente que T^{-1} al aumentar T, ya que una pendiente negativa en U(T) se asocia comúnmente a periodos largos. En estas condiciones el moverse de B a C' puede generar un proceso divergente. Si se detecta esta situación la hipérbola debe remplazarse por una curva más inclinada, como muestra la línea punteada, y puede ser que C' no exista. En las figs C2e yCf con $\alpha > 1$ puede suceder que, como en la fig C2f la hipérbola nunca corte a U(T). Nuevamente, sin embargo, puede gobernar la restricción de esfuerzos, y seguramente gobernará para un coeficiente β suficientemente pequeño, conduciendo a una curva más inclinada que la hipérbola. Bajo estas condiciones el remplazar la hipérbola por una línea vertical ($\beta = 1$; línea punteada) asegura convergencia.

En resumen, si la pendiente de U(T) es cero o positiva en la vecindad de $T = T^{(0)}$, el procedimiento descrito es adecuado y convergerá a la solución óptima, generalmente de una manera rápida. Si esta pendiente es cero o negativa conviene remplazar la hipérbola por una vertical definida por las restricciones de esfuerzos.

Ejemplos

Los siguientes datos para un edificio de ocho pisos se tomaron de un ejemplo de la ref 1: $M_i = 18.6$ kg seg^2/cm, $H_i = 457$ cm, $\sigma_a = 1690$ kg/cm^2, $\delta_a = 0.0025\, H_i = 1.14$ cm, $E = 2.11\ 10^6$ kg/cm^2, $A_i = 0.81_i^{1/2}$, $S_i = 0.781_i^{3/4}$, y el espectro de diseño de la fig C3, cuyas ordenadas son proporcionales al espectro de Housner con 5% de amortiguamiento. Se presenta una solución en la tabla C1. La columna 3 contiene un conjunto arbitrario de momentos de inercia. Al final de tres ciclos se obtuvieron los valores de la columna 4. Las deformaciones aumentan desde las de la columna 5 a las de la columna 6 mientras que los esfuerzos máximos crecen desde los valores en la columna 7 hasta los de la columna 8.

Una segunda solución aparece en la tabla C2. Aquí los momentos de inercia iniciales son los calculados en la ref 1 después de varios ciclos del procedimiento de búsqueda allí descrito. Los valores finales de la tabla se obtuvieron en dos ciclos del procedimiento presentado en este trabajo.

Las diferencias entre los resultados en ambas tablas se deben a las tolerancias del 1% que se permitió en las restricciones. Estas tolerancias se reflejan en una variación cercana al 2% en algunos valores finales de los momentos de inercia.

Adoptemos ahora el espectro de diseño mostrado por la línea punteada en la fig C3. Los momentos de inercia iniciales se tomarán iguales a los de la columna 4 de la tabla C2. Ello conduce a $T^{(0)} = 2.24$ seg, el cual cae en la rama hiperbólica en la fig C3. La situación es similar a la de la fig C2f. La mayoría de las relaciones P_i/A_i cae entre $0.4\ \sigma_a$ y $0.6\ \sigma_a$. Remplazando la hipérbola de primer grado en el procedimiento por una línea vertical se obtienen los resultados de la tabla C3 en cinco ciclos.

La evolución de la función de objetivo $\sum_i A_i$ (ya que H_i es independiente de i en cualquier ciclo) se exhibe en la fig C4 para los tres casos.

Conclusiones

Se describe un método iterativo para el diseño óptimo de edificios de cortante con comportamiento lineal y que tienen vigas infinitamente rígidas y suficientemente resistentes. El espectro de diseño se supone dado. El procedimiento emplea análisis modal en cada ciclo. El método converge rápidamente si las velocidades espectrales de diseño aumentan con el periodo en la vecindad del periodo fundamental y puede adaptarse cuando el espectro decrece en este rango. El criterio esencial consiste en asegurar al menos una restricción activa por entrepiso.

Notación Apendice C

A = área trasversal de las columnas

a = subíndece que identifica un valor admisible

E = módulo de elasticidad

g = aceleración de gravedad

H = altura de piso

I = momento de inercia de las columnas

i = subíndice que identifica un piso

K = rigidez de entrepiso

M = masa

P = fuerza axial debida a la gravedad

S = módulo de sección de las columnas

T = periodo natural

U = velocidad espectral de diseño

V = cortante de entrepiso

α = coeficiente que afecta al periodo fundamental

$\alpha_i = K_i^{(0)}/K_i^{(1)}$

β = coeficiente que afecta al periodo fundamental

γ = coeficiente que relaciona el periodo y la velocidad espectral en restricción de esfuerzo

δ = deformación de entrepiso

$\epsilon = \beta^{-1/2} - 1$

σ = esfuerzo máximo en columnas

Tabla C1. Ejemplo C1

1 i	2 P ton	3 $I_{inicial}$ cm^4	4 I_{final} cm^4	5 $\delta_{inicial}$ cm	6 δ_{final} cm	7 $\sigma_{inicial}$ kg/cm^2	8 σ_{final} kg/cm^2
8	18.144	16649.26	4732.55	0.427	1.140*	553.34	1064.49
7	36.288	16649.26	7067.61	0.693	1.143*	963.25	1352.06
6	54.432	29136.20	9840.76	0.498	1.143*	902.78	1584.79
5	72.576	29135.20	11288.20	0.592	1.046	1130.58	1690.25*
4	90.720	41623.14	14921.90	0.465	0.889	1071.52	1690.96*
3	108.864	41623.14	18913.56	0.513	0.770	1235.35	1690.96*
2	127.008	66597.03	23242.36	0.343	0.678	1043.40	1690.96*
1	145.152	66597.03	27546.20	0.358	0.599	1149.57	1691.66*

*Restricción activa, entre ± 1%.

Tabla C2. Ejemplo C2

1 i	3 $I_{inicial}$ cm^4	4 I_{final} cm^4	5 $\delta_{inicial}$ cm	6 δ_{final} cm	7 $\sigma_{inicial}$ kg/cm^2	8 σ_{final} kg/cm^2
8	5327.76	4724.23	1.135*	1.151*	1064.49	1070.12
7	7783.53	7096.75	1.130*	1.143*	1338.00	1352.76
6	9573.32	8915.68	1.128	1.140*	1562.29	1579.87
5	11945.84	11450.53	1.052	1.034	1682.52*	1679.00*
4	22185.14	15163.31	0.630	0.879	1357.69	1677.60*
3	22185.14	19234.05	0.699	0.762	1574.94	1676.89*
2	47159.02	23666.92	0.353	0.668	1134.10	1675.49*
1	47492.01	28091.46	0.363	0.589	1250.11	1674.08*

*Restricción activa, entre ± 1%.

Tabla C3. Ejemplo C3

1 i	3 $I_{inicial}$ cm^4	4 I_{final} cm^4	5 $\delta_{inicial}$ cm	6 δ_{final} cm	7 $\sigma_{inicial}$ kg/cm^2	8 σ_{final} kg/cm^2
8	4724.23	4045.77	1.189	1.135*	1095.43	1059.57
7	7096.75	4778.34	0.975.	1.135*	1232.53	1388.62
6	8915.68	5127.97	0.864	1.110	1371.05	1680.41*
5	11450.53	6917.77	0.734	0.833	1436.43	1681.11*
4	15163.31	9448.45	0.607	0.673	1443.46	1681.82*
3	19234.05	12679.41	0.536	0.577	1471.59	1683.22*
2	23666.92	16886.51	0.503	0.523	1515.18	1683.92*
1	28091.46	21173.69	0.462	0.467	1547.52	1683.92*

*Restricción activa, entre ± 1%

L ista de figuras Apendice C

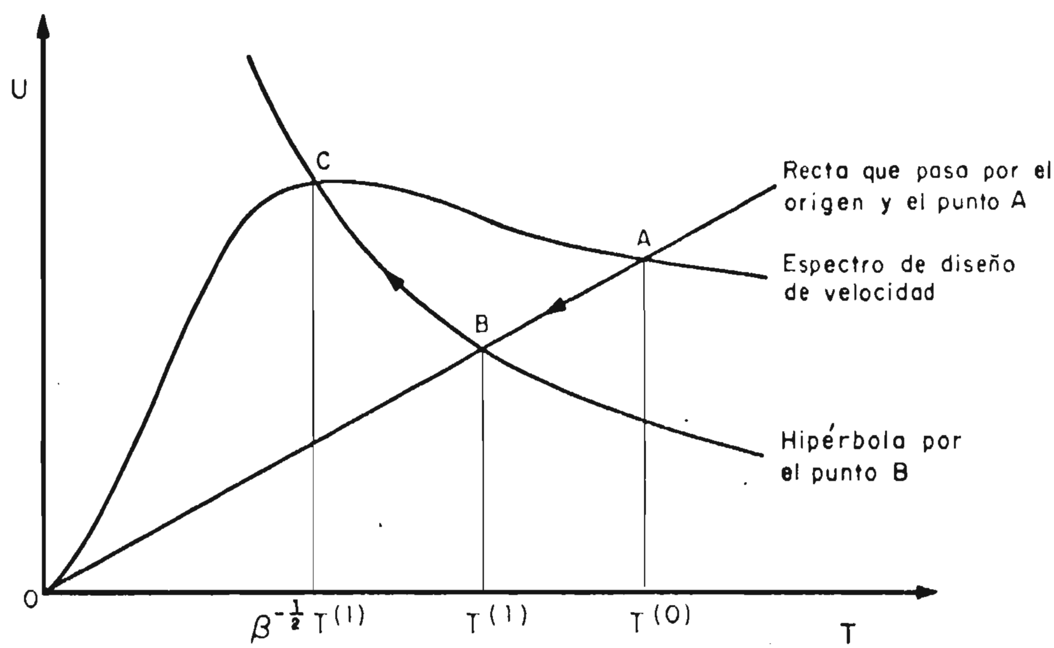

Fig C1. Pasos en el procedimiento de optimización

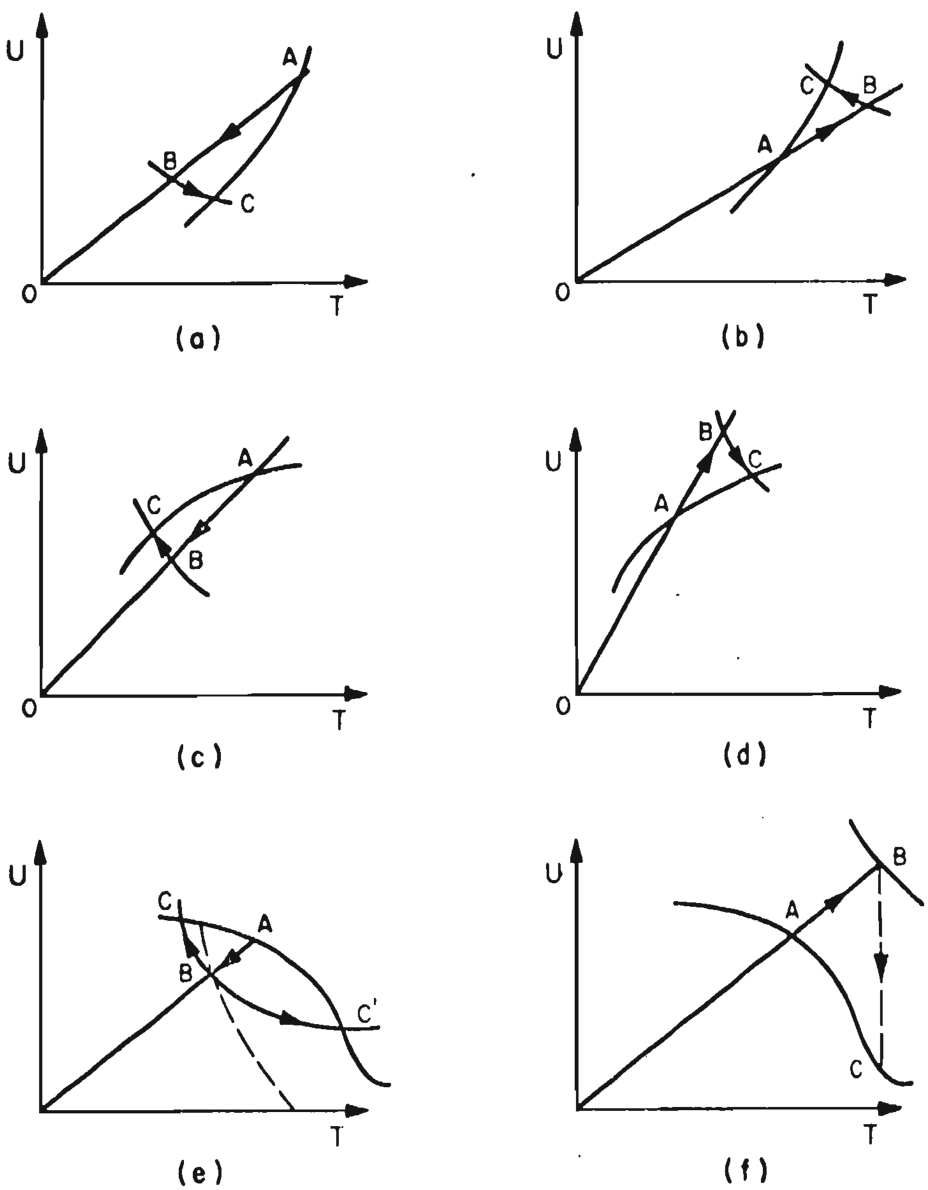

Fig C2. Condiciones representativas en el procedimiento de optimización

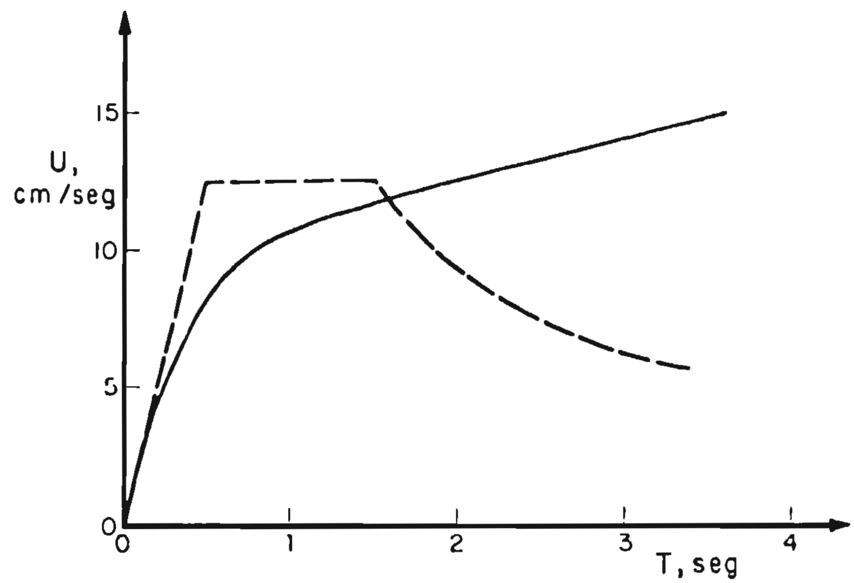

Fig C3. Espectro de diseño de velocidad

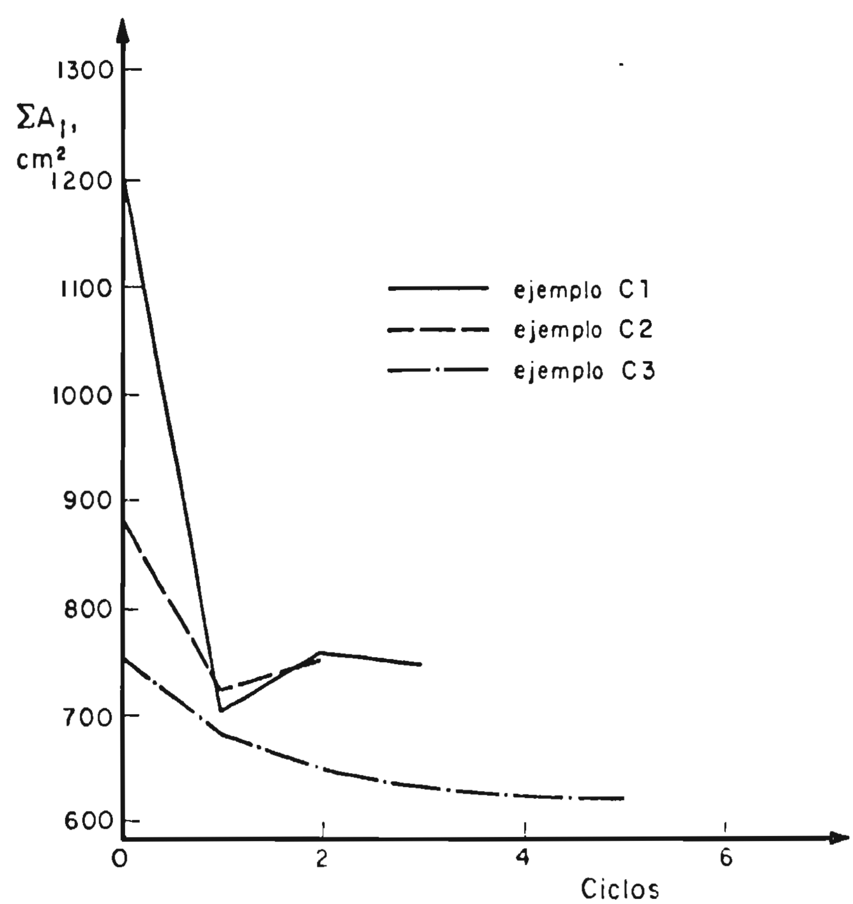

Fig C4. Evolución de la función de objetivo

Tabla 1 Ejemplo 1, áreas y esfuerzos máximos

	Estado inicial		Iteración 1		Iteración 2		Estado final	
VIGA	A, cm^2	σ, ton/cm^2	A, cm^2	σ, ton/cm^2	A, cm^2	σ, ton/cm^2	A, cm^2	σ, ton/cm^2
1	43.49	1.049	62.27	0.960	64.86	0.914	62.69	0.924
2	95.93	0.742	96.33	0.851	93.81	0.887	95.25	0.882
3	229.63	0.332	133.61	0.719	129.02	0.790	131.07	0.793
4	65.60	1.093	98.13	0.987	93.01	1.048	90.55	1.057
5	84.93	0.800	50.77	1.757	53.79	1.699	57.01	1.627
6	47.87	1.651	46.39	1.896	51.69	1.757	56.03	1.656
7	46.06	1.603	43.76	1.932	49.51	1.778	54.08	1.649
8	54.89	1.459	48.98	1.749	51.72	1.754	55.99	1.669
COL.								
1	64.77	0.566	30.67	1.001	22.33	0.999	16.60	0.962
2	69.36	0.871	43.85	0.996	32.18	1.073	24.81	1.130
3	121.29	0.654	65.28	0.913	44.36	1.153	35.97	1.246
4	120.52	0.650	60.22	1.005	42.79	1.088	32.86	1.152
5	64.77	1.185	98.88	0.748	105.96	0.698	106.42	0.696
6	69.36	1.075	113.64	0.712	126.20	0.651	124.90	0.681
7	121.32	0.789	142.53	0.581	155.34	0.561	156.45	0.583
8	120.52	0.765	105.75	1.058	125.62	1.042	132.11	1.059
9	64.77	1.078	47.01	1.454	43.87	1.573	44.19	1.588
10	69.39	0.622	33.83	1.259	28.90	1.461	27.64	1.477
11	121.34	0.386	44.35	1.241	36.89	1.579	37.46	1.635
12	120.52	0.724	65.51	0.997	46.52	1.224	39.09	1.385

Tabla 2 Ejemplo 1, valores de δ en centímetros

Piso	Estado inicial	Iteración 1	Iteración 2	Estado final
1	0.694	0.958	0.970	0.990
2	0.759	0.858	1.007	1.077
3	0.770	0.778	0.853	0.908
4	0.851	0.962	0.985	1.021

Tabla 3 Ejemplo 2, áreas y esfuerzos máximos

VIGA	Estado inicial A, cm^2	Estado inicial σ, ton/cm^2	Iteración 1 A, cm^2	Iteración 1 σ, ton/cm^2	Iteración 2 A, cm^2	Iteración 2 σ, ton/cm^2	Iteración 3 A, cm^2	Iteración 3 σ, ton/cm^2	Iteración 4 A, cm^2	Iteración 4 σ, ton/cm^2	Iteración 5 A, cm^2	Iteración 5 σ, ton/cm^2	Estado final A, cm^2	Estado final σ, ton/cm^2
1	128.00	0.343	62.30	0.890	63.16	0.791	63.61	0.781	60.29	0.823	59.27	0.829	60.96	0.821
2	128.00	0.471	67.76	1.067	70.21	1.079	69.83	1.114	71.38	1.111	71.19	1.129	68.49	1.168
3	128.00	0.528	138.50	0.652	136.51	0.702	145.15	0.693	151.55	0.678	140.71	0.725	152.59	0.672
4	128.00	0.536	50.36	1.407	54.44	1.353	49.04	1.464	46.25	1.535	53.94	1.387	58.43	1.319
5	128.00	0.343	62.30	0.890	63.16	0.791	63.61	0.781	60.29	0.823	59.27	0.829	60.96	0.821
6	128.00	0.471	67.76	1.067	70.21	1.079	69.83	1.114	71.38	1.111	71.19	1.129	68.49	1.168
7	128.00	0.528	138.50	0.652	136.51	0.702	145.15	0.693	151.55	0.678	140.71	0.725	152.59	0.672
8	128.00	0.536	50.36	1.407	54.44	1.353	49.04	1.464	46.25	1.535	53.94	1.387	58.43	1.319
COL.														
1	163.20	0.253	75.29	0.610	96.05	0.546	98.12	0.558	94.64	0.600	93.21	0.611	96.18	0.591
2	163.20	0.274	38.74	1.022	27.62	1.075	20.65	1.164	16.41	1.219	13.50	1.292	11.77	1.290
3	163.20	0.328	43.09	1.136	33.09	1.330	28.87	1.432	26.86	1.516	26.02	1.580	26.41	1.563
4	163.20	0.484	57.02	0.929	37.59	1.124	28.80	1.293	24.64	1.399	22.44	1.465	21.52	1.500
5	163.20	0.261	75.58	0.546	35.00	0.929	23.72	1.039	17.44	1.128	13.58	1.166	10.96	1.228
6	163.20	0.340	125.12	0.573	139.68	0.550	142.94	0.576	137.44	0.624	140.35	0.605	144.54	0.613
7	163.20	0.411	226.01	0.425	244.88	0.381	261.14	0.368	269.25	0.363	252.27	0.371	212.22	0.465
8	163.20	0.547	167.33	0.876	182.12	0.873	199.46	0.854	208.66	0.841	192.89	0.887	183.83	0.922
9	163.20	0.253	75.29	0.610	96.05	0.546	98.12	0.558	94.65	0.600	93.21	0.611	96.18	0.591
10	163.20	0.274	38.74	1.022	27.62	1.075	20.65	1.164	16.41	1.219	13.50	1.292	11.77	1.290
11	163.20	0.328	43.09	1.136	33.09	1.330	28.87	1.432	26.86	1.516	26.02	1.580	26.41	1.563
12	163.20	0.484	57.02	0.929	37.59	1.124	28.80	1.293	24.64	1.399	22.44	1.465	21.52	1.500

Tabla 4 Ejemplo 2, valores de δ en centímetros

Piso	Estado inicial	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3	Iteración 4	Iteración 5	Estado final
1	0.373	0.858	0.850	0.833	0.819	0.872	0.908
2	0.483	0.967	1.019	1.035	1.032	1.088	1.076
3	0.358	0.764	0.900	0.991	1.042	1.092	1.059
4	0.282	0.729	0.739	0.733	0.751	0.739	0.752

Lista de figuras

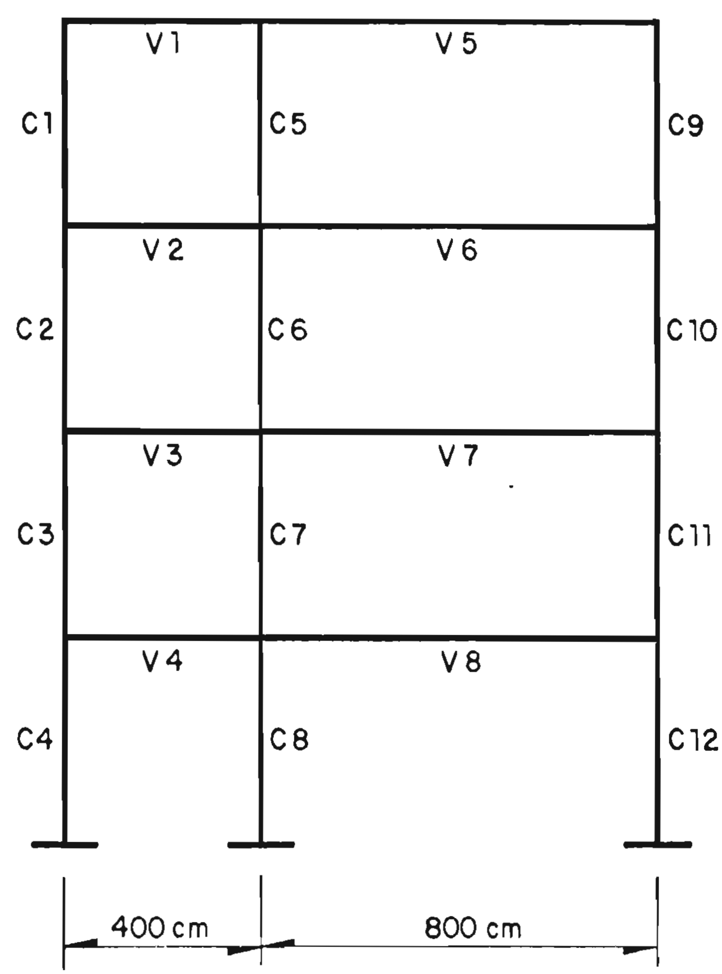

Fig 1 . Marco , ejemplo 1

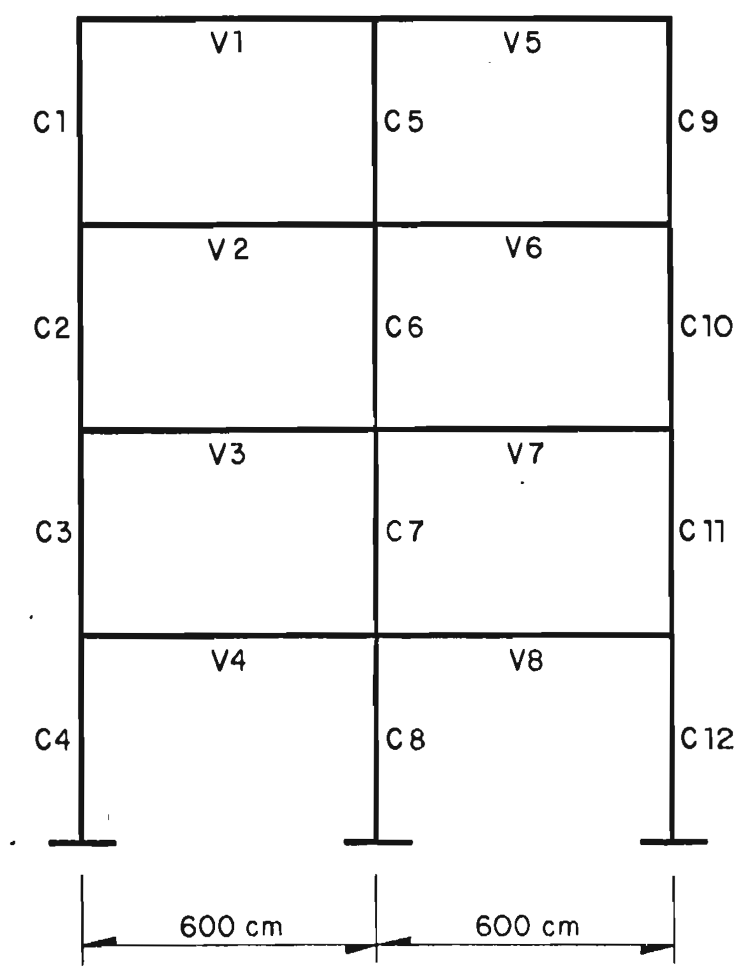

Fig 2 . Marco , ejemplo 2

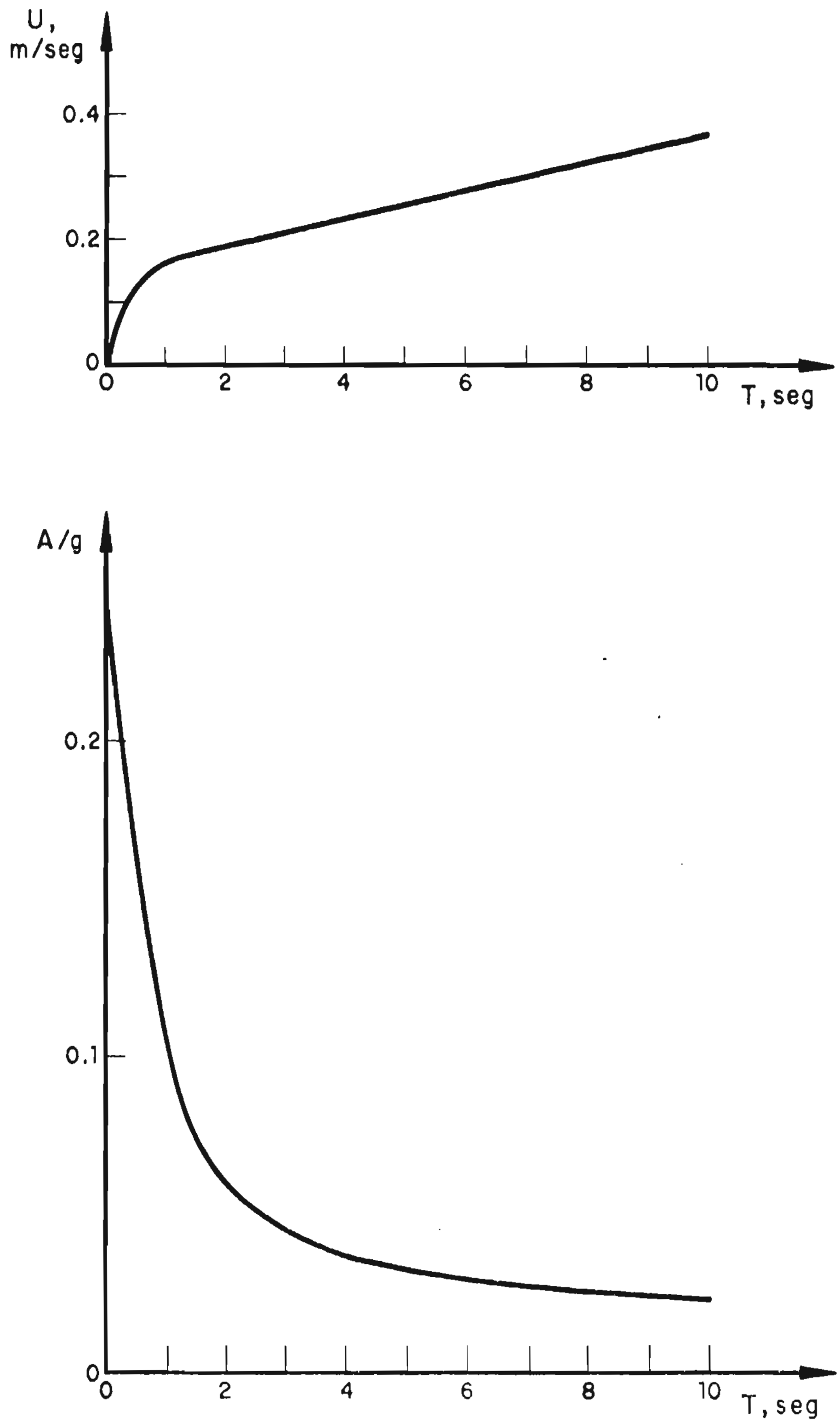

Fig 3 . Espectros de diseño de velocidad y aceleración

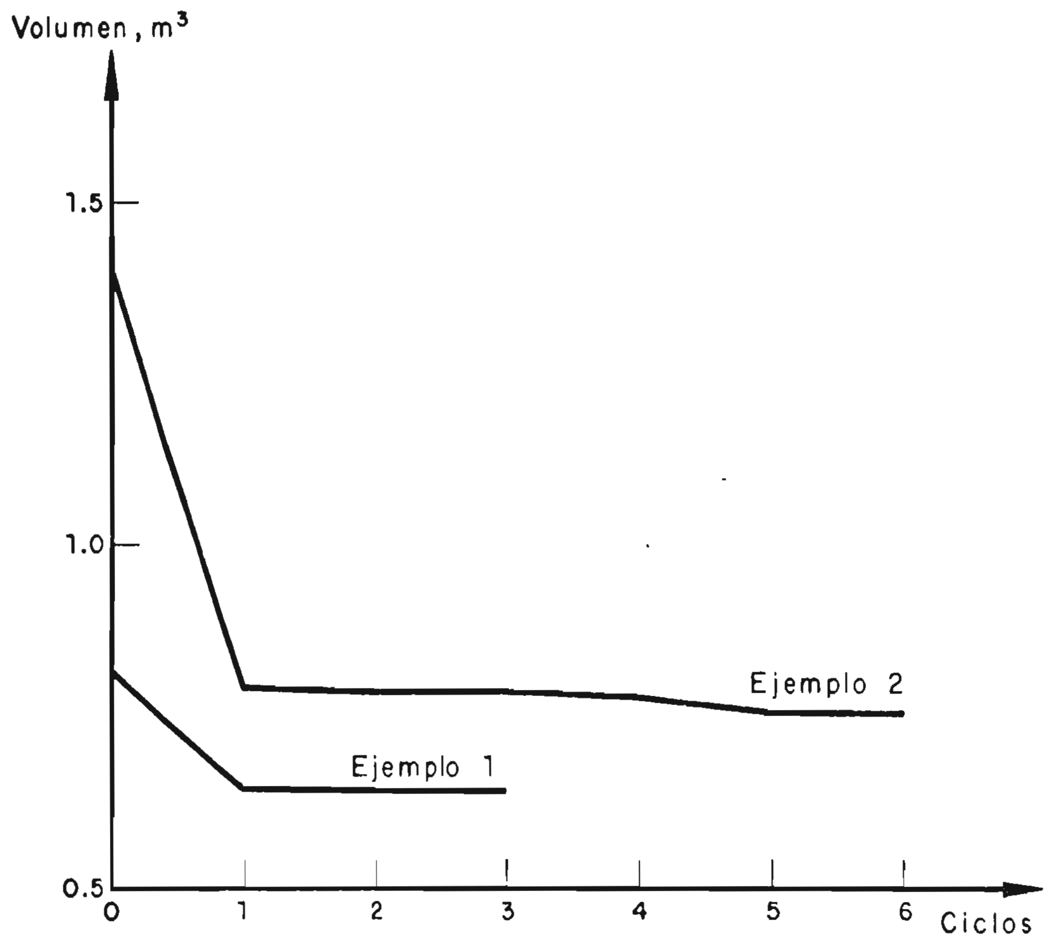

Fig 4. Evolución de la función de objetivo

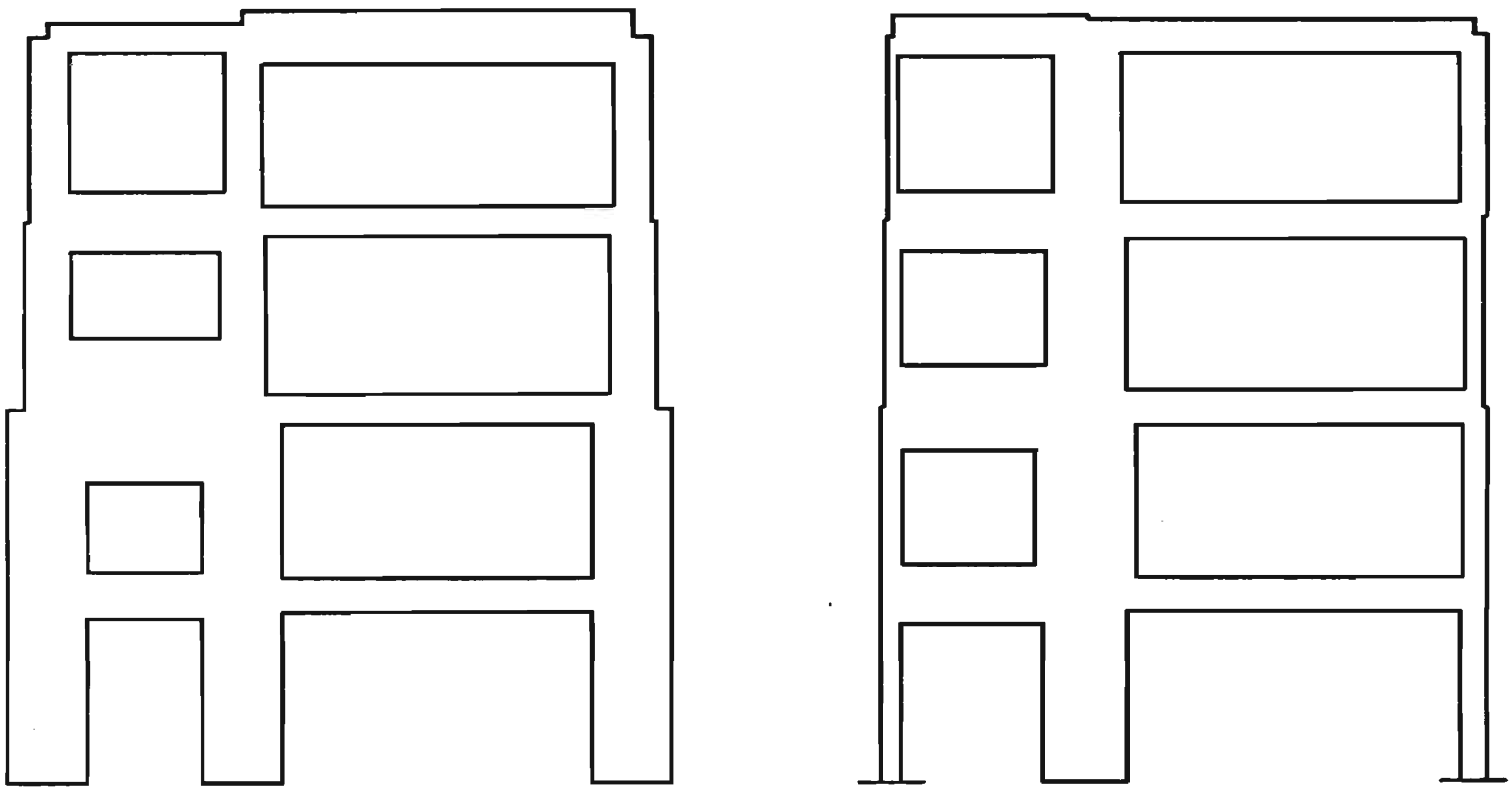

Fig 5. Distribución de áreas iniciales y finales, ejemplo 1

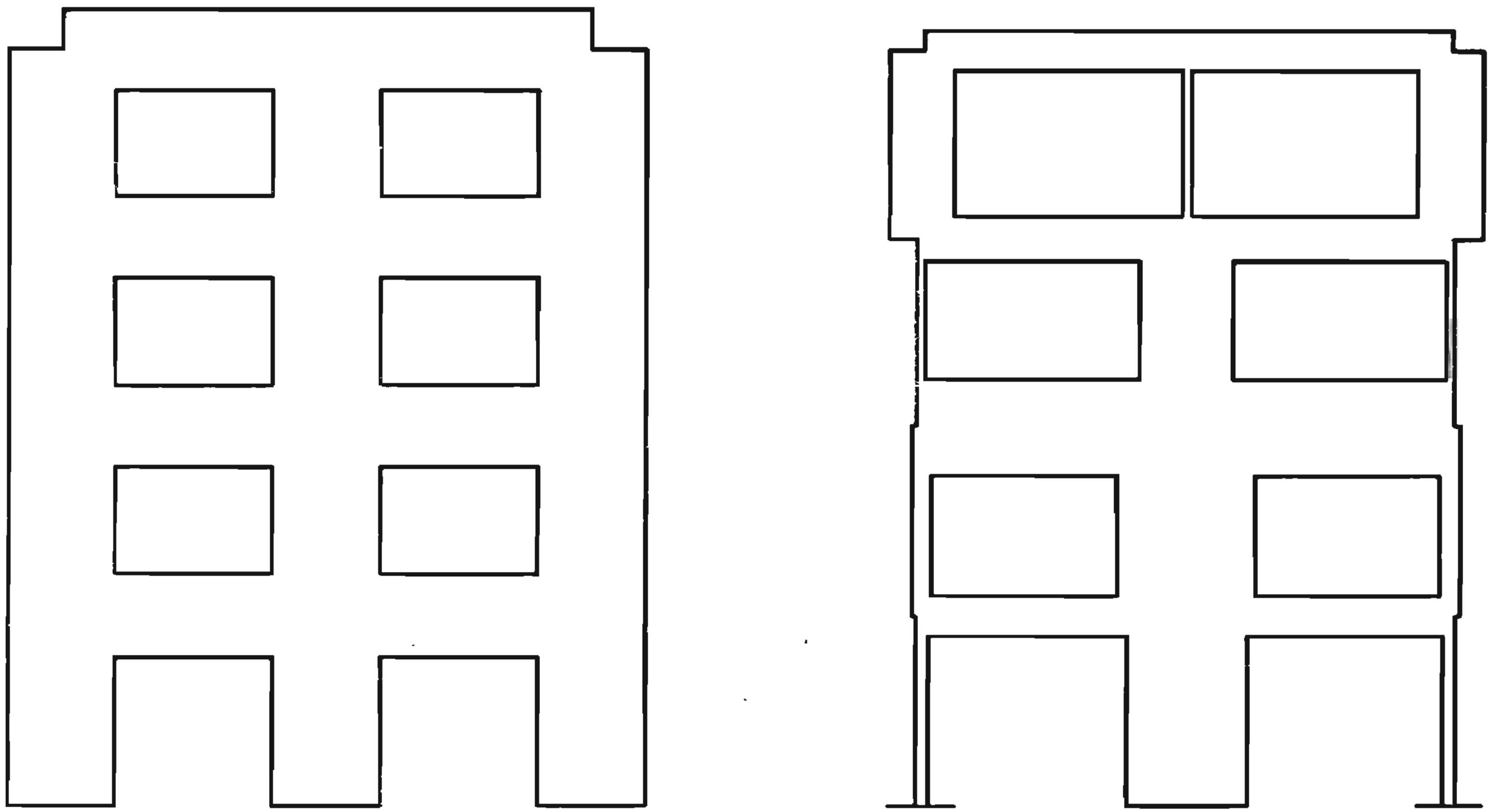

Fig 6. Distribución de áreas iniciales y finales, ejemplo 2

ANALISIS DEL FLUJO LLAMADO PELICULAS DE COMPRESION (SQUEEZEFILM).

Trabajo desarrollado por el alumno Francisco E. Avila Segura para presentar examen de grado de maestría en Ingeniería Mecánica.

División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, U N A M.