

T-530

0654

H
DES

01149

64

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

FACULTAD DE INGENIERIA

495

EL PROBLEMA DE REDES Y SU
METODO DE SOLUCION

TESIS DE MAESTRÍA
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INVESTIGACIÓN DE
OPERACIONES PRESENTA:

Luis A. Hernández Fernández

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Sergio Fuentes Maya.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
SECCION DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

TESIS QUE PRESENTA EL

ING. LUIS ALBERTO HERNANDEZ FERNANDEZ

para obtener el grado de

MAESTRO EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

CREDITOS POR TESIS II (ONCE)

JURADO:

Presidente: M. EN I. LEONARD RAPOPORT YAWITZ 


Vocal: DR. SERGIO FUENTES MAYA 

Secretario: DR. JOSE DE JESUS ACOSTA FLORES 

Suplente: M. EN I. JESUS LARA TEJEDA 

Suplente: M. EN I. MANUEL SANCHEZ VALDENEGRO 

JEFE DE LA SECCION


DR. SERGIO FUENTES MAYA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

INDICE

CAPÍTULO I: INTRODUCCION

CAPÍTULO II: CONCEPTOS BASICOS DE REDES

Definiciones elementales

Matriz de incidencia nodos-arcos

Cadena, trayectoria, circuito, ciclo.

Algunos conceptos de redes

Red simple, reducida, circulatoria, conexa
inconexa, árbol.

CAPÍTULO III: EL PROBLEMA GENERAL DE REDES

El problema de redes con flujos restringidos
y costo mínimo.

El problema dual

Condiciones de optimalidad del problema de redes

Propiedades de la matriz de coeficientes

Soluciones enteras

CAPÍTULO IV EL METODO DE SOLUCION DEL PROBLEMA DE REDES

La formulación del problema de redes con costo
mínimo.

La estructura dual y sus propiedades

Las condiciones de holgura complementaria

Los números Kilter para un arco

La estrategia del algoritmo Out-of-Kilter

La no-factibilidad del problema cuando $\theta = \infty$

Convergencia del algoritmo Out-of-Kilter

Resumen del algoritmo

CAPÍTULO V: CASOS ESPECIALES

Transformación del problema $Ax=d$ a la forma

$Ax=0$

El problema del transporte

El problema de asignación

El problema de flujo máximo

El problema de ruta más corta

APENDICE I: EL PROGRAMA DE REDES

Entrada de datos y salida de resultados

Diagrama de flujo

Variables y arreglos del programa

Listado

APENDICE II: SOLUCION MANUAL

Organización de los cálculos

Procedimiento de etiquetación

Ejemplo.

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo trata sobre la parte de la programación lineal denominada redes de flujo, en particular sobre el algoritmo desarrollado por L. R. Ford & D. R. Fulkerson, con el nombre de algoritmo Out-of-Kilter para resolver el problema general de redes con flujos restringidos y costo mínimo. La importancia práctica de este problema se encuentra en el hecho de que una buena cantidad de la literatura de la programación lineal esta dedicada a su estudio y una variedad de aplicaciones estan en su dominio. Los problemas de transporte que involucran cientos de restricciones y miles de variables pueden ser resueltos, mientras que para resolver un problema de programación lineal de estas dimensiones por el método simplex, es actualmente una tarea casi imposible. Cabe mencionar también que una variedad de problemas de la programación lineal (Transporte, flujo máximo, ruta más corta, asignación, distribución etc.), pueden ser formulados en el marco de redes y resueltos con el algoritmo Out-of-Kilter.

Algunos modelos de transporte con costo mínimo fueron estudiados independientemente por Hitchcock, Kantorovitch y Koopmans en los años 40's. Poco más tarde, cuando la programación lineal empezó a conocerse como una disciplina organizada, Dantzig (1951) demostró como podría ser simplificado su algoritmo general

para el caso especial del problema del transporte, además de que observó la importancia de las soluciones enteras en estos problemas. Sin considerar los aspectos de formulación y aplicación del tema, podemos mencionar los trabajos de König, Egerváry y Menger en el campo de teoría de gráficas.

El trabajo se desarrolla como sigue: En el capítulo II se presentan algunas definiciones básicas de redes, con el propósito de unificar conceptos. En el capítulo III se introduce el problema de redes con flujos restringidos y costo mínimo y se muestra la obtención del problema dual. A continuación se establecen las condiciones de optimalidad y algunas propiedades importantes de la matriz de coeficientes. En el capítulo IV se presenta la estrategia del algoritmo Out-of-Kilter para que un arco no conformable pase a ser conformable, se muestra también la no factibilidad del problema cuando $\theta = \infty$ y se prueba la convergencia del algoritmo. El capítulo V se concentra en las aplicaciones y los casos especiales. El trabajo contiene también dos apéndices, en el apéndice I se presenta el programa "REDES" que resuelve el problema de redes con flujo restringido y costo mínimo, se ilustra también con un ejemplo la forma de alimentar los datos para que sea resuelto por la computadora. El apéndice II muestra la organización de cálculos y solución del mismo problema presentado en el apéndice I, pero ahora resuelto manualmente.

Deseo agradecer especialmente al Dr. Sergio Fuentes Maya, Coordinador de la Sección de Investigación de Operaciones, la supervisión y dirección del presente trabajo. Quiero también agradecer a la Srita. Magdalena Quiroz, por la labor de mecanografía que tan eficientemente realizó.

CAPITULO II

CONCEPTOS BASICOS DE REDES

En este capítulo se presentan algunas de las definiciones básicas de la teoría de redes. El propósito de la presentación es unificar las definiciones usadas pues es común encontrar en la literatura definiciones diferentes para el mismo término.

El capítulo se desarrolla como sigue: En la primera parte se introducen algunos conceptos elementales de teoría de gráficas, como la forma de caracterizar una gráfica dirigida a través de su matriz de incidencia nodos-nodos y nodos-arcos. Se definen también los conceptos de cadena, trayectoria, circuitos y ciclo. Se mencionan algunos ejemplos para ilustrar estos conceptos. En la segunda parte del capítulo, se introduce de manera natural al concepto de red, que es la gráfica dirigida más importante para nuestros propósitos. Se ilustran también algunos tipos de redes que serán importantes a través del trabajo, como la red simple, la red reducida y la red circulatoria. También se menciona que toda red reducida puede fácilmente transformarse en red circulatoria, y se muestra gráficamente esta transformación. Al final del capítulo se presenta la forma de caracterizar un árbol, así como un teorema relativo a la formación de árboles en redes. También se muestra para concluir, la equivalencia entre árboles y soluciones básicas.

2.1 Definiciones elementales

GRAFICA DIRIGIDA:

Se denota por $G = (N,A)$ y consiste de un conjunto finito N cuyos elementos se denominan nodos y un conjunto A formado por pares ordenados de nodos, los que se denominan arcos.

La forma clásica de dibujar una gráfica dirigida, es proceder a dibujar círculos pequeños que no intersecten, para caracterizar cada nodo $i, j \in N$, y dibujar para cada arco $(i,j) \in A$, una línea o flecha dirigida del nodo i al nodo j . Por ejemplo la gráfica dirigida que se muestra en la figura consiste de cuatro nodos s, x, y, t , y seis arcos (s,x) , (s,y) , (x,y) , (y,x) , (x,t) y (y,t) .

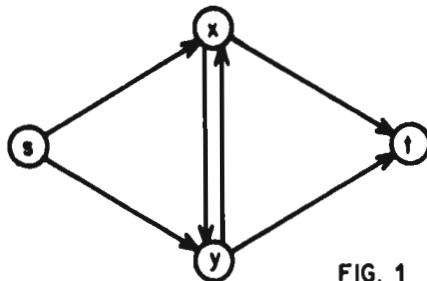


FIG. 1

Esta gráfica se dice que es dirigida porque cada arco tiene una orientación o dirección específica. También puede haber gráficas no dirigidas en que todos los arcos no tengan dirección específica, o también gráficas mixtas en las cuales algunos arcos son dirigidos y otros no. Podemos dibujar este tipo de gráficas en la misma forma, solo que omitiendo las flechas en los arcos que no tienen alguna orientación. Note

que en una gráfica dirigida podemos tener arcos de la forma (i,i) y que el arco (i,j) es diferente del arco (j,i) .

Ejemplo: Considere la gráfica dirigida $G = (N,A)$ donde $N = \{1,2,3\}$, $A = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,2)\}$

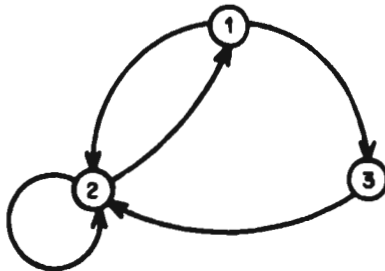


FIG. 2

MATRIZ DE INCIDENCIA NODOS-NODOS:

Consiste en una matriz Q de orden $n \times n$, donde n es el número de nodos. En la matriz $Q = (q_{ij})$ se tiene que $q_{ij} = 1$, si existe un arco que va del nodo i al nodo j ; de otra manera $q_{ij} = 0$.

La matriz de incidencia nodos-nodos asociada a la gráfica dirigida del ejemplo anterior es

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Claramente, toda la información acerca de la estructura de la gráfica esta caracterizada en su matriz de incidencia nodos-nodos.

MATRIZ DE INCIDENCIA NODOS-ARCOS:

Consiste en una matriz P de orden $m \times n$, donde m es el número de nodos y n el número de arcos, los cuales han sido previamente numerados. En la matriz $P = (p_{ij})$ se tiene que $p_{ij} = 1$ si el nodo i parte del arco con número j . Asimismo, $p_{ij} = -1$ si al nodo i llega el arco con número j . En otros casos, $p_{ij} = 0$.

Es conveniente hacer notar que esta caracterización es solo aplicable cuando no hay arcos de la forma (i,i) en la gráfica dirigida. La matriz de incidencia nodos-arcos asociada a la gráfica dirigida de la figura 1 es P .

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{c} (s,x) \\ (s,y) \\ (x,y) \\ (y,x) \\ (x,t) \\ (y,t) \end{array} \\ \begin{array}{c} s \\ x \\ y \\ t \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

CADENA:

Una cadena del nodo i al nodo j es la sucesión de nodos distintos de N , denotados por $i = i_1, \dots, i_r = j$, y arcos de A , denotados por a_1, a_2, \dots, a_r , tales que $a_t = (i_t, i_{t+1})$, donde $t = 1, \dots, r-1$. En aquellos casos en que no hay ambigüedad, solo se especifican los nodos que forman la cadena.

Ejemplo. Una cadena de 2 a 3 en la gráfica de la figura 2 es: Nodos 2,1,3 ; Arcos (2,1), (1,3).

TRAYECTORIA:

Si en la definición de cadena se permite que cada arco pueda tener la forma $a_t = (i_t, i_{t+1})$ ó bien $a_t = (i_{t+1}, i_t)$ donde $t = 1, \dots, r-1$ entonces la sucesión resultante se denomina trayectoria del nodo i al nodo j .

Ejemplo: Una trayectoria de 3 a 1 en la gráfica de la figura 2 es; Nodos: 3,1; Arcos: (1,3).

CIRCUITO:

Es una cadena en que el nodo inicial es igual al nodo final.

Ejemplo: Un circuito de 1 a 1 en la gráfica de la figura 2 es; Nodos: 1,3,2,1; Arcos: (1,3), (3,2), (2,1).

CICLO:

Es una trayectoria con el mismo nodo inicial y final.

Ejemplo: Un ciclo de 1 a 1 en la gráfica de la figura 2 es; Nodos: 1,2,3,1; Arcos: (1,2), (3,2), (1,3).

2.2 Algunos conceptos de redes

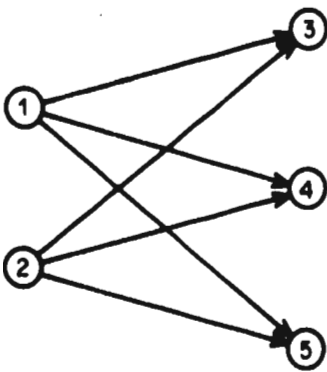
La gráfica dirigida más importante para nuestro propósito es la red. Una red es una gráfica dirigida $G = (N,A)$ en que no existen arcos de la forma $(i,i) \in A$. Es común asociar a los elementos de la red ciertos parámetros. Dado el nodo $i \in N$ se denota por d_i la "disponibilidad" en este nodo, y se dice que el nodo es de depósito destino o traspaso si d_i es positivo, negativo o cero, respectivamente.

RED SIMPLE:

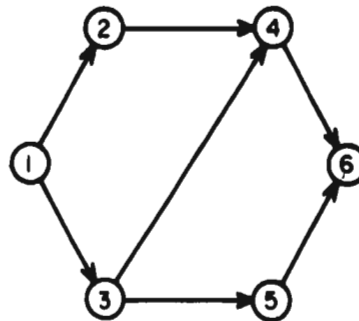
Una red $G = (N, A)$, es simple si el conjunto de nodos N puede dividirse en dos subconjuntos, N_1 y N_2 , tales que si $(i, j) \in A$ entonces, $i \in N_1$ y $j \in N_2$. Asimismo se cumple que $d_i \geq 0$ si $i \in N_1$ y $d_j < 0$ si $j \in N_2$.

RED REDUCIDA:

Una red $G = (N, A)$, es reducida si tiene un solo depósito s y un solo destino r , y no existen arcos de la forma (i, s) o (r, j) donde $i, j \in N$.

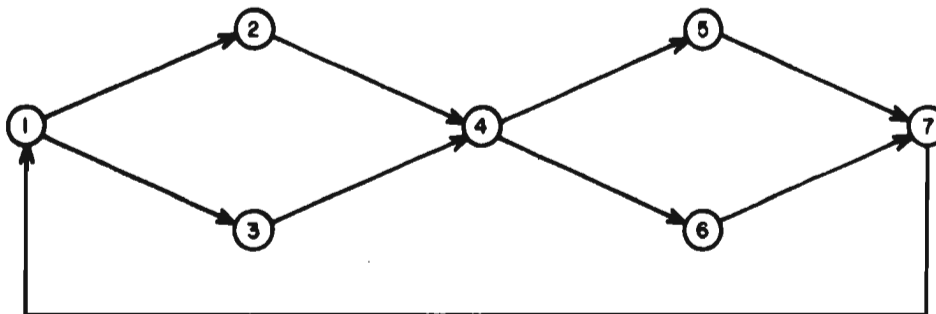


RED SIMPLE



RED REDUCIDA

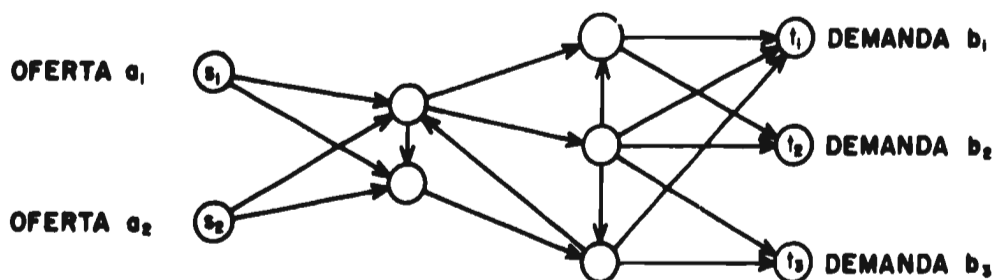
Una red esta en forma circulatoria si todos sus nodos son de traspaso.



RED CIRCULATORIA

Mencionaremos que toda red reducida puede fácilmente transformarse en red circulatoria.

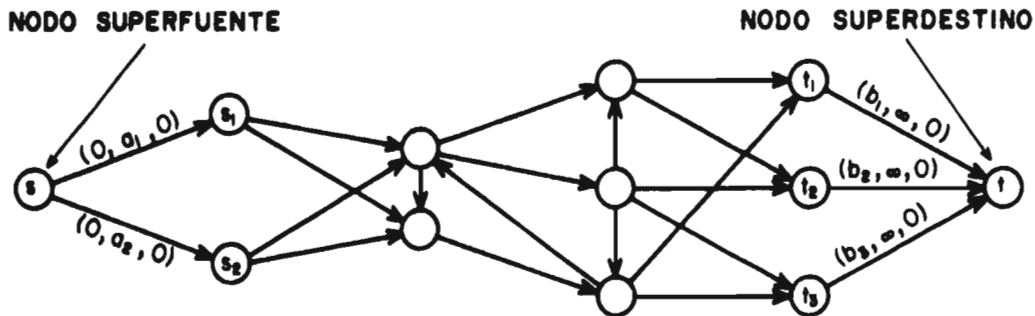
Para convertir una red ^{simple} reducida que tiene varios nodos fuente (depósito), por ejemplo (s_1, s_2) y varios nodos destino por ejemplo (t_1, t_2, t_3) como la que se muestra en la figura, a una red circulatoria, hay



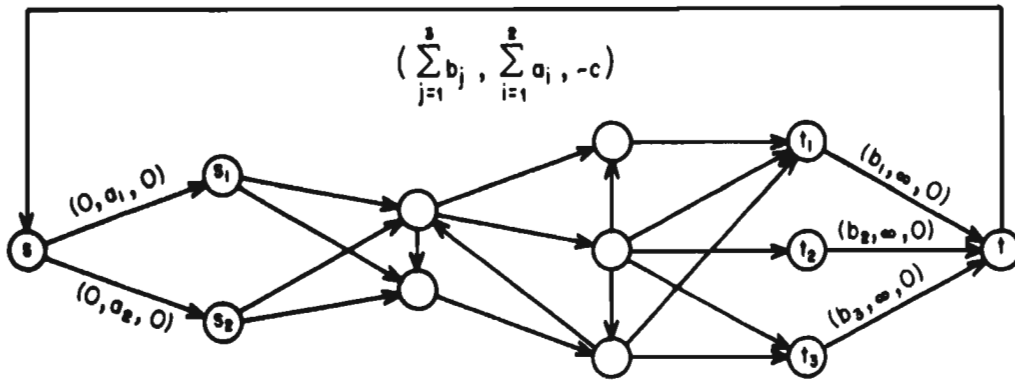
RED CON FUENTES Y DESTINOS MULTIPLES

que construir primero una red equivalente con un nodo superfuente y un nodo superdestino. Esto se logra añadiendo un nodo artificial s unido a los nodos fuente originales por arcos $(s, s_1), (s, s_2),$ etc. con costo cero, capacidad mínima cero y

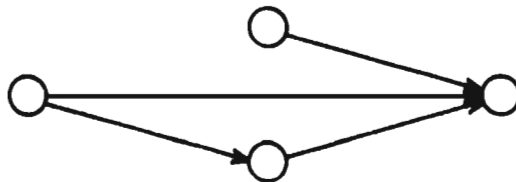
capacidad máxima igual a la oferta del nodo fuente original. Además, se construye un nodo destino artificial t , unido a los nodos destino originales por arcos $(t_1, t), (t_2, t), (t_3, t), \text{etc.}$, con costo cero, capacidad máxima infinita y capacidad mínima igual a la demanda del nodo destino original. Gráficamente se muestra en la siguiente figura.



Para convertir la red anterior (con un solo nodo fuente y un solo destino), a una red circulatoria, añádase un arco (t, s) , que una el nodo superdestino con el nodo superfuente. Este arco tendría un costo cero o negativo (para obligar a la circulación del flujo), capacidad mínima dada por la suma de todas las demandas de los destinos originales, y una capacidad máxima dada por la suma de todas las ofertas de los nodos fuentes originales. Obviamente para que el problema resulte factible, la capacidad máxima de este arco (t, s) , debe ser mayor o igual a su capacidad mínima. Gráficamente se tiene:

**RED CONEXA:**

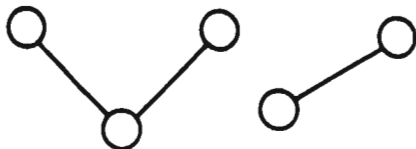
Es aquella en donde existe por lo menos una cadena que conecta a cada nodo con el resto de los nodos de la red



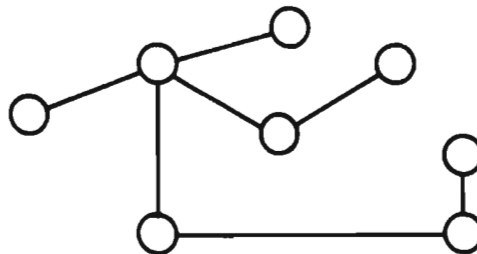
RED CONEXA

RED INCONEXA:

Es aquella que no está conectada



RED INCONEXA



ARBOL

ARBOL:

Es una red conexas que no contiene ciclos.

Existe una manera equivalente general de representar un árbol.

Un árbol, es una gráfica no dirigida, conexa, y que no contiene ciclos. Así entre dos nodos cualesquiera del árbol, hay una cadena única, uniendo los dos nodos. Para una gráfica cualquiera con n nodos, dos de las siguientes tres condiciones puedan servir como definición de árbol:

- i) Esta conectado
- ii) No hay ciclos
- iii) El número de arcos es $(n-1)$

LEMA 1. En todo árbol, existe al menos un nodo terminal.

Prueba. Para encontrar un nodo, el cual será nodo terminal, empiece seleccionando cualquier nodo, digamos p_1 , este nodo, esta unido al menos a otro nodo, digamos p_2 , por un arco. Debido a que hay un arco desde p_1 a algún p_2 , muevase a p_2 , a través del arco (p_1, p_2) . Deje p_2 y muevase a p_3 (si es posible). Debido a que el número de nodos es finito y no hay ciclos , procediendo de esta manera, se encontrará un punto p , el cual es un nodo terminal, con solamente un arco (p, q) , uniendolo al resto de la red.

Teorema 1. Una red con n nodos, es un árbol si tiene $(n-1)$ arcos y no contiene ciclos.

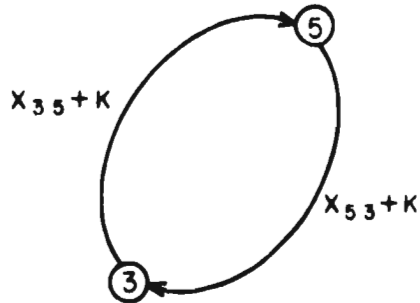
Prueba. El teorema es claro para dos nodos, consideremos que es verdadero para $n-1$ nodos. Considere el caso de n nodos, observe que existe un nodo terminal p (lema 1), si quitamos un nodo terminal que denotamos por p , y su arco (p,q) , entonces la red queda con $(n-1)$ nodos, $(n-2)$ arcos, y puesto que no contiene ciclos, esta conectada por consideraciones inductivas. Si el nodo p , y su arco (p,q) son reinsertados, será posible conectar p a cualquier otro nodo vía q , lo cual prueba que una red con n nodos, $(n-1)$ arcos, y sin ciclos, esta conectada y por lo tanto forma un árbol.

Definición. Considere el sistema de ecuaciones $Ax=b$, donde A es una matriz $m \times n$, b , es un vector en R^m , y x un vector de n incógnitas. Suponga que B es una submatriz de A de $m \times m$ que es no singular y que los $n-m$ componentes del vector x no asociados a las soluciones de B se hacen igual a cero. Entonces, la solución del conjunto de ecuaciones, resultantes se denomina una solución básica con respecto a la base B . Asimismo se dice que los componentes de x asociados a las columnas de B se denominan las variables básicas.

Teorema 2. Una subred correspondiente a un conjunto de variables básicas, es un árbol.

Prueba. Si la subred de $(n-1)$ arcos, correspondiente a los $(n-1)$ variables básicas, no contiene ciclos, entonces forma un árbol. Resta demostrar que un conjunto de variables no básicas pueden

formar un ciclo. Supongamos, por ejemplo, que x_{35} y x_{53} están en el conjunto de variables básicas como se ilustra en la siguiente figura:



este fuera el caso, los valores de las variables básicas en el ciclo, podrían ser alterados, mientras que los valores de las demás variables permanecerían constantes, produciendo una segunda solución de las ecuaciones de transporte. Esto, sin embargo, contradice la unicidad de las soluciones básicas, por lo que el conjunto de variables básicas, no pueden incluir un ciclo.

CAPITULO III

EL PROBLEMA GENERAL DE REDES

Una clase general de problemas de redes queda resumida en el denominado problema de redes con flujos restringidos y costo mínimo. Una característica importante de este problema es que siendo uno de programación lineal tiene métodos de solución más sencillos y eficientes que el simplex revisado y sus variantes.

Una de las razones por la cual existe gran concentración en los problemas de esta área es debido a que los grandes problemas de transporte que involucran cientos de restricciones y miles de variables pueden ser fácilmente resueltos por medio de las técnicas de optimización de redes, mientras que para resolver un problema general de programación lineal de estas dimensiones, actualmente es una tarea imposible.

El capítulo se desarrolla como sigue: primero se introduce el problema de redes con flujos restringidos y costo mínimo y se muestra la obtención del problema dual. A continuación se establecen las condiciones de optimalidad del problema de redes a través de las condiciones de complementariedad. Al final del capítulo se mencionan algunas propiedades importantes de la matriz de coeficientes A , del problema de flujo con costo mínimo.

3.1 El problema de redes con flujos restringidos y costo mínimo

El problema consiste en considerar una red circulatoria en que los flujos permitidos en cada arco están sujetos a cotas superiores e inferiores, y donde además se tiene un costo por unidad de flujo que pasa en cada arco. El objetivo que se persigue es determinar el flujo en la red que proporcione el costo mínimo.

Consideremos la red circulatoria $G = (N, A)$. Supongamos que $0 \leq a_{ij} \leq b_{ij} \leq +\infty$ son los flujos mínimo y máximo permitidos en cada arco $(i, j) \in A$, y denotemos por c_{ij} el costo por unidad de flujo que pasa por este arco. Entonces se desea

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = 0 \quad i \in N$$

$$a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad (i,j) \in A$$

donde el vector de variables de decisión, $x = (x_{ij})$, se denomina flujo de la red. Este es el denominado problema de redes con flujos restringidos y costo mínimo.

En este problema se dice que un flujo que satisface las restricciones en los nodos es un flujo circulatorio. Asimismo, un flujo que satisface todas las restricciones del problema se dice que es un flujo factible. Por otra parte, un flujo factible que es

una solución básica de las restricciones del problema de redes, se dice que es un flujo factible básico. Finalmente, un flujo factible, $x = (x_{ij})$, se dice que es entero si para cada arco (i,j) el flujo, esto es x_{ij} , es cero o un número entero positivo. La misma terminología se aplica para el caso de flujos factibles básicos que son enteros.

Es conveniente puntualizar que una gran variedad de problemas prácticos pueden formularse como el de flujos restringidos con costo mínimo. Ejemplos particulares son el de la ruta más corta, el del flujo máximo entre dos nodos de una red, el de transporte, el de distribución de bienes y otros. Es también conveniente puntualizar que si los flujos mínimo y máximo permitidos en cada arco de la red son números enteros, entonces los flujos factibles básicos (y óptimos) son enteros. Esta propiedad de garantizar que las soluciones óptimas sean enteras no es propiedad general de los problemas de programación lineal. Como consecuencia de esta propiedad es frecuente plantear problemas lineales cuyas soluciones deben ser necesariamente enteras, en términos de redes.

3.2 El problema dual

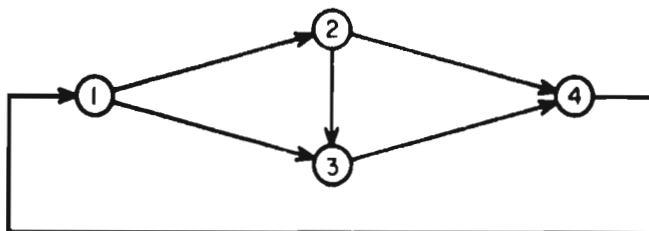
Empecemos por considerar el problema de redes formulado anteriormente en el que la red circulatoria es de la forma $G = (N,A)$, donde $N = (1,2,\dots,n)$ y A es un conjunto de arcos conocidos. Es sencillo verificar que este problema es equivalente a:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimice} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 \text{s. a.} &&& \sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_{ji}) = 0 && i=1,2,\dots,n \\
 &&& a_{ij} < x_{ij} < b_{ij} && i,j=1,2,\dots,n
 \end{aligned}$$

donde $a_{ij} = b_{ij} = 0$ si $(i,j) \notin A$. Note que estos últimos arcos el flujo es siempre $x_{ij} = 0$. También note que la nueva formulación corresponde a crear arcos ficticios en la red cuyos flujos son igual a cero. Por otra parte, para estos arcos, el valor del costo unitario c_{ij} en la función objetivo, es completamente irrelevante.

A continuación se trata de obtener la formulación dual del problema primario. La formulación dual no es fácil de obtener y por lo tanto se muestra con un ejemplo muy pequeño y de ahí tratar de generalizar.

Sea la red circulatoria de la figura:



El problema primario es:

$$\text{Min } c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34}$$

s.a. 1) Flujo que entra a un nodo es igual al flujo que sale del nodo.

	VARIABLE DUAL	
Nodo 1	$-x_{12} - x_{13} + x_{41} = 0$	u_1
Nodo 2	$-x_{23} - x_{24} + x_{12} = 0$	u_2
Nodo 3	$-x_{34} + x_{13} + x_{12} = 0$	u_3
Nodo 4	$-x_{41} + x_{24} + x_{34} = 0$	u_4

ii) Flujo en un arco \geq capacidad mínimo del arco

	VARIABLE DUAL
$x_{12} \geq a_{12}$	v_{12}
$x_{13} \geq a_{13}$	v_{13}
$x_{23} \geq a_{23}$	v_{23}
$x_{24} \geq a_{24}$	v_{24}
$x_{34} \geq a_{34}$	v_{34}
$x_{41} \geq a_{41}$	v_{41}

iii) Flujo en un arco \leq capacidad máxima del arco

	VARIABLE DUAL
$x_{12} \leq b_{12}$	w_{12}
$x_{13} \leq b_{13}$	w_{13}
$x_{23} \leq b_{23}$	w_{23}
$x_{24} \leq b_{24}$	w_{24}
$x_{34} \leq b_{34}$	w_{34}
$x_{41} \leq b_{41}$	w_{41}

El problema dual es el siguiente;

$$\begin{aligned} \text{Max } & 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 + a_{12}v_{12} + a_{13}v_{13} + a_{23}v_{23} + a_{24}v_{24} + \\ & a_{34}v_{34} + a_{41}v_{41} - b_{12}w_{12} - b_{13}w_{13} - b_{23}w_{23} - b_{24}w_{24} - \\ & b_{34}w_{34} - b_{41}w_{41} \end{aligned}$$

s.a.

$$u_1 - u_2 + v_{12} - w_{12} \leq c_{12}$$

$$u_1 - u_3 + v_{13} - w_{13} \leq c_{13}$$

$$u_2 - u_3 + v_{23} - w_{23} \leq c_{23}$$

$$u_2 - u_4 + v_{24} - w_{24} \leq c_{24}$$

$$u_3 - u_4 + v_{34} - w_{34} \leq c_{34}$$

$$u_4 - u_1 + v_{41} - w_{41} \leq c_{41}$$

$$v_{12}, v_{13}, v_{23}, v_{24}, v_{34}, v_{41} \geq 0 \quad ; \quad w_{12}, w_{13}, w_{23}, w_{24}, w_{34}, w_{41} \geq 0 \quad ; \quad u_1, u_2, u_3, u_4 \quad \text{no restringidas en signo.}$$

En términos generales, si la formulación primal de un problema de flujo máximo en una red a costo mínimo es:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a. } & \sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_{ji}) = 0 \quad i=1,2,\dots,n \\ & a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad i,j=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

el problema anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_{ji}) \geq 0 \quad i=1,2,\dots,n \\ & \sum_{j=1}^n - (x_{ij} - x_{ji}) \geq 0 \quad i=1,2,\dots,n \\ & x_{ij} \geq a_{ij} \\ & -x_{ij} \geq -b_{ij} \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\text{Min} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

s.a. Restricciones en los nodos

$$\begin{bmatrix} R \\ -R \\ I_0 \\ -I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nn} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ -b \end{bmatrix}$$

Restricciones en los arcos

$$x_{ij} \geq 0$$

El problema dual será entonces;

$$\text{Max } [s, t, v, w] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ -b \end{bmatrix}$$

s.a.

$$[s, t, v, w] \begin{bmatrix} R \\ -R \\ I_0 \\ -I_0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$s, t, v, w \geq 0$$

problema que es equivalente a:

$$\text{Max } av - bw$$

$$\text{s.a. } sR - tR + vI_0 - wI_0 \leq C$$

$$s, t, v, w \geq 0$$

haciendo $u = s - t$ la restricción queda como:

$$uR + vI_0 - wI_0 \leq C$$

u no restringida es signo ya que si:

$$s > t \Rightarrow u > 0$$

$$s = t \Rightarrow u = 0$$

$$s < t \Rightarrow u < 0$$

Finalmente el dual queda como;

$$\text{Max } a_{11}v_{11} + a_{12}v_{12} + \dots + a_{nn}v_{nn} - b_{11}w_{11} - b_{12}w_{12} - \dots - b_{nn}w_{nn}$$

$$\text{s.a. } u_1 - u_2 + v_{12} - w_{12} \leq c_{12}$$

$$u_1 - u_3 + v_{13} - w_{13} \leq c_{13}$$

.

.

.

$$u_{n-1} - u_n + v_{n-1,n} - w_{n-1,n} \leq c_{n-1,n}$$

$$u_1, u_2, \dots, u_n \text{ no restringido } \quad v_{11}, v_{12}, \dots, v_{nn}, w_{11}, w_{12}, \dots, w_{nn} \geq 0$$

que se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_{ij} - b_{ij} w_{ij}$$

$$\text{s.a. } u_i - u_j + v_{ij} - w_{ij} \leq c_{ij}$$

$$u_i \text{ no restringida } \quad ; \quad v_{ij}, w_{ij} \geq 0$$

3.3. Condiciones de optimalidad del problema de redes.

En el problema de redes equivalente y su dual se tiene que, si un flujo es factible y v, w y u son vectores de variables duales factibles, entonces estas soluciones son óptimas si y sólo si se satisfacen las condiciones de complementariedad, esto es, se cumple que:

$$\lambda^* [Ax^* - b] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$x^* [c - \lambda^* A] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Desarrollando (1) y haciendo $u = s - t$ se tiene

$$\begin{aligned} & u_1 [(x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n}) - (x_{21} + x_{31} + \dots + x_{n1})] + u_2 [(x_{21} + x_{23} \\ & + \dots + x_{2n}) - (x_{12} + x_{32} + \dots + x_{n2})] + \dots + u_n [(x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn}) \\ & - (x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{nn})] + v_{12}(x_{12} - a_{12}) + v_{13}(x_{13} - a_{13}) + \dots + \\ & v_{nn}(x_{nn} - a_{nn}) + w_{12}(b_{12} - x_{12}) + w_{13}(b_{13} - x_{13}) + \dots + w_{nn}(b_{nn} - x_{nn}) \\ & = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3) \end{aligned}$$

Los primeros n términos de la ecuación (3) se satisfacen para todo flujo factible por la propiedad de conservación de flujo en la red $(x_{ij} - x_{ji}) = 0$. Además para que se cumpla la igualdad (3) es necesario que:

$$v_{ij}(x_{ij} - a_{ij}) = 0 \quad \text{y} \quad w_{ij}(b_{ij} - x_{ij}) = 0$$

Desarrollando (2):

$$(c_{12} - u_1 + u_2 - v_{12} + w_{12})x_{12} = 0$$

$$(c_{13} - u_1 + u_3 - v_{13} + w_{13})x_{13} = 0$$

⋮

$$(c_{n-1,n} - u_{n-1} + u_n - v_{n-1,n} + w_{n-1,n})x_{n-1,n} = 0$$

Resumiendo las condiciones (1) y (2) podemos decir que para el problema de redes con flujos restringidos una solución factible y óptima debe cumplir que:

$$v_{ij}(x_{ij} - a_{ij}) = 0$$

$$w_{ij}(b_{ij} - x_{ij}) = 0$$

$$x_{ij}(c_{ij} - u_i + u_j - v_{ij} + w_{ij}) = 0$$

para toda $i, j = 1, 2, \dots, n$

Es sencillo verificar que esta condición de complementariedad es equivalente a que se cumpla una de las condiciones:

$$x_{ij} = a_{ij} \quad ; \quad w_{ij} = 0 \quad ; \quad v_{ij} = c_{ij} - u_i + u_j \geq 0$$

$$a_{ij} < x_{ij} < b_{ij} \quad ; \quad v_{ij} = w_{ij} = c_{ij} - u_i + u_j = 0$$

$$x_{ij} = b_{ij} \quad ; \quad v_{ij} = 0 \quad ; \quad w_{ij} = -c_{ij} + u_i - u_j \geq 0$$

Para toda $i, j = 1, 2, \dots, n$

En este punto conviene observar que para los arcos tales que

$a_{ij} = b_{ij} = 0$ (como es el caso de aquéllos arcos que no pertenecen a la red original) las condiciones de complementariedad se satisfacen, esto es, los arcos ficticios del problema de redes equivalente satisfacen estas condiciones.

Existe una manera sencilla de verificar la condición de complementariedad con un mínimo de información. Específicamente sea $x = (x_{ij})$ un flujo factible del problema de redes y $u = (u_i)$ el vector de potenciales en las redes, entonces, calcule los vectores $v = (v_{ij})$ y $w = (w_{ij})$ usando las fórmulas:

$$v_{ij} = \max [0, \bar{c}_{ij}] \quad w_{ij} = \max [0, -\bar{c}_{ij}]$$

donde $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i + v_j$ es denominado el costo relativo del arco (i,j) . Como consecuencia de estas formulas es sencillo verificar que si x y u forman parte de las soluciones óptimas del problema de redes y su dual, entonces los vectores x , u , v y w son vectores factibles y óptimos, esto es, satisfacen las condiciones de complementariedad.

Como conclusión de la discusión anterior podemos establecer que un flujo circulatorio y factible $x = (x_{ij})$, es óptimo, si y sólo si existe un vector de potenciales $u = (u_i)$ tal que para cada arco de la red se satisface alguna de las condiciones o estados siguientes:

$$\bar{c}_{ij} > 0 \quad ; \quad x_{ij} = a_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} = 0 \quad ; \quad a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} < 0 \quad ; \quad x_{ij} = b_{ij}$$

Por otra parte, si el flujo circulatorio x y el vector de potenciales u no son óptimos, se tiene que algunos de sus arcos se encuentran en las condiciones o estados siguientes:

$$\bar{c}_{ij} > 0 \quad ; \quad x_{ij} < a_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} > 0 \quad ; \quad x_{ij} > a_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} = 0 \quad ; \quad x_{ij} < a_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} = 0 \quad ; \quad x_{ij} > b_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} < 0 \quad ; \quad x_{ij} < b_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} < 0 \quad ; \quad x_{ij} > b_{ij}$$

3.4 Propiedades de la matriz A, del problema de flujo con costo mínimo

Es de interés particular la estructura de la matriz A. Cada columna de A tiene dos elementos diferentes de cero, +1, y -1, y debido a su estructura, la matriz A es de rango n-1. Físicamente cada renglón de A corresponde a una ecuación de conservación de flujo, en cierto nodo. Otra propiedad de A que es importante, es que cada subdeterminante de A, tiene el valor de 0, ±1, esta es la llamada propiedad de unimodularidad. Es esta propiedad de unimodularidad, la que garantiza que la solución óptima sea entera, si el vector b, es un vector entero. Una matriz se dice totalmente unimodular, si cada subdeterminante de A, es igual a 0, ±1, esto significa que el politopo convexo definido por $Ax = b$, tiene puntos extremos enteros, para cualquier vector b entero arbitrario, ya que A es totalmente unimodular. La condición de que A es totalmente unimodular, es suficiente para la existencia de soluciones óptimas enteras, la dificultad es demostrar, que la condición es también necesaria. La demostración se debe a Veinott y Dantzing*

* Veinott, Dantzing, Integral Extreme Points. SIAM, Review, Vol. 10, No. 3, julio de 1968.

Teorema. Sea un programa lineal con restricciones $Ax = b, x \geq 0$. La matriz A es una matriz entera, con renglones linealmente independientes y b un vector entero. Las siguientes tres condiciones son equivalentes:

- Condición 1. El determinante de cada base B de A es igual a ± 1 ó -1 .
- Condición 2. Los puntos extremos del politopo convexo C , definido por $Ax = b, x \geq 0$, tienen componentes enteros, para cualquier vector entero b .
- Condición 3. La inversa B^{-1} de cada base B , es una matriz entera.

Prueba: Condición 1 \Rightarrow Condición 2.

Sea x un punto extremo del politopo convexo C , y B la base asociada. Entonces $x = [x_B, x_N]$, donde $Bx_B = b$ y $x_N = 0$. Pero b es un vector entero, y $\det(B) = \pm 1$, por la condición 1. Por la regla de Cramer, se sigue x_B es un vector entero. Esto significa que el punto extremo $x = [x_B, x_N]$ tiene todas sus componentes enteras.

Condición 2 \Rightarrow Condición 3.

Sean B una base, y Y cualquier vector entero, tal que $Y + B^{-1}e_i \geq 0$, donde e_i , es el i -ésimo vector columna unitario. Sea $z = Y + B^{-1}e_i \geq 0$. Entonces $Bz = By + e_i$ es un vector entero, puesto que B , y e_i son todos enteros. Como b puede ser cualquier vector entero, hagamos $Bz = b$. Ahora $Bz = b$ y $z \geq 0$, lo cual muestra que z es el punto extremo del politopo convexo C definido por $Ax = b, x \geq 0$.

Por la condición 2, z es un vector entero. Pero $z - y = B^{-1}e_i$, entonces $B^{-1}e_i$, es un vector entero, debido a que es la diferencia de 2 vectores enteros (z y y). El vector $B^{-1}e_i$, es la i -ésima columna de B^{-1} , lo cual significa que la i -ésima columna de B^{-1} es un vector entero. Podemos repetir el argumento para e_i ($i=1, \dots, n$) y mostramos que B^{-1} , es una matriz entera.

Condición 3 \Rightarrow Condición 1.

Sea B una base. B es una matriz entera y $\det(B)$ es un entero diferente de cero. Por la condición 3, B^{-1} es una matriz entera; $\det(B^{-1})$ es entero diferente de cero. Pero $(\det(B))(\det(B^{-1})) = 1$, lo cual implica que $\det(B) = \det(B^{-1}) = \pm 1$.

Rango de la matriz A .

Para mostrar que la matriz A tiene rango $m-1$, necesitamos seleccionar una submatriz de A de $(m-1) \times (m-1)$ que sea no singular.

Sea T cualquier árbol de expansión de la red G . El árbol T consiste de m nodos y $m-1$ arcos de G que no forman un ciclo. Considere la submatriz A_T de A de $m \times (m-1)$ asociada con los nodos y arcos de T . Puesto que $m \geq 2$, T tiene a lo menos un nodo terminal, digamos el nodo k , con exactamente un arco que incide sobre ese nodo. En tal caso el k -ésimo renglón de A_T contiene un elemento diferente de cero. Permutando los renglones y las columnas de A_T de tal manera que, el elemento diferente de cero del k -ésimo renglón, sea colocado en la primera columna y primer renglón. Entonces:

$$A_T = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ p & A_{T'} \end{bmatrix}$$

Borrando el primer renglón y la primera columna de A_T y considerando la matriz $A_{T'}$, de $(m-1) \times (m-2)$, correspondiente a la gráfica T' de T , a la cual se le ha quitado el nodo k y el arco incidente. T' es también un árbol. Debe de contener a lo menos un nodo terminal, digamos el nodo l . Permutando los renglones y las columnas de $A_{T'}$, de tal forma que el elemento diferente de cero en el renglón l , quede en el primer renglón, primera columna, podemos escribir $A_{T'}$ como:

$$A_{T'} = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ p_1 & \pm 1 & 0 \\ p_2 & q & A_{T''} \end{bmatrix}$$

Podemos continuar de esta manera exactamente $m-1$ veces. Borrando la última columna de $A_{T''}$, obtenemos una matriz de $(m-1) \times (m-1)$ que es triangular inferior, con elementos en la diagonal diferentes de cero y que por lo tanto es no singular. Entonces el rango de A es $m-1$.

Teorema. Una matriz es unimodular si las siguientes cuatro condiciones se satisfacen

Condición 1. Cada columna contiene a lo más, dos elementos diferentes de cero.

Condición 2. Cada elemento es $0, \pm 1$. La matriz A puede ser descompuesta en dos conjuntos disjuntos de renglones R_1 y R_2 tal que:

- 2a) Dos elementos diferentes de cero en una columna con el mismo signo, no están contenidos en el mismo conjunto de renglones.
- 2b) Dos elementos diferentes de cero en una columna con signos diferentes, están contenidos en el mismo conjunto de renglones.

Prueba: Es suficiente con probar que cualquier matriz cuadrada A , que satisface las cuatro condiciones anteriores, tiene su determinante igual a $0, \pm 1$. La prueba es por inducción sobre el tamaño de la matriz. Para una matriz de uno por uno, el teorema es verdadero por la condición 2. Considere ahora que el teorema es verdadero para una matriz de $(n-1) \times (n-1)$, y A es una matriz de $n \times n$. Si alguna columna de A tiene todos sus elementos igual a cero, entonces $\det(A) = 0$. Si alguna columna tiene exactamente un elemento diferente de cero, entonces, expandiendo para esta columna $\det(A) = \pm \det(A')$, donde A' es el cofactor de los elementos diferentes de cero, y tiene un determinante igual a $0, \pm 1$, por la hipótesis de inducción.

Consideremos que cada columna de la matriz A , contiene exactamente dos elementos diferentes de cero. De las condiciones 1 y 2

se sigue que

$$\sum_{i \in R_1} a_{ij} = \sum_{i \in R_2} a_{ij} \quad j=1, \dots, n$$

esto implica que $\det(A) = 0$. Note que el argumento es válido, aún cuando alguno de los conjuntos R_1 ó R_2 es vacío.

Teorema. La matriz de los coeficientes del sistema, del problema de flujo con costo mínimo, es totalmente unimodular.

Prueba. Sea B cualquier submatriz $k \times k$ de A. Se prueba por inducción que $\det(B) = 0, \pm 1$, y entonces que la matriz A es totalmente unimodular. Obviamente si $k=1$, entonces $\det(B) = 0, \pm 1$. Supongamos ahora que $\det(B) = 0, \pm 1$, para cualquier matriz cuadrada de tamaño $k-1$.

Sea B una submatriz $k \times k$ de A. Si alguna columna de B es cero, entonces $\det(B) = 0$. Si cada columna de B tiene un +1 y un -1, entonces $\det(B) = 0$ (los renglones de B son linealmente dependientes, y sumándolos obtenemos el vector cero). Suponga ahora, que hay al menos una columna con un elemento diferente de cero. Entonces $\det(B) = \pm \det(B')$, donde B' es la submatriz de B formada quitando esa columna y el renglón con elementos diferentes de cero. Por la hipótesis de inducción $\det(B') = 0, \pm 1$, y entonces $\det(B) = 0, \pm 1$, con lo que el argumento de inducción queda completo.

Teorema. (Soluciones enteras). Sea el problema de redes en forma circulatoria en el que los flujos mínimo y máximo permitidos en cada arco son números enteros. En este problema toda solución factible básica es entera. Asimismo, si existe una solución óptima, existe una solución óptima que es entera.

Prueba. Sea $x = (x_{ij})$ una solución factible básica del problema de redes. Note que los valores de las variables básicas quedan determinadas en forma única si las variables no básicas han sido identificadas y tienen el valor cero. Asociemos con esta solución una red definida como $G' = (N', A')$ donde $N' = N$ y $A' = \{(i, j) \in A ; x_{ij} > 0 \text{ no entero}\}$. Es claro que si el conjunto A' es vacío, el teorema queda demostrado.

Suponga que A' es un conjunto no vacío. En este caso se prueba, que G' tiene un ciclo y se contradice la hipótesis de que x es una solución factible básica. Se hace notar que en cada nodo, si existe un arco con flujo que entra, entonces existe un arco con flujo que sale, pues todos los nodos son de traspaso. Asimismo, si el flujo total que entra al nodo es un número entero, lo mismo es cierto del flujo total que sale.

Considere la gráfica dirigida $G' = (N', A')$ definida anteriormente, seleccione un arco $a_1 \in A'$ y etiquete los nodos de este arco, esto es, $a_1 = (i_1, i_2)$. Note que existe un arco $a_2 \neq a_1$ tal que $a_2 \in A'$ y que $a_2 = (i_2, i_3)$ ó bien $a_2 = (i_3, i_2)$. Si $i_3 = i_1$, se tiene un ciclo. Por otra parte, si $i_3 \neq i_2$ suponga, por simplicidad, que $a_2 = (i_2, i_3)$. Entonces, seleccione un arco $a_3 \neq a_2$

tal que $a_3 \in A'$ y que $a_3 = (i_4, i_3)$ ó $a_3 = (i_3, i_4)$. Si el nodo i_4 fue anteriormente etiquetado se tiene un ciclo. De otra manera podemos generar más arcos y etiquetar sus nodos hasta encontrar que un nodo ha sido reetiquetado. Esto se logra en un número finito de pasos. Sea i_r el nodo tal que $i_r = i_k$ para algún $k < r$. Entonces se tiene un ciclo con los nodos i_r, i_{k+1}, \dots, i_r . Los arcos de este ciclo pertenecen al conjunto A' y pueden dividirse en dos conjuntos

$$C_D = \{(i,j); (i,j) = (i_t, i_{t+1}), \text{ para algún } t \in \{k, k+1, \dots, r-1\}\}$$

$$C_I = \{(i,j); (i,j) = (i_{t+1}, i_t), \text{ para algún } t \in \{k, k+1, \dots, r-1\}\}$$

Esto es, C_D y C_I son los conjuntos de arcos que siguen el sentido directo e inverso de la numeración de nodos consecutivos del ciclo respectivamente. De donde $x' = (x'_{ij})$ dado como

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \epsilon & (i,j) \in C_D \\ x_{ij} - \epsilon & 1 \quad (i,j) \in C_I \\ x_{ij} & \text{De otra manera} \end{cases}$$

es un flujo circulatorio factible para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Sin embargo, esto contradice la hipótesis que $x = (x_{ij})$ es una solución factible básica. Por lo tanto, el conjunto A' es vacío y la prueba termina.

CAPITULO IV

EL METODO DE SOLUCION DEL PROBLEMA DE REDES

El algoritmo "out-of-Kilter" es similar al algoritmo "primal-dual", en el sentido de que el algoritmo empieza con una solución factible en el dual, pero no necesariamente con una solución factible del primal e interacciona entre el primal y el dual hasta que el óptimo es alcanzado. Este algoritmo se puede ver como una generalización del algoritmo primal dual para los problemas de flujo en redes.

Este capítulo se desarrolla como sigue: Primero se revisan las estructuras primal y dual del problema de redes con flujos restringidos y costo mínimo y se establecen las condiciones de holgura complementaria. Se definen los estados conformables y no conformables para un arco en una red, así como los números Kilter. Se muestra la estrategia del algoritmo out-of-Kilter haciendo que un arco no conformable pase a un estado conformable. Se analiza la no factibilidad del problema cuando $\theta = \infty$ y se prueba la convergencia del algoritmo. Finalmente se presenta un resumen del algoritmo out-of-Kilter.

4.1 La formulación del problema de redes con costo mínimo.

Por conveniencia se muestra el problema de redes con costo mínimo en la siguiente forma:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

s. a.

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = 0 \quad i=1, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq a_{ij} \quad i, j=1, \dots, m$$

$$x_{ij} \leq b_{ij} \quad i, j=1, \dots, m$$

en donde las sumas y desigualdades son consideradas solamente para los arcos existentes en la red.

La primera restricción es de "conservación de flujo"; las restricciones siguientes son de "capacidad" y dan la cota superior e inferior para cada arco en la red. Un flujo que satisface estas restricciones se denomina "flujo factible". Se considera a_{ij} , b_{ij} y c_{ij} enteros, y que $0 \leq a_{ij} \leq b_{ij}$.

Observamos en las restricciones de conservación de flujo que los valores del miembro derecho son ceros, de donde podemos concluir que el flujo en la red no tiene un punto inicial o un punto final, sino que circula continuamente a través de toda la red. Podemos mencionar entonces que la conservación de flujo en la red será a través de circuitos.

4.2 La estructura del dual en un problema de redes con costo mínimo y sus propiedades.

Si asociamos una variable dual u_i a cada "ecuación de conservación de flujo", una variable dual w_{ij} a cada restricción $x_{ij} \leq b_{ij}$

(la cual consideraremos como $-x_{ij} \geq -b_{ij}$ para propósitos de la formulación del dual), y una variable dual v_{ij} a cada restricción del tipo $x_{ij} \geq a_{ij}$, la formulación del problema dual en un problema de redes con costo mínimo esta dada por:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} v_{ij} - b_{ij} w_{ij} \\ \text{s. a. } & \cancel{w_{ij}^0} - u_j + v_{ij} - w_{ij} = c_{ij} \quad i, j=1, \dots, m \\ & v_{ij}, w_{ij} \geq 0 \quad i, j=1, \dots, m \\ & u_i \text{ no restringida} \quad i=1, \dots, m \end{aligned}$$

en donde las sumas y las restricciones se consideran solamente para los arcos existentes en la red.

El problema dual tiene una estructura muy interesante. Supongamos que seleccionamos cualquier conjunto de u_i 's (consideraremos a través de todo el desarrollo que las u_i 's son enteros). Entonces la restricción dual para un arco (i, j) es:

$$\begin{aligned} v_{ij} - w_{ij} &= c_{ij} - u_i + u_j \\ v_{ij}, w_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

la cual puede satisfacerse por:

$$\begin{aligned} v_{ij} &= \text{Max} \{0, c_{ij} - u_i + u_j\} \\ w_{ij} &= \text{Max} \{0, -(c_{ij} - u_i + u_j)\} \end{aligned}$$

de donde el problema dual siempre tiene una solución factible para cualquier conjunto dado de u_i 's. De hecho los valores anteriormente seleccionados de v_{ij} y w_{ij} nos da los valores óptimos de v_{ij} y w_{ij} para un conjunto fijo de u_i 's.

4.3 Las condiciones de holgura complementaria

Las condiciones de complementariedad por la optimalidad son:

$$(x_{ij} - a_{ij})v_{ij} = 0 \quad i, j=1, \dots, m$$

$$(b_{ij} - x_{ij})w_{ij} = 0 \quad i, j=1, \dots, m$$

Definamos $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i + u_j$. Entonces por la definición de v_{ij} y w_{ij} obtenemos:

$$v_{ij} = \text{Max} \{0, \bar{c}_{ij}\}$$

$$w_{ij} = \text{Max} \{0, -\bar{c}_{ij}\}$$

Dado un conjunto de u_i 's podemos calcular $c_{ij} = \bar{c}_{ij} - u_i + u_j$. Observamos que las condiciones de holgura complementaria se cumplen solamente si:

$$\bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow w_{ij} > 0 \rightarrow x_{ij} = b_{ij} \quad i, j=1, \dots, m$$

$$\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow v_{ij} > 0 \rightarrow x_{ij} = a_{ij} \quad i, j=1, \dots, m$$

$$\bar{c}_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad i, j=1, \dots, m$$

Cualquier flujo que satisfaga las tres condiciones anteriores será óptimo. El problema entonces radica en investigar para cuales valores de las u_i 's y x_{ij} 's las tres condiciones anteriores se satisfacen.

Un arco (i,j) se dice que esta en un estado "conformable", si cumple con las condiciones de optimalidad. Un arco (i,j) se dice que esta en un estado no conformable, si no cumple con las condiciones de optimalidad.

Para hacer que un arco (i,j) no conformable, pase a un estado conformable, debemos incrementar la x_{ij} o disminuir el valor de \bar{c}_{ij} cambiando las u_i 's. Esto es lo que hace el algoritmo out-of-Kilter exactamente. Durante la fase primal del algoritmo modificamos las x_{ij} 's para que el arco pase a un estado conformable. Durante la fase dual modificamos las u_i 's para alcanzar un estado conformable.

Los estados conformables y no conformables para un arco.

Los estados conformables y no conformables para un arco en una red estan dados en la siguiente forma:

	$\bar{c}_{ij} < 0$	$\bar{c}_{ij} = 0$	$\bar{c}_{ij} > 0$
$x_{ij} < a_{ij}$	no conformable	no conformable	no conformable
$x_{ij} = a_{ij}$	no conformable	conformable	conformable
$a_{ij} < x_{ij} < b_{ij}$	no conformable	conformable	no conformable
$x_{ij} = b_{ij}$	conformable	conformable	no conformable
$x_{ij} > b_{ij}$	no conformable	no conformable	no conformable

FIGURA 1

Note que un arco está en el estado conformable si $a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij}$, y las condiciones de complementariedad se cumplen.

Conforme vayamos modificando el flujo en un arco (i,j) , el arco se mueve hacia arriba o hacia abajo de una columna particular de la figura anterior, dependiendo de si x_{ij} se incrementa o disminuye. Conforme modificamos los valores de las u_i 's, el arco se mueve hacia la izquierda o hacia la derecha a través del renglón particular.

Una descripción gráfica de los estados de un arco se muestra a continuación.

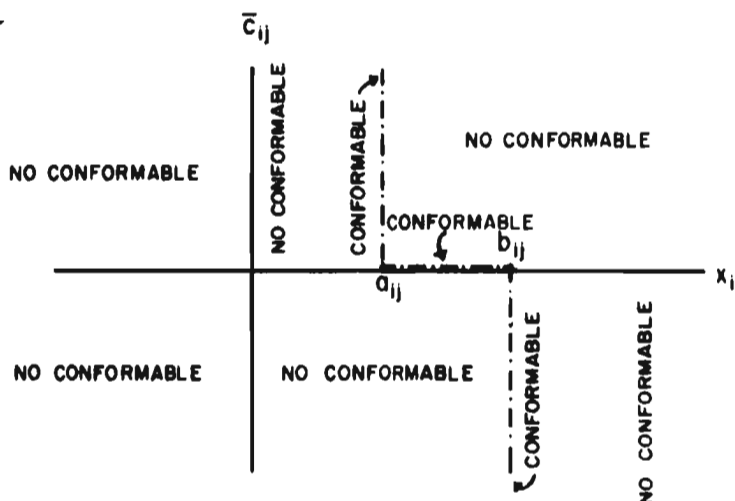


FIGURA 2

Con el objetivo de asegurarnos que el algoritmo convergerá, necesariamente alguna medida de la "distancia" para alcanzar la optimalidad. Si podemos construir un algoritmo que periódica-

mente (en un número finito de iteraciones) reduzca la distancia para alcanzar la optimalidad, entonces el algoritmo eventualmente convergerá (realmente es necesario un argumento más fuerte acerca de la reducción de la distancia para alcanzar la optimalidad, pero como veremos, esa reducción es en números enteros por lo cual no habrá problema para que sea finita).

4.4. Los números Kilter para un arco

Hay muchas medidas diferentes de distancia para el problema out-of-Kilter. En la siguiente figura se muestra una medida de distancia que llamaremos el número Kilter k_{ij} , para un arco (i,j) .

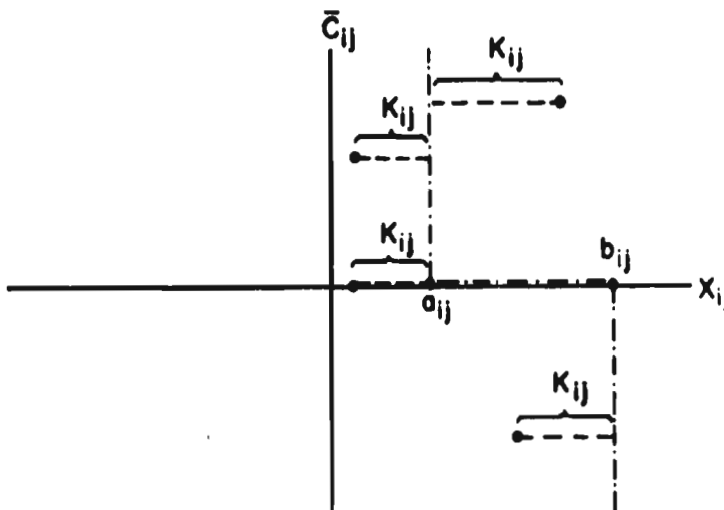


FIGURA 3

El número Kilter se define como el mínimo cambio de flujo en el arco, que es necesario para llevarlo a un estado conformable. Note que puesto que todos los términos involucran valores absolutos, el número Kilter para un arco es no-negativo. También note que si el arco está en un estado conformable el número

Kilter asociado es cero, y si el arco esta en un estado no conformable, el número Kilter asociado es estrictamente positivo.

Note que si $\bar{c}_{ij} < 0$, entonces el arco (i,j) esta en un estado conformable solamente si el flujo es igual a b_{ij} , y el número Kilter $|x_{ij} - b_{ij}|$ nos indica que tan lejos esta el flujo x_{ij} del caso ideal b_{ij} . Similarmente si $\bar{c}_{ij} > 0$, entonces el número Kilter $|x_{ij} - a_{ij}|$ nos indica la distancia para alcanzar el flujo ideal a_{ij} . Finalmente, si $\bar{c}_{ij} = 0$, entonces el arco (i,j) esta en estado conformable si $a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij}$, en particular, si $x_{ij} > b_{ij}$, entonces el arco pasará a un estado conformable si el flujo disminuye en $|x_{ij} - b_{ij}|$, y si $x_{ij} < a_{ij}$, entonces el arco pasará al estado conformable si el flujo se aumenta en $|x_{ij} - a_{ij}|$.

En la siguiente figura se muestran las desviaciones necesarias para que un arco (i,j) pase de un estado no conformable a un estado conformable

	$\bar{c}_{ij} < 0$	$\bar{c}_{ij} = 0$	$\bar{c}_{ij} > 0$
$x_{ij} < a_{ij}$	$ x_{ij} - b_{ij} $	$ x_{ij} - a_{ij} $	$ x_{ij} - a_{ij} $
$x_{ij} = a_{ij}$	$ x_{ij} - b_{ij} $	0	0
$a_{ij} < x_{ij} < b_{ij}$	$ x_{ij} - b_{ij} $	0	$ x_{ij} - a_{ij} $
$x_{ij} = b_{ij}$	0	0	$ x_{ij} - a_{ij} $
$x_{ij} > b_{ij}$	$ x_{ij} - b_{ij} $	$ x_{ij} - b_{ij} $	$ x_{ij} - a_{ij} $

Un método para asegurar la convergencia finita del algoritmo out-of-Kilter es demostrando lo siguiente:

- El número Kilter de un arco nunca se incrementa
- En un número finito de iteraciones el número Kilter del arco es disminuído (en un número entero)

4.5 La estrategia del algoritmo out-of-Kilter

Como se mencionó anteriormente, el algoritmo out-of-Kilter se puede ver como una generalización del algoritmo primal-dual. En este aspecto los pasos generales del algoritmo son los siguientes:

1. Iniciar con un flujo tal como $x_{ij} = 0$, y una solución factible del dual, por ejemplo $u_i = 0$. Identifique los estados y calcule los números Kilter.
2. Si la red tiene un arco no conformable, inicie la fase primal del algoritmo, durante la cual se elige un arco no conformable y se trata de construir un nuevo flujo, en tal forma que el número Kilter de los demás arcos no se vea afectado (no aumente) y que el arco seleccionado sea mejorado.
3. Cuando se determina que esa "mejora" no puede realizarse durante la fase primal, el algoritmo construye una nueva solución dual, de tal manera que el número Kilter no se vea afectado (no aumente), y se va al paso 2.

4, Iterando entre los pasos 2 y 3, el algoritmo eventualmente construye una solución óptima, o determina que no existe solución factible.

La fase primal: cambio de flujo

Durante la fase primal, el algoritmo out-of-Kilter, intenta disminuir el número Kilter de un arco no conformable, cambiando o modificando el flujo, en tal forma que el número Kilter de los demás arcos no se vea afectado.

Examinando la figura 2, observamos que el flujo debe ser modificado de tal manera que los estados no conformables se acerquen a los estados conformables. Por ejemplo, para el estado no conformable $x_{ij} > b_{ij}$ y $\bar{c}_{ij} < 0$, podemos disminuir x_{ij} tanto como $|x_{ij} - b_{ij}|$. Si disminuimos el flujo más allá de esa cantidad, el arco pasará a un estado no conformable (cosa que no queremos que suceda), también, no permitiremos ningún aumento de flujo en esta x_{ij} .

Un análisis similar de los otros estados, nos proporciona los siguientes resultados que aparecen en la figura "5".

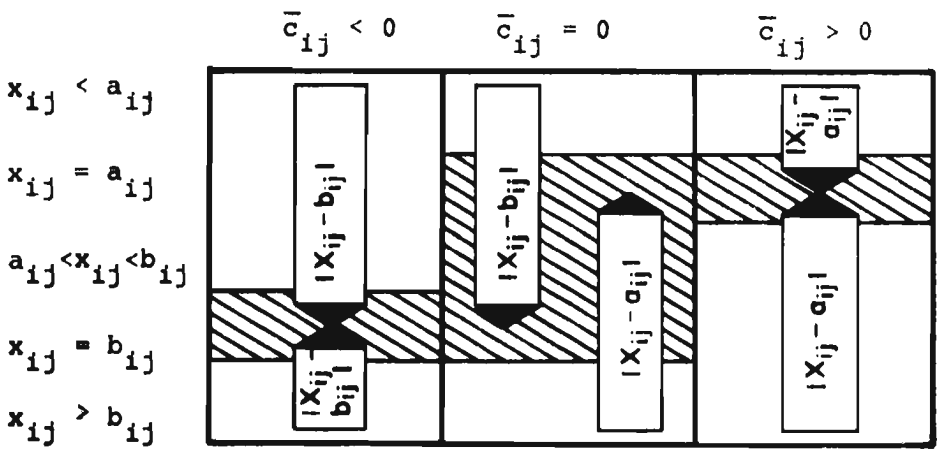


FIGURA 5

Varios estados de la figura anterior merecen una atención especial. El estado no conformable $x_{ij} = b_{ij}$ y $\bar{c}_{ij} = 0$, indica que el flujo debe ser disminuído en $|x_{ij} - a_{ij}|$, refiriéndose a la figura 2, vemos que solamente necesitamos disminuir la x_{ij} en $|x_{ij} - b_{ij}|$, una cantidad menor, para alcanzar el estado conformable. Sin embargo como se puede ver en la misma figura, podemos continuar disminuyendo el flujo x_{ij} en una cantidad mayor que $|x_{ij} - b_{ij}|$ y el arco permanecerá en el estado conformable. Fre-
cuentemente, es deseable hacer esto para ayudar a otros arcos a alcanzar el estado conformable. También un arco en un estado conformable $a_{ij} < x_{ij} < b_{ij}$ y $\bar{c}_{ij} = 0$, puede aumentar o disminuir su flujo permaneciendo en el estado conformable. Esta situación se muestra en la siguiente figura

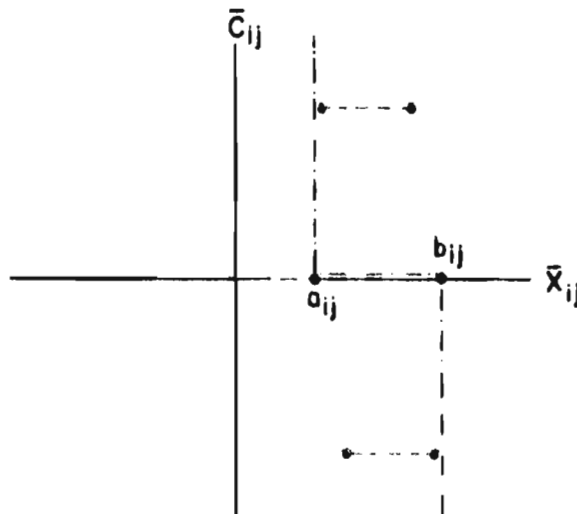


FIGURA 6

Hemos determinado cuánto podemos variar un determinado flujo, debemos ahora determinar que combinación de flujos podemos hacer para que exista "conservación de flujo"

Sea \bar{x} el vector de flujos, entonces, la restricción de conservación de flujo del problema primal, se puede escribir como :

$A\bar{x} = 0$, donde A es la matriz de incidencia nodos-arcos. Si Δ es el vector de modificación de flujo, entonces debemos tener:

$$A(\bar{x} + \Delta) = 0 \quad \delta \quad A\Delta = 0$$

Si $A\Delta = 0$, para $\Delta \neq 0$, entonces cada columna de A tiene exactamente un $+1$ y un -1 , y los componentes diferentes de cero de Δ deben corresponder a un ciclo (no dirigido) o conjunto de ciclos. El flujo deberá ser modificado a través del ciclo o conjunto de ciclos, en tal forma que se satisfaga la restricción de "conservación de flujo".

Dado un arco no conformable, debemos construir un ciclo que contenga a este arco. Este ciclo debe tener la propiedad de que cuando se le da una orientación y cuando se adicione flujo, ningún arco sea afectado (aumentado) en su número Kilter.

Fase dual: cambio de variable dual.

Cuando no es posible construir un ciclo que contenga al arco no conformable específico, entonces debemos de modificar las \bar{c}_{ij} 's, en tal forma que ningún número Kilter sea afectado (aumentado), y que nos permita encontrar un ciclo que contenga al arco no conformable en cuestión.

Puesto que $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i + u_j$, debemos modificar las u_i 's para poder modificar las \bar{c}_{ij} 's. Sea (p,q) un arco, no conformable,

y sea \bar{I} el conjunto de nodos que pueden ser alcanzados desde el nodo q a través de alguna trayectoria. Sea $I = N - \bar{I}$, donde $N = 1, 2, \dots, n$. Note que si $I \neq \emptyset$, pueden ser vacíos puesto que $q \in \bar{I}$ y $p \in I$ cuando pasamos a la fase dual. Queremos modificar las u_i 's de tal forma que ningún número enter se vea afectado, y el conjunto \bar{I} vaya creciendo periódicamente. Si otro nodo pasa a formar parte de \bar{I} , en un número finito de intervalos, entonces "p" pasará a formar parte de \bar{I} y se creará un ciclo. Se considera implícitamente que el conjunto \bar{I} nunca se hará más pequeño. Para asegurar que esto sucede, debemos modificar las u_i 's en tal forma que todos los arcos con ambas terminaciones en \bar{I} sean retenidos.

Considere $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i + u_j$. Si u_i y u_j son modificadas en la misma cantidad, entonces \bar{c}_{ij} permanece sin cambiar. Entonces podemos asegurar, que el conjunto \bar{I} , contendrá al menos todos los mismos nodos después del cambio en la variable dual, si cambiamos todas las u_i 's en \bar{I} en la misma cantidad θ . Suponga que dejamos las u_i 's en I sin cambiar. Entonces los únicos arcos que serán afectados serán los arcos de \bar{I} a I y de I a \bar{I} . Específicamente, si $\theta > 0$ y modificamos las u_i 's de acuerdo a:

$$u_i = \begin{cases} u_i + \theta & i \in \bar{I} \\ u_i & i \in I \end{cases}$$

entonces:

$$\bar{c}'_{ij} = \begin{cases} \bar{c}_{ij} & \text{si } i \in \bar{I}, j \in \bar{I} \\ \bar{c}_{ij} & \text{si } i \in I, j \in I \\ \bar{c}_{ij} + \theta & \text{si } i \in I, j \in \bar{I} \\ \bar{c}_{ij} - \theta & \text{si } i \in \bar{I}, j \in I \end{cases}$$

Ahora, si $i \in \bar{I}$ y $j \in I$ obtenemos:

$$\bar{c}'_{ij} = c_{ij} - (u_i + \theta) + u_j = \bar{c}_{ij} - \theta$$

También; si $i \in I$ y $j \in \bar{I}$ obtenemos:

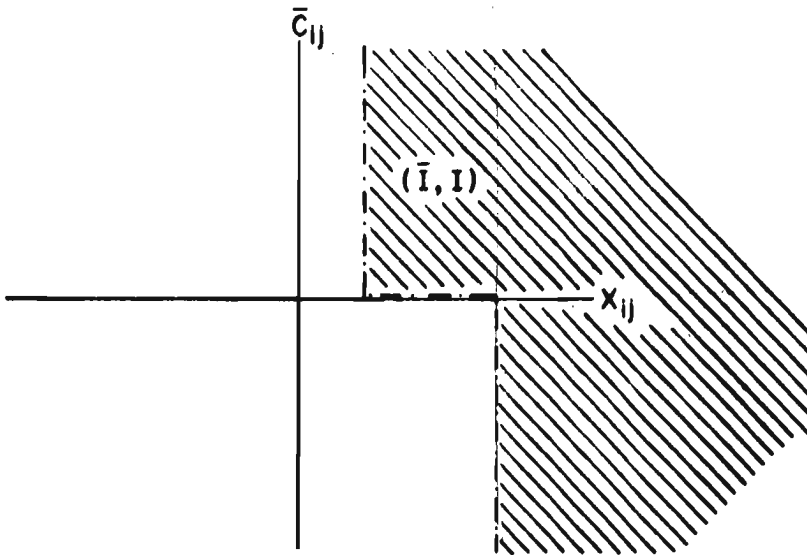
$$\bar{c}'_{ij} = c_{ij} - u_i + (u_j + \theta) = \bar{c}_{ij} + \theta$$

Entonces todos los arcos que van de \bar{I} a I tendrán sus \bar{c}'_{ij} 's disminuidas en θ , y aquéllos arcos de I a \bar{I} , tendrán sus \bar{c}'_{ij} 's incrementadas en θ .

Debemos determinar θ , en tal forma que el número Kilter de los demás arcos no se vea afectado (empeorado), y el estado de algunos arcos sea modificado. Primero debemos identificar los arcos que pueden estar en el conjunto (\bar{I}, I) , y en el conjunto (I, \bar{I}) . (La notación (x, y) representa el conjunto $S = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$).

Examinando la figura 5, vemos que el conjunto (\bar{I}, I) no puede contener un arco asociado con el estado $x_{ij} < a_{ij}$ y $\bar{c}_{ij} > 0$, puesto que tal arco podría formar parte de un ciclo, con el resultado de que si i puede ser alcanzado (a través de una trayectoria), desde q , entonces j , puede ser alcanzado desde q , y entonces $j \in \bar{I}$ (contradicción).

Examinando los estados restantes, encontramos que los únicos candidatos para ser miembros de (\bar{I}, I) , son aquéllos que se muestran en la siguiente figura:



poniendo estos estados en forma tabular:

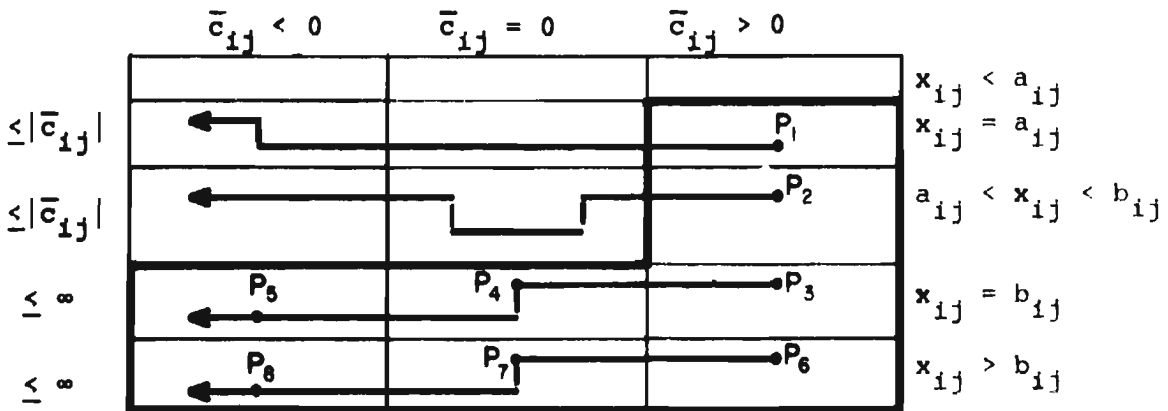


FIGURA 7

recuerde que estos arcos de \bar{I} a I , tendrán sus \bar{c}_{ij} 's disminuidas, entonces estos arcos cambiarán su estado de derecha a izquierda como se indica en la figura "7".

Examinando el arco de \bar{I} a I , que esta en el estado $x_{ij} > b_{ij}$, $\bar{c}_{ij} > 0$, vemos en la figura, que mientras θ se incrementa, k_{ij} permanece constante y posteriormente k_{ij} disminuye desde $k_{ij} = |x_{ij} - a_{ij}|$ a $k_{ij} = |x_{ij} - b_{ij}|$, entonces para este arco podemos incrementar θ , tanto como queramos y el número Kilter del arco nunca se incrementará. Para estos arcos podemos establecer un límite superior de θ en ∞ , como se indica en la figura "7".

Cualquier arco de \bar{I} a I , que este en el estado $x_{ij} = b_{ij}$ y $\bar{c}_{ij} > 0$, conforme θ se incrementa, k_{ij} disminuirá (a cero), y después su número Kilter permanecerá constante, nuevamente el límite superior de variación de θ , para asegurar que el número Kilter no se verá afectado, será de ∞ .

Sin embargo, examinando un arco de \bar{I} a I , en el estado $a_{ij} < x_{ij} < b_{ij}$, y $\bar{c}_{ij} > 0$, vemos que el número Kilter asociado x_{ij} , primero disminuye (a cero), y luego empieza a incrementarse. Con el fin de eliminar el incremento en k_{ij} para el arco, debemos poner un límite de $|\bar{c}_{ij}|$ en θ . Similarmente debemos poner un límite $|\bar{c}_{ij}|$ en θ para los arcos en el estado $x_{ij} = a_{ij}$ y $\bar{c}_{ij} > 0$. Este análisis justifica las entradas en la tabla "7".

En la siguiente figura se muestra el efecto del incremento en θ para los arcos que son miembros de (\bar{I}, I) .

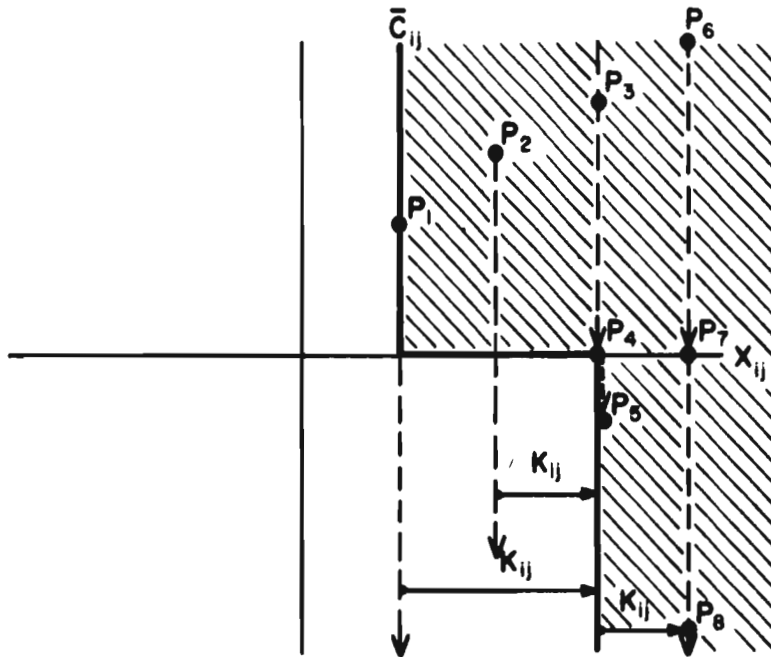


FIGURA 8

Un análisis similar de los arcos de I a \bar{I} , justifica la información en las siguientes tres figuras.

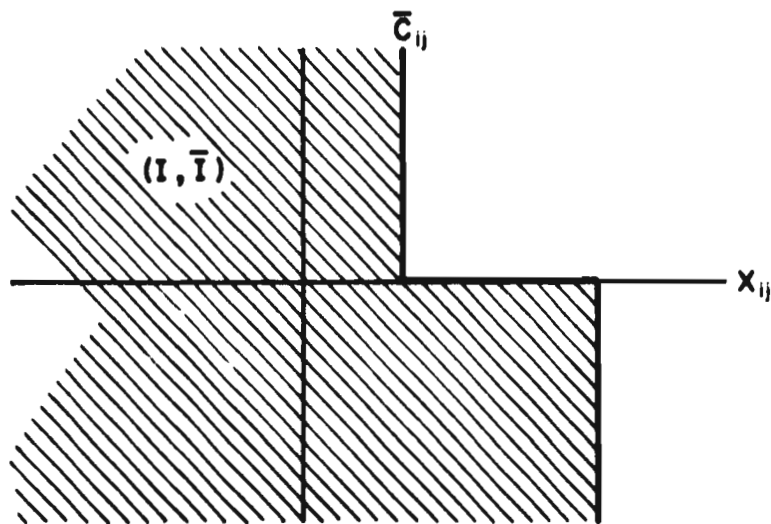


FIGURA 9

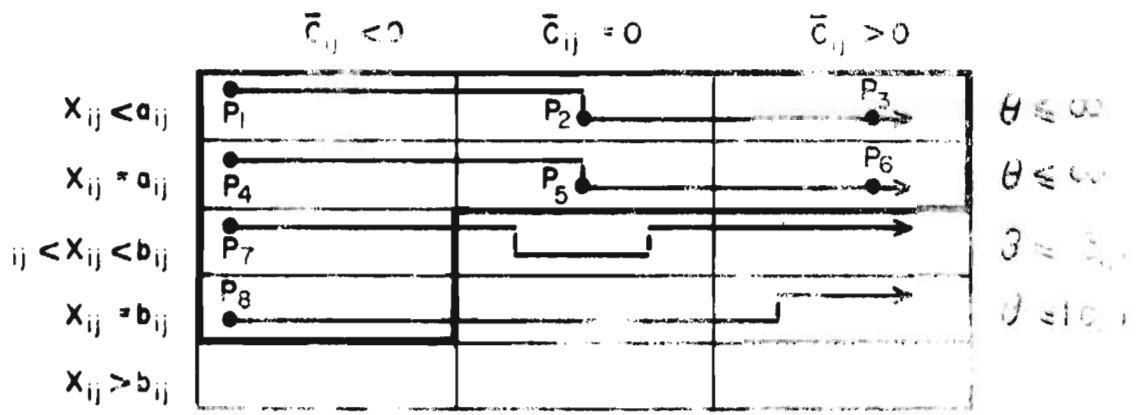


FIGURA 10

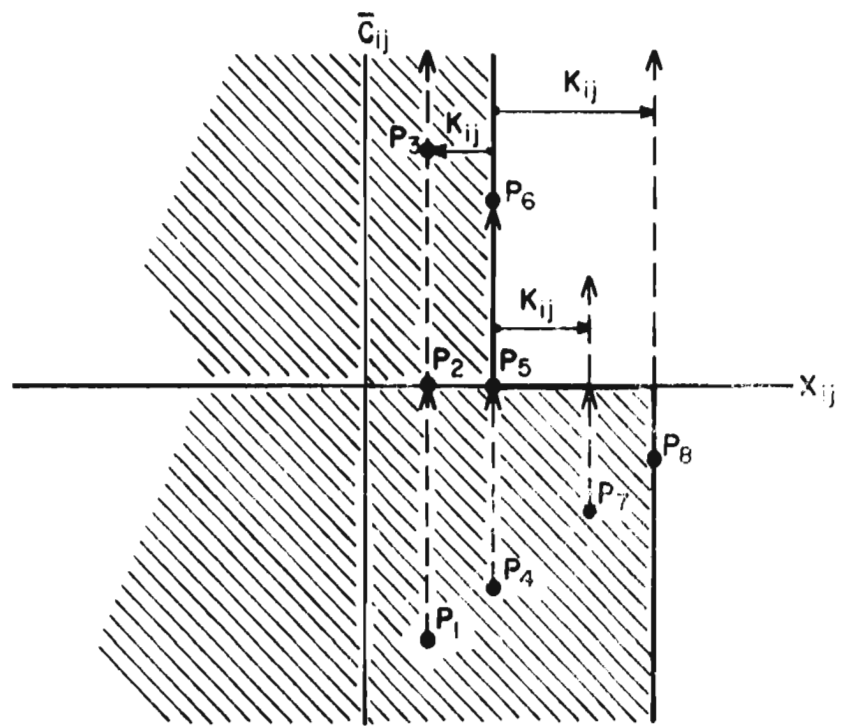


FIGURA 11

En cuanto a lo que concierne a la variación (aumento) de los números Kilter, las figuras 7, 9 y 11, indican que solo necesitamos calcular θ en base, a que los arcos de \bar{I} a I con $x_{ij} < b_{ij}$ y los arcos de I a \bar{I} con $x_{ij} > a_{ij}$. Sin embargo, si procedemos a definir un método de cálculo de θ , basado solamente en estas consideraciones, tendremos dificultades en la interpretación del significado del valor $\theta = \infty$. Esto se simplifica, si en vez de desigualdades estrictas de flujo (esto es, $x_{ij} < b_{ij}$, $x_{ij} > a_{ij}$), admitimos desigualdades débiles (esto es, $x_{ij} \leq b_{ij}$, $x_{ij} \geq a_{ij}$). La razón para tal desviación de la intuición, se verá cuando establezcamos la convergencia del algoritmo.

La discusión anterior concierne a los límites de θ basados en la consideración de los números Kilter, y en las propiedades de convergencia (todavía no establecidas), nos conducen a la siguiente procedimiento formal para el cálculo de θ .

Definamos S_1 y S_2 por:

$$S_1 = \{(i, j) : i \in \bar{I}, j \in I, \bar{c}_{ij} > 0, x_{ij} \leq b_{ij}\}$$

$$S_2 = \{(i, j) : i \in I, j \in \bar{I}, c_{ij} < 0, x_{ij} \geq a_{ij}\}$$

Sea

$$\theta_1 = \min_{(i, j) \in S_1} \{|\bar{c}_{ij}|\}$$

$$\theta_2 = \min_{(i, j) \in S_2} \{|\bar{c}_{ij}|\}$$

$$\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$$

donde $\theta = \infty$ si S_1 es vacío. Entonces θ es estrictamente positivo.

También, θ es un entero positivo o ∞ .

Estas dos posibilidades se discuten brevemente a continuación:

CASO 1: $0 < \theta < \infty$

En este caso hacemos los cambios apropiados en u_i (esto es, $u_i' = u_i + \theta$ si $i \in \bar{I}$, y $u_i' = u_i$ si $i \in I$) y pasamos a la fase primal del algoritmo.

CASO 2: $\theta = \infty$

En este caso el problema primal no tiene solución factible, esto termina la fase dual del algoritmo out-of-Kilter, y proporciona el fundamento de la totalidad del algoritmo out-of-Kilter.

4.6 La no-factibilidad del problema cuando $\theta = \infty$.

Suponga que durante alguna aplicación de la fase dual del algoritmo out-of-Kilter, tenemos el caso donde $\theta = \infty$. Cuando esto ocurre, debemos tener $S_1 = S_2 = \phi$. Puesto que $S_1 = \phi$, revisando la definición de S_1 , concluimos que $i \in \bar{I}$, y $j \in I$, lo que implica uno de los siguientes casos:

$$i) \quad \bar{c}_{ij} > 0 \quad \text{y} \quad x_{ij} > b_{ij}$$

$$ii) \quad \bar{c}_{ij} = 0$$

$$iii) \quad \bar{c}_{ij} < 0$$

De la figura "7", y puesto que $i \in \bar{I}$ y $j \in I$, posiblemente ii) o iii) pueden suceder solamente si $x_{ij} \geq b_{ij}$. Entonces $S_1 = \phi$ puede suceder solamente si $x_{ij} \geq b_{ij}$ para $i \in \bar{I}$ y $j \in I$.

Similarmente, $S_2 = \phi$ solamente si $i \in I$ y $j \in \bar{I}$, implica que $x_{ij} \leq a_{ij}$. Entonces $S_1 = S_2 = \phi$ implica:

$$x_{ij} \geq b_{ij} \quad \text{si} \quad i \in \bar{I} \text{ y } j \in I \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

y

$$x_{ij} \leq a_{ij} \quad \text{si} \quad i \in I, \text{ y } j \in \bar{I} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Sumando estas desigualdades obtenemos:

$$\sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} x_{ij} - \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{I}}} x_{ij} > \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} b_{ij} - \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{I}}} a_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Puesto que el flujo dado por x_{ij} 's es "conservatorio", y notando que el conjunto de nodos consistente de $\bar{I} \cup I$ y $\bar{I} \cap I = \phi$, entonces la ecuación de conservación se puede escribir como:

$$\sum_{j \in \bar{I}} x_{ij} + \sum_{j \in I} x_{ij} - \sum_{j \in \bar{I}} x_{ji} - \sum_{j \in I} x_{ji} = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

sumando estas ecuaciones sobre $i \in \bar{I}$ obtenemos:

$$\sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in \bar{I}}} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} x_{ij} - \sum_{\substack{j \in \bar{I} \\ i \in \bar{I}}} x_{ji} - \sum_{\substack{j \in \bar{I} \\ i \in I}} x_{ji} = 0$$

Notando que: $\sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in \bar{I}}} x_{ij} = \sum_{\substack{j \in \bar{I} \\ i \in \bar{I}}} x_{ji}$, y que $\sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} x_{ij} = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{I}}} x_{ji}$, la

ecuación se reduce a:

$$\sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} x_{ij} - \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{I}}} x_{ij} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

sustituyendo en la desigualdad (3) obtenemos:

$$0 > \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} b_{ij} - \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{I}}} a_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Supongamos por contradicción que hay un flujo factible representado por \hat{x}_{ij} para $i, j=1, \dots, m$. Entonces $b_{ij} \geq \hat{x}_{ij}$ y $-a_{ij} \geq -\hat{x}_{ij}$ y la desigualdad (4) nos da:

$$0 > \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} b_{ij} - \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{I}}} a_{ij} \geq \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} \hat{x}_{ij} - \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{I}}} \hat{x}_{ij} \quad . \quad . \quad (5)$$

pero como el flujo \hat{x}_{ij} representa un flujo factible, debe ser conservativo.

En forma similar a la ecuación (3'), es claro que el miembro derecho de la desigualdad (5) debe de ser igual a cero. Entonces (5) implica que $0 > 0$, lo cual es imposible. Esta contradicción demuestra que si $\theta = \infty$ no puede haber flujo factible.

4.7 Convergencia del algoritmo out-of-Kilter

Para el propósito del siguiente argumento de convergencia finita hacemos la consideración de que los vectores c , b , a tienen valores enteros. Hay varias propiedades del algoritmo, que deben ser mencionadas: primero, cada vez que un circuito es construido conteniendo un arco no conformable, el número Kilter de ese arco y de

los demás arcos, se reducen en un número entero. Solamente podemos construir un número finito de circuitos, que contengan arcos no conformables, antes de alcanzar la solución óptima. Segundo, después de cada cambio de variable dual, el estado de cada arco, que tiene ambas terminales en \bar{I} , permanece sin cambio. Si (p,q) , es no conformable, entonces, después de un cambio de variable dual, cada nodo en \bar{I} , esta todavía en \bar{I} .

Existen dos posibilidades:

Una posibilidad es que, un nuevo nodo k , entre al conjunto \bar{I} , cada vez que esto ocurra, el conjunto \bar{I} crece, para al menos un nodo. Esto puede ocurrir, a lo mucho en un número finito de veces, antes de que el nodo "p", pase a ser miembro de \bar{I} , y se obtenga un circuito que contenga a (p,q) . Entonces, si el algoritmo no es finito, debe de existir la posibilidad, de que en un número infinito de cambios de variable dual, el conjunto \bar{I} no se incrementa, ó $\theta = \infty$. Mostraremos, que esto no puede ocurrir. Suponga que después de un cambio de variable dual, no hay nuevos nodos que pasen a ser miembros de \bar{I} ; esto es, \bar{I} no se incrementa. Entonces al pasar a la siguiente fase dual, tenemos los mismos conjuntos \bar{I} , I , y las mismas x_{ij} 's. Además cada arco de \bar{I} a I , ha incrementado su \bar{c}_{ij} , y cada arco de I a \bar{I} , ha disminuido su \bar{c}_{ij} . Entonces, después del cambio de variable dual, los nuevos conjuntos S_1' y S_2' , satisfacen:

$$S_1' \subset S_1 \quad \text{y} \quad S_2' \subset S_2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Seleccionando un valor de θ (finito), al menos un arco ha sido sacado del conjunto S_1 o de S_2 . Entonces alguna de las

'contenciones" (c) anteriores es propia.

Ahora; si S_1 y S_2 pudieran decrecer al menos un número finito de veces antes de que $S_1 \cup S_2 = \phi$ y $\theta = \infty$, en cuyo caso el algoritmo termina. Esto completa el argumento de que el algoritmo out-of-Kilter es finito.

1.8 Resumen del algoritmo out-of-Kilter

Empiece con un flujo circulatorio $x = (x_{ij})$ y un vector de potenciales $u = (u_i)$ (arbitrarios).

1. Si existe un arco (s,t) no conformable, ir al paso 2; de otra manera, el flujo circulatorio es factible y óptimo.

2. Aplique el método de las etiquetas para formar un circuito que contenga a (s,t) , donde t es el origen y s el destino, si el arco (s,t) está en uno de los estados no conformables;

$$\bar{c}_{ij} > 0 \quad ; \quad x_{ij} < a_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} = 0 \quad ; \quad x_{ij} < a_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} < 0 \quad ; \quad x_{ij} < b_{ij}$$

de otra manera, sea s el origen y t el destino.

3. (modificación del flujo). Existe un ciclo que contiene a (s,t) .

Aumenta en α el flujo en (s,t) donde α es

$$\min [\alpha_s, a_{st} - x_{st}] \quad \text{si} \quad (s,t) \text{ esta en el estado } \bar{c}_{ij} > 0 \quad ; \quad x_{ij} < a_{ij}.$$

$\min [\alpha_s, b_{st} - x_{st}]$ si (s,t) esta en el estado

$\bar{c}_{ij} = 0$; $x_{ij} < a_{ij}$, o en el estado $\bar{c}_{ij} < 0$; $x_{ij} < b_{ij}$.

$\min [\alpha_t, x_{st} - a_{st}]$ si (s,t) esta en el estado

$\bar{c}_{ij} > 0$; $x_{ij} > a_{ij}$, o en el estado $\bar{c}_{ij} = 0$; $x_{ij} > b_{ij}$

$\min [\alpha_t, x_{st} - b_{st}]$ si (s,t) está en el estado $\bar{c}_{ij} < 0$;

$x_{ij} > b_{ij}$.

Si el arco (s,t) es conformable, regrese a 1. De otra manera, borre las etiquetas y empiece nuevamente en 2.

Método de las etiquetas

Denote con k el origen y con p el destino. Se desea encontrar un ciclo que contenga (k,p) . Etiquete el nodo k con $(-, \infty)$.

1. Sea i un nodo con etiqueta (h, α_i) . Etiquete con (i, α_j) cada nodo j que satisfaga alguna de las condiciones.

$$\lambda \text{ ; } (i,j) \in A, \quad \bar{c}_{ij} > 0 \text{ ; } x_{ij} < a_{ij}$$

$$\mu \text{ ; } (i,j) \in A, \quad \bar{c}_{ij} \leq 0 \text{ ; } x_{ij} < b_{ij}$$

$$\gamma \text{ ; } (j,i) \in A, \quad \bar{c}_{ij} \geq 0 \text{ ; } x_{ji} > a_{ji}$$

$$\rho \text{ ; } (j,i) \in A, \quad \bar{c}_{ij} < 0 \text{ ; } x_{ji} > b_{ji}$$

donde α_j es igual a $\min [\alpha_i, a_{ij} - x_{ij}]$, $\min [\alpha_i, b_{ij} - x_{ij}]$

$[\alpha_i, x_{ji} - a_{ji}]$, $\min [\alpha_i, x_{ji} - b_{ji}]$, en cada uno de los respectivos casos λ, μ, γ y ρ .

2. Si el destino p es etiquetado, considere la trayectoria de k a p en que cada nodo es la etiqueta del siguiente. Aumente, en α_p el flujo en la trayectoria de k a p ; específicamente, aumente (disminuya) en α_p el flujo en un arco (i,j) si el arco está en el sentido opuesto de la circulación del flujo en el arco (k,p) .
3. Si el destino no es etiquetado, termine.

Método de cambio de potencial

Denote por \bar{I} y I es conjunto de nodos etiquetados y no etiquetados al final del método de las etiquetas. Sean los conjuntos

$$S_1 = \{(i,j) \ ; \ i \in \bar{I}, \quad j \in I, \quad c_{ij} > 0, \quad x_{ij} < b_{ij}\}$$

$$S_2 = \{(i,j) \ ; \ i \in I, \quad j \in \bar{I}, \quad c_{ij} < 0, \quad x_{ij} > a_{ij}\}$$

Si $S_1 = S_2 = \phi$ hagamos $\theta = +\infty$. Asimismo termine, pues el problema no tiene solución factible. De otra manera, sea

$$\theta = \min \left[\min_{S_1} (\bar{c}_{ij}), \min_{S_2} (-\bar{c}_{ij}) \right]$$

que es un número finito. Reemplace el vector de potenciales u por un nuevo vector u' donde

$$u'_i = u_i \quad \text{si} \quad i \in I \quad ; \quad u'_i = u_i + \theta \quad \text{si} \quad i \in \bar{I}$$

Es conveniente puntualizar que en esta caso, la correspondiente matriz de costos relativos es dada por

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} \bar{c}_{ij} - \theta & \text{si } (i,j) \in (\bar{I}, I) \\ \bar{c}_{ij} + \theta & \text{si } (i,j) \in (I, \bar{I}) \\ \bar{c}_{ij} & \text{de otra manera} \end{cases}$$

CAPITULO V

CASOS ESPECIALES

En el presente capítulo se mostrarán algunos de los casos especiales del problema general de redes descrito en los capítulos anteriores. Una gran variedad de problemas de la programación lineal pueden ser formulados dentro del marco de lo que denominaremos estructuras de transporte. Estas estructuras pueden dividirse en varias subcategorías las cuales provienen de alguna modificación, a veces elemental de la estructura de transporte. Estas subcategorías son: las estructuras de transporte o transporte con nodos intermedios las estructuras de asignación, estructura de transporte con capacidad limitada y estructura de transporte generalizadas. Todas estas estructuras pueden ser resueltas por el método simplex, aunque esto podría resultar ineficiente, debido a que para cada caso particular han sido desarrollados algoritmos que justifican métodos de solución mas eficientes.

El capítulo se desarrolla como sigue; primeramente se mostrará la forma matemática de transformar el problema $Ax=d$ a la forma $Ax=0$, conduciendonos así de una manera natural a la solución del problema del transporte con el algoritmo Out-of-Kilter. Se muestra también la solución de un problema prototipo de transporte. Cabe mencionar que este algoritmo proporcionara la solución del problema de transporte, pero que existen además

otros algoritmos que lo resuelvan eficientemente, como el algoritmo Stepping Stone de Dantzig, y que se han desarrollado métodos, como el de la esquina noroeste y el método de Vogel, que proporcionan una solución básica factible del problema del transporte.

Otro grupo de problemas de la programación lineal, que pueden ser resueltos por el algoritmo Out-of-Kilter, son los modelos asociados a las redes de optimización, estos modelos incluyen: problemas de flujo máximo, problemas de ruta corta (o más larga), problemas de flujo restringido en una red con costo mínimo, redes de actividad etc. Estos problemas de redes de optimización emanan de los campos de distribución de recursos, secuenciación, inventarios, asignación de recursos, planeación de producción etc.

Se mostrará los problemas de flujo máximo y ruta más corta (o más larga), y se ilustra su método de solución con el algoritmo Out-of-Kilter. Existen otros algoritmos como el de Dijkstra que es muy eficiente para resolver el problema de ruta más corta o el algoritmo de etiquetas de Ford & Fulkerson que resuelve el problema de flujo máximo.

Transformación del problema $Ax=d$ a la forma $Ax=0$

Cualquier problema de flujo en redes con costo mínimo, puede ser transformado a la forma Out-of-Kilter.

Sea el problema

minimice cx

sujeto a

$$Ax = d$$

$$a \leq x \leq b$$

donde A es la matriz de incidencia nodos-arcos. Si $d_i > 0$.

defina una variable $x_{m+1,i}$, tal que, $x_{m+1,i} = d_i$. Para asegurar que $x_{m+1,i} = d_i$, hacemos $a_{m+1,i} = b_{m+1,i} = d_i$.

Similarmente, si $d_i < 0$, entonces definamos una variable $x_{i,m+1}$ tal que $x_{i,m+1} = -d_i$. Para asegurar esto, hacemos $a_{i,m+1} = b_{i,m+1} = -d_i$.

Entonces:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{j=1}^m x_{m+1,i} = x_{m+1,i} \quad \text{si } d_i > 0$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{j=1}^m x_{ji} = -x_{i,m+1} \quad \text{si } d_i < 0$$

Las variables $x_{i,m+1}$, $x_{m+1,i}$, se pueden interpretar como un flujo desde el nodo i , al nuevo nodo $m+1$, y un flujo desde el nodo $m+1$, al nodo i respectivamente.

Igualando a cero las restricciones, obtenemos:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{j=1}^{m+1} x_{ji} = 0 \quad \text{si } di > 0$$

$$\sum_{j=1}^{m+1} x_{ij} - \sum_{j=1}^m x_{ji} = 0 \quad \text{si } di < 0$$

Sumando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$\sum_{j=1}^m x_{m+1,j} - \sum_{j=1}^m x_{j,m+1} = 0$$

con lo que hemos transformado el problema a la forma circulatoria.

El problema de transporte. Considere m puntos origen localizados en un mapa, donde el origen i tiene una oferta de a_i unidades de un producto particular. Además, existen n destinos, donde el destino j tiene una demanda de b_j unidades del producto. Asociado a cada arco (i,j) , hay un costo unitario c_{ij} de transporte del producto. El problema, es determinar la distribución del producto, en tal forma que satisfaga la demanda y se minimice el costo total de transporte.

Con estas definiciones, el problema sera:

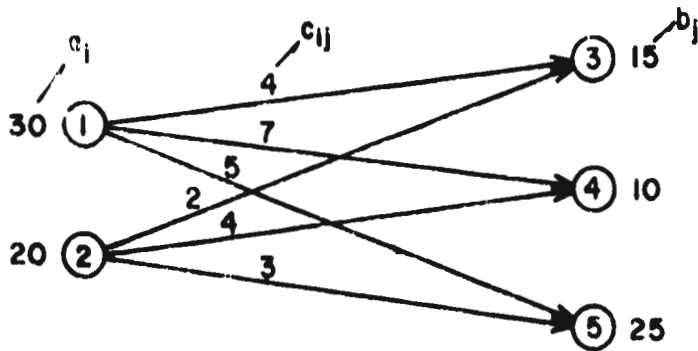
$$\begin{aligned} & \text{minimice } cx \\ & \text{sujeto a} \\ & \quad Ax = b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo prototipo:

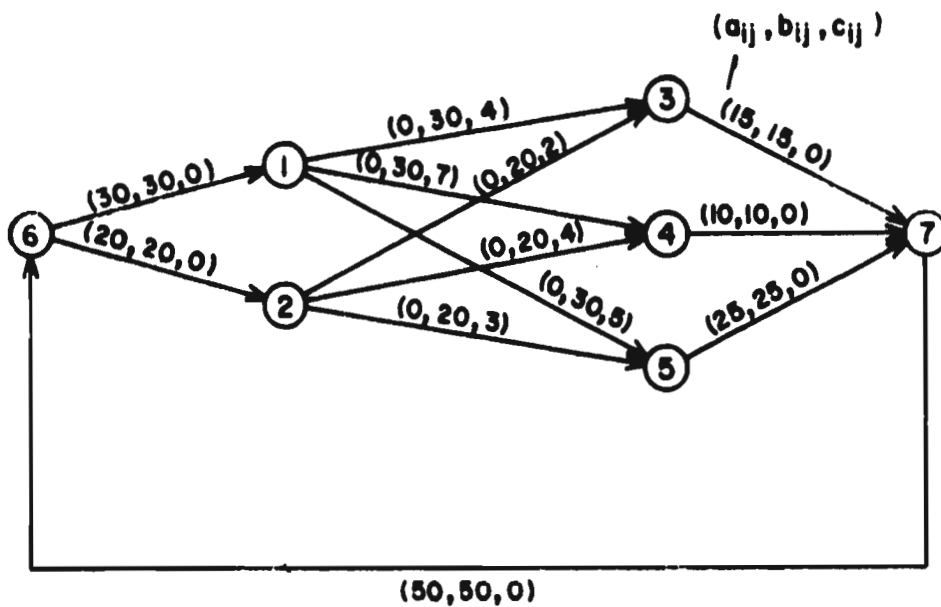
Como ejemplo del problema de transporte considere 2 orígenes y 3 destinos. Los datos aparecen a continuación:

		DESTINO			a_i
		1	2	3	
ORIGEN	1	$C_{11} = 4$	$C_{12} = 7$	$C_{13} = 5$	30
	2	$C_{21} = 2$	$C_{22} = 4$	$C_{23} = 3$	20
b_j		15	10	25	

El problema presentado en forma de red, es como sigue:



El problema puede ser resuelto con el algoritmo out-of-Kilter introduciendo las siguientes modificaciones en la red:



EL PROBLEMA DE ASIGNACION.

El problema de asignación, es un tipo especial de problema de la programación lineal, en donde, un empleado, una máquina, etc., será asignado a una actividad en particular. Hay un costo asociado c_{ij} a cada asignación. La función objetivo será determinar, como deben ser hechas todas las asignaciones, para minimizar el costo total.

La formulación del problema de asignación es como sigue:

$$\text{minimice } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{array}$$

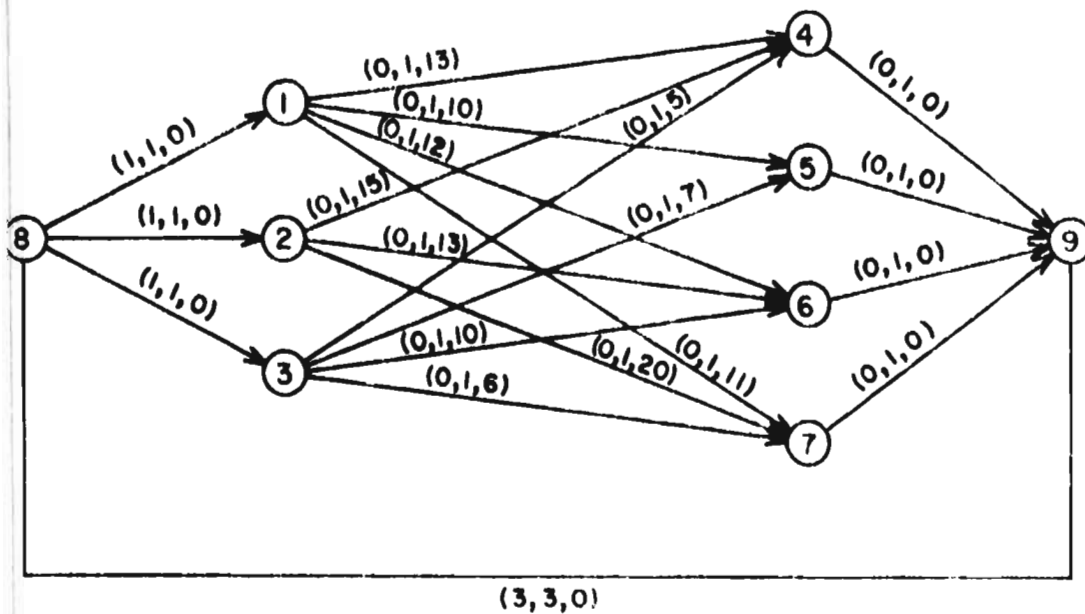
Ejemplo prototipo:

La compañía x, ha comprado 3 nuevas máquinas de diferentes tipos. Hay cuatro lugares disponibles en donde una máquina pudiera ser instalada. Algunos de estos lugares disponibles son mas deseables que otros, para cada máquina en particular, debido a su proximidad a los centros de trabajo. El objetivo es asignar las nuevas máquinas, a los lugares disponibles para minimizar el costo total de manejo de materiales.

COSTO DE MANEJO DE MATERIALES

		LUGAR			
		1	2	3	4
MAQUINA	1	13	10	12	11
	2	15	-	13	20
	3	5	7	10	6

El problema puede ser resuelto con el algoritmo out-of-Kilter, mediante el siguiente planteamiento:



El problema de flujo máximo. Considere una red con m nodos y n arcos, asociemos con cada arco (i,j) un límite inferior de flujo $a_{ij}=0$ y un límite superior b_{ij} . Consideremos que las capacidades de los arcos son enteras. No hay costos involucrados en el problema de flujo máximo. En esta red deseamos encontrar la máxima cantidad de flujo del nodo 1 al nodo m .

Sea f la cantidad de flujo en la red del nodo 1 al m , entonces el problema de flujo máximo puede establecerse como sigue:

maximice f

sujeto a

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = \begin{cases} f & \text{si } i=1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1, m \\ -f & \text{si } i=m \end{cases}$$

$$x_{ij} \leq b_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

donde las sumas y las desigualdades se consideran sobre los arcos existentes en la red. Esta es la denominada formulación nodos-arcos para el problema de flujo máximo, puesto que la matriz de restricciones es una matriz de incidencia nodos-arcos. Notamos que f es una variable y sea A la matriz incidencia nodos-arcos, podemos escribir el problema de flujo máximo en forma matricial

maximice f

sujeto a $(e_m \dots e_1)f + Ax = 0$

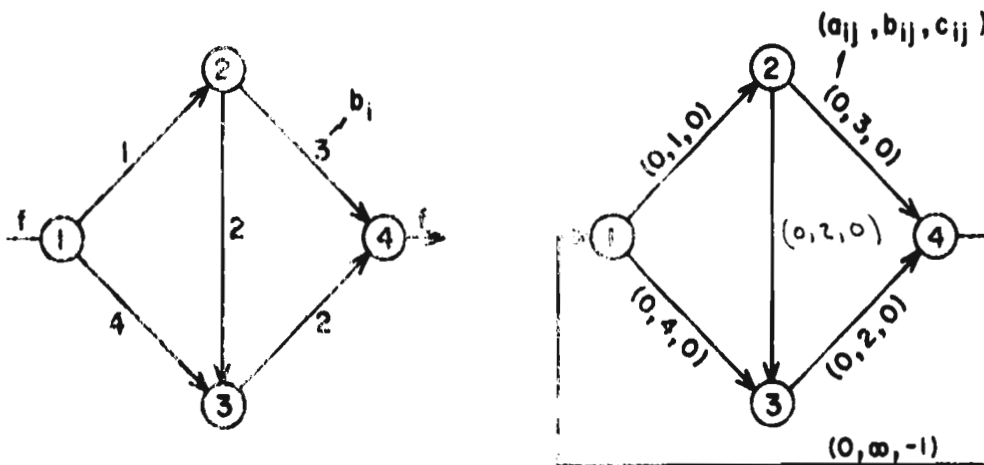
$x \leq b$

$x \geq 0$

Esto proporciona la formulación directa del problema de flujo máximo en la forma Out-of-Kilter, en donde el flujo es circulario.

Recordando que el algoritmo Out-of-Kilter minimiza la función objetivo, asignamos un costo de cero a cada una de las variables de flujo, excepto $x_{m,1} \equiv f$, a la cual asignamos un costo de -1 .

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de un problema de flujo máximo y su problema equivalente en la forma Out-of-Kilter.



Cabe mencionar que existe otro algoritmo más eficiente para resolver el problema de flujo máximo en una red, este es el algoritmo de las etiquetas diseñado también por Ford & Fulkerson.

El problema de ruta más corta. El problema de ruta más corta, consiste en encontrar la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo m. El costo de la trayectoria es la suma de los costos sobre los arcos en la trayectoria.

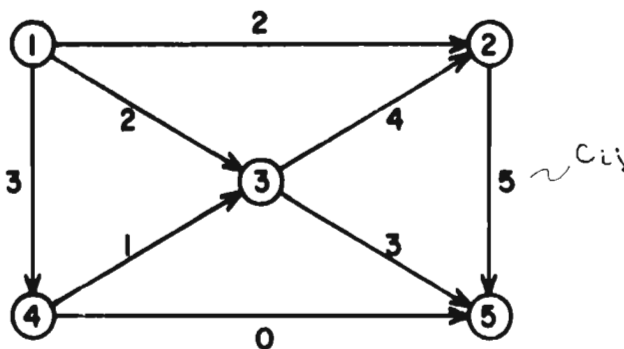
El problema de ruta más corta en el contexto de redes, consiste en enviar una unidad de flujo, del nodo 1 al nodo m, con costo mínimo.

La formulación matemática de este problema es como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{minimice} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeto a} &&& \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ ó } m \\ -1 & \text{si } i=m \end{cases} \\ &&& x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

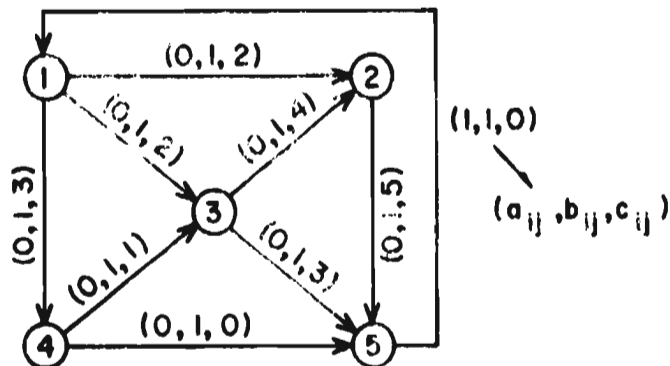
El problema de ruta más corta puede ser reformulado para ser resuelto con el algoritmo Out-of-Kilter, usando la transformación del problema $Ax=d$ a la forma $Ax=0$.

Para ilustrar como se resuelve este problema con el algoritmo Out-of-Kilter, consideremos la siguiente red:



En donde los números sobre los arcos son las distancias, y se desea encontrar la ruta más corta entre el nodo 1 y el nodo 5. Primero añadimos un arco (5,1) con límite inferior de flujo de uno, límite superior de uno, y costo por unidad de flujo de cero. Los demás arcos de la red, tendrán un límite inferior de cero, límite superior de uno y los costos por unidad de flujo iguales a c_{ij} .

A continuación se muestra la red anterior ya transformada para ser resuelta con el algoritmo Out-of-Killer.



Para encontrar la ruta más larga entre los nodos 1 y m, añadimos el arco (m,1) con límite inferior de flujo de cero, límite superior de uno y costo igual a cero. Para los demás arcos (i,j), límite inferior de cero, límite superior de uno y costo $c_{ij} = -c_{ij}$.

El algoritmo de Dijkstra* que resuelve el problema de flujo a costo mínimo, se puede aplicar al problema de ruta más corta con mejores resultados.

* Dijkstra, E. W. "A Note on Two Problems in Connection with Graphs". Numerische Mathematik. Vol. 1, pp 269-271, 1959.

APENDICE I •

El problema de redes con flujo restringido y costo mínimo.

El problema de redes con flujo restringido y costo mínimo, consiste en determinar el flujo de mínimo costo, sujeto a un conjunto de restricciones de capacidad. La formulación del problema es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimice} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_{ji}) = 0 \quad i=1, \dots, n \\ & a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad i, j=1, \dots, n \end{array}$$

donde x_{ij} es el flujo en el arco (i,j) ; c_{ij} es el costo por unidad de flujo en el arco (i,j) ; a_{ij} es la capacidad mínima de flujo en el arco (i,j) ; b_{ij} es la capacidad máxima de flujo en el arco (i,j) .

El algoritmo "Out-of-Kilter", desarrollado por L. R. Ford & D. R. Fulkerson, se aplicó para resolver este tipo de problemas. El programa "REDES", desarrollado en el presente trabajo, determina el flujo de mínimo costo sobre una red con límites superiores e inferiores de flujo, y con costo unitario de transporte en cada arco de la red. La aplicación general del algoritmo, es a redes de flujo circulatorias. Sin embargo, cualquier red de flujo con nodos fuente y destino múltiples, puede ser transformado a una red de flujo circulatoria.

Entrada de datos y salida de resultados

Se muestra a continuación la forma de alimentar los datos al programa "REDES".

En tarjetas de control; para correr el programa por tarjeta en la 700 del CSC de la UNAM, se debe hacer como sigue:

COLUMNAS

	2	3	4	5	6	7	8	9	0						
>	J	Ø	B		<	.	.	.	>						
>	U	S	E	R	=	<	C	L	A	V	E	>	<CONTRASEÑA>;	CLASS=5;	BEGIN
>	C	Ø	M	P	I	L	E	<	.	.	.	>	FØTRAN ;	DATA	

TARJETAS DE PROGRAMA FUENTE

```
> D A T A F I L E S
```

TARJETAS DE DATOS

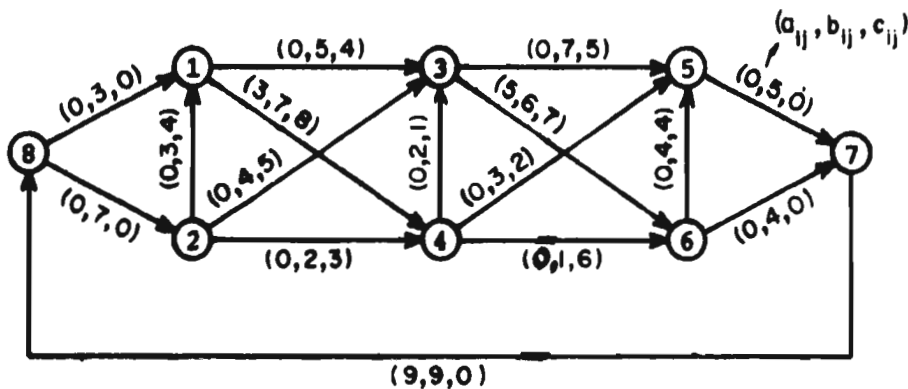
```
> E N D J Ø B
```

en donde;

<I> es un caracter inválido en la columna 1, por ejemplo
multiperforación 1,2,3

<...> es la identificación o nombre que se le quiere dar
al programa

Para ilustrar, consideremos la siguiente red:



Formato de los datos de entrada.- Los datos son leídos con formato libre, o sea que, cada dato se separa del siguiente por comas. Después del último dato de la tarjeta, o del renglón (si se corre por teletipo), se pone una coma (,) y un asterisco (*). Como ejemplo, sea la red mostrada en la figura anterior, en la cual hemos numerado cada nodo del 1 al 8, y los números sobre los arcos representan la capacidad mínima, la capacidad máxima, y el costo por unidad de transporte respectivamente.

En la primera tarjeta a partir de la columna ⁴7 va el número de nodos y el número de arcos de la red, luego para cada arco, una tarjeta que contenga: número del nodo origen, número del nodo destino, costo por unidad de flujo, capacidad máxima del arco, capacidad mínima del arco y un flujo inicial que bien puede ser cero.

Para el ejemplo de la red anterior, los datos de entrada son:

Columna												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	...		
8	,	1	6	,	*							
8	,	1	,	0	,	3	,	0	,	0	,	*
8	,	2	,	0	,	7	,	0	,	0	,	*
1	,	3	,	4	,	5	,	0	,	0	,	*
1	,	4	,	8	,	7	,	3	,	0	,	*
2	,	1	,	4	,	3	,	0	,	0	,	*
2	,	3	,	5	,	4	,	0	,	0	,	*
2	,	4	,	3	,	2	,	0	,	0	,	*
3	,	5	,	5	,	7	,	0	,	0	,	*
3	,	6	,	7	,	6	,	5	,	0	,	*
4	,	3	,	1	,	2	,	0	,	0	,	*
45	,	5	,	2	,	3	,	0	,	0	,	*
4	,	6	,	6	,	1	,	0	,	0	,	*
5	,	7	,	0	,	5	,	0	,	0	,	*
6	,	7	,	0	,	4	,	0	,	0	,	*
6	,	5	,	4	,	4	,	0	,	0	,	*
7	,	8	,	0	,	9	,	9	,	0	,	*

i *j* C_{ij} a_{ij} b_{ij} x_{ij}

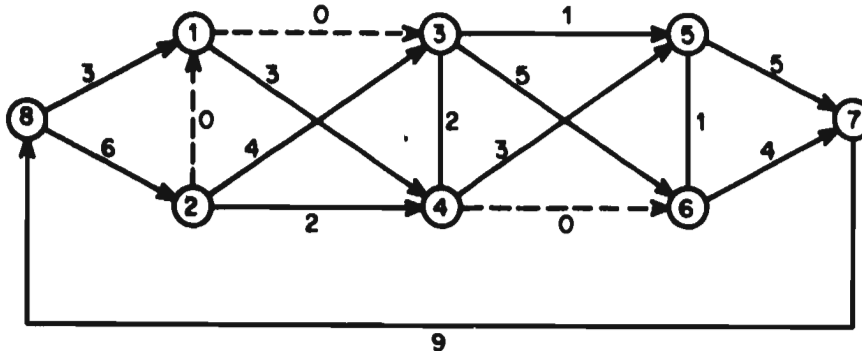
Salida de resultados.-

El programa imprime en la primera hoja, el valor de la función objetivo y el número de iteraciones para alcanzar el óptimo.

En la segunda hoja se imprime una tabla en la que se muestran los datos de entrada y el flujo óptimo en la red. En la tercera hoja se imprime otra tabla que indica la variable dual asociada a cada nodo.

A continuación, en la siguiente hoja, se muestra la salida de resultados para la red del ejemplo anterior.

Poniendo esos resultados en forma de red, y escribiendo sobre cada uno de los arcos el valor del flujo óptimo;



los arcos (1,3), (2,1) y (4,6) están vacíos; (2,3), (2,4), (4,3) y (4,5) están saturados; los arcos (5,7), (6,7) y (7,8) están necesariamente saturados para toda solución óptima, en virtud de la construcción circulatoria de la red.

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO 102
 NUMERO DE ITERACIONES 14

FLUJO OPTIMO EN LA RED

ORIGEN	DESTINO	FLU. MIN.	FLU. MAX.	COSTO	FLUJO OPTIMO
9	1	0	3	0	3
8	2	0	7	0	6
1	3	0	5	4	0
1	4	3	7	3	3
2	1	0	3	4	0
2	3	0	4	5	4
2	4	0	3	3	2
3	5	0	7	5	1
3	6	5	5	7	5
4	3	0	2	1	2
4	5	0	3	2	3
4	6	0	1	6	0
5	7	0	5	0	5
6	7	0	4	0	4
6	5	0	4	4	1
7	8	0	3	0	9

NODOS VARIABLE DUAL

1	11
2	15
3	10
4	11
5	5
6	9
7	5
8	15

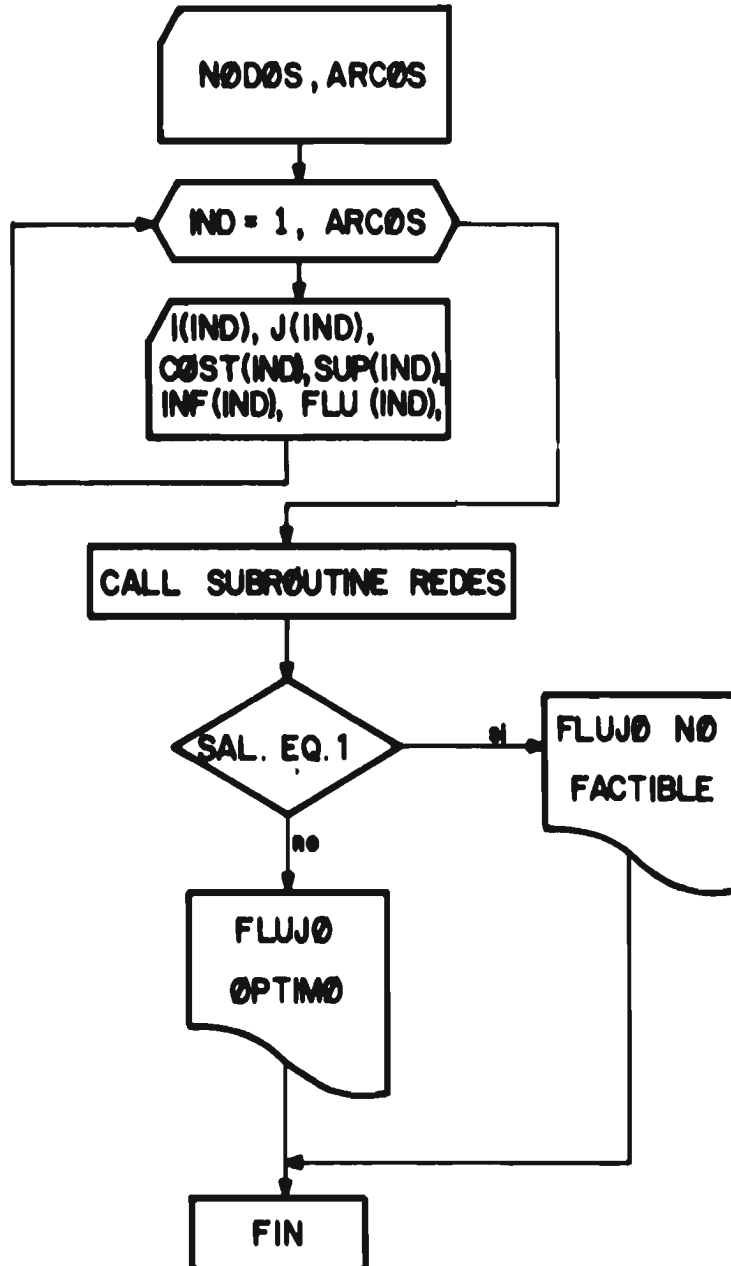
RESTRICCIONES DEL PROGRAMA

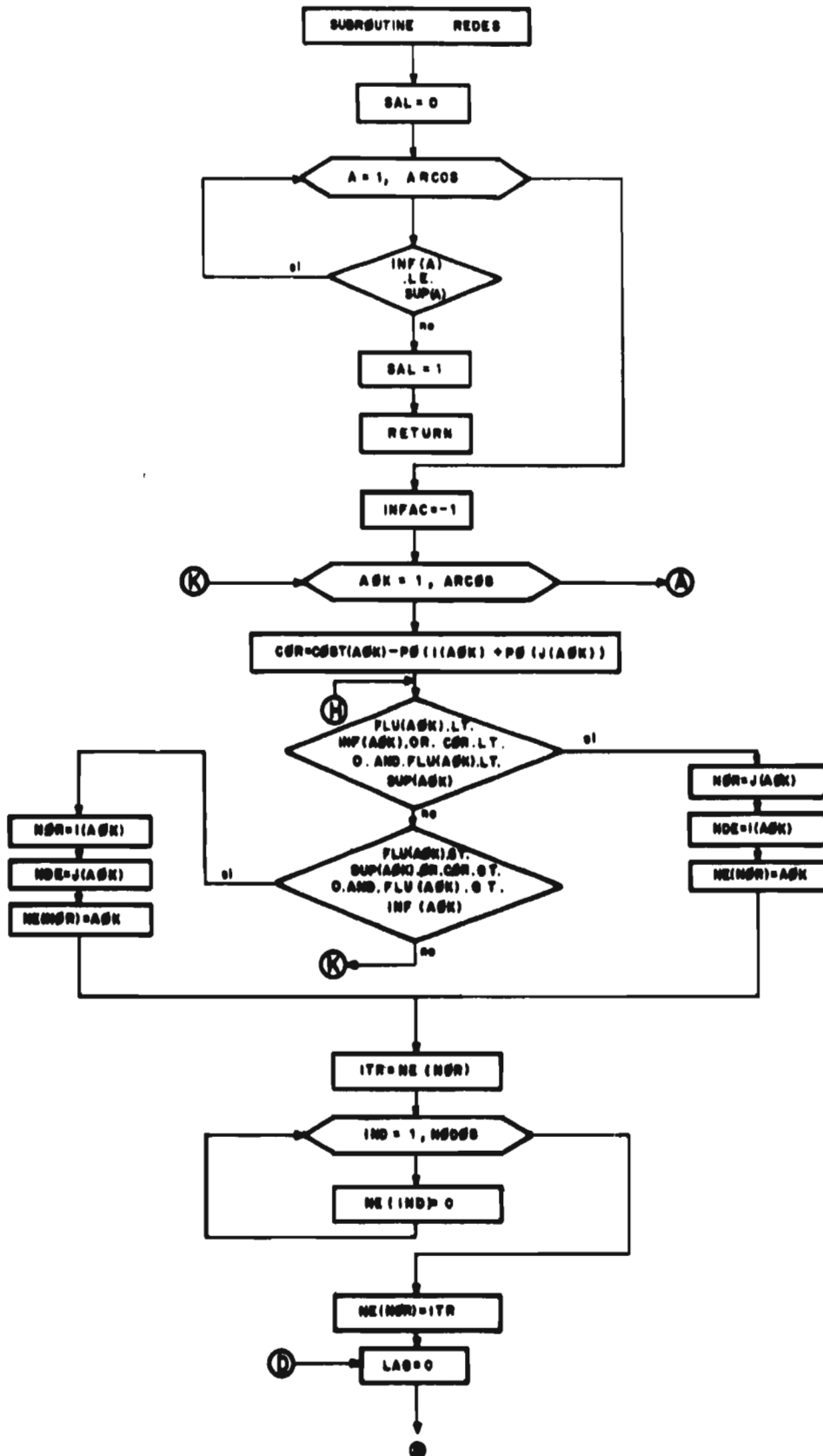
1. El programa está diseñado para manejar un máximo de 100 arcos. Si se desea aumentar la capacidad, será necesario modificar los arreglos; $I(N)$, $J(N)$, $INF(N)$, $SUP(N)$, $C\phi ST(N)$, $FLU(N)$ y $P\phi(N)$, para el número de arcos requerido.
2. La numeración de los nodos puede ser del 1 al 100, si se desea utilizar una numeración mayor se deberá modificar el arreglo $NE(N)$.
3. La numeración de los nodos de la red, puede ser de cualquier forma, siempre y cuando el número mayor de nodo, es igual al número de nodos de la red.

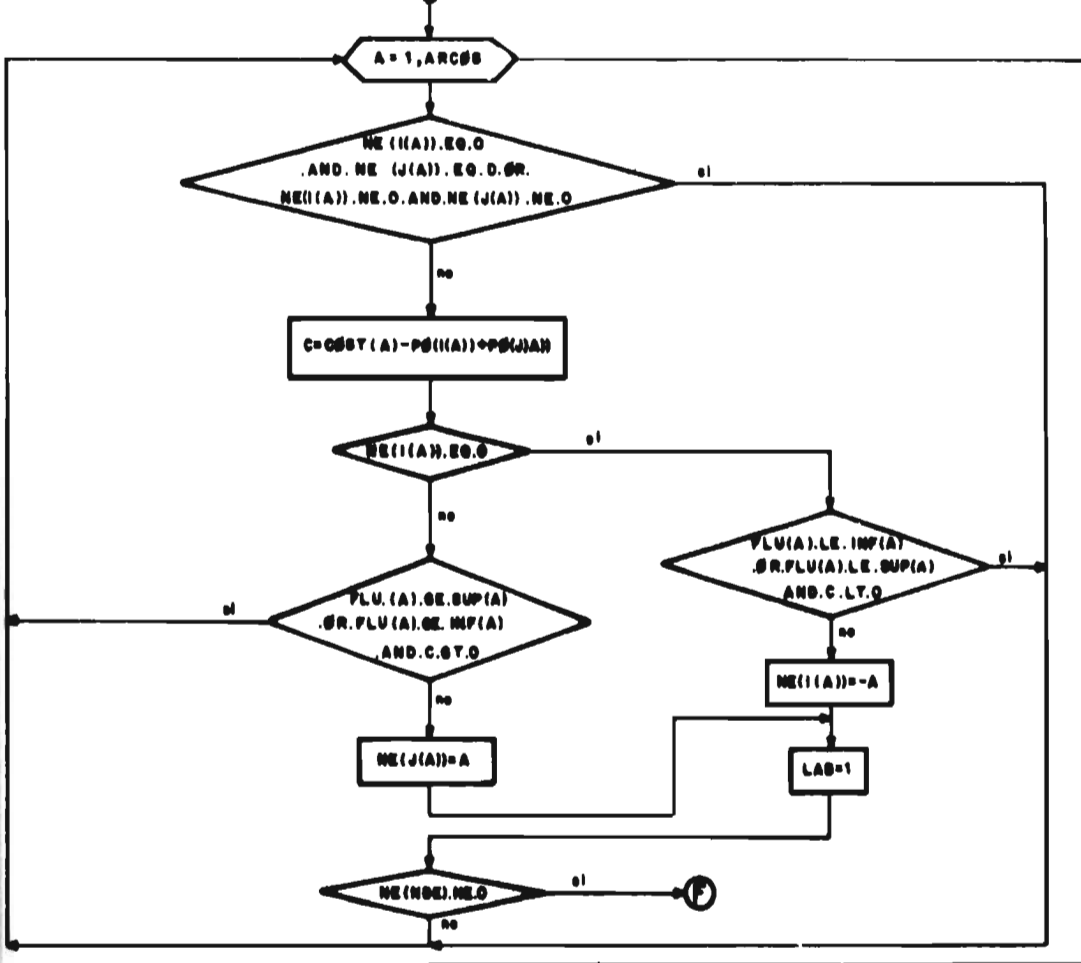
A N E X O

- 1. DIAGRAMA DE FLUJO**
- 2. VARIABLES Y ARREGLOS DEL PROGRAMA**
- 3. LISTADO**

PROGRAMA PRINCIPAL

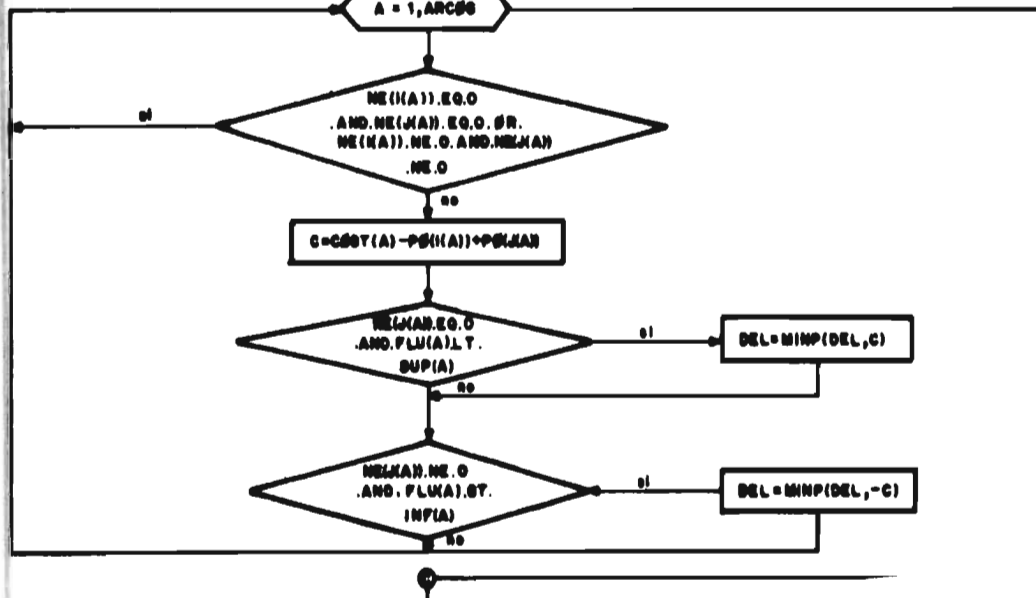


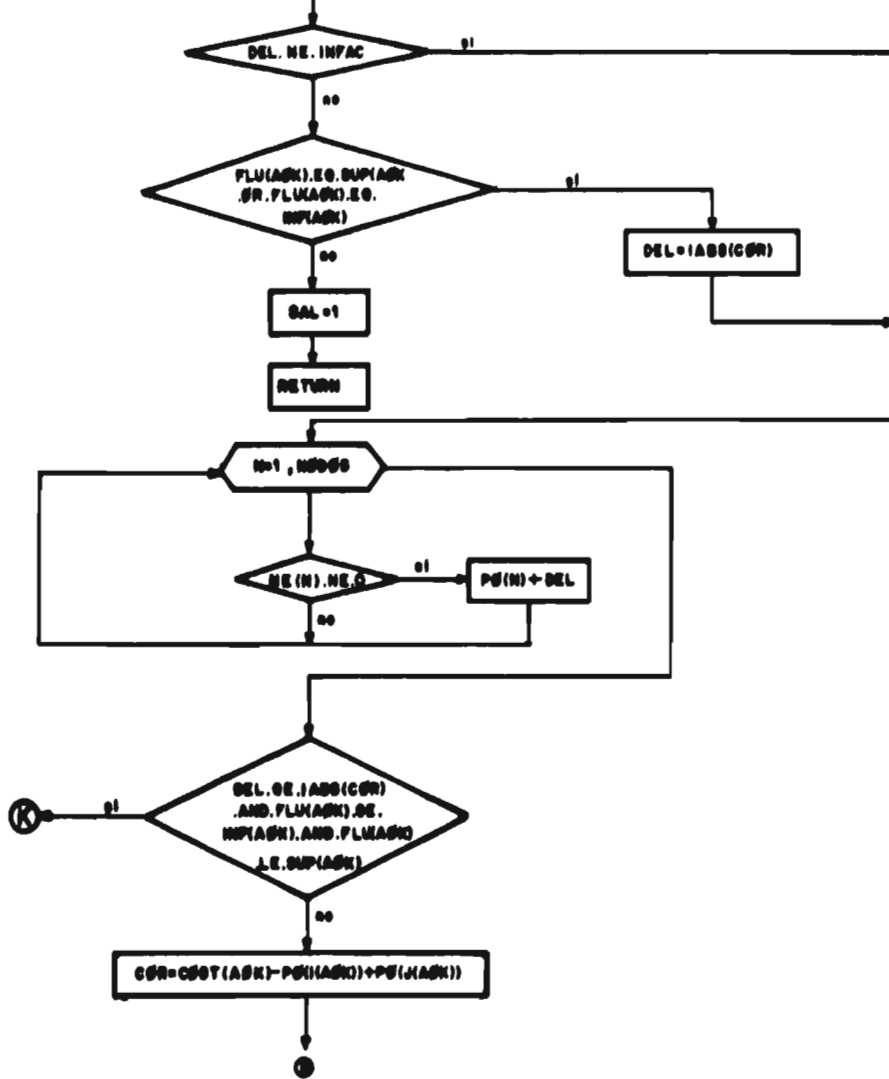


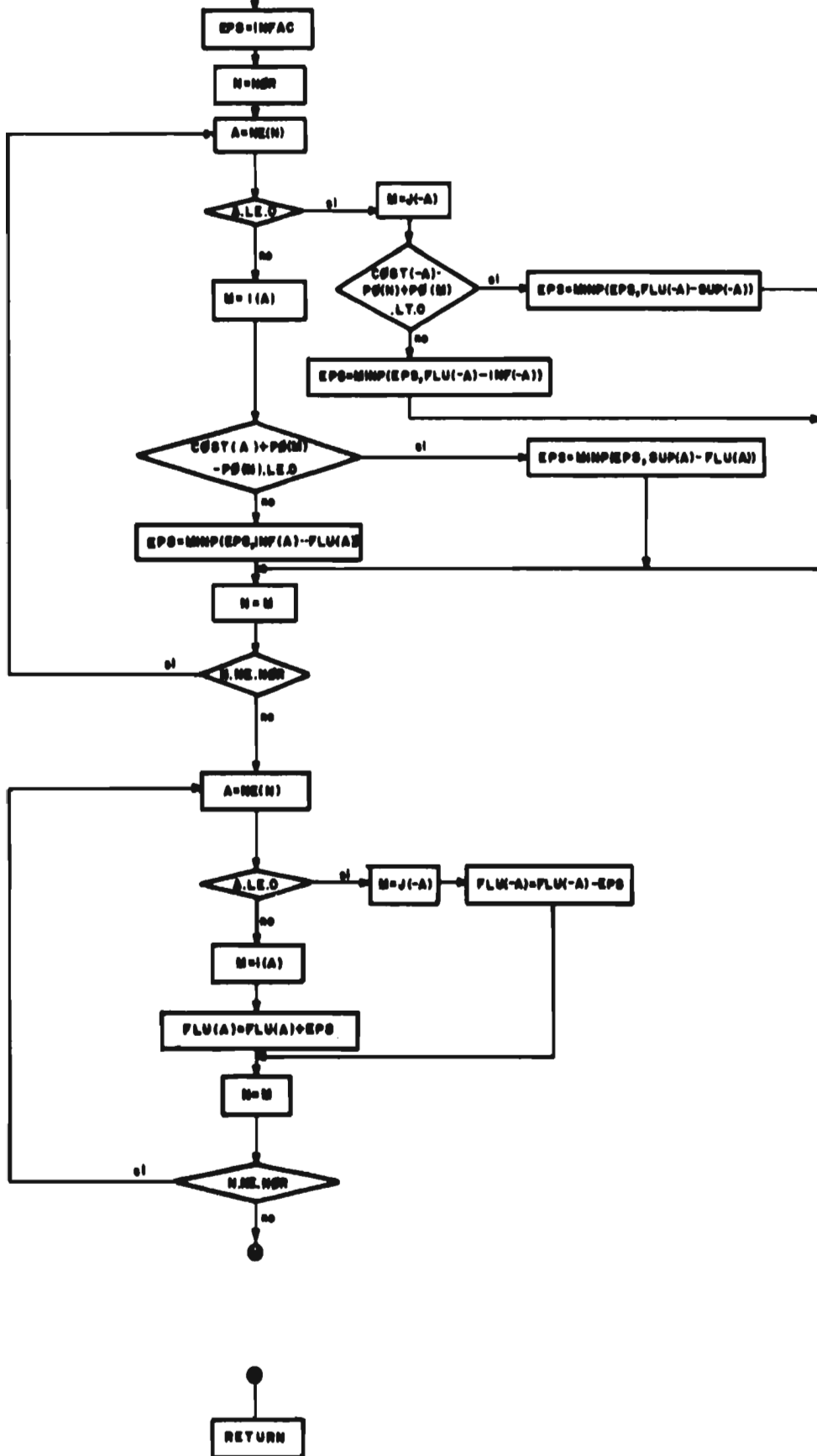


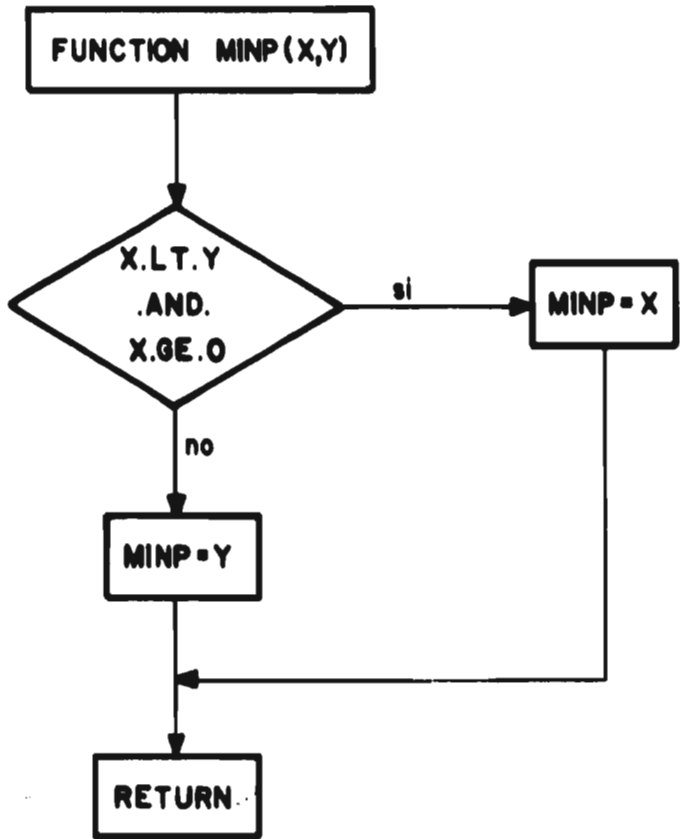
DEL = INFAC

A = 1, ARCS









2. ARREGLOS, VARIABLES Y SUBROUTINAS

NØDØS	Número de nodos de la red
ARCØS	Número de arcos en la red
I(A)	Nodo origen del arco A
J(A)	Nodo destino del arco A
CØST(A)	Costo por unidad de flujo en el arco A
SUP(A)	Límite superior del flujo en el arco A
INF(A)	Límite inferior del flujo en el arco A
FLU(A)	Flujo en el arco A
PØ(N)	Variable dual, es el valor relativo de introducir una unidad de flujo dentro de la red, en el nodo N
KØB	Valor de la función objetivo
IT	Número de iteraciones
SAL	Determina si el flujo es factible (SAL=0), o no factible (SAL=1)
CØR	Costo relativo del arco C_{ij}
NØR	Nodo origen en el procedimiento de etiquetación
NDE	Nodo destino en el procedimiento de etiquetación
NE(N)	Etiqueta del nodo N
ITR	Variable temporal que guarda el valor de la etiqueta del nodo origen
LAB	Indica si fue etiquetado algún nodo
DEL	Guarda el valor mínimo de la función MINP
EPS	Valor del aumento (o disminución) de flujo en el arco A

FUNCION MINP (X,Y)

Calcula el mínimo de dos variables (x,y)

SUBROUTINA REDES;

Determina el vector de flujos de mínimo

costo $FLU(A)$ y las variables duales $P\phi(N)$.

```

#FILE (LH80)REDES ON FACK
1 FILE 5=FILES,UNIT=REMOTE
2 FILE 6=FILE6,UNIT=REMOTE
99 $RESET FREE
300 C ESTE PROGRAMA DETERMINA EL FLUJO DE MINIMO COSTO SOBRE UNA RED
400 C CIRCULATORIA DE FLUJO RESTRINGIDO CON LIMITES SUPERIOR E INFE-
500 C RIOR. CADA ARCO DIRIGIDO DE LA RED ESTA DEFINIDO POR LOS NODOS
600 C I(IND) Y J(IND), TIENE LIMITES DE FLUJO SUPERIOR E INFERIOR
700 C SUP(IND) Y INF(IND), Y COSTO POR UNIDAD DE FLUJO COST(IND).
800 C LOS COSTOS Y LIMITES DE FLUJO PUEDEN SER CUALQUIER ENTERO
900 C POSITIVO O NEGATIVO. UN LIMITE SUPERIOR DE FLUJO DEBE SER MAS
1000 C GRANDE O IGUAL QUE SU CORRESPONDIENTE LIMITE INFERIOR PARA QUE
1100 C EXISTA UNA SOLUCION FACTIBLE.
1200 C PUEDE HABER CUALQUIER NUMERO DE ARCOS PARALELOS CONECTANDO
1300 C CUALQUIER PAR DE NODOS.
1400 C EL PROGRAMA PROPORCIONA COMO RESULTADOS LOS VECTORES -FLU- Y
1500 C -PO-. FLU(IND) ES EL FLUJO OPTIMO CALCULADO SOBRE EL ARCO
1600 C -IND- DE LA RED. PO(IND) ES EL VALOR DE LA VARIABLE DUAL LA
1700 C CUAL REPRESENTA EL VALOR RELATIVO DE INTRODUCIR UNA UNIDAD DE
1800 C FLUJO DENTRO DE LA RED EN EL NODO N.
1900 C SE PUEDE INICIAR EL PROGRAMA CON CUALQUIER VALOR EN EL VECTOR
2000 C FLU (TAL COMO UNA SOLUCION PREVIA O ADIVINADA) FACTIBLE O NO.
2100 C ESTE PROGRAMA SIGUE EL ALGORITMO -OUT- OF KILTER- DESCRITO POR
2200 C D.R. FULKERSON.
2300
2400
2500
2600
2700
2800 COMMON I(100),J(100),INF(100),SUP(100),COST(100),FLU(100),PO(100)
2900 COMMON IT
3000 INTEGER SUP,COST,FLU,PO,ARCOS
3100 10 READ(5,/) NODOS, ARCOS
3200 C NUMERO DE NODOS Y NUMERO DE ARCOS
3300 20 DO 30 IND=1,ARCOS
3400 READ(5,/)I(IND),J(IND),COST(IND),SUP(IND),INF(IND),FLU(IND)
3500 30 CONTINUE
3600 C ARCOS DEFINIDOS POR LOS NODOS I ORIGEN, J DESTINO,COST COSTO,
3700 C SUP CAPACIDAD MAXIMA, INF CAPACIDAD MINIMA, FLU FLUJO INICIAL
3800 CALL REDES(NODOS,ARCOS,SAL)
3900 IF(SAL.EQ.1) GO TO 40
4000 DO 35 IND=1,ARCOS
4100 IOR=COST(IND)*FLU(IND)
4200 KOB=KOB+IOR
4300 35 CONTINUE
4400 WRITE(6,210)KOB,IT
4500 210 FORMAT(1H1,10X,"VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO",110,///,10X,
4600 1"NUMCRO DE ITERACIONES",I3)
4700 WRITE(6,200)

```

```

4900 200 FORMAT(1H1,22X,"FLUJO OPTIMO EN LA RED",/,1X,72(1H-),/,4X,
4900 1"ORIGEN",3X,"DESTINO",2X,"FLU. MIN.",1X,"FLU. MAX.",4X,"COSTO",4X,
5000 2"FLUJO OPTIMO",/,1X,72(1H-))
5100 DO 31 IND=1,ARCOS
5200 WRITE(6,201) I(IND),J(IND),INF(IND),SUP(IND),COST(IND),FLU(IND)
5300 201 FORMAT( 6I10)
5400 31 CONTINUE
5500 WRITE(6,202)
5600 WRITE(6,202) (IND,PO(IND),IND=1,NODOS)
5700 202 FORMAT(1H1,25X,"NODOS",5X,"VARIABLE DUAL",/,1X,72(1H-))
5800 205 FORMAT(25X,I3,9X,I8)
5850 KOR=0
5900 GO TO 10
6000 - 99 CALL EXIT
6100 40 WRITE(6,206)
6200 206 FORMAT(3X,"FLUJO NO FACTIBLE")
6300 GO TO 10
6400 STOP
6500 END
6600 - SUBROUTINE REDES(NODOS,ARCOS,SAL)
6700 COMMON I(100),J(100),INF(100),SUP(100), COST(100),FLU(100),PO(100)
6800 COMMON IT
6900 INTEGER ARCOS,SUP,COST,FLU,PO,COR,C,EPS, A,AOK,DEL
7000 DIMENSION NE(100)
7100 SAL=0
7200 C DETERMINACION DE LA FACTIBILIDAD DE FLUJOS EN LA RED
7300 DO 1 A=1,ARCOS
7400 IF (INF(A).LE.SUP(A)) GO TO 1
7500 SAL=1
7600 RETURN
7700 1 CONTINUE
7800 INFAC= 1
7900 C LA RED ES FACTIBLE *SE PROCEDE A DETERMINAR EL FLUJO OPTIMO *
8000 DO 2 AOK=1,ARCOS
8100 C SI EXISTE ARCO NO CONFORMABLE SE MODIFICAN FLUJOS O POTENCIAL
8200 C HASTA LOGRAR QUE ESTE ARCO SEA CONFORMABLE
8300 C ENCONTRAR ARCO NO CONFORMABLE.
8400 COR=COST(AOK)-F0(I(AOK))+PO(J(AOK))
8500 3 IF ((FLU(AOK).LT.INF(AOK)) .OR. (COR.LT.0.AND,FLU(AOK).LT.SUP
8600 1 (AOK))) GO TO 4
8700 IF ((FLU(AOK).GT.SUP(AOK)) .OR. (COR.GT.0.AND,FLU(AOK).GT.INF
8800 1 (AOK))) GO TO 5
8900 GO TO 2
9000 C EL ARCO AOK EN CUESTION ES CONFORMABLE
9100 4 NOR=J(AOK)
9200 NDE=I(AOK)
9300 NE(NOR)=+AOK
9400 C EL ARCO AOK ESTA FUERA DE BALANCE Y SE ENCUENTRA EN EPO L1,E1,
9500 C SE ETIQUETA EL NODO FINAL DEL ARCO Y SE PERMITE PASAR FLUJO AD
9600 C NAL
9700 GO TO 6

```

```

9800      5      NOR I(AOK)
9900      NDE-J(AOK)
10000     NE(NOR)--AOK
10100 C     EL ARCO AOK ESTA FUERA DE BALANCE Y SE ENCUENTRA EN EDO L2,B2.
10200 C     SE ETIQUETA EL NODO INICIAL DEL ARCO Y SE PERMITE DISMINUIR FL
10300 C     SE INICIA METODO DE ETIQUETAS PARA DISMINUIR DESVIACION EN EL
10400 C     SE BORRAN ETIQUETAS EN LOS MODOS EXCEPTO PARA EL NODO ORIGEN
10500      6      ITR=NE(NOR)
10600      DO 7 IND=1,NODOS
10700      NE(IND)=0
10800      7      CONTINUE
10900      NE(NOR)=ITR
11000      LAB=0
11100 C     9      SE ETIQUETAN TODOS LOS NODOS SIN ETIQUETA QUE SE CONECTAN POR
11200 C     MEDIO DE UN ARCO A NODOS ETIQUETADOS.
11300 C     DE UN ARCO A NODOS ETIQUETADOS
11400      DO 10 A=1,ARCOS
11500      IF((NE(I(A)).EQ.0 .AND. NE(J(A)).EQ.0) .OR.
11600      1      (NE(I(A)).NE.0 .AND. NE(J(A)).NE.0) ) GO TO 10
11700      C = COST(A)-PO(I(A))+PO(J(A))
11800      IF(NE(I(A)).EQ.0) GO TO 11
11900      IF(FLU(A).GE.SUP(A).OR. (FLU(A) .GE. INF(A).AND.C.GT.0))
12000      1      GO TO 10
12100      NE(J(A))=+A
12200      GO TO 12
12300      11      IF(FLU(A).LE.INF(A).OR. (FLU(A) .LE. SUP(A).AND.C.LT.0))
12400      1      GO TO 10
12500      NE(I(A))=-A
12600      12      LAB=1
12700 C     SE ETIQUETA UN NODO Y SE VERIFICA SI EL NODO DESTINO
12800 C     ESTA ETIQUETADO.
12900 C     SI EL NODO DESTINO SE ETIQUETA;SE MODIFICA EL FLUJO
13000      IF(NE(NDE).NE.0) GO TO 13
13100      10      CONTINUE
13200      IF(LAB.NE.0) GO TO 9
13300 C     NO HAY CIRCUITO QUE CONTIENGA EL ARCO NO CONFORMABLE Y EMPIEZA
13400 C     METODO DE CAMBIO DE POTENCIAL.
13500      DEL=INFAC
13600      DO 14 A=1,ARCOS
13700      IF((NE(I(A)).EQ.0.AND.NE(J(A)).EQ.0).OR.
13800      1      (NE(I(A)).NE.0.AND.NE(J(A)).NE.0))GO TO 14
13900      C = COST(A) - PO(I(A)) + PO(J(A))
14000      IF( NE(J(A)).EQ.0 .AND.FLU(A).LT.SUP(A)) DEL = MINF(DEL, C)
14100      IF( NE(J(A)).NE.0 .AND.FLU(A).GT.INF(A)) DEL = MINF(DEL,-C)
14200      14      CONTINUE
14300      IF(DEL.NC.INFAC) GO TO 37
14400      IF((FLU(AOK).EQ.SUP(AOK)).OR.(FLU(AOK).EQ.INF(AOK))) GO TO 42
14500      SAL=1
14600      RETURN
14700      42      DEL=IABS(COR)
14800      37      DO 16 N=1,NODOS

```

```

14900          IF(NE(N).NE.0) PO(N)=PO(N)IDEL
15000      16      CONTINUE
15100          IT=IT+1
15200          IF(DEL.GE.IABS(COR).AND.FLU(AOK).GE.INF(AOK)
15300      1      .AND.FLU(AOK).LE.SUP(AOK)) GO TO 2
15400          COR = COST(AOK) - PO(I(AOK)) + PO(J(AOK))
15500          GO TO 9
15600 C      PROBLEMA NO FACTIBLE
15700      13      EPS=INTAC
15800          N=NOR
15900      17      A=NE(N)
16000          IF(A.LE.0) GO TO 18
16100          M=I(A)
16200          IF(COST(A)-PO(M)+PO(N).LE.0) GO TO 19
16300          EPS=MINP(EPS,INF(A)-FLU(A))
16400          GO TO 20
16500      19      EPS=MINP(EPS,SUP(A)-FLU(A))
16600          GO TO 20
16700      18      M=J(-A)
16800          IF(COST(-A)-PO(N)+PO(M).LT.0) GO TO 22
16900          EPS=MINP(EPS,FLU(-A)-INF(-A))
17000          GO TO 20
17100      22      EPS=MINP(EPS,FLU(-A)-SUP(-A))
17200      20      N=M
17300 C      SE PREGUNTA SI DETERMINAMOS EL AUMENTO DE FLUJO PERMITIDO
17400          IF(N.NC.NOR) GO TO 17
17500      21      A=NC(N)
17600          IF(A.LE.0) GO TO 23
17700          M=I(A)
17800          FLU(A)=FLU(A)+EPS
17900          GO TO 24
18000      23      M=J(A)
18100          FLU(-A)=FLU(-A)-EPS
18200      24      N=M
18300          IF(N.NE.NOR) GO TO 21
18400          IT=IT+1
18500          GO TO 3
18600 C      SE PRUEBA SI EL ARCO ESTA BALANCEADO
18700      2      CONTINUE
18800          RETURN
18900          END
19000      ~      FUNCTION MINP(X,Y)
19100          INTEGER X,Y
19200          IF(X.LT.Y .AND. X.GE.0) GO TO 26
19300          MINP=Y
19400          GO TO 27
19500      26      MINP=X
19600      27      RETURN
19700          END
*
```

APENDICE II

En este apéndice se procede a resolver manualmente la red que sirvió como ejemplo para ilustrar el uso del programa REDES, en el apéndice I.

Organización de los cálculos.

La representación de la red que se va a utilizar, es en forma tabular (o matricial) (fig.1). Cada cuadro (i,j) está dividido en cuatro subcuadros que contienen las cantidades x_{ij} , $x_{ij}-b_{ij}$, $x_{ij}-a_{ij}$ y \bar{c}_{ij} , según se puede apreciar en la figura.

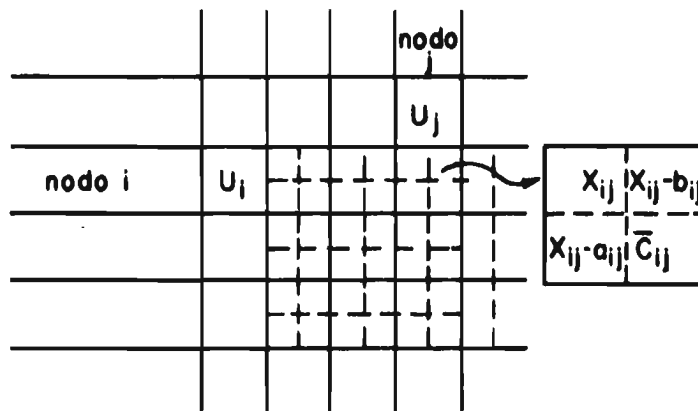


FIGURA 1

Además la tabla incluye una columna y con renglón marginales que contienen los potenciales u_i y u_j , respectivamente.

Procedimiento de etiquetación.

Etiquetar los nodos de la red, es equivalente a etiquetar los renglones (y columnas) de la tabla; por conveniencia, cada

vez que se marca un renglón i (o una columna j), se dará la misma marca a la columna i (o al renglón j). Si (s,t) es un arco no conformable, y si por ejemplo, t es el origen de la etiquetación, la fila t (y la columna t) se etiquetan $(-\infty)$, y se aplica el procedimiento de etiquetación hasta que se etiqueta el renglón s (y la columna s), o bien sea imposible etiquetar otro renglón (o columna).

Este procedimiento se puede resumir mediante dos diagramas que aparecen en la figura 2 y 3 respectivamente. El diagrama de la figura 3 se utiliza para examinar los cuadrados de un renglón etiquetado, y el diagrama de la figura 2 se utiliza para examinar los cuadrados de una columna etiquetada.

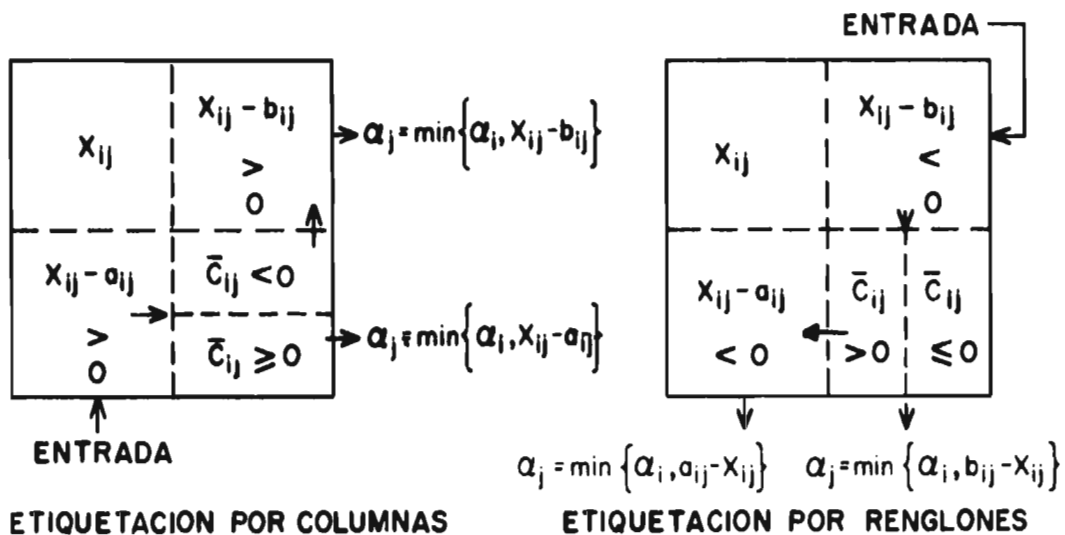


FIGURA 2

FIGURA 3

Por ejemplo, el diagrama de la figura 3, se lee de la siguiente manera:

Si i es un renglón etiquetado, se examinan sucesivamente todas las casillas de esta fila. Sea (i, j) una casilla. Entonces considere el valor $(x_{ij} - b_{ij})$ en la esquina superior derecha.

- a) Suponga $(x_{ij} - b_{ij}) < 0$, se considera \bar{c}_{ij} en la esquina inferior derecha.
- b) Si $\bar{c}_{ij} \leq 0$, se etiqueta la columna j , siendo α_j igual a $\min \{ \alpha_i, b_{ij} - x_{ij} \}$;
- c) Si $\bar{c}_{ij} > 0$, se considera $(x_{ij} - a_{ij})$ en la esquina inferior izquierda;
- d) Si $(x_{ij} - a_{ij}) < 0$, se etiqueta la columna j , siendo α_j igual a $\min \{ \alpha_i, a_{ij} - x_{ij} \}$

El diagrama de la figura 2, se interpreta de manera análoga.

Procedimiento de cambio de potencial.

Cuando no se puede etiquetar el destino (s ó t) . Sean

- T_1 el conjunto de casillas de un renglón etiquetado y una columna no etiquetada.
- T_2 el conjunto de casillas de un renglón no etiquetado y una columna etiquetada;
- S_1 el subconjunto de T_1 , para el cual $\bar{c}_{ij} > 0$ (esquina inferior derecha), y $x_{ij} - b_{ij} \leq 0$ (esquina superior derecha).
- S_2 el subconjunto de T_2 , para el cual $\bar{c}_{ij} < 0$ y $x_{ij} - a_{ij} \geq 0$ (esquina inferior izquierda).

Sea θ el mínimo de $|\bar{c}_{ij}|$ de todas las casillas S_1 y S_2 . El nuevo potencial se obtiene añadiendo θ a los potenciales de los nodos etiquetados, es decir, al u_i encontrado en los renglones y columnas etiquetadas. También se modifican los \bar{c}_{ij}

directamente añadiéndoles θ , si están en una casilla de T_2 y restándoles θ , si están en una casilla de T_1 , en caso contrario se dejan sin variar.

EJEMPLO: Sea la red del apéndice I. Los nodos de ésta red están numerados del 1 al 8, y en cada arco de la red se tiene en la tabla 1, el nodo origen, el nodo destino, el costo por unidad de transporte, el límite superior y el límite inferior del arco respectivamente.

Se parte de un flujo inicial igual a cero para todos los arcos de la red. El potencial inicial se obtiene aplicando el algoritmo de Ford, que es como sigue:

- a) Al nodo origen de la red (nodo 8), se le dan un potencial $U_8=0$, para todos los demás nodos, el potencial es de $-\infty$.
- b) Para todo arco (i,j) , tal que $u_i - u_j > c_{ij}$, sustituir u_j por ~~$-\infty$~~ . $u_i - c_{ij}$

Así para la red de nuestro ejemplo, el potencial inicial en los nodos será el siguiente:

NODO	POTENCIAL INICIAL
8	0
1	0
2	0
3	-4
4	-3
5	-5
6	-9
7	-5

Los potenciales iniciales que resultan de la aplicación de este algoritmo, constituyen el potencial inicial deseado.

Una vez obtenido esto, procedemos a la construcción de la tabla 2, en la que vemos que los arcos (1,4) (3,6) y (7,8) son no conformables.

Para hacer la etiquetación construimos la tabla 3, en la que tomamos el arco (7,8) en el estado no conformable L_1 , como arco (s, t) , por lo que el origen de la etiquetación será el nodo 8, y el destino el nodo 7. Se ve en la tabla 3 que se ha llegado a etiquetar el nodo destino (nodo 7), por lo que se considera la cadena $|8, 1, 4, 5, 7|$, en la que cada nodo es la etiqueta del nodo siguiente. (Esta secuencia se determina de manera única, "al revés", partiendo del nodo 7). Como el destino ha sido etiquetado, se aumenta el flujo en $\min\{a_s, a_{st} - x_{st}\} = \min\{3, 9\} = 3$ unidades, en los arcos que están en la cadena.

La tabla 4 muestra que los arcos (3,6) y (7,8) siguen siendo no conformables. Se toma nuevamente el arco (7,8) como arco (s, t) , el nodo 8 como origen y el 7 como destino de etiquetación. La tabla 5 muestra el procedimiento de etiquetación y se ve que no ha sido posible etiquetar el nodo destino, por lo que se procede a la rutina de cambio de potencial, en donde $S_1 = \{(2,1), (3,5), (6,5), (6,7)\}$ y $S_2 = \emptyset$; $\theta = \min$

$$\left| \min_{S_1}(\bar{c}_{ij}), \min_{S_2}(-\bar{c}_{ij}) \right| = \min\{4, 4, 8, 4\} = 4. \text{ Incrementando en 4}$$

unidades el potencial u_1 en los nodos etiquetados obtenemos los siguientes valores de u_1 ,

NODO	POTENCIAL U_i
1	0
2	4
3	0
4	1
5	-5
6	-5
7	-5
8	4

Con los nuevos valores de U_i , podemos construir la tabla 6, en donde vemos que los arcos no conformables son (3,6) y (7,8).

La tercera etiquetación se muestra en la tabla 7, en donde el arco (7,8), es nuevamente tomado como arco (s,t), con el nodo 8 como origen y el nodo 7 como destino de etiquetación. Se ha logrado etiquetar el nodo 7, por lo que el flujo en la cadena $|8,2,4,3,5,7|$ es aumentado en 2 unidades. La tabla 8 muestra que los arcos (3,6) y (7,8) siguen siendo no conformables.

La cuarta etiquetación, que se muestra en la tabla 9, no permite etiquetar el nodo 7, por lo que se sigue la rutina de cambio de potencial, en donde;

$$S_1 = \{(1,3), (1,4), (2,3)\}$$

$$S_2 = \emptyset$$

$$\theta = \min |4,9,1| = 1$$

Los nuevos potenciales en los nodos son:

NODO	POTENCIAL U_1
1	1
2	5
3	0
4	1
5	-5
6	-5
7	-5
8	-5

Con estos nuevos valores de U_1 , construimos la tabla 10, en donde vemos que los arcos (3,6) y (7,8) siguen siendo no conformables. La quinta etiquetación, se muestra en la tabla 11, en donde se permite aumentar el flujo en 4 unidades en la cadena $|8,2,3,6,7|$. La tabla 12 muestra que el arco (7,8) ha pasado a ser conformable, el único arco no conformable es ahora el arco (3,6). Se aplica el procedimiento de etiquetación que se muestra en la tabla 13, en donde el arco (3,6), es tomado como arco (s,t), el nodo 6 es el origen y el nodo 3 el destino de etiquetación. Esta etiquetación no permite etiquetar el nodo 3 por lo que se procede a la rutina de cambio de potencial, en donde

$$S_1 = (6,5)$$

$$S_2 = \emptyset$$

$$\theta = 4$$

Los nuevos valores de los potenciales en los nodos son;

NODO	POTENCIAL U_i
1	1
2	5
3	0
4	1
5	-5
6	-1
7	-5
8	5

Con estos valores se construye la tabla 14, en donde el arco (3,6) es no conformable.

La séptima etiquetación mostrada en la tabla 15, en donde el nodo 6 es el origen y el nodo 3, el destino de etiquetación, conduce a un aumento de flujo en la cadena |3,5,6| de una undad y el arco (3,6) pasa a ser conformable como se muestra en la tabla 16, y el flujo para cada arco es el óptimo.

ORIGEN	DESTINO	COSTO	LIM-SUP.	LIM-INF.
8	1	0	3	0
8	2	0	7	0
1	3	4	5	0
1	4	8	7	3
2	1	4	3	0
2	3	5	4	0
2	4	3	2	0
3	5	5	7	0
3	6	7	6	5
4	3	1	2	0
4	5	2	3	0
4	6	6	1	0
5	7	0	5	0
6	7	0	4	0
6	5	4	4	0
7	8	0	9	9

TABLA 1

ARCO	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}	u_i	u_j	x_{ij}	$x_{ij}-a_{ij}$	$x_{ij}-b_{ij}$	$c_{ij} - u_i + u_j$	ESTADO
8-1	0	3	0	0	0	0	0	-3	0	B
8-2	0	7	0	0	0	0	0	-7	0	B
1-3	0	5	4	0	-4	0	0	-5	0	B
1-4	3	7	8	0	-3	0	-3	-7	5	L_1
2-1	0	3	4	0	0	0	0	-3	4	L
2-3	0	4	5	0	-4	0	0	-4	1	L
2-4	0	2	3	0	-3	0	0	-2	0	B
3-5	0	7	5	-4	-5	0	0	-7	4	L
3-6	5	6	7	-4	-9	0	-5	-6	2	L_1
4-3	0	2	1	-3	-4	0	0	-2	0	B
4-5	0	3	2	-3	-5	0	0	-3	0	B
4-6	0	1	6	-3	-9	0	0	-1	0	B
5-7	0	5	0	-5	-5	0	0	-5	0	B
6-7	0	4	0	-9	-5	0	0	-4	4	L
6-5	0	4	4	-9	-5	0	0	-4	8	L
7-8	9	9	0	-5	0	0	-9	-9	5	L_1

TABLA 2

	8	1	2	3	4	5	6	7	
	0	0	0	-4	-3	-5	-9	-5	
0		0 -3	0 -7						(1, ∞)
		0 0	0 0						
0				0 -5	0 -7				(8, 3)
				0 0	-3 5				
0	0 -3	0 -3		0 -4	0 -2				(8, 7)
	0 4	0 4		0 1	0 0				
-4						0 -7	0 -6		(1, 3)
						0 4	-5 2		
-3				0 -2		0 -3	0 -1		(1, 3)
				0 0		0 0	0 0		
-5								0 -5	(4, 3)
								0 0	
-9						0 -4		0 -4	(3, 3)
						0 8		0 4	
-5	0 -9								(5, 3)
	-9 5								
	(-, ∞)	(8, 3)	(8, 7)	(1, 3)	(1, 3)	(4, 3)	(3, 3)	(5, 3)	

TABLA 3

forma (i, j)
(i, α)

ARCO	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}	u_i	u_j	x_{ij}	$x_{ij}-a_{ij}$	$x_{ij}-b_{ij}$	$c_{ij}-u_i+u_j$	ESTADO
8-1	0	3	0	0	0	3	3	0	0	B
8-2	0	7	0	0	0	0	0	-7	0	B
1-3	0	5	4	0	-4	0	0	-5	0	B
1-4	3	7	8	0	-3	3	0	-4	5	L
2-1	0	3	4	0	0	0	0	-3	4	L
2-3	0	4	5	0	-4	0	0	-4	1	L
2-4	0	2	3	0	-3	0	0	-2	0	B
3-5	0	7	5	-4	-5	0	0	-7	4	L
3-6	5	6	7	-4	-9	0	-5	-6	2	L ₁
4-3	0	2	1	-3	-4	0	0	-2	0	B
4-5	0	3	2	-3	-5	3	3	0	0	B
4-6	0	1	6	-3	-9	0	0	-1	0	B
5-7	0	5	0	-5	-5	3	3	-2	0	B
6-7	0	4	0	-9	-5	0	0	-4	4	L
6-5	0	4	4	-9	-5	0	0	-4	8	L
7-8	9	9	0	-5	0	3	-6	-6	5	L ₁

TABLA 4

	8	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	-4	-3	-5	-9	-5
0		3 0	0 -7					
		3 0	0 0					
0				0 -5	3 -4			
				0 0	0 5			
0		0 * -3		0 -4	0 -2			
		0 4		0 1	0 0			
-4						0 -7	0 -6	
						0 * 4	-5 2	
-3				0 -2		3 0	0 -1	
				0 0		3 0	0 0	
-5								3 -2
								3 0
-9						0 -4		0 -4
						0 * 8		0 * 4
-5	3 -6							
	-6 5							

(-, -)

(8, 7)

(4, 2)

(2, 2)

(4, 1)

(-, -)

(8, 7)

(4, 2)

(2, 2)

(4, 1)

TABLA 5

det. rot. = 100
 Cl. 100

Manfred

ARCO	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}	u_i	u_j	x_{ij}	$x_{ij}-a_{ij}$	$x_{ij}-b_{ij}$	$c_{ij}-u_i+u_j$	ESTADO
8-1	0	3	0	4	0	3	3	0	-4	B
8-2	0	7	0	4	4	0	0	-7	0	B
1-3	0	5	4	0	0	0	0	-5	4	B
1-4	3	7	8	0	1	3	0	-4	9	L
2-1	0	3	4	4	0	0	0	-3	0	L
2-3	0	4	5	4	0	0	0	-4	1	L
2-4	0	2	3	4	1	0	0	-2	0	B
3-5	0	7	5	0	-5	0	0	-7	0	L
3-6	5	6	7	0	-5	0	-5	-6	2	L ₁
4-3	0	2	1	1	0	0	0	-2	0	B
4-5	0	3	2	1	-5	3	3	0	-4	B
4-6	0	1	6	1	-5	0	0	-1	0	B
5-7	0	5	0	-5	-5	3	3	-2	0	B
6-7	0	4	0	-5	-5	0	0	-4	0	L
6-5	0	4	4	-5	-5	0	0	-4	4	L
7-8	9	9	0	-5	4	3	-6	-6	9	L ₁

TABLA 6

	8	1	2	3	4	5	6	7	
	4	0	4	0	1	-5	-5	-5	
4		$\begin{array}{c c} 3 & 0 \\ \hline 3 & -4 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & -7 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$						$(-, \infty)$
0				$\begin{array}{c c} 0 & -5 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 3 & -4 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$				$(2, 3)$
4		$\begin{array}{c c} 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$		$\begin{array}{c c} 0 & -4 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$				$(8, 7)$
0						$\begin{array}{c c} 0 & -7 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & -6 \\ \hline -5 & 2 \end{array}$		$(4, 2)$
1				$\begin{array}{c c} 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$		$\begin{array}{c c} 3 & 0 \\ \hline 3 & -4 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$		$(2, 2)$
-5								$\begin{array}{c c} 3 & -2 \\ \hline 3 & 0 \end{array}$	$(3, 2)$
-5						$\begin{array}{c c} 0 & -4 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$		$\begin{array}{c c} 0 & -4 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$	$(4, 1)$
-5	$\begin{array}{c c} 3 & -6 \\ \hline -6 & 9 \end{array}$								$(5, 2)$

TABLA 7

ARCO	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}	u_i	u_j	x_{ij}	$x_{ij}-a_{ij}$	$x_{ij}-b_{ij}$	$\bar{c}_{ij} = c_{ij}-u_i+u_j$	ESTADO
8-1	0	3	0	4	0	3	3	0	-4	B
8-2	0	7	0	4	4	2	2	-5	0	B
1-3	0	5	4	0	0	0	0	-5	4	B
1-4	3	7	8	0	1	3	0	-4	9	L
2-1	0	3	4	4	0	0	0	-3	0	L
2-3	0	4	5	4	0	0	0	-4	1	L
2-4	0	2	3	4	1	2	2	0	0	B
3-5	0	7	5	0	-5	2	2	-5	0	L
3-6	5	6	7	0	-5	0	-5	-6	2	L ₁
4-3	0	2	1	1	0	2	2	0	0	B
4-5	0	3	2	1	-5	3	3	0	-4	B
4-6	0	1	6	1	-5	0	0	-1	0	B
5-7	0	5	0	-5	-5	5	5	0	0	B
6-7	0	4	0	-5	-5	0	0	-4	0	L
6-5	0	4	4	-5	-5	0	0	-4	4	L
7-8	9	9	0	-5	4	5	-4	-4	9	L ₁

TABLA 8

	8	1	2	3	4	5	6	7	
	4	0	4	0	1	-5	-5	-5	
3	4	$\begin{array}{c c} 3 & 0 \\ \hline 3 & -4 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 2 & -5 \\ \hline 2 & 0 \end{array}$						$(-, \infty)$
1	0			$\begin{array}{c c} 0 & -5 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 3 & -4 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$				$(2, 3)$
2	4	$\begin{array}{c c} 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$		$\begin{array}{c c} 0 & -4 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 \end{array}$				$(8, 5)$
	0					$\begin{array}{c c} 2 & -5 \\ \hline 2 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & -6 \\ \hline -5 & 2 \end{array}$		
	1		$\begin{array}{c c} 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 \end{array}$			$\begin{array}{c c} 3 & 0 \\ \hline 3 & -4 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$		
	-5							$\begin{array}{c c} 5 & \\ \hline 5 & 0 \end{array}$	
	-5					$\begin{array}{c c} 0 & -4 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$		$\begin{array}{c c} 0 & -4 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$	
	-5	$\begin{array}{c c} 5 & -4 \\ \hline -4 & 9 \end{array}$							

TABLA 9

ARCO	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}	u_i	u_j	x_{ij}	$x_{ij}-a_{ij}$	$x_{ij}-b_{ij}$	$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i + u_j$	ESTADO
8-1	0	3	0	5	1	3	3	0	-4	B
8-2	0	7	0	5	5	2	3	-5	0	B
1-3	0	5	4	1	0	0	0	-5	3	B
1-4	3	7	8	1	1	3	0	-4	8	L
2-1	0	3	4	5	1	0	0	-3	0	L
2-3	0	4	5	5	0	0	0	-4	0	L
2-4	0	2	3	5	1	2	2	0	-1	B
3-5	0	7	5	0	-5	2	2	-5	0	L
3-6	5	6	7	0	-5	0	-5	-6	2	L ₁
4-3	0	2	1	1	0	2	2	0	0	B
4-5	0	3	2	1	-5	3	3	0	-4	B
4-6	0	1	6	1	-5	0	0	-1	0	B
5-7	0	5	0	-5	-5	5	5	0	0	B
6-7	0	4	0	-5	-5	0	0	-4	0	L
6-5	0	4	4	-5	-5	0	0	-4	4	L
7-8	9	9	0	-5	5	5	-4	-4	10	L ₁

TABLA 10

	8	1	2	3	4	5	6	7	
	5	1	5	0	1	-5	-5	-5	
5		3 0	2 -5						(-, ∞)
		3 -4	2 0						
1				0 -5	3 -4				(2, 3)
				0 3	0 8				
5		0 -3		0 -4	2 0				(8, 5)
		0 0		0 0	2 -1				
0						2 -5	0 -6		(2, 4)
						2 0	-5 2		
1				2 0		3 0	0 -1		
				2 0		3 -4	0 0		
-5								5 0	(3, 4)
								5 0	
-5						0 -4		0 -4	(3, 4)
						0 4		0 0	
-5	5 -4								(6, 4)
	-4 10								

TABLA 11

ARCO	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}	u_i	u_j	x_{ij}	$x_{ij}-a_{ij}$	$x_{ij}-b_{ij}$	$c_{ij} - u_i + u_j$	ESTADO
8-1	0	3	0	5	1	3	3	0	-4	B
8-2	0	7	0	5	5	6	6	-1	0	B
1-3	0	5	4	1	0	0	0	-5	3	B
1-4	3	7	8	1	1	3	0	-4	8	L
2-1	0	3	4	5	1	0	0	-3	0	L
2-3	0	4	5	5	0	4	4	0	0	L
2-4	0	2	3	5	1	2	2	0	-1	B
3-5	0	7	5	0	-5	2	2	-5	0	L
3-6	5	6	7	0	-5	4	-1	-2	2	L_1
4-3	0	2	1	1	0	2	2	0	0	B
4-5	0	3	2	1	-5	3	3	0	-4	B
4-6	0	1	6	1	-5	0	0	-1	0	B
5-7	0	5	0	-5	-5	5	5	0	0	B
6-7	0	4	0	-5	-5	4	4	0	0	L
6-5	0	4	4	-5	-5	0	0	-4	4	L
7-8	9	9	10	-5	5	9	0	0	10	L

TABLA 12

		8	1	2	3	4	5	6	7
		5	1	5	0	1	-5	-5	-5
3	5		3 0	6 -1					
			3 -4	6 0					
1	1				0 -5	3 -4			
					0 3	0 8			
2	5		0 -3		4 0	2 0			
			0 0		4 0	2 -1			
3	0						2 -5	4 -2	
							2 0	-1 2	
4	1			2 0			3 0	0 -1	
				2 0			3 -4	0 0	
5	-5								5 0
									5 0
6	-5						0 -4		4 0
							0 4		4 0
7	-5	9 0							
		0 10							

(-, α)

TABLA 13

ARCO	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}	u_i	u_j	x_{ij}	$x_{ij} - a_{ij}$	$x_{ij} - b_{ij}$	$c_{ij} - u_i + u_j$	ESTADO
8-1	0	3	0	5	1	3	3	0	-4	B
8-2	0	7	0	5	5	6	6	-1	0	B
1-3	0	5	4	1	0	0	0	-5	3	B
1-4	3	7	8	1	1	3	0	-4	8	L
2-1	0	3	4	5	1	0	0	-3	0	L
2-3	0	4	5	5	0	4	4	0	0	L
2-4	0	2	3	5	1	2	2	0	-1	B
3-5	0	7	5	0	-5	2	2	-5	0	L
3-6	5	6	7	0	-1	4	-1	-2	6	L
4-3	0	2	1	1	0	2	2	0	0	B
4-5	0	3	2	1	-5	3	3	0	-4	B
4-6	0	1	6	1	-1	0	0	-1	4	B
5-7	0	5	0	-5	-5	5	5	0	0	B
6-7	0	4	0	-1	-5	4	4	0	-4	L
6-5	0	4	4	-1	-5	0	0	-4	0	B
7-8	9	9	10	-5	5	9	0	0	10	L

TABLA 14

	8	1	2	3	4	5	6	7	
	5	1	5	0	1	-5	-1	-5	
5		3 0	6 -1						
		3 -4	6 0						
1				0 -5	3 -4				
				0 3	0 8				
5		0 -3		4 0	2 0				
		0 0		4 0	2 -1				
0						2 -5	4 -2		(5, 2)
						2 0	-1 6		
1				2 0		3 0	0 -1		
				2 0		3 -4	0 4		
-5								5 0	(6, 4)
								5 0	
1						0 -4		4 0	(-, ∞)
						0 0		4 -4	
7	-5	9 0							
		0 10							

TABLA 15

ARCO	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}	u_i	u_j	x_{ij}	$x_{ij} - a_{ij}$	$x_{ij} - b_{ij}$	$c_{ij} - u_i - u_j$	ESTADO
8-1	0	3	0	5	1	3	3	0	-4	B
8-2	0	7	0	5	5	6	6	-1	0	B
1-3	0	5	4	1	0	0	0	-5	3	B
1-4	5	7	8	1	1	5	0	-4	8	L
2-1	0	3	4	5	1	0	0	-3	0	L
2-3	0	4	5	5	0	4	4	0	0	L
2-4	0	2	3	5	1	2	2	0	-1	B
5-5	0	7	5	0	-5	1	1	-6	0	B
5-6	5	6	7	0	-1	5	0	-1	6	L
4-3	0	2	1	1	0	2	2	0	0	B
4-5	0	3	2	1	-5	3	3	0	-4	B
4-6	0	1	6	1	-1	0	0	-1	4	B
5-7	0	5	0	-5	-5	5	5	0	0	B
6-7	0	4	0	-1	-5	4	4	0	-4	L
6-5	0	4	4	-1	-5	1	1	-3	0	B
7-3	9	9	10	-5	-5	9	0	0	10	L

Flujo óptimo

TABLA 16

BIBLIOGRAFIA

- BAZARAA M.S., JARVIS J.J., Linear Programming and Network Flows,
John Wiley & Sons, New York, N.Y., 1977
- BERGE, C., Theory of Graphs and Applications, John Wiley and
Sons, Inc., New York, N. Y., 1962
- DANTZIG, G. B., Linear Programming and Extensions, Princeton
University Press, Princeton, N. J., 1963
- FUENTES M. S., Notas del Curso de Optimización I, no publicadas,
DESFI, UNAM, 1978
- FULKERSON D. R., An Out of Kilter Method for Minimal Cost Flow
Problems, J. Soc. Indust. Appl. Math., 9, 1, 1961
- FORD, J. R., L. R. and FULKERSON, D. R., A Simple Algorithm for
Finding Maximal Network Flows and Application
to The Hitchcock Problem, Canadian Journal of
Mathematics, 9, 210, 1957
- FORD J. R., L. R. and FULKERSON, D. R., Flows in Networks,
Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962
- HU T. C., Integer Programming and Network Flows, Addison Wesley,
1969

SIMONNARD M., Programación Lineal, Ed. Paraningo, Madrid 1972

VEINOTT, J. R. and DANTZIG G.B., Integer Extreme Points, SIAM
10, 3, 1968

Collected Algorithms from ACM, Algorithm 248.