DISTRIBUCION GEOGRAFICA OPTIMA DE EQUIPO PESADO

Servio Tulio Guillén Burguete

Mayo 1976

Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería (especialidad en control)

RECONOCIMIENTO

Se agradece a la Secretaría de Obras Públicas el patrocinio de esta investigación y al Dr. Roberto Canales sus comentarios en el desarrollo del trabajo.

RESUMEN

Dado un conjunto de programas regionales de construcción y los recursos disponibles de maquinaria, el problema es cómo distribuir este equipo en tiempo y espacio y cómo programar las nuevas adquisiciones de modo que los costos totales sean mínimos. Se construye un modelo de programación matemática. La estructura obtenida es la de un problema de programación lineal generalizada, en el sentido de Wolfe, donde las variables de decisión son enteros. Esto conduce a un problema de programación lineal mixto, que se resuelve por medio de un algoritmo de partición del tipo de Benders. Al final se incluye un ejemplo numérico.

INDICE

1. INTRODUCCION

Este trabajo tuvo su origen en la necesidad que existe en la Secretaría de Obras Públicas de aprovechar al máximo la maquinaria pesada, de costo muy elevado, dedicada a la ejecución de programas anuales de conservación de carreteras. Para atacar este problema se elaboró un estudio (ref 1) en el que, para las condiciones específicas de dicha Secretaría, se propone un método para obtener un programa anual *óptimo* de transporte de maquinaria en función, principalmente, de un programa anual dado de conservación de carreteras.

Este trabajo tiene por objeto considerar aquellos aspectos de ese primer estudio que tienen interés más general y que incluso pueden ser aplicados a otros problemas planteados en un contexto diferente del de *máquinas* y *obras*, que es el que aquí se sigue.

Más específicamente, el problema que se trata puede plantearse como sigue:

Existe un conjunto de lugares en que deben ejecutarse trabajos con máquinas idénticas; para cada tra-ajo se conocen los días-máquina requeridos y los intervalos de tiempo hábiles para su ejecución. Se dan los inventarios iniciales de maquinaria en cada lugar y el costo de transporte de una máquina entre dos lugares cualesquiera. Se tiene un lugar "artificial", con un inventario ilimitado de máquinas, al que no se le asocian trabajos. El costo de transporte de este lugar a otro incluye el costo de adquisición de una máquina. El problema es encontrar un programa de transporte que satisfaga, para cada trabajo, el número de días-máquina requeridos, computados dentro de los intervalos hábiles especificados, y de modo que los costos totales (adquisición más transporte) sean mínimos.

En el cap 2 el problema se describe con detalle y se plantea matemáticamente, resultando un problema no lineal de programación matemática. En la sec 2.2 se demuestra que si los costos y tiempos de transporte cumplen con la desigualdad del triángulo, entonces es factible restringir los tiempos en que ocurren los transportes sin afectar la optimación, lo que da una primera reducción en las dimensiones del problema. En el cap 3 se demuestra un teorema de descomposición que permite calcular el transporte equivalente o resultante de un conjunto de transportes que cumplen ciertas condiciones; con esto el número de variables se reduce nuevamente y además permite plantar el problema como uno de programación lineal generalizada en el que las variables toman valores enteros no negativos (sec 4.1). En la sec 4.2 se presenta un ejemplo numérico y en la siguiente se propone el algoritmo de partición de Benders como procedimiento de solución. Una vez obtenida una solución óptima, el teorema de descomposición mencionado puede emplearse para generar nuevas soluciones óptimas.

2. FORMULACION DEL PROBLEMA

El problema puede describirse como sigue. Se tiene un conjuto de lugares o sitios donde deben realizarse *trabajos* o *tareas* con máquinas idénticas entre sí. Inicialmente, las máquinas estan distribuidas de alguna manera entre esos lugares, pudiendo ser transportadas entre ellos. Se conocen el costo por transportar una máquina de un sitio a otro (se suponen costos li neales) y el tiempo correspondiente (fig 1a) en que las máquinas transportadas permanecen inactivas.

Los trabajos no pueden efectuarse en cualquier momento necesariamente, deben realizarse dentro de intervalos de tiempo dados*, llamados *periodos hábiles*, cada uno de los cuales está asociado a un lugar (fig 1b). Cada tarea se especifica por un número que denota la magnitud o *volumen del tra*

---

* Estas limitaciones pueden deberse a condiciones climáticas, secuencia de actividades, etc. Por ejemplo, en los programas de conservación de carreteras se deben considerar las estaciones de lluvia, periodos de gran circulación de vehículos, etc.

bajo requerido por este, que convencionalmente le medimos en días/máquina y por un subconjunto formado por periodos hábiles (fig 1c) no necesariamente asociados a un mismo lugar. Para ilustrar esto considérese el ejemplo de la fig 1, en la cual se observa lo siguiente:

1) Los w_1 días-máquina del trabajo 1 pueden realizarse en el lugar 1 durante los periodos 1 y 2, y/o en el lugar 2 durante el periodo 3. La condición es que la permanencia de máquinas en estos lugares dentro de los correspondientes periodos de tiempo dé un total de w_1 días-máquina

2) Para las tareas 2 y 3, se especifica que en el lugar 2 deben hacerse w_2 días-máquina durante el periodo 4 y w_3 días-máquina durante el periodo 5, lo cual no necesariamente es igual que hacer $w_2 + w_3$ días-máquina durante la unión de los intervalos 4 y 5

3) El efecto de la tarea 5 sobre la 4 (nótese que los periodos 7 y 8 se intersectan y pertenecen al mismo lugar pero a distintas tareas) es que de los w_4 días-máquina que deben hacerse en el lugar 3, durante los intervalos 6 y 7, al menos w_5 $(< w_4)$ días-máquina deben efectuarse durante el periodo 8

El problema consiste en encontrar un programa de transporte de máquinas, con costo total de transporte mínimo, tal que se cumplan los volúmenes de trabajo especificados para cada tarea en los lugares y dentro de los periodos hábiles prefijados.

Aunque en la formulación general no se requiere que se cumpla la desigualdad del triángulo en los costos y en los tiempos (el costo por transportar una máquina del lugar ℓ al m es menor o igual que el costo por transportar la de ℓ a ℓ' y después de ℓ' a ℓ y, similarmente, con los tiempos de transporte), de hecho tales suposiciones permiten hacer una reducción considerable del número de variables que aparecen en el problema. Los procedimientos de solución propuestos requieren, para garantizar el óptimo, que se cumplan estas condiciones, las cuales claramente se satisfacen en la mayoría de los casos.

A continuación se hacen lagunas consideraciones generales y al final de la sección se introduce la notación correspondiente a los datos del problema.

A fin de evitar que el número de máquinas disponibles sea insuficiente, para que el problema tenga una solución factible, se supone un lugar artificial, denominado mercado de maquinaria, el cual tiene un número ilimitado de ellas. En el costo de "transporte" de este lugar a cualquier otro puede incluirse el costo de adquisición de una máquina. Con relación a esto, si los costos de transporte, propiamente dichos, son pequeños en comparación con los costos de adquisición, entonces es claro que el problema es equivalente a minimizar la adquisición de nuevas máquinas.

El problema, tal como se ha planteado, no considera ciertos aspectos que pueden tener importancia en problemas reales; por ejemplo, economías o deseconomías de escala en el rendimiento de las máquinas, diferencias entre las capacidades de estas, programas de mantenimiento que distinguen una máquina de otra por el número de horas trabajadas, etc. En presencia de este tipo de situaciones puede intentarse un procedimiento, que pueda ser heurístico, y que consiste en resolver esencialmente problemas como el descrito, en que los datos de entrada de cada nuevo problema se modifican de acuerdo con las condiciones violadas por la última "solución". Se puede, por ejemplo, subdividir periodos hábiles, modificar días-máquina, etc.

En este trabajo se emplea la siguiente notación para los datos de entrada:

$\Lambda \equiv \{1, 2, \ldots, M\}$	conjunto de lugares o sitios
$I \equiv \{1, 2, \ldots, N\}$	conjunto de intervalos de tiempo (periodos hábiles o, simplemente periodos)
$K \equiv \{1, 2, \ldots, P\}$	conjunto de trabajos o tareas
$I_p \subset I$, $p \in K$	conjunto de intervalos o periodos disponibles para realizar el trabajo p
$S(i)$, $i \in I$	sitio o lugar asociado al intervalo i
$C(\ell, m)$, $\ell, m \in \Lambda$	tiempo de transporte del lugar ℓ al m
T_{0i}, $i \in I$	tiempo en el que se inicia el periodo i
T_{1i}, $i \in I$	tiempo en el que termina el periodo i
W_p, $p \in K$	número de días-máquina correspondiente al trabajo p
E_ℓ, $\ell \in \Lambda$	inventario inicial de maquinaria en el lugar ℓ. Se supone $E_m = \infty$

Para ilustrar esta notación, en la fig 1 se indican Λ, I, K, I_p, etc. Los tiempos T_{0i}, T_{1i} están dados por las barras de la fig 1a, y la función $S: I \to \Lambda$ del ejemplo queda definida como sigue:

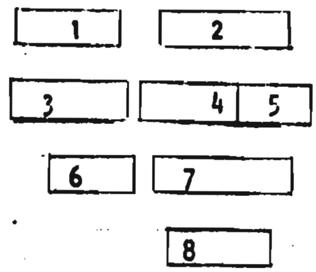
$$S(1) = S(2) = S(3) = 1, \quad S(3) = S(4) = S(5) = 2;$$

$$S(6) = S(7) = S(8) = 3$$

$c(\ell, m), \vartheta(\ell, m)$

a) Costo y tiempo de transporte entre dos lugares ℓ, m cualesquiera

Lugar o sitio Λ	Inventario inicial de máquinas	Periodos hábiles ($J=\{1, \ldots, 8\}$) tiempo →
1	E_1	
2	E_2	
3	E_3	
$(M=)4$	00	



b) Inventario inicial de máquinas y periodos hábiles

Trabajo o tarea	Días-máquina	Periodos hábiles correspondientes
1	W_1	$\{1, 2, 3\} = I_1$
2	W_2	$\{4\} = I_2$
3	W_3	$\{5\} = I_3$
4	W_4	$\{6,7\} = I_4$
$(P=)5$	W_5	$\{8\} = I_5$

c) Trabajos: días-máquina y periodos hábiles

Fig 1. Datos de entrada. Ejemplo

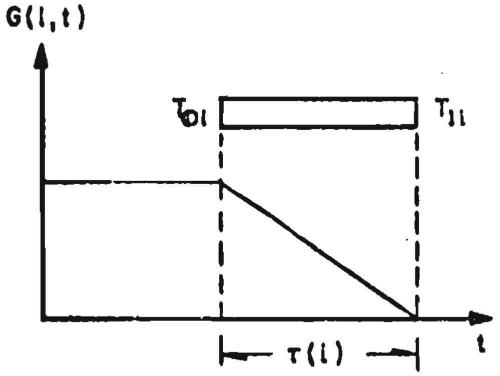


Fig 2. La función $G\ (i,t)$

2.1 *Formulación analítica*

En esta sección el problema se formula analíticamente en términos de variables de decisión de la forma $u\ (\ell,\ m,\ t)$, con lo cual se designa al número de máquinas que parten del lugar ℓ al tiempo $t - \theta\ (\ell,\ m)$ para arribar al destino $m\epsilon\Lambda$ al tiempo t. Esto da origen a lo que se denomina problema 1, o más brevemente, *P1*.

Aquellos valores de t para los cuales tiene sentido $u\ (\ell,\ m,\ t)$ forman el *periodo de planeación*, que se designa por $T = [T_0,\ T_1]$, donde

$$T_0 \equiv m\acute{\iota}n\ \{T_{0i} | i\epsilon I\},\quad T_1 \equiv m\acute{a}x\ \{T_{1i} | i\epsilon I\}$$

La función a minimizar es el costo total de transporte, la cual es lineal en las variables u:

$$\min \sum_{t\epsilon T,\ \ell,\ m\epsilon\Lambda} c\ (\ell,\ m)\ u\ (\ell,\ m,\ t) \qquad (2.1)$$

teniéndose entonces que las variables enteras u deben ser no negativas. La sumatoria sobre $t\epsilon T$ se puede reducir a aquellos valores de t en que $u\ (\ell,\ m,\ t)$ es distinto de cero, que claramente es un subconjunto discreto de T.

Las demás restricciones del problema resultan de que dada una solución de P_1, denotada por $\{u\}$, se tiene:

C1) El número de máquinas en el lugar $\ell \epsilon \Lambda$ al tiempo $t \epsilon T$ es igual a E_ℓ menos el número total de máquinas que partieron de ℓ dentro del intervalo $[T_0, t]$ más el número de máquinas que llegaron a ℓ dentro de ese mismo intervalo. Este número no debe ser negativo

C2) El número de días-máquina asociado a un intervalo $i \epsilon I$ es igual a la suma de los tiempos de permanencia de la maquinaria en el sitio $S(i)$ dentro de ese intervalo. El número de días-máquina asociada a cada trabajo $P \epsilon K$ es entonces igual a la suma de los días-máquina asociados a cada uno de los intervalos $i \epsilon I_p$. Este número debe ser mayor o igual que W_p

Las restricciones del primer tipo se denominan condiciones de *no negatividad del número de máquinas*, o condiciones $C1$, y las restricciones del segundo tipo se denominan condiciones de *ejecución de los trabajos* o condiciones $C2$. A continuación se considera la forma analítica de estas restricciones.

De acuerdo con el punto $C1$, el número de máquinas en el lugar $\ell \epsilon \Lambda$ al tiempo $t^* \epsilon [T_0, T_1]$ esta dado por

$$E_\ell - \sum_{t^1 \theta(\ell, m) \leq t} \sum_{m \epsilon \Lambda} u(\ell, m, t') + \sum_{t' \leq t} \sum_{m \epsilon \Lambda} u(m, \ell, t') = n(\ell, t)$$

el cual debe ser mayor o igual a cero. En estas condiciones una solución $\{u\}$ de $P1$ debe cumplir para toda $t \epsilon T$:

$$\sum_{t'-\theta(\ell,m)\leq t}\ \sum_{m\in\Lambda} u\ (\ell,\ m,\ t')\ -\sum_{t'\leq t}\ \sum_{m\in\Lambda} u\ (m,\ \ell,\ t')\ \leq E_{\ell},\ \ell\in\Lambda \qquad (2.2)$$

En lo que toca a las condiciones de ejecución de los trabajos, o condición C2, conviene definir una función que dé el volumen de trabajo realizado por una máquina en el intervalo i cuando llega al sitio $S(i)$ al tiempo t, y no vuelve a salir de dicho lugar. Sea $G(i,t)$ esta función, la cual claramente está dada por (fig 2).

$$G(i,t) \equiv \begin{cases} T_{1i} - T_{0i} & si \quad t \leq T_{0i} \\ T_{1i} - t & si \quad T_{0i} \leq t \leq T_{1i} \\ 0 & si \quad t \geq T_{1i} \end{cases}$$

$$= \max_{i\in I}\ (0,\ (T_{1i} - \max\ (t,\ T_{0i})\ )\ )$$

El volumen de trabajo realizado en el periodo $i\in I$ se puede expresar mediante la función $G(.,\ .)$ como

$$ES_{(i)}\ (T_{1i}-T_{0i}) + \sum_{t\in T}\ \sum_{m\in\Lambda} G(i,t)\ u\ (m,\ S(i),t)\ -\ \sum_{t\in T}\ \sum_{m\in\Lambda} G(i,t-\theta(\ell,m)0\ u(S(i),m,t)$$

La condición C2 consiste en que para cada $P\in K$ la suma de los volúmenes de trabajo realizados en los intervalos $i\in I_p$ (asociados al trabajo p) debe ser mayor o igual que W_p, es decir, la suma de la expresión anterior, para $i\in I_p$, debe ser mayor o igual que W_p o sea:

$$\sum_{i\in I_p}\ \sum_{t\in T}\ \sum_{m\ \Lambda} G(i,t)u(m,S(i),t) - \sum_{i\in I_p}\ \sum_{t\in T}\ \sum_{m\in\Lambda} G(i,t-\theta(\ell,m))u(S(i),m,t)$$

$$\geq W_p - \sum_{i \varepsilon I_p} E_{S(i)} (T_{1i} - T_{0i}) \quad para\ p \varepsilon K \qquad (2.3)$$

Las variables de decisión deben cumplir, además:

$$u(\ell, m, t) \geq 0 \qquad \ell, m \varepsilon \Lambda, t \varepsilon T \qquad (2.4)$$

$$u(\ell, m, t) = entero \qquad \ell, m \varepsilon \Lambda, t \varepsilon T \qquad (2.5)$$

En resumen, el problema P1 consiste en encontrar $\{u\}$ que hace mínima la función (2.1) y tal que se cumplan las restricciones 2.2 a 2.5. Este problema sería lineal si no fuera por los términos de la forma $G(i,t)\ u\ (m, S(i), t)$ que aparecen en las restricciones.

Una manera de hacer lineal este problema es convertir la variable tiempo en una variable discreta; el problema entonces puede formularse como uno de programación lineal. Una dificultad es el tamaño: si D es el número de tiempos discretos, el número de variables será del orden de $DM\ (M-1)$ y el número de restricciones de aproximadamente $(T + 1)\ M$.

En la siguiente sección se demuestra que es posible pasar a un problema lineal, mucho más pequeño que el obtenido, al tomar discreta la variable t, que permite resolver el problema P1 cuando los costos y los tiempos de transporte cumplen con la desigualdad del triángulo:

$$C(\ell, m) \leq C(\ell, \ell') + C(\ell', m) \qquad (2.6a)$$

$$\theta(\ell, m) \leq \theta(\ell, \ell') + \theta(\ell', m) \qquad (2.6b)$$

para todo $\ell, m, \ell' \varepsilon \Lambda$

2.2 *Transportes oportunos*

Sea ℓ' un lugar tal que la terminación del último de sus periodos hábiles sea t' (con $t' < T_1$); o sea, a partir del tiempo t' y hasta el fin T_1 de la planeación, en el lugar ℓ' no hay más periodos hábiles para realizar trabajos. Si alguna de las desigualdades del triángulo (ecs 2.6) no se cumple, es evidente que debe considerarse la posiblidad de transportes de máquinas del tipo $u(\ell, \ell', t)$ con $t \epsilon [t', T_1]$ ya que, aunque estas no pueden realizar trabajo en ℓ', el paso por este puede ahorrar costo o tiempo de transporte. Sin embargo, es claro que dichos transportes pueden ser descartados *a priori* si se cumplen las desigualdades 2.6. Con ciertas modificaciones, esta idea se puede generalizar a periodos inhábiles "intercalados" entre periodos hábiles, lo que da orgien a la noción de transportes inoportunos, la cual tiene la utilidad de que, como se mostrará, siempre es posible encontrar una solución de P1 que no contiene transportes inoportunos. En esta sección se consideran las simplificaciones del problema P1 cuando se satisfacen las desigualdades 2.6.

En la fig 3 se muestran todas las posibilidades de transporte del lugar ℓ al m. Por sencillez en el dibujo, los transportes se representan mediante líneas verticales, lo cual puede interpretarse como un desplazamiento relativo en magnitud $\theta(\ell, m)$ de las escalas de tiempo para los lugares ℓ, m.

En las figs 3a-f, fácilmente se observa que al sustituir cada transporte representado con línea punteada por otro del mismo número de máquinas pero en el tiempo correspondiente al indicado con línea llena en la misma figura, y que se denomina *tiempo oportuno* (referido, como siempre, al tiempo de arribo), el volumen de trabajo realizado en cada uno de los lugares ℓ y m no disminuye. A los primeros les llamamos *transportes inoportunos* y a los

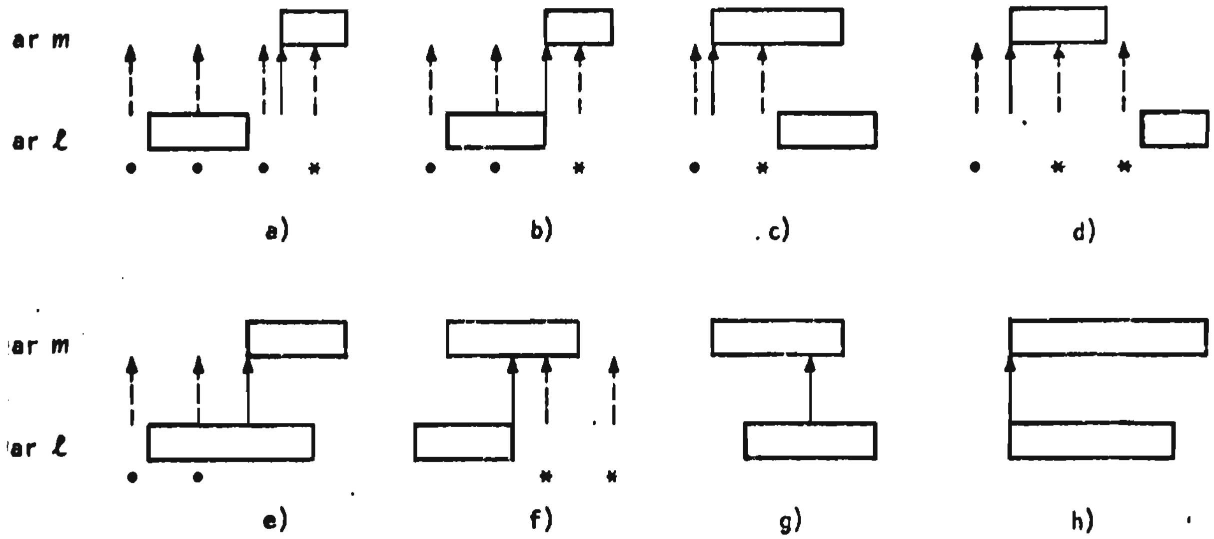


Fig 3. *Posibilidades de transporte del lugar ℓ al m*

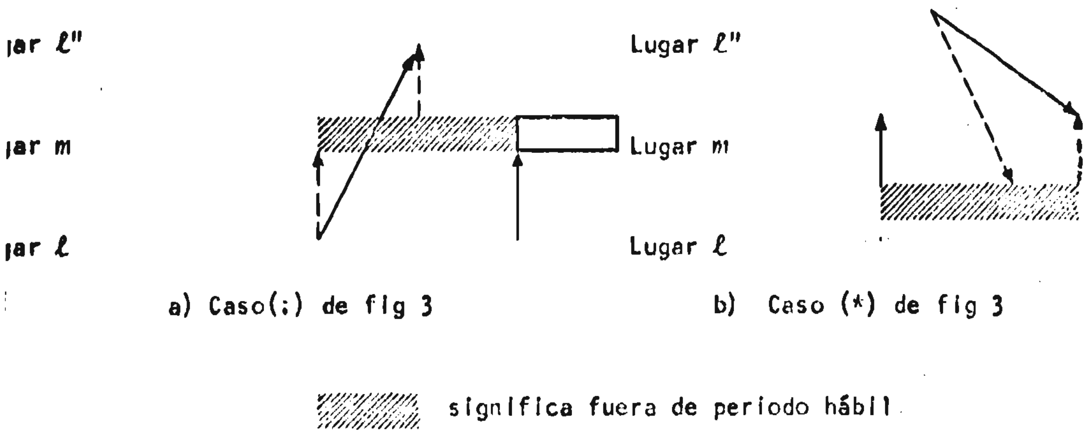


Fig 4. *Transportes "directos"*

segundos *transportes oportunos*. En la fig 3 se advierten dos tipos de transporte inoportuno: 1) los marcados con (.), los cuáles llegan retrasados (respecto del transporte oportuno) y2) los marcados con (*) que llegan adelantados.

Supóngase que los costos y los tiempos de transporte cumplen con las desigualdades 2.6 y que $\{u\}$ es una solución óptima del problema P1, la cual incluye transportes inoportunos. Se demuestra que a partir de $\{u\}$ es posible construir otra solución óptima de P1 que no incluye transportes inoportunos. Para construir esta solución se puede seguir el siguiente procedimiento:

Paso 0. Hacer $\{\bar{u}\} \equiv \{u\}$

Paso 1. Hacer el mayor número de sustituciones de transportes inoportunos por transportes oportunos (máquina por máquina). Específicamente, para cada transporte inoportuno $\bar{u}\ (\ell,\ m,\ t) > 0$, con tiempo oportuno de transporte denotado por t', hacer sucesivamente lo siguiente: si la condición C1 se viola (en m si $t < t'$ y en ℓ si $t > t'$) para algún tiempo dentro del intervalo cerrado limitado por t y t' cuando a $\bar{u}\ (\ell,\ m,\ t)$ se le resta una unidad, pasar a otro transporte inoportuno; si no es el caso, hacer $\bar{u}\ (\ell,\ m,\ t) =$ $* -1,\ \bar{u}\ (\ell,\ m,\ t') = * + 1.$

Paso 2. Si en $\{\bar{u}\}$ no quedan transportes inoportunos el proceso termina y $\{\bar{u}\}$ resuelve P1 al mismo costo que $\{u\}$. En caso contrario continuar paso 3.

Paso 3. Hacer transportes directos. Específicamente, anular cada transporte inoportuno $\bar{u}\ (\ell,\ m,\ t) > 0$ mediante la aplicación repetida de uno de los siguientes procedimientos, según que $t < t'$ o $t > t'$, donde t' es el correspondiente tiempo oportuno de transporte:

NOTA: Por abreviar, en lugar de $a = a + 1$ y $b = b - 1$ se escribe $a = * + 1$, $b = * -1$.

3.1 Adelanto $(t < t')$. Se busca un transporte cualquiera $\bar{u}(m, \ell'', t'') > 0$ que parta de m dentro del intervalo $[t, t']$ (es decir, $t \leq t'' - \theta\ (m, \ell'') \leq t'$) y se hace $\bar{u}\ (\ell, m, t) = * -1$, $\bar{u}\ (m, \ell'', t'') = * -1$, $\bar{u}\ (\ell, \ell'', t'') = * + 1$ (que es el transporte "directo", fig 4a). Repetir esto hasta que $\bar{u}\ (\ell, m, t) = 0$

3.2 Retraso $(t > t')$. Se busca un transporte cualquiera $\bar{u}(\ell'', \ell, t'') > 0$ que llegue a ℓ dentro del intervalo $[t', t]$ y se hace $\bar{u}\ (\ell, m, t) = * -1$, $\bar{u}\ (\ell'', \ell, t'') = * -1$, $\bar{u}\ (\ell'', m, t) = * + 1$ (que es el transporte directo, fig 4b). Repetir esto hasta que $\bar{u}\ (\ell, m, t) = 0$.

Obsérvese que al terminar el paso 2, si $\bar{u}\ (\ell, m, t) > 0$ es un transporte inoportuno que subsiste, entonces con $\bar{u}\ (\ell, m, t) -1$ se viola la condición C1 dentro del intervalo cerrado limitado por t, t'; pero como $\{u\}$ cumple la condición C1, se debe tener:

1) Si $t < t'$, el número de máquinas que llegan a su destino en el intervalo $[t, t']$ (fig 4a) es exactamente igual al número de máquinas que salen de m en ese intervalo

2) Si $t > t'$, el número de máquinas que llegan a ℓ dentro del intervalo $[t', t]$ (fig 4b) es exactamente igual al número de máquinas que salen de ℓ en ese intervalo

Por tanto, siempre se pueden encontrar los transportes buscados al principio de los subpasos 3.1 y 3.2. Por la desigualdad 2.6, al sustituir en el subpaso 3.1 los dos transportes $\bar{u}\ (\ell, m, t)$, $\bar{u}\ (m, \ell'', t'')$ por el transporte directo $\bar{u}\ (\ell, \ell'', t'')$ se tiene que el costo de transporte no aumenta, y por 2.6b, el tiempo de partida de este transporte directo no es anterior al tiempo de partida (ℓ, ℓ'', t''), por lo que al hacer dicha sustitución en el lugar ℓ no se viola C1. Un razonamiento análogo se puede hacer para el subpaso 3.2. Nótese que un transporte directo será inoportuno o no según lo sea el transporte con el mismo destino al que sustituye, ya que el tiempo de llegada es el mismo, y por ello, el proceso general termina en el paso 3. Obsérvese que este proceso no modifica transportes del tipo de las figs 3g-h pues estos son en sí oportunos ya que en el primer caso cualquier modificación en el tiempo de partida afecta los volúmenes de trabajo en los lugares ℓ y m , y el segundo es un caso particular que interesa destacar.

Con lo anterior queda demostrado que siempre es posible encontrar una solución óptima de P1 que no contiene transportes inoportunos. En lo que sigue, el conjunto de transportes oportunos que se denota por O, se caracterizará en forma más compacta, para lo cual se requieren las siguientes definiciones:

$$\sigma(i,j) \equiv \theta(S(i), S(j)), \quad i,j \in I$$

$$\tau(\ell) \equiv \bigcup_{S(i)=\ell} [T_{0i}, T_{1i}], \quad \ell \in \Lambda \qquad (2.7)$$

$$\bar{\tau}(\ell) \equiv \bigcup_{S(i)=\ell} [T_{0i} T_{1i}], \quad \ell \in \Lambda$$

$$\tau(i,j) \equiv [T_{0i} + \sigma(i,j), T_{1i} + \sigma(i,j)) \cap [T_{0j}, T_{1j}), \quad i,j \in I$$

Se usa la siguiente notación:

$\sigma(i, j)$ tiempo de transporte del periodo al i y al j

$\tau(\ell)$ conjunto de los tiempos de llegada al lugar ℓ

$\bar{\tau}(\ell)$ conjunto de tiempos hábiles del lugar ℓ

$\tau(i, j)$ intersección de los periodos i, j respecto a j. Nótese que $\tau(i,j) = \phi$ si $S(i) = S(j)$

Teorema 1. Si se cumplen las desigualdades del triángulo 2.6, entonces existe una solución óptima de P1 tal que cada transporte $u(\ell, m, t) > 0$ pertenece a uno de los conjuntos O_0, O_1 definidos a continuación, los cuales son ajenos:

$$O_0 \equiv \{u(\ell, m, t_{0j}) \mid S(j) = m \neq \ell,\ T_{0j} - \theta(\ell, m) \notin \tau(\ell)\} \qquad (2.7)$$

$$O_1 \equiv \{u(\ell, m, t) \mid \text{existen } i,j \in I \text{ tales que } S(i) = \ell,\ S(j) = m,\ t-\theta(m,\ell) \in [t_{0i}, T_{1j}],\ t \in [T_{0j}, T_{1j}),\ \tau(i,j) \neq \emptyset\} \qquad (2.8)$$

definición equivalente de O_1: si $\tau(i, j) \neq \phi$ entonces $t \in \tau(i,j) \leftrightarrow u(S(i), S(j), t) \in O_2$

Demostración. Por lo antes expuesto, este teorema queda demostrado si se muestra que $O \equiv O_0 \cup O_1$ es el conjunto de transportes oportunos y que $O_0 \cap O_1 = \phi$. Para demostrar la no intersección de los conjuntos O_1, O_2 sea $u(\ell, m, t_{0j}) \in O_1$, por lo que $T_{0j} - \theta(\ell, m) \in [T_{0i}, T_{1i}]$. Si $u(\ell, m, T_{0j}) \in O_0$ entonces $T_{0j} - \theta(\ell, m) \notin \tau(\ell)$, es decir

$$T_{0j} - \theta(\ell, m) = T_{1i}$$

o lo que es lo mismo

$$T_{1i} + \sigma(i, j) = T_0$$

por lo que por 2.7 $T_{0j} \in \tau(i,j) \neq \phi$, lo que contradice que $u(\ell, m, T_{0j}) \in O_1$. Finalmente, se puede comprobar que en la fig 3 los transportes oportunos correspondientes a los casos $a)$ - $d)$ pertenecen a O_0, y los transportes oportunos de los casos e) - h) a O_1.

Los transportes que pertenencen a O_1 se denominan *transportes en intersección* y a los que pertenecen a O_0 *transportes fuera de intersección* (fig 5). Obsérvese que el conjunto O_0 es finito y que el O_1, si no es vacío, es numerable y por tanto infinito. El interés de particionar el conjunto O en los conjuntos O_0 y O_1 se verá claro en el siguiente capítulo, donde se muestra que el conjunto de transportes $u\ (S(i),\ S(j),\ t)\ \varepsilon O_1$ que llegan en el intervalo $\tau\ (i,\ j)$ se puede representar por combinaciones conexas de transportes que llegan en los extremos de $\tau(i,\ j)$, por lo que para evitar duplicidad inecesaria de variables, los transportes oportunos de las figs 3e y h se incluyan en el subconjunto O_1.

Puesto que durante los periodos inhábiles puede haber solidas de máquinas pero no llegadas, para garantizar la condición C1 en dichos periodos es suficiente con verificar la no negatividad del número de máquinas precisamente antes del inicio de cada periodo hábil, es decir, al tiempo T_{0i}^-, $i\varepsilon\Lambda$; o sea que a cada tiempo T_{0i} pero sin contabilizar las llegadas de máquinas a $S(i)$ al tiempo T_{0i}. A esta condición le llamamos *condición C1 al inicio de periodo hábil*. Para garantizar la condición C1 en el último periodo inhábil es suficiente verificar ésta para el tiempo T_1, lo cual se llama *condición C1 al final de la planeación*. Para garantizar que se cumple la condición C1 en todo tiempo resta, finalmente , verificar la *condición C1 en las interacciones*, específicamente en los tiempos contenidos en $\bigcup_j \tau(i,\ j)$; $i\varepsilon I$.

Esta sección puede resumirse en el siguiente teorema

Teorema 2. Si se cumplen las desigualdades del triángulo 2.6, el problema

P1 puede formularse como sigue: Econtrar $\{u\} \subset O$ que hace mínima la función 2.1 y tal que se cumplen las siguientes restricciones:

R1. Se cumple la ec 2.2 para $t = T_1$ (condiciones C1 al final de la planeación)

R2. Se cumple la ec 2.2 para $t \varepsilon \{T^-_{0i} | i \varepsilon I\}$ (condición C1 al inicio de cada periodo hábil)

R3. Se cumple la ec 2.2 para $t \varepsilon \bigcup_{i \varepsilon I} \tau(i, j)$, $i \varepsilon I$ (condición C1 en intersecciones)

R4. Se cumple la ec 2.3 (condición C2)

R5. Se cumplen las ecs 2.4 y 2.5

El conjunto O de soluciones oportunas está dado por la unión de los conjuntos O_0, O_1 definidos por las igualdades 2.7 y 2.8

La condición C1 subdivide explícitamente en tres partes (R1, R2, R3) por la continuidad de este capítulo con el siguiente.

3. REDUCCION DEL NUMERO DE VARIABLES

La dificultad que presenta la formulación del problema P1, tal como aparece en el teorema 3 al final del capítulo anterior, es que el conjunto O_1, que corresponde a los transportes en intersección, es aún un conjunto no numerable y por tanto infinito. En este capítulo se demuestra que todos los transportes del tipo $u(S(i), S(j), t_k)$, con $t_k \in \tau(i, j)$, se pueden reducir a un solo transporte "resultante" con el mismo origen que llega a $S(j)$ dentro de la intersección $\tau(i, j)$. Esto se establece mediante el teorema de descomposición que se demuestra en la seguiente sección, lo cual conduce a formular un problema, denotado por P2, con la ayuda del cual se resuelve P1 empleando el algoritmo dado en la sec 3.3.

3.1 *Teorema de descomposición*

Teorema 3. Sean los intervalos $i, j \in I$ tales que $\tau(i,j) \neq \phi$ y los transportes en intersección $u(l, m, t_k) \geq 0$ con $t_k \in \tau(i, j)$, $k = 1, .., n$, *Demostración.* Por las ecs 3.1 y 3.2 el volumen de trabajo realizado en el intervalo j es

$$\sum_{k=1} G(j,\ t_k)\ u(\ell,\ m,\ t_k) = \sum_{k=1} (T_{1j} - t_k)\ u\ (\ell,\ m,\ t_k) = T_{1j}$$

$$= (T_{1j} - t)\ u\ (\ell,\ m,\ t) = G\ (j,\ t_k)\ u(\ell,\ m,\ t)$$

y similarmente para el intervalo i . Por la ec 3.2 t es una combinación convexa de $t_1,\ \ldots,\ t_k$ y por tanto $t \epsilon \tau(i,\ j)$. Para demostrar el inciso b) se aplica el inciso a) ya demostrado. Los dos transportes se pueden sustituir por otro de magnitud $u\ (\ell,\ m,\ \alpha^1_{ij}) + u\ (\ell,\ m,\ \alpha^2_{ij}) = u(\ell,\ m,\ t)$, (directamente de las ecs 3.3 y 3.4) que llega a m al tiempo dado por la ec 3.2:

$$\frac{\alpha^2_{ij} - t}{\alpha^2_{in} - \alpha^1_{ij}}\ \alpha^1_{ij} + \frac{t - \alpha^1_{ij}}{\alpha^2_{ij} - {}^1_{ij}} = t$$

es decir, los dos transportes pueden sustituirse por el mismo transporte del inciso a), con lo que queda demostrado el teorema.

En las condiciones de este teorema se dice que $u(\ell,\ m,\ t)$ es el *resultante* del conjunto de transportes $\{u(\ell,\ m,\ t_k)\}$ (fig 6), que

$\{u(\ell,\ m,\ t_k)\}$ es una *descomposición* de $u(\ell,\ m,\ t)$ y $\{u(\ell,\ m,\ \alpha^1_{ij}),\ u(\ell,\ m,\ \alpha^2_{ij})\}$ una *descomposición en estremos* tanto de los transportes $\{u(\ell,\ m,\ t_k)\}$ como de $u(\ell,\ m,\ t)$. Nótese que este teorema es válido si $t_k \epsilon \bar{\tau}(i,\ j)$, solo que entonces en el inciso a) $t \epsilon\ \bar{\tau}\ (i,\ j)$.

Los términos "resultante" y "descomposición" provienen de que las ecas 3.1 y 3.2 son idénticas a las que se emplean en mécanica para la composición y descomposición de fuerzas paralelas (la ec 3.2, por ejemplo, corresponde a

$\ell = S(i)$, $m = S(j)$. Los volúmenes de trabajo realizados en los intervalos i, j no se alteran si este conjunto de transportes se sustituye por cualquiera de a) o b):

a) un solo transporte $u(\ell, m, t)$, llamado *resultante*, dado por

$$u(\ell, m, t) = \sum_{k=1} u\ (\ell, m, t_k) \tag{3.1}$$

donde el tiempo t de llegada a m está dada por

$$t = \sum t_k\, u(\ell, m, t_k) / u(\ell, m, t) \tag{3.2}$$

cuando $u(\ell, m, t) > 0$, en cuyo caso $t \varepsilon\ \tau(i, j)$

b) una pareja de transportes $u\ (\ell, m, \alpha^1_{ij})$, $u(\ell, m, \alpha^2_{ij})$, llamada *descomposición en extremos* que son cero si $u(\ell, m, t) = 0$, y que en caso contrario estan dados por:

$$u(\ell, m, \alpha^1_{ij}) = \frac{\alpha^2_{ij} - t}{\alpha^2_{ij} - \alpha^1_{ij}}\ u\ (\ell, m, t) \tag{3.3}$$

$$u(\ell, m, \alpha^2_{ij}) = \frac{t - \alpha^1_{ij}}{\alpha^2_{ij} - \alpha^1_{ij}}\ u\ (\ell, m, t) \tag{3.4}$$

donde $u\ (\ell, m, t)$ está definido por las expresiones 3.1, 3.2 y

$$\alpha^1_{ij} \equiv \text{mín}\ \tau(i, j),\ \alpha^2_{ij} \equiv \text{máx}\ \bar{\tau}\ (i, j) \tag{3.5}$$

Además, obviamente $u(\ell, m, \alpha^1_{ij}) + u(\ell, m, \alpha^2_{ij}) = u\ (\ell, m, t)$

la ecuación de momentos, donde el punto de aplicación de la "fuerza" $u(\ell, m, t')$ esta dada por t).

Una observación importante es que si bien desde el punto de vista de la condición C2 los transportes $\{u(\ell, m, t_k)\}$, $u(\ell, m, t)$ y $\{u(\ell, m, \alpha^1_{ij})$, $u(\ell, m, \alpha^2_{ij})\}$ son equivalentes, desde el punto de vista de la condición C1 no se puede hacer ninguna implicación general; es decir, C1 puede cumplirse cuando se considera $\{u(\ell, m, t_k)\}$ y no cumplirse para las otras dos alternativas o recíporcamente, etc, (ver ejemplo de la fig 7). Esto conduce a que el teorema 3 permite eludir la no numerabilidad del conjunto de variables O_1, pero a cambio de ello la condición C1 puede violarse en las intersecciones $\tau(i,j)$. Si se formula un nuevo problema, que se denota por P2, en el que únicamente se permite un solo transporte de $S(i)$ a $S(j)$ por cada intersección $\tau(i, j) \neq 0$, entonces el número total de variables de P2 es finito y si bien P2 garantiza C1 fuera de las intersecciones dentro de ellas puede no ser satisfecha. Para resolver esta dificultad pueden buscarse descomposiciones (de los transportes en intersección naturalmente) que cumplen C1, pero el problema en general puede ser muy combinatorio. Lo que se propone es resolver P2 con los datos de P1, y si para alguna intersección se viola C1, subdividir en dos dichos periodos hábiles (fig 8) y resolver un nuevo problema P2 con estas subdivisiones, el cual garantizará que la condición C1 se cumpla al menos en la frontera de esos periodos subdivididos y que antes no se cumplia. El conjunto de datos de P2 que es modificado en cada ciclo de este tipo, y que se denota por $\mathcal{D}$, es el siguiente

$$\mathcal{D} \equiv \{I', I'_p, S'(.), T'_0., T'_1.\} \qquad (3.6)$$

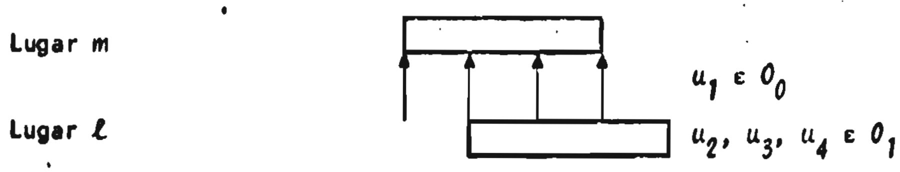


Fig 5. Transportes oportunos de ℓa m

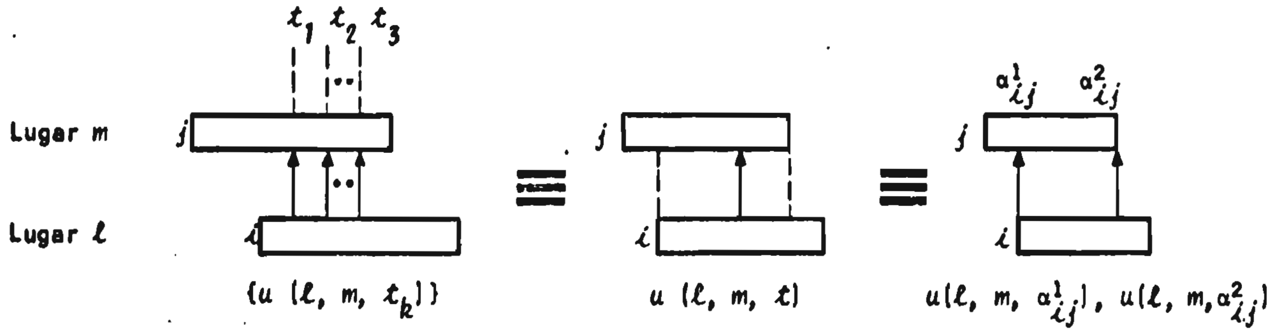
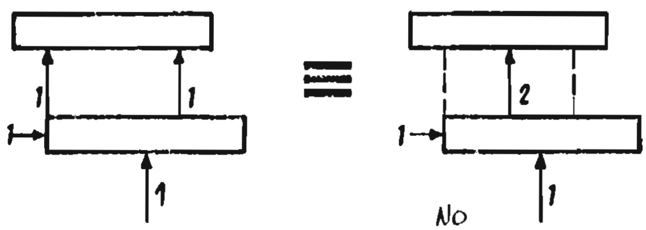


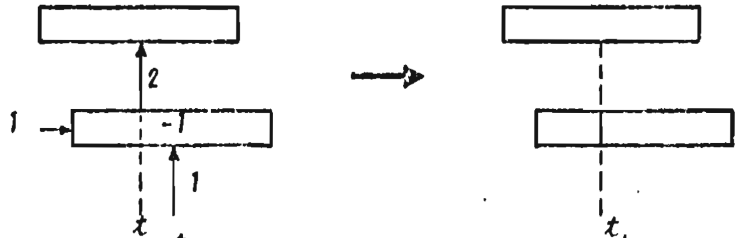
Fig 6. Ilustración del teorema 3



a) se cumple C1

b) No se cumple C1 para el transporte resultante

Fig 7. Hay equivalencia respecto a C1 y no respecto a C2



a) Al tiempo t^+ la solución de P2 viola C1

b) Al tiempo t^+ la solución del nuevo P2 cumplirá C1

Fig 8. Subdivisión de periodos hábiles cuando C1 se viola en intersección donde inicialmente $I' = I$, $I'_p = I_p$, $S'(.) = S(.)$, $T'_{0i} = T_{1i}$ $i \epsilon I$. Con esta notación, cuando se desee diferenciar el problema P2 para distintos ciclos, se escribirá P2 (D)en lugar de P2.

A continuación se formaliza el problema P2 y se describe el procedimiento para resolver P1 como una sucesión finita de problemas P2(D). El capítulo siguiente se dedica a la solución de P2.

3.2 *El problema P2*

Puede definirse en forma abreviada como sigue:

Problema P2. Se supone que se cumplen las desigualdades del triángulo 2.6. Econtrar $\{u\} < 0$ de modo que:

a) para cada $\tau(i, j) \neq \phi$ se tiene a lo más un transporte $u(S(i), S(j), t_{ij}) > 0$ con $t_{ij} \epsilon \tau(i, j)$ (obviamente $u(S(i), S(j), t_{ij}) \epsilon 0_1$)

b) la función 2.1 es mínima

c) se cumplen las restricciones R1, R2, R4 y R5 del teorema 2.

Nótese la ausencia de la restricción R3 del teorema 2.

Para expresar analíticamente este problema conviene definir los siguientes conjuntos:

$$\Omega \equiv \{ \ell, j) | (\ell, j) \epsilon \Lambda \times I, S(j) \neq \ell, T_{0j} - \theta(\ell, S(j) \epsilon \tau(\ell)\} \quad (3.7)$$

$$\Phi \equiv \{(i,j) | (i, j) \epsilon I \times I, \tau(i,j) \neq \phi\} \quad (3.8)$$

Es claro que por las ecs 2.7 y 2.8, se tiene

$$u(\ell,\ S(j),\ T_{0j}) \in O_0 \leftrightarrow (\ell,\ j) \in \Omega \tag{3.9}$$

$$u(S(i),\ S(j),\ t) \in O_1 \leftrightarrow (i,j) \in \Phi \tag{3.10}$$

Por tanto, se puede hacer el siguiente cambio de notación:

para $(\ell,\ j) \in \Omega$ el transporte $u\ (\ell,\ S(j),\ T_{0j})$ se representa simplemente por $Z_{\ell j}$

para $(i,\ j) \in \Phi$ el transporte $u\ (S(i),\ S(j),\ T_{ij})$ se representa por la pareja $(V_{ij},\ t_{ij})$, por lo que se entiende que

$$V_{ij} = u(S(i),\ S(j),\ t_{ij})$$

Para escribir analíticamente las restricciones R1, R2, R4 conviene expresar en forma abreviada condiciones como "conjunto de transportes $Z_{\ell j}$ que salen de ℓ antes del tiempo T_{0i} con $S(i) = \ell$," etc. Esta condición se puede expresar también como

$$\{\ j \mid (S(i),\ j) \in \Omega,\ S(i) = \ell,\ T_{0i} - \sigma(i,\ j) < T_{0i}\}$$

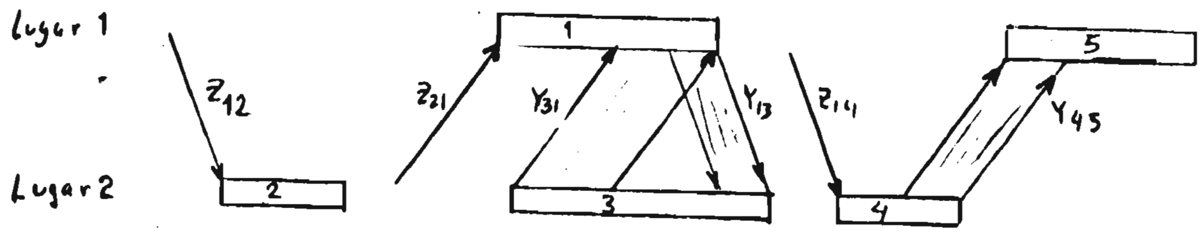
lo cual resultaría demasiado complicado al considerar sumatorias. Estas dificultades en la notación, respecto al capítulo anterior, provienen desde luego de la distinción entre los transportes de los conjuntos O_0 y O_1. En la tabla 1 aparecen las definiciones de los conjuntos de índices (ver ejemplo de la fig 9) que se usan en la formulación analítica de P2, la cual se presenta a continuación.

TABLA 1. NOTACION (SUBCONJUNTOS DE Ω Y Φ)

CONDICIONES		CARACTERIZACION
Llegan al lugar ℓ	FI	$\Omega^{\ell} \equiv \{ m, j) \mid (m, j) \in \Omega, S(j) = \ell \}$
	EI	$\Psi^{\ell} \equiv \{ j, k) \mid (j, h) \in \Phi, S(k) = \ell \}$
Salen del lugar ℓ	FI	$\underline{\Omega}^{\ell} \equiv \{ j \mid (\ell, j) \in \Omega \}$
	EI	$\underline{\Psi}^{\ell} \equiv \{ (k, j) \mid (k, j) \in \Phi, S(k) = \ell \}$
Llegan al lugar $S(i)$ antes de T_{0i}	FI	$\Omega_{i}^{<} \equiv \{ (m, j) \mid (m, j) \in \Phi^{\ell}, T_{0j} < T_{0i} \}$
	FI	$\Psi_{i} \equiv \{ (j, K) \mid (j, k) \in \Psi^{S(i)}, T_{0k} < T_{01} \}$
Salen del lugar $S(i)$ antes de T_{0i}	FI	$\underline{\Omega}_{i} \equiv \{ j \mid (S(i), j) \in \underline{\Omega}^{S(i)}, T_{0j} - \sigma(i, j) < T_{0i} \}$
	EI	$\underline{\Psi}_{i} \equiv \{ (k, j) \mid (k, j) \in \Psi^{S(i)}, T_{0k} < T_{0i} \}$
Llegan a $S(i)$ al tiempo T_{0i} o antes	FI	$\Omega_{i}^{\leq} \equiv \{ (m, j) \mid (m, j) \in \Omega^{\ell}, T_{0j} \leq T_{0i} \}$
Llegan a $S(i)$ dentro del periodo i	EI	$\Phi_{i} \equiv \{ j \mid (j, i) \in \Phi \}$
Salen de $S(i)$ dentro del periodo i	EI	$\underline{\Phi}_{i} \equiv \{ j \mid (i, j) \in \Phi \}$

FI = fuera de intersección

EI = en intersección



$I^- = \{1, 2, \ldots, 5\}, \Lambda = \{1, 2\}$

$\Omega = \{(1, 2), (2, 1), (1,4)\},$ $\Phi = \{(3, 1), (1,3), (4,5)\}$

$\Omega^2 = \{(1,2), (1,4)\}$ $\Psi^2 = \{(1, 3)\}$

$\underline{\Omega}^2 = \{(2, 1)\}$ $\underline{\Psi}^2 = \{(3,1), (4,5)\}$

$\Omega_4^< = \{(1, 2)\}$ $\Psi_4 = \{(1, 3)\}$

$\underline{\Omega}_4 = \{(1, 2)\}$ $\underline{\Psi}_4 = \{(1, 3)\}$

$\Omega_4^{\leq} = \{(1, 2), (1, 4)\}$ $\underline{\Phi}_4 = \{(4, 5)\}$

$\Phi_4 = \{\phi\}, \Phi_3 = \{1, 2\}$

Fig 9. Ejemplo de Transportes oportunos de máquinas entre dos lugares

Problema P2. Se supone que se cumplen las desigualdades, 2.6.

Encontrar

$$\{Z_{\ell i} \mid (\ell, i) \varepsilon\, \Omega\},\ \{Y_{ij},\ t_{ij} \mid (i, j)\ \varepsilon\ \Phi\}$$

tal que

$$\text{Mín} \sum_{(\ell,i)\varepsilon\Omega} C(\ell,\ S(i))\ Z_{\ell i} + \sum_{(i,j)\varepsilon\Phi} C\ (S(i),\ S(j)\ )\ Y_{ij} \tag{3.11}$$

tal que se cumplen las restricciones R1, R2, R4 y R5, respectivamente:

(R1) Condición C1 al final de la planeación

$$\sum_{j\varepsilon\underline{\Omega}^{\ell}} Z_{\ell j} - \sum_{(m,j)\varepsilon\Omega_i^{<}} Z_{mj} + \sum_{(k,j)\varepsilon\underline{\Psi}^{\ell}} Y_{kj} - \sum_{(j,k)\varepsilon\Psi^{\ell}} Y_{jk} \leq E_{\ell},\ \ell\varepsilon\Lambda \tag{3.12}$$

(R2) Condición C1 al inicio de cada periodo hábil

$$\sum_{j\varepsilon\underline{\Omega}_{\to i}} Z_{S(i)j} - \sum_{(m,j)\varepsilon\Omega_i^{<}} Z_{mj} + \sum_{(k,j)\varepsilon\underline{\Psi}_{\to i}} Y_{kj} - \sum_{(j,k)\varepsilon\Psi_i} Y_{kj} \leq E_{S(i)}\quad i\varepsilon I \tag{3.13}$$

(R4) Condición C2 para cada trabajo

$$\sum_{i\varepsilon Ip} \{(T_{1i}-T_{0i}) - \sum_{j\varepsilon\underline{\Omega}_{\to i}} Z_{S(i)j} + \sum_{(m,j)\varepsilon\Omega_i^{<}} Z_{mj} - \sum_{(k,j)\varepsilon\underline{\Psi}_{\to i}} Y_{kj} + \sum_{(j,k)\varepsilon\Psi_i} Y_{jk}$$

$$\sum_{j\varepsilon\Phi_i} (T_{1i} + o(i,\ j)\ -\alpha^{1}_{ij})\ Y_{ij} + \sum_{j\varepsilon\underline{\Phi}_{\to i}} (T_{1i} - \alpha^{1}_{ji}) Y_{ji}\} \geq W_p - \sum_{i\varepsilon Ip} (T_{1i} - T_{0i}) E_{S(i)},\ \ p\varepsilon K \tag{3.14}$$

(R5)

$$Y_{ij},\ Z_{\ell i} \geq,\ Y_{ij},\ Z_{\ell i}\ \text{enteros} \tag{3.15}$$

y además

$$t_{ij} \in \overline{\tau}\,(i,\ j) \tag{3.16}$$

3.3 *Algoritmo de solución*

Se propone el siguiente algoritmo para resolver el problema P1 cuando las desigualdades 2.6 se cumplen:

Paso 0 Hacer $I' = I$, $I'_p = I_p$, $S'(.) = S(.)$, $T'_0 = T_0.$, $T'_1. = T_1.$

Paso 1 Resolver P2(D) (ver ec 3.6). Sea $\{Z_{ej}\}$, $\{Y_{ij}, t_{ij}\}$ esta solución

Paso 2. Sea el subconjunto $V < \Phi$ tal que para $(i,\ j)\in V$ se tiene que al tiempo $t_{ij} - \sigma(i,\ j)$ se viola C2 , en el lugar $S(i)$. Si V es vacío la solución de P2(D) es solución óptima de P1 y el proceso termina. En caso contrario continuar el paso 3.

Paso 3 Hacer modificaciones en D, de modo que para cada $(i,\ j)\in V$ el periodo i quede subdividido al tiempo $t_{ij} - \sigma(i,j)$. Ir a 1.

El efecto del paso 3 es realmente introducir (cuando se violan) restricciones C1 en el interior de las intersecciones $\tau(i,\ j)$ del problema original, es decir, este algoritmo es simplemente un procedimiento de relajación sobre restricciones del tipo 2.2, las cuales son lineales en $u\ (\ell,\ m,\ t')$, asi que el lado izquierdo de 2.2 es una función convexa respecto de tales variables. Esta última condición garantiza que el procedimiento de relajación (Lasdon, pág 266) termina con un número finito de pasos.

En el siguiente capítulo se destaca que el paso 1 de este algoritmo, en el que se soluciona un problema tipo P2, consiste en resolver un programa lineal mixto al que se le designa por P3.

Obtenida una solución de P1, el teorema de descomposición puede ser útil para generar más soluciones óptimas de P1.

En los problemas prácticos resueltos este algoritmo resuelve el problema P1 en un solo ciclo, es decir, normalmente se resuelve un solo problema P2 y este cumple las condiciones C1 en el interior de las intersecciones. Esto se debe a que los transportes en intersección son menos "eficientes" que los transportes al inicio del periodo hábil. Además, cuando ocurre un transporte en intersección por lo general no ocurre el que circula en sentido contrario, así que las restricciones C1 al inicio de cada periodo hábil comúnmente cubren hasta el interior de los periodos hábiles.

4. TRANSFORMACION A UN PROGRAMA LINEAL MIXTO

4.1 *Empleo de programación lineal generalizada*

Aunque el problema P2 contiene un número menor de variables que P1, en P2 persisten las no linealidades, según se observa en las restricciones 3.14, las cuales contienen productos del tipo $t_{ij}\ v_{ij}$. Sin embargo, la condición 3.16 significa que el conjunto de valores de t_{ij} está limitado por un poliedro convexo, ya que

$$t_{ij} \in \bar{\tau}\ (i,\ j) \leftrightarrow \alpha^1_{ij} \leq t_{ij} \leq \alpha^2_{ij}$$

donde α^1_{ij} y α^2_{ij} están definidos por las ecs 3.3 y 3.4. Esta propiedad permite transformar P2 en un programa lineal mediante el método, introducido por Wolfe (Danzing, Lasdon), de programación lineal generalizada, el cual consiste esencialmente en expresar la variable contenida en el poliedro convexo, en este caso t_{ij}, como una combinación convexa de los extremos del poliedro, en este caso α^1_{ij} , α^2_{ij}, (i, j) ϵ Φ, los coeficientes de esta combinación convexa están relacionados como se ve a continuación, con la descomposición en extremos del teorema 3. Si el transporte en el extremo derecho de la intersección $\tau(i, j)$ se denota por X_{ij} (fig 6), por la ec 3.4 se tiene:

$$X_{ij} \equiv \frac{t_{ij} - \alpha^1_{ij}}{\alpha^2_{ij} - \alpha^1_{ij}} \; Y_{ij} \qquad (i, j) \in \Phi \qquad (4.1)$$

en que $X_{ij} \leq Y_{ij}$. Despejando y_{ij} en la ec 4.1 se obtiene:

$$t_{ij} = \alpha^1_{ij} + (\alpha^2_{ij} - \alpha^1_{ij}) \; X_{ij}/Y_{ij}, \quad (i, j) \in \Phi, \text{ si } Y_{ij} \neq 0 \qquad (4.2)$$

es decir

$$t_{ij} = (\; (y_{ij} - X_{ij}) \; \alpha^1_{ij} + X_{ij} \; \alpha^2_{ij}) \; \frac{1}{Y_{ij}} \; ; \text{ si } Y_{ij} \neq 0 \quad (4.3)$$

que es una combinación convexa de α^1_{ij}, α^2_{ij}. Identificando esta con la combinación convexa 3.2 del Teorema 3, se ve que la pareja $(Y_{ij} - X_{ij})$, X_{ij} es la descomposición en extremos de un transporte de Y_{ij} máquinas que llegan a $S(j)$ al tiempo t_{ij} (fig 6).

Si se sustituye la ec 4.2 en la 3.14, se obtiene un problema designado por P3, donde las restricciones correspondientes (ec 4.7) son ahora lineales, es decir, P3 es un programa lineal mixto. Dada una solución de P3, por medio de la ec 4.2 se obtiene la correspondiente solución de P2. A continuación se presente el problema P3, observándose que en la función objetivo no aparecen las variables X_{ij}.

Problema P3. Se supone que se cumplen las desigualdades, 2.6.

Encontrar

$$\{Z_{\ell i} \mid (\ell, i) \in \Omega\}, \{y_{ij}, t_{ij} \mid (i, j) \in \Phi\}$$

tal que

$$\text{Mín} \sum_{(\ell,i)\in\Omega} C(\ell, S(i))\, Z_{\ell i} + \sum_{(i,j)\in\Phi} C\,(S(i), S(j))\, y_{ij} \tag{4.4}$$

tal que se cumplen las restricciones R1, R2, R4 y R5, respectivamente:

(R1) Condición C1 al final de la planeación

$$\sum_{j\in\underline{\Omega}^{\ell}} Z_{\ell j} - \sum_{(m,j)\in\Omega_i^{\leq}} Z_{mj} + \sum_{(k,j)\in\underline{\Psi}^{\ell}} y_{kj} - \sum_{(j,k)\in\Psi^{\ell}} y_{jk} \leq E_{\ell}, \quad \ell\in\Lambda \tag{4.5}$$

(R2) Condición C1 al inicio de cada periodo hábil

$$\sum_{j\in\underline{\Omega}_i} Z_{S(i)j} - \sum_{(m,j)\in\Omega_i^{<}} Z_{mj} + \sum_{(k,j)\in\underline{\Psi}_i} y_{kj} - \sum_{(j,k)\in\Psi_i} y_{kj} \leq E_{S(i)} \quad i\in I \tag{4.6}$$

(R4) Condición C2 para cada trabajo

$$\sum_{i\in Ip} \{(T_{1i}-T_{0i}) - \sum_{j\in\underline{\Omega}_i} Z_{S(i)j} + \sum_{(m,j)\in\Omega_i^{<}} Z_{mj} - \sum_{(k,j)\in\underline{\Psi}_i} y_{kj} + \sum_{(j,k)\in\Psi_i} y_{jk}$$

$$\sum_{j\in\Phi_i} (T_{1i} + \sigma(i, j) - \alpha^1_{ij})\, y_{ij} + \sum_{j\in\underline{\Phi}_i} (T_{1i} - \alpha^1_{ji})\, y_{ji}\} + \sum_{j\in\Phi_i} (\alpha^2_{ij} - \alpha^1_{ij})\, X_{ij}$$

$$-\sum_{j\in\underline{\Phi}_i} (\alpha^2_{ji} - \alpha^1_{ji})\, X_{ji} \geq W_p - \sum_{i\in Ip} (T_{1i} - T_{0i})\, E_{S(i)}, \quad P\in K \tag{4.7}$$

$$X_{ij} \leq y_{ij} \tag{4.8}$$

y además $y_{ij}, Z_{\ell i} \geq 0$, $y_{ij}, Z_{\ell i}$ enteros (4.9)

4.2 *Ejemplo numérico*

Los datos están dados por:

Lugar	Inventario inicial	Tiempo (días) 1 2 3 4 5 6 7	Días-máquina	Costo de transporte Lugar 1	2	3
1	2	i=1	10	0	1	6
2	0	i=2	3	1	0	5
3	2	i=3 i=4	7, 4	6	5	0
4	∞			9	9	8

El problema P3 para este caso queda como

		2-1	1-2	3-1	1-3	3-2	2-3	2-1	1-2	3-1	1-3	3-2	2-3	2-1	3-1	3-2	4-1	4-2	4-3	4-4		
		FUNC OBJ					=	1	1	6	6	5	5	1	6	5	9	9	9	9		
Restricciones R4	1	-3	3	-3	3	0	0	4	-4	3	-3	0	0	5	5	0	5				≥	0
	2	3	-3	0	0	-2	2	-3	3	0	0	2	-2	-3	0	3		3				3
	3	0	0	3	-3	2	-2	0	0	-3	3	-3	3	0	-3	-3			3			1
	4	0	0	3	-3	2	-2	0	0	-3	3	-1	1	0	-1	-1				1		2
Ecs 4.8		-1						1														
			-1			0			1			0,										
				-1						1												
					-1						1							0				0
			0			-1			0			1										
							-1						1									
R2 intervalo	2													-1	0	1		1				0
	3									0				0	-1	-1			1			-2
	4													0	0	0				1		-2
R1 intervalo	1							-1	1	-1	1	0	0	1	1	0	1					-2
	2							1	-1	0	0	-1	1	-1	0	1		1				0
	3							0	0	1	-1	1	-1	0	-1	-1			1			-2

Por sencillez, en este ejemplo se consideran tiempos de transporte cero y además cada trabajo tiene asociado en solo periodo hábil. Una solución óptima es: $Z_{31} = 2$, $Y_{12} = 4$, $X_{12} = 2$, $Y_{23} = 4$, $X_{23} = 2.5$, función objetivo $= 36$, el resto de variables cero. La solución correspondiente de P2 está dada por (ec 4.2) $t_{12} = 2.5$, $t_{23} = 10/3$ (fig 10). Esta solución cumple la condición C1 en el interior del intervalo 2 y por tanto es solución del problema P1. Otra solución, obtenida descomponiendo el transporte Y_{12}, es la de la fig 11.

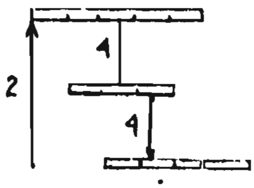


fig. 10

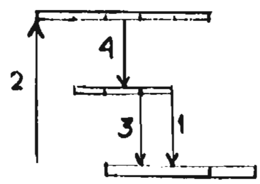


fig 11

4.3 *Solución por método de Benders*

Aunque el programa lineal mixto P3 puede resolverse por distintos métodos, el procedimiento de partición de Benders resulta en este caso atractivo no solo por su eficiencia computacional sino porque exhibe cierta estructura del problema. Sobre este método proceden consultarse las refs 3 y 4.

El programa P3 tiene la siguiente forma: dadas las matrices C_1, A_1, A_2, A_3, calcular y, u tales que

$$\text{mín } C_1 \, y \tag{4.10}$$

con las restricciones

$$A_1 u + A_2 \, y \geq b \tag{4.11}$$

$$A_3 \, y \geq b_3 \tag{4.12}$$

$$y, u \geq 0 \tag{4.13}$$

$$y \text{ entero} \tag{4.14}$$

El método de partición consiste esencialmente en descomponer este en dos problemas interelacionados, uno que contiene únicamente variables reales (u) y otro solamente con variables enteras (y), de tal manera que las soluciones de ambos determinan el óptimo del problema original. Sin entrar en más detalles, el procedimiento de Benders, al que aquí se le hace una pequeña modificación relativa al manejo de la matriz A_3, conduce a resolver alternadamente los siguientes problemas:

Subproblema real:

$$\text{máx } w\ (b - A_2 y) \tag{4.15}$$

$$wA_1 \leq 0 \tag{4.16}$$

$$\sum w_i \leq M \text{ (número grande)} \tag{4.17}$$

$$w \geq 0$$

Subproblema entero:

$$\text{mín } Z \tag{4.18}$$

con las restricciones

$$A_3 y \geq b_3 \tag{4.19}$$

$$Z > C_2 y + u\ (b - A_2 y) \tag{4.20}$$

y entero no negativo

El algoritmo es el siguiente:

Paso 0. Determinar una solución factible $\bar{w}$ del problema real (en nuestro caso siempre existe pues lo es $w = 0$).

Paso 1. Resolver el problema entero para $w = \bar{w}$, con lo que se obtiene la solución $y = \bar{y}$, $Z = \bar{Z}$. Si Z no está acotado para abajo, hacer $\bar{Z}$ igual a cualquier número pequeño.

Paso 2. Resolver el problema real para $y = \bar{y}$ (la $\bar{y}$ del paso anterior), obteniéndose la solución $\bar{\bar{w}}$ (antes de llegar al óptimo, w se va a infinito, lo que hace activa la restricción (4.17)

Paso 3. Determinar $\overline{Z} - C_2 y \leq \bar{w}\,(b - A_2\overline{y})$. Si hay igualdad continuar al paso 4), si no ir al paso 1) y agregar $Z \geq C_2 y + \bar{u}\,(b_2 - A_2 y)$ al conjunto de es restricción 4.20. Una restricción en 4.20 puede eliminarse cuando deje de ser activa.

Paso 4. Usar $\overline{y}$ del paso 1 y resolver el problema.

mín $C_1 y$

con $A_1 u \geq b - A_2\overline{y},\ u \geq 0$

teniéndose la solución $\overline{x}$

Paso 5. La solución óptima es $\overline{x}, \overline{y}$

El problema real se programó siguiendo el método dual lexicográfico y el problema entero por el procedimiento de todos enteros.

El hecho de que el valor de la función objetivo (de P3) no dependa de las variables reales u (no enteras), se traduce en que la región factible del subprograma real es un cono convexo.

5. REFERENCIAS

1. Guillén, S T, "Optimización de la asignación y transporte de maquinaria", Informe a SOP, *Instituto de Ingeniería*, UNAM (dic 1971)

2. , "Optimal geographical distribution of heavy equipment", *ORSA/TIMS Joint National Meeting*, Boston Mass (abril 1974)

3. Geoffrion, A M, "Elements of large-scale mathematical programming", *Management Science*, Vol 16, No 11 (1970), pp 652-91

4. Hu, T C, "Integer programming and network flows", *Addison Wesley Publishing Co. Nueva York* (1969)

5. Lasdon, León S, "Optimization theory for large systems", *Macmillan Co., Nueva York* (1970)