

01170  
11



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
SECCIÓN DE MECÁNICA**

**CARACTERIZACIÓN Y PRUEBA DE LAS  
SECUENCIAS SIMULTÁNEAS DE UN ROBOT  
PARALELO EXPERIMENTAL TIPO RRR**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA**

**P R E S E N T A :**  
**Ing. Julio Alejandro Pérez Contreras**

**ASESOR DE TESIS: M.I. EUSEBIO JIMÉNEZ LÓPEZ  
COASESOR: DR. LUIS REYES**



**CIUDAD UNIVERSITARIA, 2001**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**SECCIÓN DE MECÁNICA**

**CARACTERIZACIÓN Y PRUEBA DE LAS SECUENCIAS  
SIMULTÁNEAS DE UN ROBOT PARALELO  
EXPERIMENTAL TIPO RRR**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA**

**P R E S E N T A:**

**ING. JULIO ALEJANDRO PÉREZ CONTRERAS**

**ASESOR: M.I. EUSEBIO JIMÉNEZ LÓPEZ**

**COASESOR: DR. LUIS REYES ÁVILA**

**CD. UNIVERSITARIA, 2001**

## **AGRADECIMIENTOS**

A mis padres, por su guía y apoyo en todo momento, gracias.

A mis hermanos, por su ejemplo de esfuerzo y perseverancia para alcanzar las metas trazadas.

A Eusebio Jiménez López, por su gran apoyo y colaboración como compañero y asesor para realizar este trabajo.

Al Dr. Luis Reyes Ávila, por su guía en el desarrollo de esta tesis.

Al Dr. Vicente Borja, por el conocimiento aportado a esta tesis.

A M.I. Víctor González Villela, por su estupenda asesoría y gran paciencia.

A Ernesto, por su valiosa contribución para finalizar este trabajo.

# CONTENIDO

PRÓLOGO	IV
RESUMEN	VI
OBJETIVOS	VII
INTRODUCCIÓN	VIII
<b>CAPÍTULO 1 MOVIMIENTOS DE MANIPULADORES</b>	<b>1</b>
1.1 Notación Booch	1
1.1.1 Definiciones Básicas	2
1.2 Modelo de Información Operacional de Manipuladores	2
1.2.1 Clase <i>Movimientos</i>	6
1.2.2 Clase <i>Especificaciones</i> y clase <i>Definiciones</i>	8
1.2.3 Clase <i>Descripción de Trayectoria</i>	9
1.2.4 Clase <i>Actuadores</i>	12
1.2.5 Clase <i>Formas de Activación</i>	19
1.2.5.1 Clase <i>Simultáneas</i>	20
1.2.5.2 Clase <i>Secuenciales</i>	24
1.2.5.2.1 Clase <i>Unitarias</i>	27
1.2.5.2.2 Clase <i>Mixtas</i>	30
1.2.5.2.3 Clase <i>Híbridas</i>	34
1.2.6 Clase <i>Operación Funcional</i>	37
1.2.7 Clase <i>Ejecución</i> y clase <i>Simulación</i>	55
1.3 Análisis y caracterización de los movimientos de operación de robots manipuladores	58
1.3.1 Movimientos de Operación Simultáneos	67
1.3.2 Movimientos de Operación Secuenciales Unitarios	71
1.3.3 Movimientos de Operación Secuenciales Mixtos	74
1.3.4 Movimientos de Operación Secuenciales Híbridos	77
1.4 Movimientos Naturales y Forzados	79

<b>CAPÍTULO 2 ANÁLISIS DEL ÁREA DE TRABAJO</b>	<b>83</b>
2.1 Caracterización de las posiciones de los actuadores y las dimensiones principales de los eslabones	83
2.2 El máximo radio de alcance de las cadenas cinemáticas	85
2.3 Caracterización del área de trabajo ( $A_T$ )	89
2.4 Posición Límite o de Agarrotamiento [36]	92
<b>CAPÍTULO 3 MODELACIÓN CINEMÁTICA DE POSICIONAMIENTO</b>	<b>96</b>
3.1 Caracterización del Robot Paralelo	96
3.2 Análisis de la “configuración no deformada”	98
3.2.1 Planteamiento del problema Cinemático Inverso en la “configuración no deformada”	103
3.3 Parámetros asociados a las cadenas cinemáticas que componen al robot RP	104
3.4 Caracterización y planteamiento del problema Cinemático Directo en la “configuración no deformada”	106
3.4.1 Problema Cinemático Directo	109
3.5 Planteamiento de las ecuaciones de posición en la “configuración deformada”	109
3.5.1 Planteamiento del problema Cinemático Inverso en la “configuración deformada”	112
3.5.2 Parámetros de la “configuración deformada”	113
3.6 Planteamiento del problema Cinemático Directo en la “configuración deformada”	115
3.6.1 Problema Cinemático Directo	116
<b>CAPÍTULO 4 PROTOTIPO DEL ROBOT MANIPULADOR PARALELO PLANO 3-RRR</b>	<b>118</b>
4.1 Sistema Mecánico	118
4.2 Sistema de Control	122
4.2.1 Funcionamiento general de la Tarjeta de Control	125
4.2.2 Etapa de Potencia	126
4.2.3 Dispositivos de sensado	131

<b>CAPÍTULO 5 DEFINICIÓN DE MOVIMIENTOS PARA EJECUTAR</b>	<b>135</b>
5.1 Especificaciones y Definiciones	135
<b>CONCLUSIONES Y RESULTADOS</b>	<b>140</b>
<b>APÉNDICE A PARAMETRIZACIÓN DE LAS ROTACIONES RÍGIDAS EN EL PLANO</b>	<b>144</b>
<b>APÉNDICE B COMPONENTES DEL PROTOTIPO</b>	<b>161</b>
<b>APÉNDICE C PROGRAMAS DE CONTROL Y SIMULACIÓN</b>	<b>176</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>195</b>

## PRÓLOGO

El presente trabajo de tesis, es el resultado del trabajo generado a lo largo de los últimos 5 años por el grupo de trabajo DITAI, del cual, formo parte.

La idea central del trabajo es generar conocimiento escrito para las futuras generaciones interesadas en el campo de la robótica experimental e industrial, y que al mismo tiempo, sirva para fortalecer la investigación teórica y aplicada. El tema estudiado en la tesis es la caracterización de movimientos asociados a robots manipuladores con especial interés en los robots paralelos.

Actualmente, los robots paralelos son estudiados por sus enormes ventajas aplicativas con respecto a los robots de cadena abierta, pues, estructuralmente, son más rígidos y precisos. El campo de aplicación de los robots paralelos se ha extendido a procesos industriales, simuladores de vuelo y operaciones médicas entre otras.

Sin embargo, los modelos cinemáticos y dinámicos de robots paralelos son relativamente complicados, pues, integran dos tipos de cadenas cinemáticas, abiertas y cerradas. La principal complicación en este clase de robots es el planteamiento del "problema cinemático directo".

Otro problema importante relacionado con los robots paralelos es la caracterización de los movimientos debido a su arquitectura. Para solucionar este problema, se propone un Modelo de Información Operacional para Manipuladores (MIOM) desarrollado usando la notación Booch para análisis y diseño orientado a objetos. El MIOM es aplicado en un robot manipulador



paralelo plano 3-RRR para determinar, modelar y representar sus movimientos. Por otro lado, el modelado cinemático de posicionamiento es generado utilizando el álgebra de los números complejos sistematizada y parametrizada.

Se demuestra que al utilizar procedimientos lógicos y sistematizados en el modelado de robots paralelos, es posible plantear de forma apropiada los problemas cinemáticos directo e inverso en cada configuración.

Para contribuir a la investigación aplicada, se construye y controla el robot paralelo analizado con el propósito de probar los resultados obtenidos.

Espero que el contenido y los resultados del presente trabajo sirvan para impulsar y fortalecer las líneas de investigación en el campo de la robótica. Finalmente se agradece a los integrantes del grupo DITAI su colaboración en el desarrollo de este trabajo de tesis.

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio formal y sistemático para determinar, modelar y representar los movimientos asociados a un robot manipulador paralelo plano 3-RRR. Se caracterizan cuatro clases de movimientos: 1) Simultáneos, 2) Secuenciales Unitarios, 3) Secuenciales Mixtos y 4) Secuenciales Híbridos. Es propuesto un Modelo de Información Operacional para robots Manipuladores (MIOM) usando la notación Booch. El MIOM se aplica para generar las reglas que determinan las clases y número de movimientos asociados a un robot paralelo plano 3-RRR. Se analizan algunas características del área de trabajo en función de las longitudes de los eslabones que componen al robot. El modelo cinemático de posicionamiento es construido utilizando el álgebra de los números complejos y se formulan los problemas directo e inverso para cualquier configuración del robot. Un prototipo del robot paralelo es construido y controlado con el objeto de probar algunos movimientos simultáneos. Los resultados obtenidos al aplicar el MIOM son los siguientes: 8 formas de activación simultáneas asociadas a los actuadores, 12 secuenciales unitarias, 6 secuenciales mixtas y 374 secuenciales híbridas. A partir de estas formas de activación se obtiene el siguiente número de movimientos de operación funcionales: 254 movimientos simultáneos, 72 secuenciales unitarios, 192 secuenciales mixtos y 16,011,952 movimientos secuenciales híbridos. Finalmente, dichos resultados pueden ser aplicados en operaciones industriales y problemas de evasión de obstáculos.

## OBJETIVOS

A través del presente trabajo de tesis los objetivos siguientes serán satisfechos:

- 1) Generar un sistema de información que permita clasificar, caracterizar y determinar el número posible de movimientos asociados a un robot paralelo plano 3-RRR.
- 2) Construir los modelos cinemáticos de posicionamiento de un robot paralelo plano 3-RRR usando el álgebra de los números complejos.
- 3) Plantear los problemas cinemáticos directo e inverso en cada configuración del robot paralelo plano 3-RRR.
- 4) Construir y controlar un prototipo del robot paralelo plano 3-RRR.

## INTRODUCCIÓN

Los robots industriales han jugado un papel central en la automatización de fábricas. Desde los años 60's hasta hoy en día, diversas investigaciones han sido orientadas al diseño y construcción de máquinas especializadas con el propósito de utilizarlas en los sistemas de manufactura. Los robots industriales son, quizás, las máquinas más estudiadas.

Muchas de las tareas que tradicionalmente realizaba el ser humano han sido sustituidas por robots. Originalmente, el robot industrial fue concebido para tareas de manipulación de alto riesgo como el transporte de materiales radioactivos o para desarrollar actividades en medios ambientes hostiles. En la actualidad los robots industriales pueden realizar diversas tareas, por ejemplo: manipulación de piezas, operaciones de ensamble y soldadura, cortes, pintura e inspección entre otras [1]. La robótica unida al campo de la automatización ha permitido hacer más eficientes los modernos sistemas de producción. Para lograr producir artículos con elevados estándares de calidad, reducir los tiempos de manufactura y lograr altas tasas de producción, es necesario integrar robots industriales en las líneas de producción.

El campo de aplicaciones de la robótica se ha extendido a actividades no industriales tales como: operaciones médicas, simuladores de vuelo, investigaciones submarinas y exploración espacial entre otras [3].

El robot es una máquina especializada y puede ser concebida como un "sistema mecánico programable", el cual, está compuesto por subsistemas: 1) un subsistema mecánico compuesto por cuerpos rígidos o deformables conectados por juntas de algún tipo; 2) un subsistema de sensado; y 3) un subsistema de

actuadores; un subsistema de procesamiento de información [3]. Todos los subsistemas se comunican a través de interfaces que tienen como función decodificar la información para luego transmitirla de un medio a otro.

Los robots son clasificados de acuerdo a dos tipos de cadenas cinemáticas: abiertas o cerradas. En una cadena abierta, un eslabón está empotrado a tierra y el último eslabón puede moverse libremente. En el caso de cadenas cerradas, tanto el primer eslabón como el último, están empotrados a tierra.

Un sistema mecánico robótico compuesto de cadenas abiertas es conocido "manipulador serial" [4]. Si integra cadenas abiertas y cerradas es llamado "compuesto". Ejemplos de ambos tipos son: el brazo PUMA y el IRB2400 ABB como manipuladores seriales; y el Cincinnati Milacron T3 y Bendex MASIO como manipuladores compuestos. En la figura I.1 se muestra un brazo PUMA.

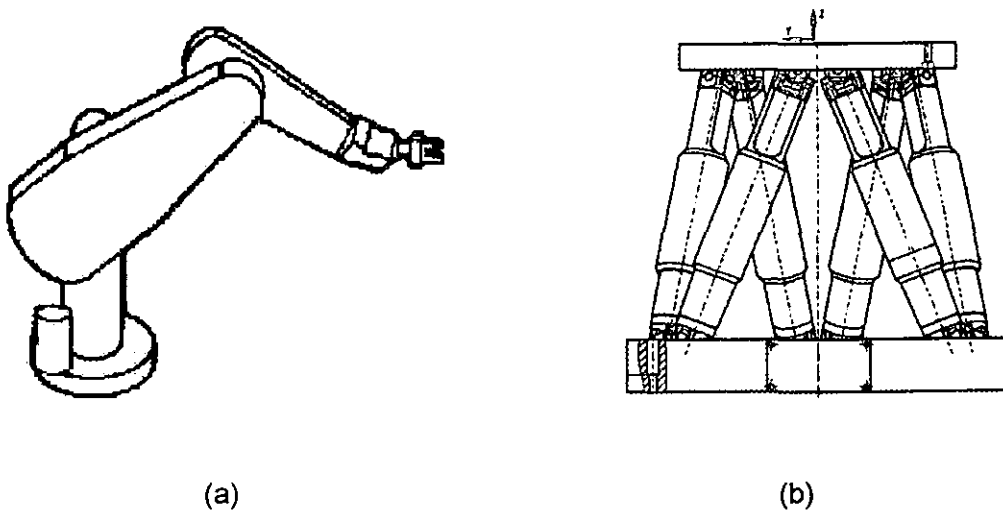


Figura I.1 a) Manipulador serial, PUMA; b) Manipulador totalmente paralelo, Stewart.

Un manipulador en el cual, el primero y último eslabón están conectados por un número finito de subcadenas cinemáticas (combinación de cadenas abiertas y/o cerradas) es conocido como "parcialmente paralelo". Si cada subcadena es activada por rotación o traslación de un sólo actuador, entonces, el manipulador

es llamado "totalmente paralelo". Un ejemplo de este tipo de manipulador es la llamada "plataforma Stewart" (figura I.1) [4],[5].

Un manipulador serial posee gran flexibilidad para realizar diversas tareas, así como un área de trabajo mayor que los robots paralelos. Sin embargo, en operaciones de maquinado tales como esmerilado y taladrado en las cuales, se requiere de una rigidez alta, los robots seriales no pueden ser aplicados debido a que su estructura está en cantilever, en cambio, un robot paralelo si puede proporcionar la rigidez necesaria para realizar dichas operaciones [6]. Otras ventajas y desventajas de los robots seriales y paralelos se enlistan a continuación:

- Los robots paralelos poseen una buena rigidez estructural por el hecho de integrar en su arquitectura cadenas cinemáticas cerradas.
- Una consecuencia del punto anterior es, la baja inercia que puede ser manejada.
- La precisión de un robot paralelo es mayor que la de un robot serial, pues, los errores sentidos no son acumulativos.
- Los robots paralelos poseen áreas de trabajo reducidas debido a dos factores: 1) por interferencia de los propios eslabones en cada movimiento y 2) porque la arquitectura del robot está compuesta de muchas cadenas cinemáticas.

La figura I.2 se muestra el área de trabajo de un robot serial de 2GDL y un robot paralelo de 3GDL de movimiento en el plano.

Por otro lado, los modelos cinemáticos de los robots manipuladores seriales difieren de los modelos asociados a los robots paralelos. En los primeros, el planteamiento y solución de la cinemática inversa es relativamente menos complicado que para los segundos. Para el caso del problema directo, es lo contrario [3], [8],[9].

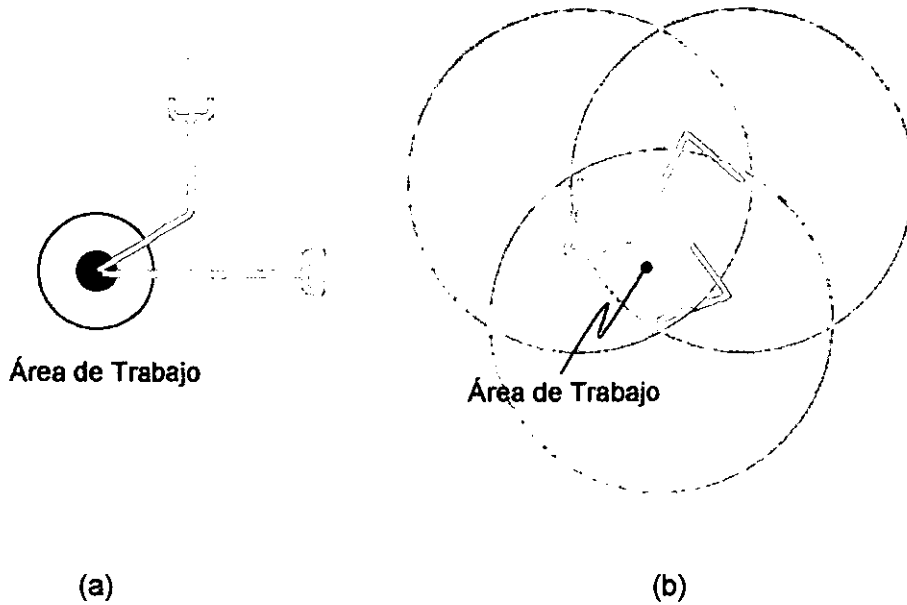


Figura 1.1 Área de trabajo, a) robot serial de 2GDL; b) robot paralelo plano de 3GDL.

En el presente trabajo de tesis se modela un robot paralelo como el mostrado en la figura 1.2b, pues, debido a las múltiples ventajas que tienen los robots paralelos sobre los robots seriales son actualmente objeto de estudio por un gran número de investigadores. Para conceptualizar de mejor manera la arquitectura y forma de operación de los robots paralelos es necesario entender su definición:

“Un robot paralelo es un mecanismo de cadena cerrada constituido por un órgano terminal de “n” grados de libertad y una base fija unidos entre si por cadenas cinemáticas independientes. Cada cadena consta a lo mucho de dos segmentos articulados. La conexión entre los dos segmentos debe ser por una junta de un grado de libertad. El movimiento del mecanismo es efectuado por “n” actuadores simples, uno por cada cadena [10].

Los robots paralelos requieren de mover sus cadenas para realizar tareas específicas. Para alcanzar un punto por medio del organo desde una

configuración de referencia, los robots paralelos al igual que los robots seriales, lo pueden hacer moviendo un eslabón o cadena independiente o la totalidad de los eslabones. Cada movimiento tiene diferencias cuantitativas y cualitativas. Por ejemplo, un punto puede ser alcanzado por la activación simultánea de los actuadores, de forma secuencial o por una combinación de ambas [11], [12]. Las regiones de áreas de trabajo que ocupa el robot para alcanzar el punto, así como las trayectorias que describe el órgano terminal son diferentes para cada clase de movimiento.

Los movimientos de los robots seriales son diferentes a los efectuados por los robots "totalmente paralelos" por las siguientes razones:

- 1) Generalmente los robots seriales integran un actuador por cada eslabón. El movimiento de cada eslabón es controlado de manera independiente.
- 2) Los robots paralelos, según su definición, integran por cada cadena un actuador. Sin embargo, sólo el eslabón conectado al actuador puede ser controlado, mientras que el segundo eslabón que compone a la cadena, no puede ser controlado.

Conocer los movimientos de los robots conducirá a tener una mejor concepción y aplicación de este tipo de máquinas. La mayor parte de las investigaciones en robots manipuladores no analizan ni cuantifican los movimientos específicos de dichos robots. En realidad, los estudios se han centrado en los análisis cinemáticos, dinámicos y de control [3],[13],[14]. La idea básica tratada en las investigaciones es encontrar los parámetros de movimiento tales como posiciones, velocidades y aceleraciones, y aplicarlos a los actuadores dependiendo de la tarea a realizar.

Uno de los principales objetivos de la presente tesis es, encontrar, caracterizar y analizar el número de movimientos posibles asociados a un robot manipulador paralelo plano 3-RRR como el mostrado en la figura I.2b.



El manipulador consta de 7 eslabones rígidos y una plataforma móvil conectados a través de juntas rotacionales. Se constituye de tres cadenas cinemáticas independientes activadas por un actuador [11],[15]. El manipulador motivo de estudio, ha sido investigado en [10],[11],[16],[17]. Otras variantes del manipulador paralelo son estudiadas en [3], [18],[19],[20].

Para caracterizar los movimientos de los manipuladores seriales y planos, es necesario integrar la información interna característica del propio manipulador así como la información externa del medio que lo rodea o del medio de operación. Con respecto a la información interna, un manipulador está compuesto por una estructura mecánica, los eslabones son monitoreados por un sistema de sensores los cuales, indican la posición relativa del robot por cada movimiento. Además, integra un sistema de control para el procesamiento de datos. La información arriba escrita, es en su mayoría el hardware del robot. Por otro lado, los movimientos son modelados usando marcos teóricos. Dichos modelos son resueltos por medio de algoritmos computacionales, y los resultados se proyectan en un simulador o sobre el robot físico. Para desarrollar las tareas sobre el área de trabajo, el robot requiere de información externa como la configuración del entorno, la posible existencia de obstáculos, la tarea a realizar, entre otras.

La información arriba escrita se puede encontrar, por ejemplo, en [1], [2],[21],[22]. Sin embargo, la forma en que dicha información está estructurada no permite entender con claridad las relaciones que existen entre los elementos que constituyen un robot manipulador. Entendiéndose por elementos, a todos los factores tanto internos como externos que influyen en la operación de un robot.

Un movimiento efectuado por un robot está relacionado con todos los factores que integran la existencia del propio robot. Puesto que los movimientos de un robot son el resultado de la operación de sus actuadores, es necesario integrar,

ordenar y relacionar la información que permita generar criterios para operar los actuadores y con esto producir un movimiento.

Dentro de las metodologías o lenguajes para analizar y ordenar la información de un sistema, destaca el análisis y diseño orientado a objetos utilizando la notación Booch [23]. Esta notación ha sido utilizada en [24] para desarrollar modelos de información del producto y de manufactura. La información estructurada en [24] es utilizada para el diseño para manufactura de piezas rotacionales.

En este trabajo de tesis se utiliza la notación Booch para desarrollar un Modelo de Información Operacional de Manipuladores (MIOM). El MIOM integra información de robots manipuladores tanto seriales como paralelos. El modelo de información (MIOM) es utilizado para determinar los distintos modos de operación de los manipuladores y en particular, es aplicado para clasificar y caracterizar los movimientos de un robot manipulador paralelo plano 3-RRR, motivo de estudio en este trabajo.

Otro de los objetivos planteados en el presente trabajo de tesis es, la construcción de los modelos de posición del robot paralelo plano motivo de estudio. Para modelar sistemas robóticos de movimiento plano y espacial, diversas metodologías han sido utilizadas. El álgebra de los números complejos en su representación exponencial es usada comúnmente para modelar los movimientos planos de robots y mecanismos. En [25] se presenta el modelado de un robot experimental plano usando el álgebra compleja. En general, dicha álgebra es la base para la sintetizar y modelar mecanismos planos [25], [26]. Por otro lado, la metodología de Denavit-Hartenberg se utiliza para modelar los movimientos espaciales de sistemas mecánicos [3],[27],[28]. Tanto la representación exponencial de los números complejos como la metodología de Denavit-Hartenberg, han sido utilizadas tradicionalmente para modelar sistemas mecánicos desde los años 50.

Recientemente ha sido propuesta el álgebra de Cuaterniones para construir y sistematizar los modelos cinemáticos y dinámicos de sistemas mecánicos de movimiento plano y espacial [29],[30]. Existen beneficios importantes derivados del álgebra de Cuaterniones en comparación con la metodología de Denavit-Hartenberg, por ejemplo, por la forma en que se construye el álgebra de Cuaterniones, no presenta singularidades, además, se simplifica el número de operaciones computacionales. Diversos trabajos han utilizado el álgebra de Cuaterniones para modelar movimientos. En [11] se estudian 4 modelos de sistemas mecánicos: un robot de 2GDL, un robot de 3GDL, un mecanismo de 4 barras y un robot paralelo plano de 3GDL. En [31] se estudian dos problemas de intersección de trayectorias usando un robot de 2GDL y otro de 3GDL. En [32] se estudia el modelo de un robot de 2GDL.

El álgebra de Cuaterniones es una extensión formal de los números complejos [33] vista desde el contexto del álgebra moderna. Por lo tanto, la aplicación del álgebra de complejos desde esta perspectiva resulta ser apropiada para modelar movimientos en el plano. En [34] se ha sistematizado y parametrizado el álgebra de complejos usando las operaciones usuales de suma y multiplicación definidas sobre parejas ordenadas de números reales. Al modificar la operación multiplicativa se ha generado una variante del álgebra compleja. Las estructuras algebraicas así obtenidas dan como resultado dos rotaciones y dos reflexiones. En este trabajo de tesis se utiliza el álgebra compleja desarrollada en [34] para construir los modelos de posicionamiento del robot paralelo plano 3-RRR como el mostrado en la figura I.2b.

Dicho robot ha sido modelado en [16] usando complejos o también llamados biterniones [16],[31]. También en [11],[16],[20] se modela el mismo robot utilizando Cuaterniones [11],[16],[20].

En general, los problemas cinemáticos directos asociados a los robots paralelos resultan ser más complicados respecto de los robots seriales [3],[16]. Mientras

que los problemas inversos son menos complicados que los directos, caso contrario en los robots seriales. En este trabajo se construyen y formulan los problemas directo e inverso del robot paralelo analizando dos tipos de configuraciones: la no deformada y la deformada. Para cada configuración se construyen los modelos de posición y se programan en el paquete de cálculo formal *Mathematica* [35]. Con los resultados obtenidos se construye una simulación por computadora, la cual, imita los movimientos del robot paralelo.

El objetivo central del trabajo de tesis es probar un movimiento clasificado y caracterizado por el sistema de información MIOM. Para lograr este objetivo, es construido un prototipo de robot paralelo plano 3-RRR junto con su sistema de control, de tal forma que, el movimiento simulado por computadora sea imitado por el prototipo. Los programas de control y simulación están soportados, respectivamente, por los lenguajes de programación *Ensamblador* y *Mathematica*.

El trabajo de tesis está dividido en 5 capítulos y 3 apéndices. En el capítulo 1 se construye el modelo de información MIOM y es aplicado para clasificar, caracterizar y representar los movimientos del robot paralelo plano 3-RRR. En el capítulo 2 se hace un breve análisis sobre el área de trabajo del robot. En el capítulo 3, se construyen los modelos de cinemáticos de posicionamiento del robot usando el álgebra de complejos y se formulan los problemas directo e inverso para cada configuración del robot. En el capítulo 4 se describe el prototipo construido, esto es, sus sistemas mecánicos y de control. En el capítulo 5 se define el movimiento simulado en computadora y por el prototipo. Por otro lado, en el apéndice A se presenta el marco teórico de los números complejos, en el apéndice B se muestran los planos de fabricación del prototipo, y en el apéndice C se muestran los programas de simulación y control. Finalmente, se presentan las conclusiones y resultados de la investigación desarrollada.

## CAPÍTULO 1

### MOVIMIENTOS DE ROBOTS MANIPULADORES

**Introducción:** Se presenta en este capítulo la caracterización y análisis de los movimientos asociados a estructuras articuladas de cadena abierta y cadena cerrada comúnmente llamadas manipuladores, para ello se construye un modelo de información denominado *Modelo de Información Operacional de Manipuladores* o **MIOM**. El **MIOM** utiliza la notación Booch [23] para desarrollar un sistema que proporciona la información necesaria para generar, modelar y ejecutar cualquier movimiento que pueda ser realizado por un manipulador estructurando la información propia y de su entorno. El modelo de información se aplica para determinar el número y clase de movimientos de operación asociados con el robot paralelo plano 3-RRR motivo de nuestro estudio, para posteriormente, ser analizadas introduciendo una nomenclatura y código binario de reconocimiento. A continuación se hace una breve descripción de la notación Booch.

#### 1.1 Notación Booch

Para el desarrollo del **MIOM** se utiliza la notación establecida por Grady Booch para desarrollar sistemas de información basados en el análisis y diseño orientado a objetos [23][24]. Este lenguaje establece por medio de clases, objetos y sus asociaciones, estructuras jerárquicas que indican las misiones y responsabilidades comunes de las entidades que caracterizan el comportamiento de un sistema. A continuación, se enuncian algunas definiciones básicas de utilidad para nuestros desarrollos.

### 1.1.1. Definiciones básicas

- **Objeto.**- Cualquier cosa tangible o visible, algo que pueda comprenderse intelectualmente; algo a lo que se le dirige un pensamiento o acción. Los términos objeto, instancia y elemento se consideran sinónimos.
- **Clase.**- Un conjunto de objetos que comparten una estructura y comportamiento común. Se denotan con una nube (figura 1.1).
- **Relación de asociación.**- Conecta dos clases y denota una conexión semántica. Se representa mediante líneas continuas.
- **Relación de herencia.**- Implica que un objeto hereda todas las propiedades y comportamientos de una clase, se describe como, "es un", ej.: un *Ferrari* "es un" tipo de *Automóvil*. Se representa por una asociación con cabeza de flecha, la cual, apunta hacia la superclase (*Automóvil*) y el extremo opuesto designa la subclase (*Ferrari*).

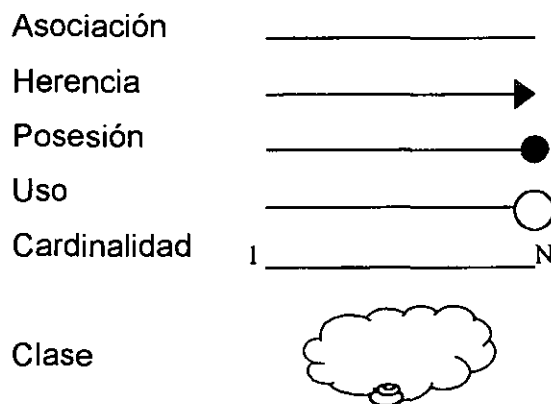


Figura 1.1. Símbolos de relación entre clases.

- **Relación de posesión.**- Significa una relación "tiene un", ej.: los *automóviles* "tienen" *llantas*. Se denota por una asociación con un círculo relleno en un extremo, el cual, señala la clase que contiene (*Automóviles*) al objeto (*llantas*).
- **Relación de dependencia.**- Implica una relación cliente / proveedor, ej.: un *automóvil* "usa" *gasolina*. Se denota por una asociación con un círculo en un

extremo, el cual, señala al cliente (*Automóvil*) y el otro extremo, al proveedor (*Gasolina*).

- **Cardinalidad.** Indica la multiplicidad en una relación. Esta puede ser del tipo: uno a uno, uno a muchos, muchos a muchos, ej.: 1:1, 2:1, 3:5. Se denota por un par de números colocados en los extremos del símbolo de relación.

## 1.2 Modelo de Información Operacional de Manipuladores o MIOM

Los robots son estructuras articuladas con movimiento propio. Son programados para realizar, por medio del movimiento de los elementos que conforman sus mecanismos, alguna tarea. En este trabajo es de nuestro interés particular los movimientos asociados a los robots manipuladores, en especial, los asociados al robot paralelo plano del tipo 3-RRR motivo de nuestro estudio. En la figura 1.2 se muestra una taxonomía de la clase *Manipuladores* usando la notación Booch; en ella se muestran las distintas clases de *manipuladores* que existen.

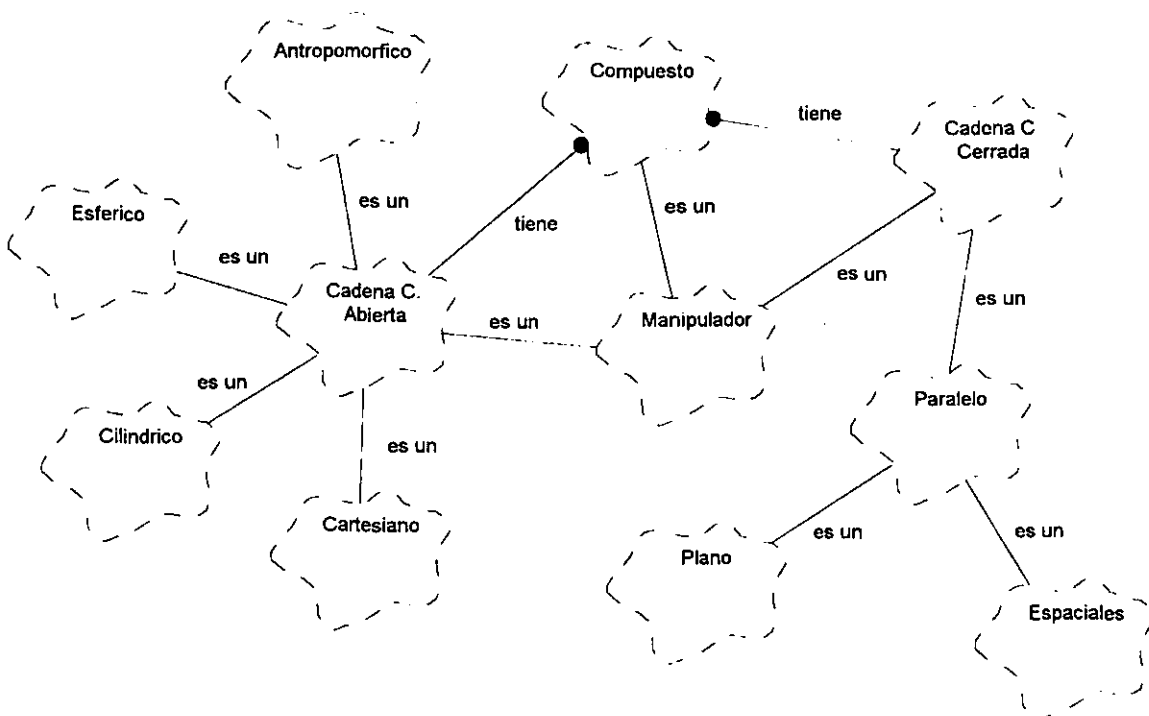


Figura 1.2. Taxonomía de los manipuladores.

Las operaciones que llevan al cabo la mayor parte de las estructuras articuladas son realizadas mediante movimientos controlados. Una estructura articulada está compuesta por una sucesión de eslabones conectados por juntas de algún tipo. Si en cada articulación se coloca un actuador controlable, se dice que el eslabón o conjunto de eslabones conectados al eje del actuador es "activo". Un eslabón asociado a un multicuerpo rígido se dice "conducido" si el movimiento inducido a él no es caracterizado por un actuador.

Las cadenas cinemáticas abiertas, normalmente llamadas *manipuladores*, poseen eslabones activos en toda su estructura, mientras que las cadenas compuestas del tipo manipulador, como el caso del robot paralelo 3-RRR motivo de nuestro estudio, integran tanto eslabones "activos" como "conducidos". Los elementos constitutivos de una estructura articulada conocida como *manipulador* se representan por medio de las clases *Juntas*, *Eslabones*, *Actuadores* y sus respectivas asociaciones según se muestra en la figura 1.3. La siguiente definición es de fundamental importancia para este capítulo y en general para este trabajo de tesis.

**Definición 1.1. Movimiento:** Si el órgano terminal de un manipulador ha alcanzado un nuevo punto desde una configuración de referencia, se dice que se ha producido o realizado un **movimiento** asociado al manipulador. Un **movimiento** de punto a punto se dice realizado si al menos un actuador asociado al manipulador ha sido activado".

En la figura 1.3 se muestra la asociación de los *manipuladores* con los *movimientos* según la definición anterior. La asociación entre las clases *Manipuladores* y *Movimientos* se representa con una línea etiquetada con la leyenda "*realiza*". Esta relación implica que los manipuladores en general son capaces de realizar cualquier movimiento, pues, la clase *Movimientos*, representa toda la gama que de éstos existen.



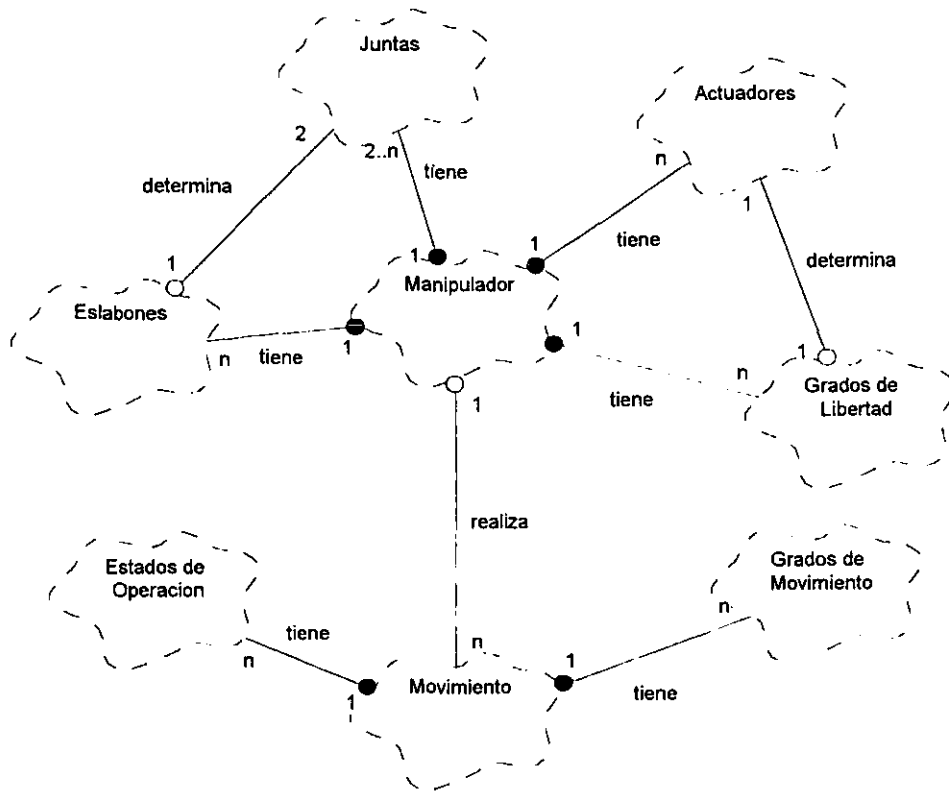


Figura 1.3. Clases *Manipuladores*, *Movimientos* y sus asociaciones.

En general, un manipulador puede tener desde uno hasta “n” grados de libertad (GDL). El grado de libertad [36][37] de un manipulador se define de la manera siguiente:

**Definición 1.2. Grado de Libertad (GDL):** Se define como “el número de elementos, variables o coordenadas independientes necesarias para localizar un punto en un espacio de operación determinado”, o bien, como “el número de entradas independientes necesarias para originar una posición de salida predecible”. Se representa por medio de la clase *Grados de Libertad* mostrada en la figura 1.3.

Por otro lado, si un manipulador cualquiera de n grados de libertad requiere de la activación de n o menos actuadores de su cadena para alcanzar un punto determinado dentro del área o volumen de trabajo, entonces, el movimiento

efectuado es de igual o menor grados de movimiento (GDM) que  $n$ . Por ejemplo, un manipulador de cadena abierta que integra como mínimo seis actuadores puede activar uno, tres o hasta seis actuadores para mover el órgano terminal y aún así efectuar movimientos de seis grados de libertad. A continuación se define el concepto de grado de movimiento.

**Definición 1.3. Grado de Movimiento (GDM):** Es el número " $m$ " de estados de operación asociados a un movimiento, es decir, el número de períodos utilizados para que un manipulador realice un movimiento. Se representa con la clase *Grados de Movimiento* mostrada en la figura 1.3.

**Definición 1.4. Estado de Operación:** Se representa con la letra griega " $\tau$ " y es el periodo durante el cual se activan uno o más actuadores. Se representa con la clase *Estados de Operación* mostrada en la figura 1.3.

### 1.2.1 Clase *Movimientos*

Los movimientos, en general, pueden ser descritos con un ciclo de vida, es decir, desde que se concibe la idea de un movimiento hasta su ejecución. El "ciclo de vida" se representa con tres etapas que contienen la siguiente información: como es especificado un movimiento, como es definido y como es ejecutado. Estas etapas son representadas por las clases *Especificaciones*, *Definiciones* y *Ejecución*, respectivamente, mostradas en la figura 1.4. La cardinalidad (según la definición de la sección 1.1) mostrada entre las clases *Movimientos* y *Especificaciones* indica que un *movimiento* tiene un conjunto de especificaciones y cada conjunto de especificaciones corresponde a un solo movimiento. La relación "restringe", entre las clases *Especificaciones* y *Definiciones*, indica que cada instancia de la clase *Definiciones* debe satisfacer los requerimientos establecidos por sus especificaciones. De igual manera la relación "determina", entre las clases *Definiciones* y *Ejecución*, indica que cada instancia de la clase *Ejecución* debe corresponder con su definición.

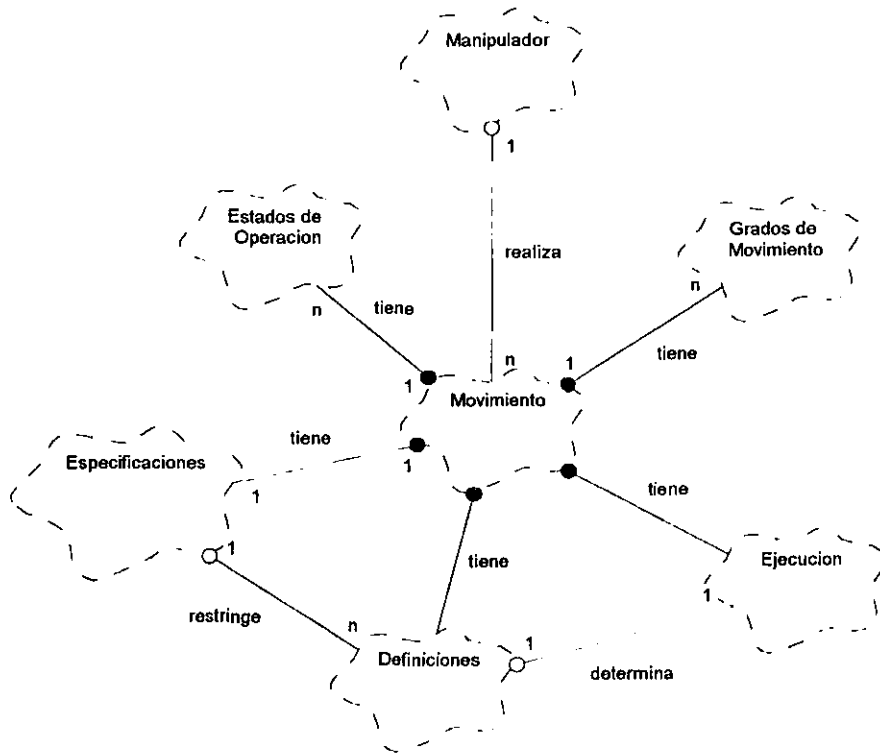


Figura 1.4. Estructura básica del MIOM.

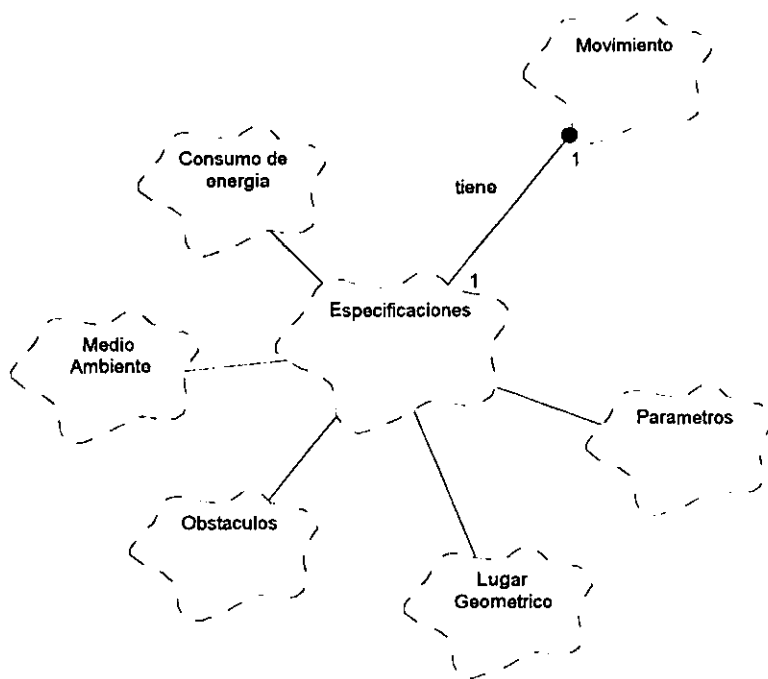


Figura 1.5. Taxonomía de la clase *Especificaciones*.

### 1.2.2 Clase *Especificaciones* y clase *Definiciones*

En la figura 1.5 se muestra una taxonomía de la clase *Especificaciones*. Esta taxonomía indica las distintas clases, por mencionar algunas, en las que se pueden agrupar las especificaciones que determinan cómo se ha de definir un *movimiento*.

Para definir un movimiento se deben observar dos aspectos. Primero, que un manipulador, a través de una operación particular de sus actuadores, es capaz de realizar un determinado movimiento; y segundo, cuando un manipulador produce un movimiento, el órgano terminal de éste describe una trayectoria específica. Luego entonces, los movimientos contienen información que puede clasificarse en dos categorías: información concerniente a su trayectoria e información acerca de la operación de los actuadores de un manipulador. Tales categorías se representan con las clases *Descripción de Trayectoria* y *Operación Funcional*, respectivamente, mostradas en la figura 1.6.

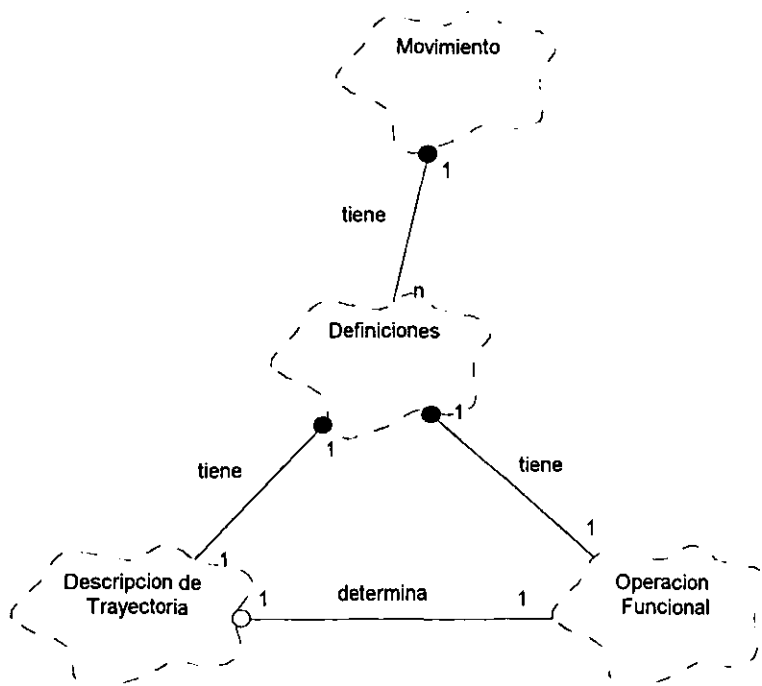


Figura 1.6. Clase *Definiciones*.

La cardinalidad “uno a uno” de la clase *Definiciones* con sus instancias indica que cada combinación de las dos subclases determina una definición específica para un *movimiento*. Lo anterior implica que si una de las subclases cambia, una definición diferente para el mismo *movimiento* se genera. De esta manera pueden ser representadas diferentes alternativas para un mismo *movimiento*.

### 1.2.3 Clase *Descripción de Trayectoria*

Los *movimientos* al momento de ejecutarse describen un lugar geométrico. Ahora bien, el describir una trayectoria consiste no sólo en describir el lugar geométrico, sino también, la evolución de éste en el tiempo. Esto es, bajo qué función evoluciona cada punto del lugar geométrico, descrito por el movimiento, durante el tiempo de evolución o ejecución. A lo anterior, se le conoce como *perfil de evolución* [28]. La información para describir una trayectoria se muestra en la figura 1.7 y se representa con las clases *Lugar Geométrico* y *Perfil de Evolución*.

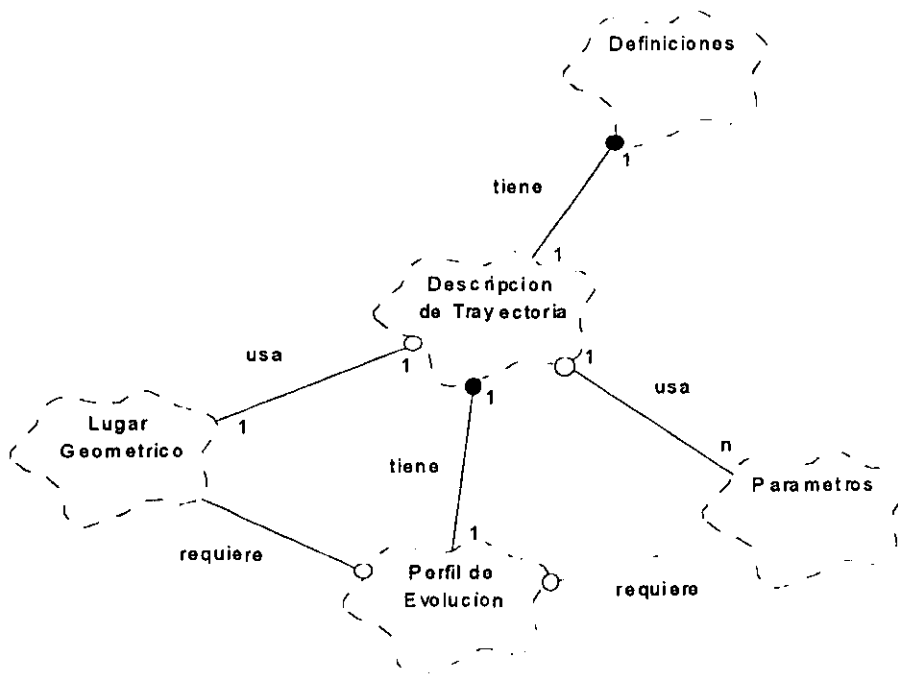


Figura 1.7. Clase *Descripción de Trayectoria*.

La clase *Perfil de Evolución* está asociada, por medio de la relación “requiere”, con las clases *Lugar Geométrico* y *Parámetros*. La relación con la primera de estas clases se debe a que el perfil de evolución que se utilice para describir la trayectoria en el tiempo, puede ser cualquiera de los lugares geométricos existentes. Una taxonomía de los lugares geométricos se muestra en la figura 1.8. De la misma manera, algunas de las instancias de la clase *Parámetros* (duración del recorrido, desplazamiento total, condiciones de frontera) son requeridas por el perfil de evolución para su generación.

En la figura 1.9 se muestra la taxonomía para la clase *Parámetros*. Esta contiene las subclases que representan a los parámetros necesarios para definir una trayectoria; también se muestra la clase *Reglas*, la cual, especifica alguna restricción o regla de correspondencia de los parámetros. Cabe hacer notar que la clase *Parámetros* y la clase *Reglas* aparecen en otras figuras ya que son varias clases las que pueden necesitar de parámetros así como de distintas reglas para definir sus instancias o relación con alguna otra clase.

Las instancias de la clase *Operación Funcional* son las distintas maneras en que un manipulador puede operar sus actuadores para realizar un determinado movimiento. Por *operación* se entiende que un manipulador maneja con ciertas características sus actuadores para realizar un movimiento. Estas características son: la forma de activación de los actuadores (entendiéndose por activación a la acción de modificar el estado de reposo de un actuador); los sentidos en que éstos operan; y los tiempos de operación y desplazamientos asociados a cada actuador. Por funcionalidad se entiende que un manipulador opera con un conjunto específico de estas características para realizar un movimiento según sus especificaciones. Antes de continuar con la clase *Operación Funcional*, se discutirán algunos conceptos asociados a la clase *Actuadores* mostrada en la figura 1.3 pues, de ella surgen elementos relevantes para la clase *Operación Funcional*.

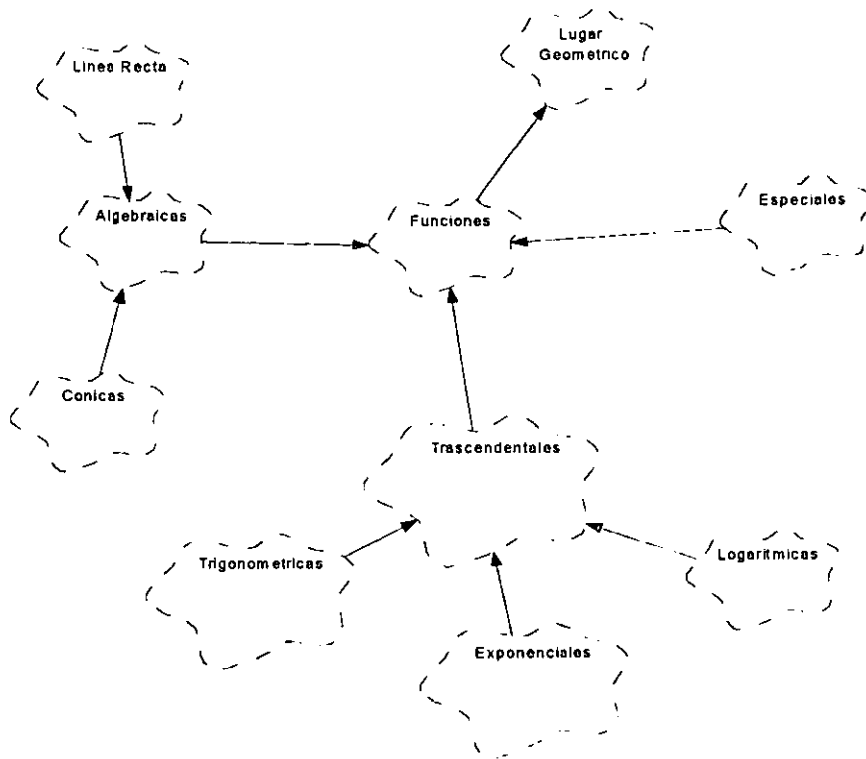


Figura 1.8. Taxonomía de la clase *Lugar Geométrico*.

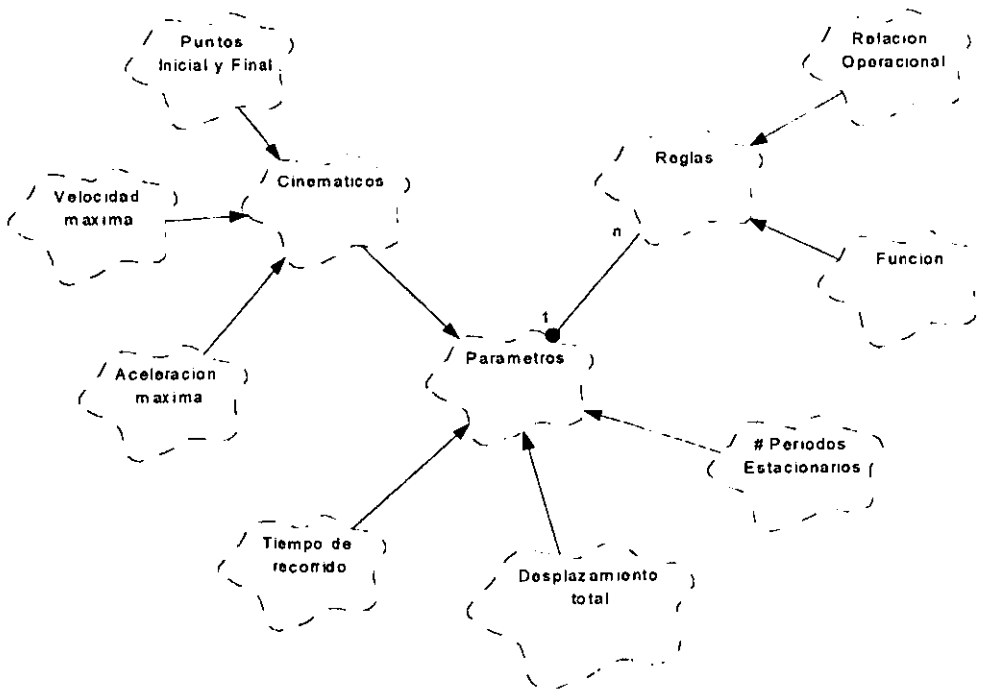


Figura 1.9. Taxonomía de la clase *Parámetros*.

### 1.2.4 Clase *Actuadores*

En esta sección se analiza a la clase *Actuadores* sin presentar una taxonomía propia de los actuadores, pues, los elementos asociados a éstos son de carácter general, es decir, se asocian a cualquier clase de actuador, razón por la cual, una taxonomía de éstos no es relevante para este trabajo. A continuación se desarrollan algunos conceptos y definiciones que serán de utilidad.

Todo conjunto finito  $A$  tiene asociado un conjunto llamado *Conjunto Potencia* [39], denotado por  $P(A)$ , el cual, contiene todos los subconjuntos de orden  $r$  que, de los  $n$  elementos de dicho conjunto, se pueden formar.

**Definición 1.5. Orden:** Se representa con la letra “ $r$ ” y se refiere al número de instancias (elementos) de una clase (conjunto) cualquiera que están involucrados o toman parte en algún suceso. Luego entonces, el valor de  $r$  está dado según la siguiente expresión:

$$0 \leq r \leq n \quad (1.1)$$

En general, el número de elementos del conjunto potencia  $P(A)$  asociado a un conjunto  $A$  cualquiera, está dado por la siguiente expresión:

$$k = 2^n \quad (1.2)$$

Supóngase un conjunto  $B$  con cuatro elementos, esto es,  $n = 4$  tal que  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ; el conjunto potencia  $P(B)$  asociado a  $B$  es el siguiente:

$$P(B) = \{\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}, \{b_4\}, \{b_1, b_2\}, \{b_1, b_3\}, \{b_1, b_4\}, \{b_2, b_3\}, \{b_2, b_4\}, \{b_3, b_4\}, \{b_1, b_2, b_3\}, \{b_1, b_2, b_4\}, \\ \{b_1, b_3, b_4\}, \{b_2, b_3, b_4\}, \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \{\emptyset\}\}$$



Ahora bien, como se puede observar del conjunto  $P(B)$ , algunos subconjuntos tienen el mismo número de elementos. Luego entonces, los elementos del conjunto potencia  $P(B)$  pueden agruparse en distintos subconjuntos con  $r$  elementos de  $B$  cada uno. Esto es, del conjunto  $P(B)$  se pueden formar 4 subconjuntos de uno, dos, tres y cuatro elementos cada uno, tales que:

$$B_1 = \{b_i\}, B_2 = \{b_i, b_j\}, B_3 = \{b_i, b_j, b_l\}, B_4 = \{b_i, b_j, b_k, b_l\} \forall b_i, b_j, b_k, b_l \in B$$

Por lo tanto, de todo conjunto finito con  $n$  elementos, se pueden formar  $(n+1)$  subconjuntos de orden  $r$  que contengan todos los elementos del Conjunto Potencia asociado. Esto es:

**Definición 1.5.** Sea  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  un conjunto finito cualquiera con  $n$  elementos y sea  $P(A)$  su Conjunto Potencia asociado. Entonces:

$$\exists A_r \subset A \mid A_r = \{a_i, \dots, a_j, \dots, a_r\} : 0 \leq r \leq n \forall a_i, a_j \in A \wedge A_r \in P(A) \quad (1.3)$$

Para el ejemplo planteado con el conjunto  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ , los subconjuntos  $B_0, B_1, B_2, B_3,$  y  $B_4$  tienen un determinado número de elementos, es decir:

$$B_1 = \{\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}, \{b_4\}\} \therefore B_1 \text{ tiene 4 elementos.}$$

$$B_2 = \{\{b_1, b_2\}, \{b_1, b_3\}, \{b_1, b_4\}, \{b_2, b_3\}, \{b_2, b_4\}, \{b_3, b_4\}\} \therefore B_2 \text{ tiene 6 elementos.}$$

$$B_3 = \{\{b_1, b_2, b_3\}, \{b_1, b_2, b_4\}, \{b_1, b_3, b_4\}, \{b_2, b_3, b_4\}\} \therefore B_3 \text{ tiene 4 elementos.}$$

$$B_4 = \{\{b_1, b_2, b_3, b_4\}\} \therefore B_4 \text{ tiene 1 elemento.}$$

$$B_0 = \{\{\emptyset\}\} \therefore B_0 \text{ tiene 0 elementos.}$$

Entonces, para todo conjunto finito  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  con un Conjunto Potencia asociado  $P(A) = \{A_0, \dots, A_r, \dots, A_n\}$ , el número  $k_r$  de elementos asociado con cada conjunto  $A_r \in P(A)$  está definido por la siguiente expresión:

$$k_r = C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! r!} \quad \text{donde } k_r \rightarrow A_r \quad (1.4)$$

Luego, el número total de elementos en el conjunto  $P(A)$  se define como:

$$k_{P(A)} = 2^n = \sum_{r=0, \dots, n} C_r^n = (C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n) \quad (1.5)$$

Considerando el conjunto  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  usado como ejemplo, su Conjunto Potencia  $P(B)$  es tal que,  $P(B) = \{\{B_1\}, \{B_2\}, \{B_3\}, \{B_4\}, \{\emptyset\}\}$ , luego entonces, aplicando la expresión (1.4), se obtiene lo siguiente:

$$k_1 = C_1^4 = \frac{4!}{(4-1)! 1!} = \frac{4!}{3! 1!} = 4 \quad \text{donde } k_1 \rightarrow B_1$$

$$k_2 = C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)! 2!} = \frac{4!}{2! 2!} = 6 \quad \text{donde } k_2 \rightarrow B_2$$

$$k_3 = C_3^4 = \frac{4!}{(4-3)! 3!} = \frac{4!}{0! 3!} = 4 \quad \text{donde } k_3 \rightarrow B_3$$

$$k_4 = C_4^4 = \frac{4!}{(4-4)! 4!} = \frac{4!}{0! 4!} = 1 \quad \text{donde } k_4 \rightarrow B_4$$

por lo tanto, de (1.5):

$$k_{P(A)} = 2^4 = 1 + \sum_{r=1, \dots, 4} C_r^4 = 1 + (C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4) = 1 + (4 + 6 + 4 + 1) = 16$$

En la figura 1.10 se muestra la clase *Actuadores* la cual, representa al conjunto  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  de actuadores que integran a un manipulador. La clase *Conjuntos Potencias* contiene al conjunto potencia  $P(A) = \{\{A_1\}, \dots, \{A_i\}, \dots, \{A_n\}, \{\emptyset\}\}$  asociado al conjunto de actuadores.

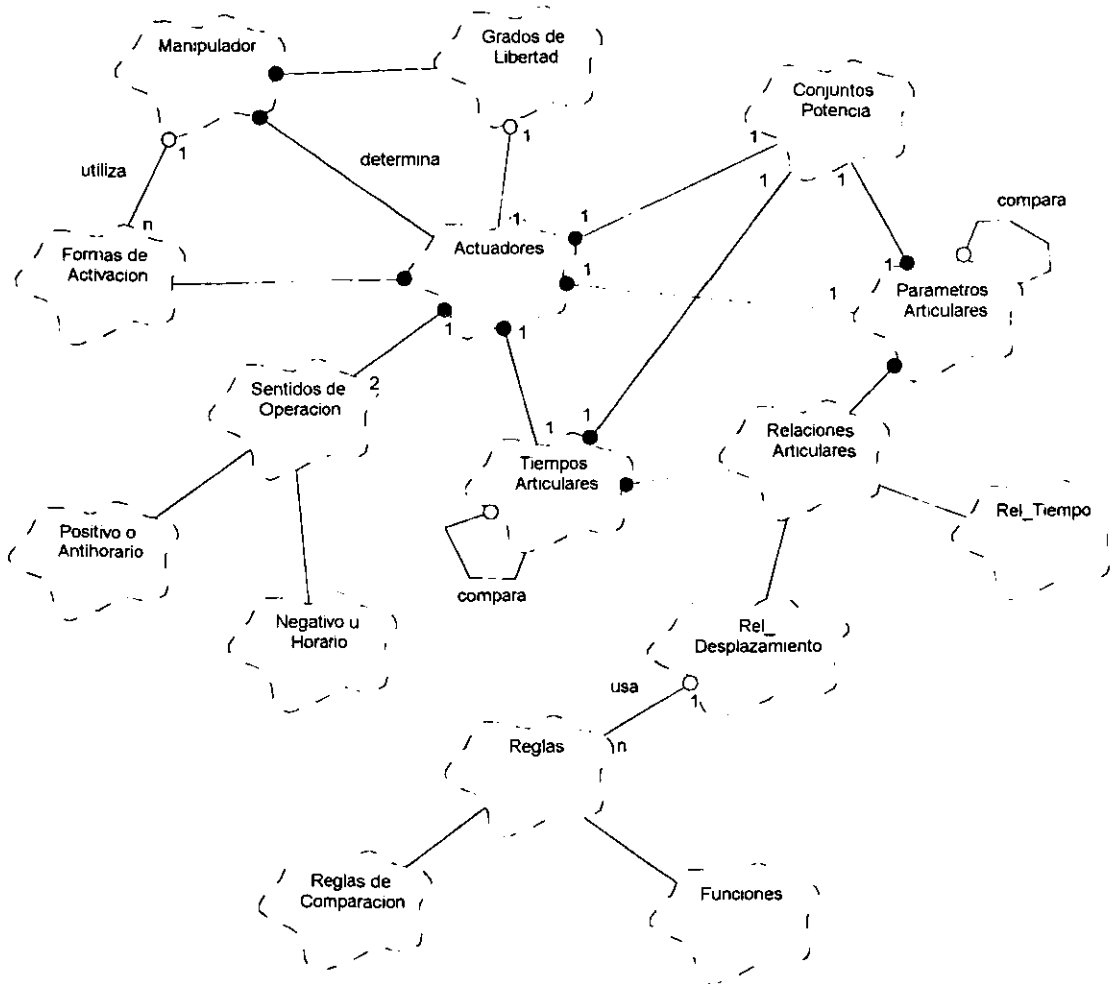


Figura 1.10. Clase *Actuadores*.

Cada actuador en un manipulador tiene asociado un desplazamiento y tiempo de operación; éstos se representan con las clases *Parámetros Articulares* y *Tiempos Articulares*, respectivamente, según se muestra en la figura 1.10. La asociación *compara* de tales clases con ellas mismas se debe a que tanto los *parámetros articulares* asociados a los desplazamientos de los *actuadores* así

como los *tiempos de operación*, pueden tener valores iguales, diferentes o desiguales entre ellos. Estas comparaciones se representan por medio de la clase *Relaciones Articulares* que contiene a las clases *Rel\_Desplazamiento* y *Rel\_Tiempo*, respectivamente. En la figura 1.11 se muestran algunas instancias (en particular, instancias de orden 3) de la clase *Relaciones Articulares* para el caso de un manipulador de 3GDL.

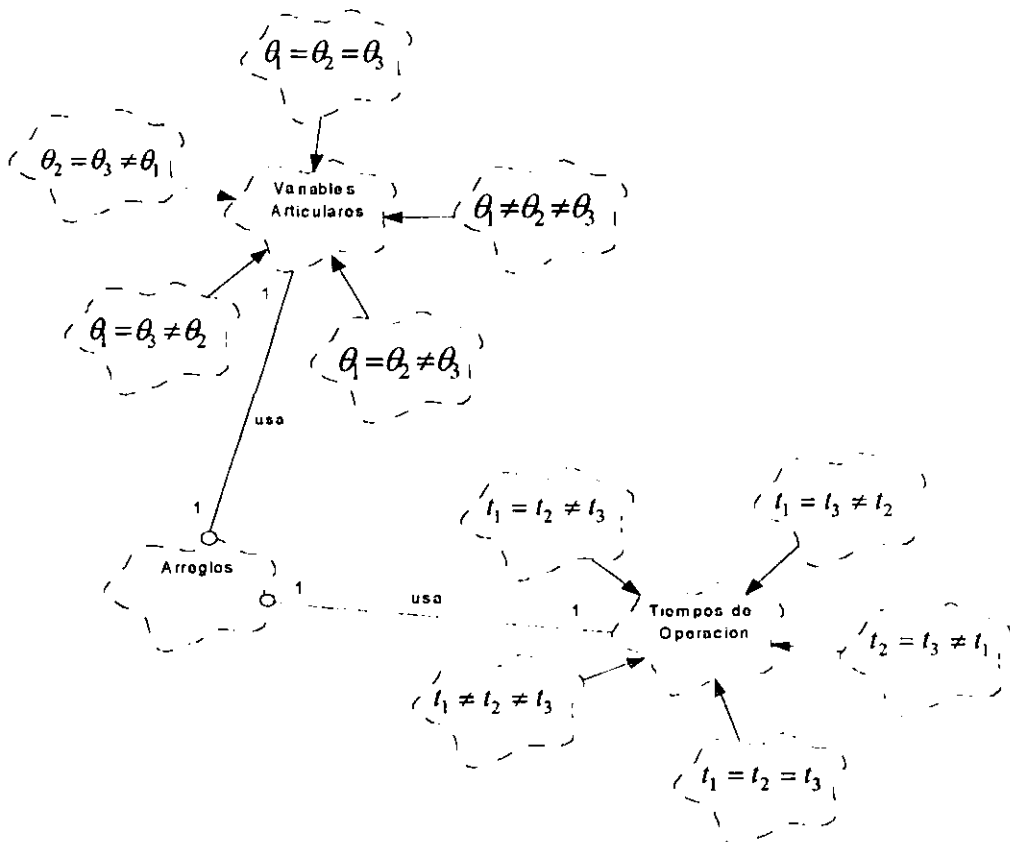


Figura 1.11. Instancias de orden 3 de las clases *Rel\_Desplazamiento* y *Rel\_Tiempos*.

Dichas comparaciones son de distinto orden  $r$  (definición 1.4) según el número de parámetros y tiempos articulares involucrados en dichas comparaciones. Esto significa que al igual que la clase *Actuadores*, las clases *Parámetros Articulares* y *Tiempos Articulares* también tiene un *conjunto potencia* asociado. Todas las comparaciones mencionadas se hacen utilizando la clase *Reglas* cuyas

instancias son los operadores “igual que”, “diferente que” y “mayor o menor que” además de cualquier tipo de función (figura 1.8). Tales instancias se agrupan en las subclases *Reglas de Comparación* y *Funciones* respectivamente, según se muestra en la figura 1.10.

**Tabla 1.1** Instancias de la clase *Arreglos* de Orden 1.

3 arreglos ( $\theta \times t_{op}$ )		Rel_ Parámetros Articulares		
		$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
Rel_ Tiempos Articulares	$t_1$	$\theta_1 \times t_1$	x	x
	$t_2$	x	$\theta_2 \times t_2$	x
	$t_3$	x	x	$\theta_3 \times t_3$

**Tabla 1.2** Instancias de la clase *Arreglos* Orden 2.

12 arreglos ( $\theta \times t_{op}$ )		Instancias de la clase Rel_ Parámetros Articulares					
		$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 \neq \theta_2$	$\theta_1 = \theta_3$	$\theta_1 \neq \theta_3$	$\theta_2 = \theta_3$	$\theta_2 \neq \theta_3$
Instancias de la clase Rel_ Tiempos Articulares	$t_1 = t_2$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \\ t_1 = t_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \neq \theta_2 \\ t_1 = t_2 \end{cases}$	x	x	x	x
	$t_1 \neq t_2$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \neq \theta_2 \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$	x	x	x	x
	$t_1 = t_3$	x	X	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_3 \\ t_1 = t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \neq \theta_3 \\ t_1 = t_3 \end{cases}$	x	x
	$t_1 \neq t_3$	x	X	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_3 \\ t_1 \neq t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \neq \theta_3 \\ t_1 \neq t_3 \end{cases}$	x	x
	$t_2 = t_3$	x	X	x	x	$\begin{cases} \theta_2 = \theta_3 \\ t_2 = t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_2 = t_3 \end{cases}$
	$t_2 \neq t_3$	x	X	x	x	$\begin{cases} \theta_2 = \theta_3 \\ t_2 \neq t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_2 \neq t_3 \end{cases}$

Tabla 1.3 Instancias de la clase *Arreglos* de Orden 3.

25 arreglos ( $\theta \times t_{op}$ )		Instancias de la clase <i>Rel_Parámetros Articulares</i>				
		$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$	$\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$	$\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$	$\theta_1 = \theta_3 \neq \theta_2$	$\theta_2 = \theta_3 \neq \theta_1$
Instancias de la clase <i>Rel_Tiempos Articulares</i>	$t_1 = t_2 = t_3$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ t_1 = t_2 = t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_1 = t_2 = t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_1 = t_2 = t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_3 \neq \theta_2 \\ t_1 = t_2 = t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_2 = \theta_3 \neq \theta_1 \\ t_1 = t_2 = t_3 \end{cases}$
	$t_1 \neq t_2 \neq t_3$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ t_1 \neq t_2 \neq t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_1 \neq t_2 \neq t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_1 \neq t_2 \neq t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_3 \neq \theta_2 \\ t_1 \neq t_2 \neq t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_2 = \theta_3 \neq \theta_1 \\ t_1 \neq t_2 \neq t_3 \end{cases}$
	$t_1 = t_2 \neq t_3$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ t_1 = t_2 \neq t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_1 = t_2 \neq t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_1 = t_2 \neq t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_3 \neq \theta_2 \\ t_1 = t_2 \neq t_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_2 = \theta_3 \neq \theta_1 \\ t_1 = t_2 \neq t_3 \end{cases}$
	$t_1 = t_3 \neq t_2$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ t_1 = t_3 \neq t_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_1 = t_3 \neq t_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ t_1 = t_3 \neq t_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_3 \neq \theta_2 \\ t_1 = t_3 \neq t_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_2 = \theta_3 \neq \theta_3 \\ t_1 = t_3 \neq t_2 \end{cases}$
	$t_2 = t_3 \neq t_1$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ t_2 = t_3 \neq t_1 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_2 = t_3 \neq t_1 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3 \\ t_2 = t_3 \neq t_1 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 = \theta_3 \neq \theta_2 \\ t_2 = t_3 \neq t_1 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_2 = \theta_3 \neq \theta_3 \\ t_2 = t_3 \neq t_1 \end{cases}$

La clase *Arreglos* mostrada en la figura 1.11, está asociada por medio de la relación "usa" con la clase *Relaciones Articulares* debido a que las instancias de la primera de éstas son todas las parejas (arreglos) que se pueden formar con las instancias de esta última clase. En las tablas 1.1, 1.2 y 1.3 se indican todas los *arreglos* que se pueden formas con las instancias de las clases *Rel\_Parámetros Articulares* y *Rel\_Tiempos Articulares* para el caso de un manipulador de 3GDL.

Tales arreglos se clasifican en diferentes tablas de según el orden de cada *relación articular*, esto es, se clasifican como de orden 3, orden 2 y orden 1, ya que el número de *parámetros articulares* y *tiempos articulares* en la clase *Relaciones Articulares* son 3, 2 y 1.

Por otro lado, los actuadores en general tiene dos sentidos de operación: positivo o antihorario y negativo u horario. Esto se representa con la clase *Sentidos de Operación* mostrada en la figura 1.10.

En la figura 1.10 se muestra la clase *Formas de Activación* que representa las distintas formas en que un manipulador puede activar sus actuadores desde el punto de vista de un ordenamiento. Esta clase es medular para el desarrollo de este capítulo, razón por la cual, a continuación se le dedica una sección entera.

### 1.2.5 Clase *Formas de Activación*

Las instancias de la clase *Formas de Operación* son las distintas formas en que los actuadores de un manipulador pueden ser activados, desde el punto de vista de un ordenamiento, para que se produzca un movimiento (recuérdese que la activación de un actuador solo significa modificar el estado de reposo de un actuador). En la figura 1.12 se muestra una taxonomía de las distintas *formas de activación* asociadas a un manipulador y sus actuadores.

En dicha taxonomía se observa que las formas de activación asociadas a los actuadores se clasifican como *Simples* o *Compuestas*, donde las formas *Simples* son siempre activaciones *Simultáneas* y las formas *Compuestas* siempre son *Secuenciales* y se componen de dos o más instancias *simples*, es decir, dos o más activaciones *simultáneas*. Las instancias de la clase *Secuenciales*, es decir, las *formas de activación secuenciales* se clasifican como *Unitarias*, *Mixtas* e *Híbridas*. Cada clase de activación está asociada tanto a una regla algebraica, que determina el número de instancias en ellas, como a una regla de comparación que determina su grado y orden de acuerdo a las definiciones 1.2 y 1.4. Ahora bien, de la taxonomía mostrada en la figura 1.12, se infiere que las formas en que un manipulador puede activar sus actuadores son dos: *Simultáneas* y *Secuenciales*. A continuación se definen cada una de ellas.

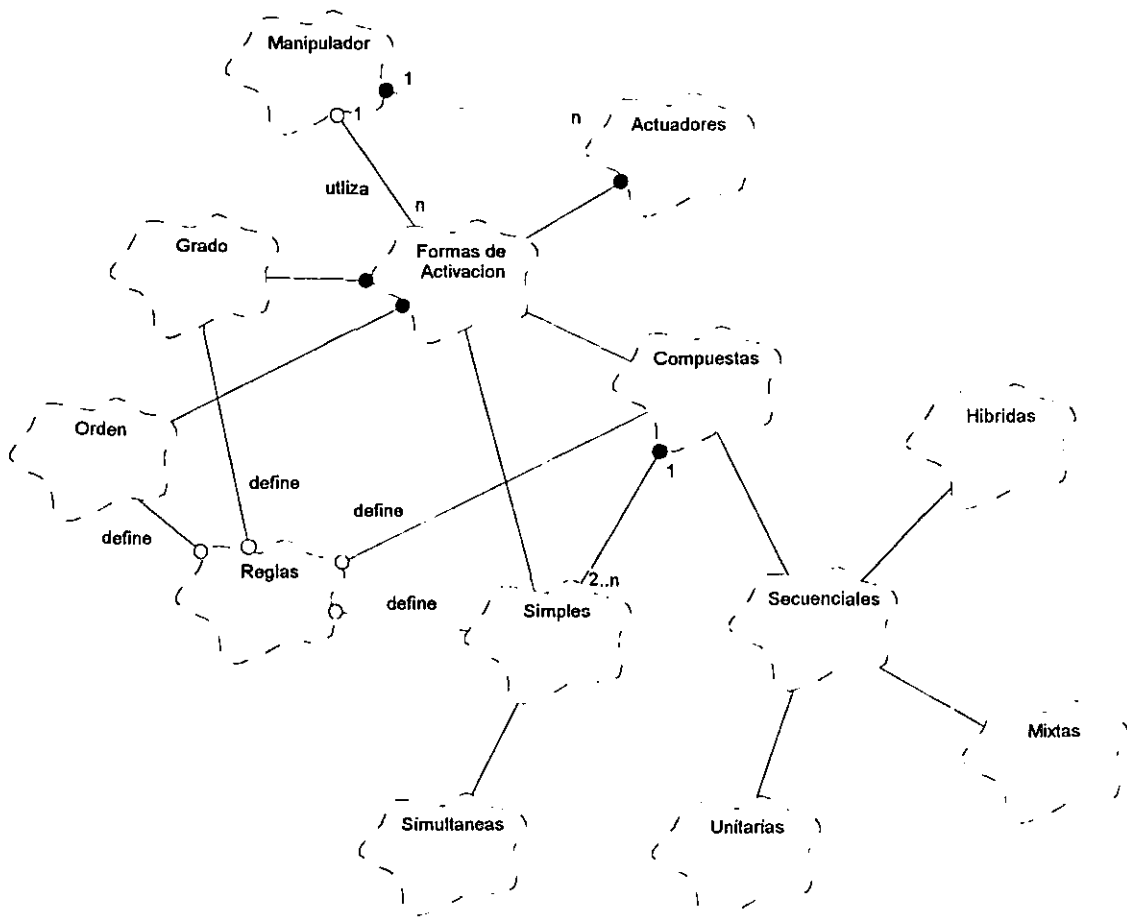


Figura 1.12. Taxonomía de la clase *Formas de Operación*.

### 1.2.5.1 Clase *Simultáneas*

En la parte más baja de la taxonomía mostrada en la figura 1.12, se encuentra la clase de activación *Simultáneas*, la cual, constituye la forma más básica o elemental en que un manipulador puede activar sus actuadores para realizar un movimiento. Todas las demás clases de operación están compuestas por algún tipo de operación *simultánea*. Esta última se define de la siguiente manera:

**Definición 1.6. Activación Simultánea:** Si para alcanzar un punto mediante el órgano terminal de un manipulador se requiere activar al menos uno, dos o más actuadores en un solo estado de operación (definición 1.3), entonces, dicha activación es *simultánea* y se dice que el movimiento asociado a la activación



de los actuadores es *simultáneo*. Las formas de activación *Simultáneas* se clasifican según el número  $r$  de elementos en un *grupo* de actuadores.

**Definición 1.7. Grupo:** Un grupo es un conjunto de actuadores, es decir, un subconjunto de  $A$ , de orden  $r$ , donde los actuadores operan simultáneamente, es decir, en uno y sólo un estado de operación (definición 1.4). Esto es:

$$g_r \subset A \mid g_r = (a_i \dots a_j) : a_i \dots a_j \rightarrow \tau_i, \tau_i \text{ es unico} \wedge 0 \leq r \leq n; \forall a_i, a_j \in A \quad (1.6)$$

De las definiciones 1.6 y 1.7 se observa que los *grupos* de actuadores son similares a los elementos del conjunto potencia  $P(A)$  asociado al conjunto  $A$  de actuadores, esto se debe a la existencia de una regla de correspondencia entre ellos. La diferencia radica en que, sobre los elementos que constituyen a los subconjuntos de  $A$  (elementos del Conjunto Potencia  $P(A)$  asociado), no se ejerce acción alguna, sólo existen como elementos, es decir, son un conjunto "estático". Por otro lado, los *grupos* son uno o más elementos del conjunto  $A$  de actuadores sobre los cuales, además de existir como elementos, se ejerce o ejercen una acción, en este caso, una activación simultánea de ellos. La regla de correspondencia mencionada permite establecer la siguiente definición:

**Definición 1.8.** Sea  $f$  una función cuyo contradominio lo constituyen todos los subconjuntos de  $A$  de orden  $r$  transformados bajo  $f$  en grupos de actuadores (definición 1.7), luego entonces, el dominio de  $f$  es el *conjunto potencia*  $P(A)$  asociado al conjunto  $A$  de actuadores. Esto es:

$$f : P(A) \rightarrow G \mid f(A_r) = g_r : A_r = \{a_1, \dots, a_r\} \wedge g_r = (a_1 \dots a_r); \forall a_i, a_r \in A \quad (1.7)$$

De la definición anterior, se tiene que la función  $f : P(A) \rightarrow G$  es una función es "uno a uno" y "sobre", es decir, una función biyectiva que asocia a cada elemento de  $P(A)$  uno y sólo un elemento de  $G$ , esto es:

$$f(\{a_1, \dots, a_r\}) = (a_1 \dots a_r) : \{a_1, \dots, a_r\} \in P(A) \wedge (a_1 \dots a_r) \in G; \forall a_i, a_r \in A \quad (1.8)$$

Dada la existencia de  $f : P(A) \rightarrow G$ , al igual que en los elementos de  $P(A)$ , algunas instancias de la clase *Simultáneas*, es decir, algunos *grupos*, tiene el mismo número  $r$  de actuadores, luego entonces, de los elementos de  $G$  pueden formarse  $(n+1)$  conjuntos de *grupos* con el mismo número de actuadores, esto es,  $G = \{\{G_0\}, \dots, \{G_r\}, \dots, \{G_n\}\}$  tal que:

$$G_r = \{g_{r,i}, \dots, g_{r,j}\}, g_{r,i} = (a_1 \dots a_j \dots a_r) : 0 \leq r \leq n; \forall a_i, a_j \in A, g_{r,i}, g_{r,j} \in G, G_r \subset G \quad (1.9)$$

Cabe hacer notar que al conjunto  $G_0 \subset G$  le corresponde el conjunto vacío de actuadores, lo cual, implica que ningún actuador es activado, por lo tanto, el conjunto  $G_0 \subset G$  está asociado al movimiento nulo en un manipulador.

Con base en la definición 1.8, tanto el número de *grupos*  $g_{r,i}$  en cada conjunto  $G_r \subset G$  como el número total  $k_G$  de formas de activación *Simultáneas* están definidos de acuerdo a las expresiones (1.4) y (1.5), respectivamente, por las expresiones siguientes:

$$k_r = C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! r!} \text{ donde } k_r \rightarrow G_r \quad (1.10)$$

$$k_G = k_{P(A)} = 2^n = \sum_{r=0, \dots, n} C_r^n = (C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n) \quad (1.11)$$

Considérese el caso del robot manipulador paralelo plano 3-RRR motivo de nuestro estudio. Sea  $A = \{a, b, c\}$  el conjunto de actuadores tal que  $n=3$ . De la expresión (1.1) se obtiene que:

$$0 \leq r \leq 3 \quad (1.12)$$

luego entonces, de la expresión (1.9),

$$G = \{\{G_1\}, \{G_2\}, \{G_3\}, \{\emptyset\}\}; G_1 = \{g_{1,i}, \dots, g_{1,j}\}, G_2 = \{g_{2,i}, \dots, g_{2,j}\} \quad (1.13)$$

$$G_3 = \{g_{3,i}, \dots, g_{3,j}\}; \forall g_i, g_j, g_k \in G$$

y de la expresión (1.6):

$$g_{1,i} = (a_i), g_{2,i} = (a_i a_j), g_{3,i} = (a_i a_j a_k); \forall a_i, a_j, a_k \in A \wedge g_{1,i}, g_{2,i}, g_{3,i} \in G \quad (1.14)$$

Aplicando la expresión (1.4), el número de *grupos* de actuadores en cada conjunto  $G_1, G_2, G_3 \subset G$  es:

$$k_1 = C_1^3 = \frac{3!}{(3-1)! 1!} = \frac{3!}{2! 1!} = 3 \quad \text{donde } k_1 \rightarrow G_1 = \{(a), (b), (c)\} \quad (1.15)$$

$$k_2 = C_2^3 = \frac{3!}{(3-2)! 2!} = \frac{3!}{1! 2!} = 3 \quad \text{donde } k_2 \rightarrow G_2 = \{(ab), (ac), (bc)\}$$

$$k_3 = C_3^3 = \frac{3!}{(3-3)! 3!} = \frac{3!}{0! 3!} = 1 \quad \text{donde } k_3 \rightarrow G_3 = \{(abc)\}$$

Por lo tanto, de la expresión (1.5), el número total de formas de activación *Simultáneas* asociadas a los actuadores del manipulador paralelo plano 3-RRR motivo de nuestro estudio es:

$$k_G = 1 + \sum_{r=1, \dots, 3} C_r^3 = 1 + (C_1^3 + C_2^3 + C_3^3) = 1 + 7 = 8 \quad (1.16)$$

Cabe hacer notar que el número  $k_G = 8$  de formas de activación *Simultáneas* obtenido para el manipulador 3-RRR motivo de nuestro estudio, será el mismo para cualquier manipulador de 3GDL.

Por otro lado, nótese que para indicar una instancia de la clase *Simultáneas*, es decir, un *grupo* de actuadores, se utiliza un par de paréntesis dentro de los cuales, los actuadores no están separados por comas; mientras que los elementos del *conjunto potencia* asociado a la clase *Actuadores*, están separados por comas dentro de un par de llaves.

### 1.2.5.2 Clase *Secuenciales*

**Definición 1.9. Activación Secuencial:** Si para alcanzar un punto mediante el órgano terminal de un manipulador se requiere activar dos o más *grupos* no vacíos de actuadores, uno después de otro de tal manera que mientras se activa un determinado grupo de actuadores, los restantes grupos permanecen inactivos, entonces, dicha activación es llamada *secuencial* y se dice que el movimiento asociado a la activación de los actuadores es *secuencial*. Una activación *secuencial* cumple con las siguientes propiedades:

- 1) Cada activación de un grupo de actuadores está asociada a uno y sólo un estado de operación (definición 1.7), es decir:

$$g_{r,i} \rightarrow \tau_i, g_{r,j} \rightarrow \tau_j : \tau_i \neq \tau_j; \forall g_{r,i}, g_{r,j} \in G \quad (1.17)$$

- 2) El número **m** de estados de operación (definición 1.4) en una *secuencia* de *grupos* de actuadores no es mayor que **n**. Estos es, para una activación secuencial:

$$r_s = m; \text{ donde } 2 \leq m \leq n \quad (1.18)$$

En la definición 1.5 se estableció que el orden se refiere al número de elementos de alguna clase que toman parte en algún suceso. Luego entonces, respecto de la propiedad (2), el orden en una *secuencia* se refiere al número de *grupos* que toman parte en ella, de ahí que se le agregue el subíndice "s" para diferenciarlo

del orden  $r_G$  (o sólo  $r$ ) asociado a los grupos de actuadores. Cabe hacer notar que de las propiedades (1) y (2), el grado  $m$  y orden  $r_S$  de una forma de activación *secuencial* siempre serán iguales.

**Definición 1.10. Secuencia:** Una *secuencia* es un subconjunto ordenado de grado  $m$  y orden  $r_S$  de los elementos de  $G$  (instancias de la clase *Simultáneas*), donde al menos dos *grupos* (no vacíos) cualesquiera de actuadores se activan secuencialmente cada uno en un estado de operación. Esto es:

$$S_m \subset G \mid S_m = (g_{r,i} - g_{r,j} - \dots - g_{n,m}) : g_{r,i} \rightarrow \tau_i, g_{r,j} \rightarrow \tau_j, g_{n,m} \rightarrow \tau_m, \quad (1.19)$$

$$1 \leq r \leq n \wedge 2 \leq m \leq n; \forall g_{r,i}, g_{r,j}, g_{n,m} \in G$$

De la definición 1.10 se infiere una regla de correspondencia entre el conjunto  $G$  de instancias de la clase *Simultáneas* y las instancias de la clase *Secuenciales*.

**Definición 1.11.** Sea  $h$  una función cuyo contradominio lo constituyen todos los subconjuntos ordenados de  $G$  transformados bajo  $h$  en *secuencias* de dos o más grupos de actuadores, entonces, el dominio de  $h$  son todas las permutaciones de los elementos de  $G$ . Por lo tanto:

$$\exists h : O(G) \rightarrow S \mid h(\{g_{r,i}, g_{r,j}, \dots, g_{n,m}\}) = S_m; \forall \{g_{r,i}, g_{r,j}, \dots, g_{n,m}\} \in O(G) \quad (1.20)$$

El conjunto  $O(G)$  son todas la permutaciones u ordenaciones que se pueden formar con los elementos del conjunto  $G$  de *grupos* de actuadores.

De la definición anterior, se tiene que la función  $h : O(G) \rightarrow S$  es una función es “uno a uno” y “sobre”, es decir, una función biyectiva que asocia a cada elemento de  $S$  uno y sólo un elemento de  $O(G)$ , esto es:

$$h(\{g_{r,i}, g_{r,j}, \dots, g_{n,m}\}) = (g_{r,i} - g_{r,j} - \dots - g_{n,m}); \forall \{g_{r,i}, g_{r,j}, \dots, g_{n,m}\} \in O(G) \quad (1.21)$$

En la definición 1.10 se establece que los *grupos* de actuadores en una *secuencia* pueden ser cualquiera de los elementos de  $G$ . Esto implica que los *grupos* asociados a cada estado de operación pueden ser iguales o distintos entre sí. Luego entonces, las permutaciones u ordenaciones del conjunto  $O(G)$  son ordenaciones con restitución [38]. El número de ordenaciones de este tipo se define como:

$$k_{O(G)} = \sum_{m=2, \dots, n} (k_G - 1)^m \quad (1.22)$$

De la definición 1.11, se infiere que:

$$k_S = k_{O(G)} \quad (1.23)$$

Aquí  $k_G$  es el número de activaciones *simultáneas* (a éstas últimas se le resta 1 para eliminar la activación nula de los actuadores representada por el conjunto vacío, ver expresiones (1.13));  $m$  es el número de estados de operación definidos por la expresión (1.18) y  $k_S$  es el número de activaciones *secuenciales*. Aplicando las expresiones (1.22) y (1.23) el número de instancias de la clase *Secuenciales* es:

$$k_S = k_{O(G)} = \sum_{m=2,3} (8-1)^m = 7^2 + 7^3 = 49 + 343 = 392 \quad (1.24)$$

En la figura 1.8 se observa que las instancias de la clase *Secuenciales* se clasifican como *Unitarias (SU)*, *Mixtas (SM)* e *Híbridas (SH)*. Ahora bien, la asociación “es un” (figura 1.1) implica que las subclases contenidas en una clase son particiones del conjunto representado por dicha clase [40][41]. Lugo

entonces, las instancias de la clase *Secuenciales*, es decir, el conjunto de activaciones *secuenciales* puede expresarse de la manera siguiente:

$$S = SU \cup SM \cup SH \Leftrightarrow SU \cap SM \cap SH = \emptyset \quad (1.25)$$

De la expresión anterior, el número de activaciones *secuenciales* puede expresarse como la suma de las instancias las clases *Unitarias*, *Mixtas* e *Híbridas*, respectivamente. Esto es:

$$k_S = k_{SU} + k_{SM} + k_{SH} \quad (1.26)$$

Cada una de estas clases cumple con las dos propiedades establecidas en la definición 1.9, es decir, dichas propiedades son de carácter general. Sin embargo, cada subclase cumple con propiedades particulares. A continuación se definen cada una de las clases contenidas en la clase *Secuenciales*.

#### 1.2.5.2.1 Clase *Unitarias*

**Definición 1.12.** Las instancias de la clase *Unitarias* son formas de activación *secuenciales* que además de cumplir con las propiedades ya mencionadas, se caracterizan por tener las siguientes propiedades:

- El orden  $r_G$  de los *grupos* asociados a los  $m$  estados de operación en una *secuencia*, siempre es igual a uno. Esto es, para una forma de activación *unitaria*:  $r_G = 1$ .
- El número de actuadores en una *secuencia* no es mayor que  $n$ . Esto implica que un actuador no puede ser activado más de una vez en los  $m$  estados de operación asociados a una activación de los actuadores.

Por lo tanto, una *forma de activación secuencial unitaria* cumple con las siguientes propiedades:

- 1) Cada activación de un grupo de actuadores está asociada a uno y sólo un estado de operación (definición 1.7). Esto es:

$$g_{r,i} \rightarrow \tau_i, g_{r,j} \rightarrow \tau_j : \tau_i \neq \tau_j; \forall g_{r,i}, g_{r,j} \in G$$

- 2) El numero  $m$  de estados de operación (definición 1.4) en una *secuencia* de *grupos* de actuadores no es mayor que  $n$ . Estos es, para una activación secuencial:

$$r_s = m; \text{ donde } 2 \leq m \leq n$$

- 3) El número de actuadores en una *secuencia* no es mayor que  $n$ . Esto implica que un actuador no puede ser activado más de una vez en los  $m$  estados de operación asociados a una activación de los actuadores, es decir, ningún actuador se repite. La siguiente expresión es una condición necesaria más no suficiente para esta propiedad:

$$g_{1,i} \neq g_{1,j} \neq g_{1,m}; \forall g_{1,i}, g_{1,j}, \dots, g_{1,m} \in G_1 \tag{1.27}$$

- 4) El orden  $r_G$  de los *grupos* asociados a los  $m$  estados de operación en una *secuencia*, siempre es igual a uno. Esto es:

$$r_G = 1 \tag{1.28}$$

De la propiedad (3) y (4) y expresion (1.25), se infiere que para una forma de activación *unitaria* el dominio de la función  $h$  (definición 1.11) no es todo el conjunto  $O(G)$ , es decir, no son todas las instancias de la clase *Simultáneas*,



sino sólo aquellos *grupos* de orden 1. Luego entonces, se establece la siguiente definición:

**Definición 1.13.** Sea  $h_1$  una función cuyo contradominio lo constituyen todos los subconjuntos ordenados de  $G$  transformados bajo  $h$  en *secuencias* de dos o más *grupos* de actuadores de orden 1, luego entonces, el dominio de  $h$  son todas las permutaciones de los elementos de  $G$  que cumplen las propiedades (1), (2), (3) y (4). Esto es:

$$h_1: O(G_1) \rightarrow SU \mid h_1(g_{1,i}, g_{1,j}, \dots, g_{1,m}) = SU_m; \forall g_{1,i}, g_{1,j}, \dots, g_{1,m} \in O(G_1) \subset O(G) \quad (1.29)$$

Aquí  $SU$  es el conjunto de *secuencias unitarias*,  $O(G_1)$  el conjunto de ordenaciones de los *grupos* de orden igual a 1. Entonces, el número  $k_{O(G_1)}$  de ordenaciones de los *grupos* de orden 1 está definido por la siguiente expresión:

$$k_{O(G_1)} = \sum_{m=2, \dots, n} O_m^{k_{o_1}} = \frac{k_{G_1}!}{(k_{G_1} - m)!} \quad (1.30)$$

donde  $k_{G_1}$  es el número de formas de activación *simultáneas* asociadas a los *grupos* de actuadores de orden igual a 1. Por la expresión (1.23) se deduce que:

$$k_{SU} = k_{O(G_1)} \quad (1.31)$$

En la expresión (1.30) se observa que las permutaciones se hacen tomando elementos desde 2 en 2 hasta  $n$  en  $n$  elementos, por lo tanto, de las *secuencias unitarias* se pueden formar igual número  $m$  de subconjuntos. Esto es:

$$SU_m \subset SU \mid SU_m = \{\{SU_2\}_2, \dots, \{SU_m\}_m\}; SU_m = (g_{1,i} - g_{1,j} - \dots - g_{1,m}), \quad (1.32)$$

$$r_{SU} = m, 2 \leq m \leq n; \forall g_{1,i}, g_{1,j}, g_{1,m} \in G_1$$

Por lo tanto, aplicando la expresión (1.32) para el caso del manipulador 3-RRR motivo de nuestro estudio donde  $k_{G1} = 3$  (expresiones (1.15)), las *secuencias unitarias* son tales que:

$$SU = \{\{SU_2\}, \{SU_3\}\} \quad (1.33)$$

luego, de la expresión (1.31) y aplicando las expresiones (1.29) y (1.30), se obtiene lo siguiente:

$$k_{SU2} = k_{O(G1)_2} = O_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6 \quad \text{donde:} \quad (1.34)$$

$$SU_2 = \{(a-b), (a-c), (b-a), (b-c), (c-a), (c-b)\}$$

$$k_{SU3} = k_{O(G1)_3} = O_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 6 \quad \text{donde:}$$

$$SU_3 = \{(a-b-c), (a-c-b), (b-a-c), (b-c-a), (c-a-b), (c-b-a)\}$$

Por lo tanto, el número total de instancias de la clase *Unitarias* es:

$$k_{SU} = \sum_{m=2, \dots, 3} O_m^3 = O_2^3 + O_3^3 = 6 + 6 = 12 \quad (1.35)$$

Obsérvese que la notación en el caso de las *secuencias* difiere del caso de los *grupos* en que en las primeras, los actuadores están separados por guiones.

### 1.2.5.2.2 Clase *Mixtas*

**Definición 1.14.** Las instancias de la clase *Mixtas* son formas de activación *secuenciales* que además de cumplir con las propiedades (1), (2) y (3) establecidas en la definición 1.12, se caracterizan por tener la siguiente propiedad:

- El orden  $r$  de al menos un *grupo* de actuadores asociado a los  $m$  estados de operación en una *secuencia*, es mayor que uno.

Por lo tanto, una *forma de activación secuencial mixta* cumple las siguientes propiedades:

- 1) Cada activación de un grupo de actuadores está asociada a uno y sólo un estado de operación (definición 1.7).

$$g_{r,i} \rightarrow \tau_i, g_{r,j} \rightarrow \tau_j : \tau_i \neq \tau_j; \forall g_{r,i}, g_{r,j} \in G$$

- 2) El número  $m$  de estados de operación (definición 1.4) en una *secuencia* de *grupos* de actuadores, no es mayor que  $(n-1)$ . Estos es, para una activación secuencial:

$$r_s = m \text{ donde } 2 \leq m \leq (n-1)$$

- 3) El número de actuadores en una *secuencia* no es mayor que  $n$ . Esto implica que un actuador no puede ser activado más de una vez en los  $m$  estados de operación asociados a una activación de los actuadores, es decir, ningún actuador se repite. La siguiente expresión es una condición necesaria más no suficiente para esta propiedad:

$$g_{r,i} \neq g_{r,j} \neq g_{n,m}; \forall g_{r,i}, g_{r,j}, \dots, g_{n,m} \in G$$

- 5) El orden  $r$  de al menos un *grupo* de actuadores asociado a los  $m$  estados de operación en una *secuencia*, es mayor que uno. Esto es:

$$r_{GMIN} \leq r_G \leq r_{GMIN} \text{ donde } r_{GMIN} = 2 \text{ y } r_{GMAX} = n-1 \quad (1.36)$$

La propiedad (5) implica que una instancia de la clase *Mixtas* es una secuencia con *grupos* de diferente orden, no necesariamente todos de orden uno como en el caso de la clase *Unitarias*. Sin embargo, esta propiedad esta limitada por la propiedad (3), la cual, establece que el número de actuadores no repetidos no deberá ser mayor que  $n$ . Por ejemplo, si se tuviera que  $n = 6$ , entonces algunas *secuencias mixtas* podrían ser:  $(a - bc - de - f)$ ,  $(a - cdef)$  o bien,  $(bcd - a - de)$ . Como se puede apreciar en los tres ejemplos, existe uno o más *grupos* de actuadores de orden mayor que uno, sin embargo, ningun actuador se repite en ningún *grupo* y el número de ellos nunca pasa de 6. Luego entonces, el orden mínimo  $r_{\text{GMIN}}$  y orden maximo  $r_{\text{GMAX}}$  de un grupo de actuadores en una *secuencia mixta* esta dado por la expresion (1.36).

**Definición 1.15.** Sea  $h_2$  una función cuyo contradominio lo constituyen todos los subconjuntos ordenados de  $G$  transformados bajo  $h$  en *secuencias* de dos o más grupos de actuadores, donde todos lo grupos son diferentes, al menos un grupo es de orden mayor que 1 y el número de actuadores en la secuencia es menor o igual que  $n$ , luego entonces, el dominio de  $h$  son todas las permutaciones del conjunto  $O(G_M) \subset O(G)$  que cumplen las propiedades (1), (2), (3) y (5). Esto es:

$$h_2 : O(G_M) \rightarrow SM \mid h_2(\{g_{r,i}, g_{r,j}, \dots, g_{n,m}\}) = (g_{r,i} - g_{r,j} - \dots - g_{n,m}) : 2 \leq r \leq (n-1),$$

$$2 \leq m \leq (n-1), g_{r,i} \neq g_{r,j} \neq g_{n,m}; \forall g_{r,i}, g_{r,j}, \dots, g_{n,m} \in O(G_M) \subset O(G)$$

(1.37)

donde  $O(G_M) \subset O(G)$  es un conjunto que cumple particularmente la propiedad (5). Considerando las expresiones (1.18) y (1.36) para el caso del manipulador 3-RRR motivo de nuestro estudio, se tiene que:

$$2 \leq m \leq (3-1) \Rightarrow m = 2 \tag{1.38}$$

$$r_{\text{MIN}} = 2$$

$$r_{\text{MAX}} = 3-1 = 2$$

Por las expresiones anteriores, los grupos  $g_r \in G$  deben ser de orden 1 y 2. Entonces, partiendo de las expresiones (1.15), los elementos del conjunto  $O(G_M) \subset O(G)$  se obtienen por medio las permutaciones de los siguientes grupos  $g_r \in G_M \subset G$ , esto es:

$$G_M = \{\{G_1\}, \{G_2\}\} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{ab\}, \{ac\}, \{bc\}\} \quad (1.39)$$

donde el número de elementos de  $G_M \subset G$  es:

$$K_{G_M} = K_{G_1} + K_{G_2} = 3 + 3 = 6 \quad (1.40)$$

El número de ordenaciones del conjunto  $G_M \subset G$ , es decir, el número de elementos del conjunto  $O(G_M) \subset O(G)$  está dado por la expresión:

$$k_o = \sum_{m=2, \dots, (n-1)} O_m^{k_{oM}} = \frac{k_{G_M}!}{(k_{G_M} - m)!} \quad (1.41)$$

Para el caso del robot manipulador 3-RRR motivo de nuestro estudio:

$$k_o = O_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = 30 \quad (1.42)$$

Sin embargo, atendiendo a la definición 1.15 y sus propiedades, el dominio de la función  $h_2 : O(G_M) \rightarrow SM$  son sólo las permutaciones entre los elementos de los subconjuntos  $G_1$  y  $G_2$  y no de entre los propios elementos de  $G_1$  o  $G_2$ , además en estas permutaciones, no se repiten los actuadores. Entonces, el número  $k_{O(G_M)}$  de elementos de  $O(G_M) \subset O(G)$  que son el dominio de la función  $h_2 : O(G_M) \rightarrow SM$  para un manipulador de 3GDL está definido por la siguiente expresión:

$$k_{O(GM)} = \sum_{m=2} O_m^{k_{G2}} - \left( \sum_{m=2} O_m^{k_{G1}} + \sum_{m=2} O_m^{k_{G2}} + 2 \cdot n(n-1) \right) \quad (1.43)$$

Aplicando la expresión anterior para el caso del robot manipulador 3-RRR motivo de nuestro estudio:

$$k_{O(GM)} = O_2^6 - (O_2^3 + O_2^3 + 2 \cdot 3(3-1)) = 30 - (6 + 6 + 12) = 6 \quad (1.44)$$

Luego, por la expresión (1.23) se deduce que:

$$k_{SM} = k_{O(GM)} \quad (1.45)$$

Por lo tanto, aplicando la expresión (1.37), las instancias de la clase *Mixtas* para el caso del robot paralelo plano 3-RRR motivo de nuestro estudio son tales que:

$$SM = \{(a-bc), (b-ac), (c-ab), (bc-a), (ac-b), (ab-c)\} \quad (1.46)$$

y de la expresión (1.45):

$$k_{SM} = 6 \quad (1.47)$$

### 1.2.5.2.3 Clase *Híbridas*

**Definición 1.16.** Las instancias de la clase *Híbridas* son formas de activación *secuenciales* que además de cumplir con las propiedades (1) y (2) establecidas en la definición 1.12, se caracterizan por tener la siguiente propiedad:

- Al menos un actuador se repite más de una vez en los  $m$  estados de operación de una secuencia.

Por lo tanto, una *forma de activación secuencial mixta* cumple las siguientes propiedades:

- 1) Cada activación de un grupo de actuadores está asociada a uno y sólo un estado de operación (definición 1.7). Esto es:

$$g_{r,i} \rightarrow \tau_i, g_{r,j} \rightarrow \tau_j : \tau_i \neq \tau_j; \forall g_{r,i}, g_{r,j} \in G$$

- 2) El numero  $m$  de estados de operación (definición 1.4) en una *secuencia* de *grupos* de actuadores, no es mayor a  $n$ . Estos es, para una activación secuencial:

$$r_s = m; \text{ donde } 2 \leq m \leq n$$

- 6) En una *secuencia híbrida* al menos un actuador elemento del conjunto  $A$  de actuadores se repite más de una vez en los  $m$  estados de operación asociados a dicha secuencia. La siguiente expresión es una condición suficiente mas no necesaria para satisfacer esta propiedad, esto es:

$$g_{r,i} = g_{r,j} = g_{n,m}; \forall g_{r,i}, g_{r,j}, \dots, g_{n,m} \in G \tag{1.48}$$

**Definición 1.17.** Sea  $h_3$  una función cuyo contradominio lo constituyen todos los subconjuntos ordenados de  $G$  transformados bajo  $h$  en *secuencias* de dos o más grupos de actuadores, donde el número de actuadores en dicha *secuencia* puede ser mayor que  $n$  y al menos un actuador se repite en los  $m$  estados de operación, luego entonces, el dominio de  $h$  son todas las permutaciones elementos del conjunto  $O(G_H) \subset O(G)$  que cumplen la propiedades (1), (2) y (6)

Esto es:

$$h_m : O(G_H) \rightarrow SM \mid h_2(\{g_{r,i}, g_{r,j}, \dots, g_{n,m}\}) = (g_{r,i} - g_{r,j} - \dots - g_{n,m}) : 2 \leq r \leq n, \quad (1.49)$$

$$2 \leq m \leq n; \forall g_{r,i}, g_{r,j}, \dots, g_{n,m} \in O(G_H) \subset O(G)$$

Según se estableció al final de la sección 1.2.6.2, la instancias de la clase *Híbridas* son un partición del conjunto representado por la clase *Secuenciales* de acuerdo a la expresión (1.25). Luego entonces, de la expresión (1.26) el número de instancias de la clase *Híbridas* se puede expresar como a continuación:

$$k_{SH} = k_S - (k_{SU} + k_{SM}) \quad (1.50)$$

Aplicando las expresiones (1.24), (1.34) y (1.47) para el caso del robot manipulador 3-RRR motivo de nuestro estudio, el número de *activaciones híbridas* es:

$$k_{SH} = 392 - (12 + 6) = 392 - 18 = 374 \quad (1.51)$$

Finalmente, el número total  $K_{FA}$  de formas en que un manipulador puede activar sus actuadores, es decir, el número de instancias de la clase *Formas de Activación* (figuras 1.9 y 1.12) es la suma de las instancias de las clases *Simultáneas* y *Secuenciales*, esto es:

$$K_{FA} = k_G + k_S \quad (1.52)$$

Por lo tanto, de las expresiones (1.16) y (1.24), el número total *formas de activación* para el robot paralelo plano 3-RRR motivo de nuestro estudio, es:

$$K_{FA} = 8 + 392 = 400 \quad (1.53)$$



De la clase *Actuadores* se obtiene tres clases fundamentales para el desarrollo de la clase *Operación Funcional*, éstas son: la clase *Formas de Activación*, *Sentidos de Operación* y *Arreglos de Operación*.

### 1.2.6 Clase *Operación Funcional*

Como se mencionó previamente a la sección 1.2.5, las instancias de la clase *Operación Funcional* son las distintas maneras en que un manipulador puede operar sus actuadores para realizar un determinado movimiento. Por *operación* se entiende que un manipulador maneja con ciertas características sus actuadores para realizar específicamente un movimiento. Estas características son: 1) las distintas formas de activación de los actuadores (entiendase por activación a la acción de poner en estado de encendido a un actuador) representadas por la clase *Formas de Activación*; 2) los sentidos en que éstos operan, representados por la clase *Sentidos de Operación*; y 3) las parejas de desplazamientos y tiempos de operación asociados a cada actuador, representadas por la clase *Arreglos*.

Ahora bien, por *funcionalidad* se entiende que un manipulador opera con un conjunto específico de estas características para realizar un movimiento según sus especificaciones. Luego entonces, las instancias de la clase *Operación Funcional* son *formas de activación* caracterizadas por los *sentidos* y *arreglos* de operación asociados a cada una de estas formas. Con base en lo anterior, se establece la siguiente definición:

**Definición 1.18.** Sea  $F$  una función cuyo contradominio lo constituyen todas las formas de activación asociadas a los actuadores transformadas bajo  $F$  en *formas de operación funcional* de los mismos. Esto es:

$$F : FA \rightarrow OF \quad (1.54)$$

donde  $FA$  representa el conjunto de elementos (instancias) que constituyen la clase *Formas de Activación* y  $OF$  representa el conjunto de elementos (instancias) que conforman la clase *Operación Funcional*.

De la definición anterior, se tiene que la función  $F: FA \rightarrow OF$  es una función "uno a uno" y "sobre", es decir, una función biyectiva que asocia a cada elemento de  $OF$  uno y sólo un elemento de  $FA$ . La transformación del conjunto  $FA$  en el conjunto  $OF$ , es decir, la regla de correspondencia que permite obtener *formas de operación funcional* a partir de las distintas *formas de activación* asociadas a los actuadores, es precisamente la caracterización de éstas últimas a través de las instancias de la clase *Sentidos de Operación* y la clase *Arreglos*. Luego entonces, la clase *Operación Funcional* requiere de las clases *Formas de Activación*, *Sentidos de Operación* y *Arreglos* para construir una de sus instancias según se muestra en la figura 1.13. La cardinalidad "uno a uno" de la clase *Operación Funcional* con sus instancias indica que cada combinación de las clases *Formas de Activación*, *Sentidos de Operación* y *Arreglos* determina una forma de *operación funcional* particular. Lo anterior implica que si alguna instancia de dichas clases cambia, se obtiene una *operación funcional* diferente. La relación entre las clases *Modelo Matemático* y *Operación Funcional* se debe a que es precisamente el modelo matemático, estrictamente la cinemática inversa, la que va a determinar qué combinación de instancias de las clases *Formas de Activación*, *Sentidos de Operación* y *Arreglos* es la correcta para que el manipulador realice un movimiento específico.

Dada la existencia de  $F: FA \rightarrow OF$ , las instancias de la clase *Operación Funcional* se pueden clasificar como se muestra en la taxonomía de la figura 1.13. A continuación se desarrollan las expresiones que caracterizan a una instancia de la clase *Formas de Activación* para obtener una instancia de la clase *Operación Funcional*.

En la tabla 1.4 se indican para un manipulador de 3GDL las distintas clases de *activaciones* y sus respectivas *reglas* (desarrolladas en secciones anteriores) que determinan el número de instancias en cada una de ellas. También, en las tablas 1.5, 1.6, 1.7 y 1.8 se indican las instancias contenidas en cada una de las clases de tabla 1.4. Tales instancias se clasifican según su grado y orden de acuerdo a la figura 1.12, donde se indica que las clases *Simultáneas* y *Secuenciales* tiene grado y orden, los cuales, están definidos por una regla que depende del número instancias de la clase *Actuadores*.



Figura 1.13. Clase *Operación Funcional*.

**Tabla 1.4 Clases de Formas de Activación para 3GDL.**

Clase		Regla		Total	
Simultáneos		$k_G = k_{P(A)} = 2^n = \sum_{r=0, \dots, n} C_r^n$		8	
Secuenciales	Unitarias	$k_{O(G)} = \sum_{m=2, \dots, n} (k_G - 1)^m$ $k_S = k_{O(G)}$	$k_{O(G1)} = \sum_{m=2, \dots, n} O_m^{k_{a1}}$ $k_{SU} = k_{O(G1)}$	392	12
	Mixtas		$k_{O(GM)} = \sum_{m=2} O_m^{k_{aM}} - \left( \sum_{m=2} O_m^{k_{a1}} + \sum_{m=2} O_m^{k_{a2}} + 2 \cdot n(n-1) \right)$ $k_{SM} = k_{O(GM)}$		6
	Híbridas		$k_{SH} = k_S - (k_{SU} + k_{SM})$		374
<b>Formas de Activación Totales</b>		$k_{FA} = k_G + k_S = \sum_{r=0, \dots, n} C_r^n + \sum_{m=2, \dots, n} (k_G - 1)^m$		<b>400</b>	

**Tabla 1.5 Formas de activación Simultáneas para 3GDL.**

Clase	Regla	Grado / Orden	Instancia
Simultáneas	$k_{G0} = k_{P(A0)} = C_0^3$	Grado 1 / Orden 0	Nula
	$k_{G1} = k_{P(A1)} = C_1^3$	Grado 1 / Orden 1	(a)
			(b)
			(c)
	$k_{G2} = k_{P(A2)} = C_2^3$	Grado 1 / Orden 2	(ab)
			(ac)
			(bc)
$k_{G3} = k_{P(A3)} = C_3^3$	Grado 1 / Orden 3	(abc)	

**Tabla 1.6 Formas de activación Secuenciales Unitarias para 3GDL.**

Clase	Regla	Grado / Orden	Instancia
Unitarias	$k_{SU2} = k_{O(G2)} = O_2^3$	Grado 2 / Orden 2 $r_s = m = 2$	$(a - b)$
			$(a - c)$
			$(b - c)$
			$(b - a)$
			$(c - a)$
			$(c - b)$
	$k_{SU3} = k_{O(G3)} = O_3^3$	Grado 3 / Orden 3 $r_s = m = 3$	$(a - b - c)$
			$(a - c - b)$
			$(b - a - c)$
			$(b - c - a)$
			$(c - a - b)$
			$(c - b - a)$

**Tabla 1.7 Formas de activación Secuenciales Mixtas para 3GDL.**

Clase	Regla	Grado / Orden	Familia	Instancia
Mixtas	$k_{O(GM)} = O_2^6 - (O_2^3 + O_2^3 + 2 \cdot 3(3-1))$ $k_{SM} = k_{O(GM)}$	Grado 2 Orden 2  $r_s = m = 3$	F(1)	$(a - cb)$
				$(b - ac)$
				$(c - ab)$
			F(2)	$(cb - a)$
				$(ac - b)$
				$(ab - c)$

En la tabla 1.9 se indican las reglas que definen el grado y orden para cada una de estas clases. Las clases *mixtas* e *Híbridas* además clasificarse por su grado y orden, también se clasifican de acuerdo a su familia y tipo.

**Tabla 1.8 Formas de activación Secuenciales Híbridas para 3GDL.**

Clase	Regla		Familia	Instancias ( por Tipo)		
				$r_s = m = 2$	$r_s = m = 3$	
Híbridas	$k_{SH/T} = 3^2 + 3^3$	$k_{SH/T/F1} = 3 + \frac{3^2}{3}$	Fa(1)	(1)-(1)	(1)-(1)-(1)	
				(1)-(2)	(1)-(1)-(2)	
				(1)-(3)	(1)-(1)-(3)	
				----	(1)-(2)-(1)	
				----	(1)-(2)-(2)	
				----	(1)-(2)-(3)	
				----	(1)-(3)-(1)	
				----	(1)-(3)-(2)	
				----	(1)-(3)-(3)	
			$k_{SH/T/F2} = 3 + \frac{3^2}{3}$	Fa(2)	(2)-(1)	(2)-(1)-(1)
					(2)-(2)	(2)-(1)-(2)
					(2)-(3)	(2)-(1)-(3)
					----	(2)-(2)-(1)
					----	(2)-(2)-(2)
					----	(2)-(2)-(3)
					----	(2)-(3)-(1)
					----	(2)-(3)-(2)
					----	(2)-(3)-(3)
			$k_{SH/T/F3} = 3 + \frac{3^2}{3}$	Fa(3)	(3)-(1)	(3)-(1)-(1)
					(3)-(2)	(3)-(1)-(2)
					(3)-(3)	(3)-(1)-(3)
					----	(3)-(2)-(1)
					----	(3)-(2)-(2)
					----	(3)-(2)-(3)
					----	(3)-(3)-(1)
					----	(3)-(3)-(2)
					----	(3)-(3)-(3)

Tabla 1.9 Reglas que definen Grado, Orden y Familia.

Clase		Regla		
		Grupo	Orden	Familia
Simultáneos		$m = 1$	$0 \leq r \leq n$	-----
Secuenciales	Unitarias	$2 \leq m \leq n$	$2 \leq r_s \leq n$	$Fa = 1$
	Mixtas	$2 \leq m \leq (n - 1)$	$2 \leq r_s \leq (n - 1)$	$1 \leq Fa \leq n$
	Híbridas	$2 \leq m \leq n$	$2 \leq r_s \leq n$	$1 \leq Fa \leq n$

La clasificación por familia se utiliza para clasificar todas aquellas *secuencias* que comienzan con un *grupo* del mismo orden, luego entonces, el número de familias de *secuencias* esta determinado por la siguiente expresión:

$$0 < r \leq n \tag{1.55}$$

La clasificación por tipo se utiliza para distinguir a aquellas *secuencias híbridas* que tiene una estructura particular. Por ejemplo, existen *secuencias* de grado y orden 3 cuyo primer *grupo* de actuadores es de orden 1, el segundo de orden 2 y el tercero de orden 3, esto es, son del tipo (1)-(2)-(3), o bien, *secuencias* cuyo primer grupo es de orden 3, el segundo de orden 1 y el tercero de orden 2, luego, son del tipo (3)-(1)-(2). La siguiente expresión define el número de tipos de *secuencias* presentes en un manipulador, esto es:

$$k_{SH/T} = \sum_{m=2, \dots, n} n^m \tag{1.56}$$

donde  $k_{SH/T}$  es el número de tipos de *secuencias híbridas*. Ahora bien, el número de tipos de *secuencias híbridas* por familia se define por la siguiente expresión:

$$k_{SH/TF} = n + \frac{n^m}{n} \quad (1.57)$$

En la tabla 1.8 no se indican las *secuencias híbridas* como tales, es decir, indicando estrictamente el *grupo* en cada estado de operación de la *secuencia*, sino sólo como instancias clasificadas por su familia y tipo dado el gran número de éstas de acuerdo a la tabla 1.4. El contenido de la tabla 1.8 es para el caso de un manipulador de 3GDL.

El número de instancias por cada tipo de *secuencia híbrida* se obtiene multiplicando el número  $k_{G_i}$  de grupos del mismo orden en cada estado de operación. Esto es:

$$k_{SH/TIPO} = k_{G_{r,i}} \cdot k_{G_{r,j}} \cdot \dots \cdot k_{G_{r,m}} \quad (1.58)$$

donde  $k_{SM/TIPO}$  es el número de *secuencias híbridas* en cada tipo mientras que  $k_{G_{i,1}}$ ,  $k_{G_{i,2}}$  y  $k_{G_{i,m}}$  son el número de *grupos* del mismo orden asociados a los  $m$  estados de operación en una *secuencia*. Por ejemplo, sea una *secuencia híbrida* de grado y orden 3, familia (2) y tipo (2)-(3)-(1). De las expresiones (1.15), hay tres *grupos* de orden 2, un *grupo* de orden 3 y tres *grupos* de orden 1, luego entonces, aplicando la expresión (1.58), el número de *secuencias híbridas* del tipo (2)-(3)-(1) es:

$$k_{SM/TIPO} = 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9 \quad (1.59)$$

Por otro lado, cada actuador tiene asociado dos sentidos de operación (figura 1.9). Luego, cada actuador presente en una forma de activación tiene la posibilidad de operar en sentido positivo o negativo (antihorario u horario). Supóngase una *forma de activación simultánea* de orden 3 (tabla 1.5), esto es:



$$g_3 = (abc) : g_3 \in G_3 \subset G \quad (1.60)$$

donde el actuador  $a$  opera en sentido positivo mientras que los actuadores  $b$  y  $c$  operan en sentido negativo, o bien, el actuador  $a$  en sentido negativo y los actuadores  $b$  y  $c$  en sentido negativo, esto es:

$$g_3 = (a^+b^-c^-) \text{ o bien } g_3 = (a^-b^-c^-) \quad (1.61)$$

Como se puede observar, se tiene dos posibilidades para operar el grupo  $g_3$  tomando en cuenta el sentido de operación del actuador  $a$ . Por lo tanto, por cada actuador se tienen dos *formas de activación* caracterizadas según el sentido de operación asociado a cada uno. Las siguientes expresiones definen el número de activaciones caracterizadas por los sentidos de operación para uno o más *grupos* cualesquiera de actuadores. Esto es:

$$\lambda_{Gr} = K_{Gr} \cdot 2^N \quad \text{para } \textit{simultáneas} \quad (1.62a)$$

$$\lambda_{SUR} = K_{SUR} \cdot 2^N \quad \text{para } \textit{secuenciales unitarias} \quad (1.62b)$$

$$\lambda_{SMr} = K_{SMr} \cdot 2^N \quad \text{para } \textit{secuenciales mixtas} \quad (1.62c)$$

$$\lambda_{SHr} = K_{SHr/TIPO} \cdot 2^N \quad \text{para } \textit{secuenciales híbridas} \quad (1.62d)$$

donde  $N$  representa el total de actuadores en los *grupos* asociados a  $m$  estados de operación. Para el ejemplo de la expresión (1.60), donde  $N=3$  y de las expresiones (1.15) el número de *grupos* de orden 3 es  $k_{G3} = 1$ , entonces, el número de *activaciones simultáneas* caracterizadas por el sentido de operación de cada actuador de acuerdo a la expresión (1.62a) es:

$$\lambda_{G3} = 1 \cdot 2^3 = 8 \quad (1.63)$$

Considérese ahora una *secuencia híbrida* de grado y orden 3, familia (3) y tipo (3)-(1)-(2), esto es:

$$sh_3 = (abc - b - ac) : sh_3 \in SH_3 \subset SH \subset S \quad (1.64)$$

El total de actuadores presentes en los grupos asociados a los 3 estados de operación es  $N = 6$ , luego de la expresión (1.58),  $k_{SH/TIPO} = 9$ , entonces, de la expresión (1.62d):

$$\lambda = 9 \cdot 2^6 = 64 = 576 \quad (1.65)$$

La expresión anterior indica que existen 576 *formas de activación* diferentes caracterizadas por el sentido de operación asociado a cada actuador en los grupos de la *secuencia híbrida*  $sh_3$ . Sin embargo, en las *secuencias* híbridas existen algunas *secuencias* que se consideran no admisibles. Esto es, dada la caracterización de la clase *Formas de Activación* por la clase *Sentidos de Operación*, se tiene una restricción para la admisibilidad de una operación funcional con una *secuencia híbrida*. Esta restricción es la siguiente:

- En una *secuencia híbrida* caracterizada por los sentidos de operación, un mismo *grupo* de actuadores no puede estar asociado a dos o mas estados de operación contiguos.

Considérense las siguientes *secuencias híbridas*:

$$(a^-b^+ - a^-b^+ - a^-b^-) \quad (1.66)$$

$$(a^-b^- - a^-b^+ - a^-b^+)$$

$$(a^-b^+ - a^-b^+ - a^-b^+)$$

$$(a^-b^+ - a^+b^+ - a^-b^+)$$

Las tres primeras *secuencias* no son admisibles, mientras que la última de ellas, si lo es, pues los grupos que son semejantes, no están asociados a estados de operación contiguos. Es decir, el *grupo*  $(a^-b^+)$  se repite en la *secuencia*, sin embargo, esta asociado al primer y tercer estado de operación, mientras que el *grupo*  $(a^+b^+)$ , está asociado al segundo estado de operación, luego entonces, el *grupo*  $(a^-b^+)$  se repite pero no en estado contiguos, por lo tanto, la última *secuencia híbrida* si es admisible.

**Tabla 1.10 Número de Secuenciales Híbridas inadmisibles para 3GDL.**

Grado / Orden	Familia	Tipo	# de Inadmisibilidades
Grado 2 / Orden 2	Fa(1)	(1)-(1)	6
	Fa(2)	(2)-(2)	12
	Fa(3)	(3)-(3)	8
Grado 3 / Orden 3	Fa(1)	(1)-(1)-(1)	18
		(1)-(1)-(2)	6
		(1)-(1)-(3)	6
		(1)-(2)-(2)	12
		(1)-(3)-(3)	8
	Fa(2)	(2)-(1)-(1)	6
		(2)-(2)-(1)	12
		(2)-(2)-(2)	36
		(2)-(2)-(3)	12
		(2)-(3)-(3)	8
	Fa(3)	(3)-(1)-(1)	6
		(3)-(2)-(2)	12
		(3)-(3)-(1)	8
		(3)-(3)-(2)	8
		(3)-(3)-(3)	24
<b>Inadmisibilidades Totales</b>			<b>208</b>

Para el caso de un manipulador de 3GDL, en la tabla 1.10 se indican tanto los distintos tipos de *secuencias híbridas* que presentan alguna inadmisibilidad así como el número de éstas en cada una de ellas.

**Tabla 1.11 Simultáneas caracterizada por los sentidos de operación para 3GDL.**

Clase	Grado / Orden	Instancia	Regla	# de Instancias
Simultáneas $\lambda_G = 26$	Grado 1 / Orden 1	(a)	$\lambda_{G1} = 3 \cdot 2^1 = 6$	2
		(b)		2
		(c)		2
	Grado 1 / Orden 2	(ab)	$\lambda_{G2} = 3 \cdot 2^2 = 12$	4
		(ac)		4
		(bc)		4
	Grado 1 / Orden 3	(abc)	$\lambda_{G1} = 1 \cdot 2^3 = 8$	8

**Tabla 1.12 Clase Unitarias caracterizada por los sentidos de operación para 3GDL.**

Clase	Grado / Orden	Instancia	Regla	# de Instancias
Unitarias $\lambda_{SU} = 72$	Grado 2 / Orden 2 $r_{SU} = m = 2$	(a - b)	$\lambda_{SU2} = 6 \cdot 2^2 = 24$	4
		(a - c)		4
		(b - c)		4
		(b - a)		4
		(c - a)		4
		(c - b)		4
	Grado 3 / Orden 3 $r_{SU} = m = 3$	(a - b - c)	$\lambda_{SU3} = 6 \cdot 2^3 = 48$	8
		(a - c - b)		8
		(b - a - c)		8
		(b - c - a)		8
		(c - a - b)		8
		(c - b - a)		8

**Tabla 1.13 Clase *Mixtas* caracterizada por los sentidos de operación para 3GDL.**

Clase	Grado / Orden	Familia	Instancia	Regla	# de Instancias
Mixtas $\lambda_{SM} = 48$	Grado 2 Orden 2	Fa(1)	$(a - cb)$	$\lambda_{M/1-2} = 3 \cdot 2^3 = 24$	8
			$(b - ac)$		8
			$(c - ab)$		8
	$r_{SM} = m = 2$	Fa(2)	$(cb - a)$	$\lambda_{M/2-1} = 3 \cdot 2^3 = 24$	8
			$(ac - b)$		8
			$(ab - c)$		8

**Tabla 1.14 Clase *Híbridas* caracterizada por los sentidos de operación para 3GDL.**

Clase	Grado / Orden	Tipo	Regla	# Instancias
Híbridas	Grado/Orden 2	(1)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} - 6 = (9 \cdot 2^2) - 6$	30
		(1)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} - 48 = (9 \cdot 2^3) - 48$	24
		(1)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} = (3 \cdot 2^4)$	48
	Grado/Orden 3	(1)-(1)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} - 18 = (27 \cdot 2^3) - 18$	198
		(1)-(1)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} - 6 = (27 \cdot 2^4) - 6$	426
		(1)-(1)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} - 6 = (9 \cdot 2^5) - 6$	282
		(1)-(2)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} = (27 \cdot 2^4)$	432
		(1)-(2)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} - 12 = (27 \cdot 2^5) - 12$	852
		(1)-(2)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} = (9 \cdot 2^6)$	576
		(1)-(3)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} = (9 \cdot 2^5)$	288
		(1)-(3)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} = (9 \cdot 2^6)$	576
	(1)-(3)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} - 8 = (3 \cdot 2^7) - 8$	376	
	Grado/Orden 2	(2)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} = (9 \cdot 2^3)$	72
		(2)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} - 12 = (9 \cdot 2^4) - 12$	132
		(2)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} = (3 \cdot 2^5)$	96
	Grado/Orden 3	(2)-(1)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} - 6 = (27 \cdot 2^4) - 6$	426
		(2)-(1)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} = (27 \cdot 2^5)$	864
		(2)-(1)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} = (9 \cdot 2^6)$	576
		(2)-(2)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} - 12 = (27 \cdot 2^5) - 12$	852

Tabla 1.14 Continúa:

Clase	Grado / Orden	Tipo	Regla	# Instancias
Híbridas	Grado/Orden 3	(2)-(2)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} - 36 = (27 \cdot 2^6) - 36$	1,692
		(2)-(2)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} - 12 = (9 \cdot 2^7) - 12$	1,140
		(2)-(3)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} = (9 \cdot 2^6)$	576
		(2)-(3)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} = (9 \cdot 2^7)$	1,152
		(2)-(3)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} - 8 = (3 \cdot 2^8) - 8$	760
	Grado/Orden 2	(3)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} = (3 \cdot 2^4)$	48
		(3)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} = (3 \cdot 2^5)$	96
		(3)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} = (1 \cdot 2^6)$	64
	Grado/Orden 3	(3)-(1)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} - 6 = (9 \cdot 2^5) - 6$	282
		(3)-(1)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} = (9 \cdot 2^6)$	576
		(3)-(1)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} = (3 \cdot 2^7)$	384
		(3)-(2)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} = (9 \cdot 2^6)$	576
		(3)-(2)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} - 12 = (9 \cdot 2^7) - 12$	1,140
		(3)-(2)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} = (3 \cdot 2^8)$	768
		(3)-(3)-(1)	$\lambda_{SH/TIPO} - 8 = (3 \cdot 2^7) - 8$	376
		(3)-(3)-(2)	$\lambda_{SH/TIPO} - 8 = (3 \cdot 2^8) - 8$	760
	(3)-(3)-(3)	$\lambda_{SH/TIPO} - 24 = (1 \cdot 2^9) - 24$	488	
	<b>Total</b>			

En las tablas 1.11, 1.12, 1.13 y 1.14 se indica el número de instancias caracterizadas por la clase *Sentidos de Operación* para cada clase de activación considerando las inadmisibilidades de la tabla 1.10 para el caso de las *secuencias híbridas*.

Como se estableció al inicio de la sección, además de la clase *Sentidos de Operación*, la clase *Arreglos* también caracteriza la clase *Formas de Activación*. Entonces, cada una de las instancias de las clases *Simultáneas*, *Unitarias*,

*Mixtas e Híbridas* caracterizadas por los sentidos de operación según las tablas anteriores, es ahora caracterizada por las instancias de la clase *Arreglos* mostradas en las tablas 1.1, 1.2 y 1.3 según sea el caso. A partir de estas tablas se debe observar lo siguiente:

- 1) Los *grupos* de orden 1 pueden operar con 1 de 3 *arreglos* de la tabla 1.1
- 2) Los *grupos* de orden 2 pueden operar con 2 de 12 *arreglos* de la tabla 1.2
- 3) Los *grupos* de orden 3 pueden operar con 5 de 25 *arreglos* de la tabla 1.3

El número  $\Lambda_{Gr}$  de arreglos de orden  $r$  correspondientes a grupos de actuadores, también de orden  $r$ , se define de la manera siguiente:

$$\Lambda_{Gr} = \frac{\gamma_r}{n} \Leftrightarrow r < n \tag{1.67}$$

$$\Lambda_{Gr} = \gamma_r \Leftrightarrow r = n$$

donde  $\gamma_r$  es el número de arreglos de orden  $r$  de cualquiera de las tablas 1.1, 1.2 o 1.3. Las siguientes expresiones definen, respectivamente, los números  $\Psi_{Gr}$  y  $\Psi_{Sr}$  de instancias de la clase *Operación Funcional* tanto *Simultáneas* como *Secuenciales*, es decir, instancias de la clase *Simultáneas* y *Secuenciales* caracterizadas por las clases *Sentidos de Operación* y *Arreglos*. Esto es:

$$\Psi_{Gr} = \lambda_{Gr} \cdot \Lambda_{Gr} \tag{1.68a}$$

$$\Psi_{Sr} = \lambda_{Sr} \cdot (\Lambda_{Gr,i} \cdot \Lambda_{Gr,j} \cdot \dots \cdot \Lambda_{Gr,m}) \tag{1.68b}$$

donde  $\lambda_{Gr}$  es el número de instancias de orden  $r$  (tablas 1.11, 1.12, 1.13, 1.14) obtenidas por medio de las expresiones (1.62). La expresión (1.68b) implica que se deben multiplicar los números  $\Lambda_{Gr}$  correspondientes a los *grupos* de actuadores asociados los  $m$  estados de operación en una *secuencia*.

En las siguientes tablas se indica el número de instancias de la clase *Operación Funcional*, según la *forma de activación*, para un manipulador de 3GDL.

**Tabla 1.15 Número de instancias de *Operación Funcional Simultánea* para 3GDL.**

Clase	Grado / Orden	Instancia	Regla	# de Instancias
Simultáneas $\Psi_G = 70$	Grado 1 / Orden 1	(a)	$\Psi_{G1} = 6 \cdot 1 = 6$	2
		(b)		2
		(c)		2
	Grado 1 / Orden 2	(ab)	$\Psi_{G2} = 12 \cdot 2 = 24$	8
		(ac)		8
		(bc)		8
	Grado 1 / Orden 3	(abc)	$\Psi_{G3} = 8 \cdot 5 = 40$	40

**Tabla 1.16 Número de instancias de *Operación Funcional Unitaria* para 3GDL.**

Clase	Grado / Orden	Instancia	Regla	# de Instancias
Unitarias $\Psi_{SU} = 72$	Grado 2 / Orden 2 $r_{SU} = m = 2$	(a - b)	$\Psi_{SU2} = 24 \cdot 1 \cdot 1 = 24$	4
		(a - c)		4
		(b - c)		4
		(b - a)		4
		(c - a)		4
		(c - b)		4
	Grado 3 / Orden 3 $r_{SU} = m = 3$	(a - b - c)	$\Psi_{SU2} = 48 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 48$	8
		(a - c - b)		8
		(b - a - c)		8
		(b - c - a)		8
		(c - a - b)		8
		(c - b - a)		8



**Tabla 1.17 Número de instancias de Operación Funcional Mixta para 3GDL.**

Clase	Grado / Orden	Familia	Instancia	Regla	# de Instancias
Mixtas $\Psi_{SM} = 96$	Grado 2 Orden 2	Fa(1)	$(a - cb)$	$\Psi_{SM/2} = 24 \cdot 1 \cdot 2 = 4$	16
			$(b - ac)$		16
			$(c - ab)$		16
	$r_{SM} = m = 2$	Fa(2)	$(cb - a)$	$\Psi_{SM/21} = 24 \cdot 2 \cdot 1 = 4$	16
			$(ac - b)$		16
			$(ab - c)$		16

**Tabla 1.18 Número de instancias de Operación Funcional Híbrida para 3GDL.**

Clase	Grado / Orden	Tipo	Regla	# Instancias
Híbridas	Grado / orden 2	(1)-(1)	$\Psi_{SH} = 30 \times 1 \times$	30
		(1)-(2)	$\Psi_{SH} = 24 \times 1 \times 2$	48
		(1)-(3)	$\Psi_{SH} = 48 \times 1 \times 5$	240
	Grado / orden 3	(1)-(1)-(1)	$\Psi_{SH} = 198 \times 1 \times 1 \times$	198
		(1)-(1)-(2)	$\Psi_{SH} = 426 \times 1 \times 1 \times 2$	852
		(1)-(1)-(3)	$\Psi_{SH} = 282 \times 1 \times 1 \times$	1,410
		(1)-(2)-(1)	$\Psi_{SH} = 432 \times 1 \times 2 \times$	864
		(1)-(2)-(2)	$\Psi_{SH} = 852 \times 1 \times 2 \times 2$	3,408
		(1)-(2)-(3)	$\Psi_{SH} = 576 \times 1 \times 2 \times$	5,760
		(1)-(3)-(1)	$\Psi_{SH} = 288 \times 1 \times 5 \times$	1,440
		(1)-(3)-(2)	$\Psi_{SH} = 576 \times 1 \times 5 \times 2$	5,760
		(1)-(3)-(3)	$\Psi_{SH} = 376 \times 1 \times 5 \times 5$	9,400
	Grado / orden 2	(2)-(1)	$\Psi_{SH} = 72 \times 2 \times$	144
		(2)-(2)	$\Psi_{SH} = 132 \times 2 \times 2$	528
		(2)-(3)	$\Psi_{SH} = 96 \times 2 \times 5$	960
	Grado / orden 3	(2)-(1)-(1)	$\Psi_{SH} = 426 \times 2 \times 1 \times$	852
		(2)-(1)-(2)	$\Psi_{SH} = 864 \times 2 \times 1 \times 2$	3,456
		(2)-(1)-(3)	$\Psi_{SH} = 576 \times 2 \times 1 \times$	5,760
		(2)-(2)-(1)	$\Psi_{SH} = 852 \times 2 \times 2 \times$	3,408

**Tabla 1.18 Continúa:**

Clase	Grado / Orden	Tipo	Regla	# Instancias
Híbridas	Grado / orden 3	(2)-(2)-(2)	$\Psi_{SH}=1,692 \times 2 \times 2 \times 2$	13,536
		(2)-(2)-(3)	$\Psi_{SH}=1,140 \times 2 \times 2 \times$	22,800
		(2)-(3)-(1)	$\Psi_{SH}=576 \times 2 \times 5 \times$	5,760
		(2)-(3)-(2)	$\Psi_{SH}=1,152 \times 2 \times 5 \times 2$	23,040
		(2)-(3)-(3)	$\Psi_{SH}=760 \times 2 \times 5 \times 5$	38,000
	Grado / orden 2	(3)-(1)	$\Psi_{SH}=48 \times 5 \times$	240
		(3)-(2)	$\Psi_{SH}=96 \times 5 \times 2$	960
		(3)-(3)	$\Psi_{SH}=64 \times 5 \times$	1,600
	Grado / orden 3	(3)-(1)-(1)	$\Psi_{SH}=282 \times 5 \times 1 \times$	1,410
		(3)-(1)-(2)	$\Psi_{SH}=576 \times 5 \times 1 \times 2$	5,760
		(3)-(1)-(3)	$\Psi_{SH}=384 \times 5 \times 1 \times 5$	9,600
		(3)-(2)-(1)	$\Psi_{SH}=576 \times 5 \times 2 \times$	5,760
		(3)-(2)-(2)	$\Psi_{SH}=1,140 \times 5 \times 2 \times 2$	22,800
		(3)-(2)-(3)	$\Psi_{SH}=768 \times 5 \times 2 \times 5$	15,360
		(3)-(3)-(1)	$\Psi_{SH}=376 \times 5 \times 5 \times$	9,400
		(3)-(3)-(2)	$\Psi_{SH}=760 \times 5 \times 5 \times 2$	38,000
		(3)-(3)-(3)	$\Psi_{SH}=488 \times 5 \times 5 \times 5$	61,000
	<b>Total</b>			

**Tabla 1.19 Clase Operacional para 3GDL.**

Clase		# de Instancias	
Simultáneas		70	
Secuenciales	Unitarias	319,712	72
	Mixtas		96
	Híbridas		319,544
<b>Total</b>		<b>319,782</b>	

En la tabla 1.19 se indica el número total de instancias de la clase *Operación Funcional* por cada clase de operación. Este número de instancias implica que un manipulador tiene 319,782 maneras distintas para definir un movimiento específico desde el punto de vista de una *operación funcional*.

### 1.2.7 Clase *Ejecución* y clase *Simulación*

La *ejecución* de un movimiento puede ser real o virtual, y puede llevarse al cabo mediante un prototipo, o bien, mediante una simulación por computadora. Esto se representa con las clases *Real*, *Virtual*, *Prototipo* y *Simulación* mostradas en la figura 1.14. Se dice que la clase *Prototipo* está asociada a la clase *Simulación* mediante un relación de "correspondencia", pues, los movimientos del prototipo deben emular los movimientos de la simulación para así asegurar que la teoría modela a la realidad.

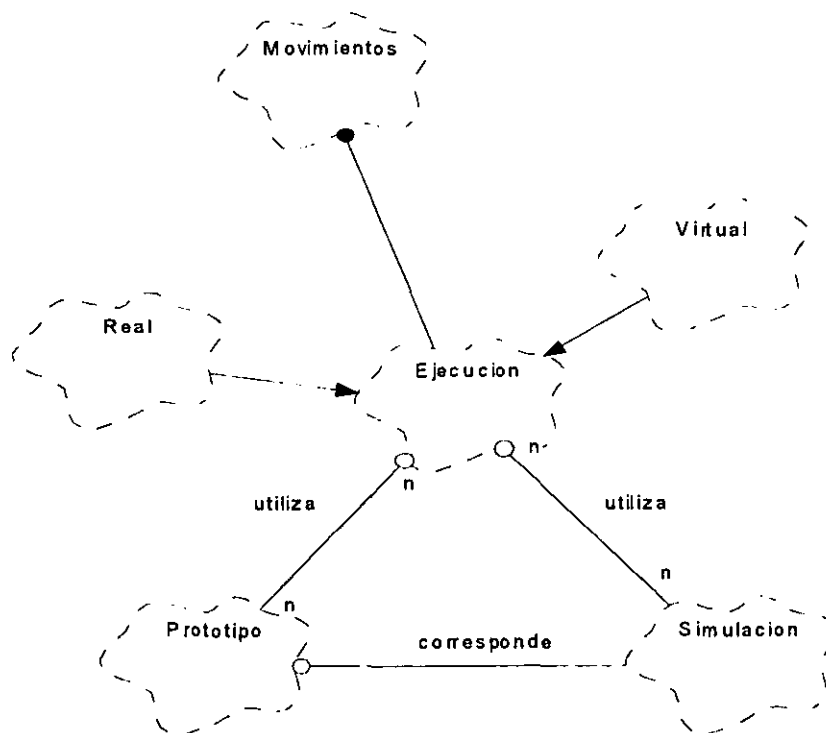


Figura 1.14. Clase *Ejecución*.

Un modelo matemático y un software son esenciales para una simulación. El modelo matemático debe incluir un modelo cinemático de posición, velocidad y aceleración, un modelo dinámico de fuerzas y momentos, y un modelo para el perfil de trayectoria; el software contempla una interface con el usuario, un programa para ejecutar la simulación y un programa de control para la operación del prototipo y su comunicación con el hardware. Lo anterior se representa por medio de las clases *Modelo Matemático* y *Software* mostradas en la figura 1.15. Cabe hacer notar que para el desarrollo de un modelo matemático se requieren de marcos teóricos; esto se representa en la figura 1.15 con la clase *Álgebra de Complejos* y su asociación con la clase *Modelo Matemático*, la cual, implica que se hace uso del espacio vectorial de los números complejos para desarrollar un modelo matemático, en este caso, para un robot paralelo plano de 3GDL.

### 1.2.8 Clase *Prototipo*

La clase *Prototipo* contiene las subclases *Sistema Mecánico* y *Sistema de Control* mostradas en la figura 1.16. Estas clases representan, respectivamente, el propio mecanismo del manipulador y los elementos para controlar a éste último. Las clases *Prototipo* y *Sistema Mecánico* están asociadas con la clase *Manipulador*, pues ésta última, define el *prototipo* que se habrá de fabricar y al mismo tiempo, determina el *sistema mecánico* del mismo. Por otro lado, la clase *Modelo Matemático* restringe la clase *Sistema Mecánico*, pues, cualquier instancia de ésta, debe fabricarse de acuerdo a los resultados obtenidos en los modelos matemáticos.

El *sistema de control* está constituido por un hardware y un software que incluyen los periféricos, dispositivos de sensado, el propio microcontrolador y un programa de ejecución, respectivamente. Dichos elementos están representados por las clases *Hardware* y *Software* junto con sus correspondientes subclases. Estas últimas clases están asociadas entre ellas ya que ambas requieren una de la otra, pues, el hardware requiere de un lenguaje, proporcionado por el

software, para comunicarse y al mismo tiempo, el software necesita del hardware para recibir información y procesarla. Cabe aclarar que la clase *Software* mostrada en las figuras 1.14 y 1.15, son la misma.

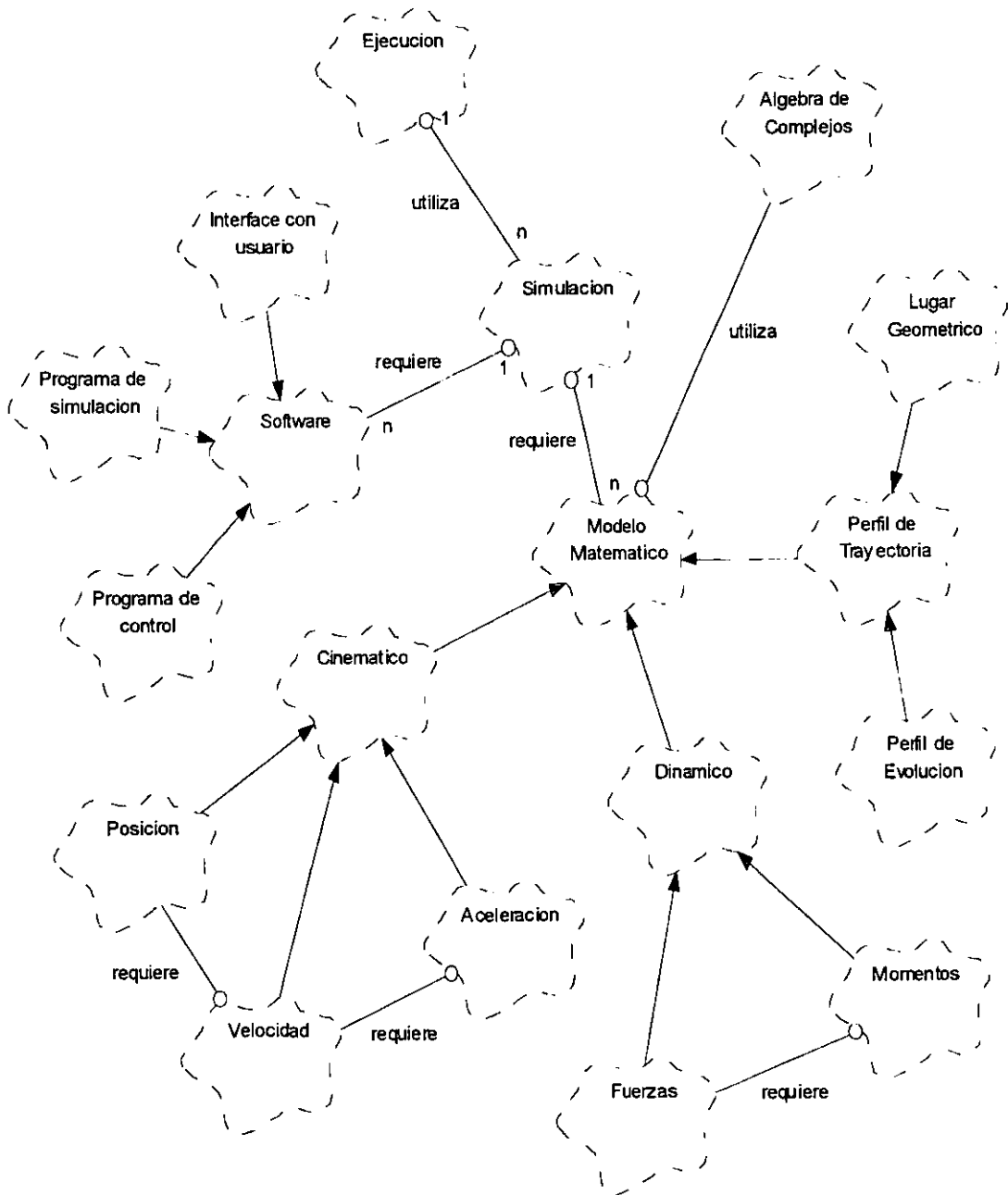


Figura 1.15. Clase *Simulación*.

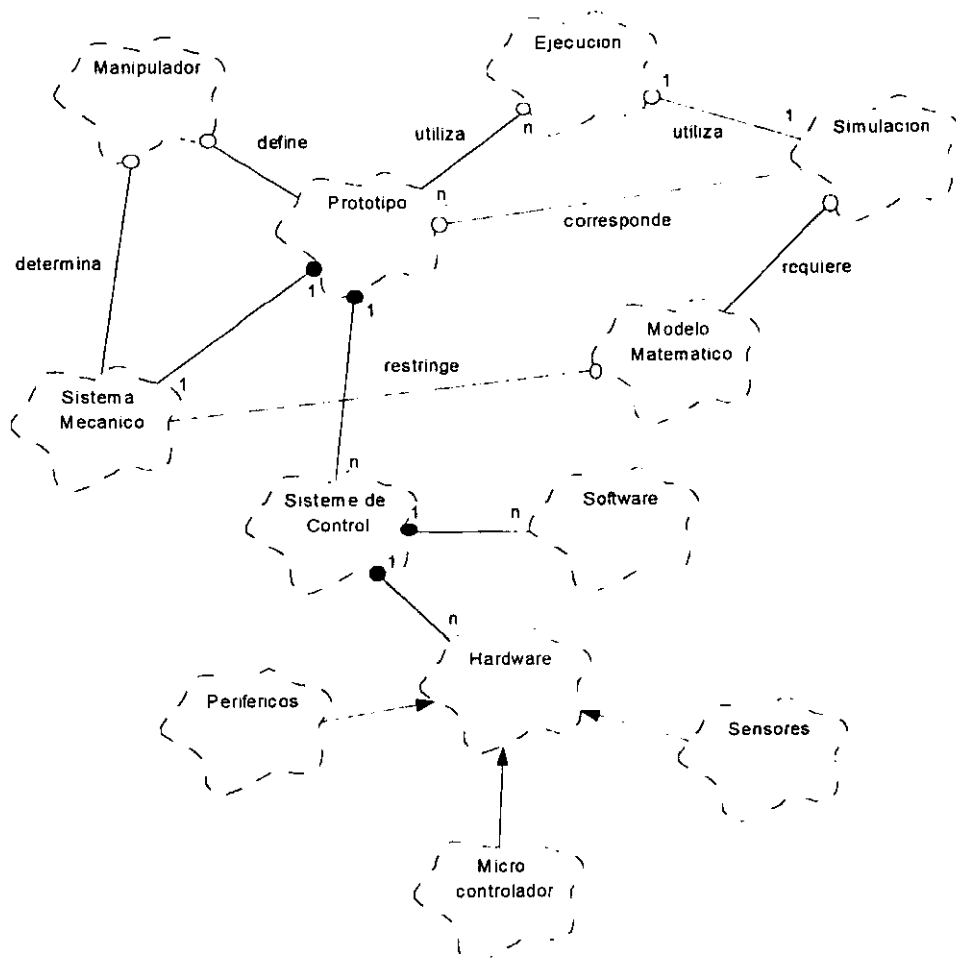


Figura 1.16. Clase *Prototipo*.

### 1.3. Análisis y caracterización de los movimientos de operación de robots manipuladores

Cada actuador tiene asociado un eslabón denominado "eslabón activo", luego entonces, un actuador al ser activado induce movimiento a su eslabón activo asociado. Con base en lo anterior, el término "movimiento de operación *simultáneo* o *secuencial*", o tan sólo, "movimiento *simultáneo* o *secuencial*", será semejante a decir "una clase de activación *simultánea* o *secuencial* de los actuadores asociados a un manipulador" para referirse a las instancias de la

clase *Formas de Activación*, así como también, será semejante para referirse a las instancias de la clase *Operación Funcional*. Por lo tanto, en este trabajo de tesis, dichos términos se utilizarán indistintamente.

Cada movimiento asociado a los robots manipuladores tiene diferencias cuantitativas y cualitativas en relación con otro movimiento, ya sea de la misma clase o de otra. Son precisamente estas diferencias las que definen su campo de aplicación. Cabe mencionar que cualquier robot manipulador (figura 1.2), puede efectuar las cuatro clases de movimientos (*Simultáneos, Secuenciales Unitarios, Secuenciales Mixtos y Secuenciales Híbridos*).

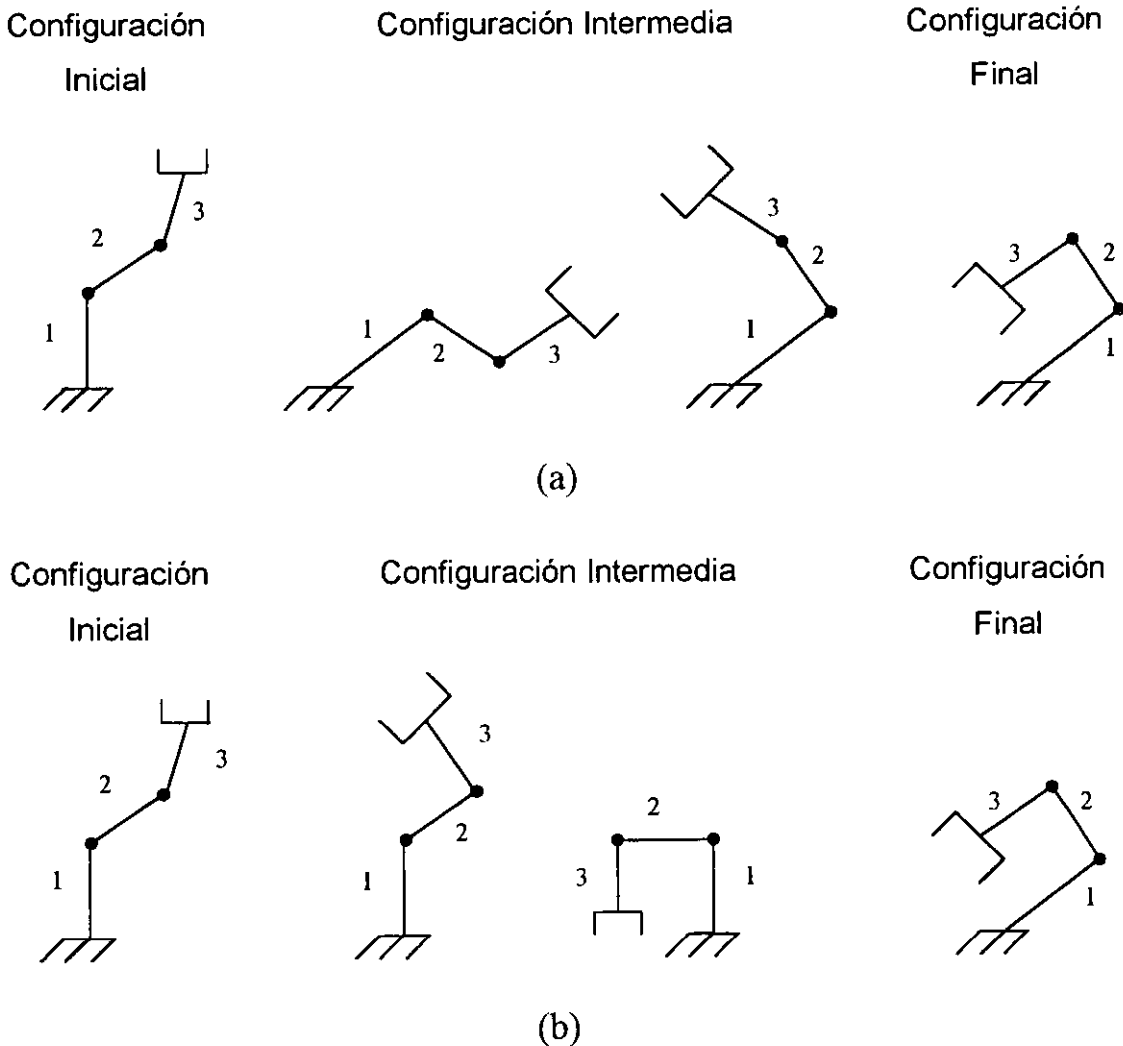
Consideremos el caso de un manipulador de cadena abierta con seis grados de libertad, el cual, efectúa las dos clases de movimientos para operaciones de orden máximo, es decir, los seis actuadores asociados al robot se activan para cada movimiento. Algunas aplicaciones del manipulador, en términos de los movimientos, pueden ser las siguientes:

- 1) Movimientos Simultáneos: cualquier tipo de operación industrial efectuada con manipulador.
- 2) Movimiento Secuenciales Unitarios: operaciones que involucran la evasión de obstáculos.
- 3) Movimientos Secuenciales Mixtos e Híbridos: evasión de obstáculos y operaciones industriales especiales.

El conjunto de aplicaciones resultante de los movimientos de un manipulador es determinado por dos aspectos principales:

- a) Posiciones relativas de cada eslabón producto de un movimiento en el área o volumen de trabajo.
- b) Diferentes lugares geométricos que el órgano terminal describe en el área o volumen de trabajo relacionados con cada movimiento.

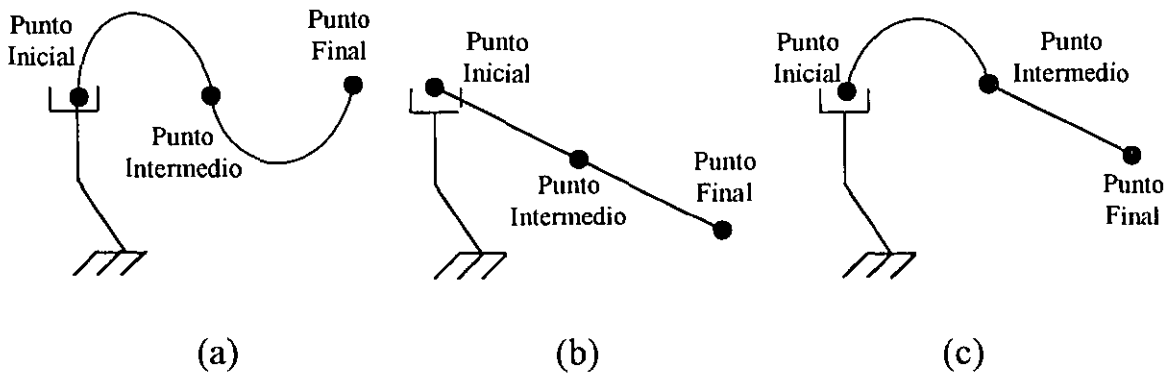
La figura 6.16 muestra las posiciones relativas de los eslabones de un robot con tres eslabones activos producto de dos movimientos secuenciales. El manipulador de 3GDL parte de una configuración inicial pasando por dos configuraciones intermedias y posicionándose en una configuración final. Por otro lado, los movimientos de la figura 6.16 son movimientos secuenciales con los actuadores operando, respectivamente, en el siguiente orden: 1-2-3 y 3-2-1.



**Figura 6.16. Posiciones relativas de un manipulador de 3GDL con movimientos secuenciales (a) 1-2-3, (b) 3-2-1.**



La figura 6.17 muestra los lugares geométricos descritos por un movimiento secuencial unitario, simultáneo, mixto, respectivamente. Se observa de la figura 6.17 que los movimientos simultáneos describen de manera natural líneas rectas (o cualquier lugar geométrico controlado), en tanto que los movimientos secuenciales inducen, de manera natural, lugares geométricos caracterizados por arcos de circunferencia. Finalmente, los movimientos mixtos e híbridos generan lugares geométricos compuestos. Las formas geométricas de los movimientos mostrados en la figura 6.17 están asociados al recorrido del órgano terminal de un manipulador de 2GDL.



**Figura 6.17. Lugares geométricos producto del movimiento de un robot de 2GDL**  
**(a) secuencial, (b) simultáneo, (c) mixto.**

Por otro lado, los movimientos secuenciales han sido aplicados en [11] para modelar problemas de evasión de obstáculos en el plano y en el espacio. También en [31] son utilizados los movimientos secuenciales para determinar la secuencia más óptima para en el modelo de posición de una cadena abierta de 3GDL. En [12] se utiliza un movimiento mixto para controlar los movimientos de un manipulador de 2GDL. Finalmente, en [11] se aplican los movimientos simultáneos para evadir obstáculos en el plano.

En las secciones anteriores se obtuvieron importantes resultados respecto a los movimientos que realiza un manipulador. Algunos de estos resultados son de

fundamental importancia para el desarrollo de esta sección. Entre éstos se encuentran: a) las distintas clases de movimientos (*Simultáneos*, *Secuenciales Unitario*, *Mixtos* e *Híbridos*) en un manipulador y, b) la generación, a partir de estas clases, movimientos de operación funcionales determinados por el sentido de operación de los actuadores y por las parejas desplazamiento - tiempo.

A continuación se presenta una caracterización de los movimientos de operación de la cadena compuesta RP motivo de nuestro estudio, esto es de un robot manipulador paralelo plano 3-RRR. La información que caracteriza los movimientos presentes en dicha cadena se conjunta en una matriz de código binario a partir de una sola nomenclatura. Antes de proceder a dicho análisis, es necesario describir los elementos que integran al manipulador o cadena compuesta RP.

El multicuerpo RP está compuesto por 8 eslabones rígidos descritos de la manera siguiente:

- 1) Tres eslabones activos.                    ( $E_1, E_3, E_5$ )
- 2) Cuatro eslabones conducidos.       ( $E_2, E_4, E_6, PL$ )
- 3) El eslabón tierra.                        ( $T$ )

El sistema articulado consta de nueve juntas rotacionales del tipo R según se muestra en la figura 6.18.

Las juntas  $J_1$ ,  $J_4$  y  $J_7$ , mostradas en la figura 6.18, integran actuadores  $Ac_1$ ,  $Ac_2$ , y  $Ac_3$  respectivamente, los cuales, producirán los movimientos del sistema. Por tanto, los eslabones  $E_1$ ,  $E_3$  y  $E_5$  son llamados eslabones activos o controlados. Las juntas  $J_1$  y  $J_3$  conectan, respectivamente a los eslabones  $E_1$ ,  $E_2$  y  $PL$ . También, las juntas  $J_5$  y  $J_6$ , así como  $J_8$  y  $J_9$  conectan los eslabones conducidos  $E_4$  y  $PL$ ,  $E_6$  y  $PL$  con los eslabones activos  $E_3$  y  $E_5$  respectivamente. Finalmente, el eslabón tierra  $T$ , permanece fijo en todo el movimiento.

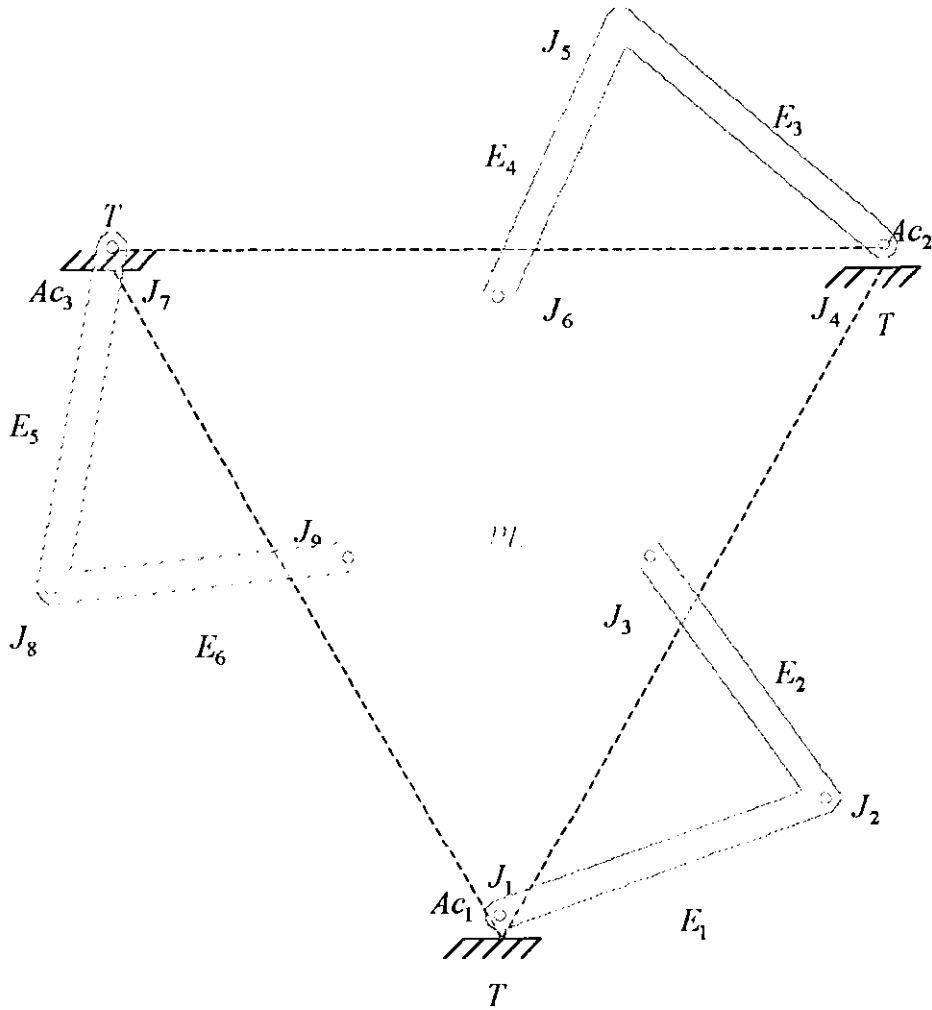


Figura 6.18. Caracterización del robot manipulador RP.

Un aspecto importante que debe señalarse es que el multicuerpo RP está compuesto por tres cadenas cinemáticas independientes definidas de la siguiente manera:

- 1)  $CC_1 = E_1 \cup E_2 \cup PL.$  (1.69)
- 2)  $CC_2 = E_3 \cup E_4 \cup PL.$
- 3)  $CC_3 = E_5 \cup E_6 \cup PL.$

Por otro lado, la relación que define el movimiento entre las cadenas se presenta a continuación:

$$PL = CC_1 \cap CC_2 \cap CC_3 \quad (1.70)$$

La expresión arriba escrita es de fundamental importancia para nuestros desarrollos, pues, implica que el movimiento de una cadena afecta a las dos restantes, según las consideraciones siguientes:

- 1) Si los eslabones activos de las cadenas restantes son fijados en el movimiento, entonces, la inducción del movimiento es sólo en los eslabones conducidos.
- 2) Si los eslabones activos de las cadenas restantes son libres de alguna restricción de movimiento, entonces, todos los eslabones que componen al robot tienen movimientos inducidos, excepto, el eslabón activo que produce el movimiento.

Las consideraciones arriba presentadas permiten caracterizar las cuatro clases de movimientos (*Simultáneos, Secuenciales Unitarios, Mixtos e Híbridos*) asociadas con la estructura articulada RP motivo de nuestro estudio.

Consideremos que los movimientos relativos de los eslabones que componen al sistema articulado RP motivo de nuestro estudio están dadas a través de las juntas rotacionales mostradas en la figura 6.18. Las juntas que conectan al robot RP con la tierra  $T$  del sistema tienen asociada la terna  $\{1, -1, 0\}$ , es decir:

- 1)  $J^T \rightarrow 1 \Leftrightarrow$  El movimiento es positivo o en contra de las manecillas del reloj.
- 2)  $J^T \rightarrow -1 \Leftrightarrow$  El movimiento es negativo o a favor de las manecillas del reloj.
- 3)  $J^T \rightarrow 0 \Leftrightarrow$  El movimiento es nulo.

Aquí,  $J^T = \{J_1^T, J_4^T, J_5^T\}$  son las juntas que conectan los eslabones activos con la tierra del sistema. Por otro lado, el conjunto  $J^{ac} = \{J_2^{ac}, J_5^{ac}, J_8^{ac}\}$  caracteriza el sistema de juntas que conecta a los eslabones activos con los eslabones conducidos. Para esta terna se tienen las siguientes consideraciones:

- 4)  $J^{ac} \rightarrow 1 \Leftrightarrow$  El movimiento inducido es positivo o en contra de las manecillas del reloj.
- 5)  $J^{ac} \rightarrow -1 \Leftrightarrow$  El movimiento inducido es negativo o a favor de las manecillas del reloj.
- 6)  $J^{ac} \rightarrow 0 \Leftrightarrow$  El movimiento es nulo.

Finalmente, la terna  $J^{PL} = \{J_3^{PL}, J_6^{PL}, J_9^{PL}\}$  caracteriza la conexión entre los eslabones conducidos y la plataforma del robot RP. Al igual que las ternas anteriores, el conjunto  $J^{PL}$  está asociado a la terna binaria de la manera siguiente:

- 7)  $J^{PL} \rightarrow 1 \Leftrightarrow$  El movimiento inducido es positivo o en contra de las manecillas del reloj.
- 8)  $J^{PL} \rightarrow -1 \Leftrightarrow$  El movimiento inducido es negativo o a favor de las manecillas del reloj.
- 9)  $J^{PL} \rightarrow 0 \Leftrightarrow$  El movimiento es nulo.

Consideremos ahora que el conjunto  $J = \{J^T, J^{AC}, J^{PL}\}$  está asociado a un conjunto de sensores  $Z = \{Z^T, Z^{AC}, Z^{PL}\}$ . La función  $g: Z \rightarrow J$  dada por:

$$\begin{aligned} g(Z^T) &= J^T \\ g(Z^{AC}) &= J^{AC} \\ g(Z^{PL}) &= J^{PL} \end{aligned} \tag{1.71}$$

asocia un sensor por cada junta del sistema articulado RP motivo de nuestro estudio. Aquí,  $Z^T = \{Z_1^T, Z_4^T, Z_7^T\}$ ,  $Z^{AC} = \{Z_2^{AC}, Z_5^{AC}, Z_8^{AC}\}$ ,  $Z^{PL} = \{Z_3^{PL}, Z_6^{PL}, Z_9^{PL}\}$ .

Cada sensor produce una señal binaria dada por la terna  $\{1, -1, 0\}$  de acuerdo con el estado de movimiento. Para nuestros propósitos, a continuación se proponen algunas hipótesis que son de fundamental importancia para nuestros desarrollos:

- 1) Los conjuntos de sensores  $Z^{AC}$  y  $Z^{PL}$  no caracterizan movimientos, es decir, desde el punto de vista de análisis de movimientos, el hecho de que un sensor de los conjuntos  $Z^{AC}$  y  $Z^{PL}$  envíe una señal de "1" o "- 1", no tiene sentido para contabilizar los movimientos del robot RP.
- 2) Por la anterior consideración, los sensores del conjunto  $Z^{AC}$  y  $Z^{PL}$  envían las señales "1" para movimiento y "0" para movimiento nulo.
- 3) Siempre que un eslabón activo esté en movimiento, todos los eslabones conducidos también están en movimiento.
- 4) Un movimiento nulo asociado con el robot paralelo RP es aquel caracterizado en la configuración de referencia o la nula activación de un actuador para un determinado movimiento. Aquí, el conjunto  $Z$  de sensores envía la señal "0".
- 5) Cada cadena cinemática tiene asociado el siguiente conjunto de sensores:

$$\begin{aligned}
 CC_1 &\rightarrow \{Z_1^T, Z_2^{AC}, Z_3^{PL}\} \\
 CC_2 &\rightarrow \{Z_4^T, Z_5^{AC}, Z_6^{PL}\} \\
 CC_3 &\rightarrow \{Z_7^T, Z_8^{AC}, Z_9^{PL}\}
 \end{aligned}
 \tag{1.72}$$

Bajo las consideraciones arriba descritas, en las secciones siguientes son caracterizados los movimientos de la estructura articulada RP motivo de nuestro estudio.

### 1.3.1 Movimientos de Operación Simultáneos

Nuestro interés en esta sección es representar los movimientos *Simultáneos* asociados al manipulador RP motivo de nuestro estudio. Dicha representación está dada por una nomenclatura y código binario apropiados. A continuación se define la nomenclatura para caracterizar los movimientos del robot RP:

- La letra asociada a los índices representa el conjunto de movimientos.
- Superíndice derecho: indica el grado del movimiento.
- Subíndice derecho: indica el orden, *grupo* o *secuencia* del movimiento.
- Superíndice izquierdo: indica el sentido de operación de los actuadores a través de un conjunto de números.
- Subíndice izquierdo: indica el arreglo de operación y su localización en una tabla correspondiente al orden del movimiento.

$$\begin{matrix} (\text{Sentidos}) \\ \text{Arreglo}[k,l] \end{matrix} G^{\text{Grado}}_{(\text{orden, sec uencia o grupo})}$$

Como ejemplo, a continuación se muestra la nomenclatura para un movimiento *simultáneo* y su interpretación.

$$\begin{matrix} (1,1,1) \\ 3[1,2] \end{matrix} G^1_{3,(abc)}$$

*“Movimiento de operación Simultáneo de grado 1 y orden 3, grupo (abc) con sentidos de operación (1, 1, 1) y arreglo de operación de grado 3 casilla [1,2].”*

Cabe recordar que esta clase de movimientos requieren de sólo un estado de operación, de ahí que todos se clasifiquen como de grado 1. Sin embargo, el número de actuadores activados en dicho estado de operación puede ser uno, dos o tres actuadores, razón por la cual, se clasifican como de orden 1, 2 o 3.

En los movimientos de operación *Simultáneos* siempre existen dos estados de operación nulos y sólo un estado de operación activo. Es decir, puesto que el movimiento inducido a los eslabones activos es siempre *simultáneo*, entonces, los eslabones conducidos también son sujetos de movimiento en el mismo estado de operación.

La matriz de código binario asociada a un movimiento es del orden  $E_s \times m$ , donde  $E_s$  es el número de sensores y  $m$  el número de estados de operación del movimiento. El número de elementos del conjunto  $E$  es igual a 9, en tanto que el grado de movimiento máximo para movimientos *Simultáneos* es de 1 y para *Secuenciales* es de 3, por lo tanto, la matriz asociada siempre se construye de orden  $9 \times 3$ .

Por otro lado, la nomenclatura en la matrices de código binario es la siguiente: la letra griega  $\tau$  representa el estado de operación; la letra  $t$  representa el valor cuantitativo de los tiempos de operación de los actuadores. Como se menciona en el párrafo anterior, en los movimientos *Simultáneos* siempre hay dos estados de operación nulos. Este hecho se indica por medio de un asterisco (\*) a la izquierda de la letra  $\tau$  que representa un estado de operación nulo.

Considérese el código binario mostrado en la tabla 1.20, cada columna de sensores está gobernada por las consideraciones planteadas en la sección anterior. Así mismo, el conjunto  $Z^T = \{Z_1^T, Z_4^T, Z_7^T\}$  es quien diferencia entre un movimiento y otro, ya sea *simultáneo* o *secuencial*. Por otro lado, el hecho de que los conjuntos  $Z^{AC}$  y  $Z^{PL}$  envíen la señal "1" por cada movimiento inducido, es por considerarse que el cuerpo RP es una cadena cerrada, y por consiguiente, cada movimiento de un eslabón activo induce movimiento a los eslabones conducidos. A continuación se presentan ejemplos de movimientos simultáneos y sus matrices de código binarios asociados.







Ejemplo 5. Movimiento *Simultáneo* de grado y orden 1, grupo (c) con sentido de operación (-1) y arreglo de grado 1 casilla [3,3].

**Tabla 1.24 Código binario para un movimiento *Simultáneo* de grado y orden 1.**

${}^{(-1)}_{1[3,3]}S^1_{1,C}$		$\mathcal{G}_c$								
Cadena		$CC_1$			$CC_2$			$CC_3$		
Actuador y Junta		$a(J1)$	$J_2$	$J_3$	$b(J4)$	$J_5$	$J_6$	$c(J2)$	$J_8$	$J_9$
Sensor		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
$t_c$	$\tau_1$	0	1	1	0	1	1	-1	1	1
	$^*\tau_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$^*\tau_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

### 1.3.2 Movimientos de Operación Secuenciales Unitarios

Nuestro interés en esta sección es representar los movimientos *Secuenciales* asociados al manipulador RP motivo de nuestro estudio. Dicha representación está dada por una nomenclatura y código binario apropiados semejante a la utilizada para representar los movimientos *Simultáneos*. A continuación se muestra la nomenclatura para un movimiento *secuencial unitario* y su interpretación.

$${}^{(1,1,1)}_{3[2,5]}SU^3_{3,(a-b-c)}$$

“Movimiento *Secuencial Unitario* de grado y orden 3, secuencia (a-b-c) con sentidos de operación (1,1,1) y arreglo de operación de grado 3 casilla [2,5].”

En la notación mostrada no se indica la familia de la *secuencia*, pues, la clasificación de familia sólo se usa para distinguir todos aquellos movimientos que empiezan con una determinado *grupo* de actuadores. Luego entonces, cuando se define un movimiento en particular, no se trata con toda una familia (a menos que así se especifique) sino con un sólo movimiento de ella. Sin embargo, la familia a la cual pertenece un movimiento secuencial se puede identificar por el orden del primer *grupo* de la secuencia.

Los arreglos de operación indicados por el subíndice izquierdo son los arreglos determinados en las tablas 1.1, 1.2 y 1.3 (sección 1.2.5); para el ejemplo citado, el subíndice izquierdo se refiere al arreglo de operación para movimientos de orden 3, localizado en la casilla (2,5) de la tabla 1.3; la matriz de código binario asociado se muestra en la tabla 1.25. En la consecuentes tablas, se presenta otros ejemplo de código binario para movimientos secuenciales *Unitarios*, *Mixtos* e *Híbridos*.

Ejemplo 1. Movimiento Secuencial Unitario de grado y orden 3, secuencia  $(a - b - c)$  con sentidos de operación  $(1, 1, 1)$  y arreglo de grado 3 casilla [2,5].

**Tabla 1.25 Código binario: movimiento *Secuencial Unitario* de grado y orden 3.**

${}_{3[2,5]}^{(1,1,1)} SU_{3,(a-b-c)}^3$		$\mathcal{G}_b = \mathcal{G}_c \neq \mathcal{G}_a$								
		$CC_1$			$CC_2$			$CC_3$		
Cadena		$a(J1)$	$J2$	$J3$	$b(J4)$	$J5$	$J6$	$c(J2)$	$J8$	$J9$
Sensor		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
$t_a \neq t_b \neq t_c$	$\tau_1$	1	1	1	1	1	1	0	1	1
	$\tau_2$	0	1	1	1	1	1	0	1	1
	$\tau_3$	0	1	1	0	1	1	1	1	1



Ejemplo 4. Movimiento *Secuencial Unitario* de grado 2 y orden 2, secuencia  $(b - c)$  con sentidos de operación  $(1, 1)$  y arreglo de grado 2 casilla  $[5, 6]$ .

**Tabla 1.28 Código binario: movimiento *Secuencial Unitario* de grado y orden 2.**

${}_{2[5,6]}^{(1,1)}SU_{2,(b-c)}^2$		$\mathcal{G}_B \neq \mathcal{G}_C$								
		$CC_1$			$CC_2$			$CC_3$		
Cadena		$a(J1)$	$J_2$	$J_3$	$b(J4)$	$J_5$	$J_6$	$c(J2)$	$J_8$	$J_9$
Actuador y Junta		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
Sensor		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
$t_B = t_C$	$\tau_1$	0	1	1	<b>1</b>	1	1	0	1	1
	$\tau_2$	0	1	1	0	1	1	<b>1</b>	1	1
	$^*\tau_3$	<b>0</b>	0	0	0	0	0	0	0	0

En los movimientos de orden 2, existe un estado de operación nulo, luego entonces, en lugar de utilizar una terna de números para indicar los sentidos de operación como en caso de movimientos de orden 3, se utiliza una pareja de números. Esto se aplica en general tanto para movimientos *Simultáneos* como *Secuenciales*.

### 1.3.3 Movimientos de Operación Secuenciales Mixtos

Nuestro interés en esta sección es presentar los movimientos *Mixtos* asociados al manipulador RP motivo de nuestro estudio. La nomenclatura utilizada para representar estos movimientos es semejante a la usada para los movimientos *Simultáneos* y *Secuenciales Unitarios*. Sin embargo, la especificación de los sentidos y arreglos de operación de los movimientos *Simultáneos* y *Secuenciales Unitarios* se hace por medio de una pareja o terna de números según el grado de movimiento, mientras que en el caso de los movimientos

Mixtos, tanto los sentidos como los arreglos de operación se especifican con una matriz cada uno. Los renglones de tales matrices indican la pareja o terna de números para el caso de los sentidos de operación, y el orden y casilla para el arreglo de operación de cada grupo de actuadores en el movimiento.

Ejemplo 1. Movimiento *Mixto* de grado y orden 2, secuencia  $(a-bc)$  cuyas matrices de sentidos y arreglos de operación son  $H_{1 \times 3}$  y  $D_{1 \times 3}$ , respectivamente.

**Tabla 1.29 Código binario: movimiento *Mixto* de grado y orden 2 tipo (1)-(2).**

$\begin{matrix} [H] \\ [D] \end{matrix} SM_{3,(a-bc)}^3$		$D_{1 \times 2}$								
		$CC_1$			$CC_2$			$CC_3$		
Cadena		$a(J1)$	$J2$	$J3$	$b(J4)$	$J5$	$J6$	$c(J2)$	$J8$	$J9$
Actuador y Junta		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
Sensor		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
$H_{1 \times 2}$	$\tau_1$	1	1	1	0	1	1	0	1	1
	$\tau_2$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\tau_3$	0	1	1	0	1	1	0	1	1
Matriz de Sentidos					Matriz de Arreglos					
$H_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} (1) \\ (1,1) \end{bmatrix}$					$D_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 1[1,1] \\ 2[5,5] \end{bmatrix}$					

Como se puede observar en el ejemplo 1 (tabla 1.29), en cada estado de operación se activa un grupo de actuadores, esto es, en el estado  $\tau_1$  se activan el grupo  $(a)$ , en el estado  $\tau_2$  se activa el grupo de actuadores  $(bc)$ , finalmente, el estado  $\tau_3$  es un estado de operación nulo. El signo de los números en las casillas de los actuadores activos corresponde con los elementos (ternas, parejas o único número) de la matriz de sentidos  $H_{1 \times 2}$ . Esto es, el primer

renglón de dicha matriz es el número que indica el sentido de operación del grupo ( $a$ ) en el estado de operación  $\tau_1$ ; la pareja de números indica el sentido de operación del grupo de actuadores ( $bc$ ) en el estado  $\tau_2$ .

Siguiendo la misma lógica, cada renglón de la matriz  $D_{1 \times 2}$  indica el orden y casilla del arreglo correspondiente al grupo de actuadores en cada estado de operación. A continuación se muestran otros ejemplos.

Ejemplo 2. Movimiento *Mixto* de grado y orden 2, secuencia ( $ac - b$ ) cuyas matrices de sentidos y arreglos de operación son  $H_{1 \times 2}$  y  $D_{1 \times 2}$ , respectivamente.

**Tabla 1.30 Código binario: movimiento *Mixto* de grado y orden 2 tipo (2)-(1).**

$\begin{matrix} [H] \\ [D] \end{matrix} SM_{2,(ac-b)}^2$		$D_{1 \times 2}$								
		$CC_1$			$CC_2$			$CC_3$		
Cadena		$a(J1)$	$J2$	$J3$	$b(J4)$	$J5$	$J6$	$c(J2)$	$J8$	$J9$
Actuador y Junta		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
Sensor		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
$H_{1 \times 2}$	$\tau_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\tau_2$	0	1	1	1	1	1	-1	1	1
	$^*\tau_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Matriz de Sentidos					Matriz de Arreglos					
$H_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} (1,1,1) \\ (1,-1) \end{bmatrix}$					$D_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 3[1,4] \\ 2[6,6] \end{bmatrix}$					



Cuando el movimiento *Mixto* es de grado 2, las matrices de sentidos y arreglos de operación asociadas son de orden 1 x 2, pues sólo se tienen dos estados de operación. De esto se deduce que el orden de la matrices asociadas *H* y *D* cambia de acuerdo al grado del movimiento.

### 1.3.4 Movimientos de Operación Secuenciales Híbridos

Nuestro interés en esta sección es presentar los movimientos *Secuenciales Híbridos* asociados al manipulador RP motivo de nuestro estudio. La nomenclatura utilizada para representar estos movimientos es semejante a la usada para los movimientos *Secuenciales Mixtos*.

Ejemplo 1. Movimiento *Híbrido* de grado y orden 3, secuencia (*abc - abc - abc*) cuyas matrices de sentidos y arreglos de operación son  $H_{1 \times 3}$  y  $D_{1 \times 3}$ .

**Tabla 1.31 Código binario: movimiento *Híbrido* grado y orden 3 tipo (3)-(3)-(3).**

$\begin{matrix} [H] \\ [D] \end{matrix} SH_{3,(abc-abc-abc)}^3$		$D_{1 \times 3}$								
Cadena		$CC_1$			$CC_2$			$CC_3$		
Actuador y Junta		$a(J_1)$	$J_2$	$J_3$	$b(J_4)$	$J_5$	$J_6$	$c(J_7)$	$J_8$	$J_9$
Sensor		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
$H_{1 \times 3}$	$\tau_1$	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1
	$\tau_2$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\tau_3$	1	0	0	-1	0	0	1	0	0
Matriz de Sentidos					Matriz de Arreglos					
$H_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} (1,-1,-1) \\ (1,1,1) \\ (1,-1,1) \end{bmatrix}$					$D_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 3[4,2] \\ 3[3,5] \\ 3[1,1] \end{bmatrix}$					

En el ejemplo 1 (tabla 1.31), note que aún cuando en los tres estados de operación tienen la misma familia de actuadores, es decir, en los tres estados operan los tres actuadores simultáneamente, el movimiento en cada uno de ellos es distinto. Esto es, en cada estado los actuadores operan con una terna de números diferente asociada a los sentidos de operación.

Cabe hacer notar que en los ejemplos mostrados, las *secuencias híbridas* indicadas tienen la característica de que los *grupos* de actuadores se pueden repetir, lo cual, implica que cualquiera de los actuadores puede repetirse en los *m* estados de operación, esto de acuerdo a las propiedades establecida en la sección 1.2.5.2.3. Luego entonces, el número total *N* de actuadores presentes en una secuencia puede ser mayor que *n*. Esto se observa claramente en el ejemplo 1, tabla 1.31.

Ejemplo 2. Movimiento *Híbrido* de grado y orden 2, secuencia (*ab-ac*) cuyas matrices de sentidos y arreglos de operación son  $H_{1 \times 2}$  y  $D_{1 \times 2}$ , respectivamente.

**Tabla 1.32 Código binario: movimiento *Híbrido* grado y orden 2 tipo (2)-(2).**

$\begin{matrix} [H] \\ [D] \end{matrix} SH_{2,(ab-ac)}^2$		$D_{1 \times 2}$								
		$CC_1$			$CC_2$			$CC_3$		
Cadena		$a(J1)$	$J_2$	$J_3$	$b(J4)$	$J_5$	$J_6$	$c(J2)$	$J_8$	$J_9$
Actuador y Junta		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
Sensor		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
$H_{1 \times 2}$	$\tau_1$	1	1	1	-1	1	1	0	1	1
	$\tau_2$	-1	1	1	0	1	1	1	1	1
	$^*\tau_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Matriz de Sentidos					Matriz de Arreglos					
$H_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} (1,-1) \\ (-1,1) \end{bmatrix}$					$D_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 2[2,1] \\ 2[1,2] \end{bmatrix}$					

Ejemplo 3. Movimiento *Híbrido* de grado y orden 3, familia (2) y *secuencia* ( $ab - abc - b$ ) cuyas matrices de sentidos y arreglos de operación son  $H_{1 \times 3}$  y  $D_{1 \times 3}$ , respectivamente.

**Tabla 1.33 Código binario: movimiento *Híbrido* grado y orden 3 tipo (2)-(3)-(1).**

${}^{[H]}_{[D]}SH^3_{3,(ab-abc-b)}$		$D_{1 \times 3}$								
Cadena		$CC_1$			$CC_2$			$CC_3$		
Actuador y Junta		$a(J_1)$	$J_2$	$J_3$	$b(J_4)$	$J_5$	$J_6$	$c(J_7)$	$J_8$	$J_9$
Sensor		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
$H_{1 \times 3}$	$\tau_1$	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	$\tau_2$	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\tau_3$	0	1	1	-1	1	1	0	1	1
Matriz de Sentidos					Matriz de Arreglos					
$H_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} (1,1) \\ (-1,1,1) \\ (-1) \end{bmatrix}$					$D_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 2[3,4] \\ 3[5,1] \\ 1[2,2] \end{bmatrix}$					

**1.4. Movimientos Naturales y Forzados**

Como se estableció en la sección 1.2, los manipuladores realizan movimientos que se clasifican, en cuanto a la operación de los actuadores, en cuatro clases: *Simultáneos*, *Secuenciales Unitarios*, *Mixtos* e *Híbridos*. Sin embargo, sin importar la clase de movimiento con que opera un manipulador, los movimientos que éste realiza pueden clasificarse como *naturales* o *forzados* según se muestra en la figura 1.20.

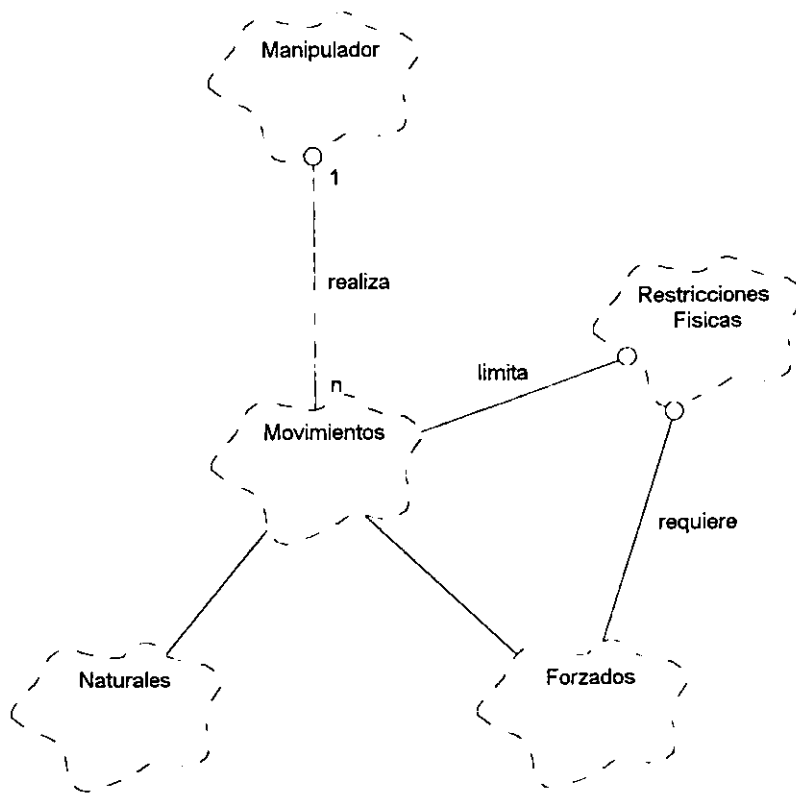


Figura 1.20. Movimientos *Naturales* y *Forzados*.

La diferencia entre un movimiento *natural* y uno *forzado* radica en la restricciones físicas que se le impongan un manipulador. A continuación se define cada unos de ellos.

**Definición 1.19. Movimiento Natural:** Cuando un manipulador realiza un movimiento con sus eslabones sin restricción alguna que impida su libre movimiento, se dice que el manipulador realiza movimientos *naturales*.

**Definición 1.20. Movimiento Forzado:** Cuando un manipulador realiza un movimiento con alguna restricción física ajena o externa al propio manipulador, esto es, ajena a la estructura mecánica, de manera que ésta impida o restrinja el movimiento de alguno de sus eslabones, se dice que el manipulador realiza movimientos *forzados*.

Ahora bien, el robot manipulador RP motivo de nuestro estudio está compuesto por tres cadenas cinemáticas independientes ( $CC_1$ ,  $CC_2$  y  $CC_3$ ) unidas por un mismo órgano terminal ( $PL$ ) lo cual, implica que los actuadores de las cadenas asociados a las juntas  $J_1$ ,  $J_4$  y  $J_7$  pueden ser operados de manera independiente. Sin embargo, dada la arquitectura del robot RP motivo de nuestro estudio, es decir, dado que se trata de una estructura cinemática de cadena cerrada, el movimiento de un eslabón activo induce de manera natural el movimiento en los eslabones activos restantes.

De este hecho se observa que, la mayoría de los movimientos que realiza el manipulador RP son movimientos *Simultáneos* e *Híbridos* que se presentan de manera natural, mientras que los movimientos *Secuenciales Unitarios* y *Mixtos* se presentan como movimientos forzados. Esto último se debe a la restricción física que imponen los actuadores a la estructura cinemática; en el capítulo 4 se hablará más al respecto. Luego entonces, el manipulador RP puede ser operado funcionalmente, en la mayoría de las ocasiones, con sólo movimientos *Simultáneos* e *Híbridos*. Es por esta razón, además de razones de control que se explicarán en el capítulo 4, que para la presente tesis, sólo se simularán movimientos *Simultáneos* e *Híbridos*.

**Observación.** Los movimientos o formas de operación *Simultáneas*, específicamente los *grupos* de actuadores, son la unidad constitutiva de los movimientos, y los movimientos de operación *Secuenciales*, son precisamente *secuencias* de *grupos* de actuadores. Ahora bien, en general, una *secuencia* puede tener tantos *grupos* como un movimiento lo requiera, luego entonces, la clase *movimientos de operación Secuenciales* (y en consecuencia la clase *Estados de Operación*) es un conjunto finito no contable. Sin embargo, en este trabajo de tesis, arbitrariamente se ha limitado el número de *estados de operación* presentes en una *secuencia*. Es decir, el número  $m$  de *estados de operación* asociados a *grupos* de actuadores en una *secuencia* no es mayor que el número  $n$  de actuadores asociados al manipulador.

Lo anterior implica que, el número de *movimientos* o *formas de operación* asociados a un manipualdor de 3GDL, y en general de  $n$  grados de libertad, es incontable. Sin embargo, lo que sí se puede determinar (de acuerdo a las expresiones desarrolladas en este capítulo) es el número de *movimientos de operación* más elementales (movimientos de operación *Simultáneos*), esto es, los *grupos* de actuadores constitutivos de los movimiento asociados a un manipulador.

## CAPÍTULO 2

### ANÁLISIS DEL ÁREA DE TRABAJO

**Introducción:** En el presente capítulo se analiza el área de trabajo del multicuerpo RP motivo de estudio. Son construidos los criterios sobre los cuales se genera el área de trabajo. Para este tipo de estructura cinemática los parámetros que se relacionan con el área de trabajo son: 1) las posiciones de los actuadores asociados al robot, 2) las dimensiones de los eslabones y, 3) el máximo radio de alcance de cada cadena cinemática que compone al robot. Se describen las posiciones límite o de “agarrotamiento” [36] en la estructura RP y la degeneración del grado de movimiento como consecuencia de tales posiciones. Finalmente se determinan algunas de estas configuraciones.

#### 2.1 Caracterización de las posiciones de los actuadores y las dimensiones principales de los eslabones.

El área de trabajo que llamaremos  $A_T$  está en función de las posiciones de los actuadores localizados sobre las juntas  $J_1, J_4, J_7$  definidas como:

$$J_1 = T \cap E_1; \quad J_4 = T \cap E_3; \quad J_7 = T \cap E_5$$

donde  $T$  es la tierra del sistema y  $E_1, E_2$  y  $E_3$  son los eslabones conductores de cada cadena cinemática  $CC_i$  que componen al multicuerpo en estudio. Por tanto, si  $P_0$  es el conjunto de posiciones de los actuadores, entonces:

$$P_0 = \{p_i \in J_i | E_i \cap T = J_i, E_i \subset CC_i\} \quad (2.1)$$

Para nuestros propósitos los puntos  $p_i \in J_i$  son únicos. Otro parámetro relacionado con el área de trabajo son las dimensiones de los eslabones que componen cada cadena cinemática. Consideremos la cadena  $CC_1$  dada por:

$$CC_1 = E_1 \cup E_2 \cup PL$$

Diremos que  $CC_1$  está dimensionada para efectos del área de trabajo si

$$\begin{aligned} 1) \quad d_1(P_2 - P_1) &= \|\underline{L}_1\| = l_1; \quad P_1 \in J_1 \quad \text{y} \quad P_2 \in J_2 \quad (E_1) \\ 2) \quad d_2(P_3 - P_2) &= \|\underline{L}_2\| = l_2; \quad P_2 \in J_2 \quad \text{y} \quad P_3 \in J_3 \quad (E_2) \\ 3) \quad d_3(P_{POT} - P_3) &= \|\underline{L}_{POT}\| = l_{POT}; \quad P_3 \in J_3 \quad \text{y} \quad P_{POT} \in PL \quad (PL) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Po tanto, el área de trabajo está en función de las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad \frac{l_1}{l_2} &\geq 1 \\ \text{b) } \quad \frac{l_1}{l_{POT}} &\geq 1 \\ \text{c) } \quad \frac{l_2}{l_{POT}} &\geq 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Note que dichas relaciones se aplican para cada cadena que compone al robot RP. Es decir:

$$\begin{aligned} \frac{l_3}{l_4} \geq 1, \quad \frac{l_3}{l_{POT}} \geq 1, \quad \frac{l_4}{l_{POT}} \geq 1 \quad \text{para } CC_2. \\ \frac{l_5}{l_5} \geq 1, \quad \frac{l_5}{l_{POT}} \geq 1, \quad \frac{l_6}{l_{POT}} \geq 1 \quad \text{para } CC_3. \end{aligned}$$



## 2.2 El máximo radio de alcance de las cadenas cinemáticas.

Otro parámetro que influye para caracterizar el área de trabajo es el máximo radio de alcance de las cadenas cinemáticas. Para nuestros propósitos tomaremos las restricciones siguientes:

- 1)  $l_1 \geq l_2, l_1 > l_{POT}$  para  $CC_1$ . (2.4)
- 2)  $l_3 \geq l_4, l_3 > l_{POT}$  para  $CC_2$ .
- 3)  $l_5 \geq l_6, l_5 > l_{POT}$  para  $CC_3$ .
- 4)  $l_1 = l_3 = l_5$ .
- 5)  $l_2 = l_4 = l_6$ .

El máximo radio de alcance, que llamaremos  $r_{MAX}$  para cada cadena, se define a través de las relaciones siguientes:

- a)  $r_{MAX,CC1} = l_1 + l_2 + l_{POT}$  (2.5)
- b)  $r_{MAX,CC2} = l_3 + l_4 + l_{POT}$
- c)  $r_{MAX,CC3} = l_5 + l_6 + l_{POT}$

De manera general,

$$r_{MAX,CCi} = l_i + l_{i+1} + l_{POT} \quad (2.6)$$

Considérese que se fija el punto  $P_{POT} \in PL$  localizado en el centroide de la plataforma y se extienden las cadenas cinemáticas hasta que la longitud del radio es máximo; puesto que  $r_{MAX,CC1} = r_{MAX,CC2} = r_{MAX,CC3}$ , entonces, las posiciones  $P_0$  (donde se localizan los actuadores) se ubican en un círculo con centro en  $(X_{POT}, Y_{POT})$  de radio  $r_{MAX,CC1}$ , según se muestra en la figura siguiente:

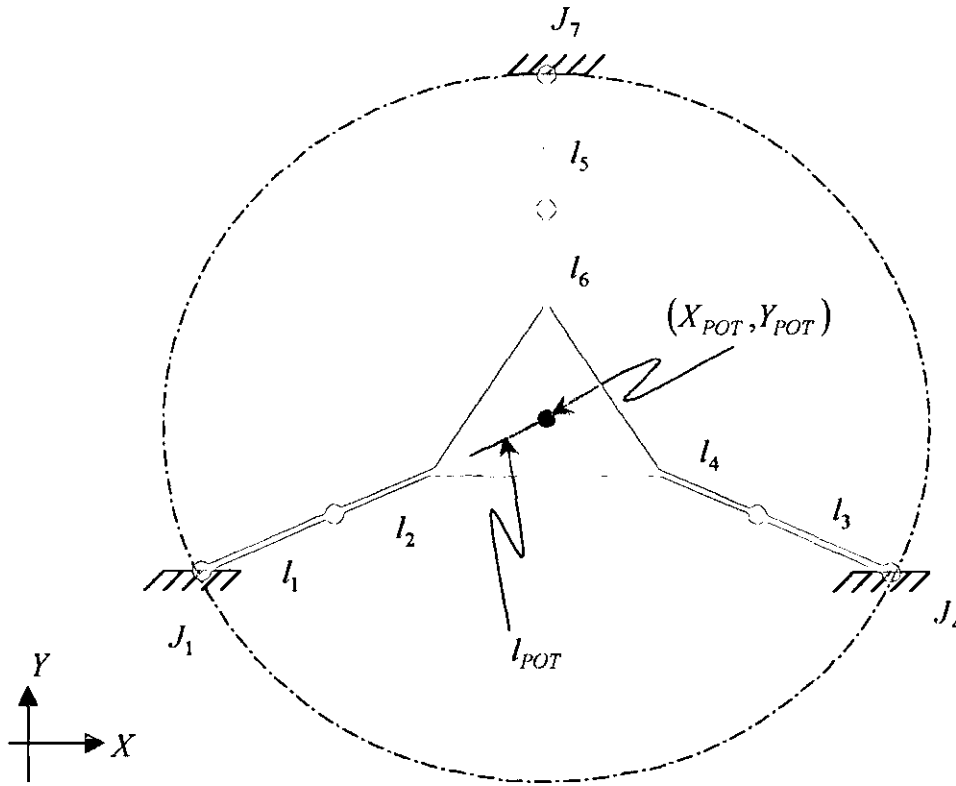


Figura 5.1. Configuración del robot RP bajo máximo radio de alcance de sus cadenas cinemáticas.

Note de la figura 2.1 que dada la condición  $r_{MAX,CC1} = r_{MAX,CC2} = r_{MAX,CC3}$ , el robot paralelo es inamovible, es decir, toma una forma en la cual no es posible o no existe movimiento, por consiguiente, es una estructura con 0 grados de movilidad o movimiento (GDM). Como se definió en el capítulo anterior, el grado de un movimiento es el número de estados o tiempos de operación requeridos por cada actuador para poder generar un movimiento. Luego entonces, cuando un actuador y su correspondiente eslabón activo no pueden moverse, se dice que se degenera o pierde un grado de movimiento. Por otro lado, las juntas  $J_1, J_4$  y  $J_7$  son tales que:

$$J_1 \cap J_4 \cap J_7 = \phi \tag{2.7}$$

es decir, las posiciones  $P_0$  nunca se traslapan.

Consideremos ahora que la gráfica asociada a la configuración mostrada en la figura 2.1 es un círculo definido por:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r_{MAXCC}^2 \quad (2.8)$$

donde  $(h,k) = (X_{POT}, Y_{POT})$ . Los puntos contenidos en el interior y en la frontera del círculo satisfacen la relación siguiente:

$$G_{RAD,MAX} = (x-h)^2 + (y-k)^2 = r_{MAXCC}^2$$

Las posiciones  $P_0$  y grados de movimiento (GDM) del robot paralelo se relacionan según los puntos siguientes:

- 1) 0 GDM si  $P_1, P_4, P_7 \in (G_{RADMAX}, =)$  (2.9)
- 2) 3 GDM si  $P_1, P_4, P_7 \in (G_{RADMAX}, <)$

Aquí,  $(G_{RADMAX}, =)$  y  $(G_{RADMAX}, <)$  significan que los puntos  $P_0$  se localizan en la frontera y en el interior de la gráfica  $G_{RADMAX}$ .

Las relaciones arriba mencionadas se muestran en la figura 2.2. El prototipo presentado en este trabajo es una estructura cinemática de cadena cerrada con una relación, entre las posiciones  $P_0$  y los grados de movimiento (GDM), como la mostrada en la figura 2.2(b).

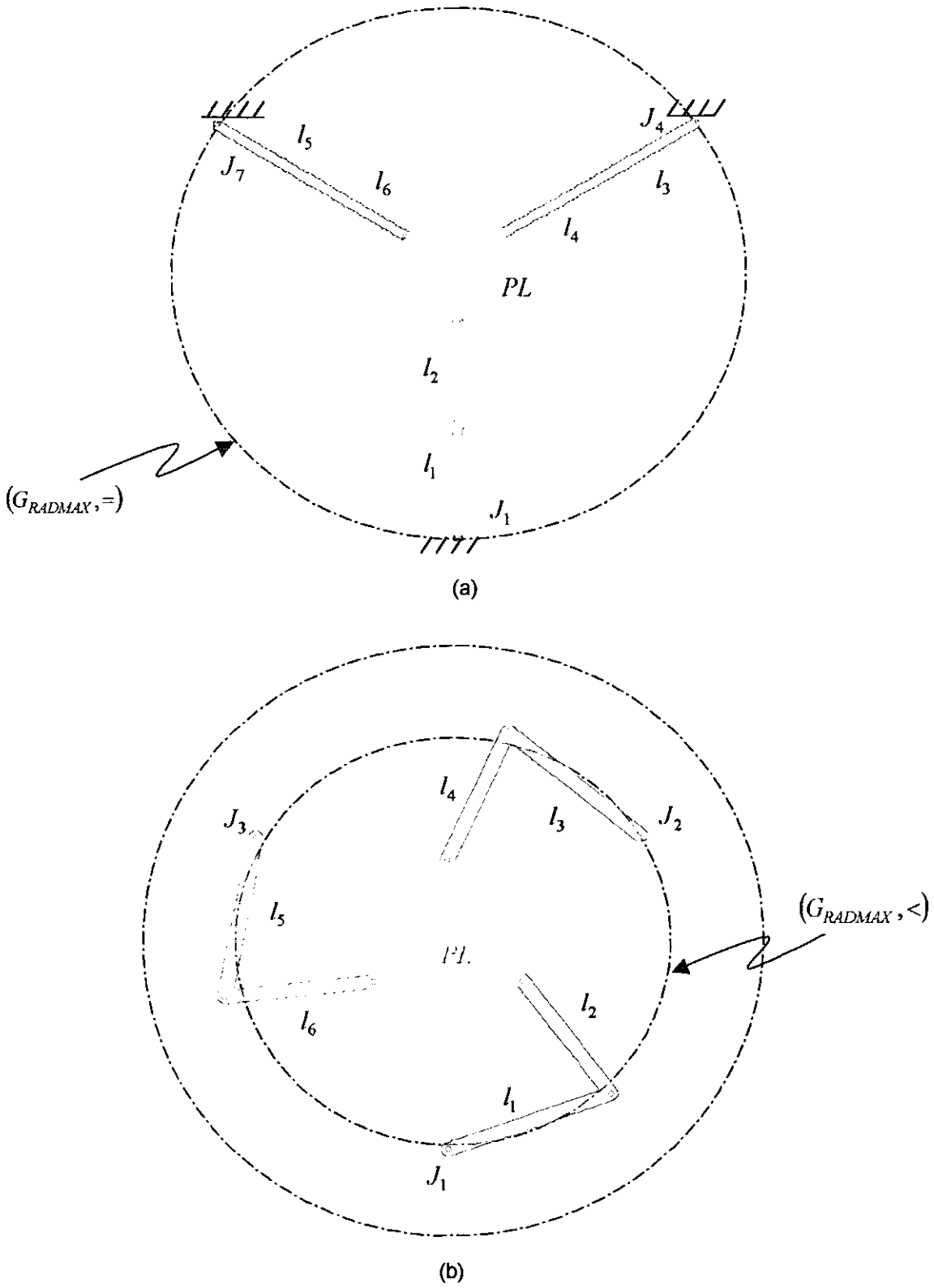


Figura 2.2. Configuración del robot RP según el GDM: (a) 0GDM; (b) 3GDM.

### 2.3 Caracterización del área de trabajo ( $A_T$ )

Considere ahora que existen tres circunferencias asociadas a cada cadena cinemática, es decir:

$$1) G_{CC1}; (X - X_{P1})^2 + (X - Y_{P1})^2 = r_{MAXCC1}^2 \quad (2.10)$$

$$2) G_{CC2}; (X - X_{P2})^2 + (X - Y_{P2})^2 = r_{MAXCC2}^2$$

$$3) G_{CC3}; (X - X_{P3})^2 + (X - Y_{P3})^2 = r_{MAXCC3}^2$$

Aquí,  $G_{CC1}$  es la gráfica asociada a la cadena  $CC_1$ . El área de trabajo  $A_T$  para

las condiciones  $\left( \{P_0\}, \left\{ \frac{l_1}{l_2} \geq 1, \frac{l_1}{l_{POT}} \geq 1 \right\}, \{P_0 \in G_{RADMAX}, <\} \right)$ , está dada por:

$$A_T = \left( (x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \in G_{CC1} \cap G_{CC2} \cap G_{CC3} \text{ y } G_{CC1}, G_{CC2}, G_{CC3} \subset X \times Y \right) \quad (2.11)$$

Es decir, son todos los puntos  $(x, y) \in X \times Y$  localizados en la intersección de las gráficas asociadas a las cadenas cinemáticas. La figura 2.3 muestra el área de trabajo  $A_T$  arriba caracterizada. A medida que las posiciones  $P_0$  se aproximan hacia la circunferencia de radio  $r_{MAX,CC1}$ , el área de trabajo cambia, esto es:

$$1) \text{ Si } P_1, P_2, P_3 \in (G_{RADMAX}, =) \Rightarrow A_T \rightarrow \text{punto} \Rightarrow 0GDM \quad (2.12)$$

$$2) \text{ Si } P_1, P_2, P_3 \in (G_{RADMAX}, <) \Rightarrow A_T = CC_1 \cap CC_2 \cap CC_3 \Rightarrow 3GDL$$

Estas consideraciones también pueden interpretarse de la manera siguiente

1) Si  $P_{POT} \in PL$  es fijo y si  $P_i \rightarrow G_{RADMAX}$ , entonces el  $A_T$  decrece.

2) Si  $P_{POT} \in PL$  es fijo y si  $P_i \rightarrow P_{POT}$ , entonces el  $A_T$  crece.

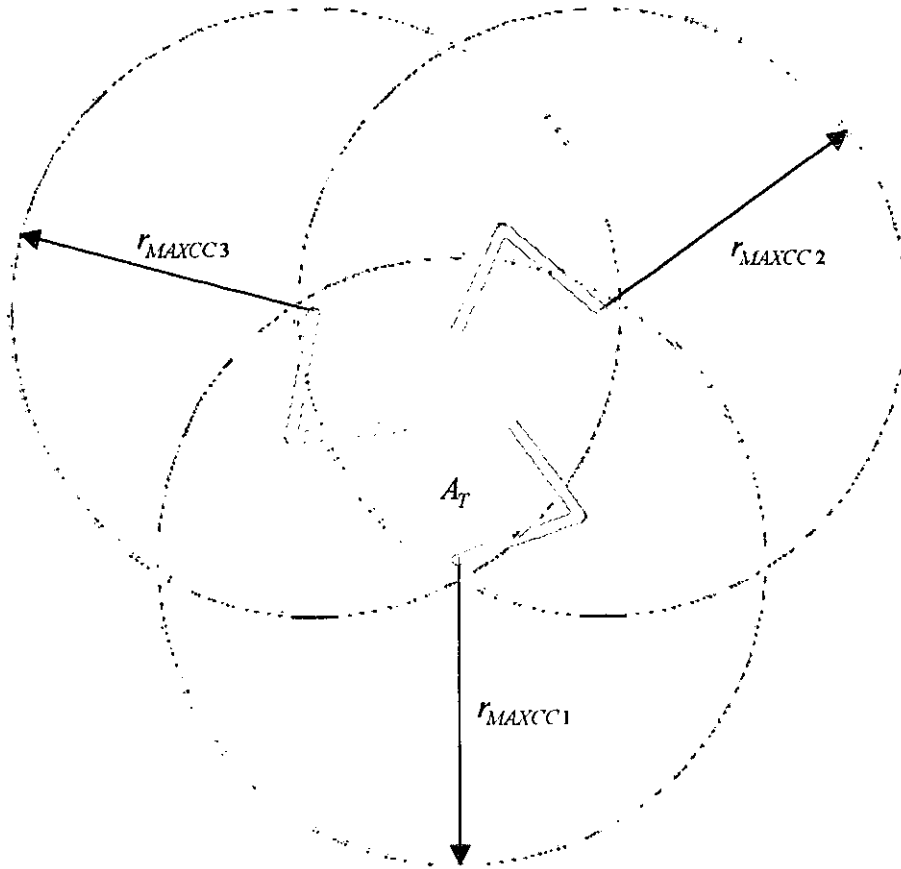
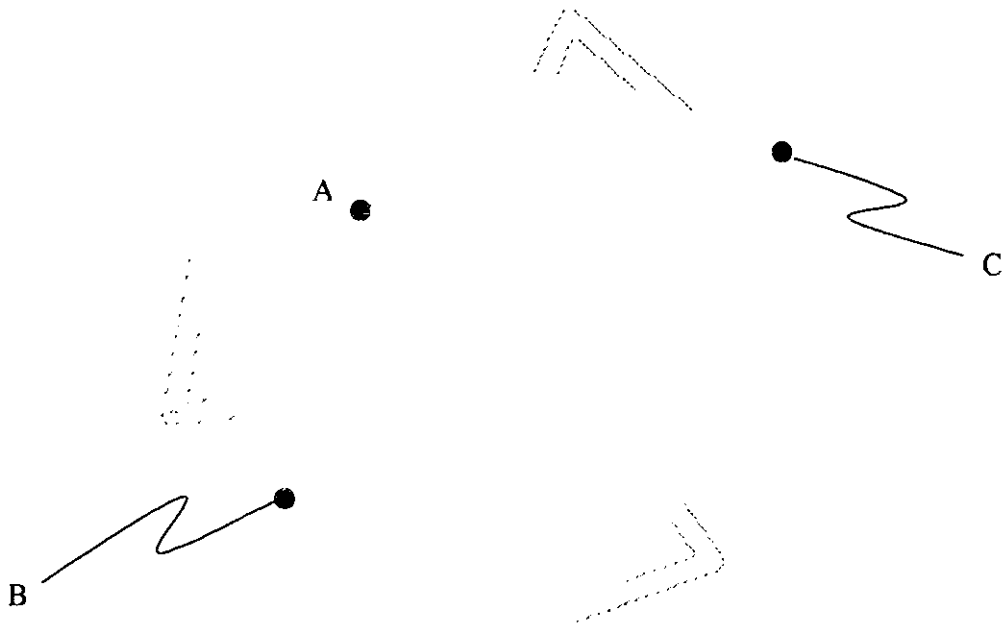


Figura 2.3. Área de trabajo del robot RP.

Para el caso de la consideración 2), las siguientes restricciones deben ser satisfechas:

- $J_1 \cap J_4 \cap J_7 = \phi$  (2.13)
- $d(P_{POT} - P_1) > 0$
- $d(P_{POT} - P_4) > 0$
- $d(P_{POT} - P_7) > 0$

Para finalizar esta sección, a continuación analizaremos el área de trabajo según el grado de movimiento degenerado sobre la gráfica de  $A_T$ . Considere la figura siguiente:



**Figura 2.4. Degeneración del GDM sobre el área de trabajo.**

Note de la figura 2.4 que el punto  $A \in A_T$  es alcanzado por un movimiento de 3GDM, mientras que en el instante en que se alcanza el punto  $B \in A_T$  o el punto  $C \in A_T$  se tienen 0GDM. Esto implica que:

- 1) Si  $A \in A_T \Rightarrow 3GDM \Rightarrow A \in G_{CC1} \cap G_{CC2} \cap G_{CC3}$
- 2) Si  $B \in A_T \Rightarrow 0GDM$  y  $B \in \text{segmento de } G_{CC1} \text{ o } G_{CC2} \text{ o } G_{CC3}$
- 3) Si  $C \in A_T \Rightarrow 0GDM$  y  $C \in G_{CC1} \cap G_{CC2} \text{ o } G_{CC1} \cap G_{CC3} \text{ o } G_{CC2} \cap G_{CC3}$

A medida que el centroide  $P_{POT} \in PL$  se aproxime a la frontera de  $A_T$ , el grado de movimiento se degenera. En la literatura tradicional, los puntos  $B, C \in A_T$  no pueden ser alcanzados, pues el método de modelación no da solución para dichos puntos en la cinemática inversa.

## 2.4 Posicion Límite o de Agarrotamiento [36]

En las estructuras cinemáticas de cadena cerrada existen posiciones en las que la movilidad de una estructura es limitada por la longitud de las cadenas cinemáticas que la componen. A estas posiciones se les conoce como *posiciones límite* o de *agarrotamiento*. Tales posiciones se presentan cuando existe una colinealidad, extendida o traslapada (un eslabón encima de otro), entre los eslabones de las cadenas cinemáticas que componen a un multicuerpo.

Ahora bien, cuando la estructura RP motivo de nuestro estudio alcanza una de estas posiciones, la estructura cinemática degenera o pierde grados de movimiento. Esto se debe a la colinealidad extendida entre los eslabones activos y conducidos en alguna de las cadenas  $CC_1$ ,  $CC_2$  o  $CC_3$ . Para el robot manipulador RP motivo de estudio se ha observado que, una posición límite o de agarrotamiento se alcanza cuando existe alguna de las siguientes condiciones:

- 1) Cuando menos una colinealidad entre los eslabones activos y eslabones conducidos en al menos una de las tres cadenas  $CC_1$ ,  $CC_2$  o  $CC_3$ .
- 2) Colinealidad entre dos eslabones conducidos y alguno de los lados de la plataforma  $PL$ .
- 3) Una colinealidad entre algún eslabón activo y su correspondiente eslabón conducido, junto con una colinealidad entre algún eslabón conducido y un lado de la plataforma  $PL$ .

Una consecuencia característica dada una posición de agarrotamiento es, que el movimiento de los eslabones activos, en el sentido de operación original de los actuadores, es nulo. Como consecuencia, en el instante en que se presenta la posición de agarrotamiento, el movimiento de toda la estructura cinemática es nulo. Para ilustrar lo anterior, ejemplos de dicha característica se muestran en las figuras 2.5. y 2.6.



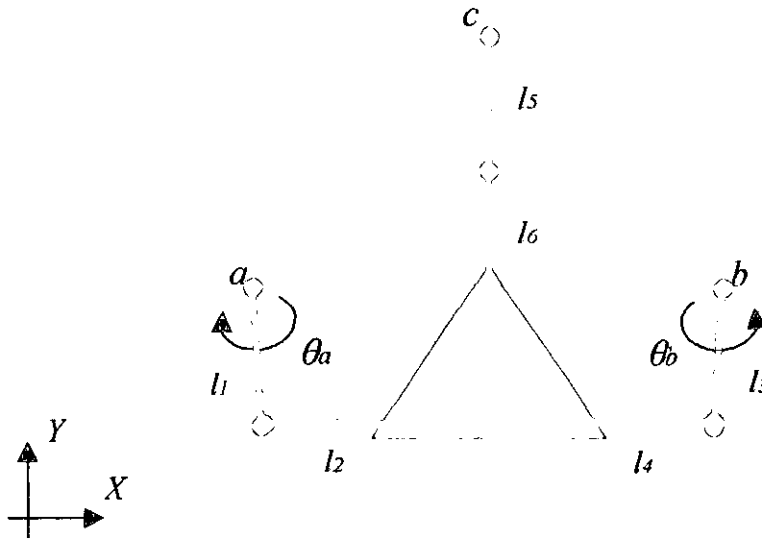


Figura 2.5. Posición límite o de agarrotamiento en la estructura RP.

Note de la figura 2.5 que, la posición de agarrotamiento se presenta cuando los eslabones  $l_5$  y  $l_6$  son colineales entre ellos y los eslabones conducidos  $l_2$  y  $l_4$  son colineales con un lado de la plataforma  $PL$ , también, que el movimiento de toda la estructura es nulo cuando los actuadores  $a$ ,  $b$  y los eslabones activos  $l_1$  y  $l_3$  operan en sentidos opuestos. Lo anterior implica que, en el instante en que se alcanza una posición de agarrotamiento, la estructura RP presenta una configuración con OGDM. Lo anterior no implica que el robot manipulador RP no pueda operar en la frontera del área de trabajo  $A_T$ , pues éste, puede salir de la posición de agarrotamiento y recuperar los 3GDM siempre y cuando se realice un movimiento diferente al que originó dicha posición.

La configuración mostrada en la figura 2.6 tiene características relevantes para la operación del robot RP motivo de estudio. Estas características son:

- 1) Se considera como la posición de referencia o *Home* para cualquier movimiento.
- 2) Es en si misma una posición de agarrotamiento.

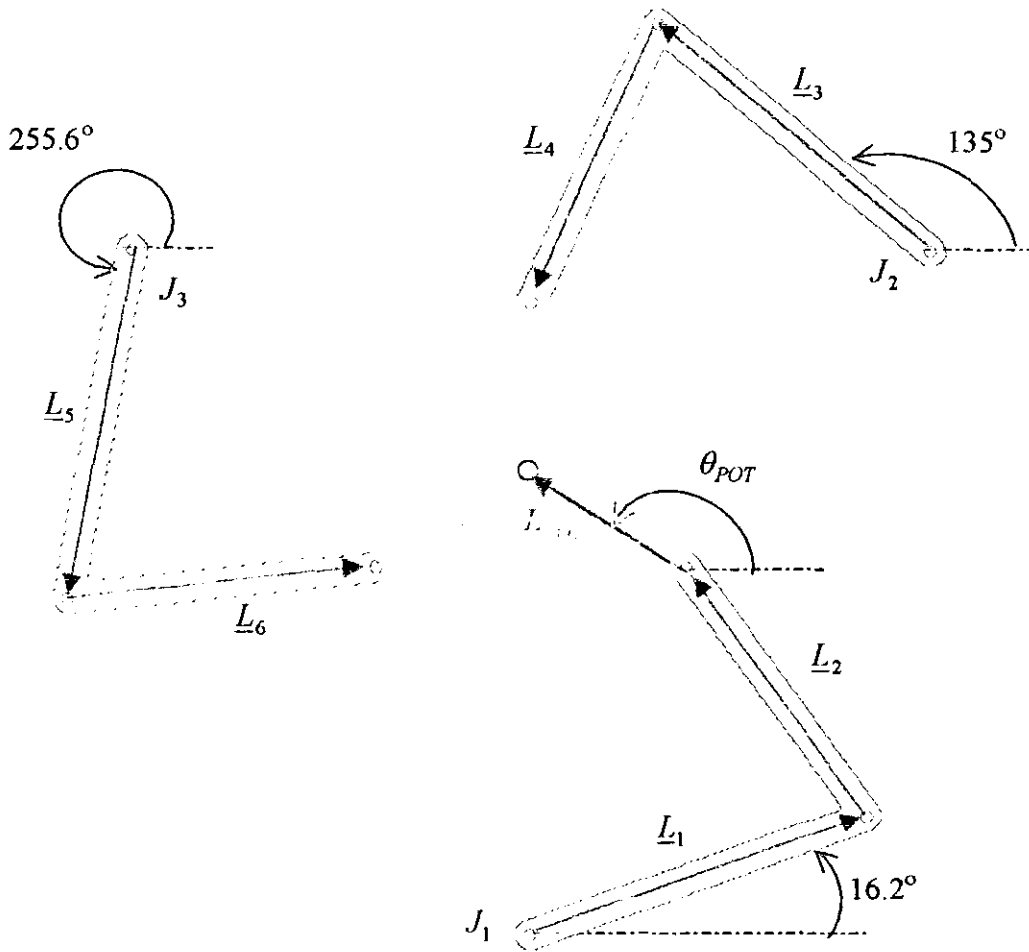


Figura 2.6. Posición de referencia o HOME.

Dicha configuración presenta la condición de colinealidad entre los eslabones conducidos y las caras de la plataforma *PL* mencionada previamente, por lo tanto, se considera como una posición límite o de agarrotamiento; como consecuencia, el movimiento de la estructura *RP* debe ser nulo. Esto último se cumple cuando a partir de esta posición, los tres actuadores operan de manera simultánea en sentido horario y con el mismo desplazamiento y tiempo de operación, esto es, con un movimiento de nomenclatura  ${}_{3[1,1]}^{(1,1,1)}G_{3,abc}^1$ . Si lo dicho se llega a cumplir, entonces, la integridad física del robot *RP* se verá afectada pues se generarían esfuerzos de tensión que podrían provocar una falla en sus articulaciones o juntas.

Tomando en cuenta estos hechos, la operación del robot manipulador RP motivo de nuestro estudio nunca deberá iniciar con el movimiento de operación

${}_{3[1,1]}^{(1,1)}G_{3,abc}^1$  a partir de la posición *Home* o de referencia.

## CAPÍTULO 3

### MODELACIÓN CINEMÁTICA DE POSICIONAMIENTO

**Introducción:** Presentaremos en este capítulo los modelos cinemáticos de posicionamiento asociados con el robot paralelo de movimiento plano de 3 grados de libertad (3GDL). Dos tipos de configuraciones son analizadas: 1) la configuración no deformada y, 2) la configuración deformada con las cuales plantearemos los problemas cinemáticos directos e inversos. La transformación  $\rho(p, \cdot): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida en el apéndice A, es utilizada para caracterizar las rotaciones rígidas en el plano. Finalmente las ecuaciones generadas son programadas en el paquete de cálculo formal Mathematica [35].

#### 3.1 Caracterización del Robot Paralelo

La estructura articulada que será objeto de estudio, consta de ocho eslabones rígidos (incluyendo la tierra del sistema) agrupados en tres cadenas cinemáticas independientes, como se muestra en la figura 3.1. La conexión entre dos eslabones es mediante una junta rotacional del tipo revolución (R).

El eslabón PL mostrado en la figura 3.1, es caracterizado mediante un triángulo equilátero y el punto  $P_{TOT} \in P_L$  localizado en el centroide será llamado "punto del órgano terminal". Los eslabones  $E_1, E_3, E_7$ , conectados por medio de las juntas  $J_1, J_3, J_7$  con la tierra  $T$  del sistema, serán llamadas "eslabones conductores". El multicuerpo en estudio será movido mediante tres actuadores  $(M_1, M_3, M_7)$

montados sobre las juntas  $J_1, J_3, J_7$ . Los eslabones  $E_2, E_4, E_6$  y  $P_L$  serán llamados "conducidos".

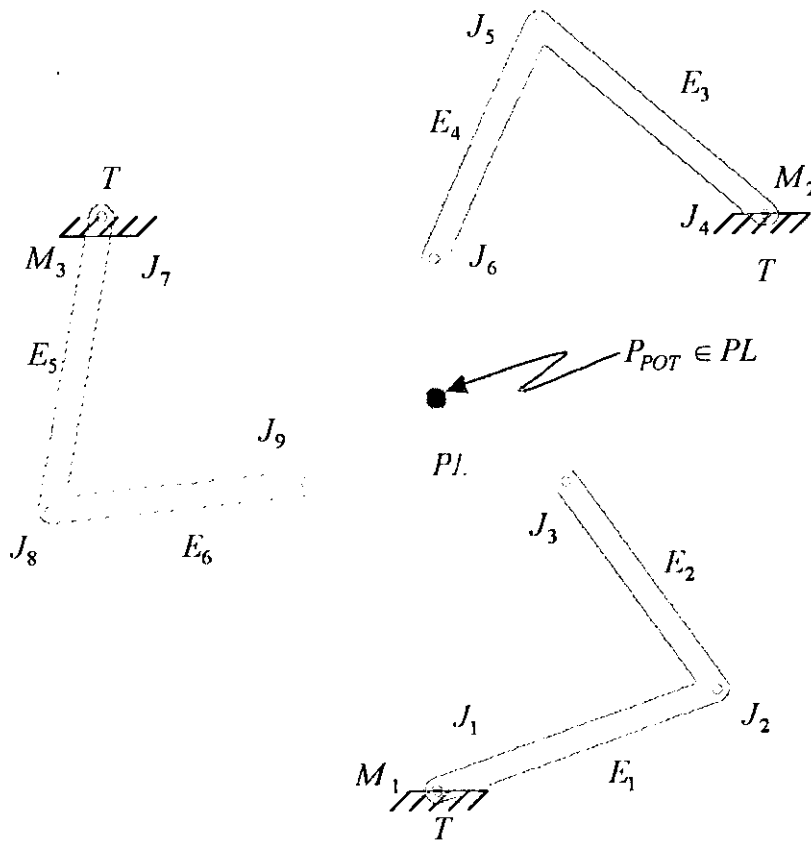


Figura 3.1. Elementos constitutivos del Robot Paralelo Plano.

Al fijar los elementos que componen al robot RP mostrado en la figura 3.1 es posible representar al multicuerpo en estudio a través de la unión siguiente:

$$RP = T Y E_1 Y E_2 Y P_L Y E_3 Y E_4 Y E_5 Y E_6 \quad (3.1)$$

o equivalentemente,

$$RP = CC_1 Y CC_2 Y CC_3 \quad (3.1a)$$

siendo  $CC_1, CC_2, CC_3$  cadenas cinemáticas independientes representadas por:

$$\begin{aligned}
 CC_1 &= T \cup E_1 \cup E_2 \cup P_L \\
 CC_2 &= T \cup E_3 \cup E_4 \cup P_L \\
 CC_3 &= T \cup E_5 \cup E_6 \cup P_L
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Por otro lado, el eslabón PL que conecta las cadenas cinemáticas se expresa a través de las intersecciones siguientes:

$$P_L = CC_1 \cap CC_2 \cap CC_3 \tag{3.3}$$

Finalmente las juntas rotacionales que integran al sistema se representan también en términos de intersecciones. Esto es:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= T \cap E_1 & J_2 &= E_1 \cap E_2 & J_3 &= E_1 \cap P_L \\
 J_4 &= T \cap E_3 & J_5 &= E_3 \cap E_4 & J_6 &= E_4 \cap P_L \\
 J_7 &= T \cap E_5 & J_8 &= E_5 \cap E_6 & J_9 &= E_6 \cap P_L
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

### 3.2 Análisis de la “configuración no deformada”

Una vez conocidos los elementos que conforman al robot RP, nuestro interés será centrado en el análisis de posición del punto  $P_{POT} \in PL$  localizado en el centroide de la plataforma PL desde el sistema de referencia (X,Y) mostrado en la figura 3.2. Sobre la plataforma y en el punto  $P_{POT} \in PL$  será montada una herramienta de trabajo que en este caso, estará obligada a describir una trayectoria en el plano (X,Y). La configuración del robot mostrada en la figura 3.2 será llamada “configuración no deformada”.

Sobre los eslabones que componen al robot RP se asocian vectores de posición  $\underline{L}_1, \underline{L}_2, \underline{L}_3, \underline{L}_4, \underline{L}_5, \underline{L}_6, \underline{L}_{39}, \underline{L}_{36}, \underline{L}_{POT}, \underline{L}_{14}, \underline{L}_{17} \in \mathfrak{R}^2$  los cuales, al fijar la configuración no deformada, se pueden expresar a través de las siguientes diferencias de puntos:

$$\begin{aligned}
 \underline{L}_1 &= P_{(2)} - P_{(1)} & \underline{L}_2 &= P_{(3)} - P_{(2)} & \underline{L}_3 &= P_{(4)} - P_{(5)} & \underline{L}_4 &= P_{(6)} - P_{(5)} \\
 \underline{L}_5 &= P_{(8)} - P_{(7)} & \underline{L}_6 &= P_{(9)} - P_{(8)} & \underline{L}_{39} &= P_{(9)} - P_{(8)} & \underline{L}_{36} &= P_{(6)} - P_{(3)} \\
 \underline{L}_{Pot} &= P_{OT} - P_{(3)} & \underline{L}_{14} &= P_{(4)} - P_{(1)} & \underline{L}_{17} &= P_{(7)} - P_{(1)}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

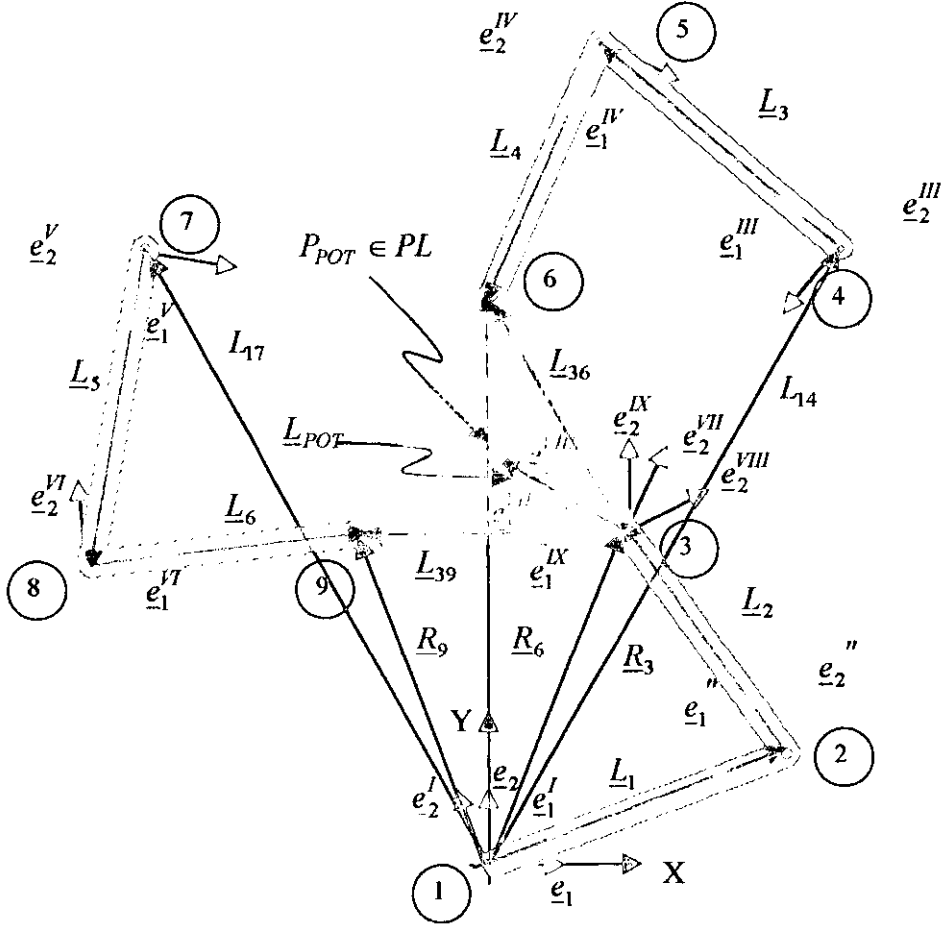


Figura 3.2. Esquemática de la configuración no deformada.

Las coordenadas del punto  $P_{POT} \in PL$  pueden ser localizadas desde el punto (1) a través de la siguiente expresión:

$$R_{POT} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_{Pot}
 \tag{3.6}$$

Sin embargo, la ecuación (3.6) carece de la información de las cadenas cinemáticas  $CC_2$  y  $CC_3$ . El siguiente enunciado será fundamental para el desarrollo de este trabajo.

Puesto que la característica geométrica del eslabón  $PL$  es un triángulo y su centroide está localizado en el punto  $P_{POT} \in PL$ , entonces, los problemas siguientes se satisfacen:

- 1) Dados  $\underline{R}_{POT} \in \mathfrak{R}^2, \theta_{POT} \in \mathfrak{R}$  y  $l_{POT}, l_{36}, l_{39} \in \mathfrak{R}^+$ , encuentre  $\underline{R}_3, \underline{R}_6, \underline{R}_9 \in \mathfrak{R}^2$  tal que las expresiones siguientes se satisfagan:

$$\begin{aligned} \underline{R}_3 &= (R_{(3)X}, R_{(3)Y}) = (X_{POT} - l_{POT} \text{Cos} \theta_{POT}, Y_{POT} - l_{POT} \text{Sen} \theta_{POT}) \\ \underline{R}_6 &= (R_{(6)X}, R_{(6)Y}) = (P_{(3)X} + l_{36} \text{Cos}(\theta_{POT} - \beta_{PL}), P_{(3)Y} + l_{36} \text{Sen}(\theta_{POT} - \beta_{PL})) \\ \underline{R}_9 &= (R_{(9)X}, R_{(9)Y}) = (P_{(3)X} + l_{39} \text{Cos}(\theta_{POT} + \beta_{PL}), P_{(3)Y} + l_{39} \text{Sen}(\theta_{POT} + \beta_{PL})) \end{aligned} \quad (3.7)$$

- 2) Dados  $\underline{R}_3, \underline{R}_6, \underline{R}_9 \in \mathfrak{R}^2$ , encuentre  $\underline{R}_{POT} \in \mathfrak{R}^2, \theta_{POT} \in \mathfrak{R}$  tal que (3.7) sea satisfecha.

Aquí,  $\underline{R}_{POT} = (X_{POT}, Y_{POT})$  es el vector de posición definido del punto  $P_{POT} \in PL$  al punto (1),  $\underline{R}_3 = P_{(3)} - P_{(1)}, \underline{R}_6 = P_{(6)} - P_{(1)}, \underline{R}_9 = P_{(9)} - P_{(1)}$  son vectores que localizan los puntos (3), (6) y (9) sobre  $PL$  y  $l_{POT}, l_{36}, l_{39} \in \mathfrak{R}^+$  son las dimensiones asociadas con los vectores  $\underline{L}_{POT}, \underline{L}_{36}, \underline{L}_{39} \in \mathfrak{R}^2$ , respectivamente, y  $\theta_{POT} \in \mathfrak{R}$  es el desplazamiento angular de la plataforma  $PL$ .

Observemos que la geometría de  $PL$  permite determinar las coordenadas del punto  $P_{POT} \in PL$  y el ángulo  $\theta_{POT} \in \mathfrak{R}$  conociendo las posiciones (3), (6), (9) localizadas en la plataforma  $PL$ . De forma recíproca se determinan las coordenadas de los puntos (3), (6), (9) conociendo las coordenadas del punto  $P_{POT} \in PL$  y el ángulo  $\theta_{POT} \in \mathfrak{R}$ . Los puntos (3), (6) y (9) se pueden localizar desde el punto (1) a través de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \underline{R}_3 &= \underline{L}_1 + \underline{L}_2 \\ \underline{R}_6 &= \underline{L}_{14} + \underline{L}_3 + \underline{L}_4 \\ \underline{R}_9 &= \underline{L}_{17} + \underline{L}_5 + \underline{L}_6 \end{aligned} \quad (3.8)$$



Los vectores de posición definidos sobre los eslabones que componen el robot RP, pueden ser representados en términos de las bases locales  $\underline{e}'_j = \{ \underline{e}'_1, \underline{e}'_2 \}$ ,  $i = 1, \dots, 9$  montadas en cada eslabón. Esto es:

$$\begin{aligned} \underline{L}_1 &= l_1 \bullet \underline{e}'_1^I & ; & & \underline{L}_2 &= l_2 \bullet \underline{e}'_1^{II} & ; & & \underline{L}_3 &= l_3 \bullet \underline{e}'_1^{III} & ; & & \underline{L}_4 &= l_4 \bullet \underline{e}'_1^{IV} \\ \underline{L}_5 &= l_5 \bullet \underline{e}'_1^V & ; & & \underline{L}_6 &= l_6 \bullet \underline{e}'_1^{VI} & ; & & \underline{L}_{POT} &= l_{POT} \bullet \underline{e}'_1^{VII} & ; & & \underline{L}_{36} &= l_{36} \bullet \underline{e}'_1^{VIII} \\ \underline{L}_{39} &= l_{39} \bullet \underline{e}'_1^{IX} & ; & & \underline{L}_{14} &= l_{14} \bullet \underline{e}_1 & ; & & \underline{L}_{17} &= l_{17} \bullet \underline{e}_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aquí,  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_{63}, l_{93}, l_{POT}, l_{14}, l_{17} \in \mathfrak{R}^+$  son las dimensiones de los eslabones,  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_1^{II}, \underline{e}'_1^{III}, \underline{e}'_1^{IV}, \underline{e}'_1^V, \underline{e}'_1^{VI}, \underline{e}'_1^{VII}, \underline{e}'_1^{VIII}, \underline{e}'_1^{IX} \in \mathfrak{R}^2$  son las componentes de las bases móviles (locales) dirigidas a lo largo de cada vector, en tanto  $\underline{e}_1$  es la componente de la base inercial fija mostrada en la figura 3.2.

Las expresiones (3.8) pueden ser escritas en términos de las bases móviles. Esto es:

$$\begin{aligned} \underline{R}_3 &= l_1 \bullet \underline{e}'_1^I + l_2 \bullet \underline{e}'_1^{II} \\ \underline{R}_6 &= l_{14} \bullet \underline{e}_1 + l_3 \bullet \underline{e}'_1^{III} + l_4 \bullet \underline{e}'_1^{IV} \\ \underline{R}_9 &= l_{17} \bullet \underline{e}_1 + l_5 \bullet \underline{e}'_1^V + l_6 \bullet \underline{e}'_1^{VI} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por otro lado, de acuerdo a [33] y [34] las bases móviles del sistema pueden ser expresados en términos de complejos unitarios y bajo la transformación lineal  $\rho(p, \cdot): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{e}'_1^I &= \rho(p, \underline{e}_1) = p \bullet \underline{e}_1 & \underline{e}'_1^{VI} &= \rho(u, \underline{e}_1) = u \bullet \underline{e}_1 \\ \underline{e}'_1^{II} &= \rho(q, \underline{e}_1) = q \bullet \underline{e}_1 & \underline{e}'_1^{VII} &= \rho(v, \underline{e}_1) = v \bullet \underline{e}_1 \\ \underline{e}'_1^{III} &= \rho(r, \underline{e}_1) = r \bullet \underline{e}_1 & \underline{e}'_1^{VIII} &= \rho(m, \underline{e}_1) = m \bullet \underline{e}_1 \\ \underline{e}'_1^{IV} &= \rho(s, \underline{e}_1) = s \bullet \underline{e}_1 & \underline{e}'_1^{IX} &= \rho(n, \underline{e}_1) = n \bullet \underline{e}_1 \\ \underline{e}'_1^V &= \rho(t, \underline{e}_1) = t \bullet \underline{e}_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aquí,  $p, q, r, s, t, u, v, m, n \in \mathfrak{R}^2$  son números complejos. La forma paramétrica de los complejos asociados con las rotaciones de cada eslabón se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 p &= \{p_0, p_1\}; & p_0 &= C\theta_1; & p_1 &= \pm S\theta_1 \cdot \underline{e}_3 \\
 q &= \{q_0, q_1\}; & q_0 &= C\theta_2; & q_1 &= \pm S\theta_2 \cdot \underline{e}_3 \\
 r &= \{r_0, r_1\}; & r_0 &= C\theta; & r_1 &= \pm S\theta_3 \cdot \underline{e}_3 \\
 s &= \{s_0, s_1\}; & s_0 &= C\theta_4; & s_1 &= \pm S\theta_4 \cdot \underline{e}_3 \\
 t &= \{t_0, t_1\}; & t_0 &= C\theta_5; & t_1 &= \pm S\theta_5 \cdot \underline{e}_3 \\
 u &= \{u_0, u_1\}; & u_0 &= C\theta_6; & u_1 &= \pm S\theta_6 \cdot \underline{e}_3 \\
 v &= \{v_0, v_1\}; & v_0 &= C\theta_7; & v_1 &= \pm S\theta_7 \cdot \underline{e}_3 \\
 m &= \{m_0, m_1\}; & m_0 &= C\theta_8; & m_1 &= \pm S\theta_8 \cdot \underline{e}_3 \\
 n &= \{n_0, n_1\}; & n_0 &= C\theta_{POT}; & n_1 &= \pm S\theta_{POT} \cdot \underline{e}_3
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Los desplazamientos angulares  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8, \theta_{POT} \in \mathfrak{R}$  se observan en la figura 3.3. La componente  $\underline{e}_3$  define el eje de rotación, pues  $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$ . Luego, las expresiones (3.10) se plantean en términos de la base inercial (canónica) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \underline{R}_3 &= l_1 \cdot \{p * \underline{e}_1\} + l_2 \cdot \{q * \underline{e}_1\} \\
 \underline{R}_6 &= l_{14} \cdot \{I * \underline{e}_1\} + l_3 \cdot \{r * \underline{e}_1\} + l_4 \cdot \{s * \underline{e}_1\} \\
 \underline{R}_9 &= l_{17} \cdot \{I * \underline{e}_1\} + l_5 \cdot \{t * \underline{e}_1\} + l_6 \cdot \{u * \underline{e}_1\}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

El complejo  $I \in \mathfrak{R}^2$  es la identidad. Al utilizar complejos de norma unitaria, esto es:

$$\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = \|t\| = \|u\| = \|v\| = \|m\| = \|n\| = 1 \tag{3.14}$$

se obtienen las ecuaciones que gobiernan la posición del multicuerpo en estudio en la configuración no deformada. Para este tipo de robots, el problema cinemático inverso se plantea de la forma siguiente: "conocidas las coordenadas

del punto  $P_{POT} \in PL$  y  $\theta_{POT} \in \mathfrak{R}$  encuéntrese los desplazamientos angulares de los eslabones conductores y conducidos". A continuación daremos una expresión formal del problema cinemático inverso.

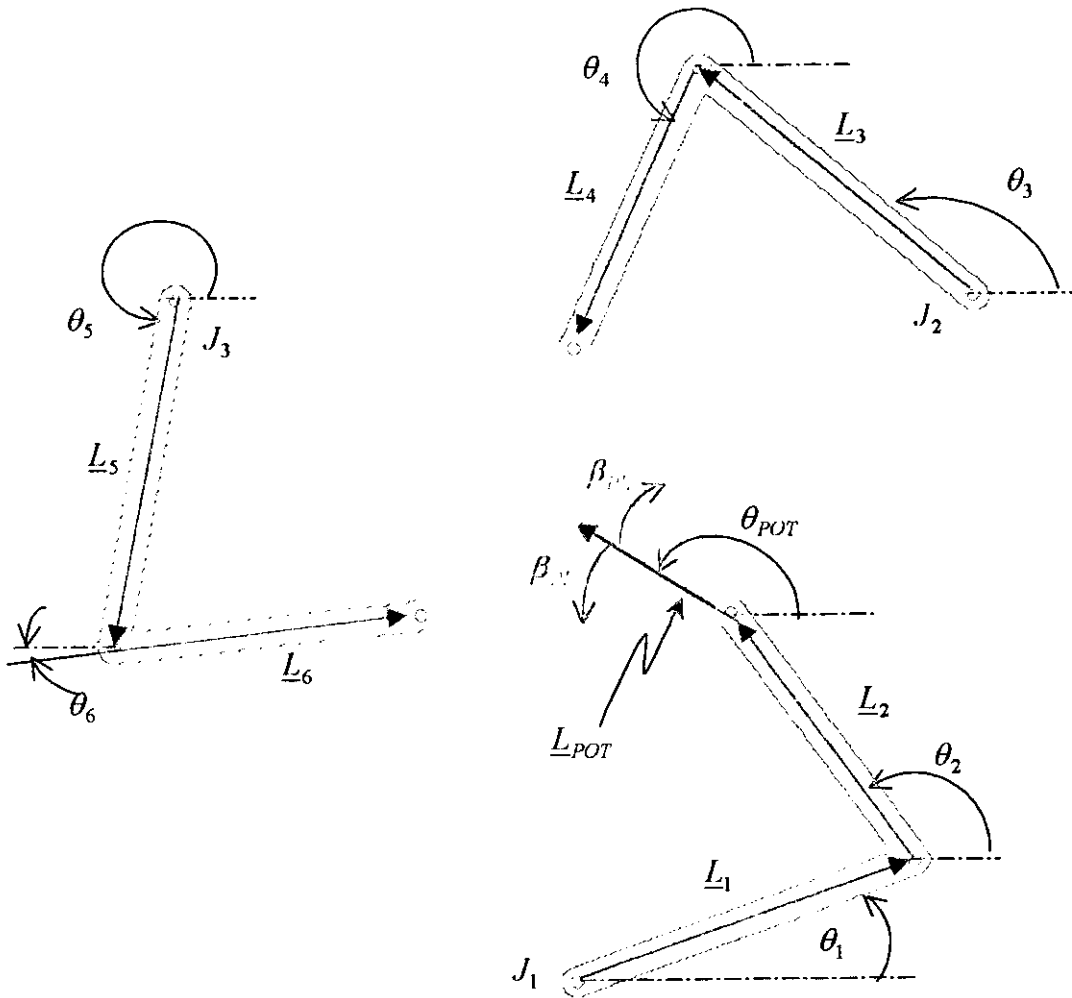


Figura 3.3. Esquemmatización de los desplazamientos angulares.

### 3.2.1 Planteamiento del problema Cinemático Inverso en la "configuración no deformada".

En esta sección será formulado un problema de fundamental importancia asociado con la configuración que guarda el multicuerpo RP mostrada en la figura 3.2. Esto es:

Dados,  $\underline{R}_3, \underline{R}_6, \underline{R}_9 \in \mathfrak{R}^2$ ,  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_{63}, l_{93}, l_{POT}, l_{14}, l_{17} \in \mathfrak{R}^+$  encuentre:  $p = \{p_0, p_1$   
 $q = \{q_0, q_1\}, r = \{r_0, r_1\}, s = \{s_0, s_1\}, t = \{t_0, t_1\}, u = \{u_0, u_1$  tal que (3.12) sean satisfecha y,

$$\begin{aligned} p_0^2 + p_1^2 &= 1 & q_0^2 + q_1^2 &= 1 \\ r_0^2 + r_1^2 &= 1 & s_0^2 + s_1^2 &= 1 \\ t_0^2 + t_1^2 &= 1 & u_0^2 + u_1^2 &= 1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

El problema de la cinemática inversa consiste en resolver un sistema de 12 ecuaciones algebraicas, polinomiales no lineales y 12 incógnitas.

### 3.3 Parámetros asociados a las cadenas cinemáticas que componen al robot RP

En esta sección se presenta una tabla que contiene la información paramétrica del problema cinemático inverso. Dicha tabla será de utilidad para programar y simular las ecuaciones que gobiernan al robot RP. A continuación se particiona el problema cinemático inverso en términos de las cadenas cinemáticas asociadas al robot RP con el propósito de clarificar y sistematizar la programación del modelo:

**Tabla 3.1 Parámetros asociados a la cinemática inversa.**

	Eslabones		Dimensiones	Datos	Incógnitas	No. Ec.	Desp. Ang.
$CC_1$	$E_1 \dagger$	$E_2^{**}$	$l_1, l_2$	$\underline{R}_3^*$	$p_0, p_1$ $q_0, q_1$	4	$\theta_1, \theta_2$
$CC_2$	$E_3 \dagger$	$E_4^{**}$	$l_4, l_3, l_4$	$\underline{R}_6^*$	$r_0, r_1$ $s_0, s_1$	4	$\theta_3, \theta_4$
$CC_3$	$E_5 \dagger$	$E_6^{**}$	$l_{17}, l_5, l_6$	$\underline{R}_9^*$	$t_0, t_1$ $u_0, u_1$	4	$\theta_5, \theta_6$

$\dagger$  Conductor.  $**$  Conducido.  $*$  En función de la hipótesis 1.

**Cadena CC1**

Dados  $\underline{R}_3 \in \mathfrak{R}^2, l_1, l_2 \in \mathfrak{R}^+$ , encuentre  $p = \{p_0, p_1\}, q = \{q_0, q_1\}$  tal que:

$$\underline{R}_3 = l_1 \bullet \{p * \underline{e}_1\} + l_2 \bullet \{q * \underline{e}_1\}$$

$$p_0^2 + p_1^2 = 1$$

$$q_0^2 + q_1^2 = 1$$

sean satisfechas.

**Cadena CC2**

Dados  $\underline{R}_6 \in \mathfrak{R}^2, l_{14}, l_3, l_4 \in \mathfrak{R}^+$ , encuentre  $r = \{r_0, r_1\}, s = \{s_0, s_1\}$  tal que:

$$\underline{R}_6 = l_{14} \bullet \{I * \underline{e}_1\} + l_3 \bullet \{r * \underline{e}_1\} + l_4 \bullet \{s * \underline{e}_1\}$$

$$r_0^2 + r_1^2 = 1$$

$$s_0^2 + s_1^2 = 1$$

sean satisfechas.

**Cadena CC3**

Dados  $\underline{R}_9 \in \mathfrak{R}^2, l_{17}, l_5, l_6 \in \mathfrak{R}^+$ , encuentre  $t = \{t_0, t_1\}, u = \{u_0, u_1\}$  tal que:

$$\underline{R}_9 = l_{17} \bullet \{I * \underline{e}_1\} + l_5 \bullet \{t * \underline{e}_1\} + l_6 \bullet \{u * \underline{e}_1\}$$

$$t_0^2 + t_1^2 = 1$$

$$u_0^2 + u_1^2 = 1$$

sean satisfechas.

### 3.4 Caracterización y planteamiento del problema Cinemático Directo en la “configuración no deformada”

Presentaremos en esta sección el análisis correspondiente al problema cinemático directo asociado a la configuración que guarda el robot RP mostrado en la figura 3.2. El problema cinemático directo puede interpretarse en forma general de la manera siguiente: “conocidos los desplazamientos angulares de los eslabones conductores, encuéntrase la posición del punto  $P_{POT} \in PL$  y la orientación  $X = \{x_0, x_1\} \in \mathfrak{R}^2$  de la plataforma”. Las ecuaciones que gobiernan el problema inverso no pueden ser consideradas, pues se obtendría un sistema de 9 ecuaciones con 12 incógnitas, esto es: 6 ecuaciones escalares de (3.12) y 3 de norma unitaria ( $q_0^2 + q_1^2 = 1$ ,  $s_0^2 + s_1^2 = 1$ ,  $u_0^2 + u_1^2 = 1$ ), en tanto las incógnitas son:  $\underline{R}_3, \underline{R}_6, \underline{R}_9 \in \mathfrak{R}^2$ ,  $q = \{q_0, q_1\}$ ,  $s = \{s_0, s_1\}$ ,  $u = \{u_0, u_1\}$ . Es necesario por un lado, construir nuevas ecuaciones que permitan plantear el problema cinemático directo, y por otro, obtener un sistema cuadrado de ecuaciones e incógnitas.

Al ser incógnitas los desplazamientos angulares de los eslabones conducidos ( $E_2, E_4, E_6$ ) y el asociado con la plataforma  $PL$ , es preciso señalar que las ecuaciones obtenidas (una vez realizado el análisis) deben integrar tales desplazamientos. Notemos de la figura 3.3 que el complejo  $v = \{v_0, v_1\}$  puede ser expresado en términos de los complejos  $m = \{m_0, m_1\}$ ,  $n = \{n_0, n_1\}$  los cuales, están asociados a las bases móviles  $\underline{e}_j^{III}, \underline{e}_j^{IX} \in \mathfrak{R}^2$  por la geometría de la plataforma, ya que, estas bases son rotaciones de la base  $\underline{e}_j^{VI} \in \mathfrak{R}^2$ .

Obsérvese de la figura 3.4 que hemos seleccionado el punto (3) con el propósito de generar las ecuaciones que nos serán de utilidad para plantear el problema cinemático directo. Las expresiones siguientes están asociadas con la posición del punto (3):

$$\underline{R}_3 = \underline{L}_{14} + \underline{L}_3 + \underline{L}_4 - \underline{L}_{36} \tag{3.16a}$$

$$\underline{R}_3 = \underline{L}_{17} + \underline{L}_5 + \underline{L}_6 - \underline{L}_{39}$$

o en forma equivalente:

$$\underline{L}_{14} + \underline{L}_3 + \underline{L}_4 - (\underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_{36}) = 0 \tag{3.16b}$$

$$\underline{L}_{17} + \underline{L}_5 + \underline{L}_6 - (\underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_{39}) = 0$$

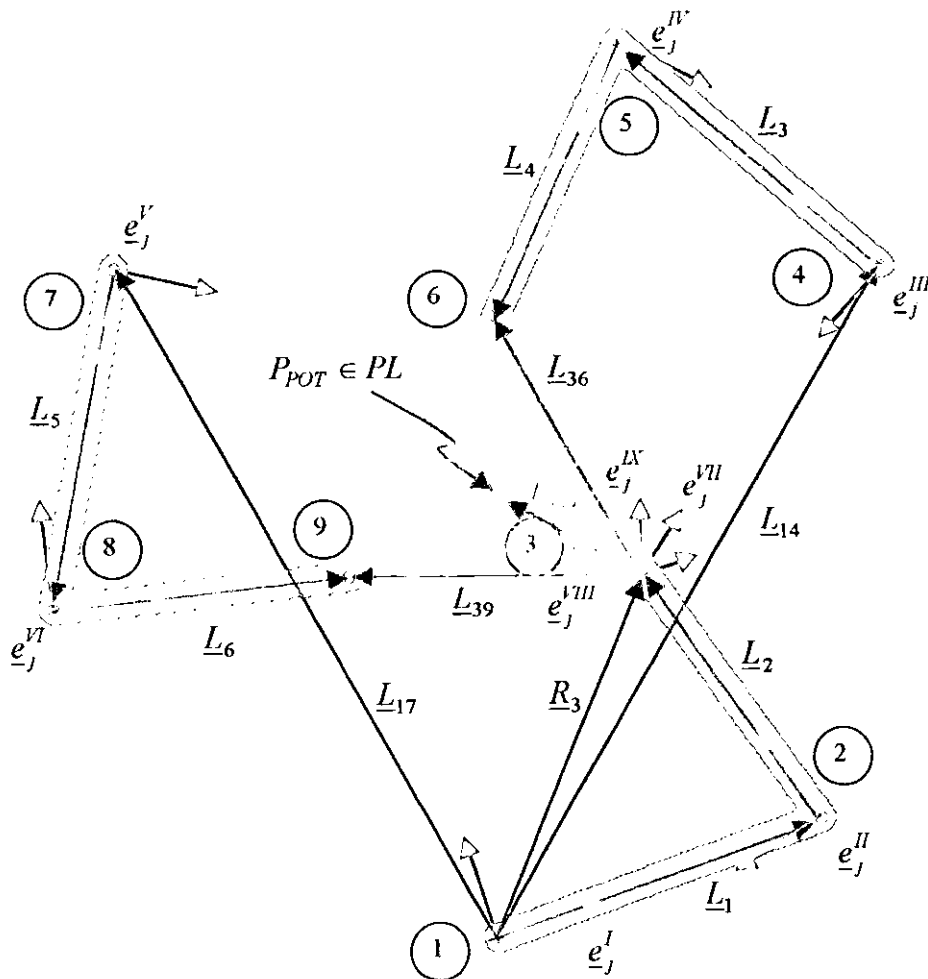


Figura 3.4. Definición de vectores para el análisis del problema cinemático directo.

Las ecuaciones (3.16a) son comunmente conocidas como "ecuaciones de lazo". En términos de las bases locales las expresiones (3.16a) adquieren la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 l_{14} \bullet \underline{e}_1 + l_3 \bullet \underline{e}_1^{III} + l_4 \bullet \underline{e}_1^{IV} - (l_1 \bullet \underline{e}_1^I + l_2 \bullet \underline{e}_1^{II} + l_{36} \bullet \underline{e}_1^{VIII}) &= 0 \\
 l_{17} \bullet \underline{e}_1 + l_5 \bullet \underline{e}_1^V + l_6 \bullet \underline{e}_1^VI - (l_1 \bullet \underline{e}_1^I + l_2 \bullet \underline{e}_1^{II} + l_{39} \bullet \underline{e}_1^{IX}) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Nótese de (3.17) que están incluidos todos los desplazamientos angulares asociados con las rotaciones de los eslabones del robot RP.

En términos de la base inercial fija, las ecuaciones (3.17) se escriben en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 l_{14} \bullet \{I^* \underline{e}_1\} + l_3 \bullet \{r^* \underline{e}_1\} + l_4 \bullet \{s^* \underline{e}_1\} - (l_1 \bullet \{p^* \underline{e}_1\} + l_2 \bullet \{q^* \underline{e}_1\} - l_{36} \bullet \{m^* \underline{e}_1\}) &= 0 \\
 l_{17} \bullet \{I^* \underline{e}_1\} + l_5 \bullet \{t^* \underline{e}_1\} + l_6 \bullet \{u^* \underline{e}_1\} - (l_1 \bullet \{p^* \underline{e}_1\} + l_2 \bullet \{q^* \underline{e}_1\} - l_{39} \bullet \{n^* \underline{e}_1\}) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

De la última ecuación de lazo podemos concluir que,  $m = n$ , pues son rotaciones de las base  $\underline{e}_1^{VIII}$  sobre los vectores  $\underline{L}_{39}$  y  $\underline{L}_{36}$  definidas sobre la plataforma y, para este caso, por simetría el complejo  $m = n$ . Con estas ideas y tomando en cuenta que,

$$\|p\| = \|r\| = \|t\| = 1
 \tag{3.19}$$

a continuación se plantea el problema cinemático directo asociado con la configuración que guarda el robot, mostrada en la figura 3.4.



### 3.4.1 Problema Cinemático Directo

Dados  $p = \{p_0, p_1\}$ ,  $r = \{r_0, r_1\}$ ,  $t = \{t_0, t_1\}$  con  $\|p\| = \|r\| = \|t\| = 1$ ,  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_{63}, l_{93}, l_{POT}$ ,  $l_{14}, l_{17} \in \mathfrak{R}^+$  encuentre:  $R_{POT} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $m = \{m_0, m_1\}$ ,  $q = \{q_0, q_1\}$ ,  $s = \{s_0, s_1\}$ ,  $v = \{v_0, v_1\}$  tal que (3.18) sea satisfecha y,

$$\begin{aligned} R_3 &= l_1 \cdot \{p * e_1\} + l_2 \cdot \{q * e_1\} + l_{POT} \cdot \{m * e_1\} \\ q_0^2 + q_1^2 &= 1 \\ s_0^2 + s_1^2 &= 1 \\ u_0^2 + u_1^2 &= 1 \\ z_0^2 + z_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

El problema cinemático directo genera un sistema de 10 ecuaciones no lineales del tipo polinomial y 10 incógnitas.

En el apéndice C se muestran los programas hechos en *Mathematica* [35] de los problemas cinemáticos directos e inversos asociados a la "configuración no deformada".

### 3.5 Planteamiento de las ecuaciones de posición en la "configuración deformada"

En esta sección, analizaremos el caso en el cual el multicuerpo ha sido movido de la posición no deformada a través de rotaciones rígidas sucesivas de sus eslabones  $E_1, E_3, E_5$ . La configuración así obtenida será llamada "configuración deformada". El objetivo ahora consiste en determinar el lugar geométrico  $X_{POT} \in PL$  y la nueva orientación de la plataforma  $PL$  mostrada en la figura 3.5 desde la base inercial localizada en el punto  $P_1 \in T \cap E_1$ .

Note de la figura 3.4 que las ecuaciones que determinan las coordenadas del lugar geométrico  $X_{POT} \in PL$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} \underline{R}_3 &= \underline{L}'_1 + \underline{L}'_2 \\ \underline{R}_6 &= \underline{L}'_{14} + \underline{L}'_3 + \underline{L}'_4 \\ \underline{R}_9 &= \underline{L}'_{17} + \underline{L}'_5 + \underline{L}'_6 \end{aligned} \tag{3.20}$$

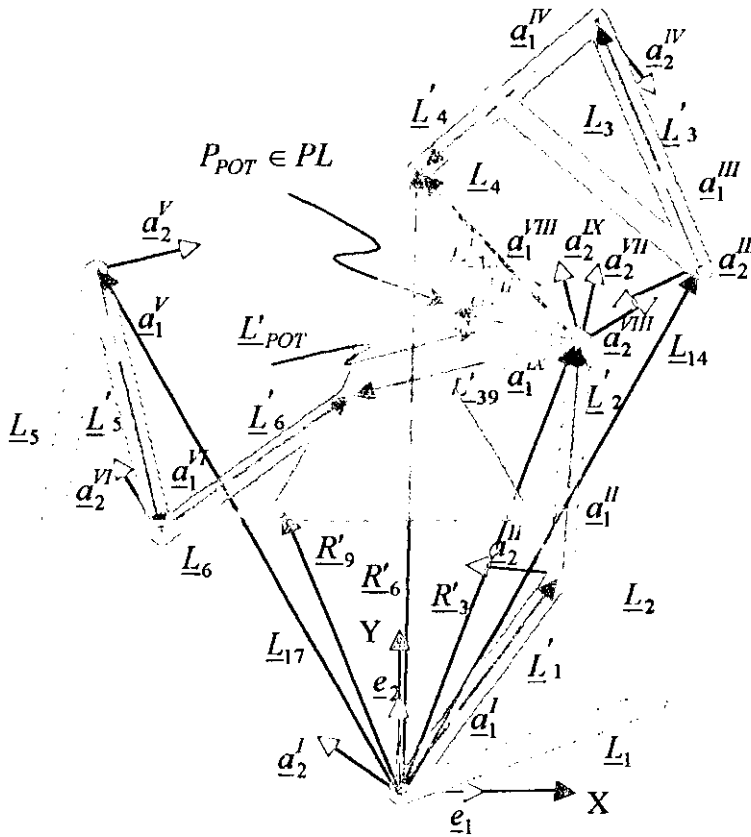


Figura 3.5. Configuración deformada.

Los vectores  $\underline{R}'_3, \underline{R}'_6, \underline{R}'_9, \underline{L}'_1, \underline{L}'_2, \underline{L}'_{14}, \underline{L}'_3, \underline{L}'_4, \underline{L}'_{17}, \underline{L}'_5, \underline{L}'_6$  serán llamados "deformados". En términos de las bases móviles deformadas  $\underline{a}'_j = \{a'_1, a'_2\}$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , los vectores de posición toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \underline{L}'_1 &= l_1 \cdot \underline{a}'_1 & \underline{L}'_2 &= l_2 \cdot \underline{a}''_1 & \underline{L}'_3 &= l_3 \cdot \underline{a}'''_1 & \underline{L}'_{39} &= l_{39} \cdot \underline{a}^{VII}'_1 \\
 \underline{L}'_4 &= l_4 \cdot \underline{a}^{IV}'_1 & \underline{L}'_5 &= l_5 \cdot \underline{a}^V'_1 & \underline{L}'_6 &= l_6 \cdot \underline{a}^{VI}'_1 & \underline{L}'_{36} &= l_{36} \cdot \underline{a}^{VIII}'_1 \\
 \underline{L}'_{14} &= l_{14} \cdot \underline{e}_1 & \underline{L}'_{17} &= l_{17} \cdot \underline{e}_1 & \underline{L}'_{POT} &= l_{POT} \cdot \underline{a}^{IX}'_1
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Por tanto, las ecuaciones (3.20) pueden ser escritas en términos de las bases móviles deformadas, esto es:

$$\begin{aligned}
 \underline{R}'_3 &= l_1 \cdot \underline{a}'_1 + l_2 \cdot \underline{a}''_1 \\
 \underline{R}'_6 &= l_{14} \cdot \underline{e}_1 + l_3 \cdot \underline{a}'''_1 + l_4 \cdot \underline{a}^{IV}'_1 \\
 \underline{R}'_9 &= l_{17} \cdot \underline{e}_1 + l_5 \cdot \underline{a}^V'_1 + l_6 \cdot \underline{a}^{VI}'_1
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Las bases móviles deformadas se escriben en términos de complejos unitarios, esto es:

$$\begin{aligned}
 \underline{a}'_1 &= \rho(P, \underline{e}'_1) = \rho(P, \rho(p, \underline{e}_1)) = P * p * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}''_1 &= \rho(Q, \underline{e}''_1) = \rho(Q, \rho(q, \underline{e}_1)) = Q * q * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}'''_1 &= \rho(R, \underline{e}'''_1) = \rho(R, \rho(r, \underline{e}_1)) = R * r * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}^{IV}'_1 &= \rho(S, \underline{e}^{IV}'_1) = \rho(S, \rho(s, \underline{e}_1)) = S * s * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}^V'_1 &= \rho(T, \underline{e}^V'_1) = \rho(T, \rho(t, \underline{e}_1)) = T * t * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}^{VI}'_1 &= \rho(U, \underline{e}^{VI}'_1) = \rho(U, \rho(u, \underline{e}_1)) = U * u * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}^{VII}'_1 &= \rho(V, \underline{e}^{VII}'_1) = \rho(V, \rho(v, \underline{e}_1)) = V * v * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}^{VIII}'_1 &= \rho(M, \underline{e}^{VIII}'_1) = \rho(M, \rho(m, \underline{e}_1)) = M * m * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}^{IX}'_1 &= \rho(N, \underline{e}^{IX}'_1) = \rho(N, \rho(n, \underline{e}_1)) = N * n * \underline{e}_1
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Aquí,  $P, Q, R, S, T, U, V, M, N \in \mathfrak{R}^2$  son complejos asociados a la configuración deformada y están definidos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 P &= \{P_0, P_1\}; & P_0 &= \text{Cos}\alpha_1; & P_1 &= \pm \text{Sen}\alpha \bullet \underline{e}_{31} \\
 Q &= \{Q_0, Q_1\}; & Q_0 &= \text{Cos}\alpha_2; & Q_1 &= \pm \text{Sen}\alpha_2 \bullet \underline{e}_3 \\
 R &= \{R_0, R_1\}; & R_0 &= \text{Cos}\alpha_3; & R_1 &= \pm \text{Sen}\alpha \bullet \underline{e}_{33} \\
 S &= \{S_0, S_1\}; & S_0 &= \text{Cos}\alpha_4; & S_1 &= \pm \text{Sen}\alpha \bullet \underline{e}_{34} \\
 T &= \{T_0, T_1\}; & T_0 &= \text{Cos}\alpha_5; & T_1 &= \pm \text{Sen}\alpha_5 \bullet \underline{e}_3 \\
 U &= \{U_0, U_1\}; & U_0 &= \text{Cos}\alpha_6; & U_1 &= \pm \text{Sen}\alpha_6 \bullet \underline{e}_3 \\
 V &= \{V_0, V_1\}; & V_0 &= \text{Cos}\alpha_7; & V_1 &= \pm \text{Sen}\alpha_7 \bullet \underline{e}_3 \\
 M &= \{M_0, M_1\}; & M_0 &= \text{Cos}\alpha_8; & M_1 &= \pm \text{Sen}\alpha_8 \bullet \underline{e}_3 \\
 N &= \{N_0, N_1\}; & N_0 &= \text{Cos}\alpha_9; & N_1 &= \pm \text{Sen}\alpha_9 \bullet \underline{e}_3
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Las expresiones (3.22) pueden ser escritas en términos de la base inercial, esto es:

$$\begin{aligned}
 R_3' &= l_1 \bullet \{P^* p^* \underline{e}_1\} + l_2 \bullet \{Q^* q^* \underline{e}_1\} \\
 R_6' &= l_{14} \bullet \{J^* \underline{e}_1\} + l_3 \bullet \{R^* r^* \underline{e}_1\} + l_4 \bullet \{S^* s^* \underline{e}_1\} \\
 R_9' &= l_{17} \bullet \{I^* \underline{e}_1\} + l_5 \bullet \{T^* t^* \underline{e}_1\} + l_6 \bullet \{U^* u^* \underline{e}_1\}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Al considerar que  $\|P\| = \|Q\| = \|R\| = \|S\| = \|T\| = \|U\| = \|V\| = \|M\| = \|N\| = 1$ , se obtienen las ecuaciones que gobiernan el problema cinemático inverso asociado con la configuración deformada. Notemos que para este análisis, la hipótesis 1 debe ser aplicada.

### 3.5.1 Planteamiento del problema Cinemático Inverso en la “configuración deformada”

Dados,  $\underline{R}_3', \underline{R}_6', \underline{R}_9' \in \mathfrak{R}^2, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_{14}, l_{17} \in \mathfrak{R}^+, p = \{p_0, p_1\}, q = \{q_0, q_1\}, r = \{r_0, r_1\}, s = \{s_0, s_1\}, t = \{t_0, t_1\}, u = \{u_0, u_1\}$  con  $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = \|t\| = \|u\| = \|v\| = \|m\| = \|n\| = 1$ , encuéntrese  $P = \{P_0, P_1\}, Q = \{Q_0, Q_1\}, R = \{R_0, R_1\}, S = \{S_0, S_1\}, T = \{T_0, T_1\}, U = \{U_0, U_1\}$  tal que, (3.25) sea satisfecha y,

$$\begin{aligned}
 P_0^2 + P_1^2 = 1 \quad Q_0^2 + Q_1^2 = 1 \\
 R_0^2 + R_1^2 = 1 \quad S_0^2 + S_1^2 = 1 \\
 T_0^2 + T_1^2 = 1 \quad U_0^2 + U_1^2 = 1
 \end{aligned}$$

El problema cinemático inverso asociado con la configuración deformada, genera un sistema de 12 ecuaciones no lineales de tipo polinomial y 12 incógnitas.

**Observación.** Note del planteamiento del problema cinemático inverso que, los vectores  $\underline{R}_3', \underline{R}_6', \underline{R}_9' \in \mathbb{R}^2$  están dados en función de  $(X_{POT}, Y_{POT})$ .

### 3.5.2 Parámetros cinemáticos de la “configuración deformada”

En esta sección presentaremos los parámetros cinemáticos asociados al problema cinemático inverso definido en la configuración deformada mostrada en la figura 3.5.

**Tabla 3.3** Parámetros asociados a la cinemática inversa, configuración deformada.

	Eslabones		Dimensiones	Datos	Incógnitas	No. Ec.	Desp. Ang.
$CC_1$	$E_1 \dagger$	$E_2^{**}$	$l_1, l_2$	$\underline{R}_3^*$	$p_0, p_1$ $q_0, q_1$	4	$\alpha_1, \alpha_2$
$CC_2$	$E_3 \dagger$	$E_4^{**}$	$l_4, l_3, l_4$	$\underline{R}_6^*$	$r_0, r_1$ $s_0, s_1$	4	$\alpha_3, \alpha_4$
$CC_3$	$E_5 \dagger$	$E_6^{**}$	$l_7, l_5, l_6$	$\underline{R}_9^*$	$t_0, t_1$ $u_0, u_1$	4	$\alpha_5, \alpha_6$

$\dagger$  Conductor.  $^{**}$  Conducido.  $^*$  En función de la hipótesis 1.

A continuación plantearemos el problema cinemático inverso para cada cadena asociada al multicuerpo, motivo de nuestro estudio.

**Cadena CC1**

Dados  $\underline{R}_3' \in \mathfrak{R}^2, l_1, l_2 \in \mathfrak{R}^+, p, q \in \mathfrak{R}^2$  y  $\|p\| = \|q\| = 1$  encuentre  $P = \{P_0, P_1\}, Q = \{Q_0, Q_1\}$  tal que:

$$\begin{aligned} \underline{R}_3 &= l_1 \cdot \{P * p * \underline{e}_1\} + l_2 \cdot \{Q * q * \underline{e}_1\} \\ P_0^2 + P_1^2 &= 1 \\ Q_0^2 + Q_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

sean satisfechas.

**Cadena CC2**

Dados  $\underline{R}_6' \in \mathfrak{R}^2, l_1, l_2 \in \mathfrak{R}^+, r, s \in \mathfrak{R}^2$  y  $\|r\| = \|s\| = 1$  encuentre  $R = \{R_0, R_1\}, S = \{S_0, S_1\}$  tal que:

$$\begin{aligned} \underline{R}_6 &= l_1 \cdot \{I * \underline{e}_1\} + l_2 \cdot \{R * r * \underline{e}_1\} + l_3 \cdot \{S * s * \underline{e}_1\} \\ R_0^2 + R_1^2 &= 1 \\ S_0^2 + S_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

sean satisfechas.

**Cadena CC3**

Dados  $\underline{R}_9' \in \mathfrak{R}^2, l_1, l_2 \in \mathfrak{R}^+, t, u \in \mathfrak{R}^2$  y  $\|t\| = \|u\| = 1$  encuentre  $T = \{T_0, T_1\}, U = \{U_0, U_1\}$  tal que:

$$\begin{aligned} \underline{R}_9 &= l_1 \cdot \{I * \underline{e}_1\} + l_2 \cdot \{T * t * \underline{e}_1\} + l_3 \cdot \{U * u * \underline{e}_1\} \\ T_0^2 + T_1^2 &= 1 \\ U_0^2 + U_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

sean satisfechas.

### 3.6 Planteamiento del problema Cinemático Directo en la "configuración deformada".

Se presenta en esta sección el planteamiento del problema cinemático directo asociado con la configuración que guarda el multicuerpo mostrado en la figura 3.5. Al igual que el problema directo relacionado con la configuración no deformada, se deben construir las ecuaciones de lazo que gobiernan el problema inverso en la configuración deformada. La figura 3.6 muestra los vectores que definen el problema directo. Las ecuaciones de lazo asociadas a la configuración mostrada son las siguientes:

$$\underline{L}_{14}' + \underline{L}_3' + \underline{L}_4' - (\underline{L}_1' + \underline{L}_2' + \underline{L}_{36}') = 0 \quad (3.26)$$

$$\underline{L}_{17}' + \underline{L}_5' + \underline{L}_6' - (\underline{L}_1' + \underline{L}_2' + \underline{L}_{39}') = 0$$

Al tomar en cuenta (3.21) podemos escribir las expresiones (3.26) en términos de las bases móviles deformadas. Esto es:

$$l_{14} \cdot \underline{e}_1 + l_3 \cdot \underline{a}_1^{III} + l_4 \cdot \underline{a}_1^{IV} - (l_1 \cdot \underline{a}_1^I + l_2 \cdot \underline{a}_1^{II} + l_{36} \cdot \underline{e}_1^{VIII}) = 0 \quad (3.27)$$

$$l_{17} \cdot \underline{e}_1 + l_5 \cdot \underline{a}_1^V + l_6 \cdot \underline{a}_1^VI - (l_1 \cdot \underline{a}_1^I + l_2 \cdot \underline{a}_1^{II} + l_{39} \cdot \underline{e}_1^{IX}) = 0$$

Las ecuaciones (3.27) pueden ser escritas en términos de la base inercial fija de acuerdo a (3.23) de la manera siguiente:

$$l_{14} \cdot \{I^* \underline{e}_1\} + l_3 \cdot \{R^* r^* \underline{e}_1\} + l_4 \cdot \{S^* s^* \underline{e}_1\} - (l_1 \cdot \{P^* p^* \underline{e}_1\} + l_2 \cdot \{Q^* q^* \underline{e}_1\} - l_{36} \cdot \{M^* m^* \underline{e}_1\}) = 0 \quad (3.28)$$

$$l_{17} \cdot \{U * e_1\} + l_5 \cdot \{T * t * e_1\} + l_6 \cdot \{U * u * e_1\} -$$

$$-(l_1 \cdot \{P * p * e_1\} + l_2 \cdot \{Q * q * e_1\} - l_{39} \cdot \{N * n * e_1\}) = 0$$

Con estas últimas expresiones a continuación plantearemos el problema cinemático directo en la configuración deformada.

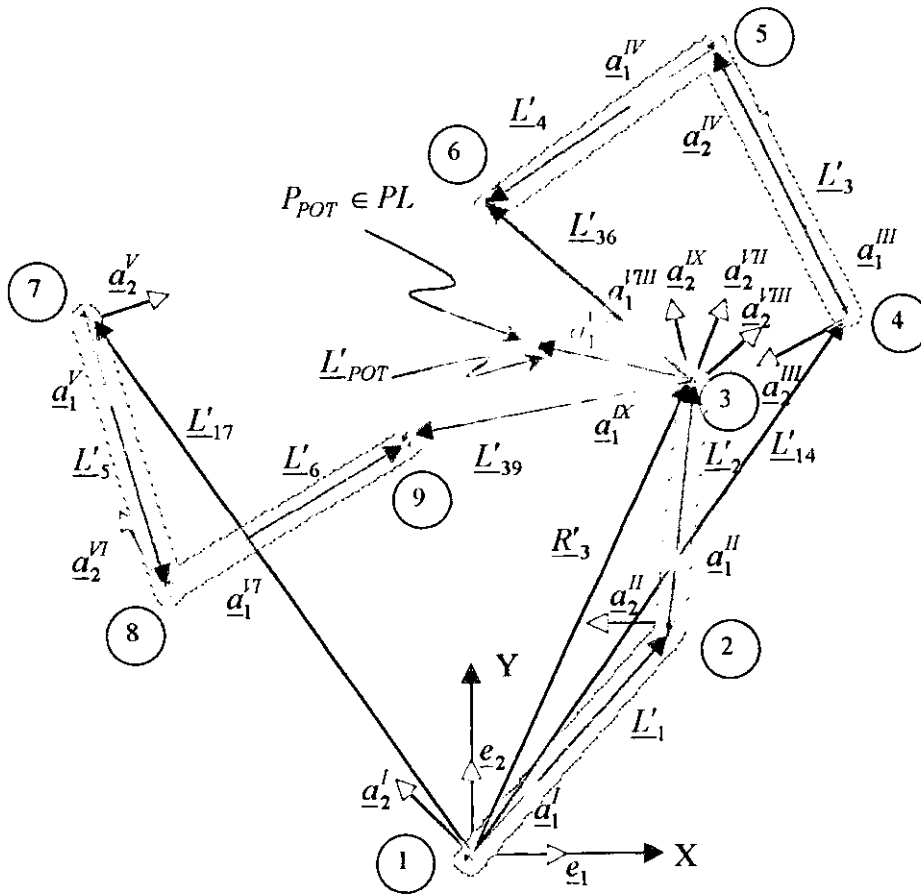


Figura. 3.6. Vectores deformados en la configuración deformada.

### 3.6.1 Problema Cinemático Directo.

Dados  $P, R, T \in \mathfrak{R}^2$  con  $\|P\| = \|R\| = \|T\| = 1$ ,  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_{63}, l_{93}, l_{Pot}, l_{14}, l_{17} \in \mathfrak{R}^+$   
 $p, q, r, s, t, u, v, m, n \in \mathfrak{R}^2$  con  $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = \|t\| = \|u\| = \|v\| = \|m\| = \|n\| = 1$ , encuentre



$R_{POT}' \in \mathfrak{R}^2, V = \{V_0, V_1\}, Q = \{Q_0, Q_1\}, S = \{S_0, S_1\}, U = \{U_0, U_1\}$  tal que sea (3.28) satisfecha y,

$$\begin{aligned} \underline{R}_3' &= l_1 \cdot \{P * p * \underline{e}_1\} + l_2 \cdot \{Q * q * \underline{e}_1\} + l_{POT} \cdot \{V * v * \underline{e}_1\} \\ V_0^2 + V_1^2 &= 1 \quad Q_0^2 + Q_1^2 = 1 \\ S_0^2 + S_1^2 &= 1 \quad U_0^2 + U_1^2 = 1 \end{aligned}$$

El problema cinemático directo en la configuración deformada genera un sistema de 10 ecuaciones no lineales y 10 incógnitas del tipo polinomial.

En el apéndice C se presenta la programación de los problemas cinemáticos directo e inverso en la "configuración deformada".

## CAPÍTULO 4

### PROTOTIPO DEL ROBOT MANIPULADOR PARALELO PLANO 3-RRR

**Introducción:** El presente capítulo describe de manera general el prototipo construido para modelar los movimientos del robot paralelo plano 3-RRR. Se describen tanto el Sistema Mecánico como el Sistema de Control. Los elementos principales del Sistema Mecánico son: eslabones, actuadores, una transmisión por cada actuador y elementos de soporte. Para el Sistema de Control se tienen los siguientes elementos: una tarjeta de control, una etapa de potencia para los actuadores y una interfase de control para el usuario. Los lenguajes utilizados para la programación del sistema son: lenguaje *Ensamblador*, para operar el microcontrolador y la interface de control, y *Mathematica*, para la resolución del modelo cinemático. En el apéndice C se encuentran los programas de control y simulación. En el apéndice B se presentan los planos de fabricación de los elementos del Sistema Mecánico. Cabe aclarar que el diseño del prototipo es completamente empírico, es decir, no se sigue una metodología de diseño formal que incluya un cálculo preciso de los elementos del mecanismo.

#### 4.1 Sistema Mecánico

El material del robot es todo de aluminio maquinado a excepción de los elementos comerciales, de la plataforma *PL* y las bases. En la tabla 4.1 se indica una lista de componentes del Sistema Mecánico. Los elementos principales del robot prototipo son los eslabones del mecanismo. Estos son, tres eslabones activos de aluminio con un perfil "T", para soportar las cargas en sus extremos debidas al resto de los eslabones; tres eslabones conducidos de aluminio con un

perfil rectangular, cuya función se reduce exclusivamente a transmitir el movimiento sin estar sometidos a flexión; y una plataforma triangular de acrílico cuya función es la de Órgano Terminal. La plataforma tiene un apoyo ubicado en su centroide cuya función es, además de apoyo, la de un rodamiento y un instrumento trazador para dibujar la trayectoria descrita por un movimiento. Es este apoyo el que permite que los eslabones conducidos no estén sometidos a flexión debido a la plataforma *PL*. La estructura propia del mecanismo está montada en una base superior de acrílico (esta base es el eslabón denominado como "tierra").

Las juntas entre los eslabones activos, eslabones conducidos y la plataforma, son postes de aluminio cuya función se limita exclusivamente a la de un eje de rotación para los eslabones, esto es, no son rodamientos de contacto angular que soporten las cargas tanto radiales como axiales que se presentan en las juntas durante los movimientos. Las juntas asociadas a los eslabones activos y la tierra, son rodamientos de contacto angular. Cada uno de estos rodamientos está contenido en su propia caja y cuentan con un "hombro" que sirve de cople entre los eslabones activos y el eje de la transmisión, a través de un cople auxiliar asociado a los eslabones activos.

En la base inferior se encuentran los rodamientos (de contacto angular) que sirven de apoyo para la transmisión. Cada rodamiento está contenido en un caja e integra un "hombro inferior" de apoyo. La transmisión del movimiento desde los actuadores hasta los eslabones activos es por medio de un transmisión de banda dentadas.

Las bandas dentadas proporcionan las ventajas y propiedades de las transmisiones por engranes, bandas trapezoidales y planas, eliminando los inconvenientes propios de cada una de ellas. El movimiento se realiza por el acoplamiento recíproco de los dientes de la banda con los de la polea, por lo tanto, sin resbalamiento y en perfecto sincronismo.

Tabla 4.1 Componentes del manipulador prototipo paralelo plano 3-RRR.

No. Pza	Nombre	Material	Descripción	Cantidad	Plano
1	Eslabón "T"	Al	Maquinado	3	B-1
2	Eslabón plano	Al	Maquinado	3	B-2
3	Plataforma	Acrílico	Maquinado	1	B-3
4	Cople Soporte	Al	Maquinado	1	B-4
5	Soporte	----	Comercial	1	B-17
6	Cople auxiliar	Al	Maquinado	3	B-5
7	Hombro superior	Al	Maquinado	3	B-6
8	Rodamiento superior	----	Comercial	3	B-18
9	Caja rodamiento sup	Al	Maquinado	3	B-7
10	Base superior	Acrílico	Maquinado	1	B-8
11	Eje	Al	Maquinado	3	B-9
12	Hombro inferior	Al	Maquinado	3	B-10
13	Rodamiento inferior		Comercial	3	B-18
14	Caja rodamiento inf	Al	Maquinado	3	B-7
15	Base inferior	Acrílico	Maquinado	1	B-11
16	Caja motor	Al	Maquinado	3	B-12
17	Motor de pasos	----	Comercial	3	----
18	Engrane 1	Al	Maquinado	3	B-15
19	Banda dentada	----	Comercial	3	B-13
20	Engrane 2	Al	Maquinado	3	B-16
21	Columna	Al	Maquinado	4	B-14
22	Postes (Juntas)	Al	Comercial	6	----
23	Tornillos	----	Comercial	39	----

Las bandas son standard del tipo XL120 de neopreno y fibra de vidrio, con un paso de 0.200 [in] y una longitud de 12 [in]. La ventaja mecánica **VM** que proporciona la transmisión está dada según la siguiente expresión:

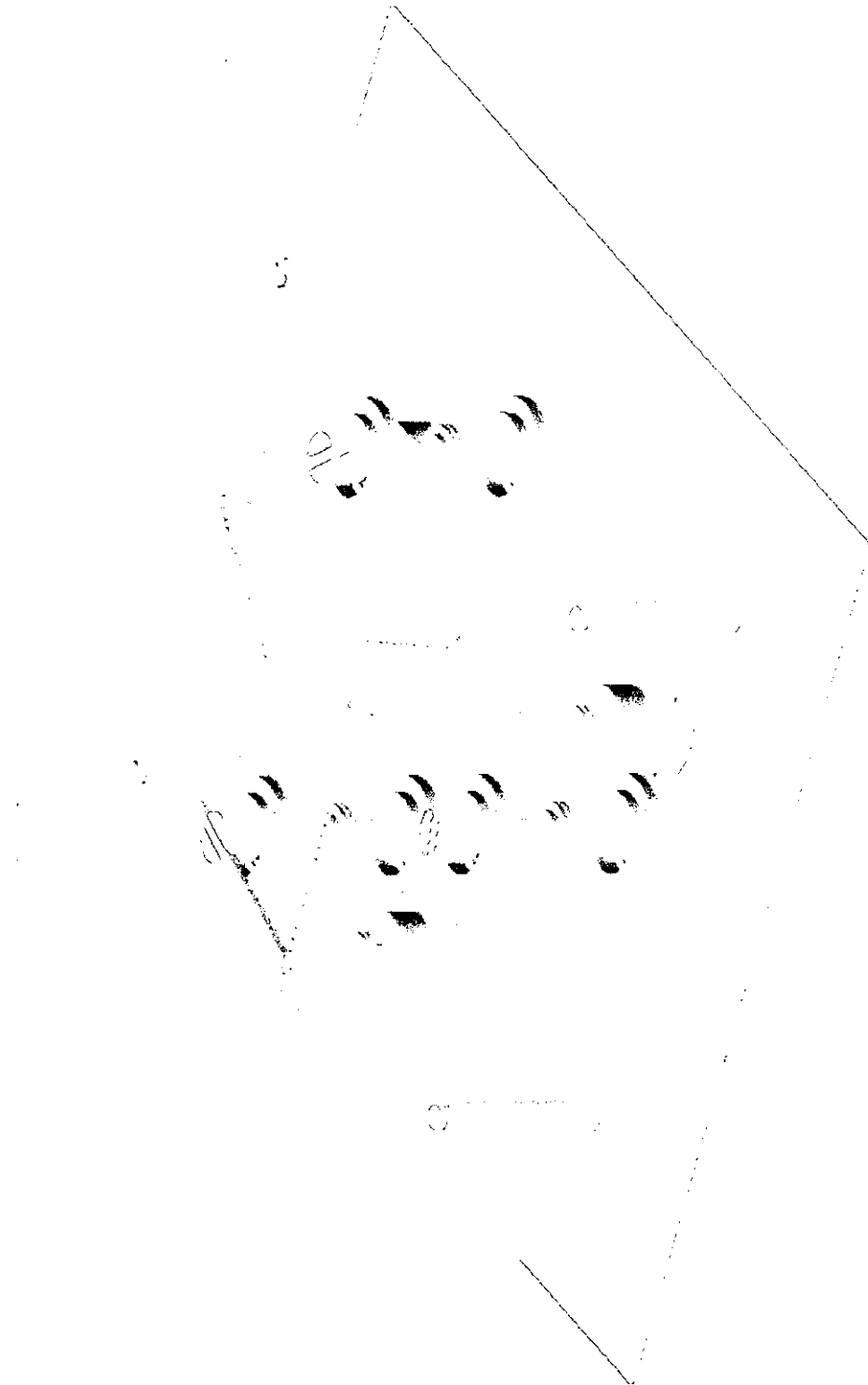


Figura 4.1 Ensamble del robot manipulador prototipo paralelo plano 3-RRR.

$$VM = \frac{d}{D} = \frac{2.005 \text{ [in]}}{0.465 \text{ [in]}} = 4.31 \quad (4.1)$$

Aquí  $d$  y  $D$  son los diámetros correspondientes a las poleas impulsora e impulsada, respectivamente.

Los actuadores son motores de pasos [12],[37] con una resolución de  $1.8^\circ$  por cada pulso, 5 [V] de alimentación continua y 1 [A] por fase. Los motores se eligieron arbitrariamente según los recursos disponibles, al igual que en el caso de las bandas de transmisión dentadas.

Las bases tanto inferior como superior son base de acrílico tan sólo para darle presentación al prototipo. Están soportadas por cuatro columnas, ubicadas cerca de cada una de las esquinas ambas bases.

Finalmente, el robot prototipo es ensamblado todo a presión, a excepción de las poleas y las cajas de los rodamientos y actuadores los cuales, son ensamblados a las bases inferior y superior por medio de sujeción de tornillos. En la figura 4.1 se muestra un ensamble del prototipo robot manipulador paralelo plano 3-RRR. Dichos ensambles son sólo ilustrativos, por lo cual, los elementos de sujeción se han omitido por simplicidad.

## 4.2 Sistema de Control

El elemento principal de la Tarjeta de Control es el microcontrolador **8051AH** [40]. Un esquema de la tarjeta y de la ubicación de cada uno de sus componentes se muestra en la figura 4.3. El microcontrolador **8051AH** es el circuito integrado **IC-1**, mostrado en la figura. Éste requiere de interconexiones con otros dispositivos para funcionar adecuadamente. Estos elementos se describen a continuación:

- **Reloj.** Un sistema con procesador requiere de un circuito de reloj, el cual, genera una señal cuadrada para sincronizar todas las operaciones del sistema además de establecer su velocidad de operación. El reloj está constituido por un cristal de cuarzo **Y1**, dos capacitores **C1** y **C2**, donde las terminales **XTAL1** y **XTAL2**, conectan a las terminales **19 (X1)** y **18 (X2)** del microcontrolador **IC-1** respectivamente. En este caso, el reloj trabaja a una frecuencia de 8 MHz.
- **Reset.** El circuito para reestablecer el sistema o *Reset*, está formado por un inversor basado en un transistor **Q1**, dos resistencias **R1** y **R2**, un capacitor **C4** y, un interruptor **SW1 RESET**.
- **EA/VP.** Esta terminal (pin 31) está conectada a tierra indicando que toda la memoria de programa se encuentra implementada externamente en otro componente.
- **Bus de Direcciones.** Un *bus* es un conjunto de interconexiones paralelas entre dos o más elementos que permiten manejar, en este caso, información acerca de las direcciones de memoria. Este microprocesador, en particular, puede manejar hasta 16 líneas de direccionamiento (equivalentes a 64KB de registros de programa y 64KB de registros de datos en forma independiente) de los cuales, 8 se encuentran multiplexadas en tiempo junto con las de datos, esto es, las líneas **AD0-7** correspondientes al puerto **P0**, pueden manejar dos tipos de información, es decir, la parte baja del bus de direcciones y la baja del bus de datos. Las líneas **A8-15**, correspondientes al puerto **P2**, solo pueden manejar la parte alta del bus de direcciones. Con ésto, es posible que **IC-2** almacene la parte baja de las direcciones a partir de que se presenta la señal **ALE**, generada por el **8051AH**, hasta que aparezca una nueva señal **ALE**.
- **Bus de Datos.** Este bus de datos está conformado por 8 líneas, **AD0-7**, correspondientes al puerto **P0**.
- **Bus de Control.** El bus de control está formado por las señales **ALE** (almacena la parte baja de las direcciones en **IC-2**), **PSEN** (ubicada en **IC-4** y

IC-5, ejecuta la lectura de código), RD (contenida en IC-6, ejecuta la lectura de datos externos) y WR (ejecuta la escritura de datos externos, IC-5 e IC-6).

- **Puerto Serial.** La comunicación serial se establece por medio de las terminales TXD y RDX, las cuales, forman parte del puerto serial. Estas terminales están conectadas al circuito IC-7, que es el "driver" para la conversión de los niveles lógicos TTL al estandar RS-232 y viceversa.

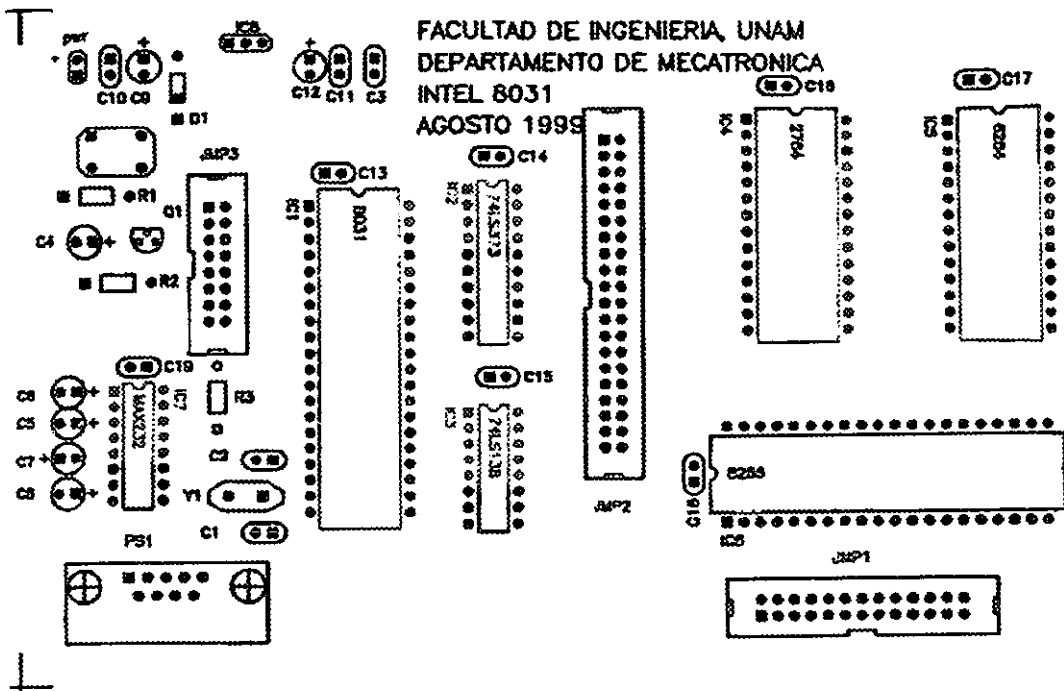


Figura 4.3. Diagrama de distribución de la tarjeta de control.

- **Puertos Paralelos.** El puerto paralelo P1 del microcontrolador puede ser utilizado tanto de entrada como de salida. El circuito integrado IC-6 es un puerto paralelo externo con 24 líneas de entrada o salida.
- **Interrupciones.** Las terminales externas asociadas a las interrupciones son: INT0, INT1, T0 y T1. Las dos primeras son las entradas de las interrupciones externas cero y uno, las dos restantes, son entradas para los controladores de eventos cero y uno, además de las interrupciones internas, generadas por los "Timer" 1 y 2 y las generadas por el puerto serial.
- **Conectores.** Los conectores para tener acceso a las señales son: JMP1, JMP2, JMP3 y PWR, para la alimentación.



#### 4.2.1 Funcionamiento general de la Tarjeta de Control

Las características generales del microcontrolador **8051AH** se muestran en la siguiente tabla:

**Tabla 4.2 Características generales del microcontrolador 8051AH.**

CPU de 8 bits.	64K de memoria RAM.
64K de memoria ROM.	128 bytes de RAM interna.
32 bits de I/O.	2 temporizadores/contadores de 16 bits.
UART full duplex.	Reloj oscilador.
6 fuentes de 5 vectores de interrupción con dos niveles de prioridad.	

Todos los dispositivos del sistema (figura 4.4) están conectados al **CPU** a través del sistema de buses, el cual, está formado por el bus de direcciones, bus de datos y bus de control. Cada una de las localidades de memoria es identificada por el **CPU** con un único número binario llamado *dirección*. El **CPU** controla el bus de datos y de control con el propósito de escribir o leer información de la memoria o de los dispositivos de entrada o salida. El bus de datos puede permanecer en un estado de alta impedancia permitiendo tener un bus común de entrada y salida entre dispositivos, evitando así, los cortos que podrían suscitarse al tener la salida de un dispositivo en "1" lógico y la salida de otro en "0" lógico, cuando éstos comparten la misma línea.

Las memorias **RAM** y **ROM** almacenan datos y programas respectivamente, y consisten en un número de localidades disponibles para ser leídas o escritas, por el **CPU**, a través del bus de datos. El programa que opera la tarjeta se encuentra almacenado en la memoria **EPROM (UV), IC-4**.

Los puertos de salida y entrada, internos y externos, son operados como elementos de memoria.

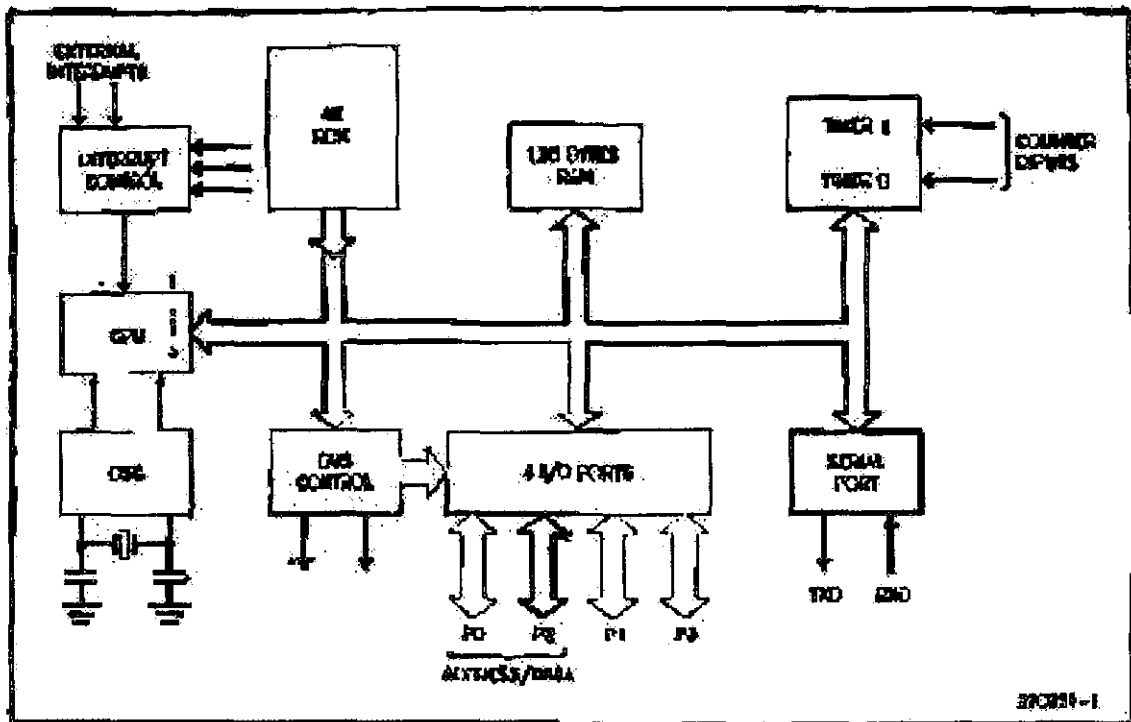


Figura 4.4. Diagrama de bloques del 8051.

#### 4.2.2 Etapa de Potencia

Los actuadores utilizados para mover los eslabones del multicuerpo RP, son *motores de pasos* [12], [37]. Esta clase de motores funciona por medio de la aplicación secuencial de pulsos a cada uno de sus embobinados de manera que, por cada pulso que se aplica, el motor gira un determinado número de grados, esto es, se mueven según la siguiente proporción:  $\theta \propto np$ ; donde  $\theta$  es el desplazamiento angular y  $np$  es el número de pasos. Para proporcionar a los motores un determinado número de pulsos se requiere de una interface entre los motores y la tarjeta de control, llamada *etapa de potencia* (figura 4.5). Esta interface ayuda a suministrar, de manera continua, la secuencia correcta de pulsos a los embobinados de los motores.

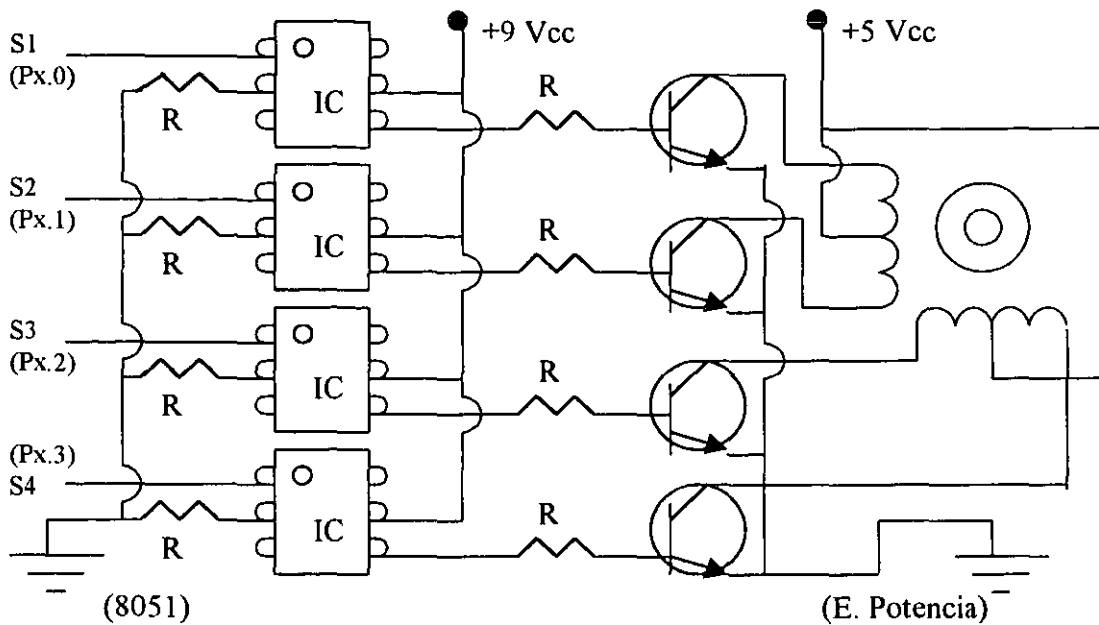


Figura 4.5. Etapa de potencia para un motor.

La etapa de potencia de cada motor, está conectada a la tarjeta de control por medio del conector **JMP1**, que permite la salida y entrada de datos a través del puerto serial **IC-6** de ésta última, utilizando los puertos **PA**, **PB** y **PC**, respectivamente para cada motor.

Los componentes que constituyen la etapa de potencia se indican en la tabla 4.3. Las cantidades mostradas son por los tres motores. Cada motor tiene su etapa de potencia: 4 optoacopladores, 4 transistores y 8 resistencias. A continuación, se hace una breve descripción de estos componentes.

Tabla 4.3 Componentes de la Etapa de Potencia.

Componente	Descripción	Tipo	Cantidad
IC	Optoacoplador	4N30	12
T	Transistor	TIP120	12
R	Resistencia	470 Ω	13

**Optoacoplador.** Un optoacoplador combina un dispositivo semiconductor formado por un fotoemisor, un fotoreceptor y entre ambos hay un camino por donde se transmite la luz. Todos estos elementos se encuentran dentro de un encapsulado que por lo general es del tipo DIP.

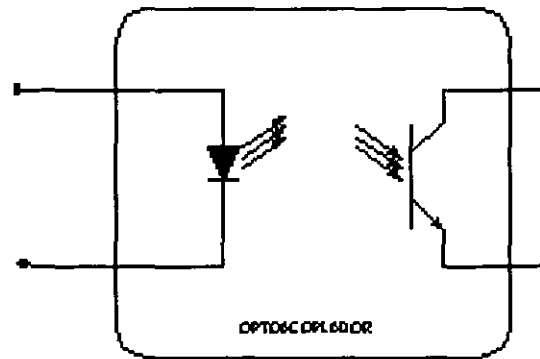


Figura 4.6. Diagrama interior básico de un optoacoplador.

La señal de entrada es aplicada al fotoemisor y la salida es tomada del fotoreceptor. Los optoacopladores son capaces de convertir una señal eléctrica en una señal luminosa modulada y volver a convertirla en una señal eléctrica. La gran ventaja de un optoacoplador reside en el aislamiento eléctrico que puede establecerse entre los circuitos de entrada y salida.

Los fotoemisores que se emplean en los optoacopladores de potencia son diodos que emiten rayos infrarrojos (IRED) y los fotoreceptores pueden ser tiristores o transistores. Cuando aparece una tensión sobre los terminales del diodo IRED, éste emite un haz de rayos infrarrojo que transmite a través de una pequeña guía-ondas de plástico o cristal hacia el fotoreceptor. La energía luminosa que incide sobre el fotoreceptor hace que éste genere una tensión eléctrica a su salida. Este responde a las señales de entrada, que podrían ser pulsos de tensión.

**Transistor.** Un transistor está compuesto por tres capas de silicio, o bien, por diodos con una misma placa o cátodo. En la figura 4.7 se muestra un esquema

eléctrico de éste. La notación NPN o PNP, indica el tipo de transistor con base en la configuración que tienen las placas de silicio.

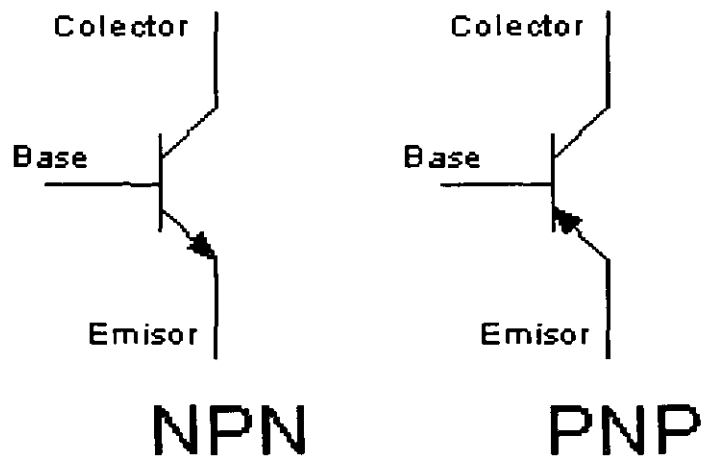


Figura 4.7. Transistor bipolar o BJT.

La función del transistor como interruptor es exactamente igual que la de un dispositivo mecánico: o bien deja pasar la corriente, o bien la corta. La diferencia está en que mientras en el primero es necesario que haya algún tipo de control mecánico, en el transistor la señal de control es electrónica. En la figura 4.8 se muestra una aplicación para el encendido de un foco.

En el primer caso, bajo la señal de control adecuada, que es introducida a través de la base, el transistor se comporta como un circuito abierto entre el emisor y el colector, no existe corriente y la bombilla estará apagada. En el segundo caso, cambiando la señal de control, se cierra el circuito entre C y E, y los 12 V se aplican al foco, que se enciende.

Este funcionamiento entre los estados de corte y conducción se denomina operación en *conmutación*. Las aplicaciones típicas de este modo de operación son la *electrónica de potencia* y la *electrónica digital*, en la que los circuitos operan con dos niveles de tensión fijos equivalentes al 1 y 0 lógicos.

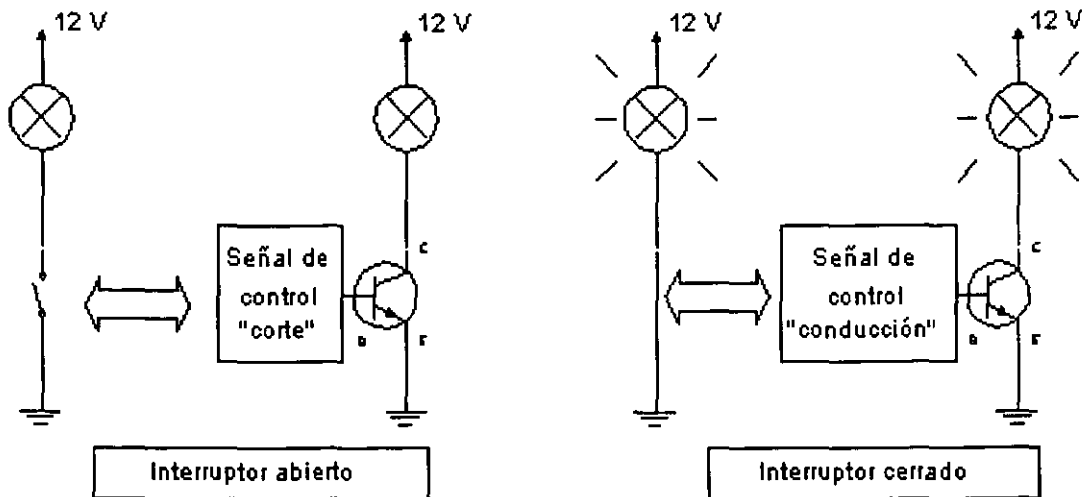


Figura 4.8. Transistor bipolar como interruptor.

Cada pulso de salida en los puertos **PA**, **PB** y **PC**, entra a la etapa de potencia a través de los optoacopladores, asegurando así, que el sentido de las señales o pulsos sea uno sólo (hacia los motores), pasando después por los transistores, los cuales, permiten el paso de los pulsos (uno a la vez) hasta que estos se encuentran en estado de saturación, logrando así, que el motor gire de manera continua en un sentido u otro. El sentido de giro depende del orden en que se suministren los pulsos en la etapa de potencia, esto es, de **S1** a **S4** en un sentido y de **S4** a **S1** en otro.

Los motores de pasos al ser energizados imponen una restricción física a los eslabones activos. Esto es, al energizar los motores de pasos, el o los eslabones activos a los cuales no se les ha aplicado pulso alguno intencionalmente, permanecen inmóviles hasta que el par inducido por el movimiento del eslabón o eslabones a los cuales, si se les han aplicado pulsos, es mayor que la fuerza magnética de las bobinas energizadas. Luego entonces, los movimientos *Secuenciales Unitarios* y *Mixtos* se presentan como *movimientos forzados*. De no existir esta característica de los motores de pasos, los movimientos *Secuenciales Unitarios* sólo se presentarían como movimientos naturales, pero, sólo en ciertas áreas y con desplazamientos muy pequeños del manipulador.

### 4.2.3 Dispositivos de sensado

Para saber en todo momento la posición del punto  $P_{TOT} \in P_L$ , es necesario conocer el valor de las variables articulares ( $p = \{p_0, p_1\}, r = \{r_0, r_1\}, t = \{t_0, t_1\}$ ), es decir, los desplazamientos angulares ( $\theta_1, \theta_3, \theta_5$ ) de los eslabones conductores. Para ello, se aprovecha la característica de los motores de pasos que permite conocer en todo momento su posición angular dada la relación directamente proporcional, entre el número  $n$  de pulsos aplicados al motor y su desplazamiento angular  $\theta$ , esto es:  $\theta \propto n$ .

Todos los robots requieren de una posición de referencia respecto a la cual, medir su posición. Esta posición inicial o de referencia, se conoce como *Home*. Eventualmente, para localizar esta posición y asegurar que el multicuerpo RP alcance o esté en *Home* antes de iniciar cualquier movimiento, se ubicarán en la base superior del manipulador, tres *sensores de paso tipo U*; estos sensores emitirán una señal cada vez que los eslabones conductores hayan alcanzado la posición *Home*, deteniendo así, la rotación de los motores.

Los sensores deberán estar conectados a la tarjeta de control a través del conector **JMP3**, que permite la salida y entrada de señales provenientes del puerto **P0**.

Finalmente, en el apéndice B se presenta el programa de control contenido en el microprocesador, el cual, permite controlar el manipulador. El programa está estructurado para mover los elementos básicos constitutivos de un movimiento, es decir, los 7 *grupos* de actuadores de la clase *formas de activación simultáneas*, caracterizadas por los *sentidos de operación* de acuerdo a la tabla 8, sección 1.2.7. El programa contiene la opción para mover el manipulador de acuerdo al movimiento simulado por medio del programa *Mathematica*. Este movimiento se define en el capítulo V.

Para correr el programa en el microprocesador, es necesario establecer comunicación entre la tarjeta de control y la PC a través del puerto serial por medio de una conexión de *hyperterminal*. Este tipo de conexión se encuentra disponible en cualquier PC. Una vez establecida dicha conexión, basta presionar el botón de **RESET** en la tarjeta de control y el programa comenzará a correr desplegando, en la pantalla abierta por la conexión de *hyperterminal*, las instrucciones para activar los distintos *grupos* de actuadores.

En este trabajo de tesis, la velocidad a la cual operan los actuadores es constante, esto es, se utiliza un perfil de trayectoria lineal [28]. La velocidad máxima de operación está determinada por el tiempo que tarda en salir un pulso por la tarjeta de control hacia los motores de pasos. El tiempo entre el instante en que el programa recibe una instrucción para dar un pulso y la salida de éste es de 0.104 [s], entonces, el periodo de salida de 1 pulso es de:

$$T_{\text{MINTC}} = 0.104 \left[ \frac{\text{s}}{\text{pulso}} \right] \quad (4.2)$$

Luego, la velocidad  $V_{\text{TC}}$  de operación de la tarjeta de control, esto es, la velocidad con que la tarjeta envía pulsos a los motores, en pulsos por segundo o **pps**, está dada según la siguiente expresión:

$$V_{\text{TC}} = \frac{1}{T_{\text{MINTC}}} = 9.577 \text{ [pps]} \quad (4.3)$$

Ahora bien, la ventaja mecánica **VM**, determinada por la transmisión del manipulador, de acuerdo a la expresión (4.1), es de:

$$\mathbf{VM} = \frac{d}{D} = \frac{2.005 \text{ [in]}}{0.465 \text{ [in]}} = 4.31$$



Por lo tanto, la velocidad angular real  $\omega_{ACT}$  de cada actuador está definida por la siguiente expresión:

$$\omega_{ACT} = \frac{1}{VM} \cdot V_{TC} \quad (4.4)$$

De las expresiones (4.3), (4.1) y (4.4), la velocidad angular máxima real de los actuadores es de:

$$\omega_{MAXACT} = \frac{1}{4.31} \cdot 9.577 = 2.222 \text{ [pps]} \quad (4.5)$$

o bien, en revoluciones por minuto o **rpm**:

$$\omega_{MAXM} = (2.222 \text{ [pps]}) \cdot \left( \frac{1 \text{ [rev]}}{200 \text{ [pulsos]}} \right) \cdot \left( \frac{60 \text{ [s]}}{1 \text{ [min]}} \right) = 0.67 \text{ [rpm]} \quad (4.6)$$

Ahora bien, puesto que el perfil de trayectoria es lineal [28], es decir, un polinomio de primer grado, la posición angular de los actuadores se puede expresar de la siguiente manera:

$$\theta_f = \theta_i + \omega_{ACT} \cdot t_{ART} \quad (4.7)$$

Aquí,  $\theta_f$  es la posición angular final,  $\theta_i$  la posición angular inicial,  $\omega_{ACT}$  la velocidad angular y  $t_{ART}$  el tiempo articular (tiempo de operación) asociado un actuador. Considerando que los movimientos que realiza un manipulador son movimientos asociados a alguna tarea en particular, los puntos inicial y final asociados a la trayectoria del movimiento siempre serán conocidos.

Entonces, en la expresión (4.7), tanto la velocidad angular como el tiempo articular de cada actuador son incógnitas, mientras que los desplazamientos angulares  $\theta_f$  y  $\theta_i$  (determinados por la cinemática inversa) siempre serán conocidos. De lo anterior se pueden plantear los siguientes casos:

1) Dados  $\theta_f$ ,  $\theta_i$  y  $\omega_{ACT}$ , encuentre  $t_{ART}$  tal que, (4.7) sea satisfecha.

2) Dados  $\theta_f$ ,  $\theta_i$  y  $t_{ART}$ , encuentre  $\omega_{ACT}$  tal que, (4.7) sea satisfecha.

En la definición 1.4 (capítulo 1) se estableció que un estado de operación es aquel periodo durante el cual, se activan uno o más actuadores simultáneamente. Esta definición implica que, los actuadores presentes en dicho estado de operación, tendrán el mismo tiempo articular asociado. Luego, la duración de un estado de operación asociado a un *grupo* de actuadores, se asocia al actuador con el mayor desplazamiento angular.

Ahora bien, considerando el caso 1 arriba planteado, la duración de un estado de operación asociado a un *grupo* de actuadores se define de la siguiente manera:

$$t_{EOP} = \frac{\theta_{fMAX} - \theta_{iMAX}}{\omega_{ACT}} \quad (4.8)$$

Aquí,  $t_{EOP}$  es la duración del estado de operación asociado un *grupo* de actuadores cualquiera,  $\theta_{fMAX}$  y  $\theta_{iMAX}$  están asociados al actuador con el mayor desplazamiento angular y  $\omega_{ACT}$  es la velocidad angular dada como un parámetro de las especificaciones, la cual, puede ser la velocidad angular máxima de los actuadores o cualquier otra, y estará asociada al actuador con mayor desplazamiento angular. La velocidades del resto de los actuadores se determina en función del tiempo  $t_{EOP}$  obtenido.

## CAPÍTULO 5

### DEFINICIÓN DE MOVIMIENTOS PARA EJECUTAR

**Introducción:** En el modelo de información desarrollado hasta ahora, se estableció que un movimiento tiene especificaciones, definiciones y una ejecución. En este capítulo se presentan como ejemplo, las especificaciones y definiciones de un movimiento para ser ejecutado por el manipulador. Para ello, se establecen algunas instancias de la clase *Especificaciones* (figura 1.5). Posteriormente, se describe la trayectoria del movimiento de acuerdo a la figura 1.7 y se obtienen, a partir de la cinemática inversa, las formas o movimientos de operación, para entonces, definir la operación funcional asociada al movimiento (figura 1.6). Finalmente, el manipulador deberá ejecutar el movimiento según sus definiciones (figura 1.4), tanto virtualmente como en la realidad, es decir, en una simulación por computadora y en el prototipo (figura 1.14).

#### 5.1 Especificaciones y Definiciones

En la tabla 5.1 se indican las especificaciones de un movimiento en particular que se utilizará como ejemplo. De las instancias mostradas en la figura 1.5, se especifican algunos parámetros además del lugar geométrico descrito por el movimiento.

**Tabla 5.1 Especificaciones.**

Parámetros		Lugar Geométrico
Punto Inicial, $P_i$	(0,200)	Línea Recta
Punto Final, $P_f$	(0,300)	

Tomando en cuenta las especificaciones de la tabla 5.1, se describe la trayectoria del movimiento como una línea recta con un perfil de evolución lineal, según se muestra en la tabla 5.2. En este caso, el lugar geométrico se da como una especificación, por tanto, el lugar geométrico se define de la misma manera que en las especificaciones; el perfil de evolución se define arbitrariamente como un polinomio de primer grado.

**Tabla 5.2 Descripción de Trayectoria.**

Lugar Geométrico	Perfil de Evolución	Parámetros	
Línea Recta	Polinomio 1er Grado	Punto Inicial, $P_i$	(0,200)
		Punto Final, $P_f$	(0,300)

Como se muestra en la figura 1.13, el modelo cinemático (en específico la cinemática inversa) determina las *formas o movimientos de operación*. Esto es, a partir de la cinemática inversa calcula los parámetros de rotación o desplazamientos angulares (instancias de la clase *Parámetros Articulares*) que se deben proporcionar a cada actuador a fin de alcanzar el punto final especificado, y es a través de estos parámetros que se obtienen los movimientos de operación. En la tabla 5.3 se muestran los parámetros de rotación obtenidos a partir del planteamiento del problema cinemático inverso (capítulo 3, sección 3.5.1) para un movimiento cuyas especificaciones se indican en la tabla 5.1.

Para extraer los movimientos de operación de la cinemática inversa, es necesario ubicar los cambios de *sentido de operación* de algún actuador y, el o los actuadores que permanezcan con un parámetro de rotación constante. Esto es, en el capítulo 1 (sección 1.2.6) se estableció que las *formas o movimientos de operación funcional* son la caracterización de las *distintas formas de activación* de los actuadores tomando en cuenta los *sentidos y arreglos* de operación. Luego, si el orden de una forma de activación, *los sentidos de*

operación asociados a los actuadores de dicha forma de activación o su correspondiente arreglo de operación cambian, entonces, el movimiento de operación funcional también cambia (figura 1.13).

**Tabla 5.3** Parámetros de rotación.

	Actuador <i>a</i>	Actuador <i>b</i>	Actuador <i>c</i>
	<i>p</i>	<i>r</i>	<i>t</i>
<b>1</b>	<b>80.7656</b>	<b>34.8073</b>	<b>11.6823</b>
2	84.7486	31.0313	8.9182
3	87.9987	27.2545	6.6589
4	90.5864	23.4758	4.7949
5	92.5855	19.6978	3.2661
6	94.0657	15.9267	2.0390
7	95.0889	12.1726	1.0965
8	95.7082	8.4495	0.4328
9	<b>95.9672</b>	4.7745	0.0507
10	95.9012	1.1679	<b>-0.0400</b>
11	95.5373	-2.3477	0.1768
12	94.8949	-5.7487	0.7235
13	93.9861	-9.0106	1.6277
14	92.8151	-12.1098	2.9222
15	91.3774	-15.0242	4.6436
16	89.6574	-17.7338	6.8314
17	87.6243	-20.2219	9.5248
18	85.2232	-22.4744	12.7584
19	82.3555	-24.4805	16.5562
20	78.8293	-26.2317	20.9235
<b>21</b>	<b>74.1884</b>	<b>-27.7220</b>	<b>25.8384</b>

Considérese como ejemplo la tabla 5.3, donde el punto inicial tiene los parámetros de rotación indicados en renglón 1, mientras que al punto final, le corresponden los parámetros indicados en el renglón 21. El parámetro de rotación asociado al actuador  $a$ , denotado por " $p$ ", comienza el movimiento en sentido positivo, esto se observa en el incremento del valor de " $p$ ". Los parámetros de rotación asociados a los actuador  $b$  y  $c$ , denotados por " $r$ " y " $r$ ", respectivamente, comienza el movimiento en sentido negativo dado el decremento en sus valores. Por tanto, el movimiento comienza con una forma de operación funcional *Simultánea* de orden 3 con sentidos de operación (1,-1,-1) para cada actuador, respectivamente, desde el renglón 1 hasta el 9. En el renglón 9, actuador  $a$  cambia su sentido de operación esto es, el actuador  $a$  deja de incrementar su valor y comienza a decrementarse; esto implica que ahora se requiere de una forma operación *Simultánea* de orden 3 con sentidos (-1,-1,-1) para cada actuador, respectivamente, desde el renglón 9 hasta el 10. En el renglón 10, el actuador  $c$  cambia su sentido de operación de negativo a positivo, es decir, ahora comienza a incrementarse, luego entonces, ahora se tiene una forma de operación simultánea de orden 3 con sentidos de operación (-1,-1,1), respectivamente para cada actuador. Esta última forma de operación se mantiene sin cambio alguno desde el renglón 10 hasta el renglón 21, es decir, hasta el punto final.

Ahora bien, conjuntando las tres *formas de operación* como una *secuencia* de *grupos* de actuadores, se obtiene una *secuencia híbrida* de grado y orden 3. Por lo tanto, para que el robot manipulador paralelo plano 3-RRR sea capaz de realizar un movimiento como el especificado en la tabla 5.1, dicho movimiento se debe definir con una *operación funcional* de clase *Secuencial Híbrida* de grado y orden 3, tipo (3)-(3)-(3). En la tabla 5.4 se muestra, de acuerdo al capítulo 1 (sección 1.3.4), el código binario asociado a tal *movimiento* o *forma de operación funcional*.

**Tabla 5.4 Código binario: movimiento Híbrido grado y orden 3 tipo (3)-(3)-(3).**

${}^{[H]}_{[D]}SH^3_{3,(abc-abc-abc)}$		$D_{1 \times 3}$								
Cadena		$CC_1$			$CC_2$			$CC_3$		
Actuador y Junta		$a(J1)$	$J2$	$J3$	$b(J4)$	$J5$	$J6$	$c(J2)$	$J8$	$J9$
Sensor		$Z_1^T$	$Z_2^{AC}$	$Z_3^{PL}$	$Z_4^T$	$Z_5^{AC}$	$Z_6^{PL}$	$Z_7^T$	$Z_8^{AC}$	$Z_9^{PL}$
$H_{1 \times 3}$	$\tau_1$	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1
	$\tau_2$	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1
	$\tau_3$	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0
Matriz de Sentidos					Matriz de Arreglos					
$H_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} (1,-1,-1) \\ (-1,-1,-1) \\ (-1,-1,1) \end{bmatrix}$					$D_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 3[1,2] \\ 3[1,2] \\ 3[1,2] \end{bmatrix}$					

Finalmente, se puede constatar del ejemplo anterior, que un movimiento asociado a un manipulador, está constituido por *secuencias de grupos* de actuadores, según se estableció en el capítulo 1. Cabe destacar la relevancia del modelo cinemático del manipulador, en particular, de la cinemática inversa, para poder determinar la *operación funcional* de un movimiento cualquiera que realice un manipulador.

## CONCLUSIONES Y RESULTADOS

A través del presente trabajo de tesis fueron satisfechos los objetivos siguientes:

- Se construyó un modelo de información operacional para robots manipuladores (**MIOM**).
- El **MIOM** fué utilizado para analizar, caracterizar y representar los movimientos de un robot manipulador paralelo plano de 3GDL tipo RRR.
- Fueron generados y programados los modelos cinemáticos de posicionamiento asociados al robot manipulador paralelo plano en estudio.
- Se construyó y controló un prototipo de robot paralelo plano tipo 3-RRR.
- Fueron probados algunos movimientos de operación por medio del prototipo construido.

Para conocer los movimientos de un robot manipulador es necesario analizar los factores internos y externos que influyen en la operatividad de dicho robot. El modelo de información **MIOM** identifica, estructura y representa los elementos implicados en la operación de robots manipuladores en general. La información generada por el **MIOM** puede ser utilizada para diversos propósitos, entre ellos, para analizar, caracterizar y representar los movimientos de estructuras articuladas seriales o paralelos del tipo manipulador.

En este trabajo se ha utilizado el **MIOM** para caracterizar los movimientos de un robot manipulador paralelo plano de 3GDL tipo RRR, el cual, tiene asociadas 70 *formas simultáneas*, básicas o elementales, para operarar funcionalmente sus actuadores, y a partir de éstas, generar un número finito no contable de formas de operación secuenciales. Sin embargo, en este trabajo se ha acotado dicho



número a 319,782 *formas de operación secuenciales*, tomando en cuenta los grados de libertad (GDL) del manipulador.

Para lograr reproducir los movimientos de operación encontrados, es necesario construir los modelos cinemáticos de posicionamiento, de los cuales, se obtienen los parámetros de rotación de cada actuador; posteriormente, se requiere simular los resultados en computadora y finalmente reproducir los movimientos en un prototipo.

En el presente trabajo fueron generados los modelos de posición del robot en estudio usando el álgebra de los números complejos. Los modelos se programaron en el paquete de cálculo formal *Mathematica*. Los movimientos del robot paralelo se simularon en una computadora y posteriormente imitados en un prototipo previamente construido.

Los resultados obtenidos se resumen en los puntos siguientes:

- El modelo de información MIOM puede utilizarse para caracterizar los movimientos de robots seriales y paralelos de "n" grados de libertad.
- Los movimientos de operación asociados al robot paralelo se clasifican en: Simultáneos (70), Secuenciales Unitarios (72), Secuenciales Mixtos (96) y Secuenciales Híbridos (319,544) siendo 319,782 el número total de movimientos de operación funcionales.
- Los movimientos de operación simultáneos constituyen la forma de operación más elemental en que un manipulador puede operar sus actuadores funcionalmente.
- Cualquier movimiento que realice un un manipulador estará constituido por una forma de operación simultánea, o bien, por una secuencia de éstas.
- Debido a la arquitectura del robot paralelo plano, tanto las formas de operación simultáneas como las formas secuenciales híbridas, se asocian a

movimientos naturales y pueden ser reproducidos en toda el área de trabajo del robot.

- Debido a la arquitectura del robot paralelo plano, las formas de operación secuenciales unitarias y mixtas también están asociadas a movimientos naturales, sin embargo, sólo pueden ser efectuados en ciertas pequeñas regiones del área de trabajo.
- El prototipo construido tiene restricciones físicas ajenas a la propia arquitectura del robot paralelo plano debidas al tipo de actuadores, como consecuencia, las formas de operación secuenciales y mixtas se presentan en regiones del área de trabajo más grandes y están asociadas a movimientos forzados.
- En un movimiento con una trayectoria cualquiera (dentro del área de trabajo), se pueden presentar, es decir, puede estar constituido por dos o más formas de operación diferentes. Para visualizar dichas formas de operación, es necesario interpretar adecuadamente los resultados de la cinemática inversa.
- Los diversos movimientos de operación asociados al robot paralelo (y en general a cualquier robot manipulador) dependen en gran medida del perfil de desplazamientos de los actuadores.
- Los movimientos de operación asociados a un robot paralelo difieren, desde el punto de vista cualitativo, de los movimientos de operación asociados a los robots manipuladores seriales dada la integración eslabones conducidos en los primeros.
- El estudio y caracterización de movimientos de un robot manipulador se basa en los eslabones activos o conductores, es decir, aquellos que integran un actuador.
- En este trabajo de tesis, el robot paralelo estudiado no tiene singularidades. Esto se debe a que el álgebra de complejos permite obtener valores para aquellas posiciones en las cuales, desde el punto de vista del álgebra matricial utilizada comúnmente para resolver la cinemática inversa y directa, no existe solución.

- El robot paralelo plano estudiado alcanza posiciones límite o de "agarrotamiento" a partir de las cuales, la operación de los actuadores no es posible con los mismos sentidos de operación que originaron dicha posición.
- El prototipo construido fué usado sólo para probar movimientos por lo cual, el diseño del mismo se realizó con parámetros mínimos (no incluidos en el trabajo).
- Para construir el sistema de control del robot es necesario interpretar los resultados de la simulación computacional.

Se puede concluir del presente estudio que, es de suma importancia conocer los movimientos de un robot manipulador, pues, tal conocimiento permitirá, por un lado, establecer las relaciones internas y externas del robot, y por otro lado, utilizar de forma eficiente al robot para las aplicaciones y tareas encomendadas.

Futuros trabajos relacionados con la presente tesis son:

- Construir los modelos cinemáticos y dinámicos de robots paralelos planos.
- Diseñar y construir prototipos de robots paralelos con base a los modelos dinámicos.
- Modelación de plataformas espaciales.
- Caracterizar y representar movimientos de robots manipuladores seriales.

## APÉNDICE A

---

# PARAMETRIZACIÓN DE LAS ROTACIONES RÍGIDAS EN EL PLANO

---

## APÉNDICE A

### PARAMETRIZACIÓN DE LAS ROTACIONES RÍGIDAS EN EL PLANO

**Introducción:** Presentaremos en este apéndice la parametrización de las rotaciones rígidas en el plano utilizando para este propósito el espacio vectorial de números complejos, los resultados obtenidos son aplicados a la modelación cinemática de posicionamiento de un robot paralelo plano de tres grados de libertad. El contenido de este apéndice se basa en [2], el cual es presentado en su totalidad.

#### A.1 El espacio vectorial de los números complejos

En esta parte definiremos dos operaciones binarias sobre el conjunto  $\mathfrak{R}^2$ , el cual como es bien sabido, es el conjunto de parejas ordenadas de números reales, una es la operación aditiva  $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  usual en  $\mathfrak{R}^2$  y la otra una operación multiplicativa  $*$  :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ . Mostraremos que mediante estas operaciones la pareja  $(\mathfrak{R}^2, \oplus)$  y la terna  $(\mathfrak{R}^2, \oplus, *)$  forman un grupo aditivo conmutativo y un campo conmutativo, respectivamente. Al utilizar la multiplicación escalar  $\bullet : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  y el producto interno  $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  usuales, se mostrará que el conjunto  $(\mathfrak{R}^2, \oplus, *, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  es un espacio vectorial con producto interno conocido como el conjunto de números complejos. Consideremos entonces el conjunto  $\mathfrak{R}^2$  sobre el cual definiremos las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{i) } (a, b) \oplus (\alpha, \beta) &= (a + \alpha, b + \beta) \\ \text{ii) } (a, b) * (\alpha, \beta) &= (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha), \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\forall (a, b), (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2,$$

de hecho la operación  $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es la suma usual en  $\mathfrak{R}^2$  y es bien conocido que la pareja  $(\mathfrak{R}^2, \oplus)$  es un grupo aditivo conmutativo. Mostraremos ahora un resultado fundamental para nuestros objetivos.

**Teorema A.1** La terna  $(\mathfrak{R}^2, \oplus, *)$  es un campo conmutativo.

Demostración. Puesto que la pareja  $(\mathfrak{R}^2, \oplus)$  es un grupo aditivo conmutativo, falta únicamente mostrar que  $(\mathfrak{R}^2, *)$  es un grupo multiplicativo conmutativo excepto por la existencia del inverso multiplicativo del elemento nulo aditivo, y que además la operación aditiva y la multiplicativa satisfacen las correspondientes propiedades distributivas. En efecto, de acuerdo a la conmutatividad de la multiplicación de los números reales, la operación  $* : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es conmutativa además:

i) la operación  $* : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es asociativa. En efecto, sean  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$  tal que

$\mathbf{p} = (a, b), \mathbf{q} = (\alpha, \beta), \mathbf{r} = (c, d)$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} * (\mathbf{q} * \mathbf{r}) &= (a, b) * ( (\alpha, \beta) * (c, d) ) \\
 &= (a, b) * ( \alpha c - \beta d, \alpha d + \beta c ) \\
 &= ( a(\alpha c - \beta d) - b(\alpha d + \beta c), a(\alpha d + \beta c) + b(\alpha c - \beta d) ) \\
 &= ( a\alpha c - a\beta d - b\alpha d - b\beta c, a\alpha d + a\beta c + b\alpha c - b\beta d ) \\
 &= ( (\alpha a - \beta b)c - (\alpha\beta + b\alpha)d, (\alpha\beta + b\alpha)c + (\alpha a - \beta b)d ) \\
 &= (\alpha a - \beta b, \alpha\beta + b\alpha) * (c, d) \\
 &= ( (a, b) * (\alpha, \beta) ) * (c, d) \\
 &= (\mathbf{p} * \mathbf{q}) * \mathbf{r}
 \end{aligned}$$

ii) Construiremos ahora el elemento identidad de la operación multiplicación.

Sabemos que  $\underline{1} \in \mathfrak{R}^2$  es la identidad multiplicativa de  $\mathfrak{R}^2$  si y solo si

$\underline{1} * \mathbf{p} = \mathbf{p} * \underline{1} = \mathbf{p}, \forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ . Por tanto, siendo  $\mathbf{p} = (a, b)$  y  $\underline{1} = (\alpha, \beta)$ , entonces,

$\underline{1} * \mathbf{p} = \mathbf{p} * \underline{1} = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (a, b)$ . Esto es,

$$a\alpha - b\beta = a \quad , \quad a\beta + b\alpha = b.$$

El elemento identidad multiplicativo de  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  con respecto a la operación  $*$  :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , se obtiene al resolver este último sistema de ecuaciones. Es decir, siendo  $a \neq 0$ , las dos ecuaciones se reducen a :

$$\alpha = \frac{1}{a} \{ a + b\beta \} \quad , \quad a\beta + \frac{b}{a} \{ a + b\beta \} = b.$$

Por tanto, de la segunda de estas últimas ecuaciones se obtiene que:

$$(a^2 + b^2) \beta = 0.$$

Luego,  $\beta = 0$  y  $\alpha = 1$ . Esto es  $\underline{1} = (1, 0)$ .

iii) Mostraremos ahora que para toda  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  existe  $\mathbf{p}' \in \mathfrak{R}^2$ , tal que  $\mathbf{p} * \mathbf{p}' = \mathbf{p}' * \mathbf{p} = \underline{1}$ . En efecto, siendo  $\mathbf{p} = (a, b)$  y  $\mathbf{p}' = (\alpha, \beta)$ , entonces,

$$\mathbf{p} * \mathbf{p}' = \mathbf{p}' * \mathbf{p} = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (1, 0).$$

Por tanto,

$$a\alpha - b\beta = 1 \quad , \quad a\beta + b\alpha = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene primeramente que,

$$\alpha = \frac{1}{a} (1 + b\beta) \quad , \quad a\beta + \frac{b}{a} (1 + b\beta) = 0.$$

Esto es,  $(a^2 + b^2) \beta = -b$ , equivalentemente  $\beta = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ . Además,  $\alpha = \frac{a}{a^2 + b^2}$ .

Por tanto, el elemento inverso multiplicativo de  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ , está dado por:

$$\mathbf{p}' = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

iv) Sean ahora  $\mathbf{p} = (a,b) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ , y  $\mathbf{r} = (c,d) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces las siguientes propiedades distributivas son satisfechas:

$$\mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) = \mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{r} = \mathbf{p} * \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} * \mathbf{r}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= (a,b) * \{(\alpha, \beta) \oplus (c,d)\} = (a,b) * (\alpha + c, \beta + d) \\ &= (a(\alpha+c) - b(\beta+d), a(\beta+d) + b(\alpha+c)) \\ &= (a\alpha + ac - b\beta - bd, a\beta + ad + b\alpha + bc) \\ &= (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) \oplus (ac - bd, ad + bc) \\ &= (a,b) * (\alpha, \beta) \oplus (a,b) * (c,d) = \mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{r} &= ((a,b) \oplus (\alpha, \beta)) * (c,d) \\ &= (a + \alpha, b + \beta) * (c,d) = ((a + \alpha)c - (b + \beta)d, (a + \alpha)d + (b + \beta)c) \\ &= (ac + \alpha c - bd - \beta d, ad + \alpha d + bc + \beta c) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \oplus (\alpha c - \beta d, \alpha d + \beta c) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= (a,b) * (c,d) \oplus (\alpha, \beta) * (c,d) \\
 &= \mathbf{p} * \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} * \mathbf{r}.
 \end{aligned}$$



Es igualmente bien conocido que la operación  $\bullet: \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , definida por:

$$\alpha \bullet (a,b) = (\alpha a, \alpha b), \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}, (a,b) \in \mathfrak{R}^2,$$

es una multiplicación escalar y por consecuencia  $\mathfrak{R}^2$  es un espacio vectorial real. Además con esta multiplicación escalar el inverso multiplicativo de  $\mathbf{p} = (a,b) \in \mathfrak{R}^2$  puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{p}' = \frac{1}{a^2 + b^2} \bar{\mathbf{p}},$$

donde el elemento  $\bar{\mathbf{p}} = (a, -b) \in \mathfrak{R}^2$  es llamado el conjugado de  $\mathbf{p} = (a,b) \in \mathfrak{R}^2$ . Algunas propiedades de este elemento se presentan en el teorema siguiente:

**Teorema A.2.** Sea  $\mathbf{p} = (a,b) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{q} = (\alpha,b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces:

- i)  $\overline{\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{p}} \oplus \bar{\mathbf{q}},$
- ii)  $\overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{p}},$
- iii)  $\mathbf{p} * \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}} * \mathbf{p} = (a^2 + b^2, 0).$

*Demostración.* Observemos primeramente que de acuerdo con la definición de la operación aditiva en  $\mathfrak{R}^2$  y la correspondiente al conjugado se obtiene que:

$$\overline{\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}} = \overline{(a+\alpha, b+\beta)} = (a+\alpha, -b-\beta) = (a, -b) \oplus (\alpha, -\beta) = \bar{\mathbf{p}} \oplus \bar{\mathbf{q}},$$

también,

$$\begin{aligned}\bar{q} * \bar{p} &= \overline{(a, b)} * \overline{(\alpha, \beta)} = \overline{(a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)} = (a\alpha - b\beta, -a\beta - b\alpha) = \\ &= (\alpha, -\beta) * (a, -b) = \bar{q} * \bar{p}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathbf{p} * \bar{\mathbf{p}} = (a, b) * (a, -b) = (a^2 + b^2, 0).$$

■

Es también bien conocido, que la transformación  $\langle \bullet, \bullet \rangle: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  definida, siendo  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ , por:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a\alpha + b\beta,$$

es un producto interno en  $\mathfrak{R}^2$ , de tal suerte que el conjunto  $\mathcal{C} = (\mathfrak{R}^2, \oplus, *, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle, \|\bullet\|)$  es un espacio vectorial con producto interno y la función  $\|\bullet\|: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por:

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2}, \forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2,$$

es una norma, por tanto  $\mathcal{C}$  es un espacio vectorial normado, y sus elementos son llamados comunmente números complejos.

**Observación A.1.** Observemos que al tomar en cuenta la definición de la operación aditiva, el elemento  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathcal{C}$  puede expresarse como la suma siguiente:

$$\mathbf{p} = (a, b) = (a, 0) \oplus (0, b).$$

Es decir, al definir los subespacios

$$\mathcal{C}_R = \{(a,0): a \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^2, \mathcal{C}_V = \{(0,b): b \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^2,$$

del espacio vectorial de números complejos, éste puede expresarse mediante la siguiente suma directa de subespacios:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_R \dot{\times} \mathcal{C}_V \equiv \{\mathbf{p} \in \mathcal{C} : \mathbf{p} = \mathbf{p}_R \oplus \mathbf{p}_V; \mathbf{p}_R \in \mathcal{C}_R, \mathbf{p}_V \in \mathcal{C}_V\}.$$

También al definir los isomorfismos  $T_R: \mathcal{C}_R \rightarrow \mathfrak{R}; T_V: \mathcal{C}_V \rightarrow \mathfrak{R}$  por :

$$T_R(a,0) = a, \quad T_V(0,b) = b,$$

y, siendo  $\mathbf{p} = (a,b) \in \mathcal{C}$ , entonces,

$$\mathbf{p} = T_R^{-1}(a) \oplus T_V^{-1}(b).$$

Al observar finalmente que, siendo  $\mathbf{q} = (\alpha,\beta) \in \mathfrak{R}^2$ ,

$$\bar{\mathbf{p}} * \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{p} = 2(a\alpha + b\beta, 0),$$

el producto interno de los elementos  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2$  puede expresarse en la siguiente forma:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \equiv \frac{1}{2} T_R \{ \bar{\mathbf{p}} * \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{p} \}.$$



**Observación A.2.** Obsérvese que el elemento  $\underline{e}_2 = (0,1) \in \mathfrak{R}^2$  de la base canónica, satisface que:

$$i^2 = \underline{e}_2 * \underline{e}_2 = (0,1) * (0,1) = (-1,0) \equiv T_R^{-1}(-1).$$

Además, siendo  $\mathbf{p} = (a,b)$ , entonces,

$$\mathbf{p} = (a,b) = (a,0) \oplus b\mathbf{e}_2 = T_R^{-1}(a) \oplus b\mathbf{e}_2.$$

Estas dos últimas expresiones han sido utilizadas para interpretar los números complejos como la suma de una parte real, mas una parte imaginaria. En realidad el número imaginario  $i$ , comúnmente utilizado en el álgebra compleja, es el vector  $\mathbf{e}_2$  de la base canónica y la representación algebraicamente correcta de la pareja  $\mathbf{p} = (a,b) \in \mathfrak{R}^2$ , está dada por la última ecuación de esta observación.

■

## A.2 Representación paramétricas de las rotaciones.

El objetivo de esta parte es construir con la operación  $*$ :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , estudiada anteriormente, una transformación lineal  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , con  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  fijo, que preserve el producto interno y cuya matriz con respecto a la base canónica posea determinante positivo, con lo cual dicha transformación de parámetro  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ , es una rotación. Se estudiarán también algunas otras representaciones de la rotación antes mencionada. Sea  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ , fijo definida por:

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} * \mathbf{q} \quad , \quad \forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2.$$

(A.2)

Las propiedades de la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , definida anteriormente se resumen en los resultados siguientes.

**Teorema A.3.** La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida en la ecuación (A.2) es lineal y ortogonal de determinante positivo.

Demostración: En efecto, siendo  $\mathbf{q}, \mathbf{s} \in \mathfrak{R}^2$ , y de acuerdo a la distributividad de la operación  $*$ :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{s}\} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} * \mathbf{q}\} \oplus \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} * \mathbf{s}\} = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \rho \end{aligned}$$

$(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ ,

también,  $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$ ,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} * (\alpha \bullet \mathbf{q})\} \\ &= \frac{\alpha}{\|\mathbf{p}\|} \bullet \{\mathbf{p} * \mathbf{q}\} = \alpha \bullet \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \end{aligned}$$

Además,  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es ortogonal, pues:

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \rho(\overline{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) * \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \oplus \rho(\overline{\mathbf{p} * \mathbf{r}}) * \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \text{Tr} \{ (\overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}}) * (\mathbf{p} * \mathbf{r}) \oplus (\overline{\mathbf{p} * \mathbf{r}}) * (\mathbf{p} * \mathbf{q}) \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \text{Tr} \{ \overline{\mathbf{q}} * (\overline{\mathbf{p} * \mathbf{p}}) * \mathbf{r} \oplus \overline{\mathbf{r}} * (\overline{\mathbf{p} * \mathbf{p}}) * \mathbf{q} \} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \overline{\mathbf{q}} * \mathbf{r} \oplus \overline{\mathbf{r}} * \mathbf{q} \} = \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle. \end{aligned}$$

Mostremos finalmente que el determinante de la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es positivo, en efecto, siendo  $B = \{(1,0), (0,1)\} \subset \mathfrak{R}^2$  la base canónica en  $\mathfrak{R}^2$ , la matriz de  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  con respecto a esta base resulta ser,

$$M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

pues,

$$\rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) * (1, 0) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b),$$

$$\rho(\mathbf{p}, \underline{e}_2) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) * (0, 1) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-b, a).$$

El resultado buscado se obtiene al observar que  $\det M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} = 1$ .



**Teorema A.4.** La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2) = \{\underline{T}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2: \underline{T} \text{ es lineal}\}$ , puede ser representada en la forma siguiente:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \underline{I} + b \underline{W}\} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{b \underline{W} - a \underline{W}^2\},$$

donde  $\underline{I}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es la transformación identidad y  $\underline{W}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  está dado por:

$$\underline{W} = -\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1.$$

**Demostración.** En efecto, observemos que:

$$M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \underline{I} + b \underline{W}\}$$

donde  $\underline{I}$  es la matriz identidad y la matriz antisimétrica  $\underline{W}$  está dada por:

$$\underline{W} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda igualdad del teorema se obtiene al observar que:

$$\underline{W}^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv -\underline{I}. \quad \blacksquare$$

La parte antisimétrica  $\underline{W} \in A(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2) = \{ \underline{B} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2 : \underline{B} = -\underline{B}^T \}$  del teorema anterior, satisface el siguiente resultado:

**Teorema A.5.** La transformación  $\underline{W} \in A(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$  es tal que

$$\underline{W}^{2n-1} = (-1)^{n-1} \underline{W}, \quad \underline{W}^{2n} = (-1)^{n-1} \underline{W}^2, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

*Demostración.* Para demostrar este teorema procederemos por inducción, mostrando primeramente que para  $n = 2$  el resultado es satisfecho. En efecto,

$$\underline{W}^3 = \underline{W}^{2 \circ} \underline{W} = -\underline{I} \circ \underline{W} \equiv -\underline{W}, \quad \underline{W}^4 = \underline{W}^3 \circ \underline{W} = -\underline{W} \circ \underline{W} = -\underline{W}^2,$$

por tanto para  $n = 2$ , el resultado es obtenido. Supongamos ahora que para  $n-1$  el resultado se satisface, entonces

$$\begin{aligned} \underline{W}^{2n-1} &= \underline{W}^{2n-2} \circ \underline{W} = \underline{W}^{2(n-1)} \circ \underline{W} = \underline{W}^{2(n-1)-1} \circ \underline{W}^2 \\ &= (-1)^{n-2} \underline{W} \circ \underline{W}^2 = (-1)^{n-2} \underline{W}^3 = -(-1)^{n-2} \underline{W} = \\ &= (-1)^{n-1} \underline{W}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \underline{W}^{2n} &= \underline{W}^{2n-2} \circ \underline{W}^2 = \underline{W}^{2(n-1)} \circ \underline{W}^2 = (-1)^{n-2} \underline{W}^2 \circ \underline{W}^2 \\ &= (-1)^{n-2} \underline{W}^4 = (-1)^{n-2} (-1) \underline{W}^2 = (-1)^{n-1} \underline{W}^2. \end{aligned}$$

■

### A.3 Representación exponencial de $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ .

Para interpretar físicamente los parámetros de la rotación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ , utilizaremos la geometría del espacio vectorial de los números complejos, presentando el resultado fundamental en el siguiente teorema.

**Teorema A.6.** Sea  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{v} = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in \mathfrak{R}^2$ . Entonces el coseno del ángulo formado por los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  está dado por:

$$\text{Cos } \theta = \frac{a}{\|\mathbf{p}\|} \quad , \quad \text{Sen } \theta = \pm \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} .$$

Demostración. En efecto, el coseno del ángulo está definido en términos del producto interno del vector  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^2$  y el vector rotado  $\mathbf{v} = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in \mathfrak{R}^2$ , esto es:

$$\text{Cos } \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\rho(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|} .$$

Además, siendo  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  una rotación, entonces  $\|\mathbf{u}\| = \|\rho(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|$ . También,

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (au_1 - bu_2, au_2 + bu_1) ,$$

por tanto,

$$\langle \mathbf{u}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (au_1^2 - b_1u_1u_2 + au_2^2 + bu_1u_2) = \frac{a \|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{p}\|} .$$

Esto es,

$$\text{Cos } \theta = \frac{a \|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{u}\|^2} = \frac{a}{\|\mathbf{p}\|} .$$



Finalmente, de la igualdad  $\text{Cos}^2 \theta + \text{Sen}^2 \theta = 1$  se obtiene que:

$$\text{Sen}^2 \theta = 1 - \text{Cos}^2 \theta = 1 - \frac{a^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \left\{ \|\mathbf{p}\|^2 - a^2 \right\} = \frac{b^2}{\|\mathbf{p}\|^2},$$

por tanto,  $\text{Sen} \theta = \pm \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{p}\|}$ .



El resultado del teorema anterior nos permite encontrar la siguiente representación trigonométrica de la rotación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ .

**Corolario A.1** La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$  puede ser representada en la forma:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos} \theta \underline{\mathbf{I}} \pm \text{Sen} \theta \underline{\mathbf{W}}.$$

Demostración. En efecto, de acuerdo al teorema A.6 tenemos que  $a = \|\mathbf{p}\| \text{Cos} \theta$  y  $b = \pm \|\mathbf{p}\| \text{Sen} \theta$ , entonces,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \bullet) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ a \underline{\mathbf{I}} + b \underline{\mathbf{W}} \} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \|\mathbf{p}\| \text{Cos} \theta \underline{\mathbf{I}} \pm \|\mathbf{p}\| \text{Sen} \theta \underline{\mathbf{W}} \} \\ &= \text{Cos} \theta \underline{\mathbf{I}} \pm \text{Sen} \theta \underline{\mathbf{W}}. \end{aligned}$$



**Corolario A.2.** La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$  es tal que:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{n!} \underline{\mathbf{W}}_{\theta}^n.$$

Demostración. En efecto, recordemos que la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  puede expresarse de acuerdo con el teorema anterior en la forma:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos } \theta \underline{\mathbf{I}} \pm \text{Sen } \theta \underline{\mathbf{W}}.$$

Al considerar en esta expresión las expansiones en series de las funciones trigonométricas, esto es,

$$\text{Sen } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots, \quad \text{Cos } \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

Se obtiene, siendo  $\underline{\mathbf{W}}_\theta = \theta \underline{\mathbf{W}}$ , que:

Caso 1.

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \bullet) &= \text{Cos } \theta \underline{\mathbf{I}} + \text{Sen } \theta \underline{\mathbf{W}} \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) \underline{\mathbf{I}} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \underline{\mathbf{W}} \\ &= \underline{\mathbf{I}} + \theta \underline{\mathbf{W}} - \frac{\theta^2}{2!} \underline{\mathbf{I}} - \frac{\theta^3}{3!} \underline{\mathbf{W}} + \frac{\theta^4}{4!} \underline{\mathbf{I}} + \frac{\theta^5}{5!} \underline{\mathbf{W}} - \frac{\theta^6}{6!} \underline{\mathbf{I}} - \frac{\theta^7}{7!} \underline{\mathbf{W}} + \dots \\ &= \underline{\mathbf{I}} + \theta \underline{\mathbf{W}} + \frac{\theta^2}{2!} \underline{\mathbf{W}}^2 + \frac{\theta^3}{3!} \underline{\mathbf{W}}^3 + \frac{\theta^4}{4!} \underline{\mathbf{W}}^4 + \frac{\theta^5}{5!} \underline{\mathbf{W}}^5 + \frac{\theta^6}{6!} \underline{\mathbf{W}}^6 + \frac{\theta^7}{7!} \underline{\mathbf{W}}^7 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underline{\mathbf{W}}_\theta^n. \end{aligned}$$

Caso 2.

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos } \theta \underline{\mathbf{I}} - \text{Sen } \theta \underline{\mathbf{W}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) \mathbf{I} - \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \mathbf{W} \\
 &= \mathbf{I} - \theta \mathbf{W} - \frac{\theta^2}{2!} \mathbf{I} + \frac{\theta^3}{3!} \mathbf{W} + \frac{\theta^4}{4!} \mathbf{I} - \frac{\theta^5}{5!} \mathbf{W} - \frac{\theta^6}{6!} \mathbf{I} + \frac{\theta^7}{7!} \mathbf{W} + \dots \\
 &= \mathbf{I} - \theta \mathbf{W} + \frac{\theta^2}{2!} \mathbf{W}^2 - \frac{\theta^3}{3!} \mathbf{W}^3 + \frac{\theta^4}{4!} \mathbf{W}^4 - \frac{\theta^5}{5!} \mathbf{W}^5 + \frac{\theta^6}{6!} \mathbf{W}^6 - \frac{\theta^7}{7!} \mathbf{W}^7 + \dots \\
 &= \mathbf{I} - \frac{\theta}{1!} \mathbf{W} + \frac{1}{2!} \frac{\theta^2}{\theta} \mathbf{W}^2 - \frac{1}{3!} \frac{\theta^3}{\theta} \mathbf{W}^3 + \frac{1}{4!} \frac{\theta^4}{\theta} \mathbf{W}^4 - \frac{\theta^5}{5!} \mathbf{W}^5 + \frac{1}{6!} \frac{\theta^6}{\theta} \mathbf{W}^6 - \frac{1}{7!} \frac{\theta^7}{\theta} \mathbf{W}^7 + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{\theta^n}{\theta} \mathbf{W}^n .
 \end{aligned}$$

■

**Teorema A.7.** Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces la siguiente igualdad es satisfecha:

$$\mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{e}_3 \equiv (0, 0, \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2).$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &\equiv \varepsilon_{ijk} q_j \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \mathbf{e}_i \equiv \varepsilon_{3jk} q_j \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \mathbf{e}_3 \\
 &\equiv \{\varepsilon_{31k} q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k + \varepsilon_{32k} q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k\} \mathbf{e}_3 \\
 &\equiv \{\varepsilon_{312} q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 + \varepsilon_{321} q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1\} \mathbf{e}_3 \\
 &\equiv \{q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1\} \mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a q_0 q_1 + b q_0^2 - a q_0 q_1 + b q_1^2\} \underline{e}_3$$

$$\equiv \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2 \underline{e}_3.$$

■

**Corolario A.3.** Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces:

$$\mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv (0, 0, \pm \text{Sen } \theta \frac{\|\mathbf{q}\|^2}{\|\mathbf{p}\|}).$$

Demostración. En efecto el resultado buscado se obtiene de combinar los teoremas A.6 y A.7.

■

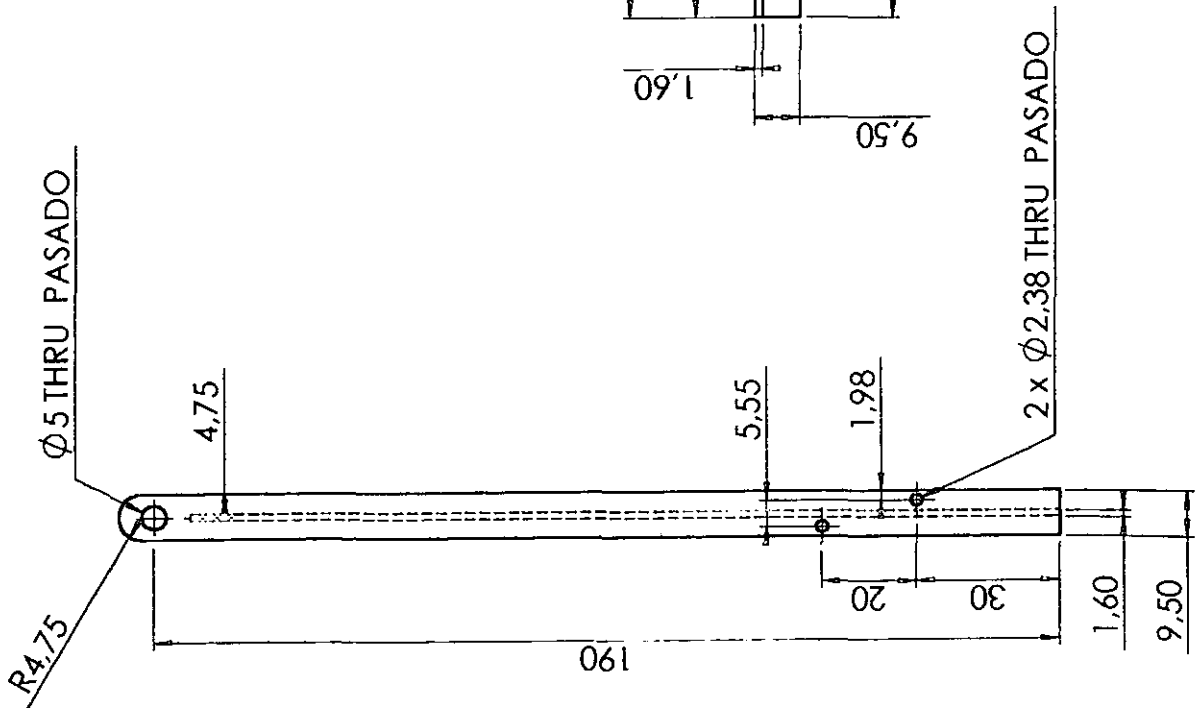
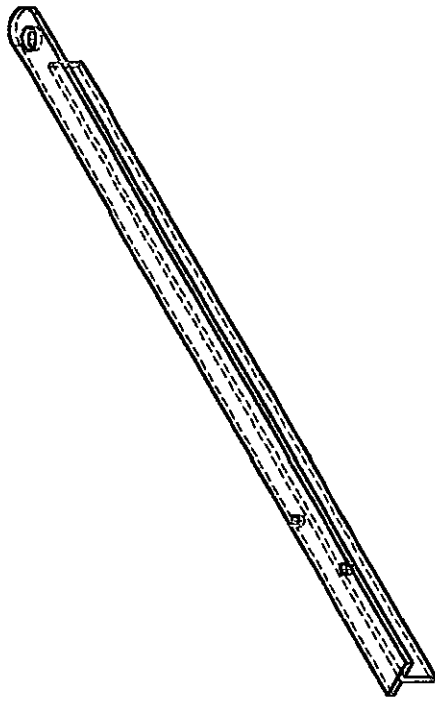
El marco teórico aquí definido es utilizado en el capítulo 3 para modelar un robot paralelo plano de 3GDL.

## **APÉNDICE B**

---

## **COMPONENTES DEL PROTOTIPO**

---



197.50

1.60

30

20

182.50

15

9.50

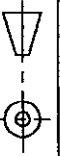
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DEPI

SECCION DE MECANICA

GRUPO DITAI

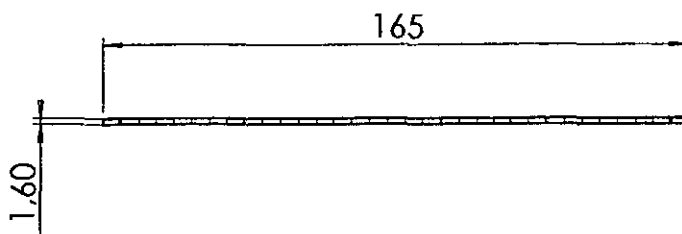
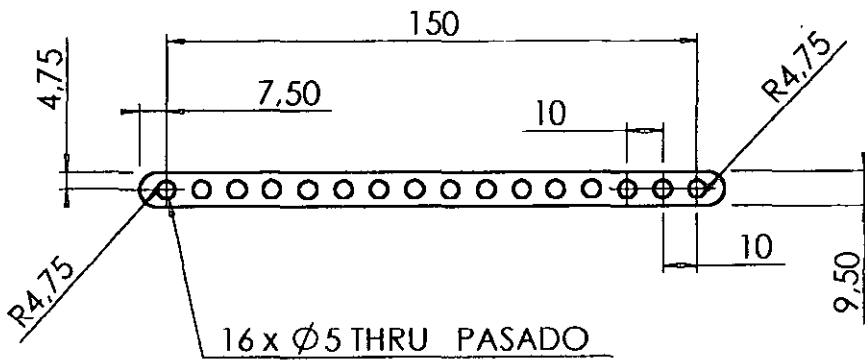
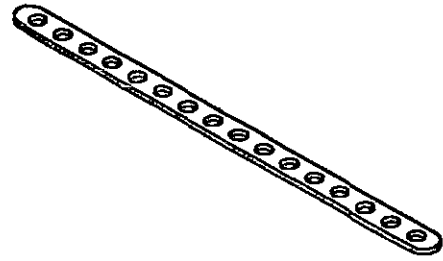


PROTOTIPO 3-RRR

ESLABON "T"

ACOTACIONES: mm CANTIDAD: 3 REV: EIL PZA: 3

SCALE: 3/8 MATERIAL: A1/POFIL "T" DB: JAPC FECHA:

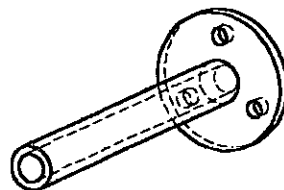
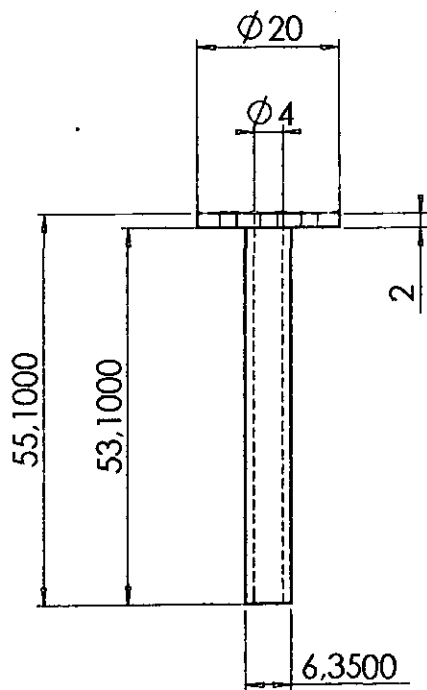
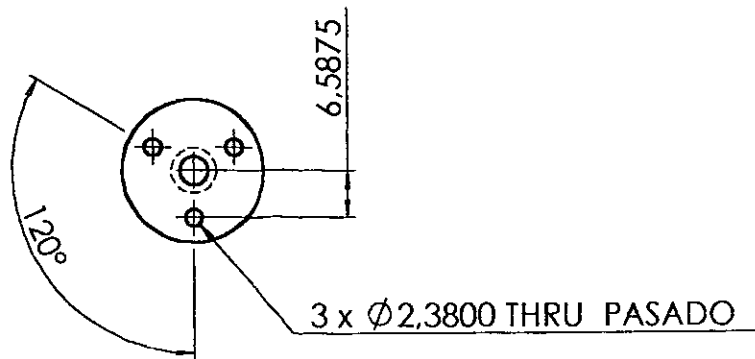


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
 FACULTAD DE INGENIERIA  
 DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
 SECCION DE MECANICA

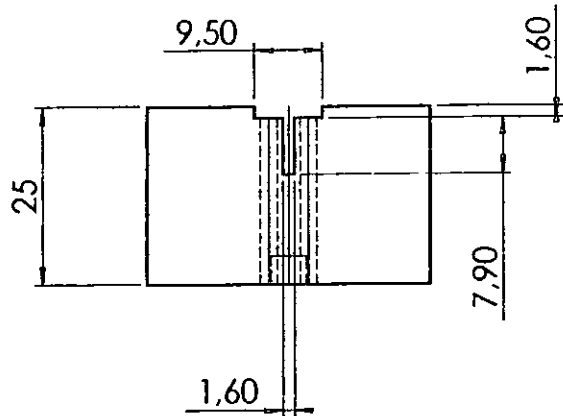
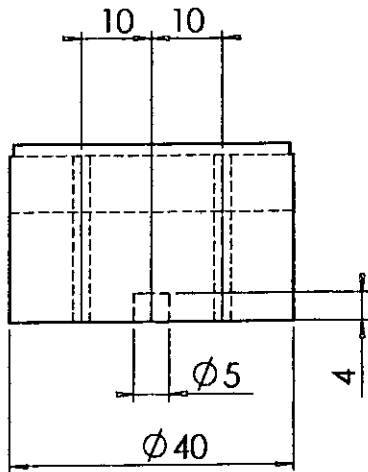
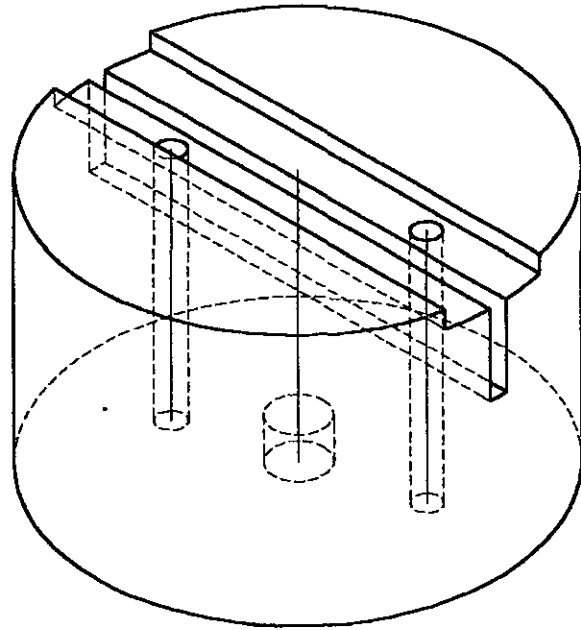
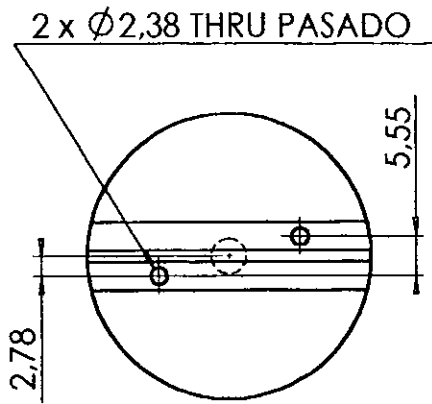
GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 2
	ESLABON PLANO		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 3	Rev: E JL
	SCALE: s/e	Material: Al	Dib: JAPC





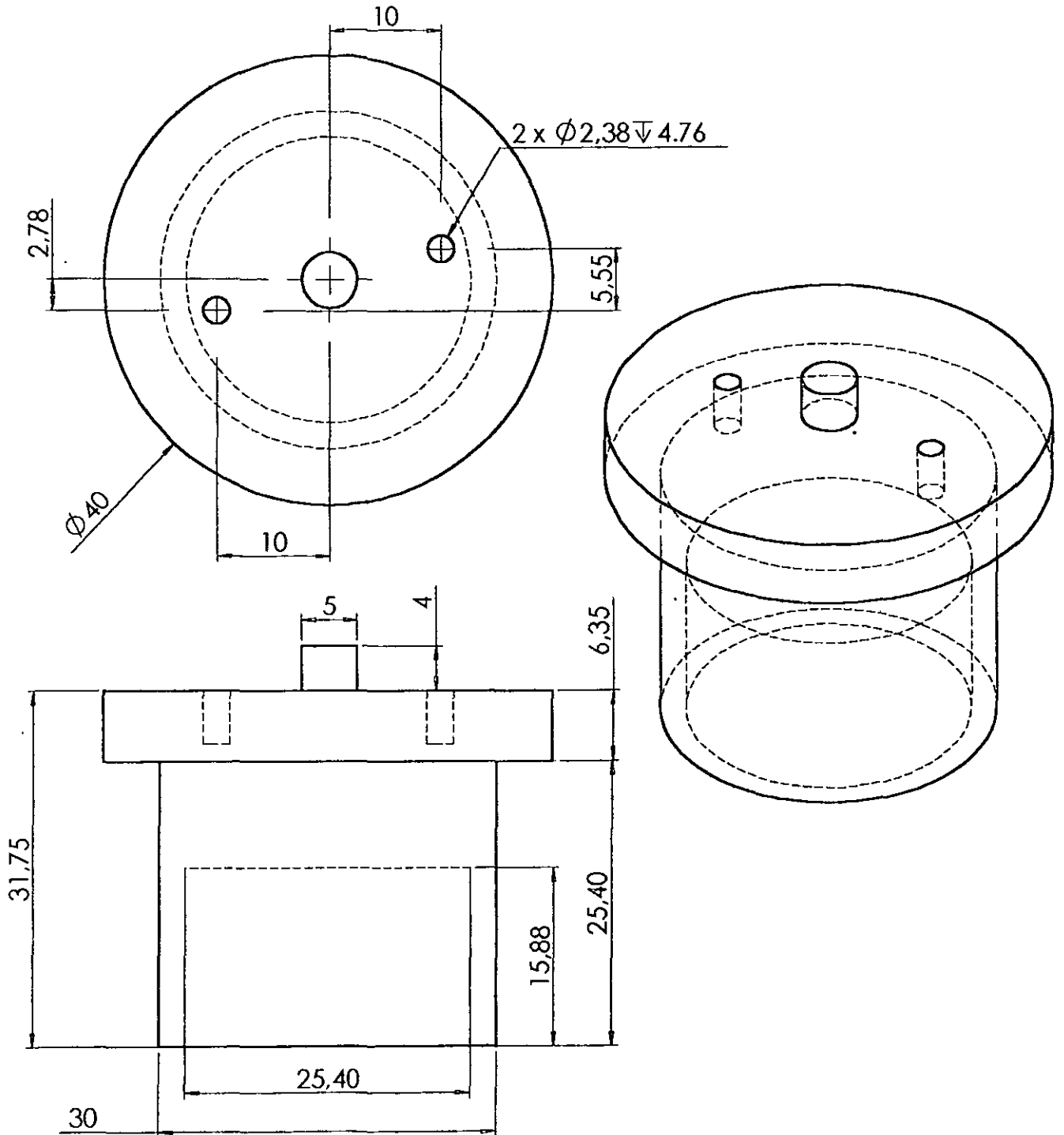


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO FACULTAD DE INGENIERIA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO SECCION DE MECANICA			
GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 4
	COPLE SOPORTE		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 1	Rev: E JL
	SCALE: s/e	Material: Al	Dib: JAPC



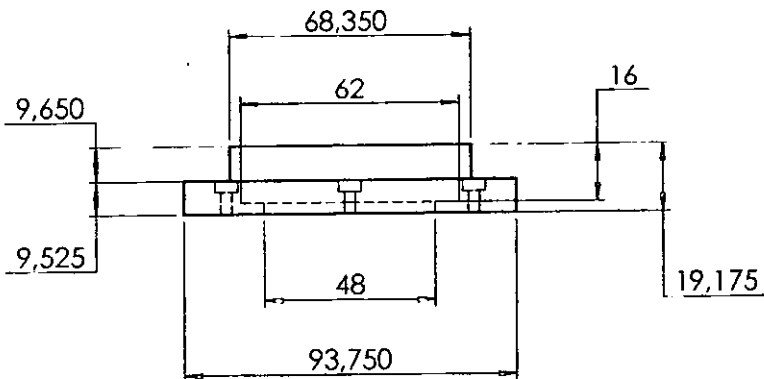
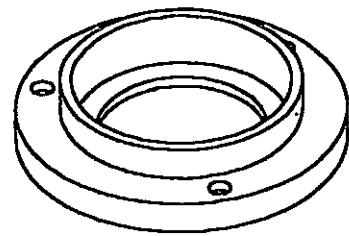
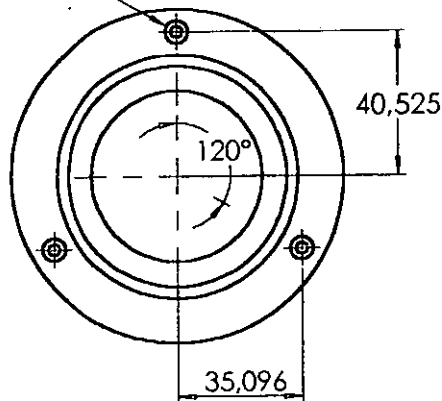
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
 FACULTAD DE INGENIERIA  
 DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
 SECCION DE MECANICA

GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 6
	COPLA AUXILIAR		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 3	Rev: E JL
	SCALE: s/e	Material: Al	Dib: JAPC

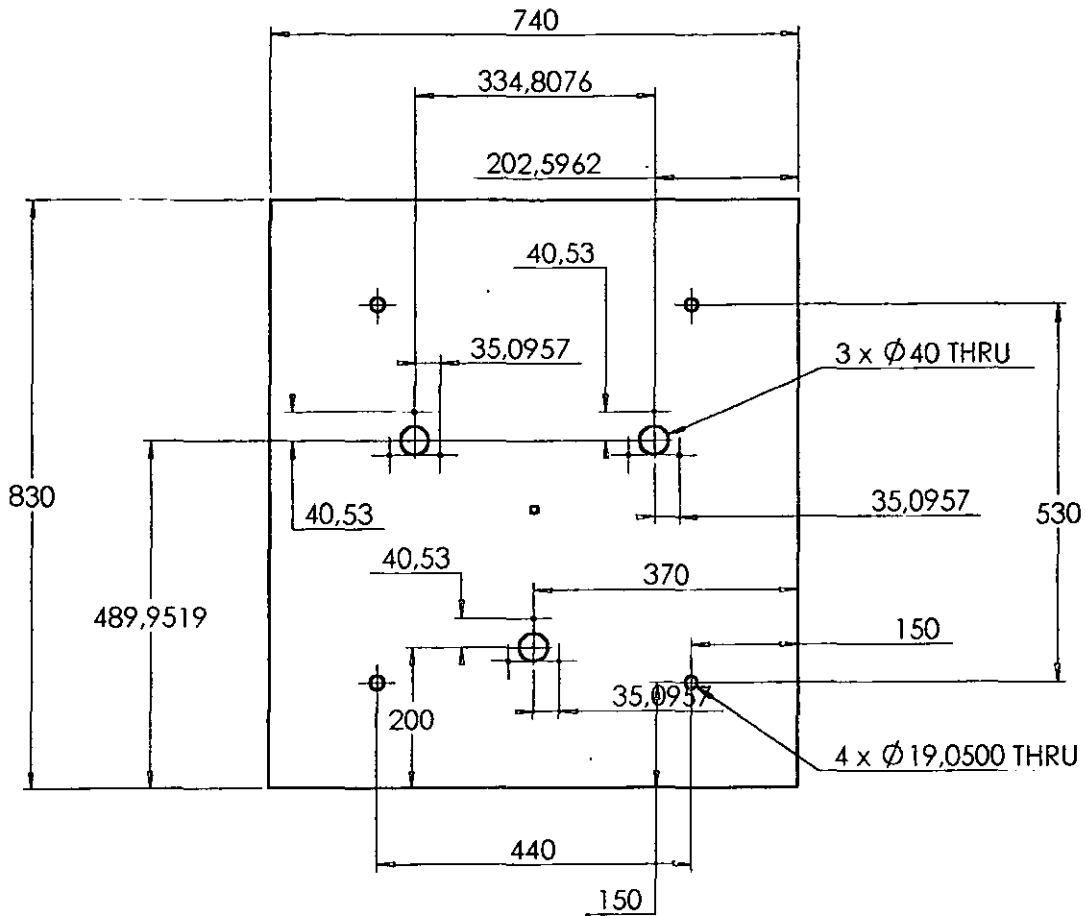


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO FACULTAD DE INGENIERIA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO SECCION DE MECANICA			
GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 7
	HOMBRO SUPERIOR		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 3	Rev: EJI
	SCALE: s/e	Material: Al	Dib: JAPC

3 x  $\varnothing 3.175$  THRU  
 $\square \varnothing 6.350 \nabla 3.175$

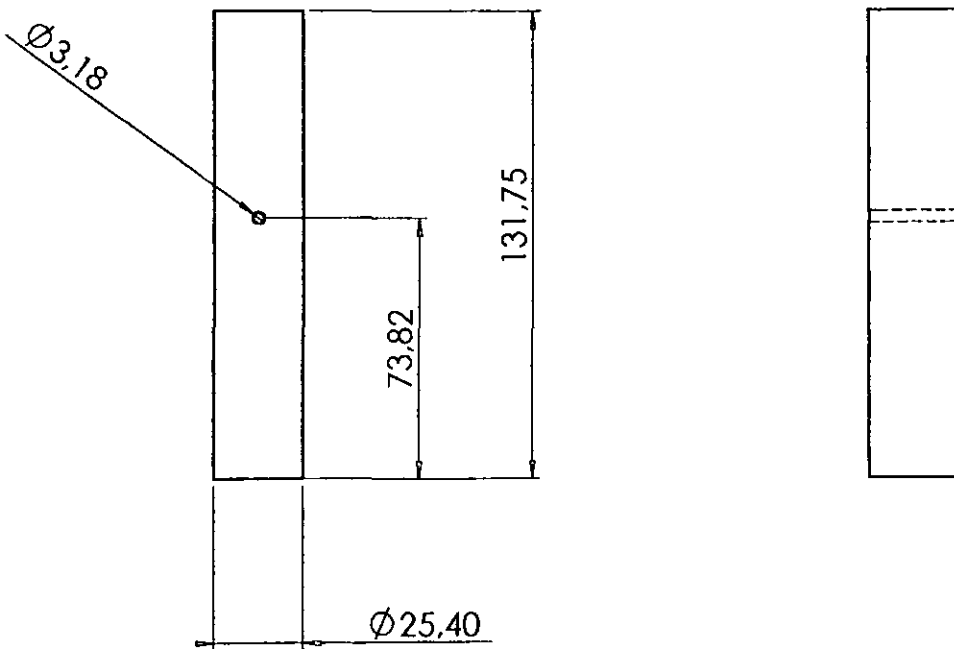


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO FACULTAD DE INGENIERIA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO SECCION DE MECANICA			
GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 9, 14
	CAJA RODAMIENTO		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 6	Rev: E JL
	SCALE: s/e	Material: Al	Dib: JAPC

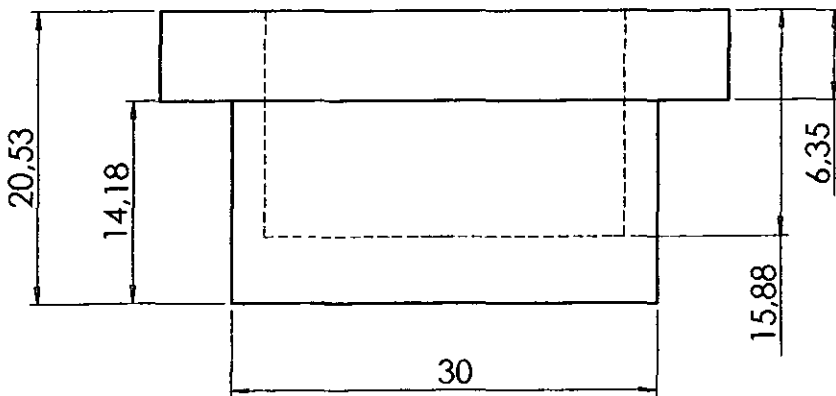
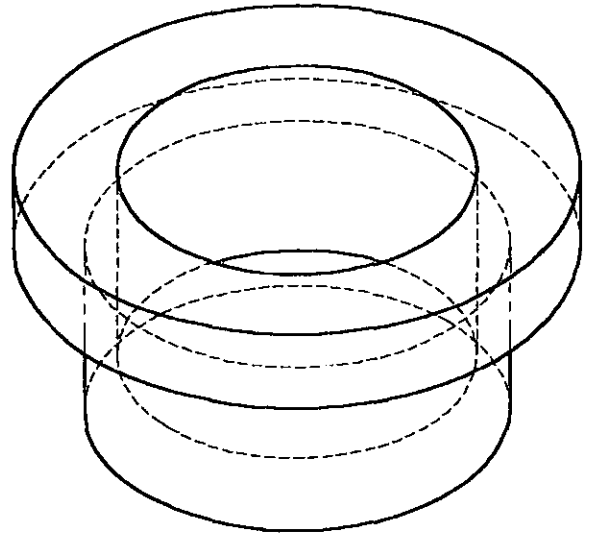
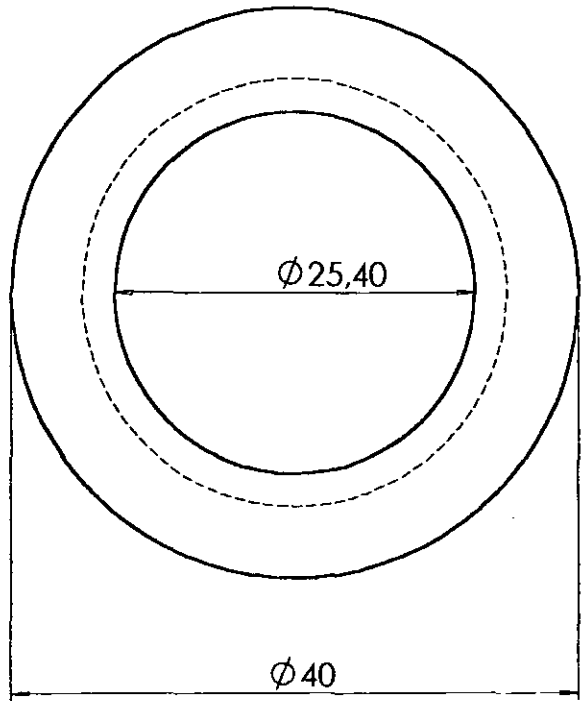


Nota: Todos los barrenos pequeños son de  $\varnothing 3.175$

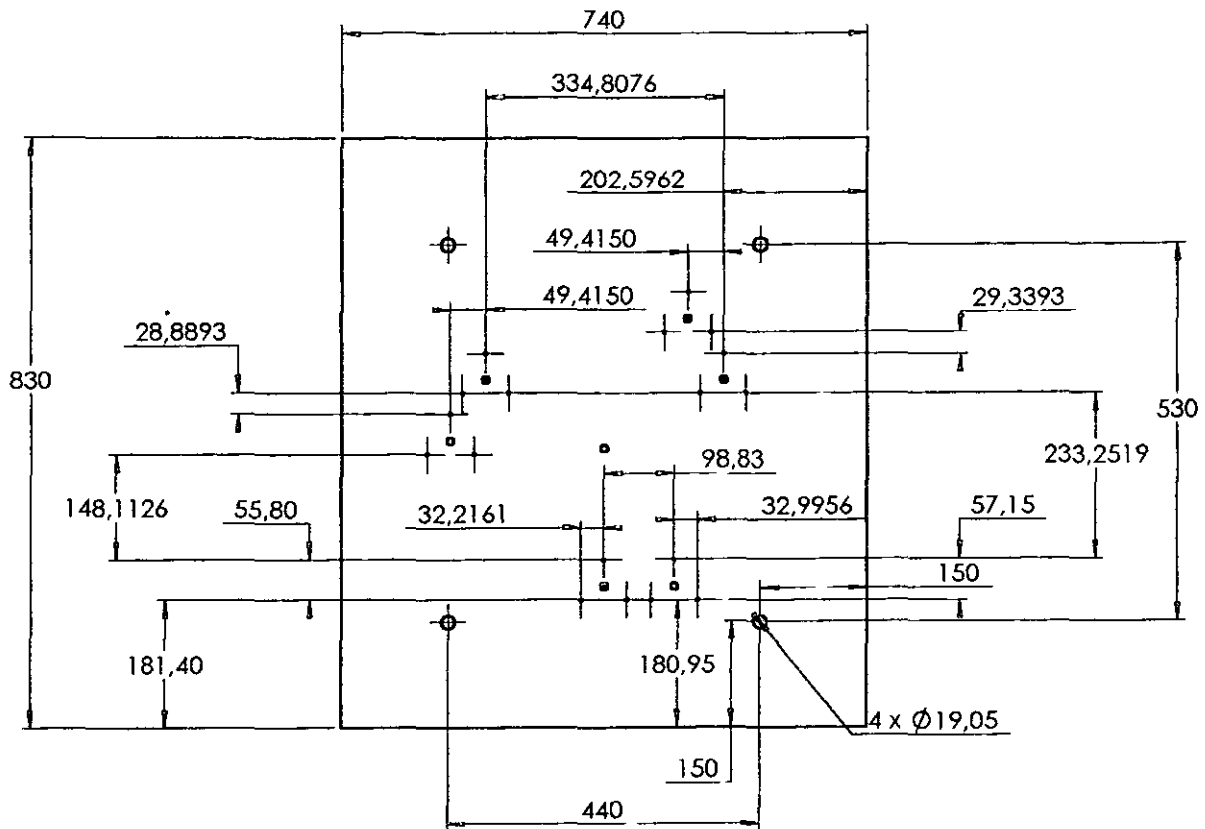
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO FACULTAD DE INGENIERIA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO SECCION DE MECANICA			
GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 10
	BASE SUPERIOR		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 1	Rev: E JL
	SCALE: s/e	Material: Acrilico	Dib: JAPC



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO FACULTAD DE INGENIERIA DIVISION DE ESTUDIOS POSGRADO SECCION DE MECANICA			
GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 11
	EJE		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 3	Rev: EJL
	SCALE: s/e	Material: Al	Dib: JAPC



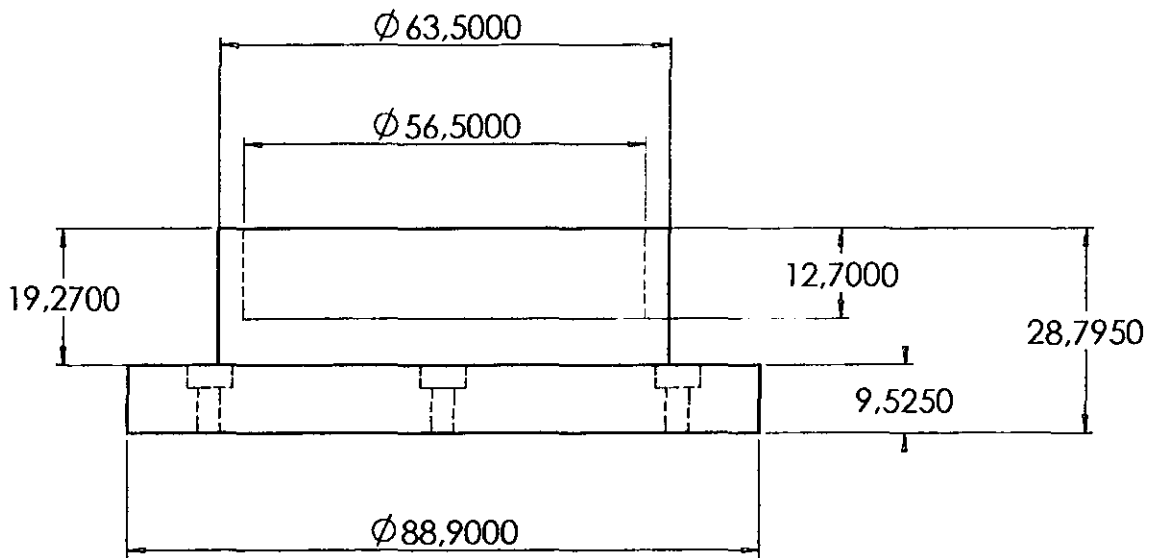
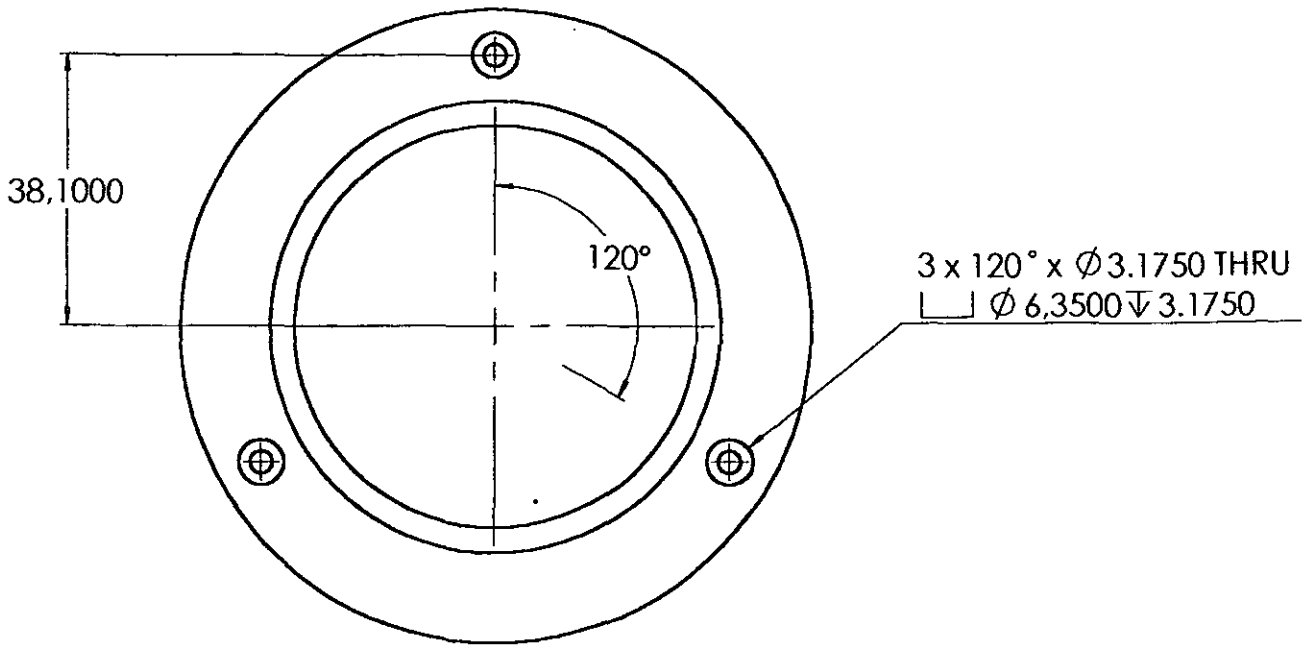
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO FACULTAD DE INGENIERIA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO SECCION DE MECANICA			
GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 12
	HOMBRO INFERIOR		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 3	Rev: E JL
	SCALE: s/e	Material: Al	Dib: JAPC



Nota: Todos los barrenos pequenos son de  $\phi 3.175$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO			
FACULTAD DE INGENIERIA			
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO			
SECCION DE MECANICA			
GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 15
	BASE INFERIOR		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 1	Rev: EJI
	SCALE: s/e	Material: Acrilico	Dib: JAPC





UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
 FACULTAD DE INGENIERIA  
 DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
 SECCION DE MECANICA

GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 16
	CAJA MOTOR		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 3	Rev: Ejl
	SCALE: s/e	Material: Al	Dib: JAPC



Barry Instrument  
A division of  
Belt Corp. of America

Home: Timing Belts: Neoprene Fiberglass XL (.200")

## XL (.200") TIMING BELTS

Standard & Custom XL (.200") Timing Belts - Neoprene with Fiberglass  
Fabrication: Linatex, Non-Marking, & Dual Durometer Covers; Grooves  
Long Lengths.

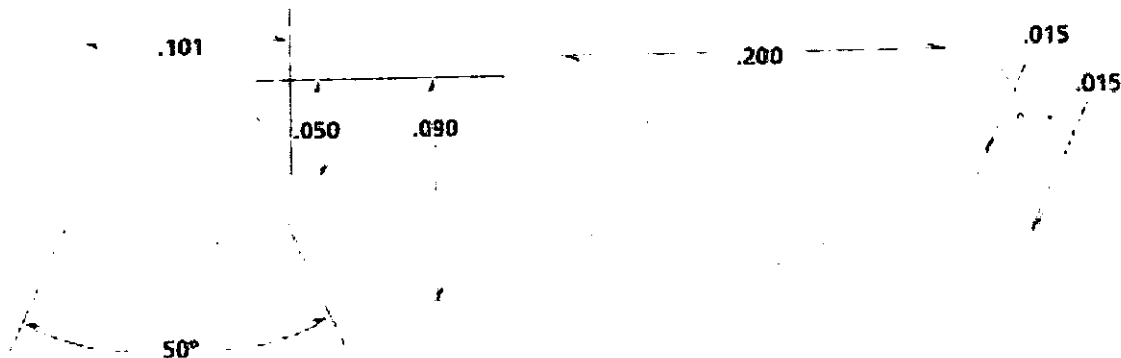
- Company Profile
- Literature-by-Fax
- Belts
- Specialty Endless
- Woven Endless
- Timing Belts
- Custom Fabricated

Neoprene Fiberglass XL  
(.200") Sizes

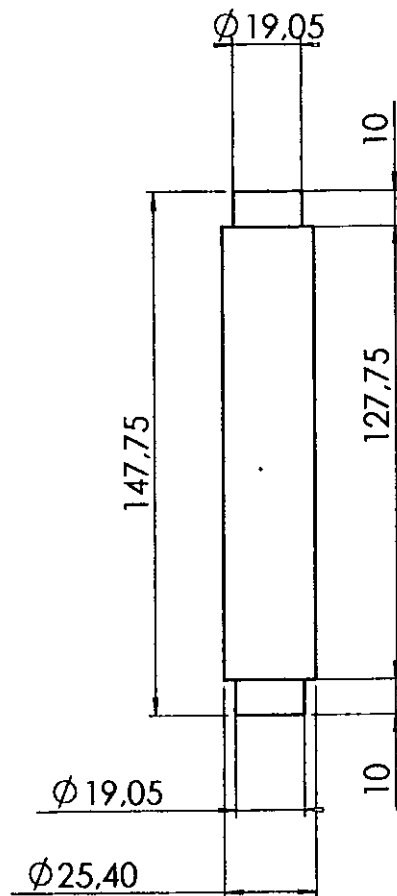
- Contact Info
- Info Request
- Via email
- Toll Free:
- 1-800-235-0947

More Timing Belts

## XL (.200") Pitch Neoprene/Fiberglass



Belt Pitch Code	No. Teeth	Pitch Length	Belt Pitch Code	No. Teeth	Pitch Length	Belt Pitch Code	No. Teeth	Pitch Length
42XL	21	4.20	50XL	25	5.00	54XL	27	5.40
56XL	28	5.60	58XL	29	5.80	60XL	30	6.00
62XL	31	6.20	64XL	32	6.40	66XL	33	6.60
68XL	34	6.80	70XL	35	7.00	72XL	36	7.20
74XL	37	7.40	76XL	38	7.60	78XL	39	7.80
80XL	40	8.00	82XL	41	8.20	84XL	42	8.40
86XL	43	8.60	88XL	44	8.80	90XL	45	9.00
92XL	46	9.20	94XL	47	9.40	96XL	48	9.60
98XL	49	9.80	100XL	50	10.00	102XL	51	10.20
104XL	52	10.40	106XL	53	10.60	108XL	54	10.80
110XL	55	11.00	112XL	56	11.20	114XL	57	11.40
116XL	58	11.60	118XL	59	11.80	120XL	60	12.00



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO FACULTAD DE INGENIERIA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO SECCION DE MECANICA			
GRUPO DITAI	PROTOTIPO 3-RRR		Pza: 21
	COLUMNA		Fecha:
	ACOT: mm	Cantidad: 4	Rev: E JL
	SCALE: s/e	Material: Al	Dib: JAPC

## APÉNDICE C

---

## PROGRAMAS DE CONTROL Y SIMULACIÓN

---

## C.1 PROGRAMA DE CONTROL

;NOMBRE DE PROGRAMA: 3-RRR VMAX PARA PC.ASM

;PROGRAMA QUE CONTROLA GRUPOS DE ACTUADORES PARA 3GDL

ORG 2000H ;ORGANIZA EL PROGRAMA A PARTIR DE LA DIR 0000H

LJMP 2040H ; (PC) =ADDR15-0

ORG 2040H ;ORGANIZA EL PROGRAMA A PARTIR DE LA DIR 0040H

LCALL PAUSA

MOV DPTR,#TECLAS ;DESPLIEGUE DE TECLAS DE CONTROL  
LCALL 0215H

MOV DPTR,#0E003H  
MOV A,#80H  
MOVX @DPTR,A

MOV DPTR,#TABLA  
MOV R0,#00H  
MOV R1,#00H  
MOV R2,#00H

;VERIFICACION DE TECLA CORRESPONDIENTE A GRUPOS DE ORDEN 1

G1R: LCALL 022FH

MOTA: CJNE A,#65,MOTB  
LCALL POSA  
LJMP PULENVI

MOTB: CJNE A,#66,MOTC  
LCALL POSB  
LJMP PULENVI

MOTC: CJNE A,#67,MOTAN  
LCALL POSC  
LJMP PULENVI

MOTAN: CJNE A,#83,MOTBN  
LCALL NEGA  
LJMP PULENVI

MOTBN: CJNE A,#78,MOTCN  
LCALL NEGB  
LJMP PULENVI

MOTCN: CJNE A,#86,G2R1  
LCALL NEGCA  
LJMP PULENVI

;VERIFICACION DE TECLA CORRESPONDIENTE A GRUPOS DE ORDEN 2

;GRUPOS DE FAMILIA AB

G2R1: CJNE A,#56,G2R2  
 LCALL RU1GAB  
 LJMP G1R

G2R2: CJNE A,#57,G2R3  
 MOV 20H,#04H  
 LCALL RU1GAB  
 LJMP G1R

G2R3: CJNE A,#81,G2R4  
 MOV 20H,#02H  
 LCALL RU1GAB  
 LJMP G1R

G2R4: CJNE A,#87,G2R5  
 MOV 20H,#00H  
 LCALL RU1GAB  
 LJMP G1R

;GRUPOS DE FAMILIA AC

G2R5: CJNE A,#84,G2R6  
 MOV 20H,#05H  
 LCALL RU1GAC  
 LJMP G1R

G2R6: CJNE A,#89,G2R7  
 MOV 20H,#04H  
 LCALL RU1GAC  
 LJMP G1R

G2R7: CJNE A,#79,G2R8  
 MOV 20H,#01H  
 LCALL RU1GAC  
 LJMP G1R

G2R8: CJNE A,#80,G2R9  
 MOV 20H,#00H  
 LCALL RU1GAC  
 LJMP G1R

;GRUPOS DE FAMILIA BC

G2R9: CJNE A,#75,G2R10  
 MOV 20H,#03H  
 LCALL RU1GBC  
 LJMP G1R

G2R10: CJNE A,#76,G2R11  
 MOV 20H,#02H  
 LCALL RU1GBC  
 LJMP G1R

```
G2R11: CJNE  A,#70,G2R12
        MOV   20H,#01H
        LCALL RU1GBC
        LJMP  G1R
```

```
G2R12: CJNE  A,#71,G2R10
        MOV   20H,#00H
        LCALL RU1GBC
        LJMP  G1R
```

;RUTAS PARA GRUPOS DE ORDEN 2

;RUTA PARA GRUPOS DE FAMILIA AB

```
RU1GAB: JBC   20.1H,ALPGAB
        LCALL NEGA
        LJMP  RU2GAB
ALPGAB: LCALL POSA
```

```
RU2GAB: JBC   20.2H,BEPGAB
        LCALL NEGB
        LJMP  PULENVI
```

```
BEPGAB: LCALL POSB
        LJMP  PULENVI
        RET   ;REGRESA A DONDE SE LLAMO A RU1AB
```

;RUTA PARA GRUPOS DE FAMILIA AC

```
RU1GAC: JBC   20.1H,ALPGAC
        LCALL NEGA
        LJMP  RU2GAC
ALPGAC: LCALL POSA
```

```
RU2GAC: JBC   20.3H,GAPGAC
        LCALL NEGC
        LJMP  PULENVI
```

```
GAPGAC: LCALL POSC
        LJMP  PULENVI
        RET   ;REGRESA A DONDE SE LLAMO A RU1AC
```

;RUTA PARA GRUPOS DE FAMILIA BC

```
RU1GBC: JBC   20.2H,BEPGBC
        LCALL NEGB
        LJMP  RU2GBC
```

```
BEPGBC: LCALL POSB
```

```
RU2GBC: JBC   20.3H,GAPGBC
        LCALL NEGC
        LJMP  PULENVI
```

```
GAPGBC: LCALL POSC
        LJMP  PULENVI
```

RET ;REGRESA A DONDE SE LLAMO A RU1BC

;VERIFICACION DE LA TECLA CORRESPONDIENTE A LOS GRUPOS DE ORDEN 3

G3R1: CJNE A,#49,G3R2  
 MOV 20H,#07H  
 LCALL RU1G3R  
 LJMP G1R

G3R2: CJNE A,#48,G3R3  
 MOV 20H,#00H  
 LCALL RU1G3R  
 LJMP G1R

G3R3: CJNE A,#50,G3R4  
 MOV 20H,#04H  
 LCALL RU1G3R  
 LJMP G1R

G3R4: CJNE A,#51,G3R5  
 MOV 20H,#03H  
 LCALL RU1G3R  
 LJMP G1R

G3R5: CJNE A,#52,G3R6  
 MOV 20H,#02H  
 LCALL RU1G3R  
 LJMP G1R

G3R6: CJNE A,#53,G3R7  
 MOV 20H,#05H  
 LCALL RU1G3R  
 LJMP G1R

G3R7: CJNE A,#54,G3R8  
 MOV 20H,#01H  
 LCALL RU1G3R  
 LJMP G1R

G3R8: CJNE A,#55,CHHOME  
 MOV 20H,#06H  
 LCALL RU1G3R  
 LJMP G1R

;RUTA PARA GRUPOS DE ORDEN 3, FAMILIA ABC

RU1G3R: JBC 20.1H,ALPG3R  
 LCALL NEGA  
 LJMP RU3G3R  
 ALPG3R: LCALL POSA

RU2G3R: JBC 20.2H,BEPG3R  
 LCALL NEGB  
 LJMP RU3G3R



BEPG3R: LCALL POSB

RU3G3R: JBC 20.3H,GAPG3R

LCALL NEGC

LJMP PULENVI

GAPG3R: LCALL POSC

LJMP PULENVI

RET ;REGRESA A DONDE SE LLAMO A RU1G3R

;RUTINAS PARA MENSAJES DE; PULSOS ENVIADOS, HOME Y SALIR

PAUSA: MOV R3,#01H

MOV R4,#010H

MOV R5,#0F4H

CLK: DJNZ R5,CLK

DJNZ R4,CLK

DJNZ R3,CLK

=RET

PULENVI: MOV DPTR,#MENPULSO ;MENSAJE DE PULSO ENVIADO

LCALL 0215H

LJMP G1R

CHHOME: CJNE A,#72,PARO

LCALL HOME

LJMP PULENVI

PARO: CJNE A,#88,AUX

LJMP SALIR

HOME: RET

AUX: LJMP G1R

SALIR: MOV DPTR,#MENSAJEX ;INDICA FIN DE PROGRAMA

LCALL 0215H

LJMP FIN

;MENU CON TECLAS DE CONTROL

TECLAS: DB 10

DB 13

DB 'TECLAS DE CONTROL'

DB 10

DB 13

DB 'GRUPOS DE ORDEN 1:'

DB 10

DB 13

DB ' A -> (A), B -> (B), C -> (C)'

DB 10

DB 13

DB ' S -> (An), N -> (Bn), V -> (Cn)'

DB 10

DB 10

DB 13

DB 'GRUPOS DE ORDEN 2:'

```

DB 10
DB 13
DB ' 8 -> (AB) 9 -> (ABn) Q -> (AnB) W -> (AnBn)'
DB 10
DB 13
DB ' T -> (AC) Y -> (ACn) O -> (AnC) P -> (AnCn)'
DB 10
DB 13
DB ' K -> (BC) L -> (BCn) F -> (BnC) G -> (BnCn)'
DB 10
DB 13
DB 'GRUPOS DE ORDEN 3:'
DB 10
DB 13
DB ' 1 -> (ABC) 0 -> (AnBnCn) 2 -> (ABnCn) 3 -> (AnBC)'
DB 10
DB 13
DB ' 4 -> (AnBCn), 5 -> (ABnC), 6 -> (AnBnC) 7 -> (ABCn)'
DB 10
DB 10
DB 13
DB 'PRESIONE "X" PARA TERMINAR EL PROGRAMA'
DB 10
DB '#'

```

;TABLA DE PULSOS

```

TABLA: DB 09H
        DB 03H
        DB 06H
        DB 0CH

```

;RUTINAS PARA PULSOS DE SALIDA DE LOS MOTORES

;MOTOR A

```

POSA: INC R0
      ANL R0,#03H
      MOV A,R0
      LCALL OUTMA
      RET

```

```

NEGA: DEC R0
      ANL R0,#03H
      MOV A,R0
      LCALL OUTMA
      RET

```

```

OUTMA: MOV DPTR,#TABLA
      MOVC A,@A+DPTR
      MOV DPTR,#0E000H
      MOVX @DPTR,A
      LCALL 0215H
      RET

```

;MOTOR B

```

POSB: INC R1
      ANL R1,#03H
      MOV A,R1
      LCALL OUTMB
      RET
    
```

```

NEGB: DEC R1
      ANL R1,#03H
      MOV A,R1
      LCALL OUTMB
      RET
    
```

```

OUTMB: MOV DPTR,#TABLA
      MOVC A,@A+DPTR
      MOV DPTR,#0E001H
      MOVX @DPTR,A
      LCALL 0215H
      RET
    
```

;MOTOR C

```

POSC: INC R2
      ANL R2,#03H
      MOV A,R2
      LCALL OUTMC
      RET
    
```

```

NEGC: DEC R2
      ANL R2,#03H
      MOV A,R2
      LCALL OUTMC
      RET
    
```

```

OUTMC: MOV DPTR,#TABLA
      MOVC A,@A+DPTR
      MOV DPTR,#0E002H
      MOVX @DPTR,A
      LCALL 0215H
      RET
    
```

;MENSAJES EN PANTALLA

```

MENPULSO: DB 13
           DB 'GRUPO ENVIADO'
           DB 10
           DB 10
           DB 13
    
```

```

MENSAJEX: DB 'FIN DE PROGRAMA'
    
```

```

FIN: END 0000H
    
```

## C.2 PROGRAMA DE SIMULACIÓN

```

QMULT[P_,Q_]:= {P[[1]] Q[[1]]-P[[2]] Q[[2]],P[[1]] Q[[2]]+P[[2]] Q[[1]]}
QCONJ[P_]:= {P[[1]],-P[[2]]}
ROT[P_,Q_]:=QMULT[Q,P]

```

```

ClearAll[q0,q3,q,"p*","r*","s*","t*","u*","v*","w*","x*"];

```

```

e1 = {1,0}; e2 = {0,1};

```

```

l1 = 150;

```

```

l2 = 150;

```

```

l3 = 150;

```

```

l4 = 150;

```

```

l5 = 150;

```

```

l6 = 150;

```

```

lpot = 86.6025;

```

```

l = 334.8054;

```

```

l36 = 150;

```

```

l39 = 150;

```

```

L14 = {l Cos[60 Degree], l Sin[60 Degree]};

```

```

L17 = {-l Cos[60 Degree], l Sin[60 Degree]};

```

```

P = {Cos[16.2 Degree],Sin[16.2 Degree]}; Q = {Cos[122.33 Degree],Sin[122.33
Degree]};

```

```

R = {Cos[135 Degree],Sin[135 Degree]}; S = {Cos[242.33 Degree],Sin[242.33 Degree]};

```

```

T = {Cos[255.6 Degree],Sin[255.6 Degree]}; U = {Cos[2.33 Degree],Sin[2.33
Degree]};

```

```

V = {Cos[150 Degree],Sin[150 Degree]};

```

```

p = {p0,p1}; q = {q0,q1}; r = {r0,r1};

```

```

s = {s0,s1}; t = {t0,t1}; u = {u0,u1};

```

```

v = {v0,v1};

```

```

m = {Cos[-30 Degree],Sin[-30 Degree]};

```

```

n = {Cos[30 Degree],Sin[30 Degree]};

```

(\* Pata No.1 \*)

e11 = ROT[p,ROT[P,e1]];  
 e21 = ROT[p,ROT[P,e2]];  
 e12 = ROT[q,ROT[Q,e1]];  
 e22 = ROT[q,ROT[Q,e2]];  
 L1=l1\*e11; L2=l2\*e12; R3=L1+L2;

(\* Triángulo \*)

e17 = ROT[v,ROT[V,e1]];  
 e27 = ROT[v,ROT[V,e2]];  
 e18 = ROT[m,e17];  
 e28 = ROT[m,e27];  
 e19 = ROT[n,e17];  
 e29 = ROT[n,e27];  
 Lpot=lpot\*e17; L36=l36\*e18; L39=l39\*e19;

(\* Pata No.2 \*)

e13 = ROT[r,ROT[R,e1]];  
 e23 = ROT[r,ROT[R,e2]];  
 e14 = ROT[s,ROT[S,e1]];  
 e24 = ROT[s,ROT[S,e2]];  
 L3=l3\*e13; L4=l4\*e14; R6=L3+L4+L14;

(\* Pata No.3 \*)

e15 = ROT[t,ROT[T,e1]];  
 e25 = ROT[t,ROT[T,e2]];  
 e16 = ROT[u,ROT[U,e1]];  
 e26 = ROT[u,ROT[U,e2]];  
 L5=l5\*e15; L6=l6\*e16; R9=L5+L6+L17;

#### CINEMATICA DIRECTA

Se proporciona rotación a los eslabones l1, l6 y l8 a la vez, o a cada uno por separado, manteniendo sin rotación a los otros dos.

Solución de ecuaciones

```

ClearAll[p0,p1,q0,q1,r0,r1,s0,s1,t0,t1,u0,u1,v0,v1,solucion];
i = 1;
iq0=.999;iq1=.01;is0=.999;is1=.01;
iu0=.999;iu1=.01;iv0=.999;iv1=.01;

inc=5;
For[phi=0,phi<=90,phi+=inc,
  phi1=phi;phi2=0.8*phi;phi3=0.6*phi;
  angulos[i]={phi1,phi2,phi3};
  p0=Cos[phi1 Degree]; p1=Sin[phi1 Degree];
  r0=Cos[phi2 Degree]; r1=Sin[phi2 Degree];
  t0=Cos[phi3 Degree]; t1=Sin[phi3 Degree];

  f0=N[R9[[1]]-L39[[1]]-L2[[1]]-L1[[1]]];
  f1=N[R9[[2]]-L39[[2]]-L2[[2]]-L1[[2]]];
  g0=N[R6[[1]]-L36[[1]]-L2[[1]]-L1[[1]]];
  g1=N[R6[[2]]-L36[[2]]-L2[[2]]-L1[[2]]];

  solucion[i] = FindRoot[{f0==0,f1==0, g0==0,g1==0,
    q0^2+q1^2==1,s0^2+s1^2==1,
    u0^2+u1^2==1,v0^2+v1^2==1},
    {q0,iq0},{q1,iq1},{s0,is0},{s1,is1},
    {u0,iu0},{u1,iu1},{v0,iv0},{v1,iv1}, MaxIterations->150];

  If[N[Abs[(f0/.solucion[i])]<10^-5 && Abs[(f1/.solucion[i])<10^-5 &&
    Abs[(g0/.solucion[i])<10^-5 && Abs[(g1/.solucion[i])<10^-5],
    iq0=q0/.solucion[i];iq1=q1/.solucion[i];
    is0=s0/.solucion[i];is1=s1/.solucion[i];
    iu0=u0/.solucion[i];iu1=u1/.solucion[i];
    iv0=v0/.solucion[i];iv1=v1/.solucion[i],

  Print["No se encontró solución para phi = ",phi];
  iq0=.5;iq1=.8;is0=.5;is1=.8;iu0=.5;iu1=.8;iv0=.5;iv1=.8];

```

```

i++;
Graficación para visualizar el movimiento
ClearAll[g1,g2,g3]
For[j=1,j<i,j++,solq[j]={q0,q1}/.solucion[j];
    sols[j]={s0,s1}/.solucion[j];
    solu[j]={u0,u1}/.solucion[j];
    solv[j]={v0,v1}/.solucion[j];

For[j=1,j<i,j++, q0=solq[j][[1]];q1=solq[j][[2]];
    s0=sols[j][[1]];s1=sols[j][[2]];
    u0=solu[j][[1]];u1=solu[j][[2]];
    v0=solv[j][[1]];v1=solv[j][[2]];

phi1 = angulos[j][[1]]; phi2 = angulos[j][[2]]; phi3 = angulos[j][[3]];

p0=Cos[phi1 Degree]; p1=Sin[phi1 Degree];
r0=Cos[phi2 Degree]; r1=Sin[phi2 Degree];
t0=Cos[phi3 Degree]; t1=Sin[phi3 Degree];

punto2=N[{L1[[1]],L1[[2]],0}];
punto3=N[{R3[[1]],R3[[2]],0}];
punto4=N[{L14[[1]],L14[[2]],0}];
punto5=N[{L14[[1]]+L3[[1]],L14[[2]]+L3[[2]],0}];
punto6=N[{R6[[1]],R6[[2]],0}];
punto7=N[{L17[[1]],L17[[2]],0}];
punto8=N[{L17[[1]]+L5[[1]],L17[[2]]+L5[[2]],0}];
punto9=N[{R9[[1]],R9[[2]],0}];
puntoPOT=N[{R3[[1]]+Lpot[[1]],R3[[2]]+Lpot[[2]],0}];

g3 = Graphics3D[
(* triángulo *)
{{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto3,punto6}]},
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto6,punto9}]},
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto3,punto9}]},

```

```
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto3,puntoPOT}]},
```

```
(* pata 1 *)
```

```
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0], Line[{0,0},punto2]},
```

```
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,0], Line[{punto2,punto3}]},
```

```
(* pata 2 *)
```

```
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0], Line[{punto4,punto5]},
```

```
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,0], Line[{punto5,punto6}]},
```

```
(* pata 3 *)
```

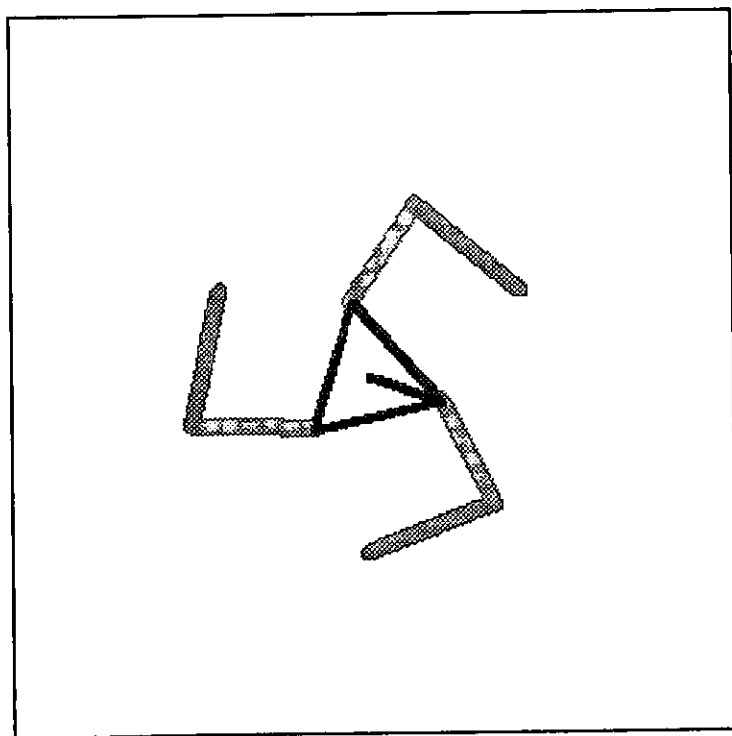
```
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0],Line[{punto7,punto8}]},
```

```
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,0], Line[{punto8,punto9}]}
```

```
};
```

```
Show[g3,PlotRange->{{-400,400},{-200,600},{0,0}},ViewPoint->{0,0,4.778}];
```

```
];
```





## CINEMATICA INVERSA

Solución de ecuaciones para diferentes trayectorias

## LINEAS RECTAS

## LINEAS RECTAS

(\* Entrada de datos al programa \*)

fileinput = "puntos.prn";

ss= OpenRead[fileinput];

(\* Lee el punto inicial de la trayectoria \*)

S0 = Read[ss];

(\* Lee el punto final de la trayectoria \*)

S1 = Read[ss];

Close[ss];

S0

S1

{0, 100}

{0, 300}

ClearAll[p0,p1,q0,q1,r0,r1,s0,s1,t0,t1,u0,u1,v0,v1,  
solucion1,solucion2,solucion3];

i=1;

ip0=0.1;ip1=.866;iq0=.5;iq1=0.6;

ir0=0.1;ir1=.866;

is0=0.5;is1=.866;it0=.5;it1=0.66;

iu0=0.5;iu1=.866;iv0=.5;iv1=0.6;

(\* S0={0, 100};S1={0,300}; \*)

(\* Ecuaciones de Lazo \*)

```
f0 = N[R3[[1]]];
f1 = N[R3[[2]]];
g0 = N[R6[[1]]];
g1 = N[R6[[2]]];
h0 = N[R9[[1]]];
h1 = N[R9[[2]]];
```

```
nstep = 20;
```

```
inc=0; inct=1/nstep;
```

```
For[Theta = 0;t=0,t<=1,Theta += inc;t+=inct,
```

```
px=S0[[1]]+(S1[[1]]-S0[[1]])*t;
```

```
py=S0[[2]]+(S1[[2]]-S0[[2]])*t;
```

```
puntop[i]={px,py,Theta};
```

```
v0 = Cos[Theta Degree];
```

```
v1 = Sin[Theta Degree];
```

```
    p3x = N[ px - Lpot[[1]]];
```

```
    p3y = N[ py - Lpot[[2]]];
```

```
    p6x = N[ p3x + L36[[1]]];
```

```
    p6y = N[ p3y + L36[[2]]];
```

```
    p9x = N[ p3x + L39[[1]]];
```

```
    p9y = N[ p3y + L39[[2]]];
```

```
solucion1[i]=FindRoot[{f0 == p3x,
```

```
    f1 == p3y,
```

```
    p0^2 + p1^2==1,
```

```
    q0^2 + q1^2==1},
```

```
{p0,ip0},{p1,ip1},
```

```
{q0,iq0},{q1,iq1},
```

```
MaxIterations->50];
```

```
If[N[Abs[(f0-p3x/.solucion1[i])]<10^-5 &&
```

```
  Abs[(f1-p3y/.solucion1[i])<10^-5],
```

```
ip0=p0/.solucion1[i];ip1=p1/.solucion1[i];
iq0=q0/.solucion1[i];iq1=q1/.solucion1[i],
```

```
Print["No se encontró solución1 para Theta = ",Theta];
ip0=.5;ip1=.8;iq0=.5;iq1=.8];
```

(\*pata 2\*)

```
solucion2[i]=FindRoot[{g0==p6x,
    g1==p6y,
    r0^2+r1^2==1,
    s0^2+s1^2==1},
    {r0,ir0},{r1,ir1},
    {s0,is0},{s1,is1},
    MaxIterations->50];
```

```
If[N[Abs[(g0-p6x/.solucion2[i])<10^-5 &&
    Abs[(g1-p6y/.solucion2[i])<10^-5],
ir0=r0/.solucion2[i];ir1=r1/.solucion2[i];
is0=s0/.solucion2[i];is1=s1/.solucion2[i],
Print["No se encontró solución2 para Theta = ",Theta];
ir0=.5;ir1=.8;is0=.5;is1=.8];
```

(\*pata 3\*)

```
solucion3[i]=FindRoot[{h0==p9x, h1==p9y,
    t0^2 + t1^2==1, u0^2 + u1^2==1},
    {t0,it0},{t1,it1},{u0,iu0},{u1,iu1},
    MaxIterations->50];
```

```
If[N[Abs[(h0-p9x/.solucion3[i])<10^-5 &&
    Abs[(h1-p9y/.solucion3[i])<10^-5],
it0=t0/.solucion3[i];it1=t1/.solucion3[i];
iu0=u0/.solucion3[i];iu1=u1/.solucion3[i],
```

```

Print["No se encontró solución3 para Theta = ",Theta];
it0=.5;it1=.8;iu0=.5;iu1=.8];
i++
]

ClearAll["Ang*"]
file = "inversa.prn";
fp2= OpenWrite[file];
Write[fp2,i];

For[k=1,k<i,ang1 = N[ArcTan[p1/p0/.solucion1[k]] /Degree];
    ang2 = N[ArcTan[r1/r0/.solucion2[k]] /Degree];
    ang3 = N[ArcTan[t1/t0/.solucion3[k]] /Degree];
    ang4 = N[ArcTan[u1/u0/.solucion3[k]] /Degree];
    If[(p0/.solucion1[k])<0,a1 = 180+ang1,a1 = ang1];
    If[(r0/.solucion2[k])<0,a2 = 180+ang2,a2 = ang2];
    If[(t0/.solucion3[k])<0,a3 = 180+ang3,a3 = ang3];
    If[(u0/.solucion3[k])<0,a4 = 180+ang4,a4 = ang4];
    Write[fp2,{a1,a2,a3,a4}];
    k++]

Close[fp2]
inversa.prn

```

Graficación para visualizar la trayectoria seleccionada

```

For[j=1,j<i,j++,solp[j]={p0,p1}/.solucion1[j];
    solq[j]={q0,q1}/.solucion1[j];
    solr[j]={r0,r1}/.solucion2[j];
    sols[j]={s0,s1}/.solucion2[j];
    solt[j]={t0,t1}/.solucion3[j];
    solu[j]={u0,u1}/.solucion3[j];

For[j=1,j<i,j++, p0=solp[j][[1]];p1=solp[j][[2]];
    q0=solq[j][[1]];q1=solq[j][[2]];
    r0=solr[j][[1]];r1=solr[j][[2]];

```

```
s0=sols[j][[1]];s1=sols[j][[2]];
t0=solt[j][[1]];t1=solt[j][[2]];
u0=solu[j][[1]];u1=solu[j][[2]];
```

```
px = puntop[j][[1]];
py = puntop[j][[2]];
Theta = puntop[j][[3]];
v0 = Cos[Theta Degree];
v1 = Sin[Theta Degree];
```

```
punto2=N[{L1[[1]],L1[[2]],0});
punto3=N[{R3[[1]],R3[[2]],0});
punto4=N[{L14[[1]],L14[[2]],0});
punto5=N[{L14[[1]]+L3[[1]],L14[[2]]+L3[[2]],0});
punto6=N[{R6[[1]],R6[[2]],0});
punto7=N[{L17[[1]],L17[[2]],0});
punto8=N[{L17[[1]]+L5[[1]],L17[[2]]+L5[[2]],0});
punto9=N[{R9[[1]],R9[[2]],0});
puntoPOT=N[{R3[[1]]+Lpot[[1]],R3[[2]]+Lpot[[2]],0});
```

```
g3 = Graphics3D[
(* triángulo *)
{{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto3,punto6}}},
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto6,punto9}}},
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto3,punto9}}},
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto3,puntoPOT}}},
```

```
(* pata 1 *)
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0], Line[{{0,0,0},punto2}}},
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,0], Line[{punto2,punto3}}},
```

```
(* pata 2 *)
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0], Line[{punto4,punto5}}},
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,0], Line[{punto5,punto6}}},
```

(\* pata 3 \*)

```
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0],Line[{punto7,punto8}]},
```

```
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[0,1,0], Line[{punto8,punto9}]}
```

```
}};
```

```
Show[g3,PlotRange->{{-400,400},{-200,600},{0,0}},ViewPoint->{0,0,4.778}]
```

```
];
```

**BIBLIOGRAFÍA**

- [1] Miomir Vukobratovic. "Introduction to Robotics". Springer-Verlany, Berlin, (1989).
- [2] P. Coiffet, M. Chirouze. "Elementos de Robótica". Colección Ciencia Electrónica. Editorial Gustavo Gili, S.A. Barcelona (1989).
- [3] J. Angeles. "Fundamentals of Robotics Mechanical System". Springer-Verlany, New York (1997).
- [4] Charles C. Nguyen, Mo Jamshidi. "Guest Editorial: Parallel Closed Kinematic Chain Manipulator or Devices". Journal of Robotic System. 10(s), pp 557-560 (1993).
- [5] Winsama Khalil, Sebastien Besnard. "Self Calibration of Stewart-Gough Parallel Robots Without Extra Sensors". IEEE Transaction on Robotics and Automation Vol. 15, No. 6 (1997).
- [6] Min Ki Lee, Kun Woo Park. "Kinematic and Manipulator for Enlarging Workspace and Avoiding Singularities". IEEE Transaction on Robotics and Automation Vol. 15, No. 6 (1999).
- [7] Vincent Hayward, Chafye Nemri, Xianze Chen and Bertrand Duplat. "Kinematic Decoupling in Mechanism and application to a passive hand controller Design". Journal of Robotics System 10(s), pp. 767-790 (1993).

- [8] Luc Baron, J. Angeles. "The Direct Kinematics of Parallel Manipulators Under Joint-Sensor Redundancy". IEEE Transaction on Robotics and Automation Vol. 16, No. 1 (2000).
- [9] M. L. Husty. "An algorithm for solving the direct kinematic of general Stewart-Gough-type plataforms". Mech. Mach. Theory Vol. 31, No. 4 pp365-380 (1996).
- [10] Merlet Jean-Pierre. "Les Robots Paralléles". Hermés Publishiers, Paris (1990).
- [11] E. Jiménez L. "Simulación de un proceso de manufactura con obstáculos en la línea de producción". Tesis de grado de Maestría en Ingeniería Mecánica, DEPFI, UNAM (1998).
- [12] A. Flores. "Control de Robots Manipuladores". Tesis de grado de Maestría en Ingeniería Mecánica, DEPFI, UNAM (1998).
- [13] J.M. Skowronski. "Control Dynamics of Robotic Manipulator". Academic Press Inc. Orlando,FL (1986).
- [14] Tian Huang, Jinsong Wang, Clement M. Gusselin, David Whitehouse." Determination of Closed Form Solution to the 2-D-Orientation Workspace of Gough-Stewart Parallel Manipualtor". IEEE Transaction on Robotics and Automation Vol. 15, No. 6 (1999).
- [15] Ming Chen. "Rapid response manufacturing through a rapidly reconfigurable robotic workcell". Robotics and Computer Integrated Manufacturing". Vol. 17, pp 199-213 (2001).



- [16] Cuenca F. "Modelación del análisis cinemático de una plataforma paralela plana, usando el álgebra de Cuaterniones". Tesis de grado de Maestro en Ingeniería Mecánica (1996).
- [17] Feng Gao, Xin-Jun Liu, Xu Chen. "The relation between the shapes of the workspaces and link lengths of 3-DOF symmetrical planar parallel manipulator". *Mechanism and Machine Theory*. 36 pp. 205-220 (2001).
- [18] Xin- Jun Liu, Zhen-LIN Jin, Feny Gao. "Optimum design of 3-DOF spherical parallel manipulator with respect to the conditioning and stiffness indices". *Mechanism and Machine Theory*. 35, pp. 1257-1267 (2000).
- [19] Jean-Pierre Merlet, Clement M. Gosselin, Nicolas Mooly. "Work spaces of planar parallel manipulators". *Mechanism and Machine Theory*. 33, pp. 7-20 (1998)
- [20] Cuenca F. Jiménez E., Reyes L. "Modelación cinemática de posicionamiento de un robot paralelo tipo RRR. Coloquio 1999, Facultad de Ingeniería, UNAM (1999).
- [21] Paul R. P. "Robot Manipulator. Mathematics, Programming and Control". The MIT Press, Cambridge, Mass (1981).
- [22] Fu K. S., González R. C., Lee C. S. G. "Robotics:Control, Sensing, Vision and Intelligence". McGraw-Hill, 1987.
- [23] Grady Booch. "Análisis y Diseño Orientado a Objetos con aplicaciones". Addison-Wesley/Díaz de Santos. Segunda Edición (1996).

- [24] Vicente Borja. "Redesign supported by data model with particular reference to reverse engineering". A doctoral thesis, University of Loughborough, September 1997.
- [25] Ahmad A. Smail, Muhammad Sannah. "Robomech-II: A stack of two four-bar mechanism for dual-function task applications". *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 33, No. 5, pp. 639-546 (1998).
- [26] Eungsoo Shin, Donald A. Streit. "Spring equilibrators theory for static balancing of planar pantograph linkages". *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 26, No. 7, pp. 645-657 (1991).
- [27] V. Stejskal, M. Valásek. "Kinematics and Dynamics of Machinery". Marcel Dekker, Inc. (1996).
- [28] Pérez C. J. Alejandro. "Propuesta Metodológica del Diseño de un Manipulador". Tesis de Licenciatura para el grado de Ingeniero Mecánico Electricista. Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D.F., (2000).
- [29] Reyes, A. L. "Quaternion: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies". Partie I. Le Cadre Theorique. Rapport de Recherche INRIA no. 1309, France (1990).
- [30] Reyes, A. L. "Quaternion: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies". Partie II. Application, France (1990).
- [31] Martínez Roberto. " Modelación y Simulación computacional de Trayectorias Tridimensionales". Tesis de grado de Maestro de Ingeniería Mecánica, DEPI, UNAM, México (1997).

- [32] Márquez Mario. "Comparación entre las soluciones numéricas y simbólicas de la cinemática inversa de un robot de 2 GDL". Reporte interno No. EGI-005/TDI/AR-04-0998. Universidad Anahuac del Sur. México (1998).
- [33] Reyes, Luis. "Sobre una generalización del álgebra de Cuaterniones en la sistematización de rotaciones rígidas en el espacio. Parte 1. Primera modificación del álgebra compleja". Reporte interno No. EGI-004/TI/MM-03-0798. Universidad Anahuac del Sur, México (1998).
- [34] Reyes, Luis. "Sobre la parametrización de las Rotaciones y Reflexiones de Multicuerpos Rígidos en el plano. Estudios Ocasionales. Universidad Anahuac del Sur. ISBN 968-64-02-08-X (1998).
- [35] Wolfram Stephen. "Mathematica: A System For Doing Mathematics by Computer". Addison-Wesley, 1992.
- [36] Erdman Arthur, G., Sandor N. George. "Diseño de Mecanismos, Análisis y Síntesis". Prentice-Hall, México, 1990.
- [37] Philip John McKerrow. "Introduction to Robotics". Addison-Wesley, Primera Edición, 1991.
- [38] Seymour Lipschutz. "Theory and Problems of Probability". Shaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1968.
- [39] Frank Ayres, Jr. "Theory and Problems of Modern Algebra". Shaum's Outline Series, Shaum Publishing Company, 1965.
- [40] Gilmore M. Charles. "Microprocessors Principles and Applications". McGraw-Hill, Second Edition, 1996.

- [41] John W. Gray. "Mastering Mathematica, programming methods and applications". Academic Press Inc., 1994.